Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P. e Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

Os Padrões no Ensino e Aprendizagem Álgebra[1]

Isabel Vale, LIBEC, Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
Pedro Palhares, LIBEC, Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho
Isabel Cabrita, CIDTFF, Universidade de Aveiro
António Borralho, CIEP, Universidade de Évora

1. Introdução

A competência em álgebra é bastante útil para o estudante na sua vida de todos os dias e para prosseguimento de estudos. Deste modo, todos devem aprender álgebra (NCTM, 2000). No entanto, o seu estudo está fortemente ligada à manipulação simbólica e à resolução de equações. Mas a álgebra é mais do que isso. Os alunos precisam de entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Muitos desses conceitos algébricos podem ser construídos partindo das experiências com números; contudo a álgebra também está fortemente ligada à geometria e ao tratamento de dados.

Vários investigadores (e.g. Burton et al, 1992; Reys et al., 1995) e organizações (e.g. NCTM, 1991, 2000) começaram a defender que a exploração de padrões ajuda os alunos a desenvolver as suas capacidades de raciocínio algébrico. Os padrões e as regularidades desempenham um papel importante no ensino da matemática, sobretudo a partir do trabalho de Lynn Steen (1988) quando chamou à matemática a ciência dos padrões.

Com base nesta perspectiva iremos abordar o ensino e aprendizagem da álgebra partindo da procura e identificação de padrões.

2. Conceito de padrão

Quando nos confrontamos com o termo padrão, pensamos, de imediato, em padrões visuais tais como os que se vêem nos tecidos, papel de parede e peças de arte. Mas o conceito de padrão não se esgota apenas nestes exemplos.

Mais genericamente, *padrão* é usado quando nos referimos a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades.

[1] Agradecemos aos restantes elementos do grupo dos Padrões, Ana Barbosa, Lina Fonseca, José Portela, Natália Marques e Teresa Pimentel a contribuição dada na leitura e correcção deste documento.

Em todos os aspectos da vida somos atraídos para as regularidades e muitas vezes tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões. Como refere Storr (1992) o que é universal é a propensão humana para criar ordem no caos. Este aspecto é também visível na matemática. Como dizem Davis e Hersh (1995), "O próprio objectivo da Matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão" (p. 167). Balmond (2000), por sua vez, afirma que "A essência da Matemática consiste em procurar padrões. O nosso espírito parece estar estruturado para procurar relações e sucessões. Procuramos a ordem escondida" (p. 157). Por exemplo, os números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... parecem dispostos ao acaso, No entanto há uma regra que nos permite determinar o número de Fibonacci seguinte (do caos aparente para a ordem).

Consultando o dicionário *Webster* (s/d) sobre o que é um padrão temos:

> Um padrão é uma configuração natural ou casual. Ou é uma amostra de tendências, actos ou características observáveis de uma pessoa, coisa, grupo ou instituição. Quando reconhecemos um padrão num acontecimento ou coisa podemos fazer previsões baseadas nesse padrão. Observando as características num item aquelas podem ser repetidas de modo semelhante ou idêntico noutros itens. Como há uma regularidade, um padrão, de uma ocorrência, podemos adivinhar o futuro. Ou mais simplesmente, padrão é uma característica(s) observada num item que se pode repetir de modo idêntico ou semelhante noutro item. *(tradução livre)*

Esta ideia, apesar de traduzir a noção intuitiva de regularidade parece um pouco redutora e não esgota toda todos os tipos de padrão. Jean Orton (1999) refere que os investigadores não têm sido capazes de arranjar uma definição satisfatória para padrão e acrescenta que a ideia de repetição é importante, mas que o conceito de padrão em geometria não está confinado apenas à ideia de repetição, incluindo ideias relacionadas com o reconhecimento de formas, congruência e semelhança.

Por exemplo, o arquitecto Christopher Alexander (1978) define padrão como sendo algo que descreve um problema que é recorrente no meio ambiente, que descreve, também, uma solução para esse problema, de tal forma que se pode usar essa solução um milhão de vezes, sem o fazer nunca da mesma forma. Esta é uma definição possível para a construção de edifícios.

O conceito de padrão tem-se revelado bastante fluído, com definições muito díspares, consoante a utilização que é pretendida. Uma definição possível, em matemática, é a dada por Grunbaum & Shepard (1987). Para eles, chama-se *motivo* a qualquer conjunto não vazio do plano; um padrão monomotivo com motivo M é uma família não vazia $\{M_i, i \in I\}$ de conjuntos no plano, etiquetado pelo conjunto-índice I, com as seguintes condições:

P1 – Os conjuntos M_i são disjuntos dois a dois;
P2 – Cada M_i é congruente com M e diz-se uma cópia de M;
P3 – Para cada par M_i, M_j de cópias do motivo há uma isometria, do plano, que transforma o padrão monomotivo em si próprio e M_i em M_j.

No entanto, esta não é uma definição que esgote o significado de padrões na matemática. Como esclarece Devlin (2002):

> Foi só nos últimos vinte anos, mais ou menos, que surgiu a definição de matemática que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos: a matemática é a *ciência dos padrões*. O que o matemático faz é examinar "padrões" abstractos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Estes padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das actividades mais ocultas da mente humana. Com o objectivo de transmitir o conceito moderno de matemática, este livro aborda seis temas genéricos, abrangendo padrões de contagem, padrões de raciocínio e de comunicação, padrões de movimento e mudança, padrões de forma, padrões de simetria e regularidade e padrões de posição (topologia). (pág. 9)

Das ideias expressas pelos vários autores referidos, podemos inferir que ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem.

3. Padrões na natureza e nas outras ciências

No âmbito da Sociologia, *padrão cultural* é entendido como um compromisso partilhado e utilizado, repetidas vezes, pelos indivíduos que o assumiam. Mas, nesta medida, opõe-se a *norma*, enquanto regra externamente imposta, e não sujeita a discussão, que é forçoso cumprir.

Na Música, *padrão* pode ser visto como repetição de curtas passagens rítmicas ou melódicas em várias partes de uma composição, que pode acontecer por transformações geométricas – simetria, rotação ou translação – como é o caso de algumas composições de Bach. Também na Poesia os *Lusíadas* seguem um modelo de 8 versos, com 10 sílabas métricas cada, que se regem por um padrão constante e bem definido do tipo – abababcc.

Nas *Competências Essenciais* (ME, 2000) para Educação Física, lê-se na *Introdução* – "Para além disso, a aprendizagem de habilidades técnicas pressupõe a produção ou recriação de padrões de movimento, que o aluno tem identificar e interpretar a partir da informação prestada verbal e ou visualmente" (p. 221). Também ao nível da Educação Visual pode ler-se "Conceber objectos gráficos aplicando regras da comunicação visual – composição, relação de forma–fundo, módulo–padrão." (p. 158). Também ao nível da Geografia, o cidadão geograficamente competente é aquele que possui o domínio das destrezas espaciais e que o demonstra ao ser capaz de visualizar espacialmente os factos, relacionando-os entre si, de descrever correctamente o meio em que vive ou trabalha, de elaborar um mapa mental desse meio, de utilizar mapas de escalas diversas, de compreender padrões espaciais e compará-los uns com os outros, de se orientar à superfície terrestre" (p. 107). "A utilização correcta do vocabulário geográfico para explicar os padrões de distribuição dos fenómenos geográficos, as suas alterações e inter-relações" (id: 108). "Identificar questões/temas geográficos sobre os diferentes padrões da distribuição da população e do povoamento." (p.118).

Relacionados com o conceito matemático de padrão também se encontram os subjacentes a 'padrão estrelar', 'padrão das nuvens' (nuvens com distâncias regulares são idênticas entre si), 'padrão do dia e da noite', 'padrão das marés', 'padrão das dunas', 'padrão de relações vegetais', 'padrão dos componentes do DNA animal', 'padrões migratórios', 'padrão de produtividade', ….

Vários fenómenos ou ocorrências naturais ou não, explicam-se, através de padrões matemáticos. É o caso do padrão da pelagem dos animais. Também a disposição das folhas no caule de algumas plantas, como o aipo ou a tabaqueira segue os números de Fibonacci. O mesmo se passa com as espirais do ananás ou da pinha, que se que se relacionam com a série de Fibonacci. Também num girassol se podem encontrar relações com a série de Fibonacci. Nas asas das borboletas podem-se identificar padrões geométricos, o mesmo acontecendo nas plumas do pavão e nas células de uma colmeia. A couve-flor é um exemplo real de um fractal – padrão decrescente. Uma estrela, ao sucumbir, produz dois clarões que são simétricos. Assim como é possível identificar rotações e simetrias numa maçã.

4. Padrões e álgebra

Os padrões são a essência da matemática e a linguagem na qual é expressa. A matemática é a ciência de analisar e sintetizar tais padrões (Sandefur e Camp, 2004). Considerar a matemática a ciência dos padrões não será uma má descrição. Não só porque os padrões se encontram em várias formas na vida de todos os dias e ao longo da matemática escolar mas porque também podem constituir um tema unificador.

Os professores de matemática estão conscientes do facto de que há, por um lado, menos interesse na matemática e, por outro, um declínio na capacidade matemática dos alunos. Infelizmente, talvez, porque muitos alunos vêem a matemática como uma mera colecção de procedimentos a aprender. Como Devlin (1998) refere:

> (...) ao longo dos anos a matemática tornou-se cada vez mais e mais complicada, as pessoas concentraram-se cada vez mais nos números, fórmulas, equações e métodos e perderam de

> vista o que aqueles números fórmulas e equações eram realmente e porque é que se desenvolveram aqueles métodos. Não conseguem entender que a matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras arcaicas mas sim a compreensão de padrões — padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (p. 206)

Quando apelamos aos padrões no ensino da matemática é normalmente porque queremos ajudar os alunos a aprender uma matemática significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências. O estudo de padrões vai de encontro a este aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões.

O que nos ocorre quando ouvimos o termo álgebra? Para muitos *álgebra* significa, vagamente, um conjunto de letras, números e operações separados por um sinal de igual ou por outros, a fórmula resolvente do 2.º grau, ou apenas resolver equações, sistemas de equações, descobrir o valor desconhecido, ou outro tipo de actividades onde se utilize incógnitas e letras. Esta perspectiva não se coaduna com as orientações curriculares expressas nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) ao sugerirem que a álgebra deve atravessar o currículo JI-12 e que os alunos devem aprender matemática de um modo significativo com base nos seus conhecimentos matemáticos previamente adquiridos.

Muitas daquelas pessoas ficariam surpreendidas por saber que a álgebra pode começar, simplesmente, pelo estudo de padrões desde o Jardim de Infância e o 1.º Ciclo do Ensino Básico. O que se passa no ensino tradicional é que este modo natural de pensar (no sentido em que é uma actividade que está na natureza humana) se perde com o avançar na escolaridade, ao privilegiar os procedimentos e as rotinas que é aquele que as pessoas mais recordam dos tempos que passaram pela escola. Mais do que impelir os alunos para a álgebra simbólica formal deve-se fomentar o pensamento algébrico levando os alunos a comunicar os seus pensamentos recorrendo às suas próprias palavras ou à sua própria simbologia (Herbert e Brown, 1997).

Os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões. Neste sentido podemos verificar que a norma *Padrões e Relações*, no nível JI-4 das Normas (NCTM,1991) foi substituída, nas actuais Normas de 2000 (NCTM, 2000), pela norma *Álgebra para JI-12*, que envolve: (1) compreender de padrões, relações, e funções; (2) representar e analisar situações; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender as relações quantitativas; e (4) analisar as mudanças em vários contextos. Existem relatos de várias experiências realizadas no pré-escolar de descoberta de padrões e relações matemáticas enquanto as crianças manipulam materiais no meio que as rodeia (e.g. Taylor-Cox, 2003; Bay-Williams, 2001; Yackel, 1997; Palhares, 2000; Curcio e Schwartz, 2001).

Nem sempre tem sido muito claro que conceitos algébricos deverão ser abordados no ensino elementar. Há autores que acreditam que se pode preparar os alunos desde os níveis elementares para diferentes perspectivas da álgebra — álgebra como modelação, álgebra como procura de padrões e álgebra como o estudo de estruturas — permitindo-lhes construir conhecimento e modos de raciocinar (NCTM, 2000). Esta perspectiva faz com que a ênfase deva ser no desenvolvimento do raciocínio dos alunos e não na necessidade de se discutir quais os conteúdos de álgebra a contemplar no currículo elementar (Yackel, 1997).

A álgebra pode ser definida como um sistema matemático utilizado para generalizar algumas operações matemáticas permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números. Nesta conformidade está Tall (1992) quando refere que a álgebra é muitas vezes vista como "a generalização da aritmética" partindo da procura de padrões numéricos.

Uma ideia que sobressai destas afirmações sobre a álgebra é a de generalização, o que faz com que pensemos nela como um dos elementos integrantes do pensamento matemático. A generalização surge com o reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações. Como referem os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) os padrões são a base do pensamento algébrico e o trabalho com padrões convida os estudantes a identificar relações e a fazer generalizações. Neste sentido, devem propor-se actividades exploratórias que recorram a materiais manipuláveis diversificados para identificar, criar e continuar padrões e lidar com as diferentes propriedades das relações, em particular as que envolvem conceitos de proporcionalidade, que são aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico. As actividades que envolvem o trabalho com padrões numéricos e com relações numéricas antes dos conceitos de álgebra fazem parte da pré-álgebra. Com a análise das regras e padrões os alunos desenvolvem um forte sentido do número ao mesmo tempo que desenvolvem o conceito de função. Os padrões lineares são normalmente os mais utilizados nesta abordagem com alunos do ensino básico, podendo ser utilizados também padrões não lineares, como por exemplo os que envolvam quadrados de números.

Uma questão que será interessante colocar, na abordagem da álgebra recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar a diversidade de padrões numéricos que lhes são propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas. Esta é uma questão importante uma vez que encontrar termos numa sequência é normalmente o primeiro passo para chegar à álgebra. A questão é saber se os alunos conseguem encontrar a regra que conduz ao termo geral e como o fazem..

Há estudos (e.g. APU, s/d) que referem que: (1) encontrar termos numa sequência torna-se progressivamente mais difícil, para os alunos, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados; (2) muitos alunos têm mais dificuldade em explicar um padrão do que continuá-lo; e (3) geralmente há mais alunos a explicar as regras, detectadas nas sequências, oralmente do que por escrito.

Outro aspecto importante ligado aos padrões é a resolução de problemas, uma vez que a descoberta de um padrão é uma poderosa estratégia de resolução de problemas. Podemos dizer que a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é um modo promissor de exploração da álgebra, sobretudo se se utilizarem problemas significativos para os alunos onde o uso da álgebra seja relevante. Segundo Herbert e Brown (1997) o processo investigativo envolve três fases:

(1) Procura de padrões — extrair a informação relevante;
(2) Reconhecimento do padrão, descrevendo-o através de métodos diferentes — a análise dos aspectos matemáticos; e
(3) Generalização do padrão – a interpretação e aplicação do que se aprendeu.

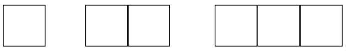
Estes investigadores efectuaram um estudo com alunos do 6.º ano em que utilizaram problemas de contexto real onde pressupunham estratégias de resolução diversificadas tais como dramatização, utilização de objectos, tabelas, diagramas, desenhos e trabalho em grupo. Qualquer que fosse a estratégia escolhida pelos alunos, utilizaram sempre o processo investigativo que aprenderam previamente para procurar padrões e generalizar. No final desta unidade, os investigadores verificaram que esta abordagem teve um impacto positivo nas capacidades dos alunos para generalizarem uma regra partindo de situações concretas, o que não é mais do que pensar algebricamente, além de terem ganho confiança nas suas capacidades para descobrir uma fórmula.

Vale e Pimentel (2006) têm trabalhado a nível da formação inicial de professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico algumas tarefas baseadas em padrões que têm potencialidades para estabelecer conexões entre os padrões, a resolução de problemas, a geometria, o número e álgebra podendo serem adaptadas a vários níveis de ensino. A título de exemplo apresentamos a seguir algumas dessa tarefas:

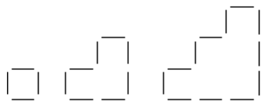
1.Descubra os dois termos seguintes em cada uma das sequências

1.1. 1, 2, 4, 7, 11,…

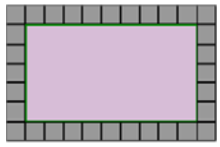
1.2. 3, 6, 11, 18, 27, ...

1.3.  , …

2. Investigue a relação entre a ordem da figura e o numero total de segmentos unitários usados no desenho.



3. A *Moldarte* faz molduras em espelhos rectangulares formadas por azulejos quadrados, como mostra a figura. Explique por palavras, recorrendo a números, a tabelas, etc., o número de azulejos que são necessários para colocar à volta de um espelho com quaisquer dimensões. Formule uma conjectura baseada nos resultados encontrados. Tente chegar a uma generalização.
Elabore um relatório escrito sobre o trabalho realizado.



Neste momento parece que podemos considerar o termo padrão numérico ligado à ideia de algum tipo de regularidade (e.g. repetição, recursiva) na qual se possa identificar uma lei que permita continuar a sequência numérica e chegar à generalização. .

5. Os Padrões e álgebra nos currículos do pré-escolar e do ensino básico

Mas padrões, porquê? Algumas ideias provenientes da investigação de Orton (1999) sugerem que os padrões:

- podem contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da Matemática;
- permitem o estabelecimento de conexões matemáticas;
- atraem e motivam os alunos, porque apelam fortemente ao seu sentido estético e criatividade;
- permitem a promoção e desenvolvimento das capacidades e competências dos alunos;
- ajudam a desenvolver a capacidade de classificar e ordenar informação;
- permitem a compreensão da ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive.

Como refere Goldberg (2003) os padrões são um poderoso conceito em matemática e talvez por isso Mason et al. (1985) referem que durante os últimos anos o uso de padrões numéricos tornou-se um meio popular para chegar à generalização nos currículos de matemática. No entanto, a Álgebra tem sido, simultaneamente, uma porta e uma barreira para muitos alunos (Lott, 2000). Assim, o NCTM defende a álgebra para todos, começando-se a promover nos alunos o pensamento algébrico pensar algebricamente desde muito cedo, nos anos mais elementares, pois além de permitir que se ultrapassem muitos dos problemas que se poderiam detectar mais tarde, fornece também as bases necessárias para prosseguir com a aprendizagem da matemática mais avançada.

O raciocínio algébrico alicerça a aprendizagem dos alunos em muitos temas de matemática. Os *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000) referem que as ideias principais subjacentes ao raciocínio algébrico dos estudantes são: (1) padrões; (2) situações matemáticas e estruturas; (3) modelos de relações quantitativas; e (4) mudança.

Orton e Orton (1999) referem que a quantidade e a qualidade da aprendizagem dependem, entre outros, de dois factores em estreita relação: nível de dificuldade conceptual do assunto em estudo e a motivação e atitude do aluno. O grau de abstracção do aluno parece ser um elemento determinante da dificuldade conceptual e do interesse pelos padrões. Muitos estudantes parecem ter grande dificuldade em trabalhar com letras em vez de números. A passagem dos números para um maior grau de abstracção parece ser um dos grandes desafios a nível da educação matemática: a partir dos números dar sentido à letras.

Muitos investigadores acentuam a ideia de que a álgebra é a fonte de uma considerável confusão e atitude negativa de muitos alunos perante a Matemática (Cockcroft, 1982).

A aritmética é, intuitivamente, vista como sendo mas fácil do que a álgebra e assim parece natural que se introduzam os conceitos algébricos usando a generalização de conceitos matemáticos através de padrões numéricos. No entanto Tall (1992) alerta para alguns perigos que podem advir desta abordagem. Um problema típico neste contexto é pedir aos alunos para que continuem a sequência 2,5,8,11,... Como o homem é um grande detector de padrões, o aluno pode rapidamente ter a noção do *ritmo* de tal sequência e ver que cada termo se obtém adicionando 3 e calcular, sucessivamente, os termos seguintes: 2,5,8,11,14,17,20,... Deste modo o aluno está a utilizar uma lógica recursiva. Dificilmente, segundo Tall (1992) os alunos chegarão por este processo á fórmula. Este autor também defende que os meios informáticos (e.g. a programação, a folha de cálculo) podem dar uma ajuda na generalização e no significado atribuído às variáveis. Orton e Orton (1999) assumem que é possível começar a avaliar a abordagem da álgebra através dos padrões numéricos. Assumindo que a via dos padrões numéricos não elimina as dificuldades para a iniciação à álgebra, também Tall (1992) refere que uma abordagem recursiva pode ser um sério obstáculo para a descoberta da regra geral ou da fórmula. Elimina algumas dificuldades mas surgirão outras como em tudo o que envolve a aprendizagem. De qualquer forma, trata-se de um caminho, entre outros possíveis, para abordar a álgebra.

Vejamos algumas das ideias expressas nos documentos programáticos nacionais e internacionais ao nível do pré-escolar e ensino básico (JI-9).

5.1. As *Normas*

Antes de analisar qual a perspectiva dos documentos nacionais vejamos o que referem os *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000).

Este documento começa por referir que, tradicionalmente, o ensino da álgebra privilegia a manipulação simbólica para resolver equações e simplificar expressões. Deste modo a álgebra tem desempenhado um papel mais mecanicista do que desenvolver, nos alunos, o seu raciocínio matemático. Contrariando esta visão tradicional, os *Principles and Standards for school mathematics* (NCTM, 2000).pretendem mostrar que a álgebra é mais do que apenas manipulação simbólica e recomenda que todos os alunos JI-12 devem estudar álgebra, pois as competências em álgebra são importantes quer para a vida adulta quer na preparação pós-secundário. Ao abordar-se a álgebra ao longo do JI-12 está-se a contribuir para uma sólida preparação nos alunos. Por exemplo, experiências com padrões fornecem as bases para a compreensão do conceito de função; experiências com números e as suas propriedades fornecem os fundamentos para mais tarde trabalhar com símbolos e expressões algébricas: a aprendizagem destas situações permite aos alunos começar a formar as noções elementares sobre modelação matemática; experiências com actividades que envolvam padrões promovem a capacidade de generalização.

O Quadro 1 permite analisar, comparativamente, as expectativas para cada um dos níveis de escolaridade em relação à álgebra, propostas pelo NCTM (2000) e da importância que os padrões têm no desenvolvimento de competências em álgebra.

Quadro 1. Expectativas para a Norma Álgebra – NCTM (2000)

Norma - Álgebra			
Os programas JI - 9 devem levar todos os alunos a:	**Expectativas**		
	pre-K - 2	**3 - 5**	**6 - 8**
- compreender padrões, relações e funções;	- triar, classificar e ordenar objectos por tamanho, número e outras propriedades - reconhecer, descrever e continuar padrões tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e traduzir de uma representação para outra - analisar como os padrões de repetição e de	- descrever, continuar e generalizar padrões numéricos e geométricos - representar e analisar padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos	- representar, analisar e fazer generalizações com vários padrões usando tabelas, gráficos, palavras e quando possível regras simbólicas - relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação - identificar funções lineares e não lineares e comparar as suas

	crescimento são formados		propriedades através de tabelas, gráficos e equações
- representar e analisar as situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos,	- mostrar princípios e propriedades gerais das operações como seja a comutatividade, usando números específicos - usar representações concretas, pictoriais e verbais para desenvolver uma compreensão das notações simbólicas, inventadas ou convencionais	identificar propriedades tais como a comutativa, a associativa e a distributiva e usá-las para cálculos com números inteiros - representar a ideia de variável como uma quantidade desconhecida usando uma letra ou um símbolo - exprimir relações matemáticas usando equações	- desenvolver uma compreensão conceptual inicial dos diferentes usos de variável - explorar relações entre expressões simbólicas e gráficos de linhas, tomando especial atenção ao significado de intersecção e declive - usar álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas especialmente aqueles que envolvem relações lineares - reconhecer e gerar formas equivalentes para expressões algébricas simples e resolver equações lineares
- utilizar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;	- modelar situações que envolvam adição e subtracção de números inteiros, usando objectos, desenhos e símbolos	- modelar situações problemáticas com objectos e usar representações tais como gráficos, tabelas, e equações para tirar conclusões	- modelar e resolver problemas contextualizados usando diferentes representações tais como gráficos, tabelas e equações
- analisar as mudanças em contextos variados.	- descrever variações qualitativas tais como o aumento das alturas dos estudantes - descrever mudanças quantitativas tais como o aumento de 5 cm por ano das alturas dos alunos	- investigar como uma mudança numa variável se relaciona com a mudança numa segunda variável. - identificar e descrever situações com taxas de variação diferentes e compará-las	- usar gráficos para analisar a natureza das variações lineares

5.2. As orientações nacionais

5.2.1. A nível do pré-escolar

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar salientam a importância dos padrões como forma de desenvolver o raciocínio lógico (DEB, 1997). Também Barros e Palhares (2001) referem a sua contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico, chamando a atenção que pode ser um veículo para que as crianças generalizem localmente, já que não é de esperar que o façam globalmente, salientando, ainda, a sua importância para a resolução de problemas.

Assim, as razões habitualmente dadas para a introdução dos padrões no pré-escolar assentam, fundamentalmente, no desenvolvimento do raciocínio lógico. Contudo, Threlfall (1999) defende que existem duas razões para introduzir padrões de repetição no fim do pré-escolar: uma é que estes padrões funcionam como uma base familiar e concreta para explorar outros conteúdos (como exemplo refere a proposta de Liebeck de exploração da seriação); outra é que o trabalho com padrões de repetição servirá, no futuro, de suporte para a aprendizagem da Álgebra ou para a introdução de símbolos.

Baseando-nos neste conjunto de ideias, podemos sumariar que os padrões no pré-escolar servem propósitos imediatos de desenvolvimento do raciocínio lógico, propósitos laterais de exploração de outros conteúdos e propósitos de criação de uma base para a aprendizagem futura da Álgebra.

O tipo de padrões a desenvolver no pré-escolar tem por base a articulação das diferenças e das semelhanças, havendo uma componente de repetição com alternância que pode ser única (por exemplo, peça verde peça azul peça verde peça azul peça verde peça azul etc, que, de uma forma mais geral, podemos representar por ABABAB...), mas podendo também haver uma componente de progressão aritmética (ABAABAAAB...), ou uma componente de simetria (ABABBABA), ou ainda o acrescentar de uma segunda dimensão:

ABABAB
BABABA
ABABAB
....

Por outro lado, as características associadas ao padrão podem ser muito variadas, incluindo a cor (de que já se deu exemplo) mas também som, posição, forma, movimentos, etc. Assim, pode dizer-se que há diversidade de tipos de padrão e de possibilidades de concretização (Palhares e Mamede, 2002).

5.2.2. A nível do ensino básico

Vejamos o que os programas nacionais referem em relação a este aspecto. Neles podemos constatar que as referências mais recentes, em particular as competências essenciais, já defendem um ensino da álgebra desde o 1.º ciclo do ensino básico.

No programa de matemática do 1.º ciclo do ensino básico (DGEBS, 1990) o bloco com mais peso é o dos Números e Operações e, nele, não é feita qualquer referência em relação a variáveis nem à Álgebra. No entanto, a referência aos padrões é explícita neste bloco a partir do 2.º ano, onde se lê que os alunos devem “descobrir regularidades nas contagens de 5 em 5, 10 em 10” e “explorar e usar regularidades e padrões na adição e na subtracção”. Esta última também é referida no 3.º ano acrescentando a operação multiplicação. No bloco Forma e Espaço é feita referência aos padrões geométricos em particular no 3.º e 4.º anos onde é sugerido que os alunos devem "Desenhar frisos e rosáceas" e "Fazer uma composição a partir de um padrão dado".

No programa de matemática do 2.º ciclo do ensino básico (DGEBS, 1991) o tema Número e Cálculo ocupa cerca de 50 % dos temas tratados no 5.º ano e cerca de 33% no 6.º ano. Destaque-se que o conceito de variável não é trabalhado de forma clara, não havendo referência explícita aos padrões, mas com oportunidades diversas para a sua utilização ao longo do programa.

No Currículo Nacional do ensino básico - Competências Essenciais (DEB, 2001) é defendida a matemática como ciência dos padrões quando se refere que "a educação matemática tem o objectivo de ajudar a desocultar a matemática presente nas mais variadas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes nos modos como lidam com a matemática. Para isso é preciso destacar a especificidade da matemática nomeadamente como ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações". (p.58). A competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica inclui entre outros aspectos a "predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica" (p.57).

O tema Número e o Cálculo atravessa todos os ciclos do ensino básico (1.º, 2.º e 3.º). Refere-se, em particular, que deve ser desenvolvida nos alunos "a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem" (pág. 60).

O tema Álgebra e Funções inclui um conjunto de competências a serem desenvolvidas pelos alunos de todos os níveis e em particular são apresentadas competências especificas para os alunos do 3.º ciclo. Para todos os níveis menciona-se: "a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas nomeadamente em contextos numéricos e geométricos; e a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos" (pág. 66). Em relação ao 3.º ciclo, em particular, é referido "o reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas e a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos simples" (pág. 67).

Podemos constatar pelas ideias expressas que os padrões no ensino básico são um tema transversal a vários níveis de escolaridade e servem propósitos imediatos de diferentes conteúdos e em particular os propósitos de criação de uma base para a aprendizagem da Álgebra.

5. Reflexões finais

Apesar de, aparentemente, todos sabermos o que estamos a falar quando mencionamos o termo *padrões*, temos constatado que é um termo com uma multiplicidade de sentidos, mesmo quando restringimos apenas ao campo da matemática. Este é, para nós, um sinal da riqueza do conceito, que não deve ser esvaziado através de definições restritivas mas deve antes ser explorado na sua multiplicidade.

De uma forma ou de outra fica a ideia de que os padrões, em Matemática, estão associados à descoberta, à procura de relações para explicar aquilo com que nos vamos deparando. Por vezes, as intuições assumem um papel relevante e, estas, parecem ser mais importantes do que os próprios factos uma vez que existe a excitação de descobrirmos algo, e um padrão é um achado. De facto, de repente, as quantidades encaixam (há uma ordem, uma regularidade, …) e descobre-se uma relação. Mesmo que estejamos no campo da geometria não será necessário que esta relação seja geométrica, pois poderá ser uma relação de números ou de qualquer outros entes que não eram óbvios anteriormente.

Fica também a ideia de que associado aos padrões estará, sempre, algo relacionado com o emocional, pois existe a sensação de entusiasmo na descoberta de uma ordem, de uma previsão, da relação funcional que antes estava escondida.

Por tudo isto, parece-nos que o tema dos padrões, a nível do ensino, deverá ser perspectivado como actividade de resolução de problemas e preferencialmente até como tarefa de investigação.

Quanto à ligação dos padrões à Álgebra, pensamos que este é um domínio privilegiado para esta ligação. Em primeiro lugar, porque irá permitir que a descoberta assuma um papel fundamental na sua aprendizagem. Outra razão muito importante é que é esta ligação que permite pensar no estudo da Álgebra desde o pré-escolar. Por último, a abordagem da Álgebra através dos padrões irá permitir uma maior motivação dos alunos, retirando o negativismo que tem estado associado ao estudo da Álgebra.

Em síntese os padrões podem ser um veículo óptimo para uma abordagem poderosa à Álgebra, e sobretudo nos primeiros níveis, como suporte do pensamento pré-algébrico.

6. Bibliografia

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: ME-DEB.

Alexander, C. (1978). *The timeless way of building.* Oxford: Oxford University Press.

Balmond, C. (2000). *O Número 9: Em Busca do Código Sigma*. Lisboa: Replicação.

Barros, M. G. & Palhares, P. (2001). *Emergência da Matemática no Jardim-de-Infância*. Porto: Porto Editora.

Bay-Williams, J. (2001). What is algebra in elementary school?, *Teaching Children Mathematics,* December 2001, 196-200.

Bittencourt, A. e Lima, O. (1993). Padrões auto-organizados, repetitivos e superpostos de marcas de ondulação, dunas e draas: um arranjo de geometria fractal? in Revista Brasileira de Geociências. Salvador. Brasil.

Cockcroft, W. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

Curcio, F. e Schwartz, S. (2001). What does algebraic thinking look like and sound like with preprimary children?, *Teaching Children Mathematics* 3, 296-300.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* Lisboa: Gradiva.

DEB (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Devlin, K. (1998). *Life by the numbers*. NY:John Wiley &Sons, Inc.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Duarte, I. (2004). Do sujeito e (dos objectos) do ódio- Uma nova resposta a Vasco Graça Moura, nesta polémica sobre o ensino do Português. *"Actual/Expresso", do dia 27-03- 2004* http://ciberduvidas.sapo.pt/controversias/040504_6.html (acedido em 10 Março 2005)

Goldberg, A. (2003). *Research survey of patterns: a powerful mathematics concept*. (s/r)

Grunbaum, B. e Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman.

Herbert, K. e Brown, R.H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning, *Teaching Children Mathematics,* 3 February, 1997, 340-345.

Keeney,P.A. e Silver,E. (1997). Probing the foundations of algebra: grade 4 pattern items in NAEP, *Teaching Children Mathematics,* 3, 268-274.

Kelso, J. e Scott, A. (1995). *Dynamic Patterns: the self-organization of brain and behaviour.* Cambridge (Mass): MIT Press.

Mason, J., Burton, L. e Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically.* London: HMSO.

Ministério da Educação (1991). *Programa de Matemática do ensino básico 2º ciclo.* Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (2000). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: ME-DEB.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Orton, A. (1999) (ed). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell

Orton, A. e Orton, J. (1999). Pattern and Approach to Algebra. Em A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-124). Londres. Cassel.

Orton, J. (1999). Children's Perceptio of Pattern in Relation to Shape. Em A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 149-167). Londres: Cassel.

Palhares, P. (2000). *Transição do Pré-Escolar para o 1.º Ano de Escolaridade: Análise do Ensino e das Aprendizagens em Matemática*. (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.

Palhares, P. e Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar, *Educare-Educere,* 10,107-123.

Rising, L. (1998). *The patterns handbook: techniques, strategies, and applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Steen, L. A. (1988) The Science of Patterns, *Science*, 240, 611-616.

Storr, A. (1992). *Music and the Mind*. London:QPD.

Tall, D. (1992). The transition from arithmetic to algebra: number patterns or proceptual programmming? *New Directions in Algebra Education*, (pp. 213-231). Brisbane: Queensland University of Technology.

Taylor-Cox, J. (2003). *Algebra in the Early Years? Yes!,* Young Children, January,14-21.

Threlfall, J. (1999). Repeating Patterns in the Early Primary Years. Em Anthony Orton (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (18-30). London: Cassell.

Yackel, E. (1997). A foundation for algebraic reasoning in the early grades, *Teaching Children Mathematics*, 3, 276-280.