UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 2001–2003

Controlo Óptimo Segundo Princípios Variacionais

Jorge Filipe Duarte Tiago

Orientado por:
Pablo Pedregal Tercero

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 2001–2003

Controlo Óptimo Segundo Princípios Variacionais

Jorge Filipe Duarte Tiago

Orientado por:
Pablo Pedregal Tercero

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar aos meus pais, por todo a ajuda que me foi dada durante este momento de aprendizagem. Sem eles, e sem o seu apoio às minhas decisões mais difíceis, o prazer de concluir este trabalho, nunca teria tido lugar.

Devo também agradecer ao Professor Pablo Pedregal, Professor Catedrático da Universidade de Castela-La Mancha, pela forma sábia com que me guiou durante este projecto e pela sua paciência e boa vontade na ultrapassagem de algumas dificuldades que surgiram face à distância geográfica.

Uma palavra de agradecimento também aos meus professores da Universidade de Évora, que nunca me deixaram sem uma opinião ou resposta, quando delas precisei.

Por fim, um profundo sentimento para com os colegas e amigos que principalmente neste passado recente, contribuíram para a estruturação do meu projecto de vida, no qual se insere esta dissertação.

ABSTRACT

Optimal Control Via Variational Principles

By reformulating the Optimal Control Lagrange Problem as a typical problem from the Calculus of Variations that incorporates the state equation and other constraints on the state and on the control, one can ensure both problems are equivalent and then prove the existence of optimal solutions by standard techniques as well as sharp existence results in special situations.

In addition, some optimal solutions can be numerically approximated by using directly this reformulated problem.

RESUMO

Reformulando o problema de Lagrange do Controlo Óptimo num problema de Cálculo das Variações que incorpora a equação diferencial do sistema, bem como outras restrições sobre a trajectória e o controlo, podemos garantir que ambos os problemas são equivalentes e provar a existência de solução óptima através de tecnicas usuais e de resultados recentes em casos especiais.

Além disso, usamos a reformulação variacional para aproximar numericamente algumas trajectórias e controlos óptimos.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho é apresentada uma abordagem diferente aos problemas de controlo óptimo, nomeadamente, aos problemas vulgarmente classificados como de Lagrange com valores na fronteira.

A motivação para o estudo desta área da Matemática deve-se à enorme aplicabilidade que esta encontra em várias campos, nomeadamente em Economia e em Engenharia, onde procura resolver desde os classicos problemas de optimização aeroespacial ([3]), até problemas mais recentes de optimização de estruturas, como a estabilização de vigas ou barras compostas por diferentes materiais ([10],[11] e [12]).

A forma clássica de abordar os referidos problemas passa pelo uso do Príncipio do Máximo de Pontryagin (PMP), bem como, do Princípio da Programação dinâmica e equação de Hamilton-Jacobi.

As versões mais recentes e mais gerais destes métodos, que tentam conjugar condições necessárias, como as descritas pelo (PMP), com as condições suficientes para garantir a existência de solução óptima, ao mesmo tempo que procuram evitar condições fortes, como a suavidade das funções envolvidas, passam cada vez mais pela reformulação em problemas do Cálculo das Variações.

Na prática, estes métodos obrigam normalmente à resolução de equações diferenciais, ou mais frequentemente, à aproximação numérica de soluções destas.

Não se pretende aqui fugir à reformulação variacional, mas seguindo a linha do que foi feito em [10], escolher uma tal reformulação do problema de controlo que nos permita evitar a resolução de equações diferenciais, incluindo-as na própria reformulação. Precisemos melhor esta ideia:

É nossa intenção encontrar o par de funções (y, u) que minimize o funcional

$$I(y,u) = \int_0^T F(y(t), u(t))dt$$

e que simultaneamente verifique uma relação diferencial do tipo

$$y'(t) = f(y(t), u(t)),$$

a qual pode representar um sistema de equações diferenciais. O par estará ainda sujeito a certas limitações e a trajectória minimizante deverá verificar condições de fronteira previamente estabelecidas. Em suma, o nosso problema de controlo óptimo é

$$(P) \quad \text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^T F(y(t),u(t))dt$$

sujeito a

$$y'(t) = f(y(t),u(t)),$$
$$u(t) \in K \subseteq R^m, \quad y(t) \in L \subseteq R^n, \ \forall t \in [0,T],$$

sendo

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

e com condições iniciais

$$y(0) = y_0 \text{ e } y(T) = y_T.$$

Com uma função φ que a cada y atribua o mínimo valor de F quando as várias condições são verificadas, podemos formular um problema variacional cuja solução permitirá obter o controlo óptimo a partir da resolução de uma equação não diferencial. Ou seja, definindo

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} \inf\limits_{u\in K}\{F(y,u) : \xi = f(y,u)\} & \text{se} \quad \begin{matrix}\{u \in K \ : \xi = f(y,u)\} \neq \emptyset \\ \text{e} \quad y \in L\end{matrix} \\ +\infty & \text{c.c} \end{cases} \tag{1.1}$$

obtemos uma função que ficará bem definida se K for fechado, se F for semicontínua inferior e verificar

$$\lim_{u\in K, |u|\to\infty} F(y,u) = +\infty$$

e se f for continua.

Além disso, se a nossa busca se restringir a um par (y,u) tal que y seja absolutamente contínua e u mensurável, então o problema (P) é equivalente ao problema

$$(VP) \quad \min J(y) = \int_0^T \varphi(y(t),y'(t))dt$$

com $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$, no sentido em que o ínfimo de J é também o ínfimo de I. Mais, para uma solução óptima de (VP) é garantida a existência de um controlo u tal que (y,u) é óptimo para (P).

Seguindo esta linha de ideias, podemos garantir a existência de solução para o problema de controlo óptimo a partir de resultados classicos do Cálculo das Variações aplicados a (VP). Além disso, conseguimos concluir quais as condições que (P) deverá verificar para assegurar a existência de solução. Neste âmbito, obtemos o seguinte resultado de existência, que na sua essência, corresponde a um classico resultado que pode ser encontrado, por exemplo, em [3]:

(Teorema) *Sejam F, f, K e L os ingredientes de (P). Consideremos que F é semi-continua inferior, f é continua, e K e L são dois conjuntos fechados. Consideremos também que são verificadas as seguintes condições:*

i) K é limitado, ou então F é coerciva com respeito a K no sentido

$$\lim_{u\in K, |u|\to\infty} F(y,u) = +\infty, \qquad \textit{uniformemente em } (y,\xi);$$

ii) Fixando $y \in \mathbb{R}^n$ o conjunto

$$E_y = \{(\xi, v) : \exists u \in K, v \geq F(y,u), \xi = f(y,u), v \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

é convexo, ou então tem de se verificar a condição

$$\forall u_1, u_2 \in K, \lambda \in]0,1[, \quad \exists u \in K : \quad f(u) = \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2),$$

$$||f(u_1) - f(u_2)||F(u) \leq ||f(u) - f(u_2)||F(u_1) + ||f(u) - f(u_1)||F(u_2);$$

iii) F é limitada inferiormente e, ou K é limitado, ou

$$\lim_{||f(y,u)||\to+\infty} \frac{F(y,u)}{||f(y,u)||} = +\infty.$$

Então existe uma função absolutamente contínua y e uma função mensurável u, tal que o par (y,u) é uma solução óptima de (P).

As condições deste resultado garantem que φ definida como em (1.1) é semicontínua inferior, B-mensurável, tem crescimento superlinear e é convexa na segunda variável, permitindo assim a aplicação a (VP) de uma versão do clássico Teorema de Existência de Tonelli.

Quando debruçados apenas no caso unidimensional, um resultado recente que pode ser encontrado na pré-publicação [8] (continuação de [5] e [9]), permite-nos substituir a condição de convexidade na segunda variável, apenas pela "convexidade na origem", ou mais concretamente, pela igualdade

$$\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)$$

em que φ^{**} significa a função bipolar de φ. Com isto, conseguimos um novo resultado de existência para (P), que substitui o resultado acima (ver [13]), mas com uma condição de convexidade de verificação mais fácil:

(Teorema) Consideremos o caso particular de (P) em que $n = 1$, ou seja, o caso em que $y(t) \in L \subseteq \mathbb{R}$ e f toma valores reais . Além disso, consideremos que F é semicontínua inferior, f é contínua, K e L são dois conjuntos fechados e por fim, que são verificadas as seguintes condições:

i) K é limitado, ou então F é coerciva com respeito a K no sentido

$$\lim_{u \in K, |u| \to \infty} F(y, u) = +\infty, \quad \textit{uniformemente em } (y, \xi);$$

ii) F é limitada inferiormente e, ou K é limitado, ou

$$\lim_{|f(y,u)| \to +\infty} \frac{F(y, u)}{|f(y, u)|} = +\infty;$$

iii) Para qualquer $y \in L$ temos que $f(y, u)$ é sempre não negativa ou sempre não positiva em K. Caso contrário, verifica-se

$$\max_{u \in K,\ f(y,u)<0} \frac{F(y, u) - F(y, u_0)}{f(y, u)} \leq \min_{u \in K,\ f(y,u)>0} \frac{F(y, u) - F(y, u_0)}{f(y, u)}$$

com u_0 tal que $F(y, u_0) = \min_{u \in K}\{F(y, u) : f(y, u) = 0\}$.

Então existe uma função absolutamente contínua y e uma função mensurável u, tal que o par (y, u) é uma solução óptima de (P).

No que diz respeito à procura propriamente dita da solução, quando encontrada a trajectória óptima y (e consequentemente y'), será relativamente simples encontrar o controlo u, bastando para isso, para cada $t \in [0, T]$, procurar $u(t)$ que verifique simultaneamente

$$\varphi(y(t), y'(t)) = F(y(t), u(t)) \text{ e } y'(t) = f(y(t), u(t)).$$

É no entanto necessário encontrar y primeiro, ou seja, encontrar a solução do problema variacional (VP).

Dado que φ poderá verificar condições fracas, nomeadamente no que diz respeito à diferenciabilidade (pois φ não é necessariamente contínua e pode tomar valores infinitos), será mais produtivo optar por uma aproximação numérica da solução óptima para (VP) do que resolver as tradicionais equações de Euler-Lagrande ou Dubois-Raymond, que podem tornar-se complicadas por φ tomar valores infinitos abruptamente.

Assim, e no que diz respeito a problemas de uma dimensão, é apresentado um algoritmo de fácil implementação em Matlab, que assenta na discretização de $J(y)$, e dá-nos uma aproximação contínua e seccionalmente linear da solução óptima de problemas do tipo (VP).

Ilustramos a aplicação deste método com um exemplo clássico do Cálculo Variacional para depois abordarmos alguns exemplos de problemas de controlo óptimo. Para esses, após determinarmos explicitamente a sua reformulação variacional, apresentamos graficamente as aproximações numéricas das soluções obtidas, bem como os respectivos controlos, encontrados a partir dessas soluções. É de notar que estes controlos serão necessariamente seccionalmente lineares. Por exemplo, quando consideramos o problema de Controlo Óptimo

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 u(t)^4 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + u(t)y(t) = u^2(t) \text{ e } |u(t)| \leq 1, \ \forall t \in [0,1],$$

com condições iniciais $y(0) = 0.5$ e $y(1) = 1.5$, cuja reformulação variacional é dada por

$$(VP) \quad \min J(y) = \int_0^1 \varphi(y(t), y'(t))dt$$

com $y(0) = 0.5$ e $y(1) = 1.5$ com

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y \leq 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y > 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

obtemos, aplicando o algoritmo em Matlab, o par óptimo (y^*, u^*) representado na Figura 1.1:

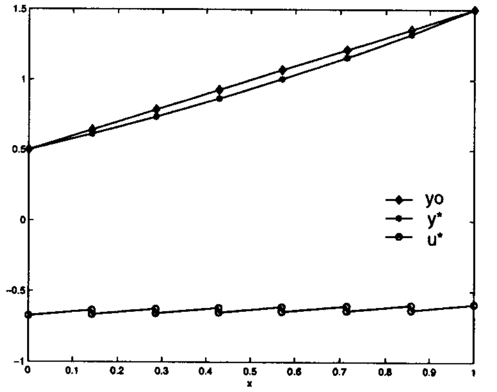

Fig. 1.1: Par óptimo (y^*, u^*)

Antes da procura de solução para tais problemas, debruçamo-nos um pouco sobre a existência dessa solução, aproveitando para aplicar o resultado de existência sobre (P). Nesta altura, aproveitamos também para vericar as condições deste resultado em alguns problemas de controlo óptimo de duas dimensões, relacionados com modelos classicos do pêndulo, no entanto, deixamos a busca de solução para trabalhos posteriores.

Com isto, e após um apêndice com alguns fundamentos e demontrações da teoria aqui utilizada, fica completo um trabalho bastante gratificante sobre uma pequena parte da entusiasmante área da Matemática que é o Controlo Óptimo.

Desde a modelação de problemas à simulação de soluções, um trabalho com esta estrutura sujeita-nos a várias experiências que levam por exemplo, a uma melhor compreenção dos conceitos físicos envolvidos nos problemas, ou das técnicas que permitem identificar as características das soluções que melhor as aproximam das soluções reais. Mais, ajuda-nos a compreender que tipo de resultados deveremos utilizar e quais as relações entre diferentes problemas de optimização. Com isto, somos forçados a utilizar instrumentos matemáticos avançados da Análise Multívoca, Análise Convexa e bem como de outros campos da Análise Funcional. Além disso, e mesmo para quem não tem experiência, temos um bom motivo para aproveitar as vantagens da Análise Numérica e da Tecnologia, experimentar as dificuldades e os prazeres da programação em Matlab, enquanto vemos as soluções a surgirem.

Em suma, o trabalho que se segue, não pretende ser uma monografia sobre o Controlo Óptimo, mas representa um amadurecimento no modo de utilizar a Matemática na compreensão do Real, e culmina com uma profunda vontade de continuar por estes campos onde há muito por conhecer.

2. PROBLEMA DE CONTROLO ÓPTIMO E REFORMULAÇÃO VARIACIONAL EQUIVALENTE

Como vimos, o problema em análise tem a seguinte formulação:
(P) Minimizar

$$I(y,u) = \int_0^T F(y(t), u(t))dt$$

sujeito a

$$y'(t) = f(y(t), u(t)), \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} u(t) \in K \subseteq R^m, \quad y(t) \in L \subseteq R^n, \forall t \in [0,T], \\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \text{ e } y(T) = y_T. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Podemos definir uma nova função densidade

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in K} \{F(y,u) : \xi = f(y,u)\} & \text{se } y \in L \text{ e } \{u \in K \ : \xi = f(y,u)\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c} \end{cases}$$

e formular o problema variacional

$$(VP) \quad \min J(y) = \int_0^T \varphi(y(t), y'(t))dt$$

com

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

e

(2.2) $y(0) = y_0$ e $y(T) = y_T$.

Com vista a garantir que φ está bem definida, isto é, que realmente é obtido através de um mínimo, admito também que:

i) K é fechado. Além disso, K deve ser limitado ou então F deverá ser coerciva com respeito a K no sentido

$$\lim_{u \in K, |u| \to \infty} F(y,u) = +\infty, \quad \text{uniformemente em } (y, \xi) \tag{2.3}$$

o que significa que

$$\forall M > 0, \quad \forall R > 0, \quad \exists P_{M,R}, \quad \forall u, y, \xi,$$

$$(|u| > P_{M,R}, \quad ||(y,\xi)|| \leq R, \quad u \in \{u \in K : \xi = f(y,u)\} \Rightarrow F(y,u) > M);$$

ii) F é semicontinua inferiormente, e f é continua nas variáveis y e u.

Vejamos que estas condições são realmente suficientes para garantir que φ está bem definida.

Comecemos por verificar que φ nunca toma o valor $-\infty$:
supondo que sim, isto é, supondo que para

$$y \in L, \ \xi \in \mathbb{R}^n \text{ fixos , para os quais existe } u \in K \text{tal que } \xi = f(y,u)$$

temos

$$\inf_{u \in K} \{F(y,u) : \xi = f(y,u)\} = -\infty,$$

então

$$\forall N < 0 \quad \exists u \in K, \xi = f(y,u) \quad \text{tal que} \quad F(y,u) < N$$

e portanto,

$$\forall (N_n) \to -\infty \quad \exists (u_n) \subset K, \quad \xi = f(y,u_n), \quad F(y,u_n) < N_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A partir da condição de coercividade, podemos obter imediatamente o seguinte resultado

Proposição 2.1.

$$\forall M > 0, \quad \forall R > 0, \quad \exists P_{M,R}, \quad \forall u, y, \xi,$$

$$(\quad ||(y,\xi)|| \leq R, \quad u \in \{u \in K : \xi = f(y,u)\}, \quad F(y,u) \leq M \Rrightarrow |u| \leq P_{M,R}).$$

Dado que $F(y,u_n) < N_n < M$(constante) porque (N_n) é decrescente, podemos aplicar este resultado concluindo que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ é limitada e portanto, contem uma subsucessão (u_{n_k}) convergente para certo $\bar{u} \in K$ (K é fechado). Por causa da semicontinuidade inferior de F, temos

$$\liminf F(y,u_{n_k}) \geq F(y,\bar{u}) > -\infty.$$

Por outro lado, dado que $F(y,u_{n_k})$ é uma subsucessão de $F(y,u_n)$ que é uma sucessão infimizante, verifica-se

$$\liminf F(y,u_{n_k}) = \lim F(y,u_{n_k}) = \lim F(y,u_n) = -\infty$$

donde $-\infty \geq F(y, \bar{u}) > -\infty$ o que é uma contradição e portanto

$$\inf_{u \in K} \{F(y, u) : \xi = f(y, u)\} > -\infty.$$

Considerando mais uma vez, uma sucessão (u_n) tal que

$$\lim F(y, u_n) = \inf_{u \in K} \{F(y, u) : \xi = f(y, u)\}$$

podemos, usando uma argumentação semelhante, concluir que existe uma subsucessão (u_{n_k}) convergente para certo $\bar{u} \in K$ tal que

$$\liminf F(y, u_{n_k}) = \inf_{u \in K} \{F(y, u) : \xi = f(y, u)\} \geq F(y, \bar{u}).$$

Como f é continua, $\xi = f(y, \bar{u})$ donde $\inf_{u \in K} \{F(y, u) : \xi = f(y, u)\}$ é na realidade

$$\min_{u \in K} \{F(y, u) : \xi = f(y, u)\} = F(y, \bar{u})$$

e φ está bem definido.

Mais um comentário, apenas para dizer que as soluções admissíveis (y, u) para (P) devem verificar (2.1) e (2.2) onde $y \in AC$ e u é uma função mensurável tal que $F(y(.), u(.))$ é integrável no sentido de Lebesgue.

Para (VP) as soluções admissíveis serão do tipo $y(.) \in AC[0, T]$ verificando (2.2) e tais que $\varphi(y(.), y'(.)) \in L^1[0, T]$.

Vejamos agora um resultado de equivalência:

Teorema 2.1. *O problema (P) é equivalente ao problema (VP) no seguinte sentido: O ínfimo de I (funcional em (P) é o mesmo de J (funcional em (VP)). Mais, se (y, u) é uma solução óptima para (P), então y é uma solução óptima para (VP). Se y é óptimo para (VP), então, existe u mensurável tal que (y, u) é óptimo para (P).*

Demonstração. Seja (y, u) um par admissivel para (P), então $y(.) \in AC$, verifica (2.1), (2.2) e também $\int_0^T F(y(t), u(t))dt < +\infty$ donde $F(y(t), u(t)) < +\infty$ q.s. em $[0, T]$.

Por definição de φ temos

$$\varphi(y(t), y'(t)) = \min_{v \in K} \{F(y(t), v) : y'(t) = f(y(t), v)\} \leq F(y(t), u(t)) \text{ a.e. in [0,T]}$$

então

$$\int_0^T \varphi(y(t), y'(t))dt \leq \int_0^T F(y(t), u(t))dt < +\infty$$

portanto, y é admissível para (VP) (dado que $\int_0^T \varphi(y(t), y'(t))dt < +\infty$) e

$$J(y) \leq I(y, u).$$

Seja y uma solução admissivel para (VP), isto significa que $y \in AC$, y verifica (2.2) e $\varphi(y(.), y'(.)) \in L^1[0,T]$ ($J(y) < +\infty$). Temos assim

$$\varphi(y(.), y'(.)) \leq +\infty \text{ q.s. in } [0,T].$$

Então por definição de φ, $y(.) \in L$ q.s. em $[0,T]$ (mais, $y \in L \quad \forall t \in [0,T]$, porque y é contínua)

e

$$\{u \in K \ : y'(t) = f(y(t), u)\} \neq \emptyset \text{ q.s. in } [0,T].$$

Mais, para quase todo t em $[0,T]$ existe pelo menos um $u(t) \in K$ tal que

$$\varphi(y(t), y'(t)) \leq F(y(t), u(t)) < +\infty$$

e $y'(t) = f(y(t), u(t))$ e consequentemente, a multifunção

$$M(t) = \{u \in K \ : \varphi(y(t), y'(t)) = F(y(t), u), \quad y'(t) = f(y(t), u)\}$$

é não vazia para quase todo o t em $[0,T]$.

Para qualquer t, $y(t)$, fixo, podemos escrever

$$M(t) = \{u \in K : \varphi = F(u), \xi = f(u)\}$$

e verificar que este é um conjunto fechado:

Considerando $(u_n) \subset M(t)$ tal que $(u_n) \to \bar{u}$, temos

$$\varphi = F(u_n), \quad \xi = f(u_n), \quad \forall n$$

e portanto, como F é semicontínua inferior e f é contínua,

$$F(\bar{u}) \leq \liminf F(u_n) = \varphi, \quad \xi = f(\bar{u}), \quad \forall n.$$

Usando a definição de φ temos

$$\varphi = \varphi(y, \xi) \leq F(y, \bar{u}) \leq \varphi,$$

logo $F(\bar{u}) = \varphi$, o que significa que $\bar{u} \in M(t)$ ou seja, $M(t)$ é fechado. Podemos ainda considerar que $\Omega = [0,T] \backslash N$ com $|N| = 0$ é um espaço mensurável. Ver por exemplo, [17] p. 64, p. 49, p. 50, p. 57, [6],[15].

Nestas condições, podemos aplicar o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em anexo:

Teorema 2.2 (Selecção Mensurável [1] p. 308). *Seja X um espaco métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaco mensurável, F uma multifunção mensurável de Ω para subconjuntos fechados e não vazios de X. Então F tem uma selecção mensurável .*

Concluimos assim, que existe uma seleção mensurável

$$u : \Omega \to K \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{com} \quad u(t) \in M(t), \quad \forall t$$

, isto é, $\exists$ u mensurável tal que $\varphi(y(t), y'(t)) = F(y(t), u(t))$ e $y'(t) = f(y(t), u(t))$ q.s. em $[0, T]$

$$\text{(em particular} \quad \int_0^T \varphi(y(t), y'(t))dt = \int_0^T F(y(t), u(t))dt < +\infty),$$

e portanto, (y, u) é uma solução admissível para (P) e $I(y, u) = J(y)$.

Se $(\bar{y}, \bar{u})$ é uma solução óptima de (P) (par admissível tal que $I(\bar{y}, \bar{u}) \leq I(y, u)$ para todos os pares admissíveis (y, u)), então $\bar{y}$ é admissível para (VP) e temos $J(\bar{y}) \leq I(\bar{y}, \bar{u})$. Será esta também uma solução óptima de (VP)?

Supondo que não, então $\exists\, \tilde{y}$ tal que $J(\tilde{y}) < J(\bar{y})$. Temos também que

$$\exists\, \tilde{u} : \quad I(\tilde{y}, \tilde{u}) = J(\tilde{y}) < J(\bar{y}) \leq I(\bar{y}, \bar{u})$$

o que é uma contradição dado que $(\bar{y}, \bar{u})$ é óptimo para (P).

Reciprocamente, se $\bar{y}$ é uma solução óptima de (VP) (solução admissível verificando $J(\bar{y}) \leq J(y)$ para todas as admissiveis y), então $\exists$ $\bar{u}$ tal que $(\bar{y}, \bar{u})$ é admissível para (P) e $I(\bar{y}, \bar{u}) = J(\bar{y})$. Será que $(\bar{y}, \bar{u})$ é também uma solução óptima para (P)?

Supondo que não, então $\exists$ $(\tilde{y}, \tilde{u})$ tal que $I(\tilde{y}, \tilde{u}) < I(\bar{y}, \bar{u})$. Mais, $\tilde{y}$ é admissível para (VP) e temos

$$J(\tilde{y}) \leq I(\tilde{y}, \tilde{u}) < I(\bar{y}, \bar{u}) = J(\bar{y})$$

o que é uma contradição dado que $\bar{y}$ é uma solução óptima de (VP).

Conclusão: $(P) \Leftrightarrow (VP)$

$\square$

3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

3.1 Teorema da Existência de Tonelli - Problema Variacional

Apresentemos agora um conhecido resultado de existência do Cálculo das Variações (para mais pormenores consultar [2] pag.114, [3], p. 369 (condição c^*), [4] p. 241, p. 250 ou [16] p. 101):

Teorema 3.1 (Teorema da Existência de Tonelli). *Suponha que φ satisfaz as seguintes condições:*

- *i) φ é $\mathcal{L}\otimes\mathbf{B}^n\otimes\mathbf{B}^n$-mensurável e $\varphi(t,.,.)$ é semi-continua inferiormente em $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ q.t. $t\in I=[0,T]$;*
- *ii) $\varphi(t,y,.)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ q.t. $t\in I=[0,T]$ e $\forall y\in\mathbb{R}^n$;*
- *iii) $\varphi(t,y,\xi)$ tem crescimento superlinear, i.e., $\exists\ \theta:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ limitado inferiormente (ou até localmente limitado inferiormente) tal que $\varphi(t,y,\xi)\geq\theta(|\xi|)\quad\forall t,y,\xi$ e $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{\theta(r)}{r}=+\infty$*

Então existe um minimizante para

$$J(y)=\int_a^b\varphi(t,y(t),y'(t))dt$$

na classe

$$C(\alpha,\beta)=\{y\in AC((a,b),\mathbb{R}^n):y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta\}$$

com α e β fixos.

(Nota: *Para a demonstração deste resultado consultar anexo*)

Em particular, o problema

$$(VP)\quad\min J(y)=\int_0^T\varphi(y(t),y'(t))dt$$

com $y(0)=y_0$ e $y(T)=y_T$ tem uma solução absolutamente continua se

- i) φ é $\mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n$-mensurável e $\varphi(.,.)$ é semicontínua inferior em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
- ii) $\varphi(y,.)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$;
- iii) $\varphi(y,\xi)$ tem crescimento superlinear.

Na secção anterior concluimos que o problema (VP) é equivalente ao problema (P). Vamos agora, ponto por ponto, concluir quais as condições que o problema (P) deverá verificar para que possamos garantir a existência de solução utilizando o resultado acima enunciado.

3.1.1 Semicontinuidade Inferior

Vejamos primeiro quais as condições a impor para que φ seja $\mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n$-mensurável e semi-continua inferior:
Consideremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *[15] p. 13.*
Seja $\mathcal{M}$ uma σ-álgebra em $\mathbf{X}$(espaço topológico). Consideremos

$$f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Se $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathbf{M}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ então f é $\mathbf{M}$-mensurável.
Em particular, se $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathbf{B}$ (σ-álgebra dos conjuntos de Borel) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ então f é $\mathbf{B}$-mensurável.

Aplicando este resultado, temos que φ é $\mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n$-mensurável se

$$\varphi^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Isto é equivalente a verificar se

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) > \alpha\} \in \mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n$$

ou, usando as propriedades da σ-álgebra, se

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) > \alpha\}^c = \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) \leq \alpha\} \in \mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n.$$

Como podemos ver, por exemplo em [3], tal fica garantido se

$$D_\alpha = \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) \leq \alpha\}$$

for fechado.

Ora, a partir da mesma referência, ou de outras, como [14] (p. 51) ou [15] (p. 37), sabemos que

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

é semicontínua inferior em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se e só se

$$D_\alpha = \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) \leq \alpha\} \text{ for fechado } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(ou se $\{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) > \alpha\}$ for aberto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$).

Assim φ verifica a primeira condição do teorema de Tonelli se

$$D_\alpha = \{(y,\xi) : \varphi(y,\xi) \leq \alpha\} = \{(y,\xi) : y \in L, \exists u \in K, F(y,u) \leq \alpha, \xi = f(y,u)\}.$$

for um conjunto fechado.

Ora, se mostrarmos que para qualquer sucessão convergente em D_α, o seu limite está ainda em D_α, então facilmente concluimos que todos os elementos de D_α são limites de sucessões em D_α, ou seja, que D_α é fechado (precisamos apenas de considerar as sucessões de termos constantes iguais a esses elementos).

Consideremos assim uma sucessão

$$(y_n,\xi_n)_n \subseteq D_\alpha \text{ tal que } (y_n,\xi_n) \to (\bar{y},\bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Será que $(\bar{y},\bar{\xi}) \in D_\alpha$?

a) Se L for fechado então $\bar{y} \in L$.

b)Como $(y_n,\xi_n)_n \subseteq D_\alpha$ então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists u_n \in K : \quad F(y_n,u_n) \leq \alpha \text{ e } \xi_n = f(y_n,u_n).$$

Aplicando novamente a Proposição 2.1 a (y_n,ξ_n) e u_n (dado que $(y_n,\xi_n)_n$ é limitada e podemos tomar $M = \alpha$), temos que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^n$ é limitada e portanto contem uma subsucessão convergente para certo $\bar{u} \in K$ (K é fechado). Passando ao limite em

$$F(y_n,u_n) \leq \alpha, \quad \xi_n = f(y_n,u_n)$$

e como f é contínua, e F é semicontínua inferior nas duas variáveis, temos

$$F(\bar{y},\bar{u}) \leq \liminf F(y_n,\bar{u}) \leq \liminf F(y_n,\bar{u}_n) \leq \alpha$$

e

$$\bar{\xi} = f(\bar{y},\bar{u}), \quad \bar{u} \in K.$$

Por a) e b) temos que $(\bar{y},\bar{\xi}) \in D_\alpha$ e portanto este conjunto é fechado. Concluimos que se F é semicontínua inferior e coerciva como acima, f é contínua, K e L são fechados, então

$$\varphi(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

é semicontínua inferior (e $\mathbf{B}^n \otimes \mathbf{B}^n$-mensurável).

3.1.2 Convexidade

Façamos agora o estudo análogo para garantir que $\varphi(y,.)$ é convexa em $\mathbb{R}^n$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$:

Consideremos apenas o caso em que $y \in L$ dado que o outro ($\varphi(y,.) = +\infty$) é trivial.

Como podemos ver em [14] p. 23, precisamos apenas de garantir a convexidade de

$$epi\varphi(y,.) = \{(\xi, v) : \xi \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}, v \geq \varphi(y, \xi)\} =$$

$$\{(\xi, v) : \exists u \in K, v \geq F(y,u), \xi = f(y,u), v \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

Conclusão: Se para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ o conjunto

$$A_y = \{(\xi, v) : \exists u \in K, v \geq F(y,u), \xi = f(y,u), v \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.1}$$

for convexo, então $\varphi(y,.)$ é convexa $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Podemos também utilizar a condição equivalente

$$\forall \xi_1, \xi_2, \quad \lambda \in]0,1[, \quad \varphi_y(\xi) \leq \lambda \varphi_y(\xi_1) + (1-\lambda)\varphi_y(\xi_2) \tag{3.2}$$

com $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$.

Esta condição pode ser escrita como

$$\varphi_y(\xi) \leq \frac{\|\xi - \xi_2\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|}\varphi_y(\xi_1) + \frac{\|\xi - \xi_1\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|}\varphi_y(\xi_2) \tag{3.3}$$

ou

$$\|\xi_1 - \xi_2\|\varphi_y(\xi) - \|\xi - \xi_2\|\varphi_y(\xi_1) - \|\xi - \xi_1\|\varphi_y(\xi_2) \leq 0 \tag{3.4}$$

pois

$$\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \Leftrightarrow t(\xi_1 - \xi_2) = \xi - \xi_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow < t(\xi_1 - \xi_2), \frac{\xi_1 - \xi_2}{\|\xi_1 - \xi_2\|^2} > = < (\xi - \xi_2), \frac{\xi_1 - \xi_2}{\|\xi_1 - \xi_2\|^2} > \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1 \times \|\xi - \xi_2\|\|\xi_1 - \xi_2\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|^2} \Leftrightarrow t = \frac{\|\xi - \xi_2\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|}$$

e

$$1 - t = \frac{\|\xi_1 - \xi_2\| - \|\xi - \xi_2\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|} \Leftrightarrow 1 - t = \frac{\|\xi - \xi_1\|}{\|\xi_1 - \xi_2\|}.$$

Ora, se conseguirmos assegurar que

$$\forall u_1, u_2 \in K, \lambda \in]0,1[, \quad \exists u \in K: \quad f(u) = \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2),$$

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|F(u) - \|f(u) - f(u_2)\|F(u_1) - \|f(u) - f(u_1)\|F(u_2) \leq 0 \tag{3.5}$$

como $\varphi_y(f(u)) \leq F(u) \quad \forall u \in K$, temos

$$\|f(u_1)-f(u_2)\|\varphi_y(f(u))-\|f(u)-f(u_2)\|\varphi_y(f(u_1))-\|f(u)-f(u_1)\|\varphi_y(f(u_2)) \leq 0,$$

com

$$f(u) = \lambda f(u_1) + (1-\lambda)f(u_2), \quad \lambda \in]0,1[.$$

Então para quaisquer $\xi_1, \xi_2 \in f(y,K)$, considerando $f(u_1) = \xi_1$ e $f(u_2) = \xi_2$, para certos u_1 e u_2 em K, facilmente concluimos que a condição (3.4) é verificada para $\xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2$.

Se ξ_1 ou $\xi_2 \notin f(y,K)$, φ é igual a infinito e (3.2) é trivialmente verificada.

Podemos então concluir que se (3.5) é verificada, $\varphi(y,.)$ é convexa para todo ξ.

3.1.3 Coercividade

De seguida veremos o que (P) tem de verificar para que φ tenha crescimento linear, ou seja, para que φ verifique

iii) $\exists\ \theta : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ inferiormente limitada (ou mesmo localmente inferiormente limitada) tal que $\varphi(y,\xi) \geq \theta(|\xi|) \quad \forall y, \xi$ e $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\theta(r)}{r} = +\infty$.

Se F e f verificam $\lim\limits_{|f(y,u)| \to +\infty} \dfrac{F(y,u)}{|f(y,u)|} = +\infty$,

isto é,

$$\forall y,\ \forall M > 0, \exists L > 0, \forall u \in K, : |f(y,u)| > L \Rightarrow \frac{F(y,u)}{|f(y,u)|} > M \tag{3.6}$$

temos em particular,

$$\forall M > 0, \exists L > 0, \forall u \in K, \forall \xi : |\xi| = |f(y,u)| > L, \varphi(y,\xi) = F(y,u)$$

$$\Rightarrow \frac{F(y,u)}{|f(y,u)|} = \frac{\varphi(y,\xi)}{|\xi|} > M.$$

Logo

$$\forall y,\ \forall M > 0, \exists L > 0, \forall \xi : |\xi| > L \Rightarrow \frac{\varphi(y,\xi)}{|\xi|} > M$$

ou seja,

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \frac{\varphi(y,\xi)}{|\xi|} = +\infty.$$

Além disso, se F limitada inferiormente, também φ o é:

Considerando $\theta : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\theta(r) = \min\{\varphi(y,r), \varphi(y,-r), r^2\},$$

então

$$\varphi(y,\xi) \geq \theta(|\xi|) \; \forall \; y,\xi \; \text{ e } \lim_{r\to+\infty} \frac{\theta(r)}{r} = +\infty$$

(pois todos os limites relativos são iguais a infinito).

Assim, se F é inferiormente limitada e em conjunto com f verifica a condição (3.6), então φ tem crescimento superlinear na segunda variável. Vale a pena notar que como f é contínua em u, se K, que tem de ser fechado, for também limitado, então a condição (3.6) não faz sentido ser verificada.

3.2 Existência no caso $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$

Para o caso de uma dimensão, como podemos ver em [8], um recente trabalho que se encontra em fase de publicação, temos o seguinte resultado de existência:

Teorema 3.3 (Teorema da Existência Uma Dimensão). *Suponha que* $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ *satisfaz as seguintes condições:*

- *i)* φ *é* $\mathcal{L} \otimes \mathbf{B}$*-mensurável e* $\varphi(.,.)$ *é semi-continua inferiormente ;*
- *ii)* $\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)\ \forall y$*;*
- *iii)* $\varphi(y,\xi)$ *tem crescimento superlinear, i.e.,*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \frac{\varphi(y,\xi)}{|\xi|} = +\infty\ \forall y.$$

Então existe um minimizante para

$$J(y) = \int_a^b \varphi(y(t), y'(t))dt$$

na classe

$$C(\alpha, \beta) = \{y \in AC((a,b), \mathbb{R}) : y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}.$$

Anteriormente já vimos as condições suficientes que (P) deve verificar para garantir as condições i) e iii).

Vamos agora debruçarmo-nos sobre a condição ii):

Como em [4] (p. 18 e p. 15 - conceito de Γ-regularização), quando fixamos $y \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que

$$\varphi^{**}(y,0) = \ sup \{A(y,0) : A(y,.) \text{ é afim e } A(y,\xi) \leq \varphi(y,\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Então para que c) seja verificada, tem que existir uma função afim $A(y,.)$ com $A(y,\xi) \leq \varphi(y,\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(y,0) = A(y,0)$. Aproveitemos então esta ideia para tirar algumas conclusões.

Quando $\varphi(y,0) < +\infty$, podemos utilizar o seguinte resultado

Proposição 3.1. *A condição*

$$\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)\ \forall\ y$$

é equivalente a

$$\forall\ y,\ \max_{\xi<0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi} \leq \min_{\xi>0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi}\ . \tag{3.7}$$

Demonstração. Comecemos por mostrar que (3.7) implica a "convexidade no zero":

Seja ξ^+ tal que

$$\frac{\varphi(\xi^+)-\varphi(0)}{\xi^+}=\min_{\xi>0}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}=m^+,$$

então

$$\forall \xi>0,\ \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}>m^+$$

$$\overset{\xi>0}{\Rightarrow}\ \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\xi+\varphi(0)>m^+\xi+\varphi(0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\xi)>m^+\xi+\varphi(0).$$

Por outro lado, considerando ξ^- tal que

$$\frac{\varphi(\xi^-)-\varphi(0)}{\xi^-}=\max_{\xi<0}\frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}=m^-,$$

então

$$\forall \xi<0,\ \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}<m^-$$

$$\overset{\xi<0}{\Rightarrow}\ \frac{\varphi(\xi)-\varphi(0)}{\xi}\xi+\varphi(0)>m^-\xi+\varphi(0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\xi)>m^-\xi+\varphi(0).$$

Ora, por hipótese, $m^-<m^+$, donde

$$\forall \xi>0\ m^-\xi+\varphi(0)<m^+\xi+\varphi(0)<\varphi(\xi)$$

e

$$\forall \xi<0\ m^+\xi+\varphi(0)<m^-\xi+\varphi(0)<\varphi(\xi).$$

Considerando m^- ou m^+ obtemos funções afins que minoram φ e valem o mesmo que esta função em $\xi=0$, logo

$$\varphi^{**}(y,0)=\varphi(y,0).$$

Pensando agora na recíproca, como

$$\varphi^{**}(y,0)=\varphi(y,0)$$

e $\varphi(y,0)$ é finita, então

$$\varphi^{**}(y,0)=\{a(0): a \text{ é afim e } a(\xi)\leq\varphi(\xi)\}=a(0)$$

para certo $a(.)=m(.)+\varphi(0)$ tal que $m\xi+\varphi(0)\leq\varphi(\xi)\,\forall\,\xi$.

Considerando novamente m^- e m^+ como acima, temos que se $\xi > 0$ como $m\xi^+ + \varphi(0) \le \varphi(\xi^+)$, vem

$$m^+ = \frac{\varphi(\xi^+) - \varphi(0)}{\xi^+} \ge \frac{m\xi^+ + \varphi(0) - \varphi(0)}{\xi^+} = m.$$

Se $\xi < 0$, como $m\xi^- + \varphi(0) \le \varphi(\xi^-)$ então

$$m\xi^- + \varphi(0) - \varphi(0) \le \varphi(\xi^-) - \varphi(0)$$

$$\Rightarrow m\xi^- \frac{1}{\xi^-} \ge (\varphi(\xi^-) - \varphi(0))\frac{1}{\xi^-} = m^-$$

Temos assim que

$$m^- < m < m^+$$

e consequentemente que

$$\max_{\xi<0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi} \le \min_{\xi>0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi}.$$

$\square$

Resta-nos agora analisar que condições devem F e f verificar para que (3.7) aconteça:

Considerando

$$F(u_0) = \min\{F(u) : f(u) = 0\},$$

como

$$\max_{u\in K,\ f(u)<0} \frac{F(u) - F(u_0)}{f(u)} =$$

$$\max_{\xi<0} \left(\max_{u\in K,\ f(u)=\xi} \frac{F(u) - F(u_0)}{f(u)} \right) \overset{\xi\le 0}{=}$$

$$\max_{\xi<0} \frac{1}{\xi} \left(\min_{u\in K,\ f(u)=\xi} (F(u) - F(u_0)) \right) =$$

$$\max_{\xi<0} \frac{1}{\xi} \left(\min_{u\in K}\{F(u) :\ f(u) = \xi\} - F(u_0) \right) =$$

$$\max_{\xi<0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi}$$

e

$$\min_{u\in K,\ f(u)>0} \frac{F(u) - F(u_0)}{f(u)} =$$

$$\min_{\xi>0} \left(\min_{u\in K,\ f(u)=\xi} \frac{F(u) - F(u_0)}{f(u)} \right) =$$

$$\min_{\xi>0} \frac{1}{\xi} \left(\min_{u\in K,\ f(u)=\xi} (F(u) - F(u_0)) \right) =$$

$$\min_{\xi>0} \frac{1}{\xi} \left(\min_{u\in K} \{F(u) :\ f(u) = \xi\} - F(u_0) \right) =$$

$$\min_{\xi>0} \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi}$$

temos o resultado óbvio, mas útil,

Teorema 3.4. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ a função densidade obtida a partir de F e f do modo descrito no capítulo 2. Então*

$$\forall\ y,\ \varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)\ (< +\infty) \Leftrightarrow$$

$$\max_{u\in K,\ f(y,u)<0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)} \leq \min_{u\in K,\ f(y,u)>0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)}, \tag{3.8}$$

com u_0 tal que

$$F(y,u_0) = \min\{F(y,u) : f(y,u) = 0\}.$$

Nota: No caso de para certo y, termos $f(y,u) \geq 0$ ou $f(y,u) \leq 0$ para todo o u em K, a condição (3.8) não faz sentido. No entanto, a condição (3.7) verifica-se trivialmente (um dos membros da inequação é infinito), pelo que tal situação não é mencionada neste resultado.

Quando $\varphi(y,0) = +\infty$ podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.2.

$$\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0) \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(y,\xi) = +\infty,\ \forall\xi < 0)\ \vee (\varphi(y,\xi) = +\infty,\ \forall\xi > 0)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que existem $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ tais que

$$\varphi(y,\xi_1) < +\infty \wedge \varphi(y,\xi_2) < +\infty,$$

então por definição de função bipolar, obviamente que

$$\varphi^{**}(y,0) < \varphi(y,0) = +\infty$$

o que é uma contradição.

($\Leftarrow$)

Considerando sem perda de generalidade que

$$\varphi(y,\xi) < +\infty$$

para certo $\xi < 0$ (e consequentemente que $\varphi(y,\xi) = +\infty\ \forall\xi > 0$).

Seja

$$\hat{\xi} = \max\{\xi : \varphi(\xi) < +\infty\}$$

então

$$\varphi^{**}(y,0) = \sup\{A(0) : A(\xi) < \varphi(\xi),\ \forall \xi\} =$$
$$= \sup\{A(0) : A(\hat{\xi}) = \varphi(\hat{\xi})\} = +\infty$$

pois existem afins nestas condições com declives tão elevados quanto queiramos.

□

Nota: Este resultado poderia ser incluido na Proposição 3.1 se considerassemos que os declives m^+ e m^- poderiam tomar valores infinitos, sendo este caso, de facil verificação.

Em que situações a função que resulta da reformulação variacional verifica as hipóteses desta proposição?

Ora,

$$\varphi(y,\xi) = +\infty \Leftrightarrow y \notin L \ \vee \ f(y,u) \neq \xi \ \forall u \in K$$

e portanto

$$\varphi(y,\xi) = +\infty \ \forall \xi < 0 \Leftrightarrow y \notin L \ \vee \ f(y,u) > 0 \ \forall u \in K$$

e

$$\varphi(y,\xi) = +\infty \ \forall \xi > 0 \Leftrightarrow y \notin L \ \vee \ f(y,u) < 0 \ \forall u \in K.$$

Note-se que da Proposição 3.1 ou até, da definição de bipolar, obtemos também o seguinte resultado

Corolário 3.1. *Se $\varphi(y,.)$ tem um minimizante global em $\xi = 0$, então $\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)$.*

Isto verifica-se trivialmente pois sendo $\varphi(y,0)$ um mínimo global temos

$$\varphi(y,\xi) \leq \varphi(y,0) \ \forall \xi,$$

o que implica que

$$\text{se } \xi < 0 \Rightarrow \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi} \leq 0$$

$$\text{e se } \xi > 0 \Rightarrow \frac{\varphi(y,\xi) - \varphi(y,0)}{\xi} \geq 0$$

e portanto (3.7) verifica-se.

Com base na condição (3.3) da página 15 podemos obter outra condição descrita no seguinte resultado

Proposição 3.3. *Se a condição*

$$\forall y, \xi_1, \xi_2, \quad \xi_1 < 0 < \xi_2 \Rightarrow \varphi_y(0) \leq \frac{\xi_2}{\xi_2 - \xi_1}\varphi_y(\xi_1) - \frac{\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\varphi_y(\xi_2) \quad (3.9)$$

for verificada, então $\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)$.

Demonstração. Nestas condições existe ξ_0 (supomos s.p.g. $\xi_0 > 0$ pois as outras possibilidades podem ser analisadas de forma análoga), tal que

$$\frac{\varphi_y(\xi_0) - \varphi_y(0)}{\xi_0}\xi + \varphi_y(0) \leq \varphi_y(\xi). \quad (3.10)$$

Verifiquemos que (3.10) realmente se verifica:
Supondo que não , então existe $\hat{\xi}$ tal que

$$\varphi_y(\hat{\xi}) < \frac{\varphi_y(\xi_0) - \varphi_y(0)}{\xi_0}\hat{\xi} + \varphi_y(0).$$

Suponhamos primeiro que $\hat{\xi} < 0$, então

$$\frac{\xi_0}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi(\hat{\xi}) - \frac{\hat{\xi}}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(\xi_0) \leq$$

$$\frac{\xi_0}{\xi_0 - \hat{\xi}}\left(\frac{\varphi_y(\xi_0) - \varphi_y(0)}{\xi_0}\hat{\xi} + \varphi_y(0)\right) - \frac{\hat{\xi}}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(\xi_0) =$$

$$\frac{\varphi_y(\xi_0) - \varphi_y(0)}{\xi_0 - \hat{\xi}}\hat{\xi} + \frac{\xi_0}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(0) - \frac{\hat{\xi}}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(\xi_0) =$$

$$\frac{\xi_0 - \hat{\xi}}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(\xi_0) = \varphi_y(0)$$

o que é uma contradição pois (3.9)verifica-se e portanto, temos que ter

$$\frac{\xi_0}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi(\hat{\xi}) - \frac{\hat{\xi}}{\xi_0 - \hat{\xi}}\varphi_y(\xi_0) \geq \varphi_y(0).$$

Supondo agora que $\hat{\xi} > 0$ então consideramos $\xi_0 = \hat{\xi}$ e repetimos o raciocínio anterior as vezes necessárias. Aqui deveremos impor que φ seja limitada inferiormente. Usando a coercividade e a semi-continuidade inferior podemos garantir que este processo tem fim.

Tomando a função afim definida por

$$A(y, \xi) = \frac{\varphi_y(\xi_0) - \varphi_y(0)}{\xi_0}\xi + \varphi_y(0),$$

temos

$$A(y,0) = \varphi(y,0) \text{ e } A(y,\xi) \leq \varphi(y,\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

donde $\varphi^{**}(y,0) = \varphi(y,0)$. □

Nota: *O* ξ_0 *acima mencionado pode ser procurado entre os mínimos locais.*

Podemos assim, analogamente ao que fizemos na página 15, tentar assegurar que a condição (3.9) da Proposição 3.3 é verificada. Para isso, bastar-nos-á verificar se

$$\forall u_1, u_2 \in K, \quad : \quad f(u_1) < 0 < f(u_2), \exists u \in K \cap f^{-1}(y,0) :$$

$$(f(u_2) - f(u_1))F(u) - f(u_2)F(u_1) + f(u_1)F(u_2) \leq 0. \tag{3.11}$$

Para aplicarmos o Corolário 3.1 como

$$\min_{\xi} \varphi(y,\xi) = \min_{\xi}(\min_{u\in K}\{F(y,u) : f(y,u) = \xi\} =$$

$$= \min_{u\in K}(\min_{\xi}\{F(y,u) : f(y,u) = \xi\} = \min_{u\in K}\{F(y,u)\},$$

basta verificar se existe u_0 tal que

$$F(y,u_0) = \min_{u\in K}\{F(y,u)\} = \min_{u}\{F(y,u) : f(y,u) = 0\}.$$

3.3 Existência para o Problema de Controlo Óptimo

Vamos agora reunir as várias conclusões a que chegamos ao longo dos Capítulos 3 e 3.2, enunciando dois resultados de existência de solução para o problema

$$(P) \qquad \text{Minimize } I(y,u) = \int_0^T F(y(t),u(t))dt$$

sujeito a

$$y'(t) = f(y(t),u(t)),$$

$$u(t) \in K \subseteq R^m, \quad y(t) \in L \subseteq R^n, \forall t \in [0,T],$$
$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y(0) = y_0 \text{ and } y(T) = y_T.$$

Teorema 3.5. *Sejam F, f, K e L como descritos acima. Além disso, consideremos que F é semi-continua inferior, f é continua e K e L são dois conjuntos fechados. Consideremos também que são verificadas as seguintes condições:*

i) K é limitado, ou então F é coerciva com respeito a K no sentido

$$\lim_{u \in K, |u| \to \infty} F(y,u) = +\infty, \qquad \textit{uniformemente em } (y,\xi)$$

ou seja,

$$\forall M > 0, \quad \forall R > 0, \quad \exists P_{M,R}, \quad \forall u, y, \xi,$$
$$(|u| > P_{M,R}, \quad ||(y,\xi)|| \leq R, \quad u \in \{u \in K : \xi = f(y,u)\} \Rightarrow F(y,u) > M);$$

ii) $\forall y \in \mathbb{R}^n$ o conjunto

$$E_y = \{(\xi, v) : \exists u \in K, v \geq F(y,u), \xi = f(y,u), v \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

é convexo, ou então, tem de se verificar a condição

$$\forall u_1, u_2 \in K, \lambda \in]0,1[, \quad \exists u \in K : \quad f(u) = \lambda f(u_1) + (1-\lambda) f(u_2),$$

$$||f(u_1) - f(u_2)||F(u) \leq ||f(u) - f(u_2)||F(u_1) + ||f(u) - f(u_1)||F(u_2);$$

iii) F é limitada inferiormente e, ou K é limitado, ou

$$\lim_{||f(y,u)||\to+\infty} \frac{F(y,u)}{||f(y,u)||} = +\infty$$

ou seja,

$$\forall y\, \forall M > 0, \exists L > 0, \forall u \in K, : ||f(y,u)|| > L \Rightarrow \frac{F(y,u)}{||f(y,u)||} > M.$$

Então, existe uma função absolutamente contínua y e uma função mensurável u, tal que o par (y,u) é uma solução óptima de (P).

Tendo em conta as considerações feitas no ponto anterior, quando debruçados sobre o caso uni-dimensional, isto é, quando $y(t) \subset L \subset \mathbb{R}$ podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.6. *Sejam F, f, K e L como descritos acima. Além disso, consideremos que F é semi-continua inferior, f é continua, K e L são dois conjuntos fechados e $L \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos também que são verificadas as seguintes condições:*

i) K é limitado, ou então F é coerciva com respeito a K no sentido

$$\lim_{u\in K,|u|\to\infty} F(y,u) = +\infty, \qquad \textit{uniformemente em } (y,\xi);$$

ii) F é limitada inferiormente e, ou K é limitado, ou

$$\lim_{|f(y,u)|\to+\infty} \frac{F(y,u)}{|f(y,u)|} = +\infty;$$

iii) Para todo o $y \in L$ temos que $f(y,u)$ é sempre não negativa ou sempre não positiva em K. Caso contrário, verifica-se

$$\max_{u\in K,\ f(y,u)<0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)} \leq \min_{u\in K,\ f(y,u)>0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)}$$

com u_0 tal que $F(y,u_0) = \min_{u\in K}\{F(y,u) : f(y,u) = 0\}$.

Então, existe uma função absolutamente contínua y e uma função mensurável u, tal que o par (y,u) é uma solução óptima de (P).

Nota: *Caso a última condição deste teorema não seja de fácil verificação, poderemos recorrer à condição respectiva do teorema 3.5, ou ao caso particular*

$$\forall u_1, u_2 \in K, \quad : \quad f(u_1) < 0 < f(u_2), \exists u \in K \cap f^{-1}(y,0) :$$
$$(f(u_2) - f(u_1))F(u) - f(u_2)F(u_1) + f(u_1)F(u_2) \leq 0.$$

4. ALGUNS EXEMPLOS

4.1 Dimensão Um

Vejamos agora alguns exemplos de problemas de Controlo Óptimo que cuja trajectória y deverá pertencer aos números reais.

1. Consideremos o problema

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 |u(t)|^2 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + y(t) = u(t) \text{ e } |u(t)| < 1, \ \forall t \in [0,1],$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

De acordo com o que vimos anteriormente, podemos definir uma nova função

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} \min\limits_{u \in [-1,1]} \{u^2 : \xi = -y + u\} & \text{se } \{u \in [-1,1] \ : \xi = -y + u\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u \in [-1,1]} \{u^2 : u = \xi + y\} & \text{se } \xi + y \in [-1,1] \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

e portanto

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (\xi + y)^2 & \text{se } -1 \leq \xi + y \leq 1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, a reformulação variacional é dada por:

$$\text{Minimizar} \quad J(y) = \int_0^1 \varphi(y(t), y'(t)) dt$$

com $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

Será que existe solução óptima para este problema? Como $L = \mathbb{R}$ podemos averiguar se são verificadas as condições do Teorema 3.6:

Obviamente que F e f são continuas, K e L são fechados. Quanto às restantes condições

i) e ii) Estas condições verificam-se trivialmente pois $K = [-1, 1]$ é limitado e $F(y, u) = |u(t)|^2$ é limitada inferiormente.

iii) Temos $L = \mathbb{R}$. Além disso, $f(y, u) \leq 0 \forall u \in K$ se $y \geq u$ e $f(y, u) \geq 0 \forall u \in K$ se $y \leq u$. Assim sendo, para $y \in \mathbb{R}/[-1, 1]$, a condição verifica-se.

Se $y \in]-1, 1[$, temos que verificar se

$$\max_{u \in K,\ f(y,u)<0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)} \leq \min_{u \in K,\ f(y,u)>0} \frac{F(y,u) - F(y,u_0)}{f(y,u)}$$

com u_0 tal que

$$F(y, u_0) = \min_{u \in K} \{F(y, u) : f(y, u) = 0\}.$$

Considerando que $\min_{u \in [-1,1]} \{u^2 : 0 = u - y\} = y^2$, temos

$$\max_{u \in [-1,1], u-y<0} \frac{u^2 - y^2}{u - y} = \max_{-1 \leq u < y} \{u + y\} = 2y$$

e

$$\min_{u \in [-1,1], u-y>0} \frac{u^2 - y^2}{u - y} = \min_{y < u \leq 1} \{u + y\} = 2y$$

e portanto a condição verifica-se.

Fica assim garantida a existência de um par (y, u) óptimo para o problema em análise.

2. Observemos agora o problema dado por

$$\text{Minimizar} \quad I(y, u) = \int_0^1 (|y(t)|^2 - 1)^2 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + y(t) = u(t) \text{ e } |u(t)| < \frac{1}{2}, \ \forall t \in [0, T],$$

com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y(1) = y_1$. Analisaremos posteriormente o caso em que $y(1)$ é livre.

Determinemos a função a utilizar na reformulação variacional.

$$\varphi(y, \xi) =$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \{|y(t)|^2-1)^2 : u = \xi + y\} & \text{se } \{u \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \ : u = \xi + y\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} |y(t)|^2-1)^2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq \xi + y \leq \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

O problema verifica trivialmente as primeiras considerações do Teorema 3.6 mas analisemos também as restantes condições:

i) e *ii)* $K = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ é limitado e $F(y,u) = (y^2-1)^2$ é limitada inferiormente.

iii) φ é constante em relação a ξ, logo qualquer das condições de convexidade veificam-se trivialmente.

Então aplicando o Teorema 3.6 concluimos que este problema tem solução óptima.

3. Debrucemo-nos agora sobre o problema

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 u(t)^4 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + u(t)y(t) = u^2(t) \text{ e } |u(t)| \leq 1, \ \forall t \in [0,T],$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

A sua formulação variacional é dada por

$$\varphi(y,\xi) =$$

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in[-1,1]} \{u^4 : u^2 - uy - \xi = 0\} & \text{se } \{u \in [-1,1] \ : \xi = u^2 - uy\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u\in[-1,1]} \{u(t)^4 : u(t) = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2+4\xi}}{2}\} & \text{if } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1,\ (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 \leq (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 \\ & \text{e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1,\ (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 < (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 \\ & \text{e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

e portanto

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y \leq 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y > 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Nota:

$$\begin{aligned} &(\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 < (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 \\ \Leftrightarrow\ &((\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^2)^2 < ((\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^2)^2 \\ \Leftrightarrow\ &(\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^2 < (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^2 \\ \Leftrightarrow\ &-2y\sqrt{y^2+4\xi} < 2y\sqrt{y^2+4\xi} \Leftrightarrow y\sqrt{y^2+4\xi} > 0 \\ \Leftrightarrow\ &y > 0 \ \textit{(porque } \sqrt{y^2+4\xi} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Para procurarmos garantir a existência de solução, vejamos mais uma vez que F e f são contínuas, K e L são fechados e que, além disso,

i) e ii) $K = [-1,1]$ é limitado e $F(y,u) = u^4$ é limitada inferiormente.

iii) Neste caso $L = \mathbb{R}$. Se $y = 0$, temos obviamente que

$$\varphi(0,0) = 0 = \min_{\xi} \varphi(0,\xi) =$$

$$\min_{\xi} \begin{cases} \min_{u\in[-1,1]} \{u(t)^4 : u(t)^2 = \xi\} & \text{if } 0 \leq \xi \leq 1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

o que é suficiente, pelo corolário 3.1, para garantir o pretendido. Se $y \neq 0$, $f(y,u) = u^2 - uy$ muda de sinal em K, por isso, vamos verificar se

$$\max_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)<0}} \frac{u^4 - F(y,u_0)}{u(u-y)} \leq \min_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)>0}} \frac{u^4 - F(y,u_0)}{u(u-y)}$$

com u_0 tal que $F(y,u_0) = \min\limits_{u\in[-1,1]}\{u^4 : u = 0 \vee u = y\} = 0$, ou seja, vamos verificar que

$$\max_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)<0}} \frac{u^3}{u-y} \leq \min_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)>0}} \frac{u^3}{u-y}$$

.

Fazendo um pequeno estudo do sinal e monotonia de $M(u) = \frac{u^3}{u-y}$ concluimos que quando $y > 0$, M tem como gráfico o representado na Figura 4.1.

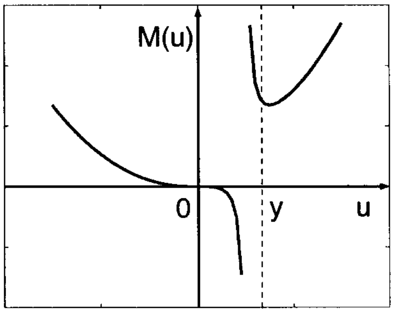

Fig. 4.1: Grafico de M quando y é positivo

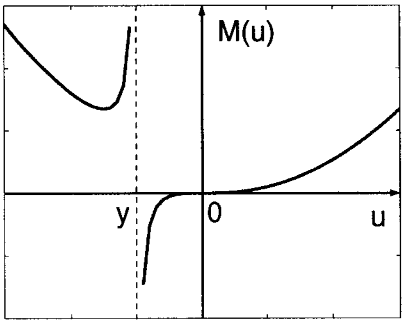

Fig. 4.2: Grafico de M quando y é negativo

Assim, quando $0 < y \leq 1$ temos

$$\max_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)<0}} \frac{u^3}{u-y} = \max_{0<u<y\leq 1} \frac{u^3}{u-y} < 0$$

e por outro lado,

$$\min_{\substack{u\in[-1,1],\\ u(u-y)>0}} \frac{u^3}{u-y} = \min_{\substack{u\in[-1,1],\\ (u<0\vee u>y)}} \frac{u^3}{u-y} =$$

$$\min_{\substack{-1\leq u<0\\ \text{ou } y<u\leq 1}} \frac{u^3}{u-y} > 0$$

e a condição verifica-se.

Quando $y > 1$ temos

$$\max_{\substack{u \in [-1,1], \\ u(u-y)<0}} \frac{u^3}{u-y} = \max_{0<u<\leq 1<y} \frac{u^3}{u-y} < 0$$

e por outro lado,

$$\min_{\substack{u \in [-1,1], \\ u(u-y)>0}} \frac{u^3}{u-y} = \min_{\substack{u \in [-1,1], \\ (u<0 \vee u>y)}} \frac{u^3}{u-y} =$$

$$\min_{-1\leq u<0} \frac{u^3}{u-y} > 0$$

verificando-se mais uma vez a condição.
No caso de $y < 0$, M tem como gráfico o representado na Figura 4.2 donde, com um raciocínio em tudo semelhante ao anterior, concluímos que

$$\max_{\substack{u \in [-1,1], \\ u(u-y)<0}} \frac{u^3}{u-y} < 0 < \min_{\substack{u \in [-1,1], \\ u(u-y)>0}} \frac{u^3}{u-y}$$

e temos iii) verificada.
Alternativamente podiamos verificar que

$$\forall u_1, u_2 \in K = [-1,1], : u_1^2 - u_1 y < 0 < u_2^2 - u_2 y, \exists u \in K \cap f^{-1}(y,0) :$$

$$(f(y,u_2) - f(y,u_1))F(y,u) - f(y,u_2)F(y,u_1) + f(y,u_1)F(y,u_2) \leq 0$$

Ora, tomando $u = 0$, temos $f(y,u) = 0$, além disso,

$$(f(y,u_2) - f(y,u_1))F(y,u) - f(y,u_2)F(y,u_1) + f(y,u_1)F(y,u_2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (u_2^2 - u_2 y - u_1^2 + u_1 y)u^4 - (u_2^2 - u_2 y)u_1^4 + (u_1^2 - u_1 y)u_2^4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(u_2^2 - u_2 y)u_1^4 + (u_1^2 - u_1 y)u_2^4 \leq 0$$

o que é obviamente verdade pois u_1 e u_2 verificam

$$u_1^2 - u_1 y < 0 < u_2^2 - u_2 y.$$

Escolhendo uma, ou outra opção, concluímos, aplicando o Teorema 3.6 que existe solução para o problema de controlo óptimo.

4.2 Dimensão Dois

Analisemos de seguida alguns exemplos relacionados com o classico modelo do pêndulo, descritos por um sistema de duas equações diferenciais, ou por uma equação diferencial do segundo grau. Nestes casos, a formulação em problemas de Controlo Óptimo resultará na busca de trajectórias de $\mathbb{R}^2$.

1. O primeiro problema a analisarmos é

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 u(t)^2 dt$$

sujeito a

$$x'' + x = u \text{ com } |x| \leq 3 \text{ e } |u| \leq 1.$$

Fazendo $y_1 = x$ e $y_2 = y_1'$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + u \end{cases}$$

que pode ser escrito como

$$Y' = AY + U$$

com

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Consideremos ainda que $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

A função densidade a usar na reformulação é dada por

$$\varphi(Y,\xi) = \begin{cases} \min\limits_{U \in K}\{u^2 : \xi = AY + U\} & \text{se } \{U \in K : \xi = AY + U\} \neq \emptyset \\ & \text{e } Y \in [-3,3] \times \mathbb{R} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u \in [-1,1]}\{u^2 : \xi_1 = y_2 \wedge u = y_1 + \xi_2\} & \text{se } -1 \leq y_1 + \xi_2 \leq 1 \wedge \xi_1 = y_2 \\ & \text{e } y_1 \in [-3,3] \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (y_1 + \xi_2)^2 & \text{se } -1 \leq y_1 + \xi_2 \leq 1 \ \wedge \ \xi_1 = y_2 \ \wedge \ -3 \leq y_1 \leq 3 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Verificando agora as condições do Teorema 3.5 podemos constatar que $K = \{0\} \times [-1, 1]$ e $L = [-3, 3] \times \mathbb{R}$ são fechados e

$$F(Y, U) = u^2 \text{ e } f(Y, U) = AY + U$$

são funções continuas. Quanto às restantes condições:

i) e iii) $K = \{0\} \times [-1, 1]$ é limitado e $F(Y, U) = u^2$ é limitada inferiormente, logo ambas as condições verificam-se.

ii) Será que

$$\forall U_1, U_2 \in K, \lambda \in]0, 1[, \exists U \in K : f(Y, U) = \lambda f(Y, U_1) + (1-\lambda) f(Y, U_2),$$

$$\|f(Y, U_1) - f(Y, U_2)\| F(Y, U) \leq$$
$$\|f(Y, U) - f(Y, U_2)\| F(Y, U_1) + \|f(Y, U) - f(Y, U_1)\| F(Y, U_2)?$$

Se substituirmos f e F e simplificarmos temos

$$\|U_1 - U_2\| u^2 - \lambda \|U_1 - U_2\| u_1^2 - (1 - \lambda) \|U_2 - U_1\| u_2^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\|U_1 - U_2\| (u^2 - \lambda u_1^2 - (1 - \lambda) u_2^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$u^2 \leq \lambda u_1^2 + (1 - \lambda) u_2^2$$

Esta última condição é verdadeira desde que

$$u = \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2$$

mas neste caso, temos

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2 \end{pmatrix} = \lambda U_1 + (1 - \lambda) U_2$$

e portanto

$$f(Y, U) = AY + U =$$
$$\lambda AY + \lambda U_1 + AY + U_2 - \lambda AY - \lambda U_2 =$$
$$\lambda f(Y, U_1) + (1 - \lambda) f(Y, U_2)$$

e a condição verifica-se.

Concluimos assim que existe um par

$$(Y, U) = \left(\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} \right),$$

ou seja, um par (x, u) que é solução do problema.

2. Consideremos agora o problema, com lagrangeano não convexo

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 (|x|^2 - 1)^2 dt$$

sujeito a

$$x'' + x = u \text{ com } x(0) = 1 \text{ e } |u| \leq 1.$$

Novamente fazendo $y_1 = x$ e $y_2 = y_1'$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + u \end{cases}$$

que tal como anteriormente, pode ser escrito como

$$Y' = AY + U$$

onde

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

O custo é então dado por

$$I(Y,U) = \int_0^1 (|y_1(t)|^2 - 1)^2 dt$$

sendo que $y_1(0) = 1$ e $U \in K = \{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

A nova função será obtida por

$$\varphi(Y,\xi) =$$

$$\begin{cases} \min\limits_{U \in K} \{(|y_1|^2 - 1)^2 : \xi_1 = y_2 \wedge u = y_1 + \xi_2\} & \text{se } \{U \in K : \xi = AY + U\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (|y_1|^2 - 1)^2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq y_1 + \xi_2 \leq \frac{1}{2} \wedge \xi_1 = y_2 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Verifiquemos as condições menos óbvias para tentarmos garantir a existência de solução.

i) e iii) K é limitado e $F(Y,U) = (|y_1|^2 - 1)^2$ é limitada inferiormente.

ii) Tal como no exemplo anterior, a condição

$$\forall\, U_1, U_2 \in K, \lambda \in]0,1[,\ \exists U \in K:\ f(Y,U) = \lambda f(Y,U_1) + (1-\lambda) f(Y,U_2),$$

$$\|f(Y,U_1) - f(Y,U_2)\| F(Y,U) \leq$$
$$\|f(Y,U) - f(Y,U_2)\| F(Y,U_1) + \|f(Y,U) - f(Y,U_1)\| F(Y,U_2)$$

é facilmente verificada, pois simplificada vem

$$\|U_1 - U_2\| (y_1^2 - 1)^2 (1 - \lambda - 1 + \lambda) \leq 0$$

que é obviamnte verdadeira. Note-se que aqui foi relevante o facto de $F(Y,U)$ ser constante quando Y está fixo.

Podemos assim, mais uma vez, concluir que o problema tem solução.

3. Por fim, analisemos o problema

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 u(t)^2 dt$$

sujeito a

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = u \\ y_2' + y_1 = \sqrt{u} \end{cases} \quad \text{e } u(t) \geq 0,\ \forall t \in [0,1]$$

O sistema diferencial acima pode ser reescrito como

$$Y' = AY + U$$

com

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{u} \end{pmatrix}.$$

Acrescentamos as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

Podemos mais uma vez definir a função

$$\varphi(Y,\xi) = \begin{cases} \min\limits_{u \geq 0} \{u^2 : \xi = AY + U\} & \text{se } \{u \geq 0 : \xi = AY + U\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u \geq 0} \{u^2 : u = \xi_1 - y_2 \wedge \sqrt{u} = \xi_2 + y_1\} & \text{se } \xi_1 - y_2 \geq 0 \wedge \xi_2 + y_1 \geq 0 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{u \geq 0}\{u^2 : u = \xi_1 - y_2 \wedge u = (\xi_2 + y_1)^2\} & \text{se } \xi_1 \geq y_2 \wedge \xi_2 \geq y_1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\xi_1 - y_2)^2 & \text{se } \xi_1 - y_2 = (\xi_2 + y_1)^2 \wedge \xi_1 \geq y_2 \wedge \xi_2 \geq y_1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi(Y, \xi) = \begin{cases} (\xi_1 - y_2)^2 & \text{se } \xi_1 - y_2 = (\xi_2 + y_1)^2 \wedge \xi_2 \geq y_1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Verificando agora as condições do Teorema 3.5 podemos constatar que $K = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ e $L = \mathbb{R}^2$ são fechados,

$$F(Y, U) = u^2 \text{ e } f(Y, U) = AY + U$$

são funções continuas. Quanto às restantes condições:

i) K é ilimitado, por isso tem que se verificar

$$\lim_{U \in K, \|U\| \to \infty} F(Y, U) = +\infty, \qquad \text{uniformemente em } (Y, \xi)$$

Ora, se $\|U\| = \sqrt{u^2 + |u|} \to +\infty$ então $|u| \to +\infty$ donde

$$\lim_{u \to +\infty} u^2 = +\infty$$

como era nosso objectivo.

ii) Dado $Y \in \mathbb{R}^2$ o conjunto

$$\begin{aligned} E_Y &= \{(\xi, v) : \exists u \in K, v \geq u^2, \xi = AY + U, v \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(\xi, v) : \exists u \geq 0, v \geq u^2, u = \xi_1 - y_2 \wedge u = (\xi_2 + y_1)^2\} \\ &= \{(\xi, v) : v \geq (\xi_1 - y_2)^2, \xi_1 - y_2 = (\xi_2 + y_1)^2 \wedge \xi_2 \geq y_1\} \end{aligned}$$

não é necessariamente convexo pois, por exemplo para $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ temos temos

$$E_Y = \{(\xi, v) : v \geq (\xi_1)^2, \xi_1 = (\xi_2)^2 \wedge \xi_2 \geq 0\}$$

e como o conjunto

$$\{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = (\xi_2)^2 \wedge \xi_2 \geq 0\}$$

não é convexo, como podemos verificar na Figura 4.3 então E_Y também não é convexo.

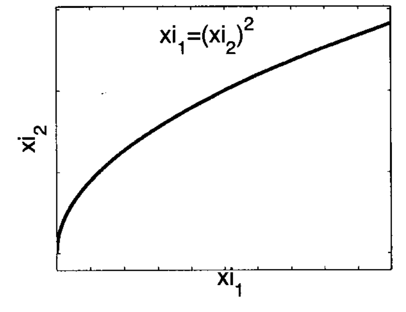

Fig. 4.3: Projecção horizontal de Ey

iii) Neste caso, K é ilimitado, no entanto, como

$$\|AY + U\| \leq \|AY\| + \|U\| = C + \sqrt{u^2 + |u|}$$

temos que

$$\|AY + U\| \longrightarrow +\infty \Rightarrow \|U\| \longrightarrow +\infty \Rightarrow u \longrightarrow +\infty$$

e

$$\frac{u^2}{\|AY + U\|} \geq \frac{u^2}{C + \sqrt{u^2 + |u|}} \longrightarrow +\infty \quad \text{se} \quad u \longrightarrow +\infty$$

logo

$$\lim_{\|AY+U\| \to +\infty} \frac{u^2}{\|AY + U\|} = +\infty.$$

Este última condição foi analisada apenas a título de exemplo pois, como não temos verificada a condição de convexidade, não podemos garantir a existência de solução usando o Teorema 3.5.

5. APROXIMAÇÃO NUMERICA

Após termos analisado alguns exemplos de Controlo Óptimo, tentado garantir a existência de solução e determinado os ingredientes principais para a sua reformulação variacional, resta-nos agora tentar encontrar a solução para esses problemas, ou melhor dizendo, aproximar essa solução.

Embora falemos de solução, é bom relembrar que no respeitante ao problema de controlo óptimo a solução é um par do tipo (y, u), no entanto, com a solução da respectiva formulação variacional obtemos apenas a primeira componente y do referido par. Esta componente servirá para obter o controlo u. Vejamos de seguida como a partir de um problema autónomo (independente do tempo) típico do Cálculo das Variações poderemos obter uma aproximação da sua solução óptima Y.

5.1 *Discretização do Problema Variacional*

Com base nos raciocínios tipicamente utilizados na aproximação numérica do cálculo integral (dos métodos do Trapézio, Simpson e Ponto Médio), podemos discretizar o Integral de Custo do problema variacional (VP) da seguinte forma:

Considerando uma partição de $[0, 1]$ do tipo

$$P = \{x_1 \;, ..., \; x_n\}$$

verificando

$$x_1 = 0, \; x_n = 1 \;\text{ e }\; (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n-1} \;\forall i = 1..n$$

então

$$\int_0^1 \varphi(y, y')dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(y, y')dx \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}, \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \varphi\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}, \frac{y_{i+1} - y_i}{\frac{1}{n-1}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{y_i+y_{i+1}}{2},(n-1)(y_{i+1}-y_i)\right)$$

Assim, admitindo que as soluções podem ser aproximadas for funções continuas seccionalmente afins, podemos considerar a discretização de (VP) como sendo

$$(DP) \quad \min D(y_1,...,y_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{y_i+y_{i+1}}{2},(n-1)(y_{i+1}-y_i)\right)$$

Com $y_1 = y(0)$, $y_n = y(1)$ e n o número de pontos da partição de $[0,1]$.

Podemos verificar a aplicação desta discretização ao problema da Superfície Mínima, problema clássico do Cálculo das Variações, cuja solução, sobejamente conhecida, é dada por

$$y(t) = \frac{1}{a}\cosh(at+b)$$

em que a e b são determinadas a partir das condições iniciais.

Consideremos então o problema:

$$\min \int_0^1 \varphi(y,y')dx = \int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

condicionado por $y(0) = 2,\ y(1) = 1$.

Cuja solução é

$$y(t) = \frac{1}{0.697}\cosh(0.697t + 3.32)$$

Para resolver (DP) vamos usar um algoritmo que reduz o problema de minimização em $\mathbb{R}^n$ para um problema de minimização de uma variável. Para isso, debruça-se iterativamente sobre cada componente de $(y_1,...,y_n)$ ao mesmo tempo que fixa as restantes como constantes. A minimização em relação a essa componente é feita de uma forma muito simples, comparando valores, o que se torna muito útil quando as funções envolvidas podem por exemplo, não ser suaves ou até tomar valores infinitos.

Tendo escolhido utilizar o software Matlab, a implentação pode ser feita da seguinte forma:

Começamos por definir uma *m function* representando o Lagrangeano do problema (VP)

```
--------------------------------------------------
function f = funsurfmin(s,v)

f=s*sqrt(1+v^2)
--------------------------------------------------
```

Criamos outra *m function* representando a função $D(\varphi, Y)$ acima indicada, de forma a poder ser aplicada a qualquer lagrangeano φ.

```
--------------------------------------------------
function f=discret(varphi,Y) f=0; n=length(Y); for i=1:n-1;

   f=f+feval(varphi,(Y(i)+Y(i+1))/2,(n-1)*(Y(i+1)-Y(i)));

end; f=(1/(n-1))*f;

--------------------------------------------------
```

De seguida, num ficheiro tipo *script*, escrevemos o algoritmo que consiste em três partes: escolha de parâmetros, critérios de paragem e definição de variaveis; ciclo principal incluindo os subciclos de minimização para cada uma das componentes pares e impares; representação dos resultados obtidos e comparação com a solução conhecida.

```
--------------------------------------------------
 Minimizing Cycle

--------------------------------------------------

clear; clc; close all; format long;

%dados iniciais que deverão ser introduzidos por caixa

janela={ 'y0>0',' yn>0',' n','iteraçoes it','erro',' passo '};
titulo='Dados Iniciais  e Opçoes de Pesquisa';
% nota: as condições iniciais deverão ser positivas
def={'20','10','20','150','0.0000001','1','limite N '};
numlinhas=1;
```

```
%janela para inserir dados na forma de string

v  = inputdlg(janela,titulo,numlinhas,def);
vi=str2num(v{1})% converter as string em numeros
vf=str2num(v{2}) n=str2num(v{3}) it=str2num(v{4})
erro=str2num(v{5}) Passo=str2num(v{6}) N=str2num(v{7})

%definição da estimativa inicial Y0-
%deve ser o mais próxima do real possível

Y0=vi:(vf-vi)/(n-1):vf

discr=@discret


%Escolha do Langrangeano
varphi=@funsurfmin;

%Valor inicial da função discretizada

f0=feval(discr,varphi,Y0)

%Alarme para escolha inicial errada

if isequal(f0,inf)==1
    disp( 'Bad initial approach!!')
    break
end


%indicador da Complexidade do ciclo
complexidade=it*2*N*n;

titulo2=['complexidade=',num2str(complexidade)] button =
questdlg('Quer continuar?',titulo2,'default') if
strcmp(button,'No')
    disp( 'Complexidade muito elevada!!')
    break
elseif strcmp(button,'Cancel')
    disp( 'Complexidade muito elevada!!')
    break
end

if complexidade > 10000000
```

```
    complexidade
    disp( 'Complexidade muito elevada!!')
    break
end


--------------------------------------------------


%Início do metodo


f1=f0; Y=Y0; e=1;


%Ciclo Principal

for j=1:it

    fopt=f1

%Subciclo para as componentes pares
for p=2:2:n-1

%calcular a malha de pontos a avaliar
 Passo1=Passo
   for m=1:N
          f11=f1;
          Y1=Y;

          Z=[Y1(p)-Passo1;Y1(p)+Passo1];
          %avaliar
          for k=1:2    %2*grdz*N+1;
              Y1(p)=Z(k);
              F(k)=feval(discr,varphi,Y1);
          end
          [f1,I]=min(F) %identificar o mínimo

          if  f1 >= f11
               f1=f11
            Passo1=Passo1/2
        else
            Y(p)=Z(I)
            e=abs(f11-f1)
            if e<erro
```

```
            break
          end
        end
      end
        m
      Comp=[f0, f1]

end p

%Subciclo para as componentes ímpares

for i=3:2:n-1
%calcular a malha de pontos a avaliar
       Passo1=Passo
       for m=1:N
          f11=f1;
          Y1=Y;

          Z=[Y1(i)-Passo1;Y1(i)+Passo1];
          %avaliar
          for k=1:2
              Y1(i)=Z(k);
              F(k)=feval(discr,varphi,Y1);
          end
          [f1,I]=min(F) %identificar o mínimo

          if  f1 >= f11
               f1=f11
            Passo1=Passo1/2
        else
            Y(i)=Z(I)
            e=abs(f11-f1)
            if e<erro
              break
            end
          end
      end
        m
      Comp=[f0, f1]

 end i E=abs(fopt-f1)

  if E<erro
         break
```

```
 end
j end complexidade=j*(n-2)*m*2; compa=[Y;Y0]

%Representação dos resultados e comparação com a solução óptima
%tic=vf:1/N0:vi;
x=0:1/(n-1):1;
plot(x,Y0,'--*r');%representa os pontos (x(i),optimal(i))
hold on plot(x,Y,':ob');
hold on ezplot('(1/.69704391967358)*(0.5)
*(exp(.69704391967358*x-3.32668375546279)
+exp(-.69704391967358*x+3.32668375546279)) ',[0,1] ) hold off
set(gca,'YGrid','on');
%set(gca,'YDir','reverse')
%set(gca,'XTick',x)
%set(gca,'YTick',tic)
%grid on
xlabel('x'); ylabel(' optimal y'); title([v{1},', ',v{2},'
n=',v{3},' itrc=',num2str(j),', Passo=',v{6},',
Erro=',num2str(e,8),', fo=',num2str(f0,8),',
f*=',num2str(f1,8),...
        ' Cmplx=',num2str(complexidade) ]);


-------------------------------------------------
```

A aplicação do algoritmo acima descrito revela ser neste caso, um método bastante útil para aproximar a solução do problema de forma relativamente rapida e sem grande margem de erro, como podemos verificar na Figura 5.1.

Estes resultados mantém-se se considerarmos outros valores para $y(0)$ e $y(1)$.

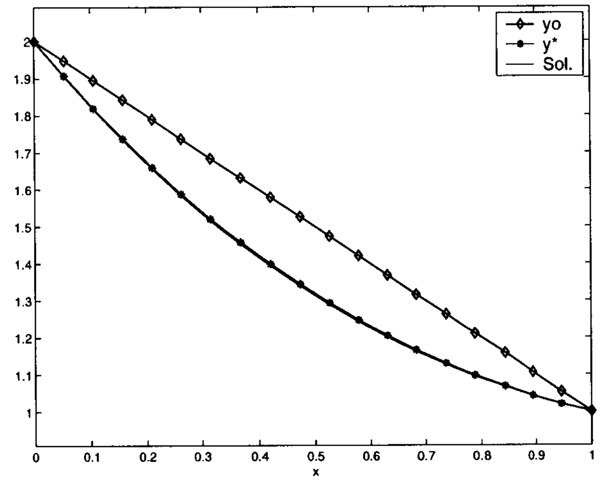

Fig. 5.1: Solução aproximada para y(0)=2 e y(1)=1

5.2 Aplicação aos Exemplos

Vejamos agora, quais os resultados obtidos, quando tentamos aproximar uma solução para os problemas de dimensão um, analisados no capítulo anterior. Aproveitaremos para a partir das trajectórias encontradas, encontrar também os controlos óptimos em cada um dos problemas. Para isso, procuraremos para cada $t \in [0,1]$ o controlo $u(t)$ que verifica simultâneamente

$$\varphi(y(t), y'(t)) = F(y(t), u(t)) \text{ e } y'(t) = f(y(t), u(t)).$$

1. Para o problema já analisado

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 |u(t)|^2 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + y(t) = u(t) \text{ e } |u(t)| < 1, \ \forall t \in [0,1],$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

tem como problema reformulado:

$$\text{Minimizar} \quad J(y) = \int_0^1 \varphi(y(t), y'(t))dt$$

com $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.

sendo

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (\xi + y)^2 & \text{se } -1 \leq \xi + y \leq 1 \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Com a aplicação do algoritmo em Matlab podemos obter uma aproximação da trajectória y, embora neste caso, não seja possível compara-la com a solução real, simplesmente porque não a conhecemos. Podemos no entanto, obter o controlo u a partir de y, tendo em conta que este deverá verificar

$$(y'(t) + y(t))^2 = u(t)^2 \text{ e } y'(t) + y(t) = u(t),$$

o que implica

$$u(t) = y'(t) + y(t).$$

Devemos para isso, acrescentar no ficheiro tipo *script* os comandos

```
for i=1:n
    if i>1
       U(i)=Y(i)+(n-1)*(Y(i)-Y(i-1));
    else
                 U(i)=Y(i)+(n-1)*(Y(i+1)-Y(i));
    end
end U
for i=1:n
    if i<n
      U1(i)=Y(i)+(n-1)*(Y(i+1)-Y(i));
    else
      U1(i)=Y(i)+(n-1)*(Y(i)-Y(i-1));
end
end U1 Controlo=[U;U1];
```

o que não é mais do que resolver a equação $y'(t) + y(t) = u(t)$ em cada intervalo da partição de $[0, 1]$.

Por exemplo, quando $y(0) = -0,1$ e $y(1) = -0,1$ obtemos os resultados expressos na Figura 5.2.

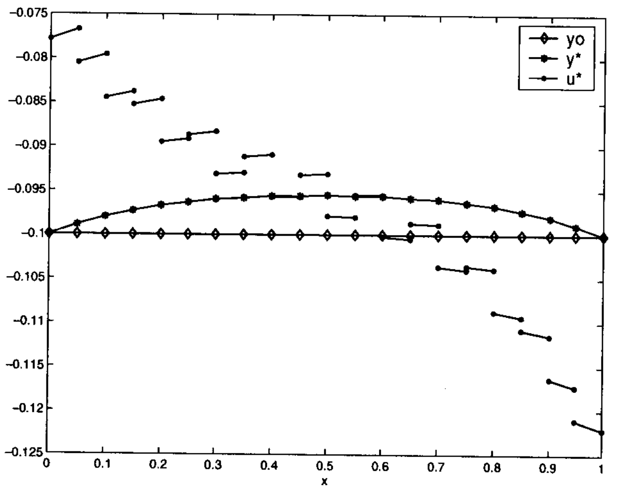

Fig. 5.2: Trajectória $y*$ e controlo $u*$ aproximados

2. Para o problema

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 (|y(t)|^2 - 1)^2 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + y(t) = u(t) \text{ e } |u(t)| < \frac{1}{2}, \ \forall t \in [0,T],$$

com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y(1) = y_1$ livre, o lagrangeano da reformulação variacional é

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} |y(t)|^2 - 1)^2 & \text{se } -\frac{1}{2} \leq \xi + y \leq \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Neste caso, o controlo u é encontrado introduzindo os mesmos comandos que no exemplo anterior, pois a equação diferencial é a mesma e

$$\varphi(y(t), y'(t)) = |y(t)|^2 - 1)^2 = F(y(t), u(t))$$

não depende de u.

Quanto aos resultados, começamos por procurar aproximar a solução com $y(1)$ livre, pois esta situação está mais próxima do real. A solução obtida está representada na Figura 5.3.

É de notar que quando a partição do intervalo $[0,1]$ tiver um número suficientemente grande de elementos, o controlo será praticamente constante igual a $\frac{1}{2}$.

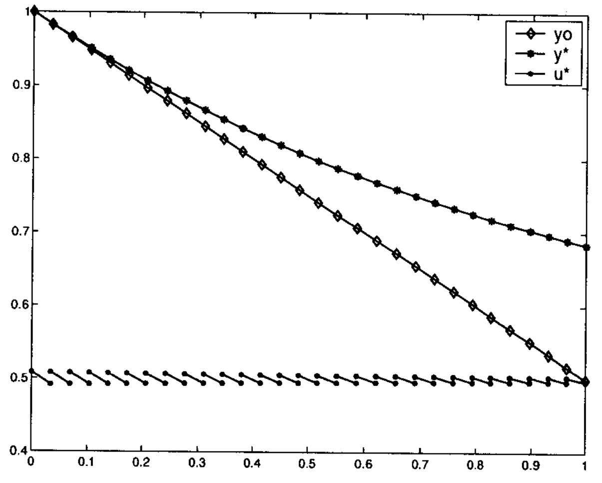

Fig. 5.3: Trajectória $y*$ e controlo $u*$ para y_1 livre

De qualquer modo, a situação em que garantimos existência de solução conta com y_1 fixo. Neste caso, considerando por exemplo, $y_1 = 0.5$, o controlo vai sofrer uma mudança brusca precisamente na altura em que y começa a aproximar-se de y_1, pois o declive (negativo) torna-se mais acentuado e, para que se verifique $u(t) = y'(t) + y(t)$, $u(t)$ terá que tomar valores também mais pequenos, como poderemos observar na Figura 5.4.

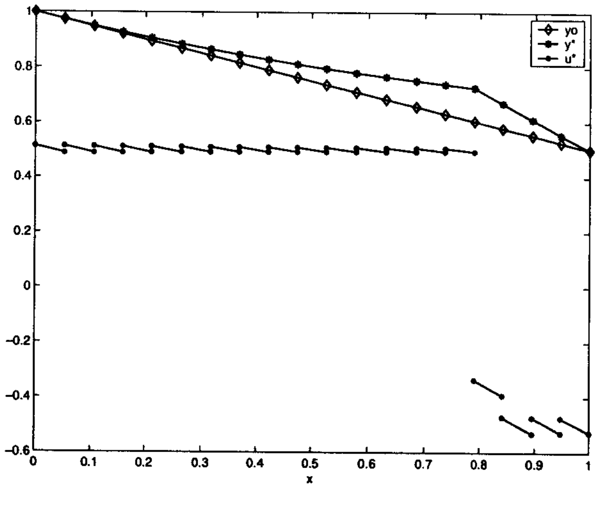

Fig. 5.4: Trajectória $y*$ e controlo $u*$ para y_1 fixo

3. O problema

$$\text{Minimizar} \quad I(y,u) = \int_0^1 u(t)^4 dt$$

sujeito a

$$y'(t) + u(t)y(t) = u^2(t) \text{ e } |u(t)| \leq 1, \; \forall t \in [0,T],$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y(1) = y_1$.
A sua formulação variacional é dada por

$$\varphi(y,\xi) = \begin{cases} (\frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y \leq 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ (\frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2})^4 & \text{se } -1 \leq \frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2} \leq 1 \text{ e } y > 0 \text{ e } \xi > -\frac{y^2}{4} \\ +\infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para chegar a esta expressão , no Capítulo 4 foi necessário concluir que

$$u = \begin{cases} \frac{y+\sqrt{y^2+4\xi}}{2} & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{y-\sqrt{y^2+4\xi}}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

Assim, para obter u a partir da solução aproximada y é necessário inserir o código

```
for i=1:n
    if i>1
       U(i)=0.5*(Y(i)+sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i)-Y(i-1))));
   else
       U(i)=0.5*(Y(i)+sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i+1)-Y(i))));
   end
end U for i=1:n
   if  i<n
        U1(i)=0.5*(Y(i)+sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i+1)-Y(i))));
    else
       U1(i)=0.5*(Y(i)+sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i)-Y(i-1))));
    end
end
```

se $y \leq 0$ ou

```
for i=1:n
    if i>1
       U(i)=0.5*(Y(i)-sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i)-Y(i-1))));
   else
       U(i)=0.5*(Y(i)-sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i+1)-Y(i))));
   end
end U for i=1:n
   if  i<n
        U1(i)=0.5*(Y(i)-sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i+1)-Y(i))));
    else
       U1(i)=0.5*(Y(i)-sqrt(Y(i).^2+4*(n-1)*(Y(i)-Y(i-1))));
    end
end
```

se $y > 0$.

Deste modo, quando consideramos por exemplo, $y_0 = 0.5$ e $y_1 = 1.5$ obtemos a solução descrita na Figura 5.5.

Se ao invés, considerarmos valores iniciais negativos, por exemplo, $y_0 = -3$ e $y_1 = -1$, terá representação gráfica como na Figura 5.6.

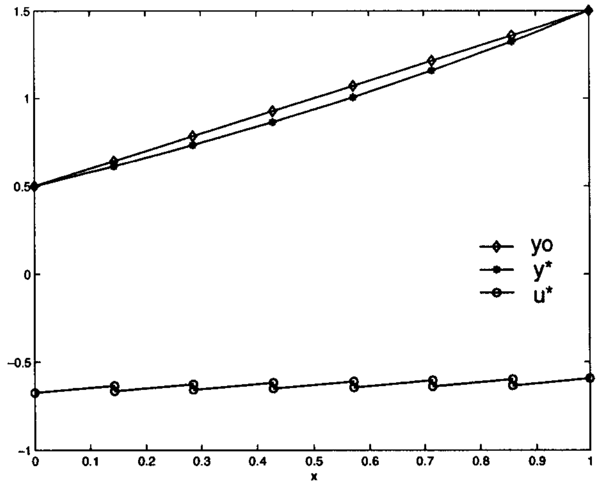

Fig. 5.5: Par óptimo $(y*, u*)$ para $y_0 = 0.5$ e $y_1 = 1.5$

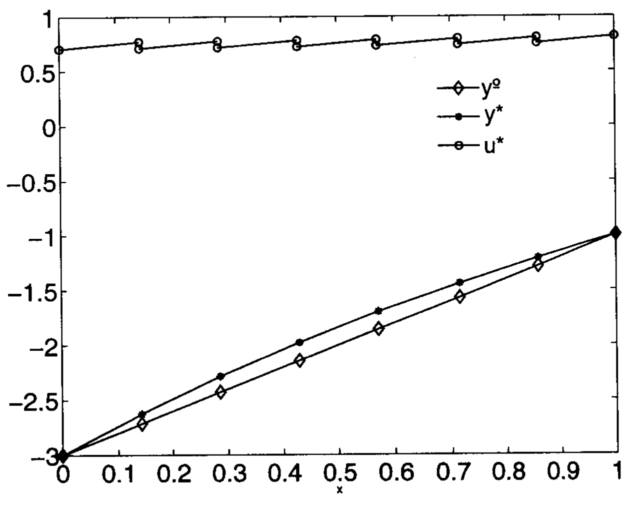

Fig. 5.6: Solução óptima quando $y_0 = -3$ e $y_1 = -1$

APÊNDICE

A. TEOREMA DA EXISTÊNCIA DE SELECÇÃO MENSURÁVEL

Apresenta-se de seguida a demonstração do principail resultado utilizado no Capítulo 2.

Começamos por dar algumas definições e enunciar alguns resultados relevantes.

Definição A.1 ([7] p. 28). *Seja X um espaço métrico, com métrica d, A e B dois subconjuntos de X. Define-se a distância entre A e B da seguinte forma:*

$$d(A,B) = inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\} \tag{A.1}$$

Definição A.2 ([1] p. 307). *Seja X um espaço métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, F uma multifunção de Ω para subconjuntos fechados e não vazios de X. Diz-se que F é mensurável se para qualquer aberto $\mathcal{O} \subset X$ tem-se*

$$F^{-1}(\mathcal{O}) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\} \in \mathcal{A} \tag{A.2}$$

Definição A.3 ([1] p. 308). *Seja X um espaço métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, F uma multifunção mensurável de Ω para subconjuntos fechados e não vazios de X. Chamamos selecção mensurável de F a uma função mensurável unívoca $f : \Omega \to X$ que verifique*

$$\forall \omega \in \Omega,\ f(\omega) \in F(\omega) \tag{A.3}$$

Definição A.4 ([6] p. 282). *Seja X um espaço métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável.*

Uma função $f : \Omega \to X$ diz-se simples se toma uma quantidade enumerável de valores x_i distintos.

Uma função simples diz-se mensurável se

$$\forall i \in \mathbb{N},\ f^{-1}(x_i) \in \mathcal{A} \tag{A.4}$$

Teorema A.1 (Egoroff [17] p. 69). *Seja X um espaço métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f_i : \Omega \to X$, $i \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções mensuráveis. Então são equivalentes as afirmações*

i) $\lim\limits_{i} f_i(\omega) = f(\omega)$, *q.t.* $\omega \in \Omega$ *;*

ii) $\lim\limits_{i} f_i = f$ *(convergência uniforme) e f e mensurável.*

Agora, o resultado principal:

Teorema A.2 (Selecção Mensurável [1] p. 308). *Seja X um espaço métrico completo e separável, $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, F uma multifunção mensurável de Ω para subconjuntos fechados e não vazios de X. Então existe uma seleção mensurável de F.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ um subconjunto enumerável e denso em X. Vamos construir por indução uma sucessão de funções mensuráveis $f_k : \Omega \to X$, $k > 0$ com valores em $\{x_n\}$ e convergindo uniformemente para uma selecção f mensurável.

Seja d a distância em X. Para $\forall t \in \Omega$ seja $n \geq 1$ o menor inteiro tal que $F(t) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset$. Definamos $f_0(t) = x_n$. Então f_0 é uma função simples. Sejam

$$E_n = f_0^{-1}(x_n) = \{t \in \Omega : f_0(t) = x_n\} \text{ e } A_n = \{t \in \Omega : F(t) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset\}$$

então

$$E_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k<n} A_k \right) = \left(A_n^c \cup \left(\bigcup_{k<n} A_k \right) \right)^c. \tag{A.5}$$

Como F é mensurável, por (A.2) cada A_n é mensurável e logo E_n também, pois é o complementar de uma união finita de mensuráveis ([6] p. 43). Assim, por (A.4) f_0 é mensurável . Além disso,

$$\forall t \in \Omega, \ d(f_0(t), F(t)) < 1$$

Supondo que já construimos funções mensuráveis $f_k : \Omega \to \{x_n\}$, com $k = 0, ..., m$ satisfazendo

$$\forall k \ 0 \leq k \leq m, \ \forall t \in \Omega, \ d(f_k(t), F(t)) < \frac{1}{2^k} \tag{A.6}$$

$$\forall k \ 0 \leq k \leq m, \ \forall t \in \Omega, \ d(f_k(t), f_{k+1}(t)) < \frac{1}{2^{k-1}} \tag{A.7}$$

Para todo o n definamos $S_n = \{t \in \Omega : f_m(t) = x_n\}$. Os Conjuntos S_n são mutuamente disjuntos pois f_m é uma função unívoca. Também

$$\bigcup_n S_n = \bigcup_n \{t \in \Omega : f_m(t) = x_n\} = \{t \in \Omega : f_m(t) \in \{x_n\}\} = \Omega$$

De (A.6) temos

$$\forall t \in \Omega, \; d(f_m(t), F(t)) < \frac{1}{2^k}$$

e em particular

$$\forall t \in S_n, \; d(x_n, F(t)) < \frac{1}{2^k} \text{ ou seja,}$$

$$\forall t \in S_n, \; F(t) \cap B(x_n, 2^{-m}) \neq \emptyset.$$

Seja $t \in \Omega$ e n tais que $t \in S_n$, isto é, tais que $f_m(t) = x_n$. Considerando o menor inteiro r tal que

$$F(t) \cap B(x_n, 2^{-m}) \cap B(x_r, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset \tag{A.8}$$

e seja $f_{m+1}(t) = x_r$. Então de (A.8), vem que

$$d(f_m(t), f_{m+1}(t)) \leq 2^{-m} + 2^{-(m+1)} = \frac{2+1}{2^{m+1}} \leq \frac{2^2}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

e também que

$$F(t) \cap B(x_r, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset$$

o que significa que

$$d(x_r, F(t)) \leq 2^{-(m+1)} \text{ ou seja }, d(f_{m+1}(t), F(t)) \leq 2^{-(m+1)}$$

. Portanto, f_{m+1} verifica (A.6) e (A.7).

f_{m+1} é também uma função simples e se considerarmos

$$B_p = \{t \in \Omega : F(t) \cap B(x_n, 2^{-m}) \cap B(x_p, 2^{-(m+1)}) \neq \emptyset\}$$

vemos que

$$f_{m+1}^{-1}(x_r) = S_n \cap \left(B_r \setminus \bigcup_{p<r} B_p \right)$$

e portanto por razões análogas às utilizadas em (A.5), concluimos que $f_{m+1}^{-1}(x_r)$ é um mensurável qualquer $r \in \mathbb{N}$. Consequentemente por (A.4) f_{m+1} é mensurável.

Temos construida uma sucessão de funções mensuráveis f_k que verificam (A.6) e (A.7).

Fixando agora $t \in \Omega$ podemos concluir de (A.7) que $f_k(t)$ é um sucessão de Cauchy. Vejamos porquê: Supondo sem perda de generalidade que $m > n$ então pelas propriedades da função distância

$$d(f_m(t), f_n(t)) = d(f_{n+p}(t), f_n(t)) \leq d(f_{n+p}(t), f_{n+p-1}(t)) + ... + d(f_{n+1}(t), f_n(t))$$

Portanto aplicando (A.7) vemos que

$$\text{Dado } t \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\frac{\varepsilon}{p}},\ \forall m, n > N_{\frac{\varepsilon}{p}}$$

$$d(f_m(t), f_n(t)) \leq p\frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

o que significa que $f_k(t)$ é um sucessão de Cauchy, é convergente (pontualmente), por estar em X e este ser completo. Designemos o seu limite por $f(t)$.

Aplicando o Teorema A.1, temos f é mensurável (e que f_k converge uniformemente para f). Por (A.6), temos que

$$\forall k\ 0 \leq k \leq m,\ \forall t \in \Omega,\ d(f_k(t), F(t)) < \frac{1}{2^k}$$

o que, pela continuidade sequencial da função distância ([7] p. 37), dá-nos

$$d(f(t), F(t)) = 0,\ \forall t \in \Omega$$

O que significa por (A.1) que $\forall t \in \Omega,\ f(t) \in F(t)$ e portanto, f é uma selecção mensurável de F.

$\square$

B. TEOREMA DA EXISTÊNCIA DE TONELLI

Com vista a provar o teorema principal utilizado no Capítulo 3 começaremos, mais uma vez, por enunciar alguns resultados úteis para tal.

Definição B.1. *[6]: C é sequencialmente compacto se de toda a sucessão contida em C for possível extrair uma subsucessão convergente em C.*

Teorema B.1 (Critério de Compacidade Fraca [2] p. 77). *Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto de $L^1(\Omega)$ com Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) $\mathcal{C}$ e sequencialmente fracamente compacto em $L^1(\omega)$;

ii) Existe uma função $\theta : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando $\lim\limits_{v \to +\infty} \dfrac{\theta(v)}{v} = +\infty$ tal que $\sup\limits_{v \in \mathcal{C}} \int_\omega \theta(v)dt < +\infty$.

Teorema B.2 (Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue [6]). *Seja (u_n) uma sucessão de funções $L^1(\Omega)$ verificando:*

i) $u_n \to u$ q.s. em Ω;

ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|u_n(t)| \leq g(t)$ q.s. em Ω.

Então $u \in L^1(\Omega$ e (u_n) converge para u em $L^1(\Omega)$.

Teorema B.3 ([2] p. 110). *Seja φ uma função tal que:*

i) $\varphi(t, ., .)$ é s.c.i. em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ q.s. em Ω;

ii) $\varphi(t, y, .)$ e convexa em $\mathbb{R}^n$ para qualquer $y \in \mathbb{R}^m$ e q.s. em Ω;

iii) φe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_n$ mensurável.

Então o integral $J(y) = \int_a^b \varphi(t, y(t), y'(t))dt$ *e sequencialmente s.c.i. no espaço* $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \times L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *dotado da topologia forte em* $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *e da topologia fraca em* $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Estamos em condições para provar o teorema da existência utilizado no Capítulo 3.

Teorema B.4 (Teorema da Existência de Tonelli). *Suponha que* φ *satisfaz as seguintes condições:*

- *i)* φ *é* $\mathcal{L}\otimes\mathbf{B}^n\otimes\mathbf{B}^n$*-mensurável e* $\varphi(t,.,.)$ *é semi-continua inferiormente em* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *q.t.* $t \in I = [0, T]$;
- *ii)* $\varphi(t, y, .)$ *é convexa em* $\mathbb{R}^n$ *q.t.* $t \in I = [0, T]$ *e* $\forall y \in \mathbb{R}^n$;
- *iii)* $\varphi(t, y, \xi)$ *tem crescimento superlinear, i.e.,* $\exists \theta : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitado inferiormente (ou até localmente limitado inferiormente) tal que* $\varphi(t, y, \xi) \geq \theta(|\xi|) \quad \forall t, y, \xi$ *e* $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\theta(r)}{r} = +\infty$

Então existe um minimizante para

$$J(y) = \int_a^b \varphi(t, y(t), y'(t))dt$$

na classe

$$C(\alpha, \beta) = \{y \in AC((a, b), \mathbb{R}^n) : y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}$$

com α *e* β *fixos.*

Demonstração. Por iii) φ é limitado inferiormente e consequentemente também J o é e temos $\inf\limits_{C(,\alpha,\beta)} J(.) > -\infty$. Consideremos então uma sucessão (u_k) infimizante na classe $C(, \alpha, \beta)$, ou seja, que verifica

$$\lim_k J(u_k) = \inf_{C(,\alpha,\beta)} J(.).$$

Suponhamos que $\inf\limits_{C(,\alpha,\beta)} J(.) < +\infty$ (se tal não fosse, teríamos $J(.) = +\infty$ em $C(, \alpha, \beta)$ e o problema seria trivial).

Como (u_k) é uma sucessão infimizante de J, temos que

$$\exists M > 0, \forall k, J(u_k) < M.$$

Ainda por iii), podemos afirmar que

$$\exists \theta : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\theta(|u_k'(t)|) \leq \varphi(t, u_k(t), u_k'(t))$ q.s. em I, $\forall k$ e consequentemente

$$\int_I \theta(|u_k'(s)|)ds \leq \int_I \varphi(t, u_k(t), u_k'(t))ds \leq (b-a)M, \ \forall k$$

ou seja $\sup \int_\omega \theta(|u_k'(t)|)dt < +\infty$.

Como θ verifica também

$$\lim_{|u_k'| \to +\infty} \frac{\theta(|u_k'|)}{|u_k'|} = +\infty$$

podemos aplicar o Teorema B.1 e concluir que (u_k') possui uma subsucessão $(u_{k_n}'$ fracamente convergente para certo w em $L^1(I)$, isto é,

$$(u_{k_n}') \rightharpoonup^{L^1(I)} w. \tag{B.1}$$

Definindo agora $u(t) = \int_a^t w(s)ds + \alpha$ sabemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que $u'(t) = w(t)$ q.s. em I e $u(a) = \alpha$. Por (B.1) sabemos que

$$\int_E u_{k_n}'(s)ds + \alpha \to \int_E w(s)ds = \int_E u'(s)ds + \alpha, \ E \subseteq I$$

em particular para $E = [a, t]$, e por $(u_{k_n}) \subset W^{1,1}$, temos $(u_{k_n}(t) \to u(t)$ $\forall t$. Temos portanto a convergência pontual da subsucessão (em particular $u(b) = \beta$). Como

$$\forall k \exists C : \ |u_k(t)| \leq \left| \int_I u_k'(s)ds + \alpha \right| \leq \int_I |u_k'(s)|ds + \alpha < C$$

Então aplicando o Teorema (B.2), temos que $(u_{k_n}) \to^{L^1(I)} u$ e por (B.1) concluimos que

$$(u_{k_n}) \rightharpoonup^{w^{1,1}(I)} u$$

. Como $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, temos a convergência fraca na classe $C(\alpha, \beta)$.

Usando agora o teorema (B.3) podemos concluir que

$$J(u) \leq \liminf_n J(u_{k_n}). \tag{B.2}$$

Por outro lado, como (u_{k_n}) é uma subsucessão de uma sucessão infimizante,

$$\liminf_n J(u_{k_n}) = \inf_{C(\alpha,\beta)} J(.) \tag{B.3}$$

Sendo que temos necessariamente $\inf\limits_{C(\alpha,\beta)} J(.) \leq J(u)$ então de (B.2) e (B.3) concluimos que

$$J(u) = \inf_{C(\alpha,\beta)} J(.) = \min_{C(\alpha,\beta)} J(.)$$

ou seja, u é um minimizante (global) de $J(.)$ na classe

$$C(\alpha, \beta) = \{y \in AC((a,b), \mathbb{R}^n) : y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}$$

.

□

BIBLIOGRAFIA

[1] Aubin, J., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990.

[2] Buttazzo, G., Giaquinta, M., Hildebrandt, S., *One-dimentional Variational Problems*, Oxford University Press, 1998.

[3] Cesari, Lamberto, *Optimization Theory and Applications*, Springer-Verlag, 1983.

[4] Ekeland, I., Temam, R., *Analyse Convexe et Problems Variationnels*, Dunod, Gauthier-Villars, 1974.

[5] Fusco, N., Marcellini, P., Ornelas, A., *Existence of minimizers for some nonconvex onedimensional integrals*, Portugaliae Mathematica 55 (2) (1998), 167-184.

[6] Kolmogorov, A., Fomin, S., *Elementos da Teoria das Funções e da Análise Funcional*, MIR, 1982.

[7] Machado, Armando, *Topologia*, Escolar Editora, 1995.

[8] Ornelas, António, *Existence of scalar minimizers for autonomous simple integrals nonconvex except at zero*, pré-publicação (2000).

[9] Ornelas, António, *Existence and regularity for scalar minimizers of affine nonconvex simple integrals*, Nonlin Anal 53 (2003) 441-451.

[10] Pedregal, Pablo, *Fully explicit quasiconvexification of the mean-square deviation of the gradient of the state in on optimal design*, ERA-AMS 7 (2001), 72-78.

[11] Pedregal, Pablo , *On the Generality of Variational Principles*, Milan J. Math. 71 (2003), 319-356.

[12] Pedregal, Pablo , A.Donoso, *Optimal Design of Variable Thickness: A Varational approach in Dimention One*, Comp. Appl. Math. 22 (2003), 1-15.

[13] Pedregal, Pablo , Tiago, J., *Optimal Control Via Varational Principles* (em preparação).

[14] Rockafellar, R., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[15] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*, Macgraw-Hill, 1987.

[16] Vinter, Richard, *Optimal Control*, Birkhäuser-Verlag, 2000.

[17] Warga, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.