UNIVERSIDADE DE ÉVORA

TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL (VIAS CLÁSSICA E NÃO-STANDARD)

Uma dissertação apresentada

por

Romeu Vieira da Silva

para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Doutor A. J. Franco de Oliveira

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 1997/99

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL (VIAS CLÁSSICA E NÃO-STANDARD)

Uma dissertação apresentada

por

Romeu Vieira da Silva

para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Doutor A. J. Franco de Oliveira

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 1997/99

Abstract

This thesis concerns aspects of the functional analysis from both the classical and the nonstandard viewpoints.

Nowadays functional analysis plays an increasing role in the applied sciences as well as in mathematics itself.

Besides deepening the study of the subject itself, from a classical point of view, we took the opportunity to analyse some questions and try to make some proofs by the methods of nonstandard analysis, by applying some notions and techniques learned in the Master of Science in Applied Mathematics course on Nonstandard Analysis.

We begin by presenting the Nonstandard Analysis axiomatic foundations (Nelson' s axiomatics), make some immediate applications to the real line and give nonstandard (or external) characterizations of several notions, namely the shadow of a real number and the limit of a sequence of real numbers.

In order to study the spectral theory we also present some topological notions needed in a nonstandard framework.

Agradecimentos

Para a elaboração e motivação deste trabalho muito contribuiram as aulas de Licenciatura e de Mestrado leccionadas pelo Prof. Doutor Franco de Oliveira e a sua orientação.

Outra pessoa a quem quero agradecer é à minha colega de Mestrado Graça Carita pelas "dicas" que me deu no processamento do texto. Pela motivação, nos momentos mais difíceis da parte curricular do Mestrado, agradeço à colega de Mestrado, Maria Domingas Reforço.

Pela ajuda na escrita em Inglês agradeço a colaboração do meu colega na Escola Superior de Educação de Beja, professor e Mestre em Inglês, Florêncio Moniz.

Por último, mas não os menos importantes, quero agradecer aos meus pais que me apoiaram incondicionalmente.

Romeu Vieira da Silva

Índice

Prefácio

O texto que segue pretende ser uma incursão na Análise Funcional, não só através da via clássica mas também da via não-standard, tal como o título indica. A exposição clássica baseia-se essencialmente nas monografias de F. R. Dias Agudo [Agu], Haïm Brezis [Bre], Jean Dieudonné[Die], Lokenath Debnath, Piotr Mikusiński [DM], Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz [DS], Erwin Kreyszig [Kre], e Walter Rudin [Rud] indicadas na Bibliografia. A exposição não-standard baseia-se essencialmente em Nigel J. Cutland, Vítor Neves, A. J. Franco de Oliveira, José Sousa-Pinto (Editores) [CNO], F. Diener, G. Reeb [DR], E. Nelson (cap. 5) [Nel], A. J. Franco de Oliveira [Oli_2], A. J. Franco de Oliveira, Luís Gonzaga Albuquerque Santos Jorge [OJ], A. Robert [Rob] e A. Robinson [Robi] também referidas na Bibliografia.

Nos primeiros três capítulos expomos os fundamentos axiomáticos da Análise Não-Standard (axiomática de Nelson) e no quarto capítulo (Números e regras de cálculo) a sua aplicação imediata à recta real e à caracterização não-standard (ou externa) das noções de sombra de um número real e limite de uma sucessão.

No quinto capítulo (Topologia e ANS) expomos as noções topológicas (numa forma não-standard) que iremos utilizar nos restantes capítulos.

O capítulo seis (Operadores lineares em espaços normados) é constituído por resultados clássicos excepto a partir da Proposição-definição 1.6.18.

No capítulo sete as propriedades dos operadores (S-)compactos são apresentadas segundo uma via clássica.

No oitavo capítulo (Teoria espectral em espaços normados de dimensão finita) usamos a via clássica excepto no exemplo que damos de uma matriz não-standard com valores próprios standard e com dois vectores próprios sendo um deles standard e o outro não-standard.

Do nono capítulo ao décimo quarto expomos os resultados segundo a via clássica e os dois últimos através da via não-standard.

No Apêndice incluímos alguns resultados clássicos que poderiam ter sido omitidos.

As nossas incursões pela análise funcional pela via não-standard devem-se considerar como tentativas parciais, uma vez que o assunto não está muito explorado na literatura e o âmbito deste trabalho não permite voos muito mais altos.

TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL (VIAS CLÁSSICA E NÃO-STANDARD)

Introdução

No Mestrado surgiu uma disciplina totalmente desconhecida: Análise Não-Standard leccionada pelo Prof. Doutor Franco de Oliveira. O primeiro embate foi chocante pois é necessário aceitar que todos os conjuntos infinitos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \ldots$ possuem concerteza elementos standard e elementos não-standard.

Várias são as aplicações da Análise Não-Standard (abreviadamente ANS) e obtém-se resultados novos, através de métodos não-standard, na Teoria das Probabilidades, nas Equações Diferenciais, na Física, etc.

A Análise Funcional é um tema que muito apreciamos e como é sabido é um instrumento essencial da análise moderna e sua aplicação ao estudo das equações diferenciais, teoria dos operadores,....

Quisemos aproveitar esta oportunidade para, além do aprofundamento do assunto em si mesmo, do ponto de vista clássico, analisarmos algumas questões e tentarmos, fazer algumas demonstrações por via não-standard, aplicando algumas noções e técnicas aprendidas na parte curricular do Mestrado.

Iniciamos estas aplicações não sem antes referir os princípios base da ANS: a transferência, a idealização e a standardização.

1.1 O princípio de transferência

Dos objectos matemáticos usuais (números, funções, ...) há alguns que se chamam *standard* e outros *não-standard*. Há assim um termo novo, o termo "standard". Para dizermos que x é standard escrevemos $st(x)$.

Outras notações:

$$\forall^{st} x F(x) \text{ abrevia } \forall x[st(x) \Rightarrow F(x)]$$
$$\exists^{st} x F(x) \text{ abrevia } \exists x[st(x) \wedge F(x)].$$

Diz-se que uma fórmula interna (isto é, uma fórmula que se pode escrever sem utilizar a palavra standard nem nenhuma das suas derivadas) é uma fórmula standard se todas as constantes dessa fórmula forem standard, e não é uma fórmula standard se contém pelo menos uma constante não-standard. Assim, os axiomas de ZFC (Zermelo-Fraenkel + Axioma da Escolha) são fórmulas standard porque são internas e não têm constantes.

1.1.1 Princípio de transferência (fraco)

Para toda a fórmula standard $F(x)$ que não tenha mais nenhuma variável livre (i. e. que não está quantificada) sem ser x, tem-se que

$$\forall^{st} x F(x) \Rightarrow \forall x F(x);$$

Equivalentemente (contrapondo a implicação)

$$\exists x F(x) \Rightarrow \exists^{st} x F(x).$$

Este princípio servirá para mostrar que certos conjuntos são standard, tal como no próximo:

1.1.2 Teorema

O conjunto vazio é um conjunto standard.

Dem. O conjunto vazio define-se pelo primeiro axioma de ZFC que se escreve:

$$\exists x[\forall y(y \notin x)].$$

A fórmula entre parêntesis rectos é standard (interna, sem constante) e não contém mais nenhuma variável livre do que x (y está quantificada). Portanto, por transferência temos que $\exists^{st} x_0[\forall y(y \notin x_0)]$. Mas $\emptyset$ é único (em virtude do 2º axioma de ZFC, o axioma de extensão), donde $x_0 = \emptyset$.□

1.1.3 Corolário

Os inteiros 0, 1, 2, 3 são standard.

Dem. Como por definição $0 = \emptyset$ e $n + 1 = n \cup \{n\}$, $1 = \{\emptyset\}$,

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, estes inteiros são definidos através do conjunto vazio e de alguns axiomas de ZFC que são fórmulas standard, donde o corolário.□

Analogamente, são standard os objectos: $10000, \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, π, log, exp, seno, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$ (com n standard), o espaço das funções contínuas $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, etc.

1.1.4 Regra

Todo o objecto da matemática clássica (ZFC) individualmente definível por uma fórmula interna standard (possivelmente com parâmetros standard) é standard.

Note-se que apesar de, por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ser standard ele contém elementos não-standard chamados "ilimitados".

Muitas vezes é necessário utilizar um princípio mais geral do que o princípio 1.1.1:

1.1.5 Princípio de transferência (geral)

Para toda a fórmula standard $F(x, t_1, ..., t_n)$ que não tenha mais variáveis livres que x, $t_1, ..., t_n$, tem-se que:

$$\forall^{st} t_1, t_2, ..., t_n \, [\forall^{st} x \, F(x, t_1, ..., t_n) \Rightarrow \forall x F(x, t_1, ..., t_n)];$$

Equivalentemente (contrapondo a implicação)

$$\forall^{st} t_1, t_2, ..., t_n [\exists x \, F(x, t_1, ..., t_n) \Rightarrow \exists^{st} x F(x, t_1, ..., t_n)].$$

1.1.6 Exemplos

1º) Dois conjuntos standard são iguais sse têm os mesmos elementos standard.

Dem.

($\Rightarrow$) Evidente.

($\Leftarrow$) Sejam x e y dois conjuntos standard (tal como em (ZFC) os conjuntos podem designar-se por letras minúsculas do nosso alfabeto e não somente por maiúsculas) com os mesmos elementos standard.

Tem-se $\forall^{st} z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$, por hipótese. A fórmula entre parêntesis é standard porque, por hipótese x e y são standard. Portanto, por tranferência, temos $\forall z \, (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$, donde $x = y$.□

2º) Uma função standard toma valores standard em argumentos standard.

Dem

Seja $f : A \to B$ uma função standard, com A e B standard. Tem-se que

$$\forall^{st} x \in A \; \exists y \in B \, [\, y = f(x) \,].$$

A propriedade entre parêntesis rectos é standard, logo por transferência

$$\forall^{st} x \in A \; \exists^{st} y \in B \, [\, y = f(x) \,].\square$$

3º) Uma função standard $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua sse é contínua em todo o ponto standard.

Dem.

Se f é contínua em $\mathbb{R}$, então é contínua em todos os pontos standard e não-standard.

Reciprocamente, se $\forall^{st} x (x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x)$, como $\mathbb{R}$ e f são standard, sai o resultado por transferência.□

As aplicações usuais do príncipio de transferência são essencialmente de dois tipos:

★ no primeiro (1^o e 3^o exemplos) faz-se uma relativização dos enunciados que pretendemos mostrar com objectos standard (i. e., para mostrar que $\forall x \ldots$, é suficiente mostrar que $\forall^{st} x \ldots$).

★ no segundo (2^oexemplo) utiliza-se o segundo enunciado de transferência para assegurar que a existência dum objecto satisfazendo uma propriedade standard conduz à existência dum objecto standard satisfazendo a propriedade, e se o objecto é único deriva ser standard.

Mais exemplos, da utilização do Princípio de Transferência, podem ser encontrados na já extensa bibliografia sobre ANS.

1.2 O princípio de idealização

Este princípio permite provar que todo o conjunto infinito contém inevitavelmente, do simples facto de ser infinito, elementos não-standard.

1.2.1 O princípio e os seus corolários

Tal como na matemática clássica o termo finito tem o mesmo significado: um conjunto A é finito se toda a injecção de A em A é uma bijecção.

Notações:

$fini(x)$ significa que o conjunto x é finito
$\exists^{fini} x F(x)$ abrevia $\exists x\,[fini(x)\ \wedge\ F(x)]$
$\forall^{fini} x F(x)$ abrevia $\forall x\,[fini(x)\ \Rightarrow\ F(x)]$
$\exists^{st\ fini} x F(x)$ abrevia $\exists x\,[st(x)\ e\ fini(x)\ \wedge\ F(x)]$
$\forall^{st\ fini} x F(x)$ abrevia $\forall x\,[st(x)\ e\ fini(x)\ \Rightarrow\ F(x)]$

1.2.2 Princípio de idealização

Para toda a fórmula interna B, contendo pelo menos duas variáveis livres x e y, tem-se:

$$\forall^{st\ fini} z \exists x \forall y \in z\ B(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y B(x,y).$$

1.2.3 Exemplo

Se B é uma relação binária tal como a relação $\geq$, a parte esquerda da equivalência indica uma propriedade da relação, chamada *concorrência*, segundo a qual para toda a parte finita da fonte existe um elemento do objectivo que está em relação simultaneamente com todos os elementos da parte finita considerada. Para a relação $\geq$, isto quer dizer que existe um majorante para cada parte finita.

Sabemos que existe um majorante para todos os elementos standard através da parte direita da equivalência.

1.2.4 Teorema

$\mathbb{N}$ contém naturais ilimitados.

Dem.

Aplicamos o princípio de idealização à relação interna e concorrente

$$B(x,y) = (x \in \mathbb{N} \ \wedge \ y \in \mathbb{N} \ \wedge \ x \geq y) \,.\square$$

Pode inferir-se que $\mathbb{R}$ contém igualmente números ilimitados. Os inteiros ilimitados são não-standard e a sua existência fica demonstrada pelo teorema supracitado.

1.2.5 Teorema

Um conjunto C é standard e finito se e só se todos os seus elementos são standard.

Dem.

Provar que $\forall x \in C \ st(x) \Leftrightarrow \exists^{st\ fini} F(C \subseteq F)$. **(1)**

Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned}
\exists x &\in C \neg st(x) \Leftrightarrow \exists x \in C \forall^{st} y\,(x \neq y) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \forall^{st\ fini} F \exists x \in C \forall y \in F\,(x \neq y) \Leftrightarrow \text{(por idealização)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st\ fini} F \exists x \in C\,(x \notin F) \Leftrightarrow \forall^{st\ fini} F\,(C \nsubseteq F)
\end{aligned}$$

donde (1) por contraposição.

Suponhamos que C é standard e finito. Por (1) [tomando $F = C$] vem que todo o elemento de C é standard.

Admitindo que todos os elementos de C são standard, novamente por (1) vem que existe F standard e finito tal que $C \subseteq F$, logo C é finito e $C \in \mathcal{P}(F)$, mas o conjunto das partes de F, $\mathcal{P}(F)$, também é standard (pela Regra 1.1.4) e finito, logo C é standard.□

1.2.6 Corolário

Todo o inteiro majorado por um inteiro standard é standard.

Dem.

Seja q um inteiro standard. O conjunto dos inteiros inferiores ou iguais a q é standard e finito, portanto todos os seus elementos são standard.□

1.2.7 Teorema (Nelson)

Para todo o conjunto C, existe um conjunto finito F contendo todos os elementos standard de C.

Dem.

Este teorema decorre imediatamente do princípio de idealização aplicado à relação $B(F,y) = (fini(F) \;\wedge\; y \in F)$ que é claramente interna e concorrente.□

1.3 O princípio de standardização e os seus corolários

Este princípio permite associar a todo o conjunto, quer seja interno ou externo, um único conjunto standard denominado o standardizado daquele. Existem várias consequências muito importantes tais como a da existência duma sombra para um elemento ou conjunto.

1.3.1 O princípio de standardização

Para toda a fórmula standard $F(z)$ (interna ou externa), temos

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\forall^{st}z\,[z \in y \Leftrightarrow z \in x \text{ e } F(z)]$$

Este princípio diz-nos que existe um conjunto standard y que tem como elementos standard os elementos standard z de x que verificam $F(z)$.

Facilmente se verifica a unicidade deste conjunto pois dois tais conjuntos standard y e y', por definição, têm os mesmos elementos standard. Como eles são standard, então são iguais.□

1.3.2 Definição

Seja x um conjunto e $E = \{z \in x : F(z)\}$ um subconjunto (interno ou externo) de E. Chama-se *standardizado de* E, e denota-se por ${}^{S}E$, ao único conjunto standard tendo por elementos standard, os elementos standard de E.

1.3.3 Observação

Assim se z é standard, $z \in E \Leftrightarrow z \in {}^{S}E$, ou seja, um conjunto e o seu standardizado têm por definição os mesmos elementos standard **mas** nada se sabe sobre os elementos não-standard do standardizado (podem até não verificar $F(z)$).

1.3.4 Exemplos

1°) Seja ν um natural ilimitado. Então

$$^{S}\{x \in \mathbb{N} : x < \nu\} = \mathbb{N} \text{ e } ^{S}\{x \in \mathbb{N} : x > \nu\} = \emptyset$$

pois $\mathbb{N}$ e $\{x \in \mathbb{N} : x < \nu\}$ são ambos standard, e têm os mesmos elementos standard, isto é, $\forall^{st}x(x \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x < \nu)$, pois todo o número natural standard é menor do que qualquer número natural não-standard, donde a primeira igualdade. Analogamente para a segunda.

2°) Seja ε infinitesimal (não nulo),

$$^{S}B(0,\varepsilon) = \{0\}, \text{ e } ^{S}B(\sqrt{\varepsilon},\varepsilon) = \emptyset$$

pois $\{0\}$ e $B(0,\varepsilon)$ [ver Definição 1.5.1 (bola aberta, bola fechada e esfera)] são ambos standard, e têm o mesmo elemento 0 que é standard (Corolário 1.1.3), isto é, $\forall^{st}x(x \in \{0\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge |x-0| < \varepsilon)$, e $B(\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)$ e $\emptyset$ são ambos standard (Teorema 1.1.2) e não têm elementos standard.

Os dois princípios seguintes são de versões fracas do princípio de standardização, úteis nas aplicações. Abreviações usadas:

$$\begin{gathered}\forall n F(n) \text{ abrevia } \forall n \in \mathbb{N} F(n)\\ \exists n F(n) \text{ abrevia } \exists n \in \mathbb{N} F(n)\\ \forall^{st} n F(n) \text{ abrevia } \forall^{st} n \in \mathbb{N} F(n)\\ \exists^{st} n F(n) \text{ abrevia } \exists^{st} n \in \mathbb{N} F(n)\end{gathered}$$

1.3.5 Princípio de indução externa

Para toda a fórmula $F(n)$ interna ou externa, temos:

$$\left[F(0) \text{ e } \forall^{st} n(F(n) \Rightarrow F(n+1))\right] \Rightarrow \forall^{st} n F(n).$$

Dem.

O conjunto $C = {}^{S}\{n \in \mathbb{N} : F(n)\}$ é um conjunto standard contendo 0, tal que $\forall^{st} n\,[n \in C \Rightarrow (n+1) \in C]$. Pelo princípio de indução matemática em $\mathbb{N}$, tem-se $C = \mathbb{N}$. Como $\{n \in \mathbb{N} : F(n)\}$ tem os mesmos elementos standard que C, ele contém todo n standard.□

1.3.6 Princípio de extensão funcional (saturação fraca)

Sejam X e Y dois conjuntos standard, ${}^{\sigma}X$ e ${}^{\sigma}Y$ os subconjuntos (externos) constituídos por elementos standard de X e de Y respectivamente. Se a todo $x \in {}^{\sigma}X$, podemos associar um único $y = f(x) \in {}^{\sigma}X$, então existe uma única aplicação standard $\tilde{f} : X \to Y$ que prolonga f a todo X.

Podemos escrever formalmente este princípio

$$\forall^{st} x \exists^{st} y \;\; (y = f(x)) \Leftrightarrow \exists^{st} \tilde{f} \forall^{st} x \;\; (\tilde{f}(x) = f(x))$$

ou mais geralmente

$$\forall^{st} x \exists^{st} y \; F(x,y) \Leftrightarrow \exists^{st} \tilde{y} \forall^{st} x F(x, \tilde{y}(x)).$$

Dem.

Consideremos o gráfico $G \subseteq {}^{\sigma}X \times {}^{\sigma}Y$ de f (que é um conjunto interno ou externo) e o seu standardizado ${}^{S}G$ em $X \times Y$. Por definição de standardizado, temos que:

$$\forall^{st} x \in X \exists^{st} y \in Y \; y \text{ único } (x,y) \in {}^{S}G.$$

Donde, por transferência {aplicada duas vezes pois

$$\left[\exists^{st} y \in Y \; y \text{ único } (x,y) \in {}^{S}G\right]$$

equivale a

$$\left[\exists^{st} y \in Y \left((x,y) \in {}^{S}G \text{ e } \forall^{st} y' \left((x,y) \in {}^{S}G \Rightarrow y' = y\right)\right)\right].\}:$$

$$\forall x \in X \exists y \in Y \; y \text{ único } (x,y) \in {}^{S}G.\square$$

1.4 Números e regras de cálculo

No que se segue é importante referir que um número natural n diz-se *ilimitado* ou *infinitamente grande* sse n é maior do que todo o número natural standard, bem como outras definições, a saber:

1.4.1 Definição

Um número real x diz-se:

(i) *ilimitado* ou *infinitamente grande* (abreviadamente, ig) sse o seu valor absoluto é superior a todo o natural standard, ou seja, $\forall^{st} n \in \mathbb{N} : |x| > n$, e diz-se *limitado* (ou *finito*) sse $\exists^{st} n \in \mathbb{N} : |x| \leq n$;

(ii) *infinitesimal* ou *infinitamente pequeno* (abreviadamente, ip) sse o seu valor absoluto é inferior a todo o real estritamente positivo standard, ou seja, $\forall^{st} r \in \mathbb{R}^+ : |x| < r$, ou equivalentemente, $\forall^{st} n > 0 : |x| < \frac{1}{n}$;

(iii) *apreciável* sse x é limitado e não é infinitesimal.

1.4.2 Lema

O único infinitesimal standard é 0.

Dem.

É evidente que zero é infinitesimal pois verifica [1.4.1 (ii)] como seria de esperar. Seja ε um infinitesimal standard; então pela definição anterior $\forall^{st} r \in \mathbb{R}^+ : |\varepsilon| < r$ logo por transferência $\forall r \in \mathbb{R}^+ : |\varepsilon| < r$ donde $\varepsilon = 0.\square$

1.4.3 Definição

Dois números reais x, y dizem-se *infinitamente próximos* ou *equivalentes* (abreviadamente $x \simeq y$) sse a sua diferença $(x - y)$ é infinitesimal, ou seja, $x \simeq y \Leftrightarrow \forall^{st} r > 0 : |x - y| < r$.

Dizem-se *assimptóticos* (abreviadamente $x \sim y$) sse $xy \neq 0$ e $\frac{x}{y}$ é equivalente a 1.

1.4.4 Outras notações empregues

- $x \ll y$ para x é inferior e não equivalente a y, ou seja, $\exists^{st} r > 0\,(y - x) > r$;
- $|x| \simeq \infty$ (ou $x \simeq +\infty$) para x é ilimitado (ou x é ilimitado positivo), ou seja, $\forall^{st} r > 0\,|x| > r$ (ou $\forall^{st} r > 0\, x > r$, respectivamente);
- $|x| \ll \infty$ (ou $x \ll +\infty$) para x é limitado, ou seja, $\exists^{st} r > 0\,|x| < r$ (ou $\exists^{st} r > 0\, x < r$, respectivamente).

1.4.5 Corolário

Para quaisquer reais standard a, b, $a < b \Rightarrow a \ll b$.

Dem.

Como a e b são standard, a sua diferença $a - b$ também o é. Se fosse $a \simeq b$ então $a - b \simeq 0$ (pois pelo Lema 1.4.2 zero é o único infinitesimal standard) e assim $a \not\simeq b$.□

1.4.6 Lema

A relação (externa) $\simeq$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Os números não-standard verificam todas as regras de cálculo esperadas. A saber:

1.4.7 Lema (regras de cálculo)

Para a e b reais limitados, $a \not\simeq 0$, ε e η infinitesimais, ω real ilimitado:

(i) $\varepsilon + \eta \simeq 0$ (a soma de dois infinitesimais é um infinitesimal);

(ii) $a + \varepsilon \simeq a$ (a soma de um real limitado com um infinitesimal é o real limitado);

(iii) $\dfrac{a}{\omega} \simeq 0$ (o quociente entre um real limitado e um real ilimitado é infinitesimal);

(iv) $\varepsilon \times \eta \simeq 0$ (o produto de dois infinitesimais é infinitesimal);

(v) $a + \omega \simeq \infty$ (a soma de um real limitado com um real ilimitado é um ilimitado);

(vi) $|a + b| \ll \infty$ (a soma de dois reais limitados é limitado);

(vii) $a \times \varepsilon \simeq 0$ (o produto de um real limitado por um infinitesimal é infinitesimal);

(viii) $a \times \omega \simeq \infty$ (o produto de um real limitado por um real ilimitado é ilimitado);

(ix) $|a \times b| \ll \infty$ (o produto de dois reais limitados é limitado).

Dem.

(i) Sejam ε e η dois infinitesimais; seja $r > 0$ standard. Como $\dfrac{r}{2}$ é standard e positivo e $|\varepsilon + \eta| \leq |\varepsilon| + |\eta| < \dfrac{r}{2} + \dfrac{r}{2} = r$ logo $\varepsilon + \eta$ é infinitesimal.$\square$

(ii) Seja ε um infinitesimal, a um real limitado e $r > 0$ standard. Como $|\varepsilon| < r$ vem que $|a + \varepsilon - a| < r$, ou seja, $a + \varepsilon \simeq a$.$\square$

(iii) Seja a um real limitado e ω um real ilimitado.Como a *é* um real limitado $\exists^{st} n \in \mathbb{N}\ |a| \leq n$ e como ω é ilimitado vem que $\forall^{st} m \in \mathbb{N}\ |\omega| > m$ logo $\begin{cases} |a| \leq n \\ |\omega| > m \end{cases}$ e assim $\dfrac{|a|}{|\omega|} < \dfrac{n}{m}$, ou seja, $\left|\dfrac{a}{\omega}\right| < r$.$\square$

(iv) Sejam ε e η dois infinitesimais; seja $r > 0$ standard. Como r^2 é standard e positivo e $|\varepsilon \times \eta| = |\varepsilon| \times |\eta| < (\sqrt{r})^2 = r$ logo $\varepsilon \times \eta$ é infinitesimal.□

(v) Seja a um real limitado e ω um real ilimitado então $\exists^{st} n \in \mathbb{N}\ |a| \leq n$ e $\forall^{st} m \in \mathbb{N}\ |\omega| > m$ logo como $|a + \omega| \geq ||a| - |\omega||$ vem de $|a| - |\omega| < n - m < \underbrace{n + m}_{=p}$ que $|a + \omega| > p$ logo $\forall^{st} p \in \mathbb{N}\ |a + \omega| > p \Leftrightarrow a + \omega \simeq \infty$.□

(vi) Sejam a e b reais limitados, ou seja, $\exists^{st} n_1 \in \mathbb{N}\ |a| \leq n_1$ e $\exists^{st} n_2 \in \mathbb{N}\ |b| \leq n_2$. Como $|a| + |b| \leq n_1 + n_2$ e pela desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$ vem que $|a + b| \leq \underbrace{n_1 + n_2}_{=n}$.□

(vii) Seja a um real limitado, ou seja, $\exists^{st} n \in \mathbb{N} : |a| \leq n$ e ε infinitesimal, ou seja, $\forall^{st} r \in \mathbb{R}^+ : |\varepsilon| < r$. Mostremos que $\forall^{st} s \in \mathbb{R}^+ : |a \times \varepsilon| < s$.

Por uma propriedade dos módulos $|a \times \varepsilon| = |a| \times |\varepsilon| < n \times r = s$.□

(viii) Seja a um real limitado, ou seja, $\exists^{st} n \in \mathbb{N} : |a| \leq n \Leftrightarrow \exists^{st} n \in \mathbb{N} : -|a| \geq -n$ e ω um real ilimitado, ou seja, $\forall^{st} m \in \mathbb{N} : |\omega| > m$. Mostremos que $\forall^{st} r \in \mathbb{R}^+ : |a \times \omega| < r$.

Por uma propriedade dos módulos $-|a \times \omega| = -|a| \times |\omega| < -n \times m = -r$ logo $|a \times \omega| < r$.□

(ix) Sejam a e b reais limitados, ou seja, $\exists^{st} n \in \mathbb{N} : |a| \leq n$ e $\exists^{st} m \in \mathbb{N} : |b| \leq m$.

Assim $|a \times b| = |a| \times |b| \leq \underbrace{n \times m}_{=p}$ logo $\exists^{st} p \in \mathbb{N} : |a \times b| \leq p$.□

1.4.8 Propriedades

Sejam $n \in \mathbb{N}$ limitado, $\omega \in \mathbb{N}$ eventualmente ilimitado, e para quase todo $i = 1, 2, ..., n$ ou ω, $b_i > 0$, ε_i dos reais.

Propriedade 1: Se x e y são apreciáveis (i. e., limitados e não infinitesimais), então $x \simeq y \Rightarrow x \sim y$ (mas é falso se x e y não forem apreciáveis).

Propriedade 2: Se $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i \ll \infty$ então $\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i \varepsilon_i \simeq 0$.

Dem.

1. Imediato.□

2. Para $\varepsilon = Max\{|\varepsilon_i|, i = 1, 2, ..., \omega\}$ temos $\left|\sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i \varepsilon_i\right| \leq \varepsilon \sum\limits_{i=0}^{\omega} b_i \simeq 0$.□

Na ANS a noção de sombra é fundamental e no caso mais simples a sombra de um número real:

1.4.9 Teorema (definição de sombra de um número real)

Para todo real limitado x, existe um único real standard $^o x$ tal que $x \simeq {}^o x$. Este real chama-se a *sombra de* x ou a *parte standard de* x.

Dem.

Unicidade: supondo que x, real limitado, tem duas sombras x_0 e x_1 então $x_0 \simeq x \simeq x_1$. Portanto o real $x_0 - x_1$ seria standard (pois por hipótese x_0 e x_1 são standard) e infinitesimal. Donde $x_0 = x_1$.

Existência: supomos x não-standard (note-se que se x é standard, $^o x = x$) e começamos por observar que, dado x limitado, o conjunto standard

$$C = {}^S\{t \in \mathbb{R} : t \leq x\}$$

é não vazio e majorado. Com efeito, como x é limitado, existe $r \in \mathbb{R}^+$ standard tal que $-r \leq x \leq r$, logo $-r \in C$; e, por definição de C, $\forall^{st} t \in C \quad (y \leq r)$ logo por transferência $\forall t \in C \quad (y \leq r)$.

Seja $a = \sup$ C, que é standard por C ser standard. Mostramos a terminar, que $x \simeq a$, isto é, que $\forall^{st} r > 0 \quad |x - a| < r$. Note-se que $x \neq a$, pois estamos supondo que x não é standard.

♣ Não pode ser $x - a \geq r$ para algum standard positivo r, pois viria $a < a + r \leq x$ com $a + r$ standard, logo $a + r \in C$, o que é absurdo (a não seria majorante de C).

♣ Mas também não pode ser $a - x \geq r$ para algum standard positivo r, pois viria $x \leq a - r < a$ com $a - r$ standard, logo $\forall^{st} t \in C \quad (t \leq a - r)$, donde por transferência, $\forall t \in C \quad (t \leq a - r)$, o que é absurdo ($a$ não seria o menor dos majorantes).□

1.4.10 Regra

Para todo x e y reais limitados, temos que:

(i) ${}^o(x \pm y) = {}^o x \pm {}^o y$

(ii) ${}^o(xy) = {}^o x {}^o y$

(iii) Se ${}^o x \neq 0$ então ${}^o\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{{}^o x}$

(iv) $x \leq y \Longrightarrow {}^o x < {}^o y$.

Dem. Do teorema resulta que todo o real limitado x é da forma $x = a + \varepsilon$ com $a = {}^o x$ standard e ε infinitesimal.

(i) Assim pretende-se provar que se x e y são reais limitados: ${}^o(x + y) = {}^o x + {}^o y$.

Se ${}^o x = a$ e ${}^o y = b$, então por definição de sombra de um número real (Teorema 1.4.9) $x \simeq a$ e $y \simeq b$, logo $x + y \simeq a + b$ e portanto ${}^o(x + y) = a + b$. Analogamente para ${}^o(x - y) = {}^o x - {}^o y$.$\square$

(ii) Se ${}^o x = a$ e ${}^o y = b$ então por (1.4.9) $x \simeq a$ e $y \simeq b$, logo $x \times y \simeq a \times b$ e portanto ${}^o(x \times y) = a \times b$.$\square$

(iii) Seja $y = x \times \dfrac{y}{x}$, com $x \neq 0$ logo por **(ii)** ${}^o y = {}^o\left(x \times \dfrac{y}{x}\right) =$
$= {}^o x \times {}^o\left(\dfrac{y}{x}\right)$, ou seja, ${}^o y = {}^o x \times {}^o\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Fazendo $y = 1$ vem que
${}^o 1 = {}^o x \times {}^o\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow {}^o\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{{}^o 1}{{}^o x} \Leftrightarrow {}^o\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{{}^o x}$.$\square$

(iv) Se x, y são reais limitados com $x \leq y$ e supondo

$$\begin{cases} x = a + \varepsilon \ \text{ com } a = {}^o x \text{ standard e } \varepsilon \text{ infinitesimal} \\ \\ y = b + \delta \ \text{ com } b = {}^o y \text{ standard e } \delta \text{ infinitesimal} \end{cases}$$

tem-se ${}^o x + \varepsilon \leq {}^o y + \delta$, donde ${}^o x \leq {}^o y + (\delta - \varepsilon)$. Ora, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $\delta - \varepsilon < r$, donde ${}^o x < {}^o y + r$ e, portanto, ${}^o x \leq {}^o y$.

Note-se que $x < y \Rightarrow {}^o x \leq {}^o y$, isto é, as desigualdades estritas não são preservadas pela "operação" $x \to {}^o x$, pois se ε é infinitesimal ${}^o(1 + \varepsilon) = 1$ e assim se fosse $x < y + \varepsilon \Rightarrow {}^o x < {}^o y$ vinha com x e y standard e fazendo $y = 1$: $x < 1 + \varepsilon \Rightarrow {}^o x < {}^o(1 + \varepsilon)$, ou seja, $x < 1 + \varepsilon \Rightarrow {}^o x < 1$, logo deverá ser ${}^o x \leq {}^o y$.

1.4.11 Exemplos

1º) Determinar a sombra dos números seguintes, sabendo que $1 \neq x \simeq 1$ e $0 \neq \varepsilon \simeq 0$:

(i) $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ **(ii)** $\dfrac{1 + x}{1 - \varepsilon x^2}$ **(iii)** $\varepsilon \dfrac{1 - x}{1 - x^3}$.

Resolução:

(i)

$$
\begin{aligned}
{}^{o}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= {}^{o}\left[\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right] = {}^{o}\left[\frac{(1\not-x)}{(1\not-x)(1+\sqrt{x})}\right] = \\
&= {}^{o}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \simeq \frac{1}{1+\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
{}^{o}\left(\frac{1+x}{1-\varepsilon x^2}\right) \simeq \frac{1+1}{1-0\times 1^2} = 2
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
{}^{o}\left(\varepsilon\frac{1-x}{1-x^3}\right) &= {}^{o}\left[\frac{\varepsilon(1-x)}{1^3-x^3}\right] = {}^{o}\left[\frac{\varepsilon(1\not-x)}{(1\not-x)(1+x+x^2)}\right] = \\
&= {}^{o}\left(\frac{\varepsilon}{1+x+x^2}\right) \simeq \frac{0}{1+1+1^2} = 0
\end{aligned}
$$

2^o) Mostrar que ${}^{o}\left(\sqrt{5+\varepsilon}\right) \simeq \sqrt{5}$, com $0 \neq \varepsilon \simeq 0$.

Resolução:

Usando a regra ${}^{o}(xy) = {}^{o}x{}^{o}y$ para $x = y$ vem que

$$
({}^{o}x)^2 = {}^{o}(x^2) = {}^{o}(5+\varepsilon) \simeq 5
$$

logo ${}^{o}x \simeq \sqrt{5}$ e assim

$$
\left[{}^{o}\left(\sqrt{5+\varepsilon}\right)\right]^2 \simeq 5 \Leftrightarrow {}^{o}\left(\sqrt{5+\varepsilon}\right) \simeq \sqrt{5}.
$$

Outro processo consiste em "adivinhar" a resposta e prová-la estimando a diferença

$$
\sqrt{5+\varepsilon} - \sqrt{5}
$$

de uma forma mais clássica (multiplicando e dividindo pelo conjugado):

$$\sqrt{5+\varepsilon}-\sqrt{5}=\frac{\left(\sqrt{5+\varepsilon}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+\varepsilon}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{5+\varepsilon}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\cancel{5}+\varepsilon-\cancel{5}}{\sqrt{5+\varepsilon}+\sqrt{5}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{5+\varepsilon}+\sqrt{5}}$$

donde

$$\sqrt{5+\varepsilon}-\sqrt{5}\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}\leq\varepsilon\simeq 0$$

logo

$$\sqrt{5+\varepsilon}-\sqrt{5}\simeq 0\Leftrightarrow\sqrt{5+\varepsilon}\simeq\sqrt{5}.$$

3º) Determinar a sombra de $\dfrac{1+2+..+n}{n^2}$ quando:

(i) n é um natural standard;

(ii) n é um natural ilimitado.

Resolução:

(i)

$$\begin{aligned}{}^{o}\left(\frac{1+2+..+n}{n^2}\right) &= \text{(pois o numerador é a soma de } n \text{ termos de uma progressão aritmética)}\\ &= {}^{o}\left(\frac{\frac{1\ +\ n}{2}\times n}{n^2}\right)={}^{o}\left[\frac{(1+n)\times\cancel{n}}{2n^{\cancel{2}}}\right]={}^{o}\left(\frac{1+n}{2n}\right)=\frac{1+n}{2n}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}{}^{o}\left(\frac{1+2+..+n}{n^2}\right) &= \text{(pela alínea anterior)}\\ &= {}^{o}\left(\frac{1+n}{2n}\right)\simeq\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4º) Sendo n um natural ilimitado, determinar $^o\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3}\right)$.

Resolução:

Como $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ logo

$$^o\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{n^3}\right)={}^o\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}\right)={}^o\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right)\simeq\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

1.4.12 Teorema (limite de uma sucessão)

Seja $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão standard de números reais, $a\in\mathbb{R}$. Então são equivalentes:

(i) $\lim_{n\to\infty} u_n=a$;

(ii) a é standard e para todo o natural ilimitado ν, $u_\nu\simeq a$;

(iii) para todo o natural ilimitado ν, u_ν é limitado e $^o(u_\nu)=a$.

Dem.

(i)⇒(ii): Se u_n é standard e converge para a, a é standard pela Regra 1.1.4. Por definição (clássica):

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n\geq k\ \Rightarrow\ |u_n-a|<\varepsilon).$$

Em particular, para todo $\varepsilon>0$ standard,

$$\exists k\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n\geq k\ \Rightarrow\ |u_n-a|<\varepsilon),$$

logo por transferência, existe k standard tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(n \geq k \;\Rightarrow\; |u_n - a| < \varepsilon),$$

donde, em particular, para qualquer $n = \nu$ ilimitado, $\nu \geq k$ e, portanto, $|u_\nu - a| < \varepsilon$.

O antecedente é verdadeiro pois k é standard logo o consequente é verdadeiro. Assim, $|u_\nu - a| < \varepsilon$ para qualquer ν ilimitado e qualquer $\varepsilon > 0$ standard, o que mostra que $u_\nu \simeq a$ para todo ν ilimitado.

(ii)⇔(iii): por definição de sombra (notando que se $u_\nu \simeq a$ com a standard então u_ν é limitado).

(ii)⇒(i): suponhamos que a é standard e para todo u_ν ilimitado $u_\nu \simeq a$, e seja $\varepsilon > 0$ standard ao arbítrio. Com qualquer k ilimitado tem-se $\forall\; n \geq k\;\; |u_n - a\,| < \varepsilon$, logo $\exists\; k\; \forall\; n \geq k\;\; |u_n - a\,| < \varepsilon$, que é uma condição interna com parâmetros standard, verdadeira qualquer que seja o real standard $\varepsilon > 0$. Por transferência ela mantém-se válida para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, $\forall\varepsilon > 0\; \exists k\; \forall n \geq k \;\Rightarrow\; |u_n - a| < \varepsilon$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.□

1.4.13 Lema do Transbordo de Robinson

Seja $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais (ou complexos).

(i) Se $\forall^{st}\, n\; (u_n = 0)$ então existe ν ilimitado tal que $\forall\; n \leq \nu\; (u_n = 0)$;

(ii) Se $\forall^{st}\, n\; (u_n \simeq 0)$ então existe ν ilimitado tal que $\forall\; n \leq \nu\; (u_n \simeq 0)$.

Dem.

(i) O conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : \forall n \leq m(u_n = 0)\}$ contém todos os naturais standard, isto é, ${}^S\mathbb{N} \subseteq A$, mas, como ${}^S\mathbb{N}$ não é conjunto, a inclusão é própria.

(ii) Não podemos construir o mesmo conjunto A, tal como acima, pois a relação $u_n \simeq 0$ não é clássica (construção ilegal de conjuntos) mas formando o conjunto

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \forall n \leq m(|u_n| < \frac{1}{m})\}$$

este contém todos os naturais standard, logo, pela mesma razão que acima, existe ν ilimitado tal que $|u_n| < \frac{1}{\nu}$ para todo $n \leq \nu$, mas $\frac{1}{\nu} \simeq 0$, donde a conclusão. □

1.4.14 Teorema (limite superior de uma sucessão)

Se (u_n) é uma sucessão limitada standard, então para todo ω ilimitado o limite superior (de Weierstrass) é dado por

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = {}^o(\sup\{u_n : n \geq \omega\}).$$

Em particular este número não depende de ω.

Dem.

Por definição (clássica) o limite superior da sucessão (u_n) é o maior dos seus sublimites, ou seja, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ onde $v_n = \sup\{u_p : p \geq n\}$.

Para uma sucessão (u_n) limitada, (v_n) tem um limite e (v_n) é standard porque (u_n) é standard. Temos, pelo Teorema 1.4.12 (limite de uma sucessão) que para todo $\omega \simeq +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} u_n = {}^o(v_\omega)$.□

1.4.15 Observações

Com as mesmas hipóteses do teorema anterior é possível estabelecer-se a caracterização não-standard para o limite inferior (de Weiestrass):

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = {}^o(\inf\{u_n : n \geq \omega\}).$$

Se a sucessão (u_n) for convergente tem-se $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Se (u_n) não é limitada superiormente então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ e se (u_n) não é limitada inferiormente então $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.4.16 Exemplos

1º Sendo $u_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ uma sucessão limitada standard de números reais e ω ilimitado, ${}^o(\sup\{u_n : n \geq \omega\}) = 2$ e ${}^o(\inf\{u_n : n \geq \omega\}) = 0$.

2º Sendo $u_n = \dfrac{1}{n}$ uma sucessão limitada standard de números reais e ω ilimitado, ${}^o(\sup\{u_n : n \geq \omega\}) = {}^o(\inf\{u_n : n \geq \omega\}) = {}^o(u_\omega) = 0$. (Note-se que o limite superior é menor, neste caso, do que cada um dos termos da sucessão dada).

3º Sendo $u_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} n, & n \text{ é par} \\ \dfrac{1}{n}, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$ uma sucessão standard de números reais não limitada superiormente e ω ilimitado ${}^o(\sup\{u_n : n \geq \omega\}) = +\infty$ e ${}^o(\inf\{u_n : n \geq \omega\}) = 0$.

4º Sendo $u_n = (-1)^n \times n$ uma sucessão standard de números reais não limitada e ω ilimitado ${}^o(\sup\{u_n : n \geq \omega\}) = +\infty$ e ${}^o(\inf\{u_n : n \geq \omega\}) = -\infty$.

1.5 Topologia e ANS

Nesta secção consideramos espaços métricos (X, d) standard, logo o suporte[1] X e a função distância $d : X \to \mathbb{R}_0^+$ são ambos standard.

1.5.1 Definição (bola aberta, bola fechada e esfera)

Para $x \in X$ e $r > 0$, definimos três tipos de conjuntos:

(i) $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ (Bola aberta de centro x e raio r)

(ii) $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ (Bola fechada de centro x e raio r)

(iii) $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$ (Esfera de centro x e raio r)

Nota: Os conjuntos supracitados são standard sse x e r são ambos standard.

1.5.2 Definição (elemento limitado)

Um elemento $x \in X$ é limitado sse existe $y \in X$ tal que $d(x,y)$ é limitado.

1.5.3 Definição (elementos infinitamente próximos)

Os elementos $x,\ y \in X$ dizem-se *infinitamente próximos ou equivalentes*, e escreve-se $x \simeq y$, sse $d(x,y) \simeq 0$.

[1] Designamos, se não houver confusão possível, o espaço métrico pelo respectivo suporte.

1.5.4 Definição (próximo-standard)

Um elemento $x \in X$ diz-se *próximo-standard* (abreviadamente ps) sse existe $y \in X$ standard tal que $x \simeq y$, ou seja, $d(x,y) \simeq 0$[2]; um tal y, se existir, é único, denota-se ${}^o x$ e chama-se a *parte standard* ou *sombra de x*.

[Verifica-se facilmente a unicidade pois se $x \simeq y$ e $x \simeq y'$ com y, y' standard, tem-se pela Definição 1.5.3 $d(x,y) \simeq d(x,y') \simeq 0$, mas $d(x,y) = d(y,x)$ e pela desigualdade triangular $d(y,y') \leq d(y,x) + d(x,y')$, donde $d(y,y') \simeq 0$, logo $d(y,y') = 0$, por $d(y,y')$ ser standard, e portanto $y = y'$.]

1.5.5 Definição (elemento próximo-standard num conjunto, conjunto próximo-standard, conjunto de limitados)

Dado um conjunto $A \subseteq X$, um elemento $x \in X$ é *próximo-standard em A* sse x é próximo-standard de um elemento standard $y \in A$ (isto é, sse x é ps e ${}^o x \in A$).

Um conjunto $A \subseteq X$ é *próximo-standard* sse todos os elementos de A são ps.

Um conjunto A é *um conjunto de limitados* sse todos os elementos de A são limitados, isto é, estão a uma distância limitada de um elemento standard.

1.5.6 Definição (espaço métrico S-compacto)

Um espaço métrico X é *S-compacto* se cada elemento $x \in X$ é próximo-standard.

---

[2] Por outras palavras "qualquer bola aberta standard contendo y também contém x".

1.5.7 Teorema

Seja X um espaço métrico standard. Então X é compacto[3] $\Leftrightarrow$ X é S-compacto.

Dem.

($\Rightarrow$) Provar que se X não é S-compacto $\Rightarrow$ X não é compacto:

Se um espaço métrico X contém um ponto não próximo-standard x, não é S-compacto (pela Definição 1.5.6) e portanto não é compacto. De facto, para cada standard s, considere-se uma bola aberta $B = B_s$ centrada em s e não contendo x. Por 1.3.6 [Princípio de extensão funcional (saturação fraca)], existe uma única família standard de bolas abertas $y \mapsto B_y$ estendendo a construção precedente. Como $\cup_y B_y$ é um conjunto standard contendo todos os pontos standard de X, (B_y) é uma cobertura de X. Contudo, para todas as subcoberturas finitas standard F, temos $x \notin \cup_F B_y$ e, em particular, $\cup_F B_y \neq X$.

O princípio de transferência pode ser aplicado à segunda desigualdade (clássica): a cobertura aberta (B_y) de X não tem subcobertura finita.

[**Exemplo particular** (para uma melhor compreensão):

$X = \mathbb{R}$, x ilimitado e para s standard escolha-se o intervalo aberto standard $]s - 1, s + 1[$ que não contenha x; a única extensão standard é dada por $y \mapsto]y - 1, y + 1[$ para todo y e os intervalos abertos $]y - 1, y + 1[$ cobrem $\mathbb{R}$, mas nenhuma subfamília standard finita contém x, nenhuma subfamília cobre $\mathbb{R}$ inteiramente.].

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se todos os elementos $x \in X$ são próximos-standard então X é compacto.

---

[3] Relembre-se a definição clássica:"O espaço métrico X é compacto se cada cobertura aberta de X contém uma cobertura finita de X, isto é, uma subfamília finita que é uma cobertura de X".

Seja $(U_i)_{i \in I}$ uma cobertura aberta standard de X. Considere-se um conjunto finito S contendo todos os pontos standard de X e a correspondente parte finita J do conjunto de índices I tal que $\cup_{i \in J} U_i \supseteq S$. Se x é um elemento arbitrário, é próximo-standard (por hipótese) e assim $x \simeq s$. Como existe um U_i standard contendo s, este U_i contém x por definição. Isto prova que $\cup_{i \in J} U_i$ é uma subcobertura finita (por transferência, existe também uma subcobertura finita standard).□

1.5.8 Proposição

Seja X um espaço métrico standard e $A \subseteq X$ S-compacto. Defina-se

$$A^S = {}^S\{x \in X : \exists\, a \in A, a \simeq x\}.$$

Então A^Sé compacto.[4]

Dem.

É um resultado conhecido que A^S é fechado pois o seu complementar em X é aberto, isto é, contém uma bola para cada um dos seus pontos

$$\forall x \in \left(A^S\right)^C \ \exists\, \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon) \subseteq \left(A^S\right)^C.$$

É suficiente mostrar que cada sucessão standard de A^S tem uma subsucessão convergente. O Teorema 1.4.12 (limite de uma sucessão) mostra que temos de encontrar um elemento próximo-standard x_ν (ν ilimitado) numa tal sucessão. Mas a sucessão $\varepsilon_n = d(x_n, A)$ é tal que $\varepsilon_n \simeq 0$ para todo o inteiro limitado n. Por 1.4.13 (Lema do Transbordo de Robinson) tem que existir um inteiro ilimitado ν tal que $\varepsilon_n \simeq 0$ para todo $n \leq \nu$. Em particular,

---

[4] Por outras palavras: "Um conjunto standard $A \subseteq X$ é compacto sse todo o ponto de A é próximo-standard em A".

$x_\nu \simeq a$ para algum $a \in A$. Por hipótese, este ponto a é próximo-standard portanto x_ν é também próximo-standard. $\square$

1.5.9 Definição

Uma função f entre dois espaços métricos diz-se S-contínua quando $x \simeq y$ (em X) $\Rightarrow f(x) \simeq f(y)$ (em Y). Por outras palavras, f é S-contínua quando $d(x,y) \simeq 0 \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \simeq 0$.

1.5.10 Observação

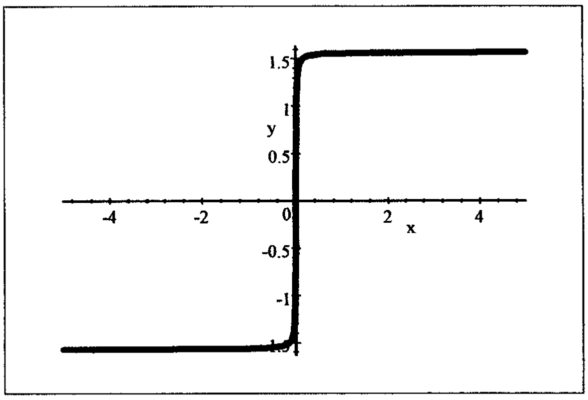
Para funções não-standard, continuidade e S-continuidade são noções essencialmente distintas, pois nenhuma delas implica a outra.

1.5.11 Exemplos

Seja ε um infinitesimal não nulo.

1º A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é S-contínua mas não é contínua.

2º A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = arc\ tg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é contínua mas não é S-contínua.



1.5.12 Definição

Seja X um espaço métrico standard, $A \subseteq X$. Definimos

$$^{ps}A := \{z \in X : \exists^{st} w \in A (z \simeq w)\}.$$

Por outras palavras, $z \in {}^{ps}A$ sse z possui sombra $^{o}z \in A$. Obviamente $^{S}A \subseteq {}^{ps}A$, mas ^{ps}A, tal como ^{S}A, é, em geral, uma classe externa. Para A standard, A é compacto$\Leftrightarrow$ $A \subseteq {}^{ps}A$ (pelo Teorema 1.5.7).

1.5.13 Lema

Seja $f : X \to Y$ uma função que só toma valores próximo-standard nos pontos standard. Existe uma única função standard, denotada por ^{S}f, chamada a *standardizada de f*, tal que

$$\forall^{st} x \in X (^{S}f)(x) = {}^{o}(f(x)).$$

Dem. Apliquemos o Príncipio 1.3.6 [de extensão funcional (saturação fraca)] à função que a cada elemento standard $x \in X$ associa o elemento standard $^{o}(f(x))$ de Y.$\square$

1.5.14 Exemplos

Seja $\varepsilon > 0$, infinitesimal.

1º) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \varepsilon z$ tem por standardizada ${}^S f(z) \equiv 0$.

2º) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = (z+\varepsilon)^2$ tem por standardizada ${}^S g(z) = z^2$.

3º) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = arc\, tg\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ tem por standardizada

$$ {}^S h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

1.5.15 Teorema (da sombra contínua)

Sejam X e Y espaços métricos standard. Para toda a função $f : X \to Y$ próxima-standard e S-contínua para todo o standard $x \in X$ existe uma única função standard contínua de X em Y, equivalente a f em todos os pontos próximos-standard de X.

Dem. Como f é S-contínua e próxima-standard em Y para todo o standard $x \in X$, a standardizada de f existe e é equivalente a f em todos os pontos standard. Mostremos que ela é contínua.

Como ${}^S f$ é uma função standard, é suficiente mostrar que:

$$\forall^{st} x\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \eta > 0\, \forall y \;\; d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'({}^S f(x), {}^S f\,(y)) \leq \varepsilon.$$

Por f ser S-contínua e próxima-standard em Y para todo o standard $x \in X$, temos, em particular

$$\forall^{st} x\, \forall \varepsilon > 0\, \exists^{st} \eta > 0\, \forall^{st} y \;\; d(x,y) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f\,(y)) \leq \varepsilon.$$

Mas como x, y, e d' são standard, temos

$$d'(f(x), f\,(y)) \simeq d'({}^S f(x), {}^S f\,(y)), \text{ logo}$$

$$\forall^{st} x \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists^{st} \eta > 0 \, \forall^{st} y \ \ d(x,y) \le \eta \Rightarrow d'(^S f(x), {}^S f(y)) \le \varepsilon,$$

donde a conclusão por transferência (duas vezes).

Escrevemos $^o f = {}^S f$. Só falta assegurar que f e $^o f$ são equivalentes em todos os pontos próximos-standard. Isto resulta imediatamente da continuidade de $^o f$ e da S-continuidade de f. Com efeito, se $x \in X$, e se $^o x$ existe e pertence a X, temos

$$f(x) \simeq f(^o x) \simeq {}^o f(^o x) \simeq {}^o f(x).\Box$$

1.5.16 Teorema [do gráfico fechado (versão topológica)]

Se $f : X \to Y$ é uma aplicação entre espaços métricos, onde Y é compacto[5], então Graf(f)[6] é fechado em $X \times Y \Leftrightarrow f$ é contínua.

Dem. ($\Rightarrow$) Sem perda de generalidade, suponha-se f standard (portanto X e Y são espaços standard) e demonstremos que f é contínua em todos os pontos standard $x \in X$. Temos que mostrar que $x' \simeq x \Rightarrow f(x') \simeq f(x)$.

Tomemos $x' \simeq x$. Como Y é compacto, $f(x')$ é próximo-standard, digamos $^o f(x') = y$ standard $\in Y$

O ponto standard (x,y) tem as suas cordenadas infinitamente próximas de $(x', f(x'))$ que pertence ao gráfico de f

$(x,y) \simeq (x', f(x')) \in$ Graf$(f) \Rightarrow (x,y) \in$ fecho do Graf(f).

---

[5] Relembremos a definição de compacidade (clássica):"Um espaço métrico X diz-se compacto se cada sucessão em X tem uma subsucessão convergente. Um subconjunto M de X diz-se compacto se M é compacto considerado como um subespaço de X, isto é, se cada sucessão em M tem uma subsucessão cujo limite é um elemento de M".

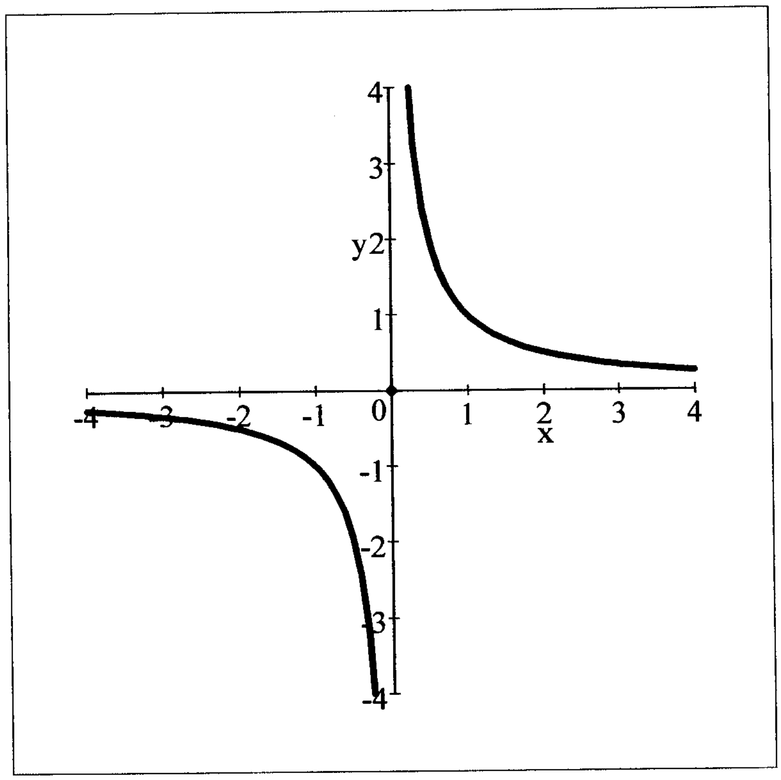
[6] O gráfico de $f : X \to Y$, denotado por $Graf(f)$ é o subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$ definido por $Graf(f) = \{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$.

Como por hipótese, o gráfico de f é fechado, concluímos que (x, y) pertence a este gráfico, isto é, $y = f(x)$, logo $f(x') \simeq f(x)$.

($\Leftarrow$) Toda a aplicação contínua tem um gráfico fechado. $\square$

1.5.17 Contra-exemplo quando Y não é compacto

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$



Então o gráfico de f é Graf$(f) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \dfrac{1}{x} \wedge x \neq 0\}$ portanto é fechado, mas f não é contínua.

1.6 Operadores lineares em espaços normados

A importância dos operadores lineares $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$, onde $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ e X e Y são espaços normados deve-se sobretudo à sua utilização na representação de quantidades físicas e assim são muito valorizados na Matemática Aplicada e na Física (embora muitos considerem a Física como Matemática Aplicada).

Em vez de trabalharmos, por exemplo, com aplicações com domínio $\mathbb{R}$ (ou um subconjunto de $\mathbb{R}$) e valores em $\mathbb{R}$, na Análise Funcional consideramos espaços mais gerais. No caso dos espaços vectoriais e, em particular, dos espaços normados em vez da palavra *aplicação* usamos *operador*.

Nesta secção e nas próximas, como os operadores não lineares não vão ser considerados, sempre que dissermos simplesmente "operador" significa "operador linear".

1.6.1 Definição (operador linear)

Sejam X e Y espaços vectoriais sobre um mesmo corpo. Um *operador* $T : X \rightarrow Y$ diz-se linear sse para todo $x, y \in X$ e escalar α, $\begin{cases} T(x+y) = Tx + Ty \\ T(\alpha x) = \alpha T x \end{cases}$ [7]

Nesta definição em vez de X pode estar um subespaço vectorial de X, como domínio $\mathcal{D}(T)$ de um operador T.

1.6.2 Notações

Escrevemos Tx em vez de $T(x)$.

[7] Poderíamos ter escrito $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y$, com α, β escalares.

$\mathcal{N}(T)$ denota o espaço nulo[8] ou núcleo de T, isto é, o conjunto de todos os $x \in \mathcal{D}(T)$ tais que $Tx = 0$.

1.6.3 Exemplos

1.6.4 Operador identidade

O operador identidade I deixa qualquer elemento inalterado: $Ix = x$ para todo $x \in X$.

1.6.5 Operador nulo

O operador nulo O atribui o vector zero a todos os elementos de X : $Ox = 0$ para todo $x \in X$.

1.6.6 Operador de derivação

O operador de derivação[9] é muito importante e define-se por:

$$(Df)(x) := \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

no espaço de todas as funções deriváveis no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, o qual é um subespaço linear de $L^2([a,\ b])$.[10]

---

8 Muitos autores utilizam a palavra "kernel".

9 Muitos autores utilizam o termo "diferencial".

10 Espaço das funções de quadrado integrável em $[a, b]$.

1.6.7 Operador integral

Outro operador importante é o operador integral T definido por:

$$(Tx)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt,$$

onde a e b são finitos ou infinitos. A função k é chamada o *kernel* ou *núcleo do operador*. O domínio de um operador integral não depende de k.

1.6.8 Operador de multiplicação

Seja $z \in C([a,b])$.[11] Um operador A em $L^2([a,b])$ definido por: $(Ax)(t) := z(t)x(t)$,é linear.

A função z é chamada o multiplicador.

1.6.9 Matrizes

Uma *matriz real (complexa)* $A = (\alpha_{jk})$ com m linhas e n colunas define um operador T : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, respectivamente) por $y = Ax$ onde $x = (\xi_j)$ tem n componentes e $y = (\eta_j)$ tem m componentes e ambos os vectores são escritos como vectores coluna devido à convenção usual do produto de matrizes, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

T é linear porque as matrizes são operadores lineares: $(A+B)x = Ax + Bx$ e $\alpha(Ax) = (\alpha A)x$.

---

[11] Espaço das funções $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de quadrado integrável, i. e., tais que $|f(.)|^2$ é Lebesgue-integrável.

1.6.10 Teorema (imagem e espaço nulo)

Seja T um operador linear. Então

(a) A imagem $\mathrm{Im}(T)$[12] é um espaço vectorial.

(b) Se $\dim\mathcal{D}(T) = n < \infty$, então $\dim\ \mathrm{Im}(T) \leq n$.

(c) O espaço nulo $\mathcal{N}(T)$ é um espaço vectorial.

Dem.

(a) Sejam $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(T)$ e mostremos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathrm{Im}(T)$ para quaisquer escalares α, β.

Como $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(T)$, temos que $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2$ para algum $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$, e $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{D}(T)$ porque $\mathcal{D}(T)$ é um espaço vectorial. Da linearidade de T vem que:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \alpha y_1 + \beta y_2.$$

Portanto $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

Como $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(T)$ eram arbitrários e também os escalares, isto demonstra que $\mathrm{Im}(T)$ é um espaço vectorial.

(b) Escolhemo $n+1$ elementos $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ de $\mathrm{Im}(T)$ de um modo arbitrário. Então temos $y_1 = Tx_1, y_2 = Tx_2, ..., y_{n+1} = Tx_{n+1}$ para alguns $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ em $\mathcal{D}(T)$.

Como $\dim\ \mathcal{D}(T) = n$, o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ tem que ser linearmente dependente. Assim $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$ para alguns escalares α_1,α_2,...,α_{n+1}, não todos nulos. Como T é linear e $T0 = 0$, aplicando T a ambos os membros vem:

[12] Há autores que preferem utilizar $\mathcal{R}$(T) em vez de Im(T). Note-se que Im(T)=T($\mathcal{D}$(T)).

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0.$$

Isto mostra que $\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}$ é um conjunto linearmente dependente porque os $\alpha_j' s$ não são todos nulos. Relembrando que este subconjunto de $\mathrm{Im}(T)$ foi escolhido de uma forma arbitrária, concluímos que $\mathrm{Im}(T)$ não tem subconjuntos linearmente independentes com $n + 1$ ou mais elementos.

Por definição, isto significa que, dim $\mathrm{Im}(T) \leq n$.

(c) Consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$ quaisquer. Então

$$Tx_1 = Tx_2 = 0.$$

Como T é linear, para quaisquer escalares α e β temos:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0 + 0 = 0.$$

Isto mostra que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$. Assim $\mathcal{N}(T)$ é um espaço vectorial. □

O próximo teorema fornece-nos um critério muito útil para a existência do operador inverso que aplicaremos muitas vezes nas próximas secções.

1.6.11 Teorema (operador inverso)

Sejam X, Y espaços vectoriais, ambos reais ou ambos complexos. Seja $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ e imagem $\mathrm{Im}(T) \subseteq Y$. Então:

(a) O operador inverso $T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to \mathcal{D}(T)$ existe se e só se $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.

(b) Se T^{-1} existe, é um operador linear.

(c) Se dim $\mathcal{D}(T) = n < \infty$ e T^{-1} existe, então dim $\mathrm{Im}(T) = \dim \mathcal{N}(T)$.

Dem.

(a) Suponha-se que $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$. Seja $Tx_1 = Tx_2$. Como T é linear,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$$

e assim $x_1 - x_2 = 0$ por hipótese. Portanto $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 = x_2$, e T^{-1} existe, por definição de injectividade.

Reciprocamente, se T^{-1} existe, então verifica-se a definição de injectividade

$$Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Fazendo $x_2 = 0$ vem que $Tx_1 = T0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

(b) Supomos que T^{-1} existe e mostramos que T^{-1} é um operador linear.

O domínio de T^{-1} é $\operatorname{Im}(T)$ que é um espaço vectorial pelo Teorema 1.6.10 (a).

Consideramos $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ quaisquer e as suas imagens $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$.

Então $x_1 = T^{-1}y_1$ e $x_2 = T^{-1}y_2$.

O operador T é linear (por hipótese), e assim para quaisquer escalares α e β temos $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$.

Como $x_1 = T^{-1}y_1$ e $x_2 = T^{-1}y_2$, isto implica $T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2$ e prova-se que T^{-1} é linear.

(c) Temos dim $\operatorname{Im}(T) \leq \dim \mathcal{N}(T)$ pelo Teorema 1.6.10 (b) e $\dim \mathcal{D}(T) \leq$ dim $\operatorname{Im}(T)$ pelo mesmo teorema aplicado ao operador T^{-1}.□

Tal como no caso das matrizes quadradas existe uma fórmula muito útil para o inverso da composição (ou produto)[13] de operadores lineares:

---

13 Recordamos que o produto de dois operadores A e B num espaço vectorial X é definido por $(AB)x = A(Bx)$.

1.6.12 Lema (inverso do produto de operadores)

Sejam $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ operadores lineares bijectivos, onde X, Y, Z são espaços vectoriais. Então o inverso $(ST)^{-1} : Z \to X$ do produto ST existe, e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Dem.

O operador $ST : X \to Z$ é bijectivo, e assim $(ST)^{-1}$ existe. Temos assim $ST(ST)^{-1} = I_Z$ onde I_Z é o operador identidade em Z. Aplicando S^{-1} e usando $S^{-1}S = I_Y$ (o operador identidade em Y), obtemos

$$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z = S^{-1}.$$

Aplicando T^{-1} e usando $T^{-1}T = I_X$, obtemos o resultado desejado

$$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.\square$$

1.6.13 Definição (operador linear limitado)

Sejam X, Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ um operador linear, onde $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. O operador T diz-se limitado[14]se existe um número real não negativo c, tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,

(1) $\quad\|Tx\| \leq c\,\|x\|.$[15]

1.6.14 Definição (norma de um operador)

Nas mesmas condições da Definição 1.6.13 define-se norma do operador linear T como:

---

[14] O termo "limitado" deriva de um operador limitado "aplicar" conjuntos limitados de $\mathcal{D}(T)$ em conjuntos limitados de Y.

[15] É claro que não se confundem as duas normas pois a norma à esquerda é a norma em Y e a norma à direita é a norma em X. Por simplicidade denotámos ambas as normas pelo mesmo símbolo $\|.\|$.

(2) $$\|T\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

1.6.15 Observação

Note-se que: se em (1) fizermos $c = \|T\|$ obtemos a fórmula que vamos utilizar por diversas vezes:

(3) $$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|;$$

e se fizermos $\|x\| = a$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right) x$ onde $x \neq 0$ então $\|y\| = \frac{\|x\|}{a} = 1$. Como T é linear, a fórmula (2) dá-nos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{a} = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ x\neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in D(T)\\ \|y\|=1}} \|Ty\|$$

e, substituindo y por x à direita, obtemos uma fórmula alternativa para a norma do operador T:

(4) $$\|T\| = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\|.$$

Para operadores lineares limitados $T_2 : X \to Y$, $T_1 : Y \to Z$ e $T : X \to X$ onde X, Y, Z são espaços normados temos as fórmulas:

(5) $$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\,\|T_2\|$$

(6) $$\|T^n\| \leq \|T\|^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1.6.16 Exemplos

1º Obviamente, o operador identidade e o operador nulo são ambos limitados e tem-se $\|I\| = 1$ e $\|O\| = 0$.

2º O operador de derivação, definido em 1.6.6, **não é** limitado. De facto, considere-se a sucessão de funções $f_n(x) = \operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, definidas em $[-\pi, \pi]$. Então como

$$\int_{-\pi}^{\pi} (sen\, nx)^2 dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{sen\, 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

vem que

$$\|f_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (sen\ nx)^2\ dx} = \sqrt{\pi}$$

e como $Df_n(x) = (sen\ nx)' = n \cos nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$vem que

$$\|Df_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (n \cos nx)^2 dx} = n\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\ nx)^2\ dx} = n\sqrt{\left[\frac{x}{2} + \frac{sen\ 2nx}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi}} = n\sqrt{\pi}$$

e assim $\|Df_n\| = n\,\|f_n\|$.

3º O operador integral, definido em 1.6.7, é limitado. De facto, para qualquer $x \in L^2([a, b])$, temos (usando a desigualdade de Schwarz[16]):

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \int_a^b \left|\int_a^b k(s,t)x(t)dt\right|^2 ds \leq \\ &\leq \int_a^b (\int_a^b |k(s,t)|^2\, dt \underbrace{\int_a^b |x(t)|^2\, dt)}_{\text{não depende de "s"}} ds = \\ &= \int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2\, dtds \times \underbrace{\int_a^b |x(t)|^2\, dt}_{=\|x\|^2} \end{aligned}$$

Assim

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(s,t)|^2\ dtds} \times \|x\|.$$

---

16 $|\langle x,\ y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ [e já agora, também temos: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular) e $\|x-y\| \geq |\ \|x\| - \|y\|\,|$].

4^o O operador de multiplicação, definido em 1.6.8, é limitado pois

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \int_a^b |(Ax)(t)|^2 \, dt \underset{(1)}{=} \\
&= \int_a^b |z(t)x(t)|^2 \, dt \underset{(2)}{=} \\
&= \int_a^b |z(t)|^2 \, |x(t)|^2 \, dt = \\
&= \int_a^b |x(t)|^2 \, |z(t)|^2 \, dt \underset{(3)}{\leq} \\
&\leq \int_a^b |x(t)|^2 \times M dt \underset{(4)}{=} \\
&= M \int_a^b |x(t)|^2 \, dt = \max_{[a,b]} |z(t)|^2 \int_a^b |x(t)|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Notas:

(1) Pela definição dada $(Ax)(t) = z(t)x(t)$.

(2) Pois $|a \times b| = |a| \times |b|$ logo $|a \times b|^2 = |a|^2 \times |b|^2$.

(3) Uma das propriedades dos integrais diz que: "Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$ desde que os integrais existam.".

(4) Sendo $M \geq |z(t)|^2, \forall t \in [a, b]$).

Assim $\|Ax\| \leq \max_{[a,b]} |z(t)| \times \|x\|$.

5^o Uma matriz real (ou complexa) $A = (\alpha_{jk})$ com m linhas e n colunas, tal como em 1.6.9, define um operador $y = Ax$ que é limitado.

Em termos de componentes fica $y_j = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk} x_j|$, $j = 1, 2, ..., m$ e relembrando que a norma em $\mathbb{C}^n$ é dada por $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ vem (pela desigualdade de Cauchy-

Schwarz[17]para séries) que:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}x_k|\right]^2 \le \\
&\le \sum_{j=1}^{m}\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2}\times\sqrt{\sum_{l=1}^{n}|x_l|^2}\right]^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2\times\underbrace{\sum_{l=1}^{n}|x_l|^2}_{\text{não depende de } j}\right) = \\
&= \sum_{l=1}^{n}|x_l|^2\times\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2 = \|x\|^2\times\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2 .
\end{aligned}$$

Note-se que a dupla soma na última linha não depende de x. Podemos escrever o resultado na forma $\|Ax\|^2 \le \|x\|^2 \times c^2$ onde $c^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2$. Assim A é limitado pois $\|Ax\| \le \|x\| \times \|A\|$ e também sabemos que $\|A\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_{jk}|^2}$.

1.6.17 Teorema (continuidade e limitação)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ um operador linear[18], onde $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ e X, Y são espaços normados. Então:

(a) T é contínuo se e só se T é limitado.

(b) Se T é contínuo num ponto de $\mathcal{D}(T)$, é contínuo.

Dem.

(a) Para $T = O$ a afirmação é trivial.

---

17 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}\times\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty}|b_l|^2}$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz para séries). No nosso caso particular, basta considerar $n \simeq \infty$.

18 Alguns autores referem-se aos "operadores lineares contínuos" como "operadores lineares", designação que preferimos evitar de todo, pois há operadores lineares de grande importância prática que não são contínuos. Por exemplo, o operador de derivação, definido em 1.6.6.

Seja $T \neq O$. Suponhamos que T é limitado e considere-se $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, qualquer. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então, como T é linear, para cada $x \in \mathcal{D}(T)$ tal que

$\|x - x_0\| < \delta$ onde $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|T\|}$ obtemos

$$\|Tx - Tx_0\| < \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| < \|T\| \, \delta = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, era ao arbítrio, isto mostra que T é contínuo.

Reciprocamente, suponhamos que T é contínuo num arbitrário $x_0 \in \mathcal{D}(T)$. Então, dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

(7) $\qquad \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$ para todo $x \in \mathcal{D}(T)$ satisfazendo $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Tomemos agora um $y \neq 0$ em $\mathcal{D}(T)$ e façamos $x = x_0 + \dfrac{\delta}{\|y\|} y$. Então $x - x_0 = \dfrac{\delta}{\|y\|} y$. Assim $\|x - x_0\| = \delta$, logo podemos usar (7). Como T é linear, temos

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T(\frac{\delta}{\|y\|} y) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \, \|Ty\|$$

e (7) implica: $\dfrac{\delta}{\|y\|} \, \|Ty\| \leq \varepsilon$, ou seja, $\|Ty\| \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta} \, \|y\|$.

Podemos escrever a última desigualdade como $\|Ty\| \leq c \, \|y\|$, onde $c = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$, e mostrámos assim que T é limitado.

(b) A continuidade de T num ponto implica a limitação de T pela segunda parte da demonstração de (a), que por sua vez implica a continuidade de T por (a).□

1.6.18 Proposição-definição

O operador T é S-contínuo se qualquer das seguintes condições equivalentes for satisfeita:

(i) $x \simeq y \Rightarrow Tx \simeq Ty$;

(ii) $x \simeq 0 \Rightarrow Tx \simeq 0$;

(iii) x limitado $\Rightarrow Tx$ limitado;

(iv) Existe um limitado $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M \times \|x\|$;

(iv) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$ é limitado.

1.6.19 Observação

Para os operadores standard, esta definição é igual à de continuidade, mas pode diferir dela (no caso dos operadores não-standard) mesmo em dimensão finita.

1.6.20 Exemplo

Seja $X = Y = \mathbb{R}$. O operador $x \longmapsto y = \nu x$ onde ν é ilimitado é contínuo (porque é a equação de uma recta) mas não é S-contínuo. [Basta considerar um a real limitado $\not\Rightarrow \nu \times a$ seja limitado, usando (iii) de 1.6.18].

1.6.21 Definição

T é S-contínuo e linear $\Rightarrow T$ é contínuo.

1.6.22 Definição (forma linear)

Uma forma linear[19] φ é um operador linear com domínio num espaço vectorial X e imagem K de X; assim

$$\varphi : \mathcal{D}(\varphi) \to K,$$

onde $K = \mathbb{R}$ se X é real e $K = \mathbb{C}$ se X é complexo.

[19] Alguns autores utilizam "funcional linear". A Análise Funcional começou inicialmente pelo estudo das formas ou funcionais lineares.

1.6.23 Observação

No caso de $K = \mathbb{C}$, o conjunto das formas lineares φ com $\|\varphi\| \leq 1$ é a bola unitária do dual[20] X' de X.

Podemos estender a noção de ponto próximo-standard num espaço métrico às formas lineares:

1.6.24 Definição

Uma forma linear φ é próxima-standard quando existe uma forma linear standard ψ tal que $\varphi(x) \simeq \psi(x)$ para todo o standard $x \in E$. Abreviamos esta relação de proximidade fraca por $\varphi \simeq_\sigma \psi$.[21]

1.6.25 Lema

Cada forma linear linear limitada é próxima-standard fracamente.

Dem.

Seja φ limitada em E'. Então x é standard $\Rightarrow$ x é limitado $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ é limitada em $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \varphi(x)$ é próxima-standard.

---

20 Sendo X um espaço normado, o conjunto de todas as formas lineares limitadas em X constituem um espaço normado com norma definida por $\|\varphi\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |\varphi(x)|$ chamado o espaço dual de X e denota-se por X'.

21 Embora a topologia fraca no espaço X' (dual de X) não seja usualmente "metrizável", a sua restrição à bola unitária normalmente é...

Pelo Princípio 1.3.6 [de extensão funcional (saturação fraca)] há uma única ψ standard tal que

$$\psi(x) = {}^o\varphi(x) \text{ para todo o standard } x \in X.$$

Esta função ψ é linear. Além disso, se M é um inteiro standard maior ou igual a $\|\varphi\|$, temos $|\psi(x)| = {}^o\,|\varphi(x)| \leq M$ para todo o standard x tal que $\|x\| \leq 1$.

Por transferência concluímos que $\|\psi\| \leq M$, isto é, ψ é limitada e contínua.□

1.6.26 Nota

O lema anterior mostra-nos que a bola unitária no dual de um espaço normado standard é fracamente compacta. Como esta propriedade é clássica, por transferência é válida em *qualquer* espaço normado.

1.6.27 Definição

Uma aplicação linear T entre dois espaços normados X e Y, é S-compacta quando uma das seguintes condições equivalentes for satisfeita:

(i) x é normado em $X \Rightarrow Tx$ é próximo-standard em Y;

(ii) x é limitado em $X \Rightarrow Tx$ é próximo-standard em Y.

1.6.28 Observação

No caso particular de $Y = \mathbb{C}$ verifica-se que uma forma linear φ é S-compacta sempre que for limitada (já usámos esta observação na demonstração do Lema 1.6.25). Como os elementos próximos-standard são limitados, verifica-se também que

$$T \text{ S-compacto } \Rightarrow T \text{ S-contínuo}$$
$$(\Rightarrow \text{ T contínuo})$$

Se T_1 e T_2 são operadores S-contínuos (resp. S-compactos) e α, β são escalares limitados, então $\alpha T_1 + \beta T_2$ é S-contínuo (resp. S-compacto). Mas a **classe** de operadores S-contínuos (respectivamente, S-compactos) não é um **conjunto** (e, em particular, não é um espaço vectorial). A soma de uma família finita de operadores S-contínuos não é necessariamente S-contínuo. Contudo, somas finitas standard (i. e., limitadas) de operadores S-contínuos (resp. S-compactos) são S-contínuos (resp. S-compactos).

Todas as aplicações lineares contínuas de ordem[22] finita são compactas.[23]

1.6.29 Exemplos

1º Seja X um espaço normado qualquer e escolha-se $0 \simeq \varepsilon \in \mathbb{R}$. Então $\varepsilon I = \varepsilon 1_X$ é um operador S-compacto. Mas este operador εI só é um operador compacto se $\dim X < \infty$ ou $\varepsilon = 0$.

2º Seja $X = l^2$ o espaço das sucessões complexas $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $\sum |x_i|^2 < \infty$. É um espaço de Hilbert[24] com base ortonormal $e_i = (0, ..., 1, 0, 0, 0, ...)$ (o elemento não nulo 1 está situado na i-ésima posição). Seleccionando um inteiro ilimitado $\nu \in \mathbb{N}$ e

22 Ou característica. Em Inglês: "rank". É a dimensão da imagem da aplicação linear $T : X \to Y$.

23 Relembramos que um operador linear $T : X \to Y$ é compacto (ou completamente contínuo) se a imagem da bola unitária é um conjunto relativamente compacto de Y.

24 Relembramos que um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo (no sentido da métrica definida pelo produto interno).

para $x \in l^2$ defina-se

$$Tx = T(x_i) = x_\nu \cdot e_1 = (x_\nu, 0, 0, 0, ...) \in l^2.$$

Então T é um operador compacto (como $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{C} \cdot e_1$, é um operador de ordem finita) e S-compacto.

3º Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de escalares com $(\lambda_n) \to 0$. Então o operador T em l^2 definido por $T(e_n) = \lambda_n \cdot e_n$ é um operador compacto.

Os seus valores próprios[25] são os λ_n com vectores próprios correspondentes em e_n.

4º Tal como acima, seja T o operador em l^2, desta vez definido por

$$T(e_n) = \lambda_n \cdot e_{n+1}$$

Então T compacto assim que a sucessão $(\lambda_n) \to 0$.

---

[25] Mais à frente daremos as definições de valores próprios e vectores próprios.

1.7 Propriedades dos operadores (S-) compactos

1.7.1 Proposição

Seja $K : X \to Y$ uma aplicação linear S-compacta entre dois espaços normados X e Y. Se $T_1 : X_1 \to X$ é S-contínuo e $T_2 : Y \to Y_2$ é standard contínuo, então a seguinte composta é uma aplicação linear S-compacta

$$T_2 \circ K \circ T_1 : X_1 \to X \xrightarrow{K} Y \to Y_2.$$

Dem.

Se x_1 é limitado em X_1, então $x = T_1(x_1)$ é limitado em X (lembramos que pela Proposição-definição 1.6.18 (iv), a norma de T_1 é limitada). Por hipótese, $Kx \simeq y$ standard em Y. Como a norma de T_2 é também limitada $T_2Kx \simeq T_2y$ e o elemento T_2y é standard por hipótese.

Isto prova que $T_2 \circ K \circ T_1 x_1$ é próximo-standard.□

1.7.2 Proposição

[26]Seja $K : X \to Y$ uma aplicação linear S-compacta entre dois espaços normados X e Y. Se $T : X \to Y$ é uma aplicação linear tal que $\|K - T\| \simeq 0$, então T é também uma aplicação S-compacta.

Dem.

Se x é um vector normado (em X), Kx é próximo-standard digamos, $Kx \simeq y$ (em Y). Então $Tx \simeq Kx \simeq y$ prova que Tx é próximo-standard.□

---

26 Esta proposição é uma generalização do 1°Exemplo de 1.6.29 com $K = O$ e $T = \varepsilon I$.

1.7.3 Proposição

Seja $K : X \to Y$ uma aplicação linear compacta entre dois espaços normados X e Y. Então a transposta[27] $K' : Y' \to X'$ é também uma aplicação linear compacta.

Dem.

Seja φ uma forma linear contínua em Y com $\|\varphi\| = 1$. Se x é limitado em X, $y = Kx$ é limitado em Y e $\varphi(Kx)$ é limitado em $\mathbb{C}$. Para y standard em Y podemos definir $\psi(y) = {}^o\varphi(y)$. Por standardização, isto define uma forma linear $\psi \in Y'$. Pretendemos provar que $\psi \circ K \simeq \varphi \circ K = K'(\varphi)$ mostrando assim que $K'(\varphi)$ é próximo-standard.

Seja x qualquer da bola unitária de X. Por hipótese $y = Kx$ é próximo-standard e podemos escrever $y = Kx \simeq z$ standard em Y com, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \varphi(Kx) &\simeq \varphi(z) \text{ visto que } \|\varphi\| \leq 1 \text{ (porque } \varphi \text{ é uma aplicação contractiva)} \\ \varphi(z) &\simeq \psi(z) \text{ visto que } z \text{ é standard (por definição de } \psi) \\ \psi(z) &\simeq \psi(Kz) \text{ visto que } \psi \text{ é standard (} \psi \text{ é S-contínua no ponto standard } z). \end{aligned}$$

Isto prova $\varphi(Kx) - \psi(Kx) \simeq 0$ ($\|\varphi\| \leq 1$) por esta razão $\|\varphi \circ K - \psi \circ K\| \simeq 0$, $\varphi \circ K \simeq \psi \circ K$ standard (isto é, $\varphi \circ K$ é próximo-standard).□

1.7.4 Observação

A primeira parte da demonstração, da Proposição 1.7.3, é uma formulação da ANS do resultado clássico:

---

[27] Esta aplicação é única e, para todo o vector $x \in X$ e para toda a forma linear φ' sobre Y, $\langle K'(y'), x\rangle = \langle y', Kx\rangle$, isto é, a todo o elemento y' de Y' (dual de Y) associa o elemento $y' \circ K$ de X' (dual de X).

"a bola unitária em Y' é fracamente compacta" e a construção da segunda parte é por passos do teorema de Ascoli.

1.7.5 Proposição

Seja $K : X \to Y$ uma aplicação linear standard compacta entre dois espaços normados X e Y. Seja $\widehat{K} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ uma extensão canónica de K para os espaços de Banach. Então

$\widehat{K}(\widehat{X}) \subseteq Y$ e $\widehat{K} : \widehat{X} \to Y$ é uma aplicação linear compacta.

Dem.

Relembremos que X pode ser identificado com o subespaço de X'' (dual normado de X'). Com esta identificação $\widehat{X}$ é simplesmente o fecho de X em X''. Pela Proposição 1.7.3 conclui-se que K' e $K'' : X'' \to Y''$ são aplicações lineares compactas.

Restringindo K'' a $\widehat{X}$=fecho de X, obtém-se $\widehat{K}(\widehat{X}) \subseteq \overline{Y} \subseteq Y''$. Seja agora x um vector standard em $\widehat{X}$, e suponhamos $x \simeq y \in X$. Então y é limitado e como K é compacto, Ky é próximo-standard, digamos $Ky \simeq z$ standard em Y. Temos que $\widehat{K}x \simeq Ky \simeq z$.

Como $\widehat{K}$ é standard, $\widehat{K}x$ é standard e temos que ter $\widehat{K}x = z \in Y$. Por transferência deduz-se que $\widehat{K}(\widehat{X}) \subseteq Y$.□

1.7.6 Proposição

Seja $T : X \to Y$ um operador S-compacto onde X e Y são espaços standard normados. O operador standard K definido por

$$Kx = {}^o(Tx) \text{ para todo } x \in X$$

é um operador compacto.

Dem.

Para um standard $x \in X$, Tx é próximo-standard e também $^o(Tx)$ (e unicamente definido). Pelo Princípio 1.3.6 [de extensão funcional (saturação fraca)] define-se o operador K.

Seja B a bola unitária fechada em X [Def. 1.5.1 (ii) com $r = 1$]. Então $T(B)$ é um subconjunto S-compacto de Y e $K(B)$ está contido no conjunto compacto $T(B)^S$.[28]□

A seguir apresentamos um importante:

1.7.7 Exemplo de um operador compacto

Seja $k : I \times J \to \mathbb{C}$ uma função standard contínua no produto de dois intervalos compactos de $\mathbb{R}$ e defina-se

$$Kf(s) = \int_I k(u,s)\, f(u)\, du.$$

É óbvio que

$$|Kf(s)| \leq \|k\|_\infty \cdot \|f\|_1 \;\; (f \in \mathfrak{L}^1(I)).$$

[29] Falta provar que o operador Kf é contínuo (primeiro quando f é standard) e depois que K é uma aplicação linear standard contínua

$$\mathfrak{L}^1(I) \to C(J).$$

---

[28] Já demonstrámos, na Proposição 1.5.8, que se trata de um conjunto compacto.

[29] $\mathfrak{L}^1(I)$ é o espaço das funções reais de variável real contínuas no intervalo I, com norma definida por $\|x\|_\infty = \int_I |x(t)|\ dt$. A norma do máximo é: $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

Vamos provar que é (S-) compacto (as duas noções coincidem visto que K é standard). Para $\|f\|_1 \leq 1$ e um standard s, vamos definir

$$h(s) = {}^o g(s) = \int_I k(u,s)f(u)du$$

[isto é possível pois $g(s)$ é limitada (de facto $|g(s)| \leq \|K\|_\infty$, pela Definição 1.6.13) logo ${}^o g(s) = g(s)$].

Por standardização, há uma única função standard h tomando os valores determinados anteriormente nos pontos standard. Para s e t standard

$$|h(s) - h(t)| \leq |g(s) - g(t)| \leq \underset{u}{Max}\,|k(u,s) - k(u,t)|\,.$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos usar a transferência em

$$|h(s) - h(t)| \leq \underset{u}{Max}\ |k(u,s) - k(u,t)| + \varepsilon$$

e deduz-se que isto é válido mesmo se s e t são não-standard.

Tomando em particular $s \simeq t$ então $k(u,s) \simeq k(u,t)$ para todo u e

$$\underset{u}{Max}\ |k(u,s) - k(u,t)| \simeq 0.$$

Isto conduz a $|h(s) - h(t)| \leq \varepsilon$, $|h(s) - h(t)| \leq 2\varepsilon$, e como $\varepsilon > 0$ standard, ao arbítrio, nós concluímos que $h(s) \simeq h(t)$ quando $s \simeq t$.

Agora se s é arbitrário em J e ${}^o s$ a sua sombra nós podemos (pelos passos do teorema de Ascoli) escrever sucessivamente

$$h(s) \simeq h({}^o s) \simeq g({}^o s) \simeq g(s),$$

$$\|h - g\|_\infty = \underset{s}{Max}\ |h(s) - g(s)| \simeq 0.$$

Isto prova que h é uma parte standard de $g = Kf$, portanto Kf é próximo-standard.$\square$

1.8 Teoria espectral em espaços normados de dimensão finita

A teoria espectral é um dos ramos mais importantes da moderna análise funcional e suas aplicações. De uma forma muito geral está relacionada com certos operadores inversos, as suas propriedades gerais e as suas relações com os operadores originais que advêm do problema da resolução de equações (sistemas de equações lineares algébricas, equações diferenciais, equações integrais).

Supomos, salvo indicação contrária, que todos os espaços são complexos e excluímos o trivial espaço vectorial $\{0\}$.

Seja X um espaço normado de dimensão finita e $T : X \rightarrow X$ um operador linear. A teoria espectral destes operadores é mais simples do que a dos operadores definidos em espaços de dimensão infinita, como veremos.

Como podemos representar T por matrizes[30] (as quais dependem da escolha da base para X), a teoria espectral de T é essencialmente a teoria matricial dos valores próprios.

1.8.1 Definição (valores próprios, vectores próprios, espaços próprios, espectro e conjunto resolvente de uma matriz)

Um valor próprio[31] de uma matriz quadrada $n \times n$ (real ou complexa) $A = (\alpha_{jk})$ onde $j, k = 1, 2, ..., n$ é um número λ tal que a equação

(1) $$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

---

[30] Ver a Secção 1.6.9.

[31] Alguns autores usam "valor característico".

tem uma solução $\overrightarrow{x} \neq 0$. A este $\overrightarrow{x}$ chama-se vector próprio[32] de A associado ao valor próprio λ.

Os vectores próprios associados ao valor próprio λ e o vector nulo formam um subespaço vectorial de X chamado espaço próprio de A associado ao valor próprio λ, isto é, $E(\lambda) = \{\overrightarrow{x} : A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}\}$.

O conjunto $\sigma(A)$ de todos os valores próprios de A é chamado o espectro de A. O seu complementar $\rho(A) = \mathbb{C} - \sigma(A)$ no plano complexo é chamado o conjunto resolvente de A.

1.8.2 Exemplo

Seja $\varepsilon \simeq 0\,(\varepsilon \neq 0)$. A matriz não-standard $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$, tem como valores próprios $\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+20\varepsilon} \simeq 3$ e $\lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+20\varepsilon} \simeq 2$ e, os vectores próprios associados são, respectivamente,

$$x_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\sqrt{(1+20\varepsilon)} \end{bmatrix} \right\} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$x_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{(1+20\varepsilon)} \end{bmatrix} \right\} \simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Observação:

A equação (1) pode ser escrita na forma

(2) $\qquad (A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0$

---

32 Alguns autores usam "vector característico".

onde I é a matriz identidade $n \times n$. Para que (2) tenha uma solução não nula, o determinante dos coeficientes, $det(A - \lambda I)$, do sistema homogéneo de n equações lineares a n incógnitas, tem que ser nulo. Obtém-se assim a equação característica de A

(3)
$$det\ (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

O $det(A - \lambda I)$ é chamado o determinante característico de A. Com o seu desenvolvimento, obtemos um polinómio em λ de grau n : o polinómio característico de A.

Um resultado clássico é que uma matriz quadrada $n \times n$, $A = (\alpha_{jk})$ tem pelo menos um valor próprio (e no máximo n valores próprios numericamente diferentes).[33] Os valores próprios podem ser complexos mesmo que A seja real.

Em termos de ANS podemos ainda afirmar que uma matriz não-standard pode ter valores próprios standard e vectores próprios não-standard. **Exemplo**: Seja $\varepsilon \simeq 0$ ($\varepsilon \neq 0$). A matriz não-standard $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$, tem como valores próprios $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$ (é imediato pois trata-se de uma matriz triangular inferior) e, os vectores próprios associados são, respectivamente, $x_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, e $x_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \right\}$.

1.8.3 Teorema (valores próprios de um operador)

Todas as matrizes que representem um dado operador linear $T : X \rightarrow X$ num espaço normado de dimensão finita, relativamente a várias bases para X têm os mesmos valores próprios.

Dem.

---

33 Justifica-se pelo teorema fundamental da álgebra e o teorema da factorização, um polinómio de grau positivo n e com coeficientes em $\mathbb{C}$ tem raízes em $\mathbb{C}$ (e no máximo n raízes numericamente diferentes).

Sejam $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ e $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n)$ bases quaisquer para X, escritas como vectores linha. Vamos verificar o que acontece na transição de uma base para outra. Por definição de base, cada e_j é uma combinação linear dos $\tilde{e}'_k s$ e reciprocamente. Ou seja,

(4) $$\tilde{e} = eC \Leftrightarrow [\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ ...\ \tilde{e}_n] = [e_1\ e_2\ ...\ e_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

ou

$$\tilde{e}^T = C^T e^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

onde C é uma matriz quadrada $n \times n$ regular.[34]

Cada $x \in X$ tem uma única representação com respeito a cada uma das bases, seja,

$$x = ex_1 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j = \tilde{e}x_2 = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k e_k$$

isto é,

$$x = [e_1\ e_2\ ...\ e_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ ...\ \tilde{e}_n] \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\xi}_n \end{bmatrix}.$$

Assim $x = ex_1 = \tilde{e}x_2 \underset{\text{por (4) pois } \tilde{e}=eC}{=} eCx_2$. Portanto:

(5) $x_1 = Cx_2.$

Similarmente, para $Tx = y = ey_1 = \tilde{e}y_2$ temos

(6) $y_1 = Cy_2.$

Consequentemente, se T_1 e T_2 denotam as matrizes que representam T a respeito das bases e e $\tilde{e}$, respectivamente, então

(7) $y_1 = T_1 x_1$

---

34 Isto é, tem inversa. Também se diz não-singular.

e

(8) $y_2 = T_2 x_2,$

e assim

$$y_1 = T_1 x_1 \underset{\text{por (5)}}{=} T_1 C x_2 \text{ e } y_1 = C y_2 \underset{\text{por (8)}}{=} C T_2 x_2$$

ou seja,

(9) $C T_2 x_2 = C y_2 = y_1 = T_1 x_1 = T_1 C x_2$, ou ainda,

(10) $C T_2 x_2 = T_1 C x_2.$

Pré-multiplicando[35] (10) por C^{-1} obtemos a lei de transformação:

(11) $T_2 = C^{-1} T_1 C$ [36], com C determinada pelas bases de acordo com (4) (e independentemente de T). Usando (11) e $det(C^{-1}) \times det(C) = 1$, podemos agora mostrar que os determinantes característicos de T_2 e T_1 são iguais:

(12) $det(T_2 - \lambda I) \underset{\text{por (11) e } I = C^{-1} I C}{=} det(C^{-1} T_1 C - \lambda C^{-1} I C) \underset{\text{colocando } C^{-1} \text{ e } C \text{ em evidência}}{=}$

$= det[C^{-1}(T_1 - \lambda I) C)] \underset{\text{o determinante do produto é o produto dos determinantes}}{=}$

$= det(C^{-1}) \times det(T_1 - \lambda I) \times det(C) \underset{\text{pois } det(C^{-1}) \times det(C) = 1}{=}$

$= det(T_1 - \lambda I).$

Pela observação a seguir ao Exemplo 1.8.2 concluímos que os valores próprios são iguais.□

1.8.4 Observações

---

35 O prefixo "pré" significa anteriormente.

36 Se existe uma matriz regular C tal que (11) é válida as matrizes $n \times n$, T_1 e T_2 são chamadas <u>matrizes semelhantes</u> e têm os mesmos valores próprios.

i) Um operador linear num espaço normado complexo de dimensão finita $X \neq \{0\}$ tem pelo menos um valor próprio.[37]

ii) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, n valores próprios (distintos ou não) de uma matriz quadrada $n \times n$. O produto dos valores próprios é igual a $det\ A$, isto é, $\lambda_1 \times \lambda_2 \times ... \times \lambda_n = det\ A$ e a sua soma é igual ao traço[38] de A, isto é, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = traço\ A$.

iii) A matriz inversa A^{-1} de uma matriz quadrada A existe se e só se todos os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de A são diferentes de zero. Se A^{-1} existe, então os seus valores próprios são $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}$.

iv) As matrizes regulares 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ tem inversa } A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Para a demonstração destes resultados e outros consulte-se um livro de álgebra linear.

[37] Define-se a multiplicidade algébrica de um valor próprio λ de uma matriz A como a multiplicidade de λ considerado como raíz do polinómio característico, e a dimensão do espaço próprio de A associada a λ chama-se a multiplicidade geométrica de λ.

[38] Soma dos elementos da diagonal principal.

1.9 Teoria espectral em espaços normados

Vamos agora considerar espaços normados de qualquer dimensão, e veremos que nos espaços de dimensão infinita, a teoria espectral torna-se mais complicada.

1.9.1 Definição (operador resolvente)

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \to X$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. A T associamos o operador

(1) $T_\lambda = T - \lambda I$

onde λ é um número complexo e I é o operador identidade em $\mathcal{D}(T)$. Se T_λ tem um operador inverso, denotamo-lo por $R_\lambda(T)$, ou seja,

(2) $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$

e chama-se o operador resolvente de T ou, simplesmente, o **resolvente**[39] de T.

1.9.2 Observação

O nome "resolvente" é apropriado, uma vez que $R_\lambda(T)$ ajuda a resolver a equação $T_\lambda x = y$. Assim, $x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T) y$ desde que $R_\lambda(T)$ exista.

O operador $R_\lambda(T)$ é um operador linear (pois o inverso de um operador linear é um operador linear).

Para a compreensão do operador T é necessário investigarmos as propriedades de T_λ e R_λ e, algumas, dependem de λ.

Para o estudo de T, T_λ e R_λ necessitamos da seguinte:

---

39 Alguns autores definem o resolvente por $(\lambda I - T)^{-1}$ e nas equações integrais é por vezes definido por $(I - \lambda T)^{-1}$.

1.9.3 Definição (valor regular, conjunto resolvente, espectro)

Seja $X \neq \{0\}$ um espaço normado complexo e $T : \mathcal{D}(T) \to X$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$. Um valor regular λ de T é um número complexo tal que:

(R_1) $R_\lambda(T)$ existe[40];

(R_2) $R_\lambda(T)$ é limitado;

(R_3) $R_\lambda(T)$ está definido num conjunto que é denso em X.

O conjunto resolvente $\rho(T)$ de T é o conjunto de todos os valores regulares λ de T.

Chama-se espectro de T ao complementar do conjunto resolvente, no plano complexo, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$. Um $\lambda \in \sigma(T)$ é chamado um valor espectral de T.

O espectro $\sigma(T)$ é subdividido em três conjuntos disjuntos dois a dois:

- O espectro pontual ou espectro discreto $\sigma_p(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ não existe. Um $\lambda \in \sigma_p(T)$ é chamado um valor próprio de T.

- O espectro contínuo $\sigma_c(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe e satisfaz (R_3) mas não (R_2), ou seja, $R_\lambda(T)$ não é limitado.

- O espectro residual $\sigma_r(T)$ é o conjunto tal que $R_\lambda(T)$ existe (e pode ser limitado ou não) mas não satisfaz (R_3), ou seja, o domínio de $R_\lambda(T)$ não é denso em X, isto é, $\overline{\mathcal{D}(T_\lambda^{-1})} = \overline{\mathrm{Im}(T_\lambda)} \neq X$.

1.9.4 Observação

No caso da dimensão finita $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.[41]

---

40 É também um resultado clássico que $R_\lambda(T) : \mathrm{Im}(T_\lambda) \to \mathcal{D}(T)$ existe se e só se $T_\lambda x = 0$ implica $x = 0$, ou seja, o espaço nulo de T_λ é $\{0\}$. Não há perigo de confusão pois $\mathrm{Im}(T_\lambda)$ denota a imagem de T_λ embora muitos autores utilizem $\mathcal{R}(T)$ em vez de $\mathrm{Im}(T_\lambda)$.

41 Diz-se que o espectro é um espectro pontual puro.

Podemos sintetizar tudo o que referimos na definição anterior através de uma tabela:

Satisfeita	Não satisfeita	λ pertence ao:
(R_1), (R_2), (R_3)		$\rho(T)$ (conjunto resolvente)
	(R_1)	$\sigma_p(T)$ (espectro pontual ou discreto)
(R_1), (R_3)	(R_2)	$\sigma_c(T)$ (espectro contínuo)
(R_1)	(R_3)	$\sigma_r(T)$ (espectro residual)

A união dos quatro conjuntos definidos é todo o plano complexo, isto é,

$$\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T) = \rho(T) \cup \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Se o espaço X tem dimensão infinita, então T pode ter valores espectrais os quais não são valores próprios, como veremos no importante:

1.9.5 Exemplo (operador com um valor espectral que não é um valor próprio)

No espaço $X = l^2$ define-se o operador $T : l^2 \to l^2$ por

(3) $$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots),$$

onde $x = (\xi_j) \in l^2$. O operador T é chamado o **operador passo à direita.**[42]

Trata-se de um operador limitado (e $\|T\| = 1$) porque $\|Tx\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 = \|x\|^2$.

O operador $R_0(T) = T^{-1} : T(X) \to X$ existe; de facto, é o **operador passo à esquerda**[43] dado por

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots)$, logo a condição (R_1) da Definição 1.9.3 é verificada.

Mas $R_0(T)$ não satisfaz (R_3), porque **(3)** mostra que $T(X)$ não é denso em X; de facto, $T(X)$ é o subespaço Y consistindo em todos os $y = (\eta_j)$ com $\eta_1 = 0$.

Pela Definição 1.9.3, $\lambda = 0$ é um valor espectral de T.

[42] Em Inglês: "right-shift operator".

[43] Em Inglês: "left-shift operator".

Sabemos que $\lambda = 0$ não é um valor próprio pois $Tx = 0$ implica $x = 0$ e pela Definição 1.8.1 (valores próprios, vectores próprios, espaços próprios, espectro e conjunto resolvente de uma matriz) o vector nulo não é um vector próprio.

1.10 Propriedades espectrais dos operadores lineares limitados

As propriedades do espectro de um operador dependem do tipo de espaço no qual o operador está definido e do tipo de operador considerado.

1.10.1 Teorema (inverso)

Seja T um operador linear num espaço de Banach X complexo. Se $\|T\| < 1$, então $(I-T)^{-1}$ existe como operador linear limitado em todo o espaço X e

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots . \tag{1}$$

[onde a série da direita é convergente na norma em $B(X,X)$[44]].

Dem.

Temos $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ por (6) da Secção 1.6.15. Como a série geométrica $\sum \|T\|^j$ converge para $\|T\| < 1$, a série em (1) é absolutamente convergente para $\|T\| < 1$.

Como X é completo, o espaço $B(X,X)$ também é (resultado clássico). A convergência absoluta implica assim a convergência.

Seja S a soma da série (1). Demonstremos que $S = (I-T)^{-1}$. Para isso calculamos

$$\begin{aligned}(I-T)(I+T+\dots+T^n) &= (I+T+\dots+T^n)(I-T) = \\ &= \frac{I-T^{n+1}}{I-T} \times (I-T) = I - T^{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

44 Denotamos por $B(X,X)$ o espaço de todos os operadores lineares limitados de um espaço de Banach X num espaço de Banach X.

Fazendo $n \simeq \infty$ então $T^{n+1} \simeq O$ porque $\|T\| < 1$. Obtemos assim (pois $S = I + T + T^2 + ... + T^n + ...$)

$$(I - T)S = S(I - T) = I. \tag{3}$$

Isto mostra que $S = (I - T)^{-1}$.$\square$

O espectro de um operador linear limitado é um conjunto fechado no plano complexo, como veremos no:

1.10.2 Teorema (espectro fechado)

O conjunto resolvente $\rho(T)$ de um operador linear limitado T num espaço de Banach complexo X é aberto; por isso o espectro $\sigma(T)$ é fechado.

Dem.

Se $\rho(T) = \emptyset$, é aberto logo o espectro é fechado.

Seja $\rho(T) \neq \emptyset$. Para um fixo $\lambda_0 \in \rho(T)$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned} T - \lambda I = T - \lambda_0 I - (\lambda - \lambda_0)I & \underset{\text{pois } I=(T-\lambda_0 I)(T-\lambda_0 I)^{-1}}{=} \\ = \quad & (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)(T - \lambda_0 I)^{-1} = \\ = \quad & (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]. \end{aligned}$$

Denotando o operador entre parêntesis [...] por V, podemos escrever esta igualdade na forma

$$T_\lambda = T_{\lambda_0} V \text{ onde } V = I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}. \tag{4}$$

Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ e T é limitado $R_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}^{-1} \in B(X,X)$. Além disso, o Teorema 1.10.1 mostra que V tem inverso

$$V^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}[(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}]^j = \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^j \tag{5a}$$

em $B(X,X)$ para todo λ tal que $||(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}|| < 1$, isto é,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}. \tag{5b}$$

Como $T_{\lambda_0}^{-1} = R_{\lambda_0} \in B(X,X)$, e por (4) sai que para cada λ satisfazendo (5b) o operador T_λ tem inverso

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} = (T_{\lambda_0}V)^{-1} = V^{-1}R_{\lambda_0}. \tag{6}$$

Por isso (5b) representa uma vizinhança de λ_0 consistindo nos valores regulares λ de T. Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ foi arbitrário, o conjunto resolvente, $\rho(T)$, é aberto, e assim o seu complementar, o espectro, $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é fechado.□

Obtivémos nesta demonstração uma representação do resolvente dada por uma série de potências de λ. Assim, de (5) e (6) obtemos o seguinte:

1.10.3 Teorema da Representação (resolvente)

Para X e T tal como no Teorema anterior e cada $\lambda_0 \in \rho(T)$ o resolvente $R_\lambda(T)$ tem a representação

$$R_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1}, \tag{7}$$

cuja série é absolutamente convergente para cada λ no disco aberto dado por

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{||R_{\lambda_0}||}$$

no plano complexo. Este disco é um subconjunto de $\rho(T)$.

Do Teorema 1.10.2 também se conclui que para um operador linear limitado o espectro é um conjunto limitado no plano complexo, tal como veremos no:

1.10.4 Teorema (espectro)

O espectro $\sigma(T)$ de um operador linear limitado $T : X \to X$ num espaço de Banach complexo X é compacto e situa-se no disco dado por

$$|\lambda| \leq \|T\| \,. \tag{8}$$

Por este motivo o conjunto resolvente $\rho(T)$ de T é não vazio.

Dem.

Seja $\lambda \neq 0$ e $k = \dfrac{1}{\lambda}$. Pelo Teorema 1.10.1 obtemos a representação

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) &= (T - \lambda I)^{-1} = (-\lambda I + T)^{-1} = \left[-\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)\right]^{-1} = \\ &= (-\lambda)^{-1}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} \underset{\text{pois } k=\frac{1}{\lambda}}{=} -\frac{1}{\lambda}(I - kT)^{-1} \underset{\text{pelo Teorema 1.10.1}}{=} \\ &= -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(kT)^j \underset{\text{pois } k=\frac{1}{\lambda}}{=} -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j \end{aligned} \tag{9}$$

e esta série, pelo Teorema 1.10.1, converge para todos os λ tais que $\left\|\dfrac{1}{\lambda}T\right\| = \dfrac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$, isto é, $|\lambda| > \|T\|$; e também λ está em $\rho(T)$ logo o espectro $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ situa-se no disco (8) e assim $\sigma(T)$ é limitado. Pelo Teorema 1.10.2, $\sigma(T)$ é fechado. Assim $\sigma(T)$ é compacto.□

1.10.5 Definição (raio espectral)

O **raio espectral** $r_\sigma(T)$ de um operador $T \in B(X, X)$ num espaço de Banach complexo X é o raio

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

do menor disco fechado centrado na origem do λ-*plano complexo* e contendo $\sigma(T)$.

De (8) é óbvio que para o raio espectral de um operador linear limitado T num espaço de Banach complexo temos:

$$r_\sigma(T) \leq \|T\| \,, \tag{10}$$

e

$$r_\sigma(T) =^o \left(\sqrt[n]{\|T^n\|} \right) \quad \text{com } n \simeq +\infty. \tag{11}$$

1.11 Outras propriedades do resolvente e do espectro

1.11.1 Teorema (equação resolvente, comutatividade)

Seja X um espaço de Banach complexo, $T \in B(X,X)$ e $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Então:

(a) O resolvente R_λ de T satisfaz a relação de Hilbert ou equação resolvente

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \quad [\lambda, \mu \in \rho(T)]. \tag{1}$$

(b) R_λ comuta com qualquer $S \in B(X,X)$ que comute com T.

(c) Temos:

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda \qquad\qquad [\lambda, \mu \in \rho(T)]. \tag{2}$$

Dem.

(a) Como a imagem de T_λ é todo o espaço X, $I = T_\lambda R_\lambda$, onde I é o operador identidade em X. Também se verifica $I = R_\mu T_\mu$. Portanto,

$$\begin{aligned} & R_\mu - R_\lambda \underset{\text{pois } R_\mu = R_\mu \times I = R_\mu (T_\lambda R_\lambda) \text{ e } R_\lambda = I \times R_\lambda = (R_\mu T_\mu) R_\lambda}{=} \\ = \;& R_\mu (T_\lambda R_\lambda) - (R_\mu T_\mu) R_\lambda = \\ = \;& R_\mu (T_\lambda - T_\mu) R_\lambda \underset{\text{pois } T_\lambda = T - \lambda I \text{ e } T_\mu = T - \mu I}{=} R_\mu \left[T - \lambda I \; - (T - \mu I) \right] R_\lambda = \\ = \;& (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda . \end{aligned}$$

(b) Por hipótese, $ST = TS$. Portanto $ST_\lambda = T_\lambda S$. Usando $I = T_\lambda R_\lambda = R_\lambda T_\lambda$, obtemos assim

$$R_\lambda S \underset{\text{pois } R_\lambda S = R_\lambda S \times I = R_\lambda S T_\lambda R_\lambda}{=} R_\lambda S T_\lambda R_\lambda \underset{\text{pois } R_\lambda T_\lambda = I}{=} S R_\lambda .$$

(c) R_μ comuta com T por (b). Portanto R_λ comuta com R_μ por (b).□

É um resultado clássico que se λ é um valor próprio de uma matriz quadrada A, então λ^n é um valor próprio de A^n (n inteiro positivo), e mais geralmente o polinómio $p(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0$ é um valor próprio da matriz $p(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_0 I$.

Esta propriedade é extensível aos espaços de Banach complexos de qualquer dimensão e assim surge-nos o importante:

1.11.2 Teorema da aplicação espectral para polinómios

Seja X um espaço de Banach complexo, $T \in B(X,X)$ e $p(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0$ ($\alpha_n \neq 0$).Então:

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)) \tag{3}$$

[45]isto é, o espectro $\sigma(p(T))$ do operador $p(T) = \alpha_n T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + ... + \alpha_0 I$ consiste precisamente em todos os valores que o polinómio p tem no espectro $\sigma(T)$ de T.

Dem.

Assumimos que $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Se $n = 0$, $p(\lambda) = \alpha_0$ e $p(T) = \alpha_0 I$ logo $p(\sigma(T)) = \{\alpha_0\} = \sigma(p(T))$.

Seja $n > 0$:

i) Provar $\sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$.

Por uma questão de simplificação da escrita escrevemos $S = p(T)$ e $S_\mu = p(T) - \mu I$ ($\mu \in \mathbb{C}$).

---

45 $p(\sigma(T))$ é o conjunto de todos os números complexos μ tais que $\mu = p(\lambda)$ para algum $\lambda \in \sigma(T)$, ou seja, $p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu = p(\lambda), \ \lambda \in \sigma(T)\}$.

Se S_μ^{-1} existir, é o operador resolvente de $p(T)$. Seja μ fixo. Como X é complexo o polinómio dado por $s_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ deve factorizar-se completamente em termos lineares, digamos,

$$s_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu = \alpha_n(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)...(\lambda - \gamma_n), \tag{4}$$

onde $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ são os zeros de s_μ (os quais dependem de μ). Correspondendo a (4) temos

$$S_\mu(\lambda) = p(T) - \mu I = \alpha_n(T - \gamma_1 I)(T - \gamma_2 I)...(T - \gamma_n I).$$

Se cada γ_j está em $\rho(T)$, então cada $T - \gamma_j I$ tem um inverso limitado que está definido em todo o X, e o mesmo é válido para S_μ; de facto, pelo Lema 1.6.12 (inverso do produto de operadores):

$$S_\mu^{-1} = \frac{1}{\alpha_n}(T - \gamma_n I)^{-1}...(T - \gamma_2 I)^{-1}(T - \gamma_1 I)^{-1}.$$

Por isso, neste caso, $\mu \in \rho(p(T))$. Daqui concluímos que $\mu \in \sigma(p(T)) \Rightarrow \gamma_j \in \sigma(T)$ para algum j.

Agora substituindo λ por γ_j em (4) vem:

$$s_\mu(\gamma_j) = p(\gamma_j) - \mu = 0,$$

e assim

$$\mu = p(\gamma_j) \in p(\sigma(T)).$$

Como $\mu \in \sigma(p(T))$ era arbitrário, isto prova i).

ii) Provar $p(\sigma(T)) \subseteq \sigma(p(T))$.

Seja $k \in p(\sigma(T))$. Por definição (ver nota 45), isto significa que $k = p(\beta)$ para algum $\beta \in \sigma(T)$.

Temos agora que considerar dois casos:

1º) $T - \beta I$ não tem inverso.

2º) $T - \beta I$ tem inverso.

Vamos considerá-los então:

1º) Se $k = p(\beta) \Leftrightarrow p(\beta) - k = 0$. Por isso β é um zero do polinómio dado por $s_k(\lambda) = p(\lambda) - k$.

Assim usando (4) [pois $p(\lambda) - \mu = \alpha_n(\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2)...(\lambda - \gamma_n)$ onde $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ são os zeros do polinómio mas nós sabemos que um deles é β logo fica

$$(\lambda - \beta)\underbrace{\alpha_n(\lambda - \gamma_2)...(\lambda - \gamma_n)}_{=g(\lambda)}]$$

podemos escrever $s_k(\lambda) = p(\lambda) - k = (\lambda - \beta)g(\lambda)$, onde $g(\lambda)$ denota o produto dos outros $n - 1$ factores e α_n.

Correspondendo a esta representação temos

$$S_k = p(T) - kI = (T - \beta I)g(T) \qquad \textbf{(5)}$$

Como todos os factores de $g(T)$ comutam com $T - \beta I$, temos também que

$$S_k = g(T)(T - \beta I) \qquad \textbf{(6)}$$

Se S_k tem inverso,

$I = \underbrace{(T-\beta I)g(T)}_{=S_k}S_k^{-1} = S_k^{-1}\underbrace{g(T)(T-\beta I)}_{=S_k}$, o que mostra que $T-\beta I$ tem inverso, contrariando a nossa hipótese. Por isso para o nosso k o resolvente S_k^{-1} de $p(T)$ não existe, no caso de $k \in \sigma(p(T))$. Como $k \in p(\sigma(T))$ foi arbitrário, concluímos que

$k \in p(\sigma(T)) \Rightarrow k \in \sigma(p(T))$, sob a hipótese de $T-\beta I$ não ter inverso.

2°) Tal como no 1°caso considerado, seja $k = p(\beta)$ para algum $\beta \in \sigma(T)$ mas consideremos agora que o inverso $(T-\beta I)^{-1}$ existe. Então para a imagem de $T-\beta I$ temos que ter

$$\mathrm{Im}(T-\beta I) \neq X \tag{7}$$

porque caso contrário $(T-\beta I)^{-1}$ seria limitado [pois pelo Teorema 1.6.11, do operador inverso, seria limitado] desde que $\beta \in \rho(T)$, o que contradiz $\beta \in \sigma(T)$. De (5) e (6) obtemos $\mathrm{Im}(S_k) \neq X$.

Isto mostra que $k \in \sigma(p(T))$ porque $k \in \rho(\sigma(T))$ vai implicar que $\mathrm{Im}(S_k) = X$ [pois se S_k é limitado S_k^{-1} está definido em todo o espaço X e é limitado].

Isto prova que $k \in p(\sigma(T)) \Rightarrow k \in \sigma(p(T))$ sob a hipótese que $T-\beta I$ tem inverso.□

1.11.3 Exemplo

Dado um operador T linear limitado num espaço de Banach, se T é idempotente[46] e $T \neq O, \neq I$ então o seu espectro é $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

Este resultado pode ser demonstrado

(a) através de (9) do Teorema 1.10.4 (espectro)

(b) pelo Teorema anterior.

[46] T é idempotente se $T^2 = T$.

(a) A fórmula (9) do Teorema 1.10.4 (espectro) diz-nos que se $|\lambda| > \|T\|$ o operador resolvente de T é dado por $R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j$. No nosso caso, para $|\lambda| > 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
R_\lambda(T) &= -\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^0+\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^1+\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^2+\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^3+\ldots\right] = \\
&= -\lambda^{-1}\left(I+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T^2+\lambda^{-3}T^3+\ldots\right) \underset{\substack{\text{como, por hipótese } T \text{ é idempotente:}\\ T^2=T \text{ e assim } T^n=T}}{=} \\
&= -\lambda^{-1}\left(I+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T+\lambda^{-3}T+\ldots\right) \underset{\text{somando e subtraindo o operador } T}{=} \\
&= -\lambda^{-1}\left[(I-T)+(T+\lambda^{-1}T+\lambda^{-2}T+\lambda^{-3}T+\ldots)\right] \underset{\text{colocando } T \text{ evidência}}{=} \\
&= -\lambda^{-1}\left[(I-T)+T(1+\lambda^{-1}+\lambda^{-2}+\lambda^{-3}+\ldots)\right] \underset{\text{pelos C.A.}}{=}
\end{aligned}$$

C.A.
$1+\lambda^{-1}+\lambda^{-2}+\lambda^{-3}+\ldots = 1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^i$ é uma série geométrica de 1ºtermo 1 e razão $r=\frac{1}{\lambda}$ e como $\lvert r\rvert<1$ logo é convergente e a sua soma é $s=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

$$\begin{aligned}
&= -\lambda^{-1}\left[(I-T)+T\times\frac{\lambda}{\lambda-1}\right] \underset{\text{propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, à esquerda}}{=} \\
&= -\lambda^{-1}(I-T)-\lambda^{-1}\times\frac{\lambda}{\lambda-1}T = -\lambda^{-1}(I-T)-(\lambda-1)^{-1}T,
\end{aligned}$$

o que é válido para $\lambda \neq 0,\ 1$ logo o espectro é $\sigma(T)=\{0,1\}$.

(b) Pelo teorema 1.11.2 vem que $p(T)=T^2-T=O$ [pois $T^2=T$ (o operador T é idempotente)] e $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda=0$ donde $\lambda=0 \vee \lambda=1$ logo o espectro é $\sigma(T)=\{0,1\}$.□

A análise complexa é extremamente importante na teoria espectral e é através das séries de potências (ou integrais de linha complexos) que se estabelece uma ponte entre as duas áreas.

Em seguida apresentamos um resultado estabelecido por Izrail M. Gelfand (1941):

1.11.4 Teorema (raio espectral)

Se T é um operador linear limitado num espaço de Banach complexo, então para o raio espectral[47] $r_\sigma(T)$ de T temos

$$r_\sigma(T) = {}^o\left(\sqrt[n]{\|T^n\|}\right) \quad \text{com } n \simeq +\infty. \tag{8}$$

Dem.

Temos $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$ pelo Teorema 1.11.2 (aplicação espectral para polinómios), de modo que

$$r_\sigma(T^n) = [r_\sigma(T)]^n. \tag{9}$$

Por (10) da Sec. 1.10.5 sabemos que $r_\sigma(T) \leq \|T\|$. Aplicando a T^n em vez de T, obtemos que $r_\sigma(T^n) \leq \|T^n\|$.

Simultaneamente, $r_\sigma(T) = \sqrt[n]{r_\sigma(T^n)} \leq \sqrt[n]{\|T^n\|}$ para cada n. Por isso, com ω ilimitado

$$r_\sigma(T) \leq {}^o\left(\inf\{\sqrt[n]{\|T^n\|} : n \geq \omega\}\right) \leq {}^o\left(\sup\{\sqrt[n]{\|T^n\|} : n \geq \omega\}\right)$$

Vamos mostrar que $r_\sigma(T)$ é igual à última expressão e assim (10)⇒(8). Da análise complexa sabemos que uma série de potências $\sum c_n k^n$ converge absolutamente para $|k| < r$ com raio de convergência dado pela **fórmula de Hadamard:**[48]

$$\frac{1}{r} = {}^o\left(\sup\{\sqrt[n]{|c_n|} : n \geq \omega\}\right) \quad \text{com } \omega \text{ ilimitado.} \tag{11}$$

---

[47] Compare-se com a Definição 1.10.5 (raio espectral).

[48] Hadamard (Jacques Salomon), matemático francês (Versalhes 1865- Paris 1963).

Fazendo $k = \frac{1}{\lambda}$ e $n = j$ na série (9) $R_\lambda(T) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j$ ($|\lambda| > \|T\|$) (ver Sec. 1.10.4) e como $\|T\| > r$ vem que

$$R_\lambda(T) = -k\sum_{n=0}^{\infty} T^n k^n \ (|k| < r).$$

Então, escrevendo $|c_n| = \|T^n\|$, obtemos

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} T^n k^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \, |k|^n \underset{|c_n|=\|T^n\|}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \, |k|^n .$$

A fórmula de Hadamard (11) mostra que temos convergência absoluta para $|k| < r$, por este motivo

$$|\lambda| = \frac{1}{|k|} > \frac{1}{r} =^{o} \left(\sup\{\sqrt[n]{\|T^n\|} : n \geq \omega\}\right) \quad \text{com } \omega \text{ ilimitado.}$$

É um resultado conhecido da análise complexa que o raio de convergência r é o maior disco circular aberto centrado em $k = 0$ (a série de potências tem centro em $k = 0$).

Assim $\frac{1}{r}$ é o raio do mais pequeno círculo centrado em $\lambda = 0$ no $\lambda - plano$ cujo exterior situa-se inteiramente em $\rho(T)$.

Por definição isto significa que $\frac{1}{r}$ é o raio espectral de T. Por isso, por (11),

$$r_\sigma(T) = \frac{1}{r} =^{o} \left(\sup\{\sqrt[n]{\|T^n\|} : n \geq \omega\}\right) \quad \text{com } \omega \text{ ilimitado.}$$

Daqui e de (10) obtemos (8).□

1.11.5 Exemplo

Dado um operador linear $T : X \to X$ num espaço de Banach complexo $X \neq \{0\}$, se T é nilpotente[49] então o seu espectro é $\sigma(T) = \{0\}$.

---

49 T é nilpotente se existe um inteiro positivo m tal que $T^m = O$.

Este resultado pode ser demonstrado

(a) através de (9) do Teorema 1.10.4 (espectro)

(b) pelo Teorema anterior.

(a) A fórmula (9) do Teorema 1.10.4 (espectro) diz-nos que se $|\lambda| > ||T||$ o operador resolvente de T é dado por

$$\begin{aligned} R_\lambda(T) &= -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^j = \qquad\qquad (|\lambda| > ||T||) \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^0 + \left(\frac{1}{\lambda}T\right)^1 + \left(\frac{1}{\lambda}T\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{\lambda}T\right)^{m-1} + \left(\frac{1}{\lambda}T\right)^m + ...\right] \underset{(1)}{=} \\ &= -\lambda^{-1}I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + ... + \lambda^{-m+1}T^{m-1} + \lambda^{-m}T^m + ... = \\ &= -\lambda^{-1}\left(I + \lambda^{-1}T + \lambda^{-2}T^2 + ... + \lambda^{-m+1}T^{m-1}\right) \end{aligned}$$

o que é válido para $\lambda \neq 0$, logo o espectro é $\sigma(T) = \{0\}$.

Nota: (1) Pois, por hipótese T é nilpotente:$T^m = O$ para $m > 0$.

(b) Por (8) do Teorema 1.11.4 (raio espectral) vem que sendo m um natural ilimitado

$$r_\sigma(T) = {}^o\left(\sqrt[m]{||T^m||}\right) = {}^o\left(\sqrt[m]{0}\right) = 0$$

[pois $T^m = O$ (o operador T é nilpotente) e assim $||T^m|| = 0$] logo $\sigma(T) = \{0\}$.□

1.12 Operadores lineares compactos em espaços normados

Os operadores lineares compactos desempenham um importante papel na teoria das equações integrais e em diversos problemas da física matemática. Eles são definidos como se segue:

1.12.1 Definição (operador linear compacto)

Sejam X e Y espaços normados. Um operador $T : X \to Y$ é chamado um **operador linear compacto** (ou **operador linear completamente contínuo**) se T é linear e se para todo o subconjunto M limitado de X, a imagem $T(M)$ é **relativamente compacta**, isto é, o fecho $\overline{T(M)}$ é compacto.

O termo antigo "completamente contínuo" deriva do lema seguinte, o qual mostra que um operador linear compacto é contínuo, mas o recíproco não é, em geral, verdade.

1.12.2 Lema (continuidade)

Sejam X e Y espaços normados. Então:

(a) Todo o operador linear compacto $T : X \to Y$ é limitado, logo é contínuo.

(b) Se $\dim X = \infty$, o operador identidade $I : X \to X$ (o qual é contínuo) não é compacto.

Dem.

(a) A esfera unitária $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ [ver Definição 1.5.1 (iii)] é limitada. Como T é compacto, $\overline{T(U)}$ é compacto, e é limitado pois um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.

Assim $\underset{\|x\|=1}{sup} \|Tx\| < \infty$.

Portanto T é limitado e logo é contínuo pelo Teorema 1.6.17 (continuidade e limitação).

(b) A bola fechada unitária $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ [ver Definição 1.5.1 (iii)] é limitada. Se $\dim X = \infty$, então pelo recíproco do Teorema (dimensão finita)[50] M não é compacto; assim $\mathrm{Im}(M) = M = \overline{M}$ não é relativamente compacto.□

1.12.3 Definição (compacidade de um conjunto)

Um espaço métrico X diz-se compacto se toda a sucessão em X tem uma subsucessão convergente. Um subconjunto M de X diz-se compacto se M é compacto considerado como um subespaço de X, isto é, se toda a sucessão em X tem uma subsucessão cujo limite é um elemento de M.

A partir desta definição obtemos facilmente um critério de compacidade muito útil para operadores:

1.12.4 Teorema (critério de compacidade para operadores)

Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é compacto se e só se aplica cada sucessão limitada (x_n) em X numa sucessão (Tx_n) em Y a qual tem uma subsucessão convergente.

Dem.

Se T é compacto e (x_n) limitada, então o fecho de (Tx_n) em Y é compacto e a Def. 1.12.3 mostra que (Tx_n) contém uma subsucessão convergente.

---

[50] **Teorema (dimensão finita)**
Se um espaço normado X tem a propriedade que a bola fechada unitária $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ é compacta, então X tem dimensão finita.

Reciprocamente, suponha-se que toda a sucessão limitada (x_n) contém uma subsucessão (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge em Y.

Considere-se um subconjunto, qualquer, limitado $B \subseteq X$, e seja (y_n) uma sucessão qualquer em $T(B)$. Então $y_n = Tx_n$ para algum $x_n \in B$, e (x_n) é limitada pois B é limitado. Por hipótese, (Tx_n) contém uma subsucessão convergente. Por isso $\overline{T(B)}$ é compacto pela Def. 1.12.3 porque (y_n) em $T(B)$ foi arbitrária. Por definição, isto demonstra que T é compacto.□

1.12.5 Observação

Do Teorema anterior podemos verificar que se T_1 e T_2 são operadores lineares compactos de um espaço normado X num espaço normado Y :

i) $T_1 + T_2$ é um operador linear compacto.

ii) αT_1 é compacto, onde α é um escalar qualquer.

Assim podemos concluir que os operadores lineares compactos de X para Y formam um espaço vectorial.[51] No caso de dimensão finita do Teorema anterior sai o:

1.12.6 Teorema (domínio e imagem de dimensões finitas)

Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear . Então:

(a) Se T é limitado e $\dim T(X) < \infty$, o operador T é compacto.

(b) Se $\dim X < \infty$, o operador T é compacto.

Dem.

---

51 Designamos por $C(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares compactos que por sua vez é um subespaço de $B(X, Y)$ [espaço dos operadores lineares limitados].

(a) Seja (x_n) uma sucessão limitada em X. Então a desigualdade [ver (3) da Observação 1.6.15] $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ mostra que (Tx_n) é limitada.

Como $\dim T(X) < \infty$, (Tx_n) é relativamente compacto pois num espaço normado X de dimensão finita, um subconjunto $M \subseteq X$ é compacto se e só se M é fechado e limitado.

Daqui sai que (Tx_n) tem uma subsucessão convergente. Como (x_n) era uma sucessão limitada, arbitrária, em X, o operador T é compacto pelo Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores).

(b) i) Dizer $\dim X < \infty$, implica a limitação de T porque se um espaço normado X tem dimensão finita então cada operador linear em X é limitado.

ii) Como por hipótese $\dim X = n < \infty$, vem pelo Teorema 1.6.10 (b) (imagem e espaço nulo) que $\dim T(X) \leq n < \infty$ ou seja, $\dim T(X) \leq \dim X = n < \infty$.

Concluímos, aplicando a alínea (a) que T é compacto.□

1.12.7 Definição (convergência de sucessões de operadores)

Sejam X e Y espaços normados. Uma sucessão (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ diz-se:

(a) *uniformemente convergente* se (T_n) converge na norma em $B(X, Y)$;

(b) *fortemente convergente* se $(T_n x)$ converge fortemente em Y para cada $x \in X$;

(c) *fracamente convergente* se $(T_n x)$ converge fracamente em Y para cada $x \in X$.

Isto significa que existe um operador $T : X \to Y$ tal que, respectivamente:

(a) $\|T_\nu - T\| \simeq 0$ para todo o natural ilimitado ν;

(b) $\|T_\nu x - Tx\| \simeq 0$ para todo $x \in X$ e todo o natural ilimitado ν;

(c) $\|f(T_\nu x) - f(Tx)\| \simeq 0$ para todo $x \in X$ e todo $f \in Y'$(onde Y' é o dual de Y) e para todo o natural ilimitado ν. Ao operador T chama-se operador limite uniforme, operador limite forte e operador limite fraco de (T_n), respectivamente.

1.12.8 Observação

Na definição anterior $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ mas o recíproco não é, em geral, válido, tal como veremos nos seguintes:

1.12.9 Exemplos

1º No espaço l^2 considere-se a sucessão (T_n), onde $T_n : l^2 \to l^2$ é definida por $T_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(\,n \text{ zeros}\,)}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...)$; onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) \in l^2$.

✠ Pela Definição 1.6.1 (operador linear): T_n é linear se para todo $x, y \in l^2$ e escalar α :

i) $T_n(x + y) = T_n x + T_n y$;

ii) $T_n(\alpha x) = \alpha T_n x$.

Sejam $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...)$;

$y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \eta_{n+3}, ...) \in l^2$.

i)

$$
\begin{aligned}
T_n(x+y) &= T_n[(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) + \\
&+ (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \eta_{n+3}, ...)] \\
&= T_n(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3, ..., \xi_n + \eta_n, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \xi_{n+2} + \eta_{n+2}, \xi_{n+3} + \eta_{n+3}, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \xi_{n+2} + \eta_{n+2}, \xi_{n+3} + \eta_{n+3}, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) + (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \eta_{n+3}, ...) = \\
&= T_n x + T_n y.
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
T_n(\alpha x) &= T_n(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, ..., \alpha\xi_n, \alpha\xi_{n+1}, \alpha\xi_{n+2}, \alpha\xi_{n+3}, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \alpha\xi_{n+1}, \alpha\xi_{n+2}, \alpha\xi_{n+3}, ...) = \\
&= \alpha(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) = \\
&= \alpha T_n x.
\end{aligned}
$$

$\therefore T_n$ é linear.

✠ Pela Definição 1.6.13 (operador linear limitado): T_n é limitado se existe um número real não negativo c tal que para todo $x \in l^2 : \|T_n x\| \leq c\|x\|$.

$$
\begin{aligned}
\|T_n x\|^2 &= \langle T_n x, T_n x\rangle = \big\langle(0, 0, ..., 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...), (0, 0, ..., 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...)\big\rangle = \\
&= 0^2 + 0^2 + ...0^2 + |\xi_{n+1}|^2 + |\xi_{n+2}|^2 + |\xi_{n+3}|^2 + ... \leq \\
&\leq |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + ... + |\xi_n|^2 + |\xi_{n+1}|^2 + |\xi_{n+2}|^2 + |\xi_{n+3}|^2 + ... = \|x\|^2
\end{aligned}
$$

logo $c \geq 1$.

$\therefore T_n$ é limitado.

✠ A sucessão (T_n) converge fortemente para O pois $T_n \simeq 0 = Ox$, quando $n \simeq +\infty$.

✠ Contudo, a sucessão (T_n) não é uniformemente convergente pois

$$\|T_n - O\| = \|T_n\| = 1 \not\simeq 0.$$

Assim $(b) \nRightarrow (a)$.

2º Considere-se a sucessão (T_n), de operadores $T_n : l^2 \to l^2$ definida por

$T_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(\ n \text{ zeros}\ )}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...)$; onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) \in l^2$.

✠ Pela Definição 1.6.1 (operador linear): T_n é linear se para todo $x, y \in l^2$ e escalar α:

i) $T_n(x + y) = T_n x + T_n y$;

ii) $T_n(\alpha x) = \alpha T_n x$.

Sejam $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...)$; $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...) \in l^2$.

i)

$$\begin{aligned}
T_n(x+y) &= T_n[(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) + (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...)] = \\
&= T_n(\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3, ..., \xi_n + \eta_n, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \xi_3 + \eta_3, ..., \xi_n + \eta_n, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) + (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...) = \\
&= T_n x + T_n y.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
T_n(\alpha x) &= T_n(\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, ..., \alpha\xi_n, ...) = \\
&= (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, ..., \alpha\xi_n, ...) = \\
&= \alpha(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{(n \text{ zeros})}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) = \\
&= \alpha T_n x.
\end{aligned}$$

$\therefore T_n$ é linear.

✠ Pela Definição 1.6.13 (operador linear limitado): T_n é limitado se existe um número real naõ negativo c tal que para todo $x \in l^2 : \|T_n x\| \leq c\|x\|$.

$$\begin{aligned}
\|T_n x\|^2 &= \langle T_n x, T_n x\rangle = \langle (0, 0, ..., 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...), (0, 0, ..., 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...)\rangle = \\
&= 0^2 + 0^2 + ...0^2 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2 + ... + |\xi_n|^2 + ... = \|x\|^2
\end{aligned}$$

logo $\|T_n x\| \leq c\|x\|$ com $c \geq 1$.

$\therefore T_n$ é limitado.

✠ Vamos mostrar que a sucessão (T_n) converge fracamente para O mas não é fortemente convergente.

Cada funcional linear limitado f em l^2 tem uma representação de Riesz[52] em termos de produto interno

$$f(x) = \langle x, z\rangle \underset{\text{def. de produto interno em } l^2}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta}_j$$

onde $z = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...) \in l^2$.

Usando a definição de T_n temos que:

---

[52] Ver Teorema de Riesz (funcionais em espaços de Hilbert) no Apêndice.

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z\rangle =$$

$$= \big\langle (0,0,...,0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,...,\xi_n,...),(\eta_1,\eta_2,\eta_3,...,\eta_n,\eta_{n+1},...)\big\rangle =$$

$$= \underbrace{0\times\overline{\eta}_1 + 0\times\overline{\eta}_2 + ... + 0\times\overline{\eta}_n}_{(n \text{ parcelas})} + \xi_1\times\overline{\eta}_{n+1} + \xi_2\times\overline{\eta}_{n+2} + \xi_3\times\overline{\eta}_{n+3} + ... + \xi_n\times\overline{\eta}_{2n} + ... =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_{n+k}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz para séries:[53]

$$\begin{aligned}
|f(T_n x)|^2 &= |\langle T_n x, z\rangle|^2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_{n+k}\right]^2 \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2 \times \sum_{m=1}^{\infty}|\overline{\eta}_{n+m}|^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2 \times \sum_{m=n+1}^{\infty}|\overline{\eta}_m|^2 \underset{\text{pois } |\overline{\eta}_m|^2=|\eta_m|^2}{=} \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^2 \times \sum_{m=n+1}^{\infty}|\eta_m|^2.
\end{aligned}$$

A última série é o resto de uma série convergente. Assim o 2ºmembro da desigualdade tende para zero quando $n \simeq \infty$. Portanto $f(T_n x) \simeq 0 = f(Ox)$.

$\therefore$ (T_n) converge fracamente para O.

✠ Contudo, a sucessão (T_n) não é fortemente convergente porque para $x = (1,0,0,...) \in l^2$ temos que, com $m \neq n$,

---

53 Da desigualdade de Hölder para séries: $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ onde $p > 1$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ resulta (fazendo $p = 2$, e logo $q = 2$) a desigualdade de Cauchy-Schwarz para séries: $\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2} \times \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^2}$.

$T_m x = (\underbrace{0,0,...,0,0}_{(m \text{ zeros})},1,0,0,...)$ e $T_n x = (\underbrace{0,0,...,0}_{(n \text{ zeros})},1,0,0,...)$. Para ser fortemente convergente $\|T_m x - T_n x\| \to 0$ e isso não se verifica pois

$$\begin{aligned}
\|T_m x - T_n x\| &= \|(0,0,...,0,0,1,0,0,...) - (0,0,...,0,1,0,0,...)\| \underset{m>n \text{ para simplificar}}{=} \\
&= \|(0-0,0-0,...,0-0,0-1,0-0,1-0,0-0,...)\| = \\
&= \|(0,0,...,0,-1,0,1,0,...)\| = \\
&= \sqrt{0^2+0^2+...+0^2+(-1)^2+0^2+...+0^2+1^2+0^2+...} = \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Assim $(c) \not\Rightarrow (b)$.

1.12.10 Teorema (sucessão de operadores lineares compactos)

Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares compactos de um espaço normado X para um espaço de Banach Y. Se (T_n) é uniformemente convergente então o operador limite T é compacto.

Dem.

Usando um "método diagonal" vamos mostrar que para qualquer sucessão limitada (x_m) em X, a imagem (Tx_m) tem uma subsucessão convergente, e então aplicamos o Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores).

Como T_1 é compacto, (x_m) tem uma subsucessão $(x_{1,m})$ tal que $(T_1 x_{1,m})$ é de Cauchy. Similarmente, $(x_{1,m})$ tem uma subsucessão $(x_{2,m})$ tal que $(T_2 x_{2,m})$ é de Cauchy. Continuando com o processo verifica-se que a "sucessão diagonal" $(y_m) = (x_{m,m})$ é uma subsucessão de (x_m) tal que para cada inteiro positivo fixo n, a sucessão $(T_n y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

(x_m) é limitada, seja $\|x_m\| \leq c$ para todo m. Assim $\|y_m\| \leq c$ para todo m.

Seja $\varepsilon > 0$ standard. Como $T_m \to T$, há um $n = p$ tal que $\|T - T_p\| \leq \frac{\varepsilon}{3c}$. Como $(T_p y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, por definição:

$\forall^{st}_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\ (j,k > N \Rightarrow \|T_p y_j - T_p y_k\| < \varepsilon)$

ou seja

$\forall^{st}_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\ (j,k > N \Rightarrow \|Ty_j - Ty_k\| - \|Ty_j - T_p y_j\| - \|T_p y_k - Ty_k\| \leq \|T_p y_j - T_p y_k\| < \varepsilon)$

ou ainda

$\forall^{st}_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\ (j,k > N \Rightarrow \|Ty_j - Ty_k\| - \|Ty_j - T_p y_j\| - \|T_p y_k - Ty_k\| < \varepsilon)$.

Como $\|Ty_j - T_p y_j\| = \|T - T_p\|\ \|y_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3c}\times c$ e $\|T_p y_k - Ty_k\| = \|T_p - T\|\ \|y_k\| \leq \frac{\varepsilon}{3c} \times c$ vem que

$\forall^{st}_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\ (j,k > N \Rightarrow \|Ty_j - Ty_k\| < \varepsilon)$ e, por transferência

$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{j,k\in\mathbb{N}}\ (j,k > N \Rightarrow \|Ty_j - Ty_k\| < \varepsilon)$, ou seja, (Ty_m) é de Cauchy e converge pois Y é completo. Relembrando que (y_m) é uma subsucessão da sucessão, arbitrária, limitada (x_m), vemos que o Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores) implica a compacidade do operador T.□

1.12.11 Observações

1ª) Se no teorema anterior substituírmos a convergência uniforme pela convergência forte $\|T_n x - Tx\| \to 0$, ele já não é válido. Para vermos isso, basta, no espaço l^2, considerarmos a sucessão (T_n), onde $T_n : l^2 \to l^2$ é definida por $T_n x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, 0, ...)$, onde $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, ...) \in l^2$.

Como T_n é linear e limitado (comparar com Exemplos 1.12.9) vem que T_n é compacto pelo Teorema 1.12.6 (a) (domínio e imagem de dimensões finitas).

Verificamos também que $T_n x \to x = Ix$, mas I não é compacto pois dim $l^2 = \infty$ [ver Lema 1.12.2 (b) (continuidade)].

2ª) Este teorema é uma ferramenta útil para provar a compacidade de um dado operador mostrando-o como operador limite uniforme de uma sucessão de operadores compactos, tal como veremos nos seguintes:

1.12.12 Exemplos (espaço l^2)

1º) O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $y = (\eta_j) = Tx$ onde $\eta_j = \dfrac{\xi_j}{j}$ para $j = 1, 2, ...$ é compacto.

Verificação:

Se $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) \in l^2$ então

$$y = Tx = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, ...) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, ...) \in l^2.$$

Verifica-se facilmente que T é linear.

Considere-se a sucessão (T_n) de operadores $T_n : l^2 \to l^2$ definida por $T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, ...)$.

Também é fácil verificar que (T_n) é linear e limitada e assim, pelo Teorema 1.12.6 (a) é compacta.

Além disso, $Tx = (\eta_j) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, ...)$ e

$$T_n x = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, ...) \underset{\text{pois } \eta_j = \frac{\xi_j}{j}}{=} (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, 0, 0, ...)$$

e assim

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)\, x\|^2 &= \left\|(\eta_1 - \eta_1, \eta_2 - \eta_2, \eta_3 - \eta_3, ..., \eta_n - \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, ...)\right\|^2 = \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\eta_j|^2 \underset{\text{pois } \eta_j = \frac{\xi_j}{j}}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \underset{(1)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \underset{(2)}{\leq} \\ &\leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Notas:

(1) Pois $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + ... < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + ...$

(2) Se $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, ...)$ vem que $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \geq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2$.

Tomando o supremo total x de norma 1, vemos que $\|T - T_n\| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Portanto $T_n \simeq T$, e T é compacto pelo Teorema 1.12.10 (sucessão de operadores lineares compactos).

2º) O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $Tx = y = (\eta_j)$ onde $\eta_j = \dfrac{\xi_j}{2^j}$ para $j = 1, 2, ...$ é compacto.

Verificação:

Se $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n, ...) \in l^2$ então

$$y = Tx = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, ..., \eta_n, ...) = (\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \frac{\xi_4}{16}, ..., \frac{\xi_n}{2^n}, ...) \in l^2$$

Verifica-se facilmente que T é linear.

Considere-se a sucessão (T_n) de operadores $T_n : l^2 \to l^2$ definida por $T_n x = (\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \frac{\xi_4}{16}, ..., \frac{\xi_n}{2^n}, 0, 0, ...)$.

Também é fácil verificar que (T_n) é linear e limitada e assim, pelo Teorema 1.12.6 (a) é compacta.

Além disso, $Tx = (\eta_j) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, ...)$ e

$$T_n x = (\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \frac{\xi_4}{16}, ..., \frac{\xi_n}{2^n}, 0, 0, ...) \underset{\text{pois } \eta_j = \frac{\xi_j}{2^j}}{=} (\eta_1, \eta_2, \eta_3, ..., \eta_n, 0, 0, ...)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\left\|(T - T_n)\, x\right\|^2 &= \left\|(\eta_1 - \eta_1, \eta_2 - \eta_2, \eta_3 - \eta_3, ..., \eta_n - \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, ...)\right\|^2 = \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\eta_j\right|^2 \underset{\text{pois } \eta_j = \frac{\xi_j}{2^j}}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2^j)^2} \left|\xi_j\right|^2 \underset{\text{pois } (2^j)^2 = 2^{2j}}{=} \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \left|\xi_j\right|^2 \underset{(1)}{\leq} \\
&\leq \frac{1}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2 \underset{(2)}{\leq} \\
&\leq \frac{\|x\|^2}{2^{2(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Notas: (1) Pois $\frac{1}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{2^{2(n+2)}} + \frac{1}{2^{2(n+3)}} + ... < \frac{1}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}} + \frac{1}{2^{2(n+1)}} + ...$.

(2) Se $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, \xi_{n+1}, ...)$ vem que $\|x\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2 \geq \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^2$.

Tomando o supremo total x de norma 1, vemos que $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Portanto $T_n \simeq T$, e T é compacto pelo Teorema 1.12.10 (sucessão de operadores lineares compactos).□

Os operadores lineares compactos transformam sucessões fracamente convergentes em sucessões fortemente convergentes como veremos no:

1.12.13 Teorema (convergência fraca)

Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponhamos que (x_n) em X é fracamente convergente, $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} x$.

Então (Tx_n) é fortemente convergente em Y e tem limite $y = Tx$.

Dem.

Escrevemos $y_n = Tx_n$ e $y = Tx$. Primeiro mostramos que

$$y_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} y. \tag{1}$$

Depois mostramos que

$$y_n \simeq y. \tag{2}$$

Seja g um funcional linear limitado em Y. Definimos um funcional f em X fazendo $f(z) = g(Tz) \quad (z \in X)$.

f é linear. f é limitado porque T é compacto, portanto limitado, e

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq ||g||\ ||Tz|| \leq ||g||\ ||T||\ ||z|| \, .$$

Por definição, $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} x$ implica $f(x_n) \simeq f(x)$, e assim por definição $g(Tx_n) \simeq g(Tx)$, isto é, $g(y_n) \simeq g(y)$. Como g foi arbitrário, isto demonstra (1).

Vamos demonstrar (2).

Suponhamos que (2) não é válida. Então (y_n) tem uma subsucessão (y_{n_k}) tal que

$$||y_{n_k} - y|| \geq \eta \text{ para algum } \eta > 0. \tag{3}$$

Como (x_n) é fracamente convergente, (x_n) é limitada pelo Lema (convergência fraca) (c)[54], e também o é (x_{n_k}).

A compacidade de T implica agora pelo Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores) que (Tx_{n_k}) tem uma subsucessão convergente, digamos, $(\widetilde{y}_j)$. Seja $\widetilde{y}_j \simeq \widetilde{y}$. Usando o raciocínio anterior $\widetilde{y}_j \overset{frac.}{\rightharpoonup} y$. Assim $\widetilde{y} = y$ por (1) e pelo Lema (convergência fraca) (b).

Consequentemente, $\|\widetilde{y}_j - y\| \simeq 0$ mas $\|\widetilde{y}_j - y\| \geq \eta > 0$ por (3).

Obtemos assim uma contradição logo (2) é válida.□

1.12.14 Teorema (operador adjunto)

Seja $T : X \to Y$ um operador linear. Se T é compacto, o seu operador adjunto [55] $T^* : Y' \to X'$ também é, onde X e Y são espaços normados e X' e Y' os espaços duais de X e Y, respectivamente.

Dem.

Seja (x_n) uma sucessão limitada, isto é, $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos $y_n = T^* x_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Como T^* é limitado, a sucessão (y_n) é limitada e, contém uma subsucessão (y_{k_n}) tal que a sucessão (Ty_{k_n}) converge em Y.

Vamos mostrar que ${}^o(y_{k_m}) \simeq y_{k_n}$. Se não for este o caso, então existe um standard $\varepsilon > 0$ tal que $\|y_{k_m} -{}^o (y_{k_m})\| > \varepsilon$, ou seja, $\|T^* x_{k_n} - {}^o(T^*) x_{k_n}\| > \varepsilon$. Então existe um elemento $z \in \{x_{k_m} : \|x_{k_m}\| \leq 1\}$ tal que $\langle z, T^* x_{k_n} - {}^o(T^*) x_{k_m}\rangle > \dfrac{\varepsilon}{2}$.

---

54 Ver Apêndice.

55 Ver definição e propriedades no Apêndice.

Como ${}^o(T^*) = ({}^oT)^*$ e T é standard (logo ${}^oT = T$) concluímos que

$$\langle {}^oTz, x_{k_n} - x_{k_m} \rangle > \frac{\varepsilon}{2} > 0. \qquad \textbf{(4)}$$

Como T é compacto, ${}^oTz$ é próximo-standard e assim pela definição de x_{k_n}

$$\langle {}^oTz, x_{k_n} - x_{k_m} \rangle > \simeq 0$$

contradizendo (4). Assim (y_{k_n}) é uma sucessão de Cauchy em Y, o que implica que (y_{k_n}) é convergente.

Portanto T^* é um operador compacto.□

1.13 Propriedades espectrais dos operadores lineares compactos em espaços normados

Nesta secção vamos estudar algumas propriedades espectrais de um operador linear compacto $T : X \to X$ num espaço normado X.

Na secção 1.9 estudámos os conceitos básicos da teoria espectral em espaços normados.

A teoria espectral dos operadores lineares compactos é uma generalização relativamente simples da teoria dos valores próprios das matrizes finitas e é semelhante ao caso de dimensão finita em diversos aspectos.

1.13.1 Teorema (valores próprios)

O conjunto dos valores próprios de um operador linear compacto $T : X \to X$ num espaço normado X é contável (possivelmente finito ou mesmo vazio), e $\lambda = 0$ é o único ponto de acumulação possível.

Dem.

Vamos mostrar que para cada real $k > 0$ o conjunto de todos os $\lambda \in \sigma_p(T)$ (espectro pontual ou discreto) tais que $|\lambda| \geq k$ é finito.

Suponhamos, com vista a um absurdo, o contrário para algum $k_0 > 0$. Então há uma sucessão (λ_n) de infinitos valores próprios distintos tais que $|\lambda_n| \geq k_0$ e $Tx_n = \lambda_n x_n$ para algum $x_n \neq 0$.

O conjunto de todos os $x_n' \ s$ é linearmente independente pelo Teorema (independência linear).[56]

Seja $M_n = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. [57] Então cada $x \in M_n$ tem uma representação única

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n. \tag{1}$$

Aplicamos $T - \lambda_n I$ a (1) e usamos $Tx_j = \lambda_j x_j$ e vem:

$$(T - \lambda_n I)\, x = (T - \lambda_n I)\, \alpha_1 x_1 + (T - \lambda_n I)\, \alpha_2 x_2 + ... + (T - \lambda_n I)\, \alpha_n x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (T - \lambda_n I)\, x = \alpha_1 (T - \lambda_n I)\, x_1 + \alpha_2 (T - \lambda_n I)\, x_2 + ... + \alpha_n (T - \lambda_n I)\, x_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (T - \lambda_n I)\, x = \alpha_1 (Tx_1 - \lambda_n I x_1) + \alpha_2 (Tx_2 - \lambda_n I x_2) + ... + \alpha_n (Tx_n - \lambda_n I x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (T - \lambda_n I)\, x = \alpha_1 (\lambda_1 x_1 - \lambda_n x_1) + \alpha_2 (\lambda_2 x_2 - \lambda_n x_2) + ... + \alpha_n \underbrace{(\lambda_n x_n - \lambda_n x_n)}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (T - \lambda_n I)\, x = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n)\, x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n)\, x_2 + ... + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) x_{n-1}.$$

Verificamos que x_n já não aparece do lado direito. Assim

$$(T - \lambda_n I)\, x \in M_{n-1} \text{ para todo } x \in M_n \tag{2}$$

Os conjuntos $M_n s$ são fechados porque são espaços de dimensão finita de um espaço normado logo fechados. Pelo Lema de Riesz[58] existe uma sucessão (y_n) tal que

$$y_n \in M_n, \|y_n\| = 1, \ \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in M_{n-1}.$$

Mostramos que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2} k_0 \qquad (n > m) \tag{3}$$

---

56 Ver Apêndice.

57 Conjunto de todas as combinações lineares de vectores de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ou subespaço gerado por $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ou expansão linear de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. (Em Inglês: *linear span*).

58 Ver Apêndice.

e assim (Ty_n) não tem uma subsucessão convergente porque $k_0 > 0$. Isto contradiz a compacidade de T porque (y_n) é limitado.

Como

$$\begin{aligned} Ty_n - Ty_m &= Ty_n - Ty_m \underset{\text{adicionando e subtraindo o termo } \lambda_n y_n}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \lambda_n y_n + Ty_n - Ty_m \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - (\lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \widetilde{x} \end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m \tag{4}$$

Seja $m < n$ para simplificar. Mostremos que $\widetilde{x} \in M_{n-1}$. Como $m \leq n-1$, vemos que $y_m \in M_m \subseteq M_{n-1} = \langle x_1, x_2, ..., x_{n-1} \rangle$. Assim $Ty_m \in M_{n-1}$ pois $Tx_j = \lambda_j x_j$. Por (2),

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I) y_n \in M_{n-1}.$$

Tudo junto, $\widetilde{x} \in M_{n-1}$. Assim também $x = \lambda_n^{-1} \widetilde{x} \in M_{n-1}$, portanto

$$\|\lambda_n y_n - \widetilde{x}\| = |\lambda_n| \, \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_n| \geq \frac{1}{2} k_0, \tag{5}$$

porque $|\lambda_n| \geq k_0$.

Daqui e de (4) obtemos (3). Assim a hipótese de que existe uma infinidade de valores próprios satisfazendo $|\lambda_n| \geq k_0$ para algum $k_0 > 0$ tem que ser falsa e o teorema está demonstrado.□

1.13.2 Observação

Podemos deduzir deste teorema que se um operador linear compacto num espaço normado tem uma infinidade de valores próprios, podemos arranjá-los numa sucessão convergindo para zero.

A composição (ou produto) de operadores lineares é muito importante e, em particular, a composição de operadores lineares compactos e operadores lineares limitados, que dá operadores lineares compactos como vamos verificar através do seguinte:

1.13.3 Lema (compacidade do produto)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto e $S : X \to X$ um operador linear limitado num espaço normado X. Então TS e ST são compactos.

Dem.

1^o) Seja B um subconjunto limitado[59] de um espaço normado X. Como S é um operador limitado, $S(B)$ é um conjunto limitado, e o conjunto $T(S(B)) = TS(B)$ é relativamente compacto porque T é compacto.

Assim TS é um operador linear compacto.

2^o) Vamos demonstrar que ST também é compacto:

seja (x_n) uma sucessão limitada em X. Então (Tx_n) tem uma subsucessão convergente (Tx_{n_k}) pelo Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores) e (STx_{n_k})

---

[59] Definição (conjunto limitado)
Um subconjunto B de um espaço normado X é limitado se e só se existe um número c tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in B$.

converge pelo Teorema (aplicação contínua).[60] Assim ST é compacto pelo Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores).□

1.13.4 Teorema (espaço nulo)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço normado X. Então para cada $\lambda \neq 0$ o espaço nulo[61] $\mathcal{N}(T_\lambda)$ de $T_\lambda = T - \lambda I$ tem dimensão finita.

Dem.

Mostramos que a bola unitária fechada M em $\mathcal{N}(T_\lambda)$ é compacta e assim concluímos que $\mathcal{N}(T_\lambda)$ tem dimensão finita pelo Teorema (dimensão finita) - ver Nota (50).

Seja (x_n) uma sucessão em M. Então (x_n) é limitada $(\|x_n\| \leq 1)$, e (Tx_n) tem uma subsucessão convergente (Tx_{n_k}) pelo Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores).

Agora $x_n \in M \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda)$ implica $T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0$, e assim $x_n = \lambda^{-1}Tx_n$ porque $\lambda \neq 0$. Consequentemente, $(x_{n_k}) = (\lambda^{-1}Tx_{n_k})$ também converge. O limite está em M pois M é fechado. Portanto M é compacto pela Definição 1.12.3 (compacidade de um conjunto), porque (x_n) era arbitrária em M.

Portanto $dim\, \mathcal{N}(T_\lambda) < \infty$ pelo Teorema (dimensão finita) - ver Nota (50).□

1.13.5 Corolário (espaços nulos)

Com as mesmas condições do teorema anterior:

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda^n) < \infty \quad n = 1, 2, ... \tag{6}$$

---

60 Ver Apêndice.

61 Ver 1.6.2 Notações.

e

$$\{0\} = \mathcal{N}(T_\lambda^0) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subseteq .... \tag{7}$$

Dem.

Como T_λ é linear aplica 0 em 0. Assim $T_\lambda^n x = 0$ implica $T_\lambda^{n+1} x = 0$, e (7) está demonstrado.

Vamos provar (6):

$$\begin{aligned}
T_\lambda^n &\underset{\text{por definição de } T_\lambda}{=} (T - \lambda I)^n \underset{\text{binómio de Newton}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} \underset{\text{desenvolvendo o 1}^{\text{o}}\text{termo}}{=} \\
&= \binom{n}{0} T^0 (-\lambda)^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} = \\
&= (-\lambda)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} \times T(-\lambda)^{n-k} \underset{\text{prop. homogénea dos somatórios}}{=} \\
&= (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\mu = -(-\lambda)^n$, $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}$ e $W = TS = ST$ podemos escrever: $T_\lambda^n = W - \mu I$.

O operador T é compacto (por hipótese) e S é limitado pois T é limitado pelo Lema 1.12.2 (a) (continuidade). Concluímos que W é compacto pelo Lema 1.13.3 (compacidade do produto).

Finalmente, aplicando o Teorema 1.13.4 (espaço nulo) a $W - \mu I$ obtemos (6).□

1.13.6 Exemplo

O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $y = (\eta_j) = Tx$ onde $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2$, $\eta_{2k} = \xi_{2k}$ e $\eta_{2k-1} = 0$, para $k = 1, 2, ...$ não é compacto.

Verificação:

$$T : l^2 \to l^2$$
$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, ...) \to (0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6, ...).$$

Por definição o espaço nulo do operador linear T, isto é, $\mathcal{N}(T)$, é o conjunto de todos os elementos do domínio, $x \in \mathcal{D}(T)$, tais que $Tx = 0$. Vamos determinar o espaço nulo dos operadores T_λ^n, $n = 1, 2, 3, ...$, isto é, $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$:

$\to$ Para $\lambda = 0$, $\mathcal{N}(T_0^n) = ?$

$n = 1 : T_0^1 = T - \underset{=0}{\lambda} I = T$

$T_0^1 x = 0 \Leftrightarrow (0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6, ...) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, ...) \Leftrightarrow \xi_2 = 0 \wedge \xi_4 = 0 \wedge \xi_6 = 0 \wedge ...$

$n = 2 : T_0^2 = (T - \underset{=0}{\lambda} I)^2 = T^2 = T$ (o operador T é idempotente)

$T_0^2 x = 0 \Leftrightarrow (0, \xi_2, 0, \xi_4, 0, \xi_6, ...) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, ...) \Leftrightarrow \xi_2 = 0 \wedge \xi_4 = 0 \wedge \xi_6 = 0 \wedge ...$

$\vdots$

logo $\mathcal{N}(T_0^n) = \{x : \xi_{2k} = 0, \ k = 1, 2, 3, ...\}$.

$\to$ Para $\lambda = 1$, $\mathcal{N}(T_1^n) = ?$

$n = 1 : T_1^1 = T - \underset{=1}{\lambda} I = T - I = (-\xi_1, 0, -\xi_3, 0, -\xi_5, 0, ...)$

$T_1^1 x = 0 \Leftrightarrow (-\xi_1, 0, -\xi_3, 0, -\xi_5, 0, ...) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, ...) \Leftrightarrow \xi_1 = 0 \wedge \xi_3 = 0 \wedge \xi_5 = 0 \wedge ...$

$n = 2 :$ $T_1^2 = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, ...)$ logo $T_1^2 x = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0 \wedge \xi_3 = 0 \wedge \xi_5 = 0 \wedge ...$

$\vdots$

logo $\mathcal{N}(T_1^n) = \{x : \xi_{2k-1} = 0, \ k = 1, 2, 3, ...\}$.

$\to$ Para $\lambda \neq 0, \ 1$; $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = ?$

$$n = 1 : T_\lambda^1 = T - \lambda I = (-\lambda\xi_1, (1-\lambda)\xi_2, -\lambda\xi_3, (1-\lambda)\xi_4, -\lambda\xi_5, ...)$$

$$\begin{aligned} T_\lambda^1 x &= 0 \Leftrightarrow (-\lambda\xi_1, (1-\lambda)\xi_2, -\lambda\xi_3, (1-\lambda)\xi_4, -\lambda\xi_5, ...) = (0,0,0,0,0,0,...) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \xi_1 = 0 \wedge \xi_2 = 0 \wedge \xi_3 = 0 \wedge ... \end{aligned}$$

$$n = 2 : T_\lambda^2 = ((-\lambda)^2\xi_1, (1-\lambda)^2\xi_2, (-\lambda)^2\xi_3, (1-\lambda)^2\xi_4, (-\lambda)^2\xi_5, ...)$$

$$T_\lambda^2 x = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0 \wedge \xi_2 = 0 \wedge \xi_3 = 0 \wedge ...$$

$$\vdots$$

logo $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \{0\}$.

Concluímos que o operador T não é compacto pois para $\lambda = 0$, o espaço nulo $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \{x : \xi_{2k} = 0,\ k = 1,2,3,...\}$ tem dimensão infinita.□

Relembramos que para um operador linear limitado o espaço nulo é sempre fechado mas a imagem pode não ser. O teorema seguinte diz-nos que se T for compacto então T_λ tem uma imagem fechada para cada $\lambda \neq 0$ (e o mesmo é válido para $T_\lambda^2, T_\lambda^3, ...$):

1.13.7 Teorema (imagem)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço normado X. Então para cada $\lambda \neq 0$ a imagem de $T_\lambda = T - \lambda I$ é fechada.

Dem.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que a imagem $T_\lambda(X)$ não é fechada:

(a) Consideramos um y no fecho de $T_\lambda(X)$ mas não em $T_\lambda(X)$ e uma sucessão convergindo para y. Mostramos que $x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$ mas $\mathcal{N}(T_\lambda)$ contém uma sucessão (z_n) tal que $\|x_n - z_n\| < 2\delta_n$, onde δ_n é a distância de x_n a $\mathcal{N}(T_\lambda)$.

(b) Mostramos que $a_n \simeq \infty$, onde $a_n = \|x_n - z_n\|$.

(c) Obtemos a contradição considerando a sucessão (w_n) onde $w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$.

Os detalhes são os seguintes:

(a) Suponhamos que $T_\lambda(X)$ não é fechado. Então existe um $y \in \overline{T_\lambda(X)}$, $y \notin T_\lambda(X)$ e uma sucessão (x_n) em X tal que

$$y_n = T_n x_n \simeq y. \tag{8}$$

Como $T_\lambda(X)$ é um espaço vectorial, $0 \in T_\lambda(X)$. Mas $y \notin T_\lambda(X)$, e assim $y \neq 0$. Isto implica $y_n \neq 0$ e $x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$ para um n suficientemente grande. Sem perda de generalidade podemos supôr que isto é válido para todo n. Como $\mathcal{N}(T_\lambda)$ é fechado, a distância δ_n de x_n a $\mathcal{N}(T_\lambda)$ é positiva, isto é,

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

Pela definição de ínfimo existe uma sucessão (z_n) em $\mathcal{N}(T_\lambda)$ tal que

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n. \tag{9}$$

(b) Mostramos que

$$a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty \qquad (n \simeq \infty) \tag{10}$$

Suponhamos que (10) não é válida. Então $(x_n - z_n)$ tem uma subsucessão limitada. Como T é compacto, sai do Teorema 1.12.4 (critério de compacidade para operadores) que $(T(x_n - z_n))$ tem uma subsucessão convergente. Agora, de $T_\lambda = T - \lambda I$ e $\lambda \neq 0$ temos que $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$. Usando $T_\lambda z_n = 0$ [relembre-se que $z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$], obtemos assim

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) = \frac{1}{\lambda}\left[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n\right].$$

$(T(x_n - z_n))$ tem uma subsucessão convergente e $(T_\lambda x_n)$ converge por (8). Assim $(x_n - z_n)$ tem uma subsucessão convergente, digamos, $x_{n_k} - z_{n_k} \simeq v$.

Como T é compacto, T é contínuo e também o é T_λ. Assim, o Teorema (aplicação contínua)[62] origina:

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \simeq T_\lambda v.$$

Aqui $T_\lambda z_{n_k} = 0$ porque $z_{n_k} \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, logo por (8) temos também que

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \simeq y,$$

portanto $T_\lambda v = y$. Assim $y \in T_\lambda(X)$, o que contradiz $y \notin T_\lambda(X)$ (ver o início da parte (a) da demonstração). Esta contradição resulta da nossa hipótese que (10) não era válida, e assim (10) está agora demonstrada.

(c) Usando novamente a_n tal como foi definida em (10) e fazendo

$$w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n) \tag{11}$$

temos que $\|w_n\| = 1$.

Como $a_n \simeq \infty$ visto que $T_\lambda z_n = 0$ e $(T_\lambda x_n)$ converge

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{a_n} \times T_\lambda x_n \to 0 \tag{12}$$

(pois o produto de um infinitésimo por uma sucessão convergente é um infinitésimo).

Usando novamente $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$, obtemos

$$w_n = \frac{1}{\lambda}(Tw_n - T_\lambda w_n) \tag{13}$$

---

62 Ver Apêndice.

Como T é compacto e (w_n) é limitada, (Tw_n) tem uma subsucessão convergente. Além disso, $(T_\lambda w_n)$ converge por (12).

Portanto (13) mostra que (w_n) tem uma subsucessão convergente, digamos

$$w_{n_j} \simeq w. \tag{14}$$

Uma comparação com (12) implica que $T_\lambda w = 0$. Assim $w \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, também $u_n = z_n + a_n w \in \mathcal{N}(T_\lambda)$.

Portanto para a distância de x_n a u_n temos que ter $\|x_n - u_n\| \geq \delta_n$.

Substituindo u_n e usando (11) e (9), obtemos assim

$$\begin{aligned} \delta_n &\leq \|x_n - z_n - a_n w\| \underset{\text{por (11) } w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n) \Leftrightarrow x_n - z_n = a_n w_n}{=} \|a_n w_n - a_n w\| = \\ &= a_n \|w_n - w\| \underset{\text{por (9) } a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n}{<} 2\delta_n \|w_n - w\| . \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade por $2\delta_n$, temos $\frac{1}{2} \leq \|w_n - w\|$. Isto contradiz (14) e demonstra o teorema.□

1.13.8 Corolário (imagens)

Sob as hipóteses do teorema anterior a imagem de T_λ^n é fechada para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$. Além disso, $X = T_\lambda^0(X) \supseteq T_\lambda(X) \supseteq T_\lambda^2(X) \supseteq \ldots$.

Dem.

A primeira afirmação sai do Teorema 1.13.7 (imagem) notando que W na demonstração do Corolário 1.13.5 (espaços nulos) é compacto.

A segunda afirmação sai por indução. De facto, temos que $T_\lambda^0(X) = I(X) = X \supseteq T_\lambda(X)$, e aplicando T_λ a $T_\lambda^{n-1}(X) \supseteq T_\lambda^n(X)$ dá $T_\lambda^n(X) \supseteq T_\lambda^{n+1}(X)$.□

1.13.9 Observação

Já vimos que dado um operador linear compacto T num espaço normado X e $\lambda \neq 0$, os espaços nulos $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, têm dimensão finita e satisfazem $\mathcal{N}(T_\lambda^n) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$; e as imagens $T_\lambda^n(X)$ são fechadas e satisfazem $T_\lambda^n(X) \supseteq T_\lambda^{n+1}(X)$.

A seguir vamos ver que a partir de uma ordem $n = r$, esses espaços nulos são iguais:

1.13.10 Lema (espaços nulos)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço normado X, e seja $\lambda \neq 0$. Então existe um inteiro r (dependendo de λ) tal que a partir de $n = r$, os espaços nulos $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$ são todos iguais, e se $r > 0$, as inclusões $\mathcal{N}(T_\lambda^0) \subsetneq \mathcal{N}(T_\lambda) \subsetneq \ldots. \subsetneq \mathcal{N}(T_\lambda^r)$ são todas próprias.

Dem.

O esquema da demonstração é o seguinte:

(a) Supomos que não existe nenhum m tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$ e obtemos uma contradição.

(b) Mostramos que $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$ implica $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$ para todo $n > m$.

Os detalhes são como se segue:

(a) Sabemos, pelo Corolário 1.13.5 (espaços nulos), que $\mathcal{N}(T_\lambda^m) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$. Suponha-se que não existe nenhum m tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$. Então $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$ para cada n. Como esses espaços nulos são fechados, pelo Lema de Riesz,[63] isto implica a existência de uma sucessão (y_n) tal que

$$y_n \in \mathcal{N}(T_\lambda^n), \ \|y_n\| = 1, \ \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1}). \tag{15}$$

Mostramos que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \qquad (m < n) \tag{16}$$

e assim (Ty_n) não tem uma subsucessão convergente porque $|\lambda| > 0$. Isto contradiz a compacidade de T visto que (y_n) é limitada.

De $T_\lambda = T - \lambda I$ temos $T = T_\lambda + \lambda I$ e assim $\begin{cases} Ty_n = T_\lambda y_n + \lambda y_n \\ Ty_m = T_\lambda y_m + \lambda y_m \end{cases}$ e subtraindo as duas igualdades membro a membro vem $Ty_n - Ty_m = T_\lambda y_n + \lambda y_n - T_\lambda y_m - \lambda y_m$, ou de outra forma:

$$Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \widetilde{x} \text{ onde } \widetilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n.$$

Seja $m < n$. Mostramos que $\widetilde{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$.

Como $m \leq n-1$ temos claramente $\lambda y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^m) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$. Também $y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^m)$ implica

$$0 \underset{\text{Def. de espaço nulo}}{=} T_\lambda^m y_m \underset{\text{pois } T_\lambda^{m-1} T_\lambda = T_\lambda^m}{=} T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m),$$

isto é,

$$T_\lambda y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^{m-1}) \underset{\text{pois } m<n}{\subseteq} \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1}).$$

Similarmente, $y_n \in \mathcal{N}(T_\lambda^n)$ implica $T_\lambda y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$.

Assim vem que $\widetilde{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$.

---

63 Ver Apêndice.

Também podemos dizer que $x = \lambda^{-1}\widetilde{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1}),\ \lambda \neq 0$, e assim:

$$\|\lambda y_n - \widetilde{x}\| \underset{\text{pois } \widetilde{x}=\lambda x}{=} \|\lambda y_n - \lambda x\| = |\lambda|\,\|y_n - x\| \underset{\text{por (15)}}{\geq} \frac{1}{2}|\lambda|.$$

Portanto $\|\lambda y_n - \widetilde{x}\| \geq \frac{1}{2}|\lambda| \underset{\text{por (17) } Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \widetilde{x}}{\Leftrightarrow} \|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$.

Concluímos que a nossa hipótese de que não existe nenhum m tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$, é falsa e temos que ter $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$ para algum m.

(b) Vamos demonstrar que $\forall n > m,\ \mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1}) \Rightarrow \mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$. Suponha-se, com vista a um absurdo, que isto não se verifica, ou seja,

$$\exists n > m,\ \mathcal{N}(T_\lambda^n) \neq \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1}) \Rightarrow \mathcal{N}(T_\lambda^m) \neq \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1}).$$

Então $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$ para algum $n > m$.

Consideremos um $x \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1}) - \mathcal{N}(T_\lambda^n)$. Por definição de espaço nulo, $T_\lambda^{n+1}x = 0$ mas $T_\lambda^n x \neq 0$ (pois $x \notin \mathcal{N}(T_\lambda^n)$).

Como $n > m$, temos que $n - m > 0$. Fazemos $z = T_\lambda^{n-m}x$. Então

$$T_\lambda^{m+1}z \underset{\text{pois } z=T_\lambda^{n-m}x}{=} T_\lambda^{m+1}(T_\lambda^{n-m}x) = T_\lambda^{m+1+n-m}x = T_\lambda^{n+1}x \underset{\text{pois } x\in\mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})}{=} 0$$

mas

$$T_\lambda^m z \underset{\text{pois } z=T_\lambda^{n-m}x}{=} T_\lambda^m(T_\lambda^{n-m}x) = T_\lambda^n x \underset{\text{pois } x\notin\mathcal{N}(T_\lambda^n)}{\neq} 0.$$

Assim $z \in \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$ [pois $T_\lambda^{m+1}z = 0$] mas $z \notin \mathcal{N}(T_\lambda^m)$ [pois $T_\lambda^m z \neq 0$] logo $\mathcal{N}(T_\lambda^m)$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$. Isto contradiz $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$.

O Lema está demonstrado, onde r é o inteiro mais pequeno tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$ e se $r > 0$ as inclusões são próprias.$\square$

1.13.11 Lema (imagens)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço normado X, e seja $\lambda \neq 0$. Então existe um inteiro q (dependendo de λ) tal que de $n = q$ em diante, as imagens $T_\lambda^n(X)$ são todas iguais; e se $q > 0$, as inclusões $T_\lambda^0(X) \supsetneq T_\lambda(X) \supsetneq .... \supsetneq T_\lambda^q(X)$ são todas próprias.

Dem.

Tal como na demonstração anterior vamos supor, com vista a um absurdo, que não existe nenhum s tal que $T_\lambda^s(X) = T_\lambda^{s+1}(X)$. Então $T_\lambda^{n+1}(X)$ é um subespaço próprio de $T_\lambda^n(X)$ para cada n [ver Corolário 1.13.8 (imagens)]. Como essas imagens são fechadas pelo Corolário 1.13.8 (imagens), o lema de Riesz implica assim a existência de uma sucessão (x_n) tal que

$$x_n \in T_\lambda^n(X), \; \|x_n\| = 1, \; \|x_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in T_\lambda^{n+1}(X). \qquad \textbf{(18)}$$

Seja $m < n$. Como $T = T_\lambda + \lambda I$, podemos escrever $\begin{cases} Tx_m = T_\lambda x_m + \lambda x_m \\ Tx_m = T_\lambda x_n + \lambda x_n \end{cases}$ e subtraindo as duas igualdades membro a membro vem

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n). \qquad \textbf{(19)}$$

No 2º membro de (19), $\lambda x_m \in T_\lambda^m(X), \;\; x_m \in T_\lambda^m(X)$, logo $T_\lambda x_m \in T_\lambda^{m+1}(X)$ e, como $n > m$ vem $n \geq m + 1$ e assim

$$T_\lambda x_n + \lambda x_n \in T_\lambda^n(X) \subseteq T_\lambda^{m+1}(X). \qquad \textbf{(20)}$$

Portanto, em (19), fazendo $\lambda x = -T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n$ vem que

$$Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - \lambda x \Leftrightarrow Tx_m - Tx_n = \lambda\left(x_m - x\right), \; x \in T_\lambda^{m+1}(X).$$

Consequentemente,

$$\|Tx_m - Tx_n\| = \|\lambda\left(x_m - x\right)\| = |\lambda|\,\|x_m - x\| \underset{\text{por (18)}}{\geq} \frac{1}{2}|\lambda| \underset{\text{pois } \lambda\neq 0}{>} 0.$$

(x_n) é limitado e T é compacto portanto (Tx_n) tem uma subsucessão convergente. Isto contradiz (20) e prova que $T_\lambda^s(X) = T_\lambda^{s+1}(X)$ para algum s.

Seja q o mais pequeno s tal que $T_\lambda^s(X) = T_\lambda^{s+1}(X)$. Então, se $q > 0$ as inclusões afirmadas no lema são próprias.

Além disso, $T_\lambda^{q+1}(X) = T_\lambda^q(X)$ significa que T_λ aplica $T_\lambda^q(X)$ em si próprio, isto é, $T_\lambda(T_\lambda^q(X)) = T_\lambda^{q+1}(X) \underset{\text{por } T_\lambda^{q+1}(X)=T_\lambda^q(X)}{=} T_\lambda^q(X)$. Assim aplicando repetidamente T_λ dá $T_\lambda^{n+1}(X) = T_\lambda^n(X)$ para cada $n > q$.□

Dos dois lemas anteriores obtemos o importante:

1.13.12 Teorema (espaços nulos e imagens)

Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço normado X, e seja $\lambda \neq 0$. Então existe um inteiro $n = r$ (dependendo de λ) tal que

$$\mathcal{N}(T_\lambda^r) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r+1}) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r+2}) = \ldots \tag{21}$$

e

$$T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = T_\lambda^{r+2}(X) = \ldots; \tag{22}$$

e se $r > 0$, as seguintes inclusões são próprias:

$$\mathcal{N}(T_\lambda^0) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^2) .... \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^r) \tag{23}$$

e

$$T_\lambda^0(X) \supseteq T_\lambda(X) \supseteq T_\lambda^2(X) \supseteq .... \supseteq T_\lambda^r(X). \tag{24}$$

Dem.

O Lema 1.13.10 (espaços nulos) dá (21) e (23) O Lema 1.13.11 (imagens) dá (22) e (24).

Só falta demonstrar que $q = r$. Vamos provar que:

(a) $q \geq r$.

(b) $q \leq r$.

(a) Temos $T_\lambda^{q+1}(X) = T_\lambda^q(X)$ pelo Lema 1.13.11 (imagens), ou seja, T_λ aplica $T_\lambda^q(X)$ em si próprio, isto é, $T_\lambda(T_\lambda^q(X)) = T_\lambda^{q+1}(X) = T_\lambda^q(X)$. Assim

$$y \in T_\lambda^q(X) \Rightarrow y = T_\lambda x \text{ para algum } x \in T_\lambda^q(X). \tag{25}$$

Mostramos que

$$T_\lambda x = 0, x \in T_\lambda^q(X) \Rightarrow x = 0. \tag{26}$$

Suponha-se que (26) não é válida. Então $T_\lambda x_1 = 0$ para algum $x_1 \in T_\lambda^q(X)$ não nulo.

Fazendo $y = x_1$ em (25) vem $x_1 = T_\lambda x_2$ para algum $x_2 \in T_\lambda^q(X)$. Similarmente, $x_2 = T_\lambda x_3$ para algum $x_3 \in T_\lambda^q(X)$, etc. Para cada n obtemos assim, por substituição

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = \underbrace{T_\lambda (T_\lambda x_3)}_{=T_\lambda^2 x_3} = \underbrace{T_\lambda^2 (T_\lambda x_4)}_{=T_\lambda^3 (T_\lambda x_4)} = ... = T_\lambda^{n-1} x_n$$

mas sabemos que $T_\lambda x_1 = 0$ e $T_\lambda^n x_n = T_\lambda^{n-1}\underbrace{(T_\lambda x_1)}_{=0} = 0$.

Portanto $x_n \notin T_\lambda^{n-1}(X)$ mas $x_n \in T_\lambda^n(X)$. Pelo Lema 1.13.10 (espaços nulos) $T_\lambda^{n-1}(X) \subseteq T_\lambda^n(X)$ mas o nosso resultado presente mostra que esta inclusão é própria para cada n, visto n ser arbitrário e obtemos assim uma contradição que prova (26).

Relembrando que $T_\lambda^{q+1}(X) = T_\lambda^q(X)$ [pelo Lema 1.13.10 (espaços nulos)] pretendemos demonstrar que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1}) = \mathcal{N}(T_\lambda^q)$. Isto implica então $q \geq r$ pelo Lema 1.13.10 (espaços nulos) visto r ser o menor inteiro para o qual temos a igualdade.

Pelo Corolário 1.13.5 (espaços nulos) temos $\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1}) \supseteq \mathcal{N}(T_\lambda^q)$. Vamos demonstrar que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1}) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^q)$, isto é, $T_\lambda^{q+1}x = 0$. Vamos supor que isto é falso.

Então, para algum x_0,

$$y = T_\lambda^q x_0 \neq 0 \text{ mas } T_\lambda y = T_\lambda^{q+1} x_0 = 0.$$

Portanto, $y \in T_\lambda^q(X)$, $y \neq 0$ e $T_\lambda y = 0$. Mas isto contradiz (26) com $x = y$ e prova $\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1}) \subseteq \mathcal{N}(T_\lambda^q)$. Portanto, $\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1}) = \mathcal{N}(T_\lambda^q)$, e $q \geq r$.

(b) Provamos que $q \leq r$.

Se $q = 0$, a desigualdade é válida pois $r > 0$.

Seja $q \geq 1$. Demonstramos que $q \leq r$ mostrando que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q-1})$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}(T_\lambda^q)$, pois isto implica, pelo Lema 1.13.10 (espaços nulos), $q \leq r$ visto r ser o menor inteiro n tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$.

Pela definição de q no Lema 1.13.11 (imagens) a inclusão $T_\lambda^q(X) \subseteq T_\lambda^{q-1}(X)$ é própria.

Seja $y \in T_\lambda^{q-1}(X) - T_\lambda^q(X)$. Então $y \in T_\lambda^{q-1}x$ para algum x. Sabe-se que $T_\lambda y = T_\lambda \left(T_\lambda^{q-1}x\right) = T_\lambda^q x$ e também $T_\lambda y \in T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X)$ implica que $T_\lambda y = T_\lambda^{q+1}z$ para algum z.

Como $T_\lambda^q z \in T_\lambda^q(X)$ mas $y \notin T_\lambda^q(X)$, temos que

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = T_\lambda^{q-1}x - T_\lambda^{q-1}(T_\lambda z) = y - T_\lambda^q z \neq 0.$$

Assim $x - T_\lambda z \notin \mathcal{N}(T_\lambda^{q-1})$. Mas $x - T_\lambda z \in \mathcal{N}(T_\lambda^q)$ porque

$$T_\lambda^q(x - T_\lambda z) = T_\lambda^q x - T_\lambda^q(T_\lambda z) = T_\lambda y - T_\lambda^{q+1}z = T_\lambda y - T_\lambda y = 0.$$

Isto prova que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q-1}) \neq \mathcal{N}(T_\lambda^q)$, e assim $\mathcal{N}(T_\lambda^{q-1})$ é um subespaço próprio de $\mathcal{N}(T_\lambda^q)$.

Portanto $q \leq r$, e $q = r$ visto $q \geq r$ ter sido mostrado na parte (a) da demonstração.□

Apresentamos, a seguir, uma caracterização do espectro de um operador linear num espaço de Banach:

1.13.13 Teorema (valores próprios)

[64]Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto num espaço de Banach X. Então para cada valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (se existir[65]) é um valor próprio de T.

Dem.

Se $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$, então λ é um valor próprio de T.

Suponha-se que $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$, onde $\lambda \neq 0$. Então $T_\lambda x = 0$ implica que $x = 0$ e $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(X) \to X$ existe pelo Teorema 1.6.11 (operador inverso). Como $\{0\} = \mathcal{N}(I) =$

---

64 Este teorema é válido mesmo para espaços normados gerais.

65 O operador T pode não ter valores próprios (ver Exemplo 1.9.5) mas note-se que se o operador linear compacto T for **auto-adjunto**, i. e., $T = T^*$, num espaço complexo de Hilbert $H \neq \{0\}$ tem sempre pelo menos um valor próprio.

$\mathcal{N}(T_\lambda^0) = \mathcal{N}(T_\lambda)$, temos $r = 0$ pelo Teorema 1.13.12 (espaços nulos e imagens) e também, pelo mesmo teorema, $X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda(X)$. Sai que T_λ é bijectivo, T_λ^{-1} é limitado pelo Teorema (inverso limitado[66]) visto X ser completo, e $\lambda \in \rho(T)$ pela Definição 1.9.3 (valor regular, conjunto resolvente, espectro).□

1.13.14 Observação (o valor λ)

No caso de um operador linear compacto $T : X \to X$ num espaço normado complexo X podemos afirmar acerca do valor $\lambda = 0$ que:

• se X tem dimensão finita, então T pode ser representado matricialmente e, é claro que, 0 pode ou não pertencer a $\sigma(T) = \sigma_p(T)$; isto é, se $dim\ X < \infty$, podemos ter $0 \notin \sigma(T)$; então $0 \in \rho(T)$.

• se X tem dimensão infinita, então temos que ter $0 \in \sigma(T)$ e assim $0 \in \sigma_p(T) \dot{\vee} 0 \in \sigma_c(T) \dot{\vee} 0 \in \sigma_r(T)$.

1.13.15 Exemplos

1°) O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $Tx = \left(\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n-1}, ...\right)$ onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n, ...) \in l^2$, é compacto e o seu espectro é $\sigma_p(T) = \{0\}$.

Verificação:

T é linear.

Considere-se a sucessão de operadores $T_n : l^2 \to l^2$ definida por

$$T_n x = \left(\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n-1}, 0, 0, ...\right).$$

---

[66] Ver Apêndice.

É fácil verificar que (T_n) é linear e limitada e, assim, pelo Teorema 1.12.6 (a) é compacta. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|(T-T_n)\,x\|^2 &= \left\|\left(\frac{\xi_2}{1}-\frac{\xi_2}{1},\frac{\xi_3}{2}-\frac{\xi_3}{2},\dots,\frac{\xi_n}{n-1}-\frac{\xi_n}{n-1},\frac{\xi_{n+1}}{n}-0,\frac{\xi_{n+2}}{n+1}-0,\dots\right)\right\|^2 = \\
&= \sum_{j=n}^{\infty}\left|\frac{\xi_{j+1}}{j}\right|^2 = \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2}\left|\xi_{j+1}\right|^2 \underset{(1)}{\leq} \\
&\leq \frac{1}{n^2}\sum_{j=n}^{\infty}\left|\xi_{j+1}\right|^2 \underset{(2)}{\leq} \\
&\leq \frac{\|x\|^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

Notas:

(1) Pois $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\dots.$

(2) Pois se $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots)$ vem que $\|x\|^2=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^2\geq\sum\limits_{j=n}^{\infty}\left|\xi_{j+1}\right|^2.$

Tomando o supremo total x de norma 1, vemos que $\|T-T_n\|\leq\frac{1}{n}$.

Portanto $T_n\simeq T$, e T é compacto pelo Teorema 1.12.10 (sucessão de operadores lineares compactos).

Pela Observação 1.13.14 (o valor $\lambda=0$) conclui-se que, como $dim\ l^2=\infty$, $0\in\sigma(T)$. Para $\sigma_p(T)=\{0\}$ na Definição 1.9.3 (valor regular, conjunto resolvente, espectro) a condição (R_1) não pode ser satisfeita, ou, por outras palavras, o operador $R_\lambda(T)$ não pode existir.

Para $\lambda=0$ o operador $T_\lambda=T-\lambda I$ fica $T_0=T$, logo o operador resolvente de T, $R_\lambda(T)=T_\lambda^{-1}=(T-\lambda I)^{-1}$ fica $R_0(T)=T_0^{-1}=T^{-1}$. Será que este operador existe?

Como já vimos, no Teorema 1.6.11 (operador inverso), o inverso de um operador linear existe sse: $Tx=0\Rightarrow x=0$.

Neste caso, como

$$\begin{aligned} Tx &= 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\xi_2}{1}, \frac{\xi_3}{2}, \frac{\xi_4}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n-1}, ...\right) = (0,0,0,...,0,...) \not\Rightarrow \\ &\not\Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n, ...) = (0,0,0,0,...0,...), \end{aligned}$$

concluí-se que $\nexists T^{-1}$, que é como quem diz, $\nexists R_0(T)$, ou ainda $\nexists R_\lambda(T)$ para $\lambda = 0$.

$\therefore$a condição (R_1) não se verifica logo $\lambda = 0 \in \sigma_p(T)$.

2º) O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $Tx = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, ...\right)$ onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) \in l^2$, é compacto, não tem valores próprios (isto é, $\sigma_p(T) = \emptyset$) e $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

Verificação:

T é linear.

Considere-se a sucessão (T_n) de operadores $T_n : l^2 \to l^2$ definida por

$$T_n x = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, ...\right).$$

Também é fácil verificar que (T_n) é linear e limitada e, assim, pelo Teorema 1.12.6 (a) é compacta. Além disso,

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\|^2 &= \left\|\left(0-0, \frac{\xi_1}{1} - \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{1} - \frac{\xi_2}{1}, ..., \frac{\xi_n}{n} - \frac{\xi_n}{n}, \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \frac{\xi_{n+2}}{n+2}, ...\right)\right\|^2 = \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\frac{\xi_j}{j}\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\xi_j|^2 \underset{(1)}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \underset{(2)}{\leq} \\ &\leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Notas:

(1) Pois $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$.

(2) Pois se $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots)$ vem que $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \geq \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2$

Tomando o supremo total x de norma 1, vemos que $\|T - T_n\| \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Portanto $T_n \simeq T$, e T é compacto pelo Teorema 1.12.10 (sucessão de operadores lineares compactos).

Pela Observação 1.13.14 (o valor $\lambda = 0$) conclui-se que, como $dim\ l^2 = \infty$, $0 \in \sigma(T)$. Para $\sigma_p(T) = 0$ e $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$ na Definição 1.9.3 (valor regular, conjunto resolvente, espectro) o operador $R_\lambda(T)$ tem de existir mas não pode estar definido num conjunto que é denso em $l^{2.}$.

$$
\begin{aligned}
T_\lambda &= T - \lambda I = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
&= \left(-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \frac{1}{2}\xi_2 - \lambda\xi_3, \frac{1}{3}\xi_3 - \lambda\xi_4, \ldots, \frac{1}{n}\xi_n - \lambda\xi_{n+1}, \ldots\right)
\end{aligned}
$$

Será que o operador resolvente de T, $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ existe?

O inverso de um operador linear T existe sse: $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.

Neste caso, como

$$\begin{aligned}
T_\lambda x &= 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \frac{1}{2}\xi_2 - \lambda\xi_3, \frac{1}{3}\xi_3 - \lambda\xi_4, ..., \frac{1}{n}\xi_n - \lambda\xi_{n+1}, ...\right) = (0,0,0,...,0,...) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\xi_1 = 0 \\ \xi_1 - \lambda\xi_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 - \lambda\xi_3 \\ \frac{1}{3}\xi_3 - \lambda\xi_4 = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\xi_n - \lambda\xi_{n+1} = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) = (0,0,0,...,0,...)
\end{aligned}$$

logo $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ existe.

Mostrar que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$, ou seja, mostrar que a condição (R_3), isto é, "o operador $R_{\underset{=0}{\lambda}}(T)$ está definido num conjunto o qual é denso em l^2" não se verifica.

Sabemos que $T_0 = T - 0I = T$ e $R_0(T) = T^{-1} = (\xi_2, 2\xi_3, 3\xi_4, 4\xi_5, ...)$ pois $T^{-1}: \ \mathrm{Im}(T) \to \mathcal{D}(T)$ e

i) $\forall x \in \mathcal{D}(T) : T^{-1}Tx = x$;

ii) $\forall y \in \ \mathrm{Im}(T) : TT^{-1}y = y$.

i) Seja $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...)$ logo

$$T^{-1}Tx = T^{-1}\left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ...\right) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) = x.$$

ii) Seja $y = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ...)$ logo

$$\begin{aligned}
TT^{-1}x &= T(\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, 4\xi_4, ...) = \left(0, \xi_1, \frac{1}{2} \times 2\xi_2, \frac{1}{3} \times 3\xi_3, \frac{1}{4} \times 4\xi_4, , ...\right) = \\
&= (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) = y.
\end{aligned}$$

O operador

$$R_0(T) : l^2 \to l^2$$
$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) \to (\xi_2, 2\xi_3, 3\xi_4, 4\xi_5, ...)$$

está definido num conjunto que não é denso em l^2 pois, por definição, "um subconjunto M de um espaço métrico X é denso em X se $\overline{M} = X$, isto é, cada bola em X, não interessa o seu tamanho, contém pontos de M", logo basta "arranjar" um $x \in l^2$ tal que $B(x, r) \cap M = \emptyset$. É fácil verificar que $\overline{M} \neq l^2$.

3º) O espectro do operador $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $T_n x = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, ..., \frac{\xi_{n-1}}{n-1}\right)$ onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, é $\sigma(T_n) = \{0\}$.

Verificação:

$T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\xi_1}{1} \\ \frac{\xi_2}{2} \\ \frac{\xi_3}{3} \\ \frac{\xi_4}{4} \\ \vdots \\ \frac{\xi_{n-1}}{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |T_n - \lambda I| &= 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-\lambda)^n = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda = 0 \vee \lambda = 0 \vee ... \vee \lambda = 0}_{n \text{ vezes}} \end{aligned}$$

(Nota: para cada n obtemos uma matriz triangular inferior logo os valores próprios são os elementos da diagonal principal)

Como estamos no caso de dimensão finita $\sigma_c(T_n) = \sigma_r(T_n) = \emptyset$. O operador $R_\lambda(T_n)$ $= T_\lambda^{-1} = (T_n - \lambda I)^{-1}$ não existe porque

$$T_\lambda = T_n - \lambda I = (-\lambda\xi_1, \xi_1 - \lambda\xi_2, \frac{1}{2}\xi_2 - \lambda\xi_3, \frac{1}{3}\xi_3 - \lambda\xi_4, ..., \frac{\xi_{n-1}}{n-1} - \lambda\xi_n) \text{ e } T_\lambda x = 0 \not\Rightarrow x = 0.$$

No exemplo anterior $0 \in \sigma_r(T)$. Se fizermos $n \simeq +\infty$ vem que $T_n \simeq T$.

4º) O operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $Tx = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \alpha_3\xi_3, ..., \alpha_n\xi_n, ...)$ onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...) \in l^2$ e (α_j) é denso em $[0, 1]$ não é compacto.

Verificação:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\xi_1 \\ \alpha_2\xi_2 \\ \alpha_3\xi_3 \\ \alpha_4\xi_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Cada α_j é um valor próprio de T pois $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ não existe:

$$T_\lambda = T - \lambda I = ((\alpha_1 - \lambda)\xi_1, (\alpha_2 - \lambda)\xi_2, ..., (\alpha_n - \lambda)\xi_n, ...) \text{ e } T_\lambda x = 0 \not\Rightarrow x = 0.$$

Pelo Teorema 1.13.1 (valores próprios) e em virtude de (α_j) ser denso em $[0, 1]$ [logo não é contável, i. e., não é finito nem podemos associar inteiros positivos aos elementos de (α_j) de modo a que cada elemento de (α_j) corresponda um inteiro positivo e vice-versa] concluímos que T não é compacto.

5º) Seja $T : l^2 \to l^2$ o operador definido por $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) \mapsto Tx = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...)$. Sejam $m = m_0$ e $n = n_0$ os números mais pequenos, se existirem, tais que $\mathcal{N}(T^m) = \mathcal{N}(T^{m+1})$ e $T^{n+1}(X) = T^n(X)$. Vamos

i) Encontrar $\mathcal{N}(T^m)$.

ii) Ver se existe um m_0 finito.

iii) Determinar n_0.

Resolução:

i) Por definição "o espaço nulo do operador linear T, isto é, $\mathcal{N}(T)$, é o conjunto de todos os elementos do domínio, $x \in \mathcal{D}(T)$, tais que $Tx = 0$".

$$\mathcal{N}(T^0) = \mathcal{N}(I) = \{x \in l^2 : Ix = 0\} = \{0\}$$

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in l^2 : Tx = 0\} = \{(\xi_1, 0, 0, ...) : \xi_1 \in \mathbb{C}\}$$

porque

$$Tx = 0 \Leftrightarrow (\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) = (0,0,0,...) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{C} \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\mathcal{N}(T^2) = \{x \in l^2 : T^2x = 0\} = \{(\xi_1, \xi_2, 0, 0, ...) : \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}\}$$

porque

$$T^2x = T(Tx) = T(\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) = (\xi_3, \xi_4, \xi_5, ...)$$

$$T^2x = 0 \Leftrightarrow (\xi_3, \xi_4, \xi_5, ...) = (0,0,0,...) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 \in \mathbb{C} \\ \xi_2 \in \mathbb{C} \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \\ \xi_5 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{N}(T^m) = \{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, 0, 0, ...) : \xi_j \in \mathbb{C},\ j = 1, 2, ..., m\}.$$

ii) Como $\mathcal{N}(T^{m+1}) = \{(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, 0, 0, ...) : \xi_j \in \mathbb{C},\ j = 1, 2, ..., m\}$ vem que $\mathcal{N}(T^{m+1}) = \mathcal{N}(T^m)$ se $\xi_{m+1} = 0$, $m \in \mathbb{N}$ logo não existe um m_0 finito.

iii) Por definição, "a imagem $T(M)$ de um subconjunto $M \subseteq \mathcal{D}(T)$ é o conjunto de todas as imagens Tx com $x \in M$".

$$\begin{aligned}
T^0(X) &= I(X) = X \\
T(X) &= \{y = Tx : x \in l^2\} = \{(\xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) : (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2\} \\
T^2(X) &= \{y = T^2x : x \in l^2\} = \{(\xi_3, \xi_4, \xi_5, ...) : (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2\} \\
&\vdots \\
T^n(X) &= \{y = T^nx : x \in l^2\} = \{(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) : (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2\} \\
T^{n+1}(X) &= \{y = T^{n+1}x : x \in l^2\} = \{(\xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \xi_{n+4}, ...) : (\xi_1, \xi_2, ...) \in l^2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^n(X) &= T^{n+1}(X) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, ...) = (\xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \xi_{n+4}, ...) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_{n+1} = \xi_{n+2} \\ \xi_{n+2} = \xi_{n+3} \\ \xi_{n+3} = \xi_{n+4} \\ \quad \vdots \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \xi_{n+3} = \xi_{n+4} = ...
\end{aligned}$$

logo $n_0 = 0$ pois $T(X) = T^0(X)$ desde que $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = ...$.

6º) O operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $Tx = vx$, onde $v(t) = t$ não é compacto.

Verificação:

$$\begin{array}{c} T : C[0,1] \to C[0,1] \\ \underbrace{x(t)}_{\text{é contínua em } [0,1]} \quad \to Tx(t) = \underbrace{t \times x(t)}_{\text{é contínua em } [0,1]} \end{array}$$

$$T_\lambda x(t) = Tx(t) - \lambda I x(t) = t \times x(t) - \lambda x(t) = (t - \lambda) \times x(t)$$

logo fazendo $(t - \lambda) \times x(t) = y(t) \Leftrightarrow x(t) = \dfrac{y(t)}{t-\lambda}$:

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t-\lambda} \text{ com } \lambda \notin [0,1].$$

Assim como $R_\lambda(T)$ existe, é limitado e está definido num conjunto que é denso em $C[0,1]$ logo o espectro é $\sigma(T) = [0,1]$. Pelo Teorema 1.13.13 (valores próprios) cada valor espectral $\lambda \neq 0$ de T é um valor próprio de T logo pelo Teorema 1.13.1 (valores próprios) o conjunto dos valores próprios de um operador é contável mas como]0,1[não é contável T não é compacto.□

O Teorema 1.13.12 (espaços nulos e imagens) permite-nos estabelecer uma representação de X como a soma directa[67] de dois subespaços <u>fechados</u>, chamados, o espaço nulo e a imagem de T_λ^r :

1.13.16 Teorema (soma directa)

Seja X, T, λ e r tais como no Teorema 1.13.12 (espaços nulos e imagens). Então X pode ser representado na forma

$$X = \mathcal{N}(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X). \tag{27}$$

Dem.

---

[67] Se Y é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert X, então $X = Y \oplus Z$, onde $Z = Y^\perp = \{z \in H : z \perp Y\}$ denota o complemento ortogonal de Y, isto é, o conjunto de todos os vectores ortogonais a Y.

Note-se que se X é um espaço normado (ou mesmo um espaço de Banach) e $Y \subseteq X$ é um subespaço fechado pode não existir um subespaço fechado $Z \subseteq X$ tal que $X = Y \oplus Z$.

Consideremos um qualquer $x \in X$. Temos que mostrar que x tem uma única representação na forma

$$x = y + z \quad (y \in \mathcal{N}(T_\lambda^r),\ z \in T_\lambda^r(X)).$$

Seja $z = T_\lambda^r x$. Então $z \in T_\lambda^r(X)$. Pelo Teorema 1.13.12 (espaços nulos e imagens) $T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{2r}(X)$, e assim, $z \in T_\lambda^{2r}(X)$, logo $z = T_\lambda^{2r} x_1$ para algum $x_1 \in X$.

Seja $x_0 = T_\lambda^r x_1$. Então $x_0 \in T_\lambda^r(X)$, e $T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^r(T_\lambda^r x_1) = T_\lambda^{2r} x_1$ e como $T_\lambda^{2r} x_1 = z$ e $z = T_\lambda^r x$ vem que:

$$T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^{2r} x_1 = z = T_\lambda^r x,$$

ou seja,

$$T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^r x \Leftrightarrow T_\lambda^r x - T_\lambda^r x_0 = 0 \Leftrightarrow T_\lambda^r(x - x_0) = 0.$$

Assim $x - x_0 \in \mathcal{N}(T_\lambda^r)$, e

$$x = (x - x_0) + x_0 \qquad (x - x_0 \in \mathcal{N}(T_\lambda^r), x_0 \in T_\lambda^r(X)) \tag{28}$$

Isto demonstra (27) desde que a representação (28) seja única.

Mostremos a unicidade.

Além de (28), seja

$$x = (x - \tilde{x}_0) + \tilde{x}_0 \qquad (x - \tilde{x}_0 \in \mathcal{N}(T_\lambda^r), \tilde{x}_0 \in T_\lambda^r(X)).$$

Seja $v_0 = x - \tilde{x}_0$. Então $v_0 \in T_\lambda^r(X)$ visto $T_\lambda^r(X)$ ser um espaço vectorial. Assim $v_0 = T_\lambda^r v$ para algum $v \in X$. Também

$$v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = x - x + x_0 - \tilde{x}_0 = (x - \tilde{x}_0) + (-x + x_0) = (x - \tilde{x}_0) - (x - x_0);$$

assim $v_0 \in \mathcal{N}(T_\lambda^r)$, e $T_\lambda^r v_0 = 0$. Tudo junto, $T_\lambda^{2r} v = T_\lambda^r v_0 = 0$, e $v \in \mathcal{N}(T_\lambda^{2r}) = \mathcal{N}(T_\lambda^r)$. Isto implica que $v_0 = T_\lambda^r v = 0$, isto é, $v_0 = x_0 - \tilde{x}_0 = 0$, $x_0 = \tilde{x}_0$, a representação (28) é única e a soma $\mathcal{N}(T_\lambda^r) + T_\lambda^r(X)$ é directa.□

1.13.17 Exemplos

1^o) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear representado pela matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então é possível obter a representação (27) $\mathbb{R}^2 = \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Verificação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_\lambda = T - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Valores próprios de T:

$$\begin{aligned} |T - \lambda I| &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cancel{1} - \lambda - \cancel{1})(1 - \lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2 \end{aligned}$$

Para $\lambda = 2 \neq 0$:

Objectivo: obter a representação $\mathbb{R}^2 = \mathcal{N}(T_2^r) \oplus T_2^r(\mathbb{R}^2)$.

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
T_2^2 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\
T_2^3 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \\
T_2^4 &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
T_2^n &= \begin{bmatrix} -(-2)^{n-1} & -(-2)^{n-1} \\ -(-2)^{n-1} & -(-2)^{n-1} \end{bmatrix} = -(-2)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Vamos determinar os espaços nulos:

$n = 0 : \mathcal{N}(T_2^0) = \mathcal{N}(I) = \{(0,0)\}$

$n = 1 : \mathcal{N}(T_2^1) = \{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$
\begin{aligned}
T_2^1 x &= 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \underset{\text{Seja } x_2=\alpha}{\Leftrightarrow} x_1 = -\alpha
\end{aligned}
$$

$n = 2 : \mathcal{N}(T_2^2) = \{(-\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$
\begin{aligned}
T_2^2 x &= 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \underset{\text{Seja } x_2=\alpha}{\Leftrightarrow} x_1 = -\alpha
\end{aligned}
$$

$\vdots$

assim $\{(0,0)\} = \mathcal{N}(T_2^0) \subset \mathcal{N}(T_2^1) = \mathcal{N}(T_2^2) = \mathcal{N}(T_2^3) = ...$ e portanto $r = 1$.

Vamos determinar as imagens:

$$n = 0 : T_2^0(\mathbb{R}^2) = \{y = T_2^0 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

$$T_2^0 x = Ix = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$n = 1 : T_2^1(\mathbb{R}^2) = \{y = T_2^1 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(\beta, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$T_2^1 x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} \underset{\text{Seja } -x_1 - x_2 = \beta}{=} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$n = 2 : T_2^2(\mathbb{R}^2) = \{y = T_2^2 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(\beta, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$T_2^2 x = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \underset{\text{Seja } 2x_1 + 2x_2 = \beta}{=} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore \mathbb{R}^2 = \{\alpha(-1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\}.$$

2º) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear representado pela matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Então é possível obter a representação (27) $\mathbb{R}^2 = \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Verificação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_\lambda = T - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Valores próprios de $T : \lambda = 1, \lambda = 2$ (a matriz T é uma matriz diagonal)

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ T_1^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1 \\ &\vdots \\ T_1^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1, n \geq 1. \end{aligned}$$

Vamos determinar os espaços nulos:

$n = 0 : \mathcal{N}(T_1^0) = \mathcal{N}(I) = \{(0,0)\}$

$n = 1 : \mathcal{N}(T_1^1) = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$T_1 x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 1x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$n = 2 : \mathcal{N}(T_1^2) \underset{\text{pois } T_1 \text{ é idempotente}}{=} \mathcal{N}(T_1^1) = \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ logo

$\{(0,0)\} = \mathcal{N}(T_1^0) \subset \mathcal{N}(T_1^1) = \mathcal{N}(T_1^2) = \mathcal{N}(T_1^3) = \ldots$ e assim $r = 1$.

Vamos determinar as imagens:

$n = 0 : T_1^0(\mathbb{R}^2) = \{y = T_1^0 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

$$T_1^0 x = Ix = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$n = 1 : T_1^1(\mathbb{R}^2) = \{y = T_1^1 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\} = \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$

$$T_1^1 x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \underset{\text{Seja } x_2 = \beta}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

$n = 2 : T_1^2(\mathbb{R}^2) \underset{\text{pois } T_1 \text{ é idempotente}}{=} T_1^1(\mathbb{R}^2) = \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$

$\vdots$

logo $\mathbb{R}^2 = T_1^0(\mathbb{R}^2) \supset T_1(\mathbb{R}^2) = T_1^2(\mathbb{R}^2) = T_1^3(\mathbb{R}^2) = \ldots$

$\therefore \mathbb{R}^2 = \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Analogamente obteríamos para $\lambda = 2 : \mathbb{R}^2 = \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\} \oplus \{\alpha(1,0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3^o) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear representado pela matriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Então é possível obter a representação (27) $\mathbb{R}^2 = \{\alpha(1,-3) : \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$.

Verificação:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad T_\lambda = T - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Valores próprios de $T : \lambda = 1, \lambda = 2$ (a matriz T é uma matriz triangular inferior)

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ T_1^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = T_1 \\ &\vdots \\ T_1^n &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = T_1, n \geq 1. \end{aligned}$$

Vamos determinar os espaços nulos:

$n = 0 : \mathcal{N}(T_1^0) = \mathcal{N}(I) = \{(0,0)\}$

$n = 1 : \mathcal{N}(T_1^1) = \{(x_1, -3x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,-3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$T_1 x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 3x_1 + 1x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -3x_1 \end{cases}$$

$n = 2 : \mathcal{N}(T_1^2) = \{\alpha(1,-3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$T_1^2 x = 0 \underset{\text{pois } T_1 \text{ é idempotente}}{\Leftrightarrow} T_1^1 x = 0$ logo

$\{(0,0)\} = \mathcal{N}(T_1^0) \subset \mathcal{N}(T_1^1) = \mathcal{N}(T_1^2) = \mathcal{N}(T_1^3) = \ldots$ e assim $r = 1$.

Vamos determinar as imagens:

$n = 0 : T_1^0(\mathbb{R}^2) = \{y = T_1^0 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

$$T_1^0 x = Ix = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$n = 1 : T_1^1(\mathbb{R}^2) = \{y = T_1^1 x : x \in \mathbb{R}^2\} = \{(0, 3x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$

$$T_1^1 x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$n = 2 : T_1^2(\mathbb{R}^2) \underset{\text{pois } T_1 \text{ é idempotente}}{=} T_1^1(\mathbb{R}^2) = \{\beta(0,1) : \beta \in \mathbb{R}\}$

$\vdots$

logo $\mathbb{R}^2 = T_1^0(\mathbb{R}^2) \supset T_1(\mathbb{R}^2) = T_1^2(\mathbb{R}^2) = T_1^3(\mathbb{R}^2) = \ldots$

$\therefore \mathbb{R}^2 = \{\alpha(1,-3) : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\beta(0,1) : \ \beta \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\
T_2^2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \\
T_2^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\
T_2^4 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
T_2^n &= \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ (-1)^n \times 3 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} T_2, \ n \geq 1.
\end{aligned}$$

Vamos determinar os espaços nulos:

$n = 0 : \mathcal{N}(T_2^0) = \mathcal{N}(I) = \{(0,0)\}$

$n = 1 : \mathcal{N}(T_2^1) = \{(0, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{R}\} = \{\beta(0,1) : \ \beta \in \mathbb{R}\}$

$$T_2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 3x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$n = 2 : \mathcal{N}(T_2^2) = \{(0, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{R}\} = \{\beta(0,1) : \ \beta \in \mathbb{R}\}$

$$T_2^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ -3x_1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

logo $\{(0,0)\} = \mathcal{N}(T_2^0) \subset \mathcal{N}(T_2^1) = \mathcal{N}(T_2^2) = \mathcal{N}(T_2^3) = ...$ e assim $r = 1$.

Vamos determinar as imagens:

$n = 0 : T_2^0(\mathbb{R}^2) = \{y = T_2^0 x : \ x \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

$n = 1 : T_2^1(\mathbb{R}^2) = \{(-x_1, 3x_1) : \ x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, -3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$T_2^1 x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} \underset{\text{Seja } \alpha = -x_1}{=} \begin{bmatrix} \alpha \\ -3\alpha \end{bmatrix}$$

$n = 2 : T_2^2(\mathbb{R}^2) = \{(x_1, -3x_1) : \ x_1 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, -3) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$T_2^2 x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \end{bmatrix} \underset{\text{Seja } \alpha = x_1}{=} \begin{bmatrix} \alpha \\ -3\alpha \end{bmatrix}$$

$\vdots$

logo $\mathbb{R}^2 = \{\beta(0,1) : \ \beta \in \mathbb{R}\} \oplus \{\alpha(1, -3) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1.14 Propriedades espectrais de operadores auto-adjuntos

1.14.1 Teorema (valores regulares)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \to H$ um operador linear auto-adjunto onde $\mathcal{D}(T)$ é denso num espaço de Hilbert H. Então existe um λ pertencente ao conjunto resolvente $\rho(T)$ de T se e só se existe uma constante $c > 0$ tal que para cada $x \in \mathcal{D}(T)$

$$\|T_\lambda x\| \geq c\,\|x\| \tag{1}$$

onde $T_\lambda = T - \lambda I$.

Dem.

(a) Seja $\lambda \in \rho(T)$. Então pela Definição 1.9.3 (valor regular, conjunto resolvente, espectro), o operador resolvente $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ existe e é limitado, seja, $\|R_\lambda\| = k > 0$, onde $k > 0$ pois $R_\lambda \neq O$. Consequentemente, como $R_\lambda T_\lambda x = 0$ para $x \in \mathcal{D}(T)$, temos $\|x\| = \|R_\lambda T_\lambda x\| \leq \|R_\lambda\|\,\|T_\lambda x\| = k\,\|T_\lambda x\|$. Dividindo ambos os membros da desigualdade por k vem que $\|T_\lambda x\| \geq c\,\|x\|$, com $c = \dfrac{1}{k}$.

(b) Reciprocamente, suponhamos que a desigualdade (1) é válida para algum $c > 0$ e para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Consideremos o espaço vectorial $Y = \{y : y = T_\lambda x,\ x \in \mathcal{D}(T)\}$, isto é, a imagem de T_λ, e mostramos que

(α) $T_\lambda : \mathcal{D}(T) \to Y$ é bijectivo;

(β) Y é denso em H;

(γ) Y é fechado.

Tudo junto isto vai implicar que o operador resolvente $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ esteja definido em todo o H. A limitação de R_λ vai sair facilmente de (1), isto é, $\lambda \in \rho(T)$. Os detalhes são os seguintes:

(α) Consideremos $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ tais que $T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2$. Como T_λ é linear, de (1) sai que

$$0 = \|T_\lambda x_1 - T_\lambda x_2\| \underset{T_\lambda \text{ é linear}}{=} \|T_\lambda(x_1 - x_2)\| \underset{\text{por (1)}}{\geq} c\,\|x_1 - x_2\|\,.$$

Como $c > 0$, isto implica $\|x_1 - x_2\| = 0$. Assim $x_1 = x_2$, e o operador $T_\lambda : \mathcal{D}(T) \to Y$ é bijectivo.

(β) Vamos demonstrar $\overline{Y} = H$ provando que $x_0 \perp Y$ implica $x_0 = 0$. Seja $x_0 \perp Y$. Então para cada $y = T_\lambda x \in Y$,

$$0 = \langle T_\lambda x, x_0\rangle \underset{\text{por definição de } T_\lambda}{=} \langle (T - \lambda I)x, x_0\rangle = \langle Tx - \lambda I x, x_0\rangle = \langle Tx, x_0\rangle - \lambda\,\langle x, x_0\rangle$$

Logo para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, $\langle Tx, x_0\rangle = \langle x, \overline{\lambda} x_0\rangle$.

Por definição de operador auto-adjunto isto mostra que $x_0 \in \mathcal{D}(T^*)$ e $T^* x_0 = \overline{\lambda} x_0$.

Como T é auto-adjunto, $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ e $T^* = T$; assim $Tx_0 = \overline{\lambda} x_0$.

$x_0 \neq 0$ implica que $\overline{\lambda}$ seja um valor próprio de T, e $\overline{\lambda} = \lambda$ tem que ser real. Portanto, $Tx_0 = \lambda x_0$, isto é, $T_\lambda x_0 = 0$. Mas, de (1) sai uma contradição

$$0 = \|T_\lambda x_0\| \geq c\,\|x_0\| \Rightarrow \|x_0\| = 0.$$

Segue $\overline{Y}^\perp = \{0\}$, e assim $\overline{Y} = H$ -ver Nota (67).

(γ) Vamos provar que Y é fechado.

Seja $y_0 \in \overline{Y}$. Então existe uma sucessão (y_n) em Y tal que $y_n \simeq y_0$. Como $y_n \in Y$ temos $y_n = T_\lambda x_n$ para algum $x_n \in \mathcal{D}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T)$. Por (1),

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c}\|y_n - y_m\|.$$

Como (y_n) converge, isto mostra que (x_n) é uma sucessão de Cauchy. Como H é completo, (x_n) converge, digamos, $x_n \simeq x_0$. Como T é auto-adjunto, é fechado e assim $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ e $T_\lambda x_0 = y_0$. Isto mostra que $y_0 \in Y$. Como $y_0 \in \overline{Y}$ foi arbitrário, Y é fechado.

As partes (β) e (γ) implicam que $Y = H$. Daqui e de (α) vemos que o operador resolvente existe e está definido em todo H:

$$R_\lambda = T_\lambda^{-1} : H \to \mathcal{D}(T).$$

R_λ é linear. A limitação de R_λ segue de (1), porque para cada $y \in H$ e correspondente $x = R_\lambda y$ temos $y = T_\lambda x$ e por (1):

$\|R_\lambda y\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|T_\lambda x\| = \frac{1}{c}\|y\|$, ou seja, $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{c}$. Por definição, isto prova que $\lambda \in \rho(T)$.□

O nosso próximo teorema será utilizado na demonstração de uma das propriedades dos quasi-valores próprios:

1.14.2 Teorema (espectro de um operador auto-adjunto)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \to H$ um operador linear auto-adjunto onde H é um espaço de Hilbert complexo e $\mathcal{D}(T)$ é denso em H. Então o espectro $\sigma(T)$ é real e fechado.

Dem.

(a) Vamos mostrar que $\sigma(T)$ é real.

Para cada $x \neq 0$ em $\mathcal{D}(T)$ temos

$$\langle T_\lambda x, x\rangle \underset{\text{por definição de } T_\lambda}{=} \langle (T-\lambda I)x, x\rangle = \langle Tx - \lambda I x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda \langle x, x\rangle \qquad \textbf{(2)}$$

e como $\langle x, x\rangle$ e $\langle Tx, x\rangle$ são números reais (porque T é auto-adjunto), vem que

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda} \langle x, x\rangle . \qquad \textbf{(3)}$$

Seja $\lambda = \alpha + i\beta$ com α e β números reais. Então $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ e de (2) e (3):

$$\begin{aligned} \overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle &= \langle Tx, \cancel{x}\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle - \langle Tx, \cancel{x}\rangle + \lambda \langle x, x\rangle = \\ &= (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = (\cancel{\alpha} + i\beta - \cancel{\alpha} + i\beta)\, \|x\|^2 = \\ &= 2i\beta \, \|x\|^2 . \qquad \textbf{(4)} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda x, x\rangle &= \langle Tx, x\rangle - \lambda \|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle - (\alpha + i\beta)\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle - \alpha \|x\|^2 - i\beta \|x\|^2 = \\ &= \underbrace{\langle Tx, x\rangle - \alpha \|x\|^2}_{\mathrm{Re}\ \langle T_\lambda x, x\rangle} + i(\underbrace{-\beta \|x\|^2}_{\mathrm{Im}\ \langle T_\lambda x, x\rangle}), \end{aligned}$$

ou seja, $-\beta \|x\|^2 = \mathrm{Im}\ \langle T_\lambda x, x\rangle$ vem que (4) pode escrever-se

$$\overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} - \langle T_\lambda x, x\rangle = -2i \, \mathrm{Im} \langle T_\lambda x, x\rangle . \qquad \textbf{(5)}$$

Da análise complexa sabemos que o valor absoluto da parte imaginária de um número complexo não pode exceder o seu módulo, isto é, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\ (z)| \leq |z|$ e assim:

$$|\beta| \, \|x\|^2 = |\mathrm{Im}\ \langle T_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x\rangle| \underset{\text{Desigualdade de Schwarz}}{\leq} \|T_\lambda x\| \, \|x\| \qquad \textbf{(6)}$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade (6) por $\|x\| \neq 0$ obtemos

$$|\beta| \, \|x\| \leq \|T_\lambda x\| \qquad \textbf{(7)}$$

Esta desigualdade é válida para todo $x \in \mathcal{D}(T)$. Se $\lambda = \alpha + i\beta$ for um número complexo, $\beta \neq 0$, logo $\lambda \in \rho(T)$ pelo Teorema 1.14.1 (valores regulares).

Assim $\sigma(T)$ é real.

(b) Mostramos que $\sigma(T)$ é fechado provando que o conjunto resolvente $\rho(T)$ é aberto.

Seja $\lambda_0 \in \rho(T)$. Vamos mostrar que cada λ suficientemente próximo de λ_0 também pertence a $\rho(T)$.

Pela desigualdade triangular:

$$\|Tx - \lambda_0 x\| \underset{\text{adicionando e subtraindo } \lambda x}{=} \|Tx - \lambda x + (\lambda - \lambda_0)x\| \leq \|Tx - \lambda x\| + |\lambda - \lambda_0| \, \|x\| \quad \textbf{(8)}$$

Podemos escrever esta desigualdade na forma:

$$\|Tx - \lambda x\| \geq \|Tx - \lambda_0 x\| - |\lambda - \lambda_0| \, \|x\| . \quad \textbf{(9)}$$

Como $\lambda_0 \in \rho(T)$, pelo Teorema 1.14.1 (valores regulares) existe um $c > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|Tx - \lambda_0 x\| \geq c \|x\| . \quad \textbf{(10)}$$

Suponhamos agora que λ é próximo de λ_0, seja $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{c}{2}$. Então (9) e (10) implicam que para todo $x \in \mathcal{D}(T)$,

$$\|Tx - \lambda x\| \geq c \|x\| - \frac{c}{2} \|x\| = \frac{1}{2} c \|x\| . \quad \textbf{(11)}$$

Assim $\lambda \in \rho(T)$ pelo Teorema 1.14.1 (valores regulares). Como λ verificava $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{c}{2}$ mas era arbitrário, isto mostra que λ_0 tem uma vizinhança pertencente inteiramente a $\rho(T)$. Como $\lambda_0 \in \rho(T)$ foi arbitrário, concluímos que $\rho(T)$ é aberto. Portanto $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ é fechado.$\square$

1.15 Propriedades espectrais de operadores-Quasi-vectores próprios

No que se segue vamos trabalhar com operadores $T : X \to X$ onde X é um espaço normado complexo e podemos estar interessados nos operadores standard em X e nesse caso supomos que X também é standard.

1.15.1 Definição (quasi-valor próprio)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \to H$ um operador linear, onde H é um espaço de Hilbert. Um número complexo λ chama-se quasi-valor próprio de T [68] se existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

1.15.2 Nota

Obviamente, cada valor próprio de T é um quasi-valor próprio de T.

1.15.3 Exemplo

Seja (e_n) uma sucessão ortonormal (i. e., $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \; se \; i \neq j \\ 1 \; se \; i = j \end{cases}$) completa (i. e., $\forall n \in \mathbb{N} \; \langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$) num espaço de Hilbert H. Seja (λ_n) uma sucessão de escalares estritamente decrescente convergente para algum λ. Defina-se um operador em H por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

68 Ou valor próprio aproximado e usamos quasi-vector próprio em vez de vector próprio aproximado.

Cada λ_n é um valor próprio de T [se existe um vector $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda_n x, \ n = 1, 2, \ldots$. Basta considerar $x = e_n$ e vem que

$$\lambda_1 \underbrace{\langle e_n, e_1 \rangle}_{=0} e_1 + \lambda_2 \underbrace{\langle e_n, e_2 \rangle}_{=0} e_2 + \ldots + \lambda_n \underbrace{\langle e_n, e_n \rangle}_{=1} e_n + \ldots = \lambda_n e_n].$$

Mas, λ não é um valor próprio de T [pois $Tx \neq \lambda x$, isto é, $\lambda_1 \langle x, e_1 \rangle e_1 + \lambda_2 \langle x, e_2 \rangle e_2 + \ldots + \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n + \ldots \neq \lambda x$].

Por outro lado,

$$\|Te_n - \lambda e_n\| =$$

$$= \left\| \lambda_1 \underbrace{\langle e_n, e_1 \rangle}_{=0} e_1 + \lambda_2 \underbrace{\langle e_n, e_2 \rangle}_{=0} e_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \underbrace{\langle e_n, e_{n-1} \rangle}_{=0} e_{n-1} + \lambda_n \underbrace{\langle e_n, e_n \rangle}_{=1} e_n + \ldots - \lambda e_n \right\| =$$

$$= \|\lambda_n e_n - \lambda e_n\| = \|\lambda_n e_n - \lambda e_n\| = \|(\lambda_n - \lambda) e_n\| =$$

$$= |\lambda_n - \lambda| \underbrace{\|e_n\|}_{=1} = |\lambda_n - \lambda| \simeq 0 \text{ quando } n \simeq +\infty.$$

Assim λ é um quasi-valor próprio de T. Note-se que o mesmo é válido se supormos $\lambda_n \simeq \lambda$ e $\forall n \in \mathbb{N}, \ \lambda_n \neq \lambda$.

1.15.4 Definição (espectro aproximado)

Seja $T : \mathcal{D}(T) \to H$ um operador linear, onde H é um espaço de Hilbert. Ao conjunto $\sigma_{ap}(T)$ dos quasi-valores próprios de T chama-se espectro aproximado.

1.15.5 Teorema

$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Dem.

(a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Seja λ um quasi-valor próprio de T. Isto implica que exista uma sucessão (x_n) de vectores de norma 1 tal que $\|(T-\lambda I)x_n\| < \dfrac{1}{n}$ com $n \simeq \infty$. Fazendo $y_n = (T-\lambda I)x_n$ tem-se $\dfrac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \dfrac{\|T_\lambda^{-1}y_n\|}{\|y_n\|} = \dfrac{1}{\|y_n\|} > n$, ou seja, $\|T_\lambda^{-1}y_n\| > n\,\|y_n\|$, e pela Definição 1.9.3 (valor regular, conjunto resolvente, espectro) o operador $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1}$ (se existir) não pode ser limitado.

Assim, todo o quasi-valor próprio de T pertence ao espectro do operador T.

(b) $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Se λ pertence ao espectro pontual (ou discreto), i. e., $\lambda \in \sigma_p(T)$, é um valor próprio de T logo é um quasi-valor próprio de T.

Se $\lambda \in \sigma_c(T)$, o operador $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T-\lambda I)^{-1}$ não é limitado. Existem vectores x_n de norma 1 tais que $\dfrac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \dfrac{\|x_n\|}{\|(T-\lambda I)x_n\|} > n$, ou seja, $\|(T-\lambda I)x_n\| < \dfrac{1}{n}$, e λ continua a ser um quasi-valor próprio.□

1.15.6 Exemplo (operador com um ponto do espectro residual que não pertence ao espectro aproximado)

Sendo o operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, ...)$, onde $x = (\xi_j) \in l^2$ já vimos, no Exemplo 1.9.5, que 0 não é valor próprio de T (portanto T é invertível pois $R_0(T) = T_0^{-1} = T - 0I = T$). Podemos concluir que 0 também não é um quasi-valor próprio de T pois $\forall x \in l^2 : \|Tx\| = \|x\|$.

Mas, como $\overline{\mathcal{D}(T^{-1})} = \overline{\mathrm{Im}(T)} \neq l^2$ tem-se $0 \in \sigma_p(T)$.

$\therefore$Um ponto do espectro residual não tem de pertencer ao espectro aproximado.

1.15.7 Teorema

O espectro $\sigma(T)$ de um operador linear auto-adjunto T é constituído apenas por quasi-valores próprios, ou seja, $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Dem.

(a) $\sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$ pelo Teorema 1.15.5.

(b) $\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Se o operador T é auto-adjunto não tem espectro residual, i. e., $\sigma_r(T) = \emptyset$. Como, por definição de espectro, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ vem que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$ e pelo Teorema 1.15.5 $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ donde $\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

$\therefore\ \sigma(T) = \sigma_{ap}(T).\square$

Das muitas que existem apresentamos em seguida algumas:

1.15.8 Propriedades (quasi-valores próprios)

1ª Propriedade: Se λ é um quasi-valor próprio de um operador T, $|\lambda| \leq \|T\|$.

Dem:

HIPÓTESES: • (H1) λ é um quasi-valor próprio de um operador T se existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

• (H2) $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$ e, em particular, $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$.

• (H3) $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$.

TESE: • $|\lambda| \leq \|T\|$.

$$0 \simeq \|Tx_n - \lambda x_n\| = \|\lambda x_n - Tx_n\| \underset{\text{(H2)}}{\geq} \|\lambda x_n\| - \|Tx_n\| \underset{\text{(H3)}}{\geq} |\lambda| \, \|x_n\| - \|T\| \, \|x_n\| \underset{\text{(H1)}}{=} |\lambda| - \|T\|$$

donde se conclui que

$$0 \geq |\lambda| - \|T\| \Leftrightarrow \|T\| \geq |\lambda| \Leftrightarrow |\lambda| \leq \|T\| . \square$$

2^a **Propriedade:** Se o operador T tem um quasi-valor próprio λ tal que $|\lambda| = \|T\|$, então $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Dem:

HIPÓTESES: • λ é um quasi-valor próprio do operador T, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

• $|\lambda| = \|T\|$.

TESE: • $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle|$.

Com $\|x\| \leq 1$ vem

$$|\langle Tx, x\rangle| \underset{\text{Desigualdade de Schwarz}}{\leq} \|Tx\| \, \|x\| \underset{\text{pois } \|x\| \leq 1}{\leq} \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \underset{\text{pois } \|x\| \leq 1}{\leq} \|T\| = |\lambda| .$$

logo $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x\rangle| = \|T\| . \square$

3^a **Propriedade:** Se λ é um quasi-valor próprio de T, $\lambda + \mu$ é um quasi-valor próprio de $T + \mu I$ e $\lambda\mu$ é um quasi-valor próprio de μT.

Dem:

HIPÓTESE: λ é um quasi-valor próprio do operador T, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

TESE: **(a)** $\lambda + \mu$ é um quasi-valor próprio de $T + \mu I$, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|(T + \mu I)\, x_n - (\lambda + \mu)x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

(b) $\lambda\mu$ é um quasi-valor próprio de μT, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|(\mu T)\, x_n - (\lambda\mu)x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

(a) $\|(T + \mu I)\, x_n - (\lambda + \mu)x_n\| = \|Tx_n + \mu x_n - \lambda x_n - \mu x_n\| = \|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

(b) $\|(\mu T)\, x_n - (\lambda\mu)x_n\| = \|\mu(Tx_n) - \mu(\lambda x_n)\| = \|\mu(Tx_n - \lambda x_n)\| = |\mu|\, \|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.$\square$

4ª Propriedade: Se λ é um quasi-valor próprio de um operador isométrico[69] T, então $|\lambda| = 1$.

Dem:

HIPÓTESES: • (H1) λ é um quasi-valor próprio do operador T, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

• (H2) T é isométrico, i. e., $\forall x \in H : \|Tx\| = \|x\|$.

• (H3) $\|x + y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

[69] **Definição:** Um operador limitado T num espaço de Hilbert H é isométrico se $\forall x \in H : \|Tx\| = \|x\|$ ou se $\|T\| = 1$. Exemplo: Em l^2 o operador $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ é isométrico.

TESE: $|\lambda| = 1$.

Como

$$0 \simeq \|Tx_n - \lambda x_n\| = \|Tx_n + (-\lambda x_n)\| \underset{\text{(H3)}}{\geq} |\|Tx_n\| - \|\lambda x_n\|| \underset{\text{(H2) e (H1)}}{=} |1 - |\lambda||$$

logo $|1 - |\lambda|| \leq 0 \Leftrightarrow 1 - |\lambda| \leq 0 \wedge 1 - |\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq |\lambda| \wedge |\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$.□

5^a **Propriedade:** Cada quasi-valor próprio de um operador auto-adjunto é real.

Dem:

HIPÓTESES: • λ é um quasi-valor próprio do operador T, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

• T é um operador auto-adjunto, i. e., $T = T^*$, ou ainda, $\forall x, y \in H$ $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

TESE: λ é um número real.

Como

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \underset{\text{pois } \|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0}{\simeq} \langle \lambda x_n, x_n\rangle = \lambda \langle x_n, x_n\rangle \underset{\text{def. de norma}}{=} \lambda \|x_n\|^2 \underset{\|x_n\|=1}{=} \lambda$$

e

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \underset{\text{pois } T \text{ é auto-adjunto}}{=} \langle x_n, Tx_n\rangle \underset{\text{pois } \|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0}{\simeq} \langle x_n, \lambda x_n\rangle =$$
$$= \overline{\lambda} \langle x_n, x_n\rangle \underset{\text{def. de norma}}{=} \overline{\lambda} \|x_n\|^2 \underset{\|x_n\|=1}{=} \overline{\lambda}$$

vem que $\lambda = \overline{\lambda}$ porque o limite de uma sucessão convergente é único.□

6^a Propriedade: Se λ é um quasi-valor próprio de um operador normal[70] T, então $\overline{\lambda}$ é um quasi-valor próprio de T^*.

Dem:

HIPÓTESES: • λ é um quasi-valor próprio do operador T, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|Tx_n - \lambda x_n\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

• T é um operador normal, i. e., $TT^* = T^*T$, ou ainda, $\forall x \in H$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

TESE: $\overline{\lambda}$ é um quasi-valor próprio do operador T^*, i. e., existe uma sucessão de vectores (x_n) em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\left\|Tx_n - \overline{\lambda}x_n\right\| \simeq 0$ quando $n \simeq +\infty$.

$$\left\|T^*x_n - \overline{\lambda}x_n\right\|^2 \underset{\text{def. de norma}}{=}$$
$$= \left\langle T^*x_n - \overline{\lambda}x_n, T^*x_n - \overline{\lambda}x_n\right\rangle \underset{(1)}{=}$$
$$= \|T^*x_n\|^2 - \lambda\left\langle T^*x_n, x_n\right\rangle - \overline{\lambda}\left\langle x_n, T^*x_n\right\rangle + \left|\overline{\lambda}\right|^2 \|x_n\|^2 \underset{(2)}{=}$$
$$= \|Tx_n\|^2 - \lambda\left\langle x_n, Tx_n\right\rangle - \overline{\lambda}\left\langle Tx_n, x_n\right\rangle + |\lambda|^2 = \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 \simeq 0$$

Notas:

(1) Por [71].

(2) Pois T é um operador normal; por definição de operador adjunto e $\|x_n\| = 1$.

---

[70] **Definição:** Um operador limitado T num espaço de Hilbert H é <u>normal</u> se comuta com o seu adjunto, i. e., $TT^* = T^*T$ ou ainda $\forall x \in H : \|Tx\| = \|T^*x\|$.
Exemplo: O operador $T : H \to H$ definido por $Tx = ix$ é normal pois $T^*x = -ix$ donde $\|Tx\| = \|T^*x\|$. É também um exemplo de um operador que não é auto-adjunto pois $T^*x = -ix = -Tx$, ou seja, $T^* \neq T$.

[71] Das propriedades do produto interno obtém-se "facilmente" $\langle \alpha x - \beta y, \alpha x - \beta y\rangle = \|\alpha x\|^2 - \overline{\beta}\langle \alpha x, y\rangle - \beta\langle y, \alpha x\rangle + |\beta|^2 \|y\|^2$.

donde $\left\|T^*x_n - \overline{\lambda}x_n\right\|^2 \simeq 0.\Box$

1.15.9 Definição (quasi-vector próprio)

Um vector v é um quasi-vector próprio de um operador T, relativamente a um quasi-valor próprio λ standard quando $\|v\| \not\simeq 0$ e $Tv \simeq \lambda v$.

1.15.10 Observação

Se um vector normado[72] v, i. e., $\|v\| = 1$, satisfaz $Tv \simeq \mu v$ para algum $\mu \in \mathbb{C}$, então v é um quasi-vector próprio de T, com respeito a $\lambda = {}^o\mu$.[73]

1.15.11 Lema

Seja T um operador linear limitado standard num espaço de Banach X. Se μ é um valor regular de T tal que $R_\mu(T) = T_\mu^{-1} = (T - \mu I)^{-1}$ é limitado então a sombra de μ, seja $\lambda = {}^o\mu$, é também um valor regular de T.

Dem.

$$\begin{aligned} T - \lambda I = (T - \mu I) + (\mu - \lambda)I & \underset{\text{pois } I=(T-\mu I)(T-\mu I)^{-1}}{=} \\ = \; (T - \mu I) + (\mu - \lambda)(T - \mu I)(T - \mu I)^{-1} & \underset{\text{colocando } (T-\mu I) \text{ em evidência}}{=} \\ = \; (T - \mu I) \times \left[I - (\lambda - \mu)(T - \mu I)^{-1}\right]. & \end{aligned}$$

[72] Também se diz unitário ou normalizado.

[73] Sombra de μ ou parte standard de μ [ver Teorema 1.4.9 (definição de sombra de um número real)].

Como $\lambda = {}^o\mu \simeq \mu$, ou seja, $\lambda \simeq \mu$, ou ainda, $\lambda - \mu \simeq 0$ e $(T - \mu I)^{-1}$ é limitado, $(\lambda - \mu)(T - \mu I)^{-1} \simeq 0$ e pelo Teorema 1.10.1 (inverso), $I - (\lambda - \mu)(T - \mu I)^{-1}$ é invertível.

Portanto $T - \lambda I$ é o produto de dois operadores invertíveis e pelo Lema 1.6.12 (inverso do produto de operadores), $T - \lambda I$ é invertível e assim λ é um valor regular de T.$\square$

Este lema (nomeadamente o seu recíproco) vai ser utilizado na demonstração do seguinte:

1.15.12 Teorema

Seja T um operador linear limitado standard num espaço de Banach X. Então T tem alguns quasi-vectores próprios. Mais precisamente, se λ é um ponto standard qualquer da fronteira[74] do espectro $\sigma(T)$, então λ é um quasi-valor próprio de T.

Dem.

Seja λ um ponto standard da fronteira do espectro $\sigma(T)$. Portanto existe um valor regular $\mu \simeq \lambda$ mas como λ é standard, ${}^o\lambda = \lambda$ donde $\mu =^o \lambda$, ou seja, $\lambda =^o \lambda$ que não é um valor regular $\underset{\text{recíproco do Lema 1.15.11}}{\Rightarrow}$ $(T - \mu I)^{-1}$ é ilimitado.

Nomeadamente, existe um vector normado y com

$$(T - \mu I)^{-1} y = z \text{ ilimitado.} \qquad (1)$$

[74] **Definição:** Um <u>ponto fronteiro</u> x de um conjunto $A \subset (X, d)$, onde (X, d) denota um espaço métrico, é um ponto de X (que pode ou não pertencer a A) tal que toda a vizinhança de x contém pontos de A e pontos não pertencentes a A; e a <u>fronteira de A</u> é o conjunto de todos os pontos fronteiros a A.

Dividindo ambos os membros pelo escalar ilimitado $\|z\|$ fica

$$(T-\mu I)^{-1}\frac{y}{\|z\|}=\frac{z}{\|z\|} \tag{2}$$

Fazendo $z_1=\dfrac{z}{\|z\|}$ vem que

$$(T-\mu I)^{-1}\frac{y}{\|z\|}=z_1 \tag{3}$$

e aplicando $(T-\lambda I)$ à esquerda de cada membro

$$(T-\lambda I)(T-\mu I)^{-1}\frac{y}{\|z\|}=(T-\lambda I)z_1 \tag{4}$$

Como $\lambda \simeq \mu$ vem que $(T-\lambda I)\simeq(T-\mu I)$ donde

$$\frac{y}{\|z\|}\simeq(T-\lambda I)z_1 \tag{5}$$

Por $\|z\|$ ser um escalar ilimitado $\dfrac{y}{\|z\|}\simeq 0$ e assim

$$(T-\lambda I)z_1\simeq 0 \tag{6}$$

Provámos assim que $Tz_1 \simeq \lambda z_1$ e pela Definição 1.15.9 (quasi-vector próprio), z_1 é um quasi-vector próprio de T relativamente ao quasi-valor próprio λ.□

O próximo teorema mostra que para os operadores compactos, os quasi-vectores próprios estão próximos dos vectores próprios:

1.15.13 Teorema

Seja T um operador compacto standard num espaço de Banach X. Se v é um quasi-vector próprio de T relativamente a um quasi-valor próprio standard $\lambda \neq 0$, então v é próximo-standard e a parte standard de v é um vector próprio de T relativamente ao valor próprio λ.

Dem.

HIPÓTESES: • T é um operador compacto standard num espaço de Banach X.

• v é um quasi-vector próprio de T em relação a $\lambda \neq 0$ standard, i. e., $\|x\| \not\simeq 0$ e $Tv \simeq \lambda v$.

TESE: • v é próximo-standard, i. e., $\exists u$ standard : $v \simeq u$.

• $w = {}^o v$ é um vector próprio de T relativamente ao valor próprio $\lambda \neq 0$ standard, i. e., $Tw = \lambda w$.

Como T é compacto e v limitado, pela Definição 1.6.27 ii), Tv é próximo-standard, seja,

$$Tv \simeq w \text{ com } w \text{ standard.} \tag{7}$$

Por hipótese v é um quasi-vector próprio de T em relação a $\lambda \neq 0$ standard, i. e.,

$$Tv \simeq \lambda v. \tag{8}$$

Combinando (7) e (8) vem que

$$w \simeq Tv \simeq \lambda v, \tag{9}$$

ou seja,

$$\frac{w}{\lambda} \simeq v. \tag{10}$$

Aplicando o operador T vem que

$$T\left(\frac{w}{\lambda}\right) \simeq Tv \underset{\text{por (8)}}{\simeq} \lambda v \underset{\text{por (9)}}{\simeq} w \tag{11}$$

Em virtude de w e λ serem ambos standard, os termos extremos de (11) são iguais:

$$T\left(\frac{w}{\lambda}\right) = w. \tag{12}$$

Daqui sai, pois T é linear, que

$$Tw = \lambda w. \tag{13}$$

Obtivémos assim (10) e (13) provando o teorema.□

1.15.14 Observação

O caso $\lambda = 1$ refere-se aos *pontos fixos* de um operador K (compacto standard num espaço de Banach X) na esfera unitária. Assim escrevemos $T = I - K$ e estudamos o espaço nulo $\mathcal{N}(T)$ [e como

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &= \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\} = \{x \in \mathcal{D}(T) : (I-K)x = 0\} = \\ &= \{x \in \mathcal{D}(T) : x - Kx = 0\} = \{x \in \mathcal{D}(T) : Kx = 1x\} = \\ &= E(\lambda = 1),\end{aligned}$$

ou seja, se $\lambda = 1$ for um valor próprio de T o espaço nulo $\mathcal{N}(T)$ é o espaço próprio de K associado ao valor próprio $\lambda = 1$], a sua invertibilidade, etc. .

Diz-se que $T = I - K$ é uma **perturbação compacta da identidade.**

Podemos ainda escrever $T + K = I$ e também $K = I - T$.

1.15.15 Teorema

Seja T um operador standard num espaço de Banach X. Defina-se o operador $K = I - T$ e $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T)$. Se existe um elemento $a \in X$ com $dist(a, \mathcal{N})$ ilimitada e Ta limitado então K não é um operador compacto.

Dem.

HIPÓTESES: • T é um operador standard num espaço de Banach X.

• $K = I - T$.

• $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}$.

• $\exists a \in X,\ dist(a, \mathcal{N})$ é ilimitado.

• Ta é limitado.

TESE: • K não é um operador compacto.

Seja $a_1 = \dfrac{a}{dist(a, \mathcal{N})}$ então $dist(a_1, \mathcal{N}) = 1$. Podemos encontrar $n \in \mathcal{N}$ com $\|a_1 - n\| \simeq 1$.

Além disso,

$$T(a_1 - n) \underset{\text{pois } T \text{ é linear}}{=} Ta_1 - Tn \underset{\text{pois } n \in \mathcal{N}}{=} Ta_1 \underset{\text{pois } a_1 = \frac{a}{dist(a,\mathcal{N})}}{=} T\left(\frac{a}{dist(a, \mathcal{N})}\right) \underset{\text{pois } T \text{ é linear}}{=}$$

$$= \frac{Ta}{dist(a, \mathcal{N})} \underset{\text{pois } Ta \text{ é limitado e } dist(a,\mathcal{N}) \text{ é ilimitado}}{\simeq} 0.$$

Por definição $K = I - T$ logo $K(a_1 - n) = a_1 - n - T(a_1 - n) \underset{\text{pois } T(a_1 - n) \simeq 0}{\simeq} a_1 - n$.

Isto mostra que o elemento limitado $a_1 - n$ é um quasi-vector próprio para K (relativamente ao quasi-valor próprio $\lambda = 1$) ainda que situado à distância 1 do correspondente espaço próprio $\mathcal{N}$ de K. Pelo recíproco do Teorema 1.15.13 concluímos que K não é um operador compacto, pois $a_1 - n$ é limitado $\Leftrightarrow a_1 - n$ é standard $\Leftrightarrow {}^o(a_1 - n) = a_1 - n$ e ${}^o(a_1 - n) = a_1 - n$ não é um vector próprio de K relativamente ao valor próprio $\lambda = 1$.□

1.15.16 Observação

Este teorema diz-nos que uma perturbação compacta T da identidade não contrai abruptamente, isto é, preserva as ordens de magnitude. Assim se $dist(a, \mathcal{N}) \not\simeq 0$ e $Ta \simeq 0$ então T não é uma perturbação compacta da identidade.

1.15.17 Caso particular

Se o operador T for injectivo, i. e., 1 não é um valor próprio de K, temos que

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(T) = O$$

[pois se $\lambda = 1$ não é um valor próprio de K:

$$\begin{aligned} Kx &\neq \underset{=1}{\lambda} x \Leftrightarrow Kx \neq x \underset{K=I-T}{\Leftrightarrow} (I-T)x \neq x \Leftrightarrow x - Tx \neq x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Tx \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \mathcal{N}(T) \end{aligned}$$

donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T) = O$], $dist(a, \mathcal{N}) = \|a - o\| = \|a\|$ e o teorema prova as seguintes implicações (em sequência):

i) $\|a\|$ ilimitado e Ta limitado $\Rightarrow$ K não é compacto;

ii) K compacto e Ta limitado $\Rightarrow \|a\|$ é limitado;

iii) K compacto $\Rightarrow T^{-1}$ é S-contínuo em $0 \in T(X)$.

[**i)** sai directamente do teorema e **ii)** por contra-recíproco. **iii)**: K compacto $\underset{\text{pois } K=I-T}{\Leftrightarrow}$ $(I-T)$ é compacto $\underset{\text{pois } I \text{ não é compacto}}{\Rightarrow}$ T é compacto $\Rightarrow T^{-1}$ é compacto $\Rightarrow T^{-1}$ é S-contínuo $\underset{\text{alínea ii)}}{\Leftrightarrow}$ $(x \simeq 0 \ \Rightarrow T^{-1}x \simeq 0\ ) \Leftrightarrow T^{-1}$ é S-contínuo em $0 \in T(X)$.].

Quando K é um operador compacto que não tem o valor próprio 1, $T = I - K$: $\mathcal{D}(T) \to X$ é injectivo e T^{-1} : $\operatorname{Im}(T) \to \mathcal{D}(T)$ é contínuo. *A fortiori* a imagem $\operatorname{Im}(T)$ é um espaço vectorial completo logo é fechado em X. (mais geralmente, para qualquer subconjunto fechado A de X, $T(A)$[75] é fechado em $\operatorname{Im}(T)$ e em X). A continuidade de T^{-1} em $\operatorname{Im}(T)$ (fechado) segue do homomorfismo de Banach.□

A seguir vamos ver que quando o operador T não é injectivo, $\operatorname{Im}(T)$ é fechado.

1.15.18 Teorema

Seja K um operador compacto num espaço de Banach $X, T = I - K$. Então a imagem $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço fechado de X.

Dem.

Seja T standard (a transferência trata da generalização). Neste caso, é suficiente mostrar que um b standard próximo de um elemento de $\operatorname{Im}(T)$ pertence à imagem de T. Mais concretamente, suponhamos $b \simeq Ta$ para algum $a \in X$. Mostremos como podemos modificar a para obter $b \simeq Ts$ e s standard (isto dará imediatamente $b = Ts$ porque ambos os membros são standard, i. e., b é standard, e T e s são standard).

Como b é standard, Ta é limitado e pelo Teorema 1.15.12:

$$dist(a, \mathcal{N}) \text{ é limitada} \qquad (\mathcal{N} = \mathcal{N}(T)).$$

75 A imagem $T(A)$ de um subconjunto $A \subseteq \mathcal{D}(T)$ é o conjunto de todas as imagens Tx com $x \in A$. Note-se que $T(\mathcal{D}(T)) = \operatorname{Im}(T)$.

Considere-se um elemento $n \in \mathbb{N}$ com $\|a - n\|$ limitado. Como K é compacto $K(a-n)$ é próximo-standard, digamos $K(a - n) \simeq v$ standard. Então temos que

$$\begin{aligned} b &\simeq Ta = T(a-n) = T[(a-n) - T(a-n) + T(a-n)] \underset{\text{pois } K=I-T}{=} \\ &= T[K(a-n) + T(a-n)] \underset{\text{pois } K(a-n)\simeq v \text{ standard e } T(a-n)=Ta\simeq b}{\simeq} T(v+b) \quad \text{com } v+b \text{ standard.} \end{aligned}$$

Portanto $b = T(v + b) \in \ \mathrm{Im}(T)$.$\square$

1.15.19 Observação

Muitas vezes, em vez do espaço X utiliza-se um subespaço de dimensão finita F de X para podermos trabalhar com meios informáticos. Assim pode usar-se uma aproximação A em F do operador T em X. Esta aproximação de dimensão finita vai ter pelo menos um valor próprio (em $\mathbb{C}$) e os correspondentes vectores próprios -ver Nota (33).

Na prática é suficiente trabalhar com um vector próprio normado $v \in F$ de A. Assim, de $Av = \lambda v$ vem que $Tv \approx \lambda v$ e dependendo dos objectivos podemos utilizar os vectores próprios aproximados em vez dos vectores próprios genuínos.

Na ANS consideramos muitas vezes um conjunto finito S contendo todos os elementos standard de X e define-se Y como o conjunto de todas as combinações lineares de vectores de S.

1.15.20 Definição (esquema de aproximações finitas de François Trèves)

Sejam X e Y dois espaços de Banach (ou de Hilbert) ligados por um homomorfismo standard $J : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ injectivo, contínuo com imagem fechada (portanto J é um isomorfismo topológico $X \to \mathrm{Im}(J) \subseteq Y$ pelo teorema de Banach).

O espaço (não-standard) de dimensão finita F conjuntamente com duas aplicações lineares

$$R : X \rightarrow V \text{ (restrição)}, \qquad T : V \rightarrow Y \text{ (extensão)}$$

é uma aproximação (ou modelo numérico) de X e J desde que:

a) $Jx = {}^oT(Rx)$ para todo o standard $x \in X$

b) Se $Tv \simeq_\sigma y$ standard $\in Y$, então $y = Jx$ para algum standard $x \in X$.

Este esquema de aproximações é chamado *estável* se além disso:

c) R e T forem S-contínuos (i. e., $||R||$ e $||T||$ limitados).

1.16 Teoremas de restrição para operadores compactos

Relembremos o Teorema (Nelson) 1.2.7: "Para todo o conjunto X, existe um conjunto finito S contendo todos os elementos standard de X ", que vai ser muito útil nesta secção.

1.16.1 Lema (de Riesz)

Seja Y um subespaço fechado de um espaço de Banach X tal que $Y \neq X$. Então $\exists x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ e $dist(x, Y) \simeq 1$.

Dem.

Seja $z \in X$, com $z \notin Y$ e $y_0 \in Y$ logo

$$\frac{dist(z,Y)}{\|z - y_0\|} \simeq 1 \qquad \textbf{(1)}$$

(de facto, como Y é fechado, podemos substituir z por um múltiplo não nulo, seja $z' = \lambda z$, tal que $dist(z', Y)$ é limitada e não $\simeq 0$, então escolha-se $y_0' \in Y$ tal que $dist(z', Y)$ $\simeq \|z' - y_0'\|$).

Então

$$x = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \qquad \textbf{(2)}$$

responde à questão.

Com efeito, $\|x\| = \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} \right\| = 1$ e se $y \in Y$ temos que

$$\begin{aligned} dist(x, Y) &= \|x - y\| \underset{\text{por (2)}}{=} \left\| \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|} - y \right\| = \left\| \frac{z - y_0 - \|z - y_0\| \, y}{\|z - y_0\|} \right\| = \\ &= \frac{\|z - (y_0 + \|z - y_0\| \, y)\|}{\|z - y_0\|} \underset{y_0 + \|z - y_0\| y \in Y \text{ pois } Y \text{ é fechado}}{=} \frac{dist(z, Y)}{\|z - y_0\|} \underset{\text{por (1)}}{\simeq} 1. \square \end{aligned}$$

1.16.2 Observação

Quando X é um espaço de Hilbert, podemos escolher $x \perp Y$ e neste caso, podemos encontrar um x normado com $dist(x, Y) = 1$.

1.16.3 Corolário 1

Seja X um espaço de Banach tal que todo o elemento limitado de X é próximo-standard. Então X tem dimensão finita.

Dem.

Seja S uma parte finita contendo todos os elementos standard de X e seja Y o subespaço gerado por S. Então Y tem dimensão finita, portanto é fechado em X.

Se $Y \neq X$, pelo Lema 1.16.1 (de Riesz) existe um $x \in X$ normado com $dist(x, Y) \simeq 1$ e em particular $||x - y|| \not\simeq 0$ para todos os elementos standard y [os elementos standard em questão estão todos em Y]. Isto prova que x não tem parte standard, pela Definição 1.5.4 (elemento próximo-standard).

Assim pela Definição 1.5.5 (elemento próximo-standard num conjunto, conjunto próximo-standard, conjunto de limitados) concluímos que X tem dimensão finita.□

1.16.4 Corolário 2

Seja X um espaço de Banach no qual o operador identidade $I = id_X$ é um operador S-compacto. Então X tem dimensão finita.

Dem.

Suponhamos, com vista a um absurdo, que X tem dimensão infinita, ou seja, que existe uma sucessão (X_n) de subespaços de dimensão finita tais que $X_{n-1} \subsetneq X_n$. Pelo Lema 1.16.1 (de Riesz) podemos construir uma sucessão (x_n) com $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$ e $dist(x_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Em particular $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ para $m < n$. Portanto a sucessão (x_n) não admite nenhuma subsucessão convergente - isto contraria a hipótese de $I = id_X$ ser S-compacto.□

1.16.5 Observação (de Riesz)

Com as notações acima, suponhamos $(I - K)(X) \subseteq Y$. Para cada $x \in X$, temos $Kx \equiv x \mod Y$[76] logo

$$dist(Kx, Y) = dist(x, Y). \tag{3}$$

Seja $T = I - K$ tal que $T(X) \subseteq Y$ por hipótese. Então para qualquer $y \in Y$

$$Kx - Ky \underset{K=I-T}{=} x - Tx - (y - Ty) \underset{\text{prop. associativa}}{=} x - \underbrace{(y + Tx - Ty)}_{=y' \in Y} = x - y' \equiv xmodY$$

e, em particular, se x é normado, escolhido tal como no Lema 1.16.1 (de Riesz)

$$\|Kx - Ky\| \geq dist(Kx, Y) \underset{\text{por (3)}}{=} dist(x, Y) \underset{\text{pelo Lema 16.1 (de Riesz)}}{\simeq} 1.$$

1.16.6 Aplicações

[76] Dois elementos $x, y \in X$ dizem-se congruentes módulo Y e escreve-se $x \equiv y \bmod Y$ se $x - y \in Y$.

1^a Seja K um operador S-compacto num espaço de Banach X, $T = I - K$ e $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T)$.[77] Pelo Teorema 1.2.7 (Nelson) há uma parte finita S contendo todos os elementos standard de $\mathcal{N}$. O espaço Y de dimensão finita gerado por S é fechado em $\mathcal{N}$. Além disso, $T = I - K$ aplica $\mathcal{N}$ em $\{0\} \in Y$.

Seja x normado em $\mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ é S-compacto, Kx é próximo-standard, logo

$$dist(x, Y) = dist(Kx, Y) \simeq 0.$$

Pelo contra-recíproco do Lema 1.16.1 (de Riesz) a inclusão $Y \subseteq \mathcal{N}$ tem que ser uma igualdade. Em particular, o espaço $\mathcal{N}$ tem dimensão finita. Obtivémos um primeiro teorema essencial de restrição relativamente a operadores compactos: **qualquer valor próprio não nulo de um operador compacto tem uma multiplicidade geométrica finita.**

2^a O segundo resultado refere-se à restrição da codimensão[78] da imagem de uma perturbação compacta $T = I - K$ da identidade (relembre-se que provámos que a imagem $T(Y)$ é fechada).

Como o espaço nulo do operador transposto de K consiste precisamente nas formas lineares que se anulam em $T(Y)$ [ou no fecho de $T(Y)$] a restrição da codimensão de

---

[77] Se $\lambda = 1$ for um valor próprio de K, é igual ao espaço dos vectores próprios de K associados a $\lambda = 1$.

[78] **Definição (espaço quociente, codimensão):** Seja Y um subespaço de um espaço vectorial X. O "coset" de um elemento $x \in X$ com respeito a Y é denotado por $x + Y$ e é definido como sendo o conjunto $x + Y = \{v : v = x + y,\ y \in Y\}$, e estes "cosets" constituem os elementos de um espaço vectorial. A este espaço chama-se **espaço quociente de X por Y** e denota-se por X/Y. À sua dimensão chama-se **codimensão** de Y, ou seja, $codimY = dim(X/Y)$.

$T(Y) = \overline{T(Y)}$ resulta da restrição da dimensão do espaço nulo de $T' = I - K'$ (que é também uma perturbação compacta da identidade).

Alternativamente, podemos considerar novamente uma parte S contendo todos os elementos standard de Y e seja X o espaço vectorial gerado por S e (o fecho de) $T(X)$. Como S é finito, Y é fechado. Seja $x \in X$ limitado tal que Kx é próximo-standard, digamos $Kx \simeq y$ standard (portanto em $S \subseteq Y$). Então

$$0 \simeq dist(Kx, Y) = dist(x, Y)$$

(relembremos que $Kx = x - Tx \equiv x \mod T(X) \subset Y$). Isto prova que $Y = X$ e $\overline{T(X)}(= T(X))$ tem codimensão finita em X.

3^a Juntamente, os dois resultados de restrição precedentes mostram que as perturbações compactas da identidade são operadores índices. Para esses operadores, define-se o índice

$$Ind\, T = codim T(X) - dim\mathcal{N}(X) \ \in \mathbb{Z}.$$

Verifica-se que o índice de qualquer perturbação compacta da identidade "desaparece": os operadores que têm esta propriedade são usualmente chamados *operadores de Fredholm.*[79] A este respeito as perturbações compactas da identidade comportam-se como operadores em espaços de dimensão finita.

---

[79] **Definição:** Sejam X e Y dois espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é de Fredholm (ou operador índice) e denota-se $T \in Fred\,(X, Y)$ se:
i) $\mathcal{N}(X)$ tem dimensão finita.
ii) $T(X)$ é fechado e de codimensão finita.
Exemplo: O operador $T = I - K$ (onde K é um operador compacto) é um operador de Fredholm de índice 0.

1.16.7 Lema

Seja K um operador compacto num espaço de Banach X. Então $\underset{j\geq 0}{\cup}\mathcal{N}(I-K)^j$ tem dimensão finita.

Dem.

Para $j \geq 1$,

$$(I-K)^j \underset{\text{binómio de Newton}}{=} \sum_{l=0}^{j} {}^jC_l I^l(-K)^{j-l} \underset{\text{pois } I^l=I,\ l\geq 0}{=}$$

$$= \sum_{l=0}^{j} {}^jC_l(-K)^{j-l} =$$

$$= {}^jC_0(-K)^j + {}^jC_1(-K)^{j-1} + {}^jC_2(-K)^{j-2} + ... + {}^jC_{j-1}(-K)^0 + \underbrace{{}^jC_j(-K)^0}_{=I} =$$

$$= (-1)^jK^j + (-1)^{j-1}\times j \times K^{j-1} + (-1)^{j-2}\frac{j(j-1)}{2}K^{j-2} + ... + (-1)\times j\times K + I =$$

$$= I - \left[\underbrace{(-1)^{j+1}K^j + (-1)^j \times j\times K^{j-1} + (-1)^{j-1}\frac{j(j-1)}{2}K^{j-2} + ... + j\times K}_{=K_j}\right],$$

ou seja, $(I-K)^j = I - K_j$ onde K_j é um operador compacto. Isto mostra que cada $\mathcal{N}(I-K)^j$ é um subespaço de dimensão finita de X.

O lema assegura, mais geralmente, que esses subespaços têm dimensão limitada.

Seja $T = I - K$ (ou $T + K = I$) como anteriormente e faça-se, para simplificar a notação, $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}(T^j) = \mathcal{N}(I-K)^j$. Desde que $\mathcal{N}_j$ contenha $\mathcal{N}_{j-1}$ (inclusão própria) escolha-se um vector normado $x_j \in \mathcal{N}_j$ tal que $dist(x_j, \mathcal{N}_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$. Para j standard, podemos escolher x_j standard. Existe uma única (finita ou infinita) sucessão standard (x_j) extendendo a construção. Continuamos a ter $\|x_j\| = 1$, $x_j \in \mathcal{N}_j$, $\text{dist}(x_j, \mathcal{N}_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$ para todos os índices j. Escreva-se agora $x_j = Kx_j + Tx_j \equiv Kx_j \; mod\, \mathcal{N}_{j-1}$. Para todo $i \neq j$, seja $i < j$ para fixar idéias,

$$\|Kx_j - Kx_i\| \geq dist(Kx, \mathcal{N}_{j-1}) = dist(x_j, \mathcal{N}_{j-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Como todos os elementos do conjunto standard $\{Kx_j\}$ são próximos-standard, este conjunto é finito (é fechado, discreto e compacto). Isto prova a estacionaridade.

Podemos mostrar similarmente (pela dualidade) que a sucessão de imagens iteradas pára de decrescer

$$X \supset T(X) \supset T^2(X) \supset ... \supset T^m(X) = T^{m+1}(X) \text{ } (m \text{ mínimo}).$$

Se T é injectivo, a última igualdade dá $X = T(X)$: este é o primeiro caso da propriedade índice zero. Por outras palavras:

"se 1 não é um valor próprio de K, $I - K$ é simultaneamente um operador injectivo e sobrejectivo e 1 não é um quasi-valor próprio de K " ou:

"$T = I - K$ é um isomorfismo topológico, i. e., 1 não é um valor espectral de K".

Podemos substituir o número 1 na afirmação precedente por qualquer standard $\lambda \neq 0$ que não seja um valor próprio (substituir o operador K pelo operador $\frac{K}{\lambda}$) e obtemos:

"λ standard, $\neq 0$, não um valor próprio $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_k$".

Por contraposta, deduzimos a primeira das propriedades espectrais essenciais dos operadores compactos:

1.16.8 Teorema

Seja K um operador compacto standard num espaço de Banach X. Então, se λ é um valor espectral de K, temos que ou $\lambda = 0$, ou λ é não-standard, ou λ é um valor próprio.

Convém estudar melhor o caso dos valores próprios para analisar a estrutura do espectro dos operadores compactos. Assim é necessário analisar a sucessão de espaços nulos iterados e imagens (é uma análise muito algébrica).

Do facto das duas sucessões

$$\mathcal{N}_i = \mathcal{N}(I-K)^i \text{ e } Y_j = Im(I-K)^j$$

serem estacionárias, podemos deduzir através de argumentos puramente algébricos que elas param de se mover na mesma ordem.

Seja n mínimo com $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1} = \mathcal{N}_{n+2} = ...$, m mínimo com $Y_m = Y_{m+1} = Y_{m+2} = \dots$.

(a) Observe-se que $Y_n \cap \mathcal{N}_n = \{0\}$. De facto $x \in \mathcal{N}_n \ \Rightarrow T^n x = 0$ e $x \in Y_n \Rightarrow \exists y(x = T^n y)$, logo $T^{2n}y = 0,\ y \in \mathcal{N}_{2n} = \mathcal{N}_n$ e $x = T^n y = 0$.

(b) Também se prova $Y_m = Y_n$ (donde $m \leq n$). Certamente $Y_m \subseteq Y_n$ por minimalidade. Vamos demonstrar a inclusão contrária.

Seja $z \in Y_n$. Para algum inteiro positivo k temos $T^k z \in Y_m = T^k(Y_m)$ e existe $t \in Y_m \subseteq Y_n$ com $T^k z = T^k t$. Portanto $T^k(z-t) = 0,\ z - t \in \mathcal{N}_k \subseteq \mathcal{N}_n$. Mas z e t pertencem a Y_n, então $z - t \in Y_n \cap \mathcal{N}_n = 0$.

Isto prova $z = t \in Y_n$ como se queria demonstrar.

c) A decomposição em soma directa sai agora do facto de $X = Y_n + \mathcal{N}_n$. Na verdade se $x \in X,\ T^n x \in Y_n = Y_{2n} = T^n Y_n$ e existe um $y \in Y_n$ tal que

$$T^n x = T^{2n} y, \text{ donde } T^n(x - T^n y) = 0,\ x - T^n y \in \mathcal{N}_n.$$

$$x = (x - T^n y) + T^n y \in \mathcal{N}_n + Y_n.$$

Escreveremos $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N}_n$ e $Y_\infty = Y_n = Y_m = \operatorname{Im} T^\infty$. Isto significa $X = \mathcal{N}_\infty \oplus Y_\infty$ e $\operatorname{Im} T^\infty$ é isomorfo a $X/\mathcal{N}_\infty$. A estacionaridade da sucessão crescente de espaços nulos iterados prova que T é injectiva em $X/\mathcal{N}_\infty$ onde $\mathcal{N}_\infty = \cup \mathcal{N}(T^n) = \mathcal{N}(T^\nu)$ e nilpotente em $\mathcal{N}_\infty$. Além disso $\operatorname{Im} T^\infty = \cap \operatorname{Im} T^n = \operatorname{Im} T^\nu$ é um complemento topológico de $\mathcal{N}_\infty$. Os dois factores são estáveis sob T o qual aparece como a soma de um operador nilpotente $T\mid_{\mathcal{N}_\infty}$ num espaço de dimensão finita ($K\mid_{\mathcal{N}_\infty}$ é um operador unipotente) e um isomorfismo topológico $T\mid_{Y_\infty}$. Restringindo $\widehat{K}$ a Y_∞ simplesmente retira $\lambda = 1$ do seu espectro.

Vamos ver agora (algebricamente) porque é que as perturbações compactas da identidade são operadores Fredholm

$$\mathcal{N}(T) \in \mathcal{N}_\infty \Rightarrow \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T\mid_{Y_\infty}),$$

$$\operatorname{Im} T \supseteq Y_\infty \Rightarrow \dim X/\operatorname{Im} T = \dim \mathcal{N}_\infty / T(\mathcal{N}_\infty)$$

implica

$$dim \mathcal{N}(T) = dim \mathcal{N}(T\mid_{Y_\infty}) = codim\,(T(\mathcal{N}_\infty), \mathcal{N}_\infty) = codim T(X).$$

1.16.9 Teorema

Seja K um operador standard num espaço de Banach X. O seu espectro σ_k é um conjunto não vazio com as seguintes propriedades:

(a) $1 \simeq \lambda \in \sigma_K \Rightarrow \lambda = 1$;

(b) $\lambda \in \sigma_K$ e $\lambda \not\simeq 0 \Rightarrow \lambda$ é standard;

(c) para qualquer standard $\varepsilon > 0$, $\sigma_K \cap \{\lambda : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ apenas tem elementos standard;

(d) para qualquer $\varepsilon > 0$, $\sigma_K \cap \{\lambda : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ é um conjunto finito;

(e) qualquer sucessão de elementos distintos de σ_K tende para 0.

Dem.

(a) Seja w um vector próprio normado associado ao valor próprio $\lambda \simeq 1$. Então w é quasi-vector próprio com respeito a 1 e a sua parte standard $v = {}^o w$ existe e é um vector próprio correspondente ao valor próprio 1

$$v = {}^o w \in \mathcal{N}(T) = \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_\infty.$$

Obviamente v é também normado. Considere-se a decomposição standard $X = \mathcal{N}_\infty \oplus Y_\infty$.

Existe uma forma linear (contínua) standard φ que se anula em Y_∞ e tal que $\varphi(v) = 1$. Portanto

$$\varphi(w) \simeq \varphi({}^o w) = \varphi(v) = 1$$

$$(\Rightarrow \varphi(w) \neq 0!).$$

Como $Y_\infty = T^n X$ (para algum $n \geq 1$), $T^n w \in Y_\infty$ e

$$0 = \varphi(T^n w) = \varphi\left[(1-\lambda)^n w\right] = (1-\lambda)^n \varphi(w) \Rightarrow (1-\lambda)^n = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

(b) Esta propriedade sai de (a) aplicada a $K/{}^o\lambda$ (com ${}^o\lambda$ denotando a parte standard de λ).

(c) Esta propriedade deriva de (b).

(d) Sai de (c), primeiro quando $\varepsilon > 0$ é standard (recorde-se que pelo princípio da idealização, todo o conjunto infinito contém elementos não-standard), e depois para $\varepsilon > 0$ qualquer por transferência (que é legítima por (d) ser uma propriedade clássica).

(e) Esta propriedade deriva de (d) $\Rightarrow$ (e) ser uma implicação clássica.

1.16.10 Comentários

1º As propriedades (d) e (e) do Teorema 1.16.9 são clássicas. Portanto elas são ainda válidas, por transferência, *para todos* os operadores compactos.

A hipótese de K ser standard é necessária apenas para as três primeiras propriedades ("facilmente" se constroem contra-exemplos para (a), (b) e (c) para operadores compactos não-standard).

2º Observe-se que 0 pertence ao espectro de todos os operadores compactos num espaço de dimensão infinita. Por exemplo, os operadores

$$K : e_n \mapsto \frac{e_{n+1}}{n+1} \ (n \geq 0)$$

em (c_0), ou l^2, ou l^1 ... têm espectro $\sigma_K = \{0\}$ reduzido a este ponto singular. Estes operadores podem ser vistos como operadores integrais

$$Kf(x) = \int_0^x f(t)dt = \text{primitiva de } f \text{ anulando-se em } x = 0$$

em espaços de Banach adequados (completamento do espaço dos polinómios com base $e_n = x^n$, $n \geq 0$).

1.17 Apêndice

1.17.1 Teorema de Riesz (funcionais em espaços de Hilbert)

Um funcional linear limitado f num espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de produto interno, nomeadamente,

$$f(x) = \langle x, z \rangle \qquad \textbf{(1)}$$

onde z depende de f, e é unicamente determinado por f e tem norma

$$\|z\| = \|f\| \, . \qquad \textbf{(2)}$$

Dem.

Vamos demonstar que

(a) f tem a representação (1),

(b) z em (1) é único,

(c) a fórmula (2) é válida.

Os detalhes são os seguintes:

(a) Se $f = 0$, então (1) e (2) são válidas se considerarmos $z = 0$. Seja $f \neq 0$. Para que a representação (1) exista z tem as seguintes propriedades:

1^a) $z \neq 0$ pois caso contrário $f = 0$.

2^a) $\langle x, z \rangle = 0$ para todo x tal que $f(x) = 0$, isto é, para todo x no espaço nulo $\mathcal{N}(f)$ de f. Assim $z \perp \mathcal{N}(f)$. Podemos agora considerar $\mathcal{N}(f)$ e o seu complemento ortogonal $\mathcal{N}(f)^{\perp}$. Já vimos no Teorema 1.6.10 (imagem e espaço nulo) que $\mathcal{N}(f)$ é um espaço vectorial e é fechado.[80] Além disso, $f \neq 0$ implica $\mathcal{N}(f) \neq H$, e assim $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$ pelo Teorema 1.13.16 (soma directa). Portanto $\mathcal{N}(f)^{\perp}$ contém um $z_0 \neq 0$. Seja

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x \tag{3}$$

onde $x \in H$ é arbitrário. Aplicando f a ambos os membros de (3), obtemos

$$f(v) = f\left[f(x)z_0 - f(z_0)x\right] \underset{f \text{ é linear}}{=} f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0 \tag{4}$$

Isto mostra que $v \in \mathcal{N}(f)$. Como $z_0 \perp \mathcal{N}(f)$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle \underset{\text{por (3)}}{=} \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \underset{\text{prop. do produto interno}}{=} \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Notando que $\langle z_0, z_0 \rangle = \|z_0\|^2 \neq 0$ (pois $z_0 \neq 0$), podemos resolver (5) em ordem a $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2}\langle x, z_0 \rangle \tag{6}$$

Utilizando uma das propriedades do produto interno podemos escrever (6) na forma:

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle \tag{7}$$

Obtivémos assim a representação (1) com

$$z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \tag{8}$$

Como $x \in H$ era arbitrário, (1) está demonstrada.

(b) Vamos demonstrar que z em (1) é único.

Suponhamos que para todo $x \in H$,

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle \tag{9}$$

---

80 É um resultado clássico.

Então $\langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ para todo $x \in H$. Escolhendo o caso particular $x = z_1 - z_2$, temos

$$\langle x, z_1 - z_2 \rangle = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Portanto $z_1 - z_2 = 0$, e assim $z_1 = z_2$.

(c) Vamos demonstrar (2), isto é, que $\|z\| = \|f\|$.

Se $f = 0$, então $z = 0$ e (2) é válida.

Seja $f \neq 0$. Então $z \neq 0$. De (1) com $x = z$ e $|f(z)| \leq \|f\| \|z\|$ (ver (3) da Observação 1.6.15) obtemos

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq |f(z)| \leq \|f\| \|z\| \qquad \textbf{(11)}$$

Dividindo ambos os membros de (11) por $\|z\| \neq 0$ vem que $\|z\| \leq \|f\|$.

Falta mostrar que $\|f\| \leq \|z\|$. De (1) e da desigualdade de Schwarz -ver Nota (16) dos Exemplos 1.6.16)

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\| . \qquad \textbf{(12)}$$

Isto implica

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\| .\square$$

1.17.2 Lema (convergência fraca)

Seja (x_n) uma sucessão standard fracamente convergente num espaço normado X, ou seja, $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} x$. Então:

(a) O limite fraco x de (x_n) é único.

(b) Cada subsucessão de (x_n) converge fracamente para x.

(c) A sucessão $(\|x_n\|)$ é limitada.

Dem.

(a) Suponhamos que $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} x$ e também $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} y$. Então por definição (de convergência fraca)[81] $f(x_n) \simeq f(x)$ e também $f(x_n) \simeq f(y)$ (com f standard) Como $(f(x_n))$ é uma sucessão numérica standard, o seu limite é único. Portanto $f(x) = f(y)$, isto é, para cada $f \in X'$ (do espaço dual de X)

$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0.$$

Isto implica $x - y = 0$ pois X é um espaço normado (se $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X'$, então $x_0 = 0$) e assim $x = y$.

(b) Sai do facto de $(f(x_n))$ ser uma sucessão numérica convergente, qualquer subsucessão de $(f(x_n))$ converge e tem o mesmo limite.

(c) Como $(f(x_n))$ é uma sucessão numérica standard convergente, é limitada, digamos $|f(x_n)| \leq c_f$ para todo n (onde c_f é uma constante que depende de f mas não de n).

---

81 **Definição (convergência fraca)**
Uma sucessão (x_n) standard num espaço normado X standard diz-se fracamente convergente se existe um standard $x \in X$ tal que para toda a função standard $f \in X'$

$$f(x_n) \simeq f(x) \quad \text{com } n \simeq +\infty$$

e escreve-se $x_n \overset{frac.}{\rightharpoonup} x$. O elemento x é chamado o limite fraco de (x_n), e diz-se que (x_n) converge fracamente para x.

Usando a aplicação canónica[82] $C : X \to X''$ podemos definir $g_{x_n} \in X''$ por

$$g_{x_n}(f) = f(x_n) \qquad (f \in X').$$

Então para todo n,

$$|g_{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq c_f,$$

isto é, a sucessão $(|g_{x_n}(f)|)$ é limitada para cada $f \in X'$. Como X' é completo [pois o dual X' de um espaço normado X é um espaço de Banach (quer X seja finito ou não)], o Teorema da Limitação Uniforme[83] é aplicável e implica que $(\|g_{x_n}\|)$ seja limitada. Como pela Definição (aplicação canónica) $\|g_{x_n}\| = \|x_n\|$ sai que (c) está demonstrado.□

1.17.3 Definição (produto interno)

Seja E um espaço vectorial complexo standard. Uma aplicação standard

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$$

---

[82] **Definição (aplicação canónica)**
Seja X um espaço normado standard e X'' o espaço bidual de X. A cada standard $x \in X$ corresponde um único funcional linear limitado standard $g_x \in X''$ (com norma $\|g_x\| = \|x\|$) dado por $g_x(f) = f(x)$ (com $x \in X$ fixo e $f \in X'$ variável):

$$C : X \to X''$$
$$x \mapsto g_x$$

A C chama-se **aplicação canónica** standard de X em X''. (Nota: é também um resultado clássico que esta aplicação é linear, é injectiva e preserva a norma.).

[83] **Teorema da Limitação Uniforme**
Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares limitados standard $T_n : X \to Y$ de um espaço de Banach X para um espaço normado Y tal que $(\|T_n x\|)$ é limitada para cada standard $x \in X$, digamos,

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, ...,$$

onde c_x é um número real. Então a sucessão das normas $\|T_n\|$ é limitada, isto é, existe um c tal que

$$\|T_n\| \leq c \qquad n = 1, 2, ...$$

diz-se um **produto interno** em E se para todos os standard x, y, $z \in E$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; (a barra denota o conjugado de um número complexo)

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle$;

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ implica $x = 0$.

Um espaço vectorial com um produto interno é designado por **espaço com produto interno** ou um **espaço pré-Hilbertiano**.

1.17.4 Definição (operador adjunto)

Seja T um operador limitado standard num espaço de Hilbert standard H. O operador $T^* : H \to H$ definido por

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad \text{para todo } x,y \in H \tag{13}$$

é chamado o **operador adjunto** de T.

1.17.5 Propriedades dos operadores adjuntos

Sejam T e U operadores limitados standard num espaço de Hilbert standard H e α um escalar standard. Então:

(i) $(T + U)^* = T^* + U^*$

(ii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

(iii) $(T^*)^* = T$

(iv) $I^* = I$

(v) $(TU)^* = U^*T^*$

(vi) O operador adjunto T^* de um operador T é limitado. Além disso, $\|T\| = \|T^*\|$ e $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Dem.

As primeiras cinco propriedades saem directamente da definição supracitada (basta utilizar-se as propriedades do produto interno).

(vi) Para qualquer $x,y \in H$ temos

$$|\langle T^*x, y\rangle| \underset{\text{def. de operador adjunto}}{=} |\langle x, Ty\rangle| \underset{\text{Desigualdade de Schwarz}}{\leq} \|x\| \, \|Ty\| \underset{\text{(3) da Observação 1.6.15}}{\leq} \|T\| \, \|x\| \, \|y\| \tag{14}$$

assim fazendo $y = T^*x$ em (14) vem

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle \leq \|T\| \, \|x\| \, \|T^*x\| \tag{15}$$

Consequentemente,

$$\|T^*\| \leq \|T\|. \tag{16}$$

Isto prova que o operador adjunto de um operador limitado é limitado.

Da desigualdade (16) usando T^* em vez de T vem

$$\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\| \tag{17}$$

logo por (iii)

$$\|T\| \leq \|T^*\|. \tag{18}$$

As desigualdades (16) e (18) conjuntamente provam

$$\|T\| = \|T^*\|. \tag{19}$$

Também temos que

$$\|T^*T\| \underset{\text{por (5) da Observação 1.6.15}}{\leq} \|T^*\| \, \|T\| \underset{\text{por (19)}}{=} \|T\|^2 . \tag{20}$$

Por outro lado, para cada $x \in H$ temos

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &\underset{\text{def. de norma}}{=} \langle Tx, Tx\rangle \underset{\text{def. de operador adjunto}}{=} \langle T^*Tx, x\rangle \underset{\text{prop. dos módulos}}{\leq} \\ \leq\ & |\langle T^*Tx, x\rangle| \underset{\text{Desigualdade de Schwarz}}{\leq} \|T^*Tx\| \, \|x\| \underset{\text{por (3) da Observação 1.6.15}}{\leq} \|T^*T\| \, \|x\|^2 . \end{aligned} \tag{21}$$

donde

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| . \tag{22}$$

As desigualdades (20) e (22) conjuntamente provam

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 .\square \tag{23}$$

1.17.6 Teorema (independência linear)

Os vectores próprios x_1,x_2,...,x_n correspondentes a valores próprios diferentes λ_1,λ_2,...,λ_n de um operador linear T num espaço vectorial X constituem um conjunto linearmente independente.

Dem.

Supômos que $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é linearmente dependente e obtemos uma contradição. Seja x_m o primeiro dos vectores que é uma combinação linear dos seus antecessores, digamos,

$$x_m = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1}. \tag{24}$$

Então $\{x_1, x_2, ..., x_{m-1}\}$ é linearmente independente. Aplicando $T - \lambda_m I$, a ambos os membros da igualdade (10), obtemos

$$\begin{aligned} (T - \lambda_m I)\, x_m &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \,(T - \lambda_m I)\, x_j \underset{\text{pois } Tx_j = \lambda x_j}{=} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \,(\lambda_j - \lambda_m)\, x_j. \end{aligned} \tag{25}$$

Como x_m é um vector próprio correspondente ao valor próprio λ_m o lado esquerdo da igualdade é zero. Como os vectores do lado direito da igualdade formam um conjunto linearmente independente, temos que ter

$$\alpha_j \,(\lambda_j - \lambda_m) = 0 \quad \text{donde} \quad \alpha_j = 0 \quad (j = 1, 2, ..., m-1)$$

pois $\lambda_j - \lambda_m \neq 0$. Mas então $x_m = 0$ por (24). Isto contradiz o facto de que $x_m \neq 0$ visto x_m ser um vector próprio.□

1.17.7 Lema de Riesz

Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (de qualquer dimensão), e suponha-se que Y é fechado e é subconjunto próprio de Z. Então para cada número real θ no intervalo $]0,1[$ existe um $z \in Z$ tal que

$$\|z\| = 1, \qquad \|z - y\| \geq \theta \ \text{ para todo } y \in Y.$$

Dem.

Consideramos um $z \in Z - Y$ e denotamos a sua distância a Y por a,isto é,

$$a = \inf_{y \in Y} \|v - y\| \,.$$

Como Y é fechado, $a > 0$. Consideramos agora um $\theta \in]0,1[$. Pela definição de ínfimo existe um $y_0 \in Y$ tal que

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta} \tag{26}$$

(note-se que $\frac{a}{\theta} > a$ pois $0 < \theta < 1$). Seja

$$z = c(v - y_0) \qquad \text{onde} \qquad c = \frac{1}{\|v - y_0\|}. \tag{27}$$

Então $\|z\| = 1$, e mostramos que $\|z - y\| \geq \theta$ para cada $y \in Y$. Temos

$$\|z - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c\left\|v - y_0 - c^{-1}y\right\| = c\,\|v - y_1\| \tag{28}$$

onde

$$y_1 = y_0 + c^{-1}y.$$

A forma de y_1 mostra que $y_1 \in Y$. Assim

$$\|v - y_1\| \geq a, \tag{29}$$

pela definicão de a. Assim usando (26) obtemos

$$\|z - y\| \underset{(28)}{=} c\,\|v - y_1\| \underset{(29)}{\geq} ca \underset{(27)}{=} \frac{a}{\|v - y_0\|} \underset{(26)}{\geq} \frac{a}{\frac{a}{\theta}} = \theta. \tag{30}$$

Como $y \in Y$ era arbitrário, isto completa a demonstração.□

1.17.8 Teorema (aplicação contínua)

Uma aplicação $T : X \to Y$ de um espaço métrico (X, d_1) num espaço métrico (Y, d_2) é contínua num ponto $x_0 \in X$ se e só se

$$x_n \simeq x_0 \qquad \text{implica} \qquad Tx_n \simeq Tx_0 \qquad \text{com } n \simeq +\infty.$$

Dem.

($\Rightarrow$) Suponhamos que T é contínua em x_0. Então para um dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x, x_0) < \delta \qquad \text{implica} \qquad d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon.$$

Seja $x_n \simeq x_0$. Então existe um N tal que para todo $n > N$ temos

$$d_1(x_n, x_0) < \delta.$$

Assim para todo $n > N$,

$$d_2(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon.$$

Por definição isto significa que $Tx_n \simeq Tx_0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que

$$x_n \simeq x_0 \qquad \text{implica} \qquad Tx_n \simeq Tx_0,$$

e provemos que T é contínua em x_0. Suponhamos que isto é falso. Então existe um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe um $x \neq x_0$ satisfazendo $d_1(x, x_0) < \delta$ mas $d_2(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$.

Em particular, para $\delta = \dfrac{1}{n}$ existe um x_n satisfazendo

$$d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ mas } d_2(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon.$$

Assim $x_n \simeq x_0$ mas (Tx_n) não converge para Tx_0. Isto contradiz $Tx_n \simeq Tx_0$ e prova o teorema.$\square$

1.17.9 Teorema (aplicação aberta, inverso limitado)

Um operador linear limitado T de um espaço de Banach X num espaço de Banach Y é uma aplicação aberta.[84] Assim se T é bijectivo, T^{-1} é contínuo e limitado.

Dem.

Vamos provar que dado um conjunto aberto $A \subseteq X$ a imagem $T(A)$ é aberta em Y. Mostramos assim que para cada $y = Tx \in T(A)$ o conjunto $T(A)$ contém uma bola aberta em volta de $y = Tx$.

Seja $y = Tx \in T(A)$. Como A é aberto, contém uma bola aberta com centro em x. Assim $A - x$ contém uma bola aberta com centro em 0; seja r o raio da bola e $k = \frac{1}{r}$, e assim $r = \frac{1}{k}$. Então $k(A - x)$ contém a bola aberta unitária $B(0, 1)$ [ver Definição 1.5.1 (bola aberta, bola fechada e esfera)]. Pelo Lema (bola aberta unitária)[85] vem que $T(k(A - x)) = k[T(A) - Tx]$ contém uma bola aberta em volta de 0, e também para $T(A) - Tx$. Portanto $T(A)$ contém uma aberta em volta de $Tx = y$. Como $y \in T(A)$ foi arbitrário, $T(A)$ é aberto.

Finalmente se $T^{-1} : Y \to X$ existe, pelo Teorema (aplicação contínua)[86] é um operador contínuo porque T é aberto. Pelo Teorema 1.6.11 (operador inverso) T^{-1} é linear e é limitado pelo Teorema 1.6.17 (continuidade e limitação).□

---

84 **Definição (aplicação aberta)**
Sejam X e Y espaços métricos. Então $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ com domínio $\mathcal{D}(T) \subseteq X$ é uma *aplicação aberta* se para cada conjunto aberto em $\mathcal{D}(T)$ a imagem é um conjunto aberto em Y.

85 **Lema (bola aberta unitária)**
Um operador linear limitado T de um espaço de Banach X para um espaço de Banach Y tem a propriedade que a imagem $T(B(0,1))$ da bola aberta unitária $B(0,1) \subseteq X$ contenha uma bola aberta em volta de $0 \in Y$.

86 **Teorema (aplicação contínua)**
Uma aplicação T de um espaço métrico X num espaço métrico Y é contínua se e só se a imagem inversa de um subconjunto aberto de Y é um subconjunto aberto de X.

1.18 Bibliografia

[87]

[Agu] F. R. DIAS AGUDO, *Operadores Lineares em Espaços de Hilbert*, Lisboa, 1963.

[Bre] HAÏM BREZIS, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, 1987.

[CNO] NIGEL J. CUTLAND, VÍTOR NEVES, A. J. FRANCO DE OLIVEIRA, JOSÉ SOUSA-PINTO (EDITORES), *Developments in nonstandard mathematics*, 1995.

[Con] JOHN B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[Die] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, 1969.

[DDi] M. DIENER, F. DIENER, *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer-Verlag, 1995.

[DM] LOKENATH DEBNATH, PIOTR MIKUSIŃSKI, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications,* Academic Press, 1990.

[DR] F. DIENER, G. REEB, *Analyse Non Standard*, Hermann, 1989.

[DS] NELSON DUNFORD, JACOB T. SCHWARTZ, *Linear operators Part I: general theory,* Interscience Publishers, Nova Iorque, 1957.

[KL] A. N. KOLMOGOROV, S. V. FOMIN, *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editora Mir, Moscovo, 1982.

[Kre] ERWIN KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.*

[87] Os nomes dos autores estão por ordem alfabética dos apelidos. [Oli_2] é o segundo trabalho referenciado de Oliveira. Quando as três letras iniciais do apelido não são suficientes para singularizar um autor, utilizam-se quatro. Assim [Robi] identifica Robinson, para distinguir de [Rob] que se refere a Robert. Dois ou mais autores (ou editores/organizadores) são referenciados pelas iniciais dos apelidos.

[LG] ROBERT LUTZ, MICHEL GOZE, *Nonstandard Analysis*, Springer-Verlag, 1981.

[Lim] ELON LAGES LIMA, Espaços métricos, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projecto Euclides), 1977.

[LMM] R. LUTZ, A. MAKHLOUF, E. MEYER, *Fondements pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur: Les réels dévoilés*, 1996.

[Nel] E. NELSON, *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton Press, 1987.

[Oli] A. J. FRANCO DE OLIVEIRA, *Teoria dos Conjuntos*, Intuitiva e Axiomática (ZFC), Escolar Editora, 1982; -[Oli$_2$] *Infinitesimais: Passado, Presente e Futuro*, Dep. Mat. Univ. Évora, 1987; -[Oli$_2$] *Matemática Não-Standard: uma introdução-Notas para a cadeira de Análise Não-Standard do Mestrado em Matemática Aplicada (97/99)*, Dep. Mat. Univ. Évora, 1997.

[OJ] A. J. FRANCO DE OLIVEIRA, LUÍS GONZAGA ALBUQUERQUE SANTOS JORGE *Notas do Curso: O Verdadeiro Cálculo Infinitesimal (Uma Introdução à Análise Não-Standard)*, PROFMAT, Évora, 1995.

[Rob] A. ROBERT, *Analyse Non Standard*, Press Polytechnique Romandes, Lausanne, 1985.

[Robi] A. ROBINSON, *Nonstandard Analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, 1996 (re-edição da segunda edição de 1974 publicada pela North-Holland).

[Rud] WALTER RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[RS] FRIGYES RIESZ, BÉLA SZ.-NAGY, *Functional Analysis*, Dover Publications, Nova Iorque, 1990.

[TL] ANGUS E. TAYLOR, DAVID C. LAY, *Introduction to Functional Analysis*, 1980.

1.19 Índice alfabético