A equação de Schrödinger não linear

(com campo magnético externo)

Explosão em tempo finito de solução

Dissertação realizada por:

Isabel Rute Belo dos Santos Pereira

Orientador: Professor Doutor José Manuel Gonçalves Ribeiro

"Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri"

Dissertação apresentada à Universidade de Évora para obter o grau de Mestre em Matemática Aplicada

Évora, Setembro de 2004

A equação de Schrödinger não linear

(com campo magnético externo)

Explosão em tempo finito de solução

Dissertação realizada por:

Isabel Rute Belo dos Santos Pereira

Orientador: Professor Doutor José Manuel Gonçalves Ribeiro

"Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri"

Dissertação apresentada à Universidade de Évora para obter o grau de Mestre em Matemática Aplicada

Évora, Setembro de 2004

ERRATA

Página 17

Onde se lê:

"Portanto,

$$\begin{aligned} g'(t+h) - g'(t) &= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t+h)\cdot\overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h)-u(t)\right)\right]} + \\ &\quad + \operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h)-u(t)\right)\right]} + \\ &\quad + \left(u(t+h)-u(t), L_A\left(i\psi u(t)\right)\right) + \\ &\quad + \left(u(t+h)-u(t), i\psi L_A u(t)\right)\text{"} \end{aligned}$$

deverá ler-se:

"Portanto,

$$\begin{aligned} g'(t+h) - g'(t) &= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t+h)\cdot\overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h)-u(t)\right)\right]} + \\ &\quad + \operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h)-u(t)\right)\right]} + \\ &\quad - \left(u(t+h)-u(t), L_A\left(i\psi u(t)\right)\right) + \\ &\quad + \left(u(t+h)-u(t), i\psi L_A u(t)\right)\text{"} \end{aligned}$$

Página 20

Onde se lê:

"Temos, então:

$$\left(i\nabla_A\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right)\right), \nabla\psi\frac{\overline{u}\left(t+h\right)-\overline{u}\left(t\right)}{h}\right)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\text{''}$$

deverá ler-se:

"Temos, então:

$$\left(i\nabla_A\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right)\right), \nabla\psi\frac{u\left(t+h\right)-u\left(t\right)}{h}\right)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0\text{''}$$

Página 23

Onde se lê:

"pois:

$$\mathrm{Re}\int L_A u\left(t\right)\overline{u}\left(t\right)\Delta\psi=\mathrm{Re}\int\left[-\Delta u\left(t\right)-2iA\cdot\nabla u\left(t\right)+\left|A\right|^2u\left(t\right)\right]\overline{u}\left(t\right)\Delta\psi$$

$$=-\mathrm{Re}\int\Delta u\left(t\right)\cdot\overline{u}\left(t\right)\Delta\psi+$$

$$-2\,\mathrm{Re}\int iA\nabla u\left(t\right)\cdot\overline{u}\left(t\right)\Delta\psi+\mathrm{Re}\int\left|A\right|^2\left|u\left(t\right)\right|^2\Delta\psi$$

$$=\int\left|\nabla^2u\left(t\right)\right|\Delta\psi-\frac{1}{2}\int\left|u\left(t\right)\right|^2\Delta^2\psi+$$

$$+2\int\left|iA\nabla u\left(t\right)\cdot u\left(t\right)\right|\Delta\psi+\int\left|A\right|^2\left|u\left(t\right)\right|^2\Delta\psi$$

$$=\int\left|\nabla^2u\left(t\right)+2iA\nabla u\left(t\right)\cdot u\left(t\right)-A^2u^2\left(t\right)\right|\Delta\psi-\frac{1}{2}\int\left|u\left(t\right)\right|^2\Delta^2\psi$$

$$= \int |\nabla u(t) + iAu(t)|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi$$
$$= \int |\nabla_A u(t)|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi\text{"}$$

deverá ler-se:

"pois:

$$\operatorname{Re}\int L_A u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi = \operatorname{Re}\int \left[-\Delta u(t) - 2iA\cdot\nabla u(t) + |A|^2 u(t)\right]\overline{u}(t)\,\Delta\psi$$

$$= -\operatorname{Re}\int \Delta u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi +$$
$$-2\operatorname{Re}\int iA\nabla u(t)\cdot\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \operatorname{Re}\int |A|^2 |u(t)|^2 \Delta\psi$$

$$= -\operatorname{Re}\int \Delta u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi +$$
$$-2\operatorname{Re}\int \nabla u(t)\, iA\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \operatorname{Re}\int |A|^2 |u(t)|^2 \Delta\psi$$

$$= \int |\nabla u(t)|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi +$$
$$-2\operatorname{Re}\int \nabla u(t)\, iA\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \int |A|^2 |u(t)|^2 \Delta\psi$$

$$= \int \left[|\nabla u(t)|^2 - 2\operatorname{Re}\nabla u(t)\, iA\overline{u}(t) + |A|^2 |u(t)|^2\right]\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi$$

$$= \int |\nabla u(t) + iAu(t)|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi$$

$$= \int |\nabla_A u(t)|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi\text{"}$$

Página 31

Onde se lê:

"onde $\xi \in C\left((0,\infty),\mathbb{R}\right)$, $\xi = 1$ em $(0,1)$, $\xi = 0$ em $(2,\infty)$ e ξ é não-crescente."

Deverá ler-se:

"onde $\xi \in C^{\infty}\left((0,\infty),\mathbb{R}\right)$, $\xi = 1$ em $(0,1)$, $\xi = 0$ em $(2,\infty)$ e ξ é não-crescente."

Página 44

Onde se lê:

$$\text{"} \leq C\,|t|\,\left(\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_A u(s)\|_{L^2}\,\|Au(s)\|_{L^2} + \|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(\|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2 + \|Au(s)\|_{L^2}^2 + \|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(2\,\|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|u(s)\|_X^2 + \|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(3\,\|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|u(s)\|_X^2 + C\,\|u(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(3\max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_X^2 + \max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right) \leq C \text{"}$$

deverá ler-se:

$$\text{"} \leq C\,|t|\,\left(\|u(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_A u(s)\|_{L^2}\,\|Au(s)\|_{L^2} + \|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(\|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \|u(s)\|_{H_A^1}^2 + \frac{1}{2}\left(\|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2 + \|Au(s)\|_{L^2}^2\right) + \|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(2\,\|u\,(s)\|_{H_A^1}^2+\frac{1}{2}\,\|u\,(s)\|_{H_A^1}^2+\frac{1}{2}\,\|u\,(s)\|_X^2+\|u\,(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(\frac{5}{2}\,\|u\,(s)\|_{H_A^1}^2+\frac{1}{2}\,\|u\,(s)\|_X^2+C\,\|u\,(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right)$$

$$\leq C\,|t|\left(\max_{0\leq s\leq t}\|u\,(s)\|_{H_A^1}^2+\max_{0\leq s\leq t}\|u\,(s)\|_X^2+\max_{0\leq s\leq t}\|u\,(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right)\leq C \text{ ''}$$

Nota:

Na **Página 23**, devemos ainda ter em consideração que:

$$
\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\int \Delta u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi = -\operatorname{Re}\int\left(\sum_i \partial_i^2 u(t)\right)\overline{u}(t)\,\Delta\psi \\
&= -\operatorname{Re}\sum_i\int \partial_i^2 u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi = \operatorname{Re}\sum_i\int \partial_i u(t)\,\partial_i\left(\overline{u}(t)\,\Delta\psi\right) \\
&= \operatorname{Re}\sum_i\int \partial_i u(t)\left[\left(\partial_i\overline{u}(t)\right)\Delta\psi + \overline{u}(t)\,\partial_i\Delta\psi\right] \\
&= \operatorname{Re}\int\sum_i \partial_i u(t)\,\partial_i\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \operatorname{Re}\int\sum_i \partial_i u(t)\,\overline{u}(t)\,\partial_i\Delta\psi \\
&= \int |\nabla u(t)|^2\,\Delta\psi + \int\sum_i \partial_i\left(\frac{1}{2}u(t)\,\overline{u}(t)\right)\partial_i\Delta\psi \\
&= \int |\nabla u(t)|^2\,\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\,\Delta^2\psi.
\end{aligned}
$$

A equação de Schrödinger não linear (com campo magnético externo). Explosão em tempo finito de solução.

Resumo:

Neste trabalho são estabelecidos resultados de explosão em tempo finito de solução da equação Schrödinger, para o movimento de partículas quânticas sem spin, na presença de um campo magnético externo.

Estudamos alguns comportamentos resultantes do fluxo da equação de evolução (não linear).

Em seguida, usando um raciocínio por concavidade, provamos que a solução explode em tempo finito.

Nonlinear Schrödinger equation (with external magnetic field). Finite time blow-up of solution.

Abstract:

This work is concerned with finite time blow-up for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field.

We study some behavior of the flow of the (nonlinear) evolution equation.

Moreover, using a concavity argument, we prove that the solution blows up in a finite time.

Agradecimentos

A realização desta dissertação foi possível graças à colaboração de várias pessoas às quais deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

Em primeiro lugar, quero deixar o meu profundo agradecimento ao meu orientador, Professor José Ribeiro, por tudo o que me deu a conhecer, pelas suas sugestões e críticas, e por todo o apoio prestado durante a elaboração da mesma.

À minha família e amigos, agradeço a compreensão e o carinho que sempre me deram, conseguindo marcar presença ao longo da realização deste trabalho.

Por último, quero agradecer aos meus colegas de Mestrado, por toda a atenção demonstrada.

Índice

Capítulo I

Apresentação do problema

Em $\mathbb{R}^3$, notamos por (ρ, φ, z) as coordenadas cilíndricas de um ponto . Um campo magnético *uniforme* ao longo do eixo dos zz definido por $B = be_z$, $b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, fica definido através de um potencial vector solenoidal A, onde

$$B = rotA,\ divA = 0,\ A = \frac{b}{2}\rho e_\varphi.$$

Em tal campo magnético, a evolução de uma partícula quântica sem spin é descrita pela equação

$$id_t u = -L_A u = -(-\Delta u - 2iA \cdot \nabla u + |A|^2 u). \tag{0.1}$$

Associamos a 0.1 a equação de evolução não linear

$$id_t u = -L_A u - \alpha |u|^{p-1} u, \tag{0.2}$$

em que consideramos não linearidades do tipo

$$W(u) = \frac{\alpha}{p+1} \int |u|^{p+1},$$

sendo W a energia potencial.

Relativamente a não linearidades gerais, a resolução do problema de Cauchy não é trivial podendo a mesma encontrar-se em [4].

Em seguida, definindo o espaço de Hilbert real X

$$X = \left\{ u \in H_A^1 : \int |x|^2 |u|^2 < \infty \right\},$$

estudamos comportamentos resultantes do fluxo da equação (0.2) em X.

Por fim, supondo $p \in \left[1 + \frac{4}{3}, 5\right)$, $\alpha \in (-\infty, 0)$, usando um raciocínio por concavidade verificamos que a solução da equação diferencial (0.2) explode em tempo finito.

Capítulo II

Introdução

1. Definição do espaço

Esboçamos um quadro funcional apropriado para estudar a equação de evolução linear (0.1).

Seja $\nabla_A v = \nabla v + iAv$ e considerem-se os seguintes espaços de Hilbert *reais*:

$$L^2 = \left\{ v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}\colon \int |v|^2 < \infty \right\}, \qquad (v, w) = \operatorname{Re} \int v\overline{w},$$

$$H_A^1 = \left\{ v \in L^2 : \int |\nabla_A v|^2 < \infty \right\}, \qquad (v, w) = \operatorname{Re} \int \left(v\overline{w} + \nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A w} \right).$$

[Os integrais apresentados são sobre $\mathbb{R}^3$ (salvo indicação contrária); $(.,.)$ denota o produto escalar em L^2].

Seja H_A^{-1} o espaço dual de H_A^1. Tomando L^2 para pivot, temos $H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^{-1}$.

Definimos em L^2 o operador $\mathcal{L}$ por

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ v \in H_A^1 : L_A v \in L^2 \right\}, \qquad \mathcal{L}v = L_A v.$$

Façamos $H_A^2 = D(\mathcal{L})$, dotado da norma do gráfico. Temos então $H_A^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^1$.

A igualdade

$$(L_A v, w) = \mathrm{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A w}, \qquad \forall v \in H_A^2,\ w \in H_A^1, \tag{1.1}$$

é facilmente provada:

Suponhamos $w \in \mathcal{D}$. Tem-se que,

$$\mathrm{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A w} = \mathrm{Re}\int (\nabla v + iAv) \cdot (\nabla \overline{w} - iA\overline{w})$$

$$= \mathrm{Re}\int \nabla v \cdot \nabla \overline{w} + \mathrm{Re}\left[i\int vA \cdot \nabla \overline{w}\right] + \mathrm{Re}\int \left(-iA \cdot \nabla v\overline{w} + |A|^2 v\overline{w}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\sum_j \langle \partial_j v, \partial_j \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \mathrm{Re}\left[i\sum_j \langle A_j v, \partial_j \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\right] +$$

$$+ \mathrm{Re}\int \left(-iA \cdot \nabla v\overline{w} + |A|^2 v\overline{w}\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\sum_j \langle \partial_j^2 v, \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \mathrm{Re}\left[i\sum_j \langle \partial_j (A_j v), \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\right] +$$

$$+ \mathrm{Re}\int \left(-iA \cdot \nabla v\overline{w} + |A|^2 v\overline{w}\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\sum_j \langle \Delta v, \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \mathrm{Re}\,\langle iA\nabla v, \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \mathrm{Re}\,\langle -iA \cdot \nabla v, \overline{w}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} +$$

$$+ \mathrm{Re}\left\langle |A|^2 v, \overline{w}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

$$= \mathrm{Re}\left\langle -\Delta v - 2iA \cdot \nabla v + |A|^2 v, \overline{w}\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \mathrm{Re}\int L_A v\overline{w} = (L_A v, w).$$

Ou seja, obtemos

$$\operatorname{Re}\int \nabla_A v\cdot\overline{\nabla_A w}=(L_A v,w)\,,\quad \forall v\in H^2_A,\ w\in\mathcal{D}.$$

Consideremos agora $w\in H^1_A$, e tomemos a sucessão $(w_j)_j$ em $\mathcal{D}$. Temos $w_j\to w$ em L^2, portanto $\nabla_A w_j\to\nabla_A w$ em L^2. Logo,

$$\operatorname{Re}\int \nabla_A v\cdot\overline{\nabla_A w_j}=(L_A v,w_j)\,,$$

e finalmente, tendo em conta as convergências,

$$\operatorname{Re}\int \nabla_A v\cdot\overline{\nabla_A w}=(L_A v,w)\,,\quad \forall v\in H^2_A,\ w\in H^1_A.$$

A partir desta igualdade deduzimos que $\mathcal{L}$ é um operador simétrico m-acretivo e que L_A+1 é uma isometria de H^1_A para H^{-1}_A.

Este facto conduz-nos a definir, em H^{-1}_A, o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$ por

$$D\left(\widetilde{\mathcal{L}}\right)=H^1_A,\qquad \widetilde{\mathcal{L}}v=L_A v.$$

A expressão (1.1) generaliza-se a

$$\langle L_A v,w\rangle=\operatorname{Re}\int \nabla_A v\cdot\overline{\nabla_A w},\qquad \forall v,w\in H^1_A,$$

[$\langle .,.\rangle$ denota a dualidade $\left(H^{-1}_A,H^1_A\right)$], e deduzimos que o operador $\widetilde{\mathcal{L}}$ é simétrico m-acretivo.

Por último, apliquemos o Teorema de Hille-Yosida aos operadores $i\mathcal{L}$, $-i\mathcal{L}$, $i\widetilde{\mathcal{L}}$, $-i\widetilde{\mathcal{L}}$, e resolva-se o problema de Cauchy da equação (0.1):

Dado $u(0) = u_0 \in H_A^1$, existe um único $u \in C(\mathbb{R},H_A^1) \cap C^1\left(\mathbb{R},H_A^{-1}\right)$ tal que $u(0) = u_0$ e $id_t u = -L_A u$ em $C(\mathbb{R},H_A^1)$. Tal solução u verifica as seguintes leis de conservação:

$$\int |\nabla_A u(t)|^2 = \int |\nabla_A u_0|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$\int |u(t)|^2 = \int |u_0|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disto, se $u_0 \in H_A^2$, então $u \in C(\mathbb{R},H_A^2) \cap C^1(\mathbb{R},L^2)$ e a equação é verificada em $C(\mathbb{R},L^2)$.

2. $id_t u = -L_A u$ é um sistema Hamiltoniano

Definimos em H_A^1 a energia cinética-magnética por $E(v) = \dfrac{1}{2}\int |\nabla_A v|^2$. Trata-se de um funcional C^∞, e a sua derivada em v é $L_A v$.

Escrevemos agora a expressão (0.1) como $d_t u = iE'(u)$. Uma vez que a multiplicação por i é um operador anti-simétrico, estamos perante um *sistema Hamiltoniano*, e a expressão (1.2) é a lei de conservação esperada para o Hamiltoniano.

A conservação da norma L^2 vem da *invariância de* E *na multiplicação por* $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$:

De facto, o cálculo da derivada de $E\left(e^{i\theta} v\right) = E(v)$ em $\theta = 0$ verifica $\langle E'(v), iv\rangle = 0$. Desta forma, ao longo de uma trajectória C^1 de valores em H_A^1, obtemos

$$d_t\left(\frac{1}{2}\int |u(t)|^2\right) = \langle u(t), iE'(u(t))\rangle = 0.$$

3. Equação de evolução não linear

Associamos à expressão (0.1) uma equação de evolução não-linear.

De modo a que a conservação de energia e a norma L^2 ainda se verifiquem, pretendemos manter o carácter Hamiltoniano e a invariância na multiplicação por $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Temos então,

$$d_t u = iH'(u),$$

onde

$$H(u) = E(u) + W(u);$$

o Hamiltoniano ou energia (total) H é a soma da energia potencial W com a energia cinética-magnética E. W é um funcional C^1 em H^1_A, que verifica

$$W\left(e^{i\theta}v\right) = W(v).$$

Neste trabalho, as não linearidades estudadas são do tipo,

$$W(v) = \frac{\alpha}{p+1}\int |v|^{p+1},$$

onde α é um parâmetro real e p um expoente admissível.

Para determinar o intervalo em que deve estar p, o ponto de partida é a seguinte desigualdade,

$$|\nabla|\psi|| \leq |\nabla_A \psi| \quad q.p.t.p., \quad \text{para qualquer } \psi \in \mathfrak{D}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}\right).$$

Assim, se $v \in H_A^1$, então $|v| \in H^1$ e

$$\||v|\|_{H^1} \leq \|v\|_{H_A^1}.$$

(Mas note-se que nenhuma inclusão de espaço é conhecida para H_A^1, H^1).

Usando este facto e as injecções de Sobolev, obtemos

$$H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^q, \quad \text{para } q \in [2, 6]\,;$$

$$L^q \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^{-1}, \quad \text{para } q \in \left[\frac{6}{5}, 2\right].$$

Seguidamente, aplicando técnicas da teoria da medida, prova-se que, para $p \in [1, 5]$, W é um funcional C^1, e a sua derivada em v é $\alpha\, |v|^{p-1}\, v$.

Desta forma obtemos a equação não-linear:

$$id_t u = -L_A u - \alpha\, |u|^{p-1}\, u.$$

4. Não linearidades gerais

Resolver o problema de Cauchy para não linearidades gerais não é um problema trivial. A resolução baseia-se em algumas estimativas da equação linear não homogénea obtidas por técnicas de interpolação. Uma explicação mais aprofundada pode ser encontrada em [4].

Aqui, indicaremos apenas o resultado adaptado a não linearidades do tipo indicado.

Teorema 4.1. *Suponhamos que $p \in [1,5)$. Dado $u_0 \in H_A^1$, existe um único $T^* \in (0,\infty]$ e um único $u \in C\left([0,T^*), H_A^1\right) \cap C^1\left([0,T^*), H_A^{-1}\right)$ tais que $u(0) = u_0$,*

$$i\partial_t u = -L_A u - \alpha |u|^{p-1} u$$

em $C\left([0,T^*), H_A^{-1}\right)$, e $\|u(t)\|_{H_A^1} \longrightarrow \infty$ quando $t \longrightarrow T^*$, se $T^* < \infty$. Para tal u, mantem-se a conservação de energia e da norma L^2.

Se $u_0 \in H_A^2$, então $u \in C\left([0,T^*), H_A^2\right) \cap C^1\left([0,T^*), L^2\right)$, e a equação verifica-se em $C\left([0,T^*), L^2\right)$.

Além disso, $T^* : H_A^1 \longrightarrow (0,\infty]$ é semi-contínua inferiormente e u depende continuamente de u_0: se $(u_{0,j})_j$ é uma sucessão convergente para u_0 em H_A^1 e $(u_j)_j$ é a sucessão das trajectórias correspondentes, então $u_j \longrightarrow u$ em $C\left([0,T], H_A^1\right)$, quando $j \longrightarrow \infty$, para qualquer $T \in (0, T^*(u_0))$.

5. Apresentação do resultado principal

Definimos o espaço de Hilbert real X por

$$X = \left\{ v \in H_A^1 : \int |x|^2 |v|^2 < \infty \right\},$$

$$(v,w)_X = \operatorname{Re} \int \left[\left(1 + |x|^2\right) v\overline{w} + \nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A w} \right].$$

Sabemos que, $X \overset{d}{\hookrightarrow} H^1_A$. Também $X \overset{d}{\hookrightarrow} H^1$. De facto,

$$\int |\nabla v|^2 = \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 - 2\,\mathrm{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv}$$
$$\leq 2\int |\nabla_A v|^2 + 2\frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 .$$

Para obter esta desigualdade, temos,

$$\begin{aligned}
|\nabla v|^2 &= \nabla v \cdot \nabla \overline{v} = (\nabla_A v - iAv)\cdot \left(\overline{\nabla_A v - iAv}\right)\\
&= |\nabla_A v|^2 + |A|^2 |v|^2 + \nabla_A v \cdot iA\overline{v} + \overline{\nabla_A v}\cdot(-iAv)\\
&= |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\rho^2 |v|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\nabla_A v \cdot \overline{iAv},
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\int |\nabla v|^2 &= \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 - 2\,\mathrm{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv}\\
&\leq \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 + \left|2\,\mathrm{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv}\right|\\
&\leq \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 + 2\left|\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv}\right|\\
&\leq \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 + 2\int |\nabla_A v|\,|Av|\\
&\leq \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 + 2\,\|\nabla_A v\|_{L^2}\,\|Av\|_{L^2}\\
&\leq \int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 + \int |\nabla_A v|^2 + \int |Av|^2\\
&= 2\int |\nabla_A v|^2 + 2\frac{b^2}{4}\int \rho^2 |v|^2 .
\end{aligned}$$

O Teorema que se segue, que será provado no proximo Capítulo, descreve comportamentos resultantes do fluxo da equação (0.2) em X.

Teorema 5.1. *Seja $u_0 \in X$, e u a solução do problema de Cauchy dada pelo Teorema 4.1. Então, u é uma função contínua de valores em X.*

Além disso, se

$$f(t) = \frac{1}{4} \int |x|^2 |u(t,x)|^2 \, dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)), \tag{5.1}$$

então f é C^2, e

$$f''(t) = 4N(u(t)), \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)),$$

onde N é um funcional em X definido por

$$N(v) = \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 - \frac{b^2}{8} \int \rho^2 |v|^2 + \frac{3}{4}(p-1) \frac{\alpha}{p+1} \int |v|^{p+1}.$$

Capítulo III

Demonstração do Teorema 5.1

6. Primeira etapa

Seja $u_0 \in H_A^2$, e u a trajectória que vem de u_0.

Relembramos (pelo Teorema 4.1) que

$$u \in C\left([0, T^*(u_0)), H_A^2\right) \cap C^1\left([0, T^*(u_0)); L^2\right)$$

e que a equação é verificada em $C\left([0, T^*(u_0)), L^2\right)$.

Tomamos uma função-teste $\psi \in \mathcal{D}$ com valores em $\mathbb{R}$, e definimos

$$g(t) = \frac{1}{2} \int \psi(x) |u(t,x)|^2 \, dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

Obviamente, $g \in C^1$, e

$$g'(t) = -\left(L_A u(t), i\psi u(t)\right). \tag{6.1}$$

De facto, observamos que:

$$g(t) = \frac{1}{2} \int \psi |u(t,x)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int \psi u(t) \overline{u}(t) = \frac{1}{2} (\psi u(t), u(t));$$

$$g'(t) = \frac{1}{2} (\psi u'(t), u(t)) + \frac{1}{2} (\psi u(t), u'(t)),$$

onde

$$u'(t) = -i\left(-L_A u(t) - \alpha |u(t)|^{p-1} u(t)\right) = iL_A u(t) + \alpha i |u(t)|^{p-1} u(t),$$

e, portanto, a expressão anterior dá-nos que,

$$g'(t) = \frac{1}{2}\left(\psi i L_A u(t) + \psi \alpha i |u(t)|^{p-1} u(t), u(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\psi u(t), i L_A u(t) + \alpha i |u(t)|^{p-1} u(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \left(\psi i L_A u(t)\overline{u}(t)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \left(\psi \alpha i |u(t)|^{p-1} u(t)\overline{u}(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \left(i L_A u(t)\psi\overline{u}(t)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int \left(\alpha i |u(t)|^{p-1} u(t)\psi\overline{u}(t)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\int L_A u(t)\, i\psi\overline{u}(t) + \operatorname{Re}\left(i\int \alpha\psi |u(t)|^{p+1}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\int L_A u(t)\, i\psi\overline{u}(t) = -\operatorname{Re}\left(\int L_A u(t)\left(-i\psi\overline{u}(t)\right)\right)$$

$$= -\operatorname{Re}\int L_A u(t)\,\overline{i\psi u(t)} = -\left(L_A u(t), i\psi u(t)\right).$$

Agora, através da expressão (6.1), virá então,

$$g'(t) = -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{u}(t)\nabla\psi\right), \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)), \tag{6.2}$$

pois, (atendendo a $H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^{-1}$),

$$g'(t) = -\left(L_A u(t), i\psi u(t)\right) = -\left\langle L_A u(t), i\psi u(t)\right\rangle_{H_A^{-1}, H_A^1}$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A\left(i\psi u(t)\right)}$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla\left(i\psi u(t)\right) + iA\left(i\psi u(t)\right)}$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{i\psi\nabla u(t)} + \overline{iu(t)\nabla\psi} + \overline{i^2 A\psi u(t)}\right)$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{i\psi\left(\nabla u(t) + iAu(t)\right) + iu(t)\nabla\psi}\right)$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{i\psi\nabla_A u(t)+iu(t)\nabla\psi}$$

$$= -\operatorname{Re}\int (-i)\psi\nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A u(t)} - \operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)(-i)\nabla\psi\overline{u}(t)$$

$$= \operatorname{Re}\left(i\int \psi|\nabla_A u(t)|^2\right) + \operatorname{Re}\left(i\int \nabla_A u(t)\cdot(\overline{u}(t)\nabla\psi)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(i\int \nabla_A u(t)\cdot(\overline{u}(t)\nabla\psi)\right) = -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{u}(t)\nabla\psi.$$

Não é claro que g' é diferenciável atendendo apenas à expressão (6.2).

Para calcular g'', voltamos à expressão (6.1) e procedemos pela definição.

Para $t\in[0,T^*(u_0))$, $h\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, com $t+h\in[0,T^*(u_0))$, (tendo em conta novamente $H_A^1 \overset{d}{\hookrightarrow} L^2 \overset{d}{\hookrightarrow} H_A^{-1}$), obtem-se:

$$g'(t+h)-g'(t) = -(L_A u(t+h), i\psi u(t+h)) + (L_A u(t), i\psi u(t))$$

$$= -(L_A u(t+h) - L_A u(t), i\psi u(t+h) - i\psi u(t)) +$$

$$-(L_A u(t), i\psi u(t+h) - i\psi u(t)) +$$

$$-(L_A u(t+h) - L_A u(t), i\psi u(t)) +$$

$$-(L_A u(t), i\psi u(t)) + (L_A u(t), i\psi u(t))$$

$$= -\left(L_A u(t+h) - L_A u(t), i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right) +$$

$$-\left(L_A u(t), i\psi u(t+h) - i\psi u(t)\right) +$$

$$-\left(L_A u(t+h) - L_A u(t), i\psi u(t)\right)$$

$$= -\left\langle L_A u(t+h), i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right\rangle +$$

$$+\left\langle L_A u(t), i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right\rangle +$$

$$-\left(L_A u(t), i\psi u(t+h) - i\psi u(t)\right) +$$

$$-\left(L_A u(t+h) - L_A u(t), i\psi u(t)\right).$$

Portanto

$$g'(t+h) - g'(t) = -\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t+h) \cdot \overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right]} +$$

$$+\operatorname{Re}\int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right]} +$$

$$+\left(u(t+h) - u(t), L_A\left(i\psi u(t)\right)\right) +$$

$$+\left(u(t+h) - u(t), i\psi L_A u(t)\right)$$

$$= -\operatorname{Re}\int \nabla_A\left(u(t+h) - u(t)\right) \cdot \overline{\nabla_A\left[i\psi\left(u(t+h) - u(t)\right)\right]} +$$

$$-\left(u(t+h) - u(t), L_A\left(i\psi u(t)\right)\right) +$$

$$+\left(u(t+h) - u(t), i\psi L_A u(t)\right)$$

$$= \operatorname{Re} \int i\nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \nabla\psi (\overline{u}(t+h) - \overline{u}(t)) +$$

$$- (u(t+h) - u(t), -\Delta(i\psi) u(t)) +$$

$$- (u(t+h) - u(t), -2\nabla(i\psi) \cdot \nabla_A u(t)).$$

A última igualdade desta expressão é explicada atendendo a que,

$$- \operatorname{Re} \int \nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \overline{\nabla_A (i\psi (u(t+h) - u(t)))}$$

$$= - \operatorname{Re} \int \nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \overline{\left\{ \begin{array}{c} i\nabla\psi (u(t+h) - u(t)) + \\ +i\psi\nabla (u(t+h) - u(t)) + \\ +iAi\psi (u(t+h) - u(t)) \end{array} \right\}}$$

$$= - \operatorname{Re} \int \nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \overline{i\psi\nabla_A (u(t+h) - u(t))} +$$

$$- \operatorname{Re} \int \nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot (-i) \nabla\psi\overline{(u(t+h) - u(t))}$$

$$= \operatorname{Re} \left(i \int \psi |\nabla_A (u(t+h) - u(t))|^2 \right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \int i\nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \nabla\psi (\overline{u}(t+h) - \overline{u}(t))$$

$$= \operatorname{Re} \int i\nabla_A (u(t+h) - u(t)) \cdot \nabla\psi (\overline{u}(t+h) - \overline{u}(t)),$$

e também,

$$- (u(t+h) - u(t), L_A(i\psi u(t))) + (u(t+h) - u(t), i\psi L_A u(t)) =$$

$$= -\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi u\left(t\right)\right)-2iA\cdot\nabla\left(i\psi u\left(t\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left|A\right|^{2}i\psi u\left(t\right)\right)+$$

$$+\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),i\psi\left(-\Delta u\left(t\right)-2iA\cdot\nabla u\left(t\right)+\left|A\right|^{2}u\left(t\right)\right)\right)$$

$$= -\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi\right)u\left(t\right)-2\nabla\left(i\psi\right)\cdot\nabla u\left(t\right)-i\psi\Delta u\left(t\right)+\right.$$

$$\left.-2iA\cdot\nabla\left(i\psi\right)u\left(t\right)-2iA\nabla u\left(t\right)i\psi+\left|A\right|^{2}i\psi u\left(t\right)\right)+$$

$$+\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-i\psi\Delta u\left(t\right)-2iA\nabla u\left(t\right)i\psi+\left|A\right|^{2}i\psi u\left(t\right)\right)$$

$$= -\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi\right)u\left(t\right)-2\nabla\left(i\psi\right)\cdot\nabla u\left(t\right)-2iA\cdot\nabla\left(i\psi\right)u\left(t\right)\right)$$

$$= -\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi\right)u\left(t\right)\right)+$$

$$-\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-2\nabla\left(i\psi\right)\cdot\left(\nabla u\left(t\right)+iAu\left(t\right)\right)\right)$$

$$= -\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi\right)u\left(t\right)\right)-\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-2\nabla\left(i\psi\right)\cdot\nabla_{A}u\left(t\right)\right).$$

Posto isto, usando a expressão

$$g'\left(t+h\right)-g'\left(t\right)=\mathrm{Re}\int i\nabla_{A}\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right)\right)\cdot\nabla\psi\left(\overline{u}\left(t+h\right)-\overline{u}\left(t\right)\right)+$$

$$-\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-\Delta\left(i\psi\right)u\left(t\right)\right)+$$

$$-\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right),-2\nabla\left(i\psi\right)\cdot\nabla_{A}u\left(t\right)\right),$$

pretendemos deduzir que g' é diferenciável e que

$$g''(t) = \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \tag{6.3}$$
$$+2\,\mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi.$$

Para isso, passamos ao quociente diferencial, fazemos $h \to 0$, e raciocinamos por partes. Temos, então:

$$\left(i\nabla_A(u(t+h)-u(t)),\nabla\psi\frac{\overline{u}(t+h)-\overline{u}(t)}{h}\right)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

$$-\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h},-\Delta(i\psi)\,u(t)\right)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\left(u'(t),-\Delta(i\psi)\,u(t)\right)$$

$$= -\mathrm{Re}\int\left(iL_A u(t)+i\alpha|u(t)|^{p-1}u(t)\right)i\Delta\psi\overline{u}(t)$$

$$= -\mathrm{Re}\int(-1)\,L_A u(t)\,\Delta\psi\overline{u}(t)+$$
$$-\mathrm{Re}\int(-\alpha)\,\Delta\psi\,|u(t)|^{p+1}$$
$$= \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \alpha\int\Delta\psi\,|u(t)|^{p+1}.$$

Falta, agora, verificar que,

$$-\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h},-2\nabla(i\psi)\cdot\nabla_A u(t)\right)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}$$
$$2\,\mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi+$$
$$+\alpha\left[\frac{p-1}{p+1}-1\right]\int|u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi.$$

Para isso provemos a seguinte igualdade:

$$\left(u'(t), 2\nabla(i\psi)\cdot\nabla_A u(t)\right) =_{(?)} 2\,\mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi +$$
$$-\frac{2\alpha}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\left(iL_A u(t) + i\alpha\,|u(t)|^{p-1}\,u(t), \nabla(i\psi)\cdot\nabla_A u(t)\right)$$

$$=_{(?)} \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi - \frac{\alpha}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\mathrm{Re}\int iL_A u(t)\,\overline{\nabla(i\psi)\cdot\nabla_A u(t)} + \mathrm{Re}\int i\alpha\,|u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\overline{\nabla(i\psi)\cdot\nabla_A u(t)}$$

$$=_{(?)} \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi - \frac{\alpha}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\nabla\psi\overline{\nabla_A u(t)} + \mathrm{Re}\int \alpha\,|u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\nabla\psi\cdot\overline{\nabla_A u(t)}$$

$$=_{(?)} \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\nabla\psi\overline{\nabla_A u(t)} - \frac{\alpha}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\mathrm{Re}\int |u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\nabla\psi\cdot\overline{\nabla_A u(t)} =_{(?)} -\frac{1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\mathrm{Re}\int |u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\nabla\psi\cdot\left(\overline{\nabla u(t)} + \overline{iAu(t)}\right)$$

$$=_{(?)} -\frac{1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\mathrm{Re}\int |u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\nabla\psi\cdot\overline{\nabla u(t)} +$$

$$+\,\mathrm{Re}\int |u(t)|^{p-1}\,u(t)\,\nabla\psi\cdot\left((-i)\,A\overline{u}(t)\right)$$

$$=_{(?)} -\frac{1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\,\Delta\psi$$

$$\operatorname{Re}\int |u(t)|^{p-1} u(t)\, \nabla\psi \cdot \nabla\overline{u}(t) + \operatorname{Re}\left(-i\int |u(t)|^{p+1}\, \nabla\psi \cdot A\right)$$
$$=_{(?)} -\frac{1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi$$

$$\operatorname{Re}\int \left(|u(t)|^{p-1} u(t)\, \nabla\overline{u}(t)\right) \cdot \nabla\psi =_{(?)} -\frac{1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi.$$

Sabemos, agora, que:

$$\partial_j |u|^{p+1} = (p+1)\, |u|^{p-1}\, u\partial_j\overline{u}.$$

Portanto, virá

$$\operatorname{Re}\int \left[(p+1)\, |u(t)|^{p-1} u(t) \left(\partial_1\overline{u}(t), ..., \partial_n\overline{u}(t)\right)\right] \cdot \nabla\psi =_{(?)} -\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi$$

$$\operatorname{Re}\int \left(\partial_1 |u(t)|^{p+1}, ..., \partial_n |u(t)|^{p+1}\right) \cdot \nabla\psi =_{(?)} -\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int \nabla |u(t)|^{p+1} \cdot \nabla\psi &= {}_{(?)} -\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi \\
-\int |u(t)|^{p+1}\, div\nabla\psi &= {}_{(?)} -\int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi \\
\int |u(t)|^{p+1}\, div\nabla\psi &= \int |u(t)|^{p+1}\, \Delta\psi,
\end{aligned}$$

o que é verdade.

Simplifiquemos agora, os dois primeiros termos do lado direito da expressão (6.3).

Temos que,

$$\operatorname{Re}\int L_A u(t)\, \overline{u}(t)\, \Delta\psi = \int |\nabla_A u(t)|^2\, \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\, \Delta^2\psi, \tag{6.4}$$

pois:

$$\operatorname{Re}\int L_A u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi = \operatorname{Re}\int \left[-\Delta u(t) - 2iA\cdot\nabla u(t) + |A|^2 u(t)\right]\overline{u}(t)\,\Delta\psi$$

$$= -\operatorname{Re}\int \Delta u(t)\cdot\overline{u}(t)\,\Delta\psi +$$

$$-2\operatorname{Re}\int iA\nabla u(t)\cdot\overline{u}(t)\,\Delta\psi + \operatorname{Re}\int |A|^2|u(t)|^2\,\Delta\psi$$

$$= \int \left|\nabla^2 u(t)\right|\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\,\Delta^2\psi +$$

$$+2\int |iA\nabla u(t)\cdot u(t)|\,\Delta\psi + \int |A|^2|u(t)|^2\,\Delta\psi$$

$$= \int \left|\nabla^2 u(t) + 2iA\nabla u(t)\cdot u(t) - A^2u^2(t)\right|\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\,\Delta^2\psi$$

$$= \int |\nabla u(t) + iAu(t)|^2\,\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\,\Delta^2\psi$$

$$= \int |\nabla_A u(t)|^2\,\Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2\,\Delta^2\psi.$$

E ainda,

$$\begin{aligned} &2\operatorname{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)}\cdot\nabla\psi \\ &\quad= 2\int \left(D^2\psi\right)\left(\nabla_A u(t)\right)\cdot\overline{\nabla_A u(t)} + \\ &\quad\quad + \int \sum_{j=1}^{3} 2\operatorname{Re}\left(\nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A\left(\nabla_A u(t)\right)_j}\right)\partial_j\psi. \end{aligned} \tag{6.5}$$

De facto:

$$\operatorname{Re}\int \left[L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi}\right] = \operatorname{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{\nabla_A\left(\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi\right)}$$

$$= \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{(\nabla + iA)\left(\nabla_A u(t) \cdot \nabla \psi\right)}$$

$$= \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{(\nabla + iA) \sum_j \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi}$$

$$= \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\left\{ \begin{array}{r} \sum_j \left\{ \begin{array}{c} \partial_j \psi \nabla \left(\nabla_A u(t)\right)_j + \\ + \left(\nabla_A u(t)\right)_j \nabla \partial_j \psi \end{array} \right\} + \\ + \sum_j \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi i A \end{array} \right\}}$$

$$= \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\left\{ \begin{array}{c} \sum_j \left[\nabla \left(\nabla_A u(t)\right)_j + \left(\nabla_A u(t)\right)_j iA \right] \partial_j \psi + \\ + \sum_j \left(\nabla_A u(t)\right)_j \nabla \partial_j \psi \end{array} \right\}}$$

$$= \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\sum_j \nabla_A \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi} +$$

$$+ \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\sum_j \left(\nabla_A u(t)\right)_j \nabla \partial_j \psi}$$

$$= \sum_j \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi} +$$

$$+ \mathrm{Re} \int \sum_j \left(\nabla_A u(t)\right)_j \nabla \partial_j \psi \cdot \overline{\nabla_A u(t)}$$

$$= \sum_j \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi} + \mathrm{Re} \int M \cdot \overline{\nabla_A u(t)}$$

$$= \sum_j \mathrm{Re} \int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A \left(\nabla_A u(t)\right)_j \partial_j \psi} +$$

$$+\operatorname{Re}\int \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1\psi & \partial_1\partial_2\psi & \partial_1\partial_3\psi \\ \partial_2\partial_1\psi & \partial_2\partial_2\psi & \partial_2\partial_3\psi \\ \partial_3\partial_1\psi & \partial_3\partial_2\psi & \partial_3\partial_3\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\nabla_A u(t))_1 \\ (\nabla_A u(t))_2 \\ (\nabla_A u(t))_3 \end{bmatrix} \cdot \overline{\nabla_A u(t)}$$

$$= \sum_j \operatorname{Re}\int \nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A (\nabla_A u(t))_j} \partial_j\psi +$$

$$+ \operatorname{Re}\int (D^2\psi)\nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A u(t)}$$

$$= \int \sum_j \operatorname{Re}\left(\nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A (\nabla_A u(t))_j}\right) \partial_j\psi +$$

$$+ \int (D^2\psi)\nabla_A u(t) \cdot \overline{\nabla_A u(t)},$$

$$\text{onde } M = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1\psi(\nabla_A u(t))_1 + \partial_1\partial_2\psi(\nabla_A u(t))_2 + \partial_1\partial_3\psi(\nabla_A u(t))_3 \\ \partial_2\partial_1\psi(\nabla_A u(t))_1 + \partial_2\partial_2\psi(\nabla_A u(t))_2 + \partial_2\partial_3\psi(\nabla_A u(t))_3 \\ \partial_3\partial_1\psi(\nabla_A u(t))_1 + \partial_3\partial_2\psi(\nabla_A u(t))_2 + \partial_3\partial_3\psi(\nabla_A u(t))_3 \end{bmatrix}$$

Para simplificar o último termo da expressão (6.5), tomamos $v \in \mathcal{D}$. Através de um cálculo demorado, obtemos

$$2\operatorname{Re}\left(\nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A (\nabla_A v)_j}\right) = \partial_j |\nabla_A v|^2 + (\nabla A_j - \partial_j A) \cdot \left(2|v|^2 A - 2\operatorname{Im}(v\nabla\overline{v})\right).$$

E então, virá:

$$\int \sum_{j=1}^{3} 2\operatorname{Re}\left(\nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A (\nabla_A v)_j}\right) \partial_j\psi = -\int |\nabla_A v|^2 \Delta\psi + 2\operatorname{Im}\int \overline{v}\nabla_A v \cdot \nabla\psi \times B. \tag{6.6}$$

Esta expressão é obtida tendo em conta que:

$$\int \sum_j 2\,\mathrm{Re}\left(\nabla_A v \cdot \overline{\nabla_A (\nabla_A v)_j}\right) \partial_j \psi$$

$$= \int \sum_j \left\{ \begin{array}{c} \partial_j \left|\nabla_A v\right|^2 + \\ + \left(\nabla A_j - \partial_j A\right) \cdot \left(2\left|v\right|^2 A - 2\,\mathrm{Im}\left(v \nabla \overline{v}\right)\right) \end{array} \right\} \partial_j \psi$$

$$= \int \nabla \left|\nabla_A v\right|^2 \cdot \nabla \psi +$$

$$+ \int \sum_j \sum_k \left(\partial_k A_j - \partial_j A_k\right) \cdot \left(2\left|v\right|^2 A_k - 2\,\mathrm{Im}\left(v \partial_k \overline{v}\right)\right) \partial_j \psi$$

$$= - \int \left|\nabla_A v\right|^2 \Delta \psi +$$

$$+2 \int \sum_j \sum_k \left(\partial_k A_j - \partial_j A_k\right) \cdot \mathrm{Re}\left[\overline{v}\left(-i\right)\left(\partial_k v + i v A_k\right)\right] \partial_j \psi$$

$$= - \int \left|\nabla_A v\right|^2 \Delta \psi +$$

$$+2\,\mathrm{Re} \int \left(-i\right) \overline{v} \sum_j \sum_k \left(\partial_k A_j - \partial_j A_k\right) \cdot \left(\partial_k v + i v A_k\right) \partial_j \psi$$

$$= - \int \left|\nabla_A v\right|^2 \Delta \psi + 2\,\mathrm{Im} \int \overline{v} \left\{ \begin{array}{c} \left(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1\right)\left(\partial_1 v + i v A_1\right) \partial_2 \psi + \\ + \left(\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2\right)\left(\partial_2 v + i v A_2\right) \partial_1 \psi + \\ + \left(\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1\right)\left(\partial_1 v + i v A_1\right) \partial_3 \psi + \\ + \left(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3\right)\left(\partial_3 v + i v A_3\right) \partial_1 \psi + \\ + \left(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2\right)\left(\partial_2 v + i v A_2\right) \partial_3 \psi + \\ + \left(\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3\right)\left(\partial_3 v + i v A_3\right) \partial_2 \psi \end{array} \right\}$$

$$= -\int |\nabla_A v|^2 \Delta\psi +$$

$$+2\,\mathrm{Im}\int \overline{v}\cdot \left\{ \begin{array}{c} (rotA)_1 \left[(\partial_2 v + ivA_2)\,\partial_3\psi - (\partial_3 v + ivA_3)\,\partial_2\psi\right] + \\ + (rotA)_2 \left[(\partial_3 v + ivA_3)\,\partial_1\psi - (\partial_1 v + ivA_1)\,\partial_3\psi\right] + \\ + (rotA)_3 \left[(\partial_1 v + ivA_1)\,\partial_2\psi - (\partial_2 v + ivA_2)\,\partial_1\psi\right] \end{array} \right\}$$

$$= -\int |\nabla_A v|^2 \Delta\psi +$$

$$+2\,\mathrm{Im}\int \overline{v} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \partial_1 v + ivA_1 & \partial_2 v + ivA_2 & \partial_3 v + ivA_3 \\ \partial_1\psi & \partial_2\psi & \partial_3\psi \end{bmatrix}$$

$$= -\int |\nabla_A v|^2 \Delta\psi + 2\,\mathrm{Im}\int \overline{v} B \cdot \nabla_A v \times \nabla\psi$$

$$= -\int |\nabla_A v|^2 \Delta\psi + 2\,\mathrm{Im}\int \overline{v}\nabla_A v \cdot \nabla\psi \times B.$$

Para $j,k \in \{1,2,3\}$, $(\partial_j + iA_j)(\partial_k + iA_k)$ é um operador de H_A^2 para L^2, linear limitado (ver [4]). Portanto, para $v \in H_A^2$, mantem-se a expressão (6.6).

Finalmente, a partir deste resultado, e das expressões (6.3), (6.4), (6.5) e (6.6) obtem-se,

$$g''(t) = \mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{u}(t)\,\Delta\psi + 2\,\mathrm{Re}\int L_A u(t)\,\overline{\nabla_A u(t)} \cdot \nabla\psi +$$

$$+\alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left|\nabla_A u(t)\right|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi + 2\int \left(D^2\psi\right)\left(\nabla_A u(t)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(t)} + \\
&\quad + \int \sum_{j=1}^{3} 2\,\mathrm{Re}\left(\nabla_A u(t)\cdot \overline{\nabla_A\left(\nabla_A u(t)\right)_j}\right)\partial_j\psi + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left|\nabla_A u(t)\right|^2 \Delta\psi - \frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi + 2\int \left(D^2\psi\right)\left(\nabla_A u(t)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(t)} + \\
&\quad - \int \left|\nabla_A v\right|^2 \Delta\psi + 2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi\times B + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi + 2\int \left(D^2\psi\right)\left(\nabla_A u(t)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(t)} + \\
&\quad +2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi\times B + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
g''(t) = &-\frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi + 2\int \left(D^2\psi\right)\left(\nabla_A u(t)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(t)} + \\
&+2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi\times B + \\
&+\alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi, \qquad \forall t\in\left[0, T^*(u_0)\right).
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

7. Segunda Etapa

Dado $u_0 \in H_A^1$, seja $(u_{0,j})_j$ uma sucessão em H_A^2 convergente para u_0 em H_A^1. Consideramos u a trajectória que vem de u_0 e u_j a trajectória que vem de $u_{0,j}$.

Relembramos, (pelo Teorema 4.1), que $\underline{\lim}_j T^*(u_{0,j}) \geq T^*(u_0)$ e que $u_j \to u$ em $C([0,T], H_A^1)$, quando $j \to \infty$, para qualquer $T \in (0, T^*(u_0))$.

Tomamos uma função-teste $\psi \in \mathcal{D}$ com valores em $\mathbb{R}$, e definimos

$$g(t) = \frac{1}{2}\int \psi(x)\,|u(t,x)|^2\,dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)), \tag{7.1}$$

$$g_j(t) = \frac{1}{2}\int \psi(x)\,|u_j(t,x)|^2\,dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_{0,j})).$$

As equações anteriores (6.2) e (6.7) aplicam-se a g_j:

$$g_j'(t) = -\operatorname{Im}\int \nabla_A u_j(t)\cdot\left(\overline{u_j}(t)\,\nabla\psi\right), \qquad \forall t \in [0, T^*(u_{0,j})),$$

e

$$g_j''(t) = -\frac{1}{2}\int |u_j(t)|^2\,\Delta^2\psi + 2\int (D^2\psi)(\nabla_A u_j(t))\cdot\overline{\nabla_A u_j(t)}$$

$$+2\operatorname{Im}\int \overline{u}_j(t)\,\nabla_A u_j(t)\cdot\nabla\psi\times B + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u_j(t)|^{p+1}\,\Delta\psi,$$

$$\forall t \in [0, T^*(u_{0,j})).$$

Integrando estas equações, obtemos

$$g_j(t) = g_j(0) - \int_0^t \left[\operatorname{Im}\int \nabla_A u_j(s)\cdot\left(\overline{u_j}(s)\,\nabla\psi\right)ds\right], \qquad \forall t \in [0, T^*(u_{0,j})), \tag{7.2}$$

e

$$g_j(t) = g_j(0) - \mathrm{Im}\int \nabla_A u_{0,j} \cdot \left(\overline{u_{0,j}} \nabla\psi\right) t + \tag{7.3}$$
$$+ \int_0^t (t-s) \cdot \left\{ \begin{array}{l} -1/2 \int |u_j(s)|^2 \Delta^2\psi + \\ +2 \int (D^2\psi)(\nabla_A u_j(s)) \cdot \overline{\nabla_A u_j(s)} + \\ +2\,\mathrm{Im} \int \overline{u}_j(s) \nabla_A u_j(s) \cdot \nabla\psi \times B + \\ +\alpha(p-1)/(p+1) \int |u_j(s)|^{p+1} \Delta\psi \end{array} \right\} ds,$$

$\forall t \in [0, T^*(u_{0,j}))$.

Fixamos $t \in (0, T^*(u_0))$, tomamos j suficientemente grande de modo que

$$T^*(u_{0,j}) > t;$$

aplicamos as expressões (7.2) e (7.3), e fazemos $j \to \infty$.

Os termos da integranda do tempo convergem em $C([0,t], \mathbb{R})$ para as funções que se obtêm removendo o índice j. Desta forma, as expressões (7.2) e (7.3) permanecem removendo este índice.

Derivamos e concluimos que, com g dado pela expressão (7.1), as expressões (6.2) e (6.7) permanecem válidas para uma trajectória *de valor inicial em* $u_0 \in H_A^1$.

8. Terceira Etapa

Nesta etapa, provamos que u é uma função contínua de valores em X, desde $u_0 \in X$.

Suponhamos $u_0 \in X$. Para um inteiro positivo j, definimos

$$\psi_j(x) = \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3;$$

$$f_j(t) = \frac{1}{2}\int \psi_j(x)\,|u(t,x)|^2\,dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)),$$

onde $\xi \in C((0,\infty),\mathbb{R})$, $\xi = 1$ em $(0,1)$, $\xi = 0$ em $(2,\infty)$ e ξ é não-crescente.

Atendendo à etapa anterior, a expressão (6.2) aplica-se a f_j:

$$f_j'(t) = -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{u}(t)\,\nabla\psi_j\right), \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

Consideremos agora,

$$\begin{aligned}
\nabla\psi_j &= \nabla\left[\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\cdot\frac{|x|^2}{2}\right] = \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\nabla\left(\frac{|x|^2}{2}\right) + \frac{|x|^2}{2}\nabla\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\\
&= \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)x + \frac{|x|^2}{2}\left[2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\nabla\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]\\
&= \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)x + |x|^2\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{1}{j^2}2x\\
&= x\left[\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) + 2\frac{|x|^2}{j^2}\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]\\
&= x\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right).
\end{aligned}$$

Deste modo, após integrarmos, obtemos,

$$f_j(t) = f_j(0) - \int_0^t\left[\operatorname{Im}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{u}(s)\,x\right)\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]ds, \qquad (8.1)$$

$$\forall t \in [0, T^*(u_0)),$$

onde

$$\eta(r) = \xi^2(r) + 2\xi(r)\,\xi'(r)\,r, \qquad \text{para } r \geq 0.$$

Fixamos $T \in (0, T^*(u_0))$, e colocamos

$$C_1 = \|u_0\|_X\,,$$

$$C_2 = \sup\left\{\|u(t)\|_{H^1_A} : t \in [0,T]\right\},$$

$$C_3 = \sup\left\{|\xi'(r)|\, r : r \in (0,\infty)\right\}.$$

Então, a partir da equação (8.1), temos

$$f_j(t) \le \frac{C_1^2}{4} + \int_0^t \left[\int |\nabla_A u(s)|\,|u(s)|\,|x|\,(1+2C_3)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right] ds,$$

uma vez que,

$$\begin{aligned}
|f_j(t)| &\le |f_j(0)| + \left|\int_0^t \left(\operatorname{Im}\int \nabla_A u(s)\cdot(\overline{u}(s)\,x)\,\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) dx\right) ds\right| \\
&\le \left|\frac{1}{2}\int \psi_j(x)\,|u_0(x)|^2\, dx\right| + \\
&\quad + \left|\int_0^t \left[\operatorname{Im}\int \nabla_A u(s)\cdot(\overline{u}(s)\,x)\,\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) dx\right] ds\right| \\
&\le \left|\frac{1}{2}\int \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{2}\,|u_0(x)|^2\, dx\right| + \\
&\quad + \left|\int_0^t \left[\int \nabla_A u(s)\cdot(\overline{u}(s)\,x)\,\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) dx\right] ds\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4}\int \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)|x|^2|u_0(x)|^2\,dx+\int_0^t\left[\int |\nabla_A u(s)|\,|u(s)|\,|x|\,\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)dx\right]ds$$

$$\leq \frac{1}{4}\int |x|^2|u_0(x)|^2\,dx+$$

$$+\int_0^t\left\{\int |\nabla_A u(s)|\,|u(s)|\,|x|\cdot\left[\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left|\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right|\frac{|x|^2}{j^2}\right]\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)dx\right\}ds$$

$$\leq \frac{1}{4}C_1^2+\int_0^t\left[\int |\nabla_A u(s)|\,|u(s)|\,|x|\,(1+2C_3)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)dx\right]ds.$$

E ainda, (por Cauchy-Schwartz):

$$\begin{aligned}
f_j(t) &\leq \frac{C_1^2}{4}+\int_0^t\left[\int |\nabla_A u(s)|\,|u(s)|\,|x|\,(1+2C_3)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]ds\\
&\leq \frac{C_1^2}{4}+(1+2C_3)\int_0^t\left[\|\nabla_A u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)}\left\|u(s)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)x\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)}\right]ds\\
&\leq \frac{C_1^2}{4}+(1+2C_3)\,C_2\int_0^t(1+f_j(s))\,ds,\qquad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

A última desigualdade da expressão anterior obtem-se considerando:

$$\|\nabla_A u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)}\leq \|u(s)\|_{H_A^1}\leq C_2;$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t\left\|u(s)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)x\right\|_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)}ds &\leq \int_0^t 1+\left\|u(s)\,\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)x\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)}ds\\
&\leq \int_0^t(1+f_j(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Portanto, existem constantes $C_4, C_5 \in (0,\infty)$, dependentes de u_0, T, ξ, mas *independentes de* j, tais que,

$$
\begin{aligned}
f_j(t) &\leq \frac{C_1^2}{4} + (1+2C_3)\,C_2 \int_0^t 1ds + (1+2C_3)\,C_2 \int_0^t f_j(s)\,ds \\
&= \frac{C_1^2}{4} + (1+2C_3)\,C_2 t + (1+2C_3)\,C_2 \int_0^t f_j(s)\,ds \\
&\leq \frac{C_1^2}{4} + (1+2C_3)\,C_2 T + (1+2C_3)\,C_2 \int_0^t f_j(s)\,ds \\
&= C_4 + C_5 \int_0^t f_j(s)\,ds,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
f_j(t) \leq C_4 + C_5 \int_0^t f_j(s)\,ds, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{8.2}
$$

Aplicamos a Desigualdade de Gronwall à expressão (8.2): existe uma constante $C \in (0,\infty)$, dependente de u_0, T, ξ, mas *independente de* j, tal que $f_j(t) \leq C$, $\forall t \in [0,T]$.

Agora, aplicando a Convergência Monotona, obtemos $f(t) \leq C$, $\forall t \in [0,T]$, onde f é dado pela expressão (5.1).

Consequentemente, u é uma função de valores em X. Relembramos que

$$
X = \left\{ u \in H_A^1 : \int |x|^2 |u|^2 < \infty \right\}.
$$

Para provar que u é uma função *contínua* de valores em X, volto à expressão (8.1) restringida a $[0,T]$.

Notamos que $\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)$ tende pontualmente para 1, quando $j \to \infty$, e é limitada uniformemente em j:

$$\begin{aligned}
\eta(r) &= \xi^2(r) + 2\xi(r)\,\xi'(r)\,r; \\
\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) &= \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) + 2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2},
\end{aligned}$$

em que $\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) \leq 1$. Fixamos x, escolhemos j suficientemente elevado para que $\frac{|x|^2}{j^2} < 1$. Virá então,

$$\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Temos ainda:

$$|\eta(r)| \leq 1 + \sup_{r\geq 0} 2\,|\xi'(r)|\,r \leq 1 + 2\sup_{1\leq r\leq 2} |\xi'(r)|\,r \leq 1 + 2\times 2\sup_{1\leq r\leq 2} |\xi'(r)| \leq C.$$

Combinando o que dissemos anteriormente com $f(t) \leq C$, $\forall t \in [0,T]$, podemos aplicar a Convergência Dominada (primeiro à variável espaço x; depois à variável tempo s) e concluir que:

$$\operatorname{Im}\int \nabla_A u(s)\cdot(\overline{u}(s)\,x) \text{ é uma função integrável mensurável em } [0,T], \tag{8.3}$$

$$f(t) = f(0) - \int_0^t \left(\operatorname{Im}\int \nabla_A u(s)\cdot(\overline{u}(s)\,x)\right) ds, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{8.4}$$

Para obter estas expressões, consideramos:

$$f_j(t) = f_j(0) - \int_0^t \left[\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right] ds,$$

para quase todo $s \in [0,T]$,

e vou estudar,

$$\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right);$$

temos então,

$$\left|\nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right|$$

$$\leq |\nabla_A u(s)|\, |u(s)|\, |x| \left|\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right| \leq |\nabla_A u(s)|\, |u(s)|\, |x|\, C;$$

$\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) \to 1$-pontualmente (há dominação por uma função somável).

Convergência dominada no espaço:

$$\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x),$$

é uma função mensurável de $s \in [0,T]$.

Obtemos ainda, (atendendo a Cauchy-Schwartz),

$$\left|\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right|$$

$$\leq \int |\nabla_A u(s)|\, |u(s)|\, |x| \left|\eta\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \int |\nabla_A u(s)| \, |u(s)| \, |x| \\
&\leq C \left(\int |\nabla_A u(s)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |u(s)|^2 |x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|u(s)\|_{H_A^1} \|u(s)\|_X \\
&\leq C \quad \text{sobre } [0,T].
\end{aligned}
$$

Convergência dominada no tempo:

$$
\int_0^t \left[\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x)\, \eta \left(\frac{|x|^2}{j^2} \right) \right] ds \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t \left[\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x) \right] ds,
$$

sendo

$$
\operatorname{Im} \int \nabla_A u(s) \cdot (\overline{u}(s)\, x) \text{ uma função integrável em } [0,T].
$$

Portanto, obtemos a expressão pretendida (8.4).

Tendo em conta as expressões (8.3) e (8.4), concluo que $\|u\|_X$ é uma função contínua.

Uma vez que u é uma função contínua de valores em H_A^1, um raciocínio simples diz-nos que $u \in C([0, T^*(u_0)), X)$.

Agora, a expressão (8.3) é reforçada em continuidade, e a expressão (8.4) diz-nos que

$$
\begin{aligned}
& f \text{ é } C^1, \text{ e} \\
f'(t) &= -\operatorname{Im} \int \nabla_A u(t) \cdot (\overline{u}(t)\, x), \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)).
\end{aligned}
$$

9. Quarta Etapa (final da demonstração)

Seja $u_0 \in X$. Para j inteiro positivo, definamos ψ_j, f_j como na etapa anterior,

$$\psi_j(x) = \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3;$$

$$f_j(t) = \frac{1}{2}\int \psi_j(x)\,|u(t,x)|^2\,dx, \qquad \forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

A equação (6.2) aplica-se a f_j, obtendo-se

$$\begin{aligned} f_j'(t) &= -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{u}(t)\,\nabla\psi_j\right) \\ &= -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{u}(t)\,x\right)\gamma_1(j,x), \quad \forall t \in [0, T^*(u_0)), \end{aligned} \tag{9.1}$$

onde, na determinação de γ_1, temos em conta que:

$$\nabla\psi_j = x\left[\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right) + 2\frac{|x|^2}{j^2}\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]$$

e portanto,

$$\gamma_1(j,x) = 2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2} + \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right),$$

donde,

$$f_j'(t) = -\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{u}(t)\,x\right)\left[2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2} + \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right].$$

Também a equação (6.7) se aplica a f_j, tendo-se:

$$
\begin{aligned}
f_j''(t) &= -\frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \Delta^2\psi_j + 2\int \left(D^2\psi_j\right)(\nabla_A u(t)) \cdot \overline{\nabla_A u(t)} + \\
&\quad +2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi_j \times B + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\Delta\psi_j \\
&= -\frac{1}{2}\int |u(t)|^2 \gamma_2(j,x) + 2\int \gamma_3(j,x)(\nabla_A u(t))\cdot\overline{\nabla_A u(t)} + \\
&\quad -4\,\mathrm{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{iAu(t)}\right)\gamma_1(j,x) + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(t)|^{p+1}\gamma_4(j,x),
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

$\forall t \in [0, T^*(u_0))$, onde

$$\gamma_1(j,x) = 2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2} + \xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right),$$

$$\gamma_2(j,x) = \Delta^2\psi_j,$$

$$\gamma_3(j,x) = D^2\psi_j,$$

$$\gamma_4(j,x) = \Delta\psi_j.$$

Falta ainda verificar que

$$2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi_j\times B = -4\,\mathrm{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\left(\overline{iAu(t)}\right)\gamma_1(j,x).$$

Tenhamos em conta que $\nabla\psi_j = \gamma_1(j,x)\,x$. Obtemos então,

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\nabla\psi_j\times B \\
&= 2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\gamma_1(j,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot(bx_2e_1 - bx_1e_2)\,\gamma_1(j,x)\\
&= -4\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot\frac{b}{2}(x_1e_2 - x_2e_1)\,\gamma_1(j,x)\\
&= -4\,\mathrm{Im}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot e_\varphi\frac{b}{2}\rho\gamma_1(j,x)\\
&= -4\,\mathrm{Re}\int \overline{u}(t)\,\nabla_A u(t)\cdot A(-i)\,\gamma_1(j,x)\\
&= -4\,\mathrm{Re}\int \nabla_A u(t)\cdot\overline{iAu(t)}\gamma_1(j,x).
\end{aligned}
$$

Na expressão (9.2), γ_1, γ_2, γ_4 são funções C^∞ de valores reais, γ_3 é uma função C^∞, matriz 3×3. Todas elas têm suporte compacto são limitadas uniformemente em j. Quando $j\to\infty$, registam-se as seguintes convergências pontuais:

$\gamma_1\to 1$, $\gamma_2\to 0$, $\gamma_3\to$ matriz identidade, $\gamma_4\to 3$.

Agora integramos a expressão (9.2) (usamos a expressão (9.1) para obter $f_j'(0)$), e obtemos

$$
f_j(t) = f_j(0) - \mathrm{Im}\int \nabla_A u_0\cdot(\overline{u}_0 x)\,\gamma_1(j,x)\,t +
$$

$$
+\int_0^t \Bigg[(t-s)\cdot\Bigg(-\frac{1}{2}\int |u(s)|^2\gamma_2(j,x) + 2\int \gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot\overline{\nabla_A u(s)}+
$$

$$
-4\,\mathrm{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x) + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x)\Bigg)\Bigg]\,ds,
$$

$$
\forall t\in[0,T^*(u_0)).
$$

Fixamos t e façamos $j\to\infty$. A partir da Convergência Monotona obtemos $f_j(t)\to f(t)$, $f_j(0)\to f(0)$, onde f é definida pela expressão (5.1).

A partir da Convergência Dominada temos

$$\operatorname{Im}\int \nabla_A u_0 \cdot (\overline{u}_0 x)\,\gamma_1(j,x) \to \operatorname{Im}\int \nabla_A u_0 \cdot (\overline{u}_0 x),$$

pois

$$\left|\nabla_A u(t)\cdot(\overline{u}(t)\,x)\left[2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2}+\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]\right|$$

$$\leq |\nabla_A u(t)|\,|\overline{u}(t)\,x|\left|\left[2\xi\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\xi'\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\frac{|x|^2}{j^2}+\xi^2\left(\frac{|x|^2}{j^2}\right)\right]\right|$$

$$\leq |\nabla_A u(t)|\,|\overline{u}(t)\,x|\,C;$$

portanto,

$$\operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot(\overline{u}(t)\,x)\,\gamma_1(j,x) \to \operatorname{Im}\int \nabla_A u(t)\cdot(\overline{u}(t)\,x),$$

e, particularizando-se, obtem-se a expressão pretendida.

Considerando agora, o termo da integranda do tempo, aplicamos o Teorema da Convergência Dominada, primeiro à variável espaço x, depois à variável tempo s (a dominação da variável tempo vem de $u \in C([0,T^*(u_0)),X)$), e concluimos que este termo tende para

$$\int_0^t (t-s)\left[2\int |\nabla_A u(s)|^2 - 4\operatorname{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)+\right.$$

$$\left.+3\alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\right]ds.$$

Para obter tal resultado, vamos estudar a expressão:

$$\int_0^t (t-s)\left[-\frac{1}{2}\int |u(s)|^2 \gamma_2(j,x) + 2\int \gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(s)} + \right.$$

$$\left. -4\,\mathrm{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x) + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x)\right] ds.$$

Temos que,

$$\left||u(s)|^2 \gamma_2(j,x)\right| \leq |u(s)|^2 |\gamma_2(j,x)| \leq |u(s)|^2 C;$$

$$\left|\gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot\overline{\nabla_A u(s)}\right| \leq |\gamma_3(j,x)|\left|\nabla_A u(s)\,\overline{\nabla_A u(s)}\right|$$

$$\leq C\,|\nabla_A u(s)|\left|\overline{\nabla_A u(s)}\right|;$$

$$\left|\nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x)\right| \leq |\nabla_A u(s)|\,|Au(s)|\,|\gamma_1(j,x)|$$

$$\leq |\nabla_A u(s)|\,|Au(s)|\,C;$$

$$\left||u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x)\right| \leq |u(s)|^{p+1}|\gamma_4(j,x)| \leq |u(s)|^{p+1} C,$$

e, portanto (tendo em conta que $\gamma_2 \to 0$, $\gamma_3 \to$ matriz identidade, $\gamma_1 \to 1$, $\gamma_4 \to 3$, quando $j \to \infty$), obtemos

$$\int |u(s)|^2\gamma_2(j,x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$$\int \gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot\overline{\nabla_A u(s)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int |\nabla_A u(s)|^2;$$

$$\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right);$$

$$\int |u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 3\int |u(s)|^{p+1}.$$

Aplicamos convergência dominada no espaço, para obter convergência pontual no tempo. Virá então:

$$\int_0^t (t-s)\left[-\frac{1}{2}\int |u(s)|^2 \gamma_2(j,x) + 2\int \gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot \overline{\nabla_A u(s)} + \right.$$

$$\left. -4\operatorname{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x) + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x)\right] ds$$

$$\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t (t-s)\left(2\int |\nabla_A u(s)|^2 - 4\operatorname{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right) + \right.$$

$$\left. + 3\alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\right) ds.$$

Temos ainda, (tendo em conta a desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\left\||u|\right\|_{L^{p+1}} \le C\left\|u\right\|_{H^1_A},$$

e $u \in C\left([0, T^*(u_0)), X\right))$, que

$$\left|(t-s)\left(-\frac{1}{2}\int |u(s)|^2 \gamma_2(j,x) + 2\int \gamma_3(j,x)\left(\nabla_A u(s)\right)\cdot\overline{\nabla_A u(s)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. -4\operatorname{Re}\int \nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)\gamma_1(j,x) + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}\gamma_4(j,x)\right)\right|$$

$$\le |t-s|\times\left(\frac{1}{2}\int |u(s)|^2 |\gamma_2(j,x)| + 2\int |\nabla_A u(s)|^2 |\gamma_3(j,x)| + \right.$$

$$\left. +4\int |\nabla_A u(s)|\,|Au(s)|\,|\gamma_1(j,x)| + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1}|\gamma_4(j,x)|\right)$$

$$\le \left(|t|\frac{1}{2}\int |u(s)|^2 C + 2\int |\nabla_A u(s)|^2 C + \right.$$

$$\left. +4\int |\nabla_A u(s)|\,|Au(s)|\,C + \alpha\frac{p-1}{p+1}\int |u(s)|^{p+1} C\right)$$

$$\leq C|t|\left(\|u(s)\|_{L^2}^2+\|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2+\|\nabla_A u(s)\|_{L^2}\|Au(s)\|_{L^2}+\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right).$$

$$\leq C|t|\left(\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\|\nabla_A u(s)\|_{L^2}^2+\|Au(s)\|_{L^2}^2+\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C|t|\left(2\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\|u(s)\|_X^2+\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right)$$

$$\leq C|t|\left(3\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\|u(s)\|_X^2+C\|u(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right)$$

$$\leq C|t|\left(3\max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_{H_A^1}^2+\max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_X^2+\max_{0\leq s\leq t}\|u(s)\|_{H_A^1}^{p+1}\right)\leq C,$$

independente de s e de j.

Virá agora, que

$$\begin{aligned}&\int_0^t(t-s)\left(2\int|\nabla_A u(s)|^2+\right.\\&\left.-4\operatorname{Re}\int\nabla_A u(s)\cdot\left(\overline{iAu(s)}\right)+3\alpha\frac{p-1}{p+1}\int|u(s)|^{p+1}\right)ds\\&\quad=\int_0^t(t-s)\,4N(u(s))\,ds.\end{aligned}$$

Relembremos que,

$$N(v)=\frac{1}{2}\int|\nabla v|^2-\frac{b^2}{8}\int\rho^2|v|^2+\frac{3}{4}(p-1)\frac{\alpha}{p+1}\int|v|^{p+1},$$

onde

$$\int|\nabla v|^2=\int|\nabla_A v|^2+\frac{b^2}{4}\int\rho^2|v|^2-2\operatorname{Re}\int\nabla_A v\cdot\overline{iAv}.$$

Portanto, concluimos que

$$f(t) = f(0) - \operatorname{Im} \int \nabla_A u_0 \cdot (\overline{u}_0 x)\, t + \int_0^t (t-s)\, 4N(u(s))\, ds,$$
$$\forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

Assim, sendo $u \in C([0, T^*(u_0)), X)$, obtemos finalmente que f é C^2 e

$$f''(t) = 4N(u(t)), \quad \forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

Capítulo IV

Explosão em tempo finito

Após o que foi exposto no Teorema 5.1, um raciocínio por concavidade, verifica imediatamente explosão em tempo finito:

Suponha-se $p \in [1 + \frac{4}{3}, 5)$, $\alpha \in (-\infty, 0)$, $H(u_0) < 0$. (Para tais valores de p e α, existem estados em X com energia negativa: basta considerar $u_0 = sv(\widehat{x})$, onde $v \in \mathcal{D}$, $v \neq 0$, e s é suficiente grande, de maneira a prevalecer o sinal da energia potencial).

Obtemos que,

$$
\begin{aligned}
N(v) &= \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 - \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \frac{3}{4}(p-1)\frac{\alpha}{(p+1)}\int |v|^{p+1} \\
&= \frac{1}{2}\int |\nabla v|^2 - \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \frac{3}{4}(p-1)W(v) \\
&= \frac{1}{2}\int |\nabla_A v|^2 + \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \\
&\qquad - \operatorname{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv} - \frac{b^2}{8}\int \rho^2 |v|^2 + \frac{3}{4}(p-1)W(v) \\
&= H(v) - W(v) - \operatorname{Re}\int \nabla_A v \cdot \overline{iAv} + \frac{3}{4}(p-1)W(v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= H(v) + \left[\frac{3}{4}(p-1) - 1\right] W(v) - \mathrm{Re} \int \nabla_A v \cdot \overline{iAv} \\
&\leq H(v) - \mathrm{Re} \int \nabla_A v \cdot \overline{iAv} \\
&= H(v) - \mathrm{Re} \int (\nabla v + iAv) \cdot A\overline{v}(-i) \\
&= H(v) - \mathrm{Im} \int (\nabla v + iAv) \cdot A\overline{v} \\
&= H(v) - \mathrm{Im} \int \overline{v} \nabla v \cdot A - \mathrm{Im} \int i |v|^2 |A|^2 \\
&= H(v) - \mathrm{Im} \int \overline{v} \nabla v \cdot A - \int |v|^2 |A|^2 .
\end{aligned}
$$

Definimos

$$H_{A,0}^1 = \left\{ v \in H_A^1 : \ v \text{ é invariante por rotações em torno do eixo dos } zz \right\}.$$

(É claro que $H_{A,0}^1$ é invariante pelo fluxo da equação).

Sobre $H_{A,0}^1$ verifica-se:

$$\int \overline{v} \nabla v \cdot A = 0;$$

$$N(v) \leq H(v) - \int |v|^2 |A|^2 \leq H(v).$$

Por conseguinte, se $u_0 \in X \cap H_{A,0}^1$,

$$N(u(t)) \leq H(u(t)) = H(u_0).$$

Desta forma, e considerando a conservação da energia, obtemos

$$f''(t) = 4N(u(t)) \leq 4H(u_0), \quad \forall t \in [0, T^*(u_0)).$$

Portanto, se $T^*(u_0) = \infty$, $f(t)$ tornar-se-á negativa para t suficientemente grande. Consequentemente, $T^*(u_0) < \infty$.

Logo, temos o seguinte Corolário:

Corolário 9.1. *Suponhamos que* $p \in [1 + \frac{4}{3}, 5)$, $\alpha \in (-\infty, 0)$, $u_0 \in X \cap H^1_{A,0}$, $H(u_0) < 0$. *Então, a solução dada pelo Teorema 4.1 explode num tempo finito.*

Capítulo V

Alguns resultados gerais

Neste pequeno Capítulo fazemos referência a alguns resultados que foram usados nas últimas etapas da demonstração do Teorema 5.1, tais como a Convergência Monotona, a Convergência Dominada e a Desigualdade de Gronwall.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Temos:

10. Convergência Monotona de Beppo Levi

Teorema 10.1. *Seja* (f_n) *uma sucessão crescente de funções de* L^1*que verifica* $\sup_n \int f_n < \infty$.

Então, (f_n) *converge p.q.t.p. em* Ω *para um limite denotado por* $f(x)$.

Além disso, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

11. Convergência Dominada

Teorema 11.1. *Seja* (f_n) *uma sucessão de funções de* L^1*. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.q.t.p. em* Ω*;*

(b) existe uma função $g \in L^1$ tal que, para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

12. Desigualdade de Gronwall

Lema 12.1. *Seja $T > 0$, $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda \geq 0$ p.q.t.p. e C_1, $C_2 \geq 0$.*

Seja $\varphi \in L^\infty(0,T)$, $\varphi \geq 0$ p.q.t.p., tal que

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\,\varphi(s)\,ds, \quad \text{para quase todo } t \in (0,T).$$

Então, teremos,

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)\,ds\right), \quad \text{para quase todo } t \in (0,T).$$

Capítulo VI

Bibliografia

[1] BERESTYCKI H. & CAZENAVE T., Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non-linéaires, C. r. Acad.Sci. Paris, 293, 489-492 (1981).

[2] BRÉZIS H., Analyse fonctionnelle, Masson Editeur, Paris (1983).

[3] CAZENAVE T., An introduction to nonlinear Schrödinger equations. Textos de Métodos Matemáticos, 22, IMUFRJ, Rio de Janeiro (1989).

[4] CAZENAVE T. & ESTEBAN M., On the stability of stationary states for nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, Mat. Apl.Comp, 7,155-168 (1988).

[5] CAZENAVE T. & HARAUX A., Introduction aux problèmes d'evolution semilinéaires, Mathematiques & Applications, Ellipses-Editions (1990).

[6] ESTEBAN M. & LIONS P. L., Stationary solutions of nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, in Partial Differential Equations

and the Calculus of Variations, (edited by COLOMBINI F. et al.), 401-409, Birkhäuser, Boston (1989).

[7] GLASSEY R., On the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations, J. math. Phys., 18, 1794-1797 (1977).

[8] GONÇALVES RIBEIRO J. M., Finite time blow-up for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 16, no 11, 941-948 (1991).

[9] GONÇALVES RIBEIRO J. M., Instability of symmetric stationary states for some nonlinear Schrödinger equations with an external magnetic field, Ann.Inst. Henri Poincaré, 54, no 4, 403-433 (1991).

[10] STRAUSS W. A., The nonlinear Schrödinger equation, in Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations (edited by DE LA PENHA-MEDEIROS), 452-465, North Holland, Amsterdam (1978).