EIEM2014

Encontro de Investigação em Educação Matemática

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

22 e 23 novembro

TAREFAS MATEMÁTICAS

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

HOTEL DO MAR
SESIMBRA

EIEM2014

Encontro de Investigação em Educação Matemática

Joana Brocardo, Ana Maria Boavida, Catarina Delgado, Elvira Santos, Fátima Mendes, José Duarte, Mário Baía, Miguel Figueiredo

Sesimbra, 2014

Título

Livro de Atas do Encontro de Investigação em
Educação Matemática (EIEM2014)

Edição

Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Setúbal

Coordenação

Joana Brocardo, Ana Maria Boavida, Catarina Delgado, Elvira Santos, Fátima Mendes, José Duarte, Mário Baía, Miguel Figueiredo

***Design* Gráfico:** Mário Baía

Sesimbra 2014

Comissão organizadora

Joana Brocardo

Ana Maria Boavida

Catarina Delgado

Elvira Santos

Fátima Mendes

José Duarte

Mário Baía

Miguel Figueiredo

Comissão Científica

Ana Maria Boavida

Catarina Delgado

Fátima Mendes

Joana Brocardo

José Duarte

Leonor Santos

Programa -- 22 de novembro de 2014

09:00 – 09:30	Sessão de Abertura **Pedro Dominguinhos**, Presidente do Instituto Politécnico de Setúbal **Leonor Santos**, Presidente da SPIEM **Joana Brocardo**, Comissão Organizadora
09:30 – 11:00	Conferência Plenária **Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness** **Malcolm Swan**, School of Education - University of Nottingham **Comentário: João Pedro da Ponte –** *Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*
11:00 – 11:30	***Pausa para Café***
11:30 – 13:00	Grupos de Discussão
13:00 – 14:30	***Almoço***
14:30 – 16:00	Grupos de Discussão
16:00 – 16:30	***Pausa para Café***
	Apresentação dos *Posters*
16:30 – 18:00	Conferência Plenária **As práticas de seleção/construção e preparação de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número** **Catarina Delgado**, *Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal* ***Comentário: Ana Paula Canavarro*** *– Universidade de Évora*
18:00 – 18:30	Apresentação do livro do Projeto P3M **“Práticas profissionais dos professores de Matemática”** ***Lurdes Serrazina***, *Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa* **Joaquin Gimenez**, *Universidade de Barcelona* (**via Skype**)
18:30 – 19:30	Assembleia Geral da SPIEM
20:30	***Jantar***

Programa -- 23 de novembro de 2014

09:00 - 10:30	Grupos de Discussão
10:30 – 11:00	*Pausa para Café*
11:00 – 12:45	Plenário de Discussão **Lina Brunheira, Manuel Vara Pires, Rosa Antónia Ferreira** **Moderadora: Fátima Mendes**
	Sessão de Encerramento *Presidente da SPIEM* *Comissão Organizadora*

ÍNDICE

Tema do Encontro

TAREFAS MATEMÁTICAS

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação
Instituto Politécnico de Setúbal

As tarefas matemáticas que se propõem aos alunos são determinantes para o tipo de aprendizagem matemática que se lhes proporciona. Contudo, estamos conscientes de que é possível ter entendimentos diferentes do que é uma tarefa e, em particular do que é uma tarefa matemática. Neste Encontro de Investigação adotamos uma definição abrangente que diz respeito a um amplo conjunto de "coisas de matemática para fazer" que podem, por exemplo, ser exercícios, problemas de diferentes tipos, dar exemplos de definições, decidir sobre duas possibilidades, levar a cabo uma investigação ou realizar uma demostração. Adotando a perspetiva de Watson, Ohtani, Ainley, Frant, Doorman, Kieran, Leung, Margolinas, Sullivan, Thompson e Yang (2013, p. 10) "uma tarefa é qualquer coisa que o professor usa para 'revelar' (demonstrate) matemática" ou que os alunos decidem fazer por si sós. As tarefas são os instrumentos mediadores entre o ensino da matemática e a aprendizagem e constituem, por isso, um tema de grande relevo em educação matemática.

Ponte (2005) propõe uma organização das tarefas que tem em conta o grau de abertura, o desafio cognitivo, a relação com a realidade e a duração da sua realização e salienta que cada uma, de acordo com as suas características próprias, ocasiona diferentes oportunidades de aprendizagem para os alunos. O NCTM (2007) salienta a importância de os alunos contactarem com tarefas matemáticas significativas para introduzir conceitos e para os envolver e desafiar intelectualmente. Quer o contexto das tarefas se relacione com experiências da realidade dos alunos, quer com contextos puramente matemáticos, "as tarefas deverão provocar interrogações, possuindo um nível de desafio que convide à especulação e ao trabalho árduo" (NCTM, 2007, p. 20).

As tarefas significativas não são, por si sós, promotoras de aprendizagem. É de central importância a seleção que o professor faz das tarefas, o modo como as explora, como organiza e orienta o trabalho na aula, como apoia o trabalho dos alunos, promove a discussão, sistematiza o trabalho realizado e o relaciona com ideias e conceitos matemáticos relevantes. É fundamental o "conhecimento matemático das tarefas para ensinar" (Chapman, 2013, p. 1) entendido como dizendo respeito ao conhecimento que o professor precisa de ter para (a) selecionar tarefas matemáticas significativas; (b) conduzir a exploração de tarefas matemáticas na aula de modo a desenvolver o conhecimento matemático do aluno, mantendo um clima de curiosidade, interesse e debate de ideias matemáticas; e c) tirar o maior partido possível das potencialidades de cada tarefa. Deste modo, a exploração das tarefas poderá promover uma compreensão profunda da Matemática, ajudando os alunos a descobrir e a compreender processos e regras matemáticas, estabelecer conexões, desenvolver um quadro coerente de conceitos e relações e compreender o que é fazer matemática.

Grupos de discussão

1. Design de tarefas

- A seleção, adequação ou criação de tarefas: objetivos a atingir, critérios seguidos, desafios e constrangimentos.
- A sequência das tarefas a propor aos alunos: objetivos, princípios, conhecimento dos alunos.

2. As tarefas e a aprendizagem dos alunos

- A relação entre o tipo de tarefas e as aprendizagens que potenciam.
- A exploração das tarefas: metodologias de trabalho, o papel do professor, o papel dos alunos.
- Os recursos de apoio à exploração e resolução de tarefas.

3. Conhecimento matemático das tarefas para ensinar

- A compreensão sobre a natureza das tarefas que envolvem conteúdos matemáticos significativos.
- A capacidade de identificar e selecionar e/ou criar tarefas favoráveis a uma aprendizagem matemática com compreensão e em profundidade.
- O reconhecimento de diferentes níveis cognitivos das tarefas e sua relação com os objetivos.
- O conhecimento dos interesses e experiências dos alunos, bem como da forma como aprendem matemática.

Referências

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1-6.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática*.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Watson, Anne; Ohtani, Minoru; Ainley, Janet; Bolite Frant, Janete; Doorman, Michiel; Kieran, Carolyn; Leung, Allen; Margolinas, Claire; Sullivan, Peter; Thompson, Denisse; Yang, Yudong (2013). Introduction. In Margolinas, C. (Ed.), *Task*

Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (pp 9-15). (Vol. 1). Oxford.

Conferências

DESIGNING TASKS AND LESSONS THAT DEVELOP CONCEPTUAL UNDERSTANDING, STRATEGIC COMPETENCE AND CRITICAL AWARENESS.

Malcolm Swan

Centre for Research in Mathematics Education, University of Nottingham

The purposes we have in Mathematics teaching are broad; including procedural fluency, conceptual understanding, strategic competence in both pure and applied problem solving, and a critical awareness of the quality of mathematical reasoning. Each purpose requires a range of appropriately designed mathematical tasks. In this paper, I describe and illustrate a framework for task design that we have found both helpful and effective for creating powerful learning opportunities that are rich, accessible and adaptable to the needs of individual learners. Particular formative aspects of lesson design will be highlighted; the important roles of pre-assessment, formative feedback questions and sample work for students to critique are described.

Introduction

The literature frequently criticizes the mathematical curriculum for having an extremely narrow view of mathematics and a limited range of task types (Kilpatrick, et al. 2001; Watson & Sullivan 2008). This is not necessarily the fault of the curricula documents themselves, which often have laudable aims, but rather the ways that these are interpreted and trivialized by assessors and textbook authors (Swan 2014).

In this paper, I consider the design of tasks for the broad goals that are frequently cited and valued by educators and curriculum designers: procedural fluency, conceptual understanding, strategic competence (in pure and applied problem solving), and a critical awareness of the quality of mathematical reasoning. Perhaps the predominant reason that these goals are insufficiently reflected in classroom practice is the lack of emphasis that research has placed on task design and the lack of an educational design profession (Burkhardt & Schoenfeld 2003). Indeed, it often seems to be unreasonably assumed that teachers have time to fulfill this role in the normal course of their work.

The paper begins with the presentation of a theoretical framework for task design that links goals, products, task genres and classroom activities. It then goes on to consider principles for the construction of adaptable lessons from such tasks. Here, a ‘task’ is defined as anything the teacher asks her students to do, and ‘activity’ is taken to refer to a student’s response (Christiansen & Walter, 1986; Mason & Johnston-Wilder, 2006). A task is more than a problem as printed on the worksheet or textbook, it includes the way this is mediated and mutated by the teacher in the classroom; its introduction, and the subsequent provision of prompts, hints and further questions. Tasks also change as students interpret them in various ways. In this paper, I interpret tasks as situated in lessons and unfolding and developing over time. A ‘lesson’ is used here to mean a sequence of tasks and activities that are focused on a particular learning goal; it is not assumed that lessons must fit into one class period.

A framework for task design

In building this framework, I distinguish between the educational *goal* of the lesson, the *products* that students might produce to give evidence of achieving this goal, the *genres of mathematical task* that will guide our task design, and the *classroom activities* that we intend to result from these tasks.

Goal 1: Developing factual knowledge and procedural fluency

"Civilization advances by extending the number of operations which we can perform without thinking about them." (Whitehead 1911, p. 61)

By facts we mean items of information that are unconnected or arbitrary, including notational conventions. By procedural fluency we mean the ability to carry out mathematical procedures quickly, efficiently and reliably without effortful thought. The value of fluency should not be underestimated: 'well mastered routines free conscious attention to focus on aspects of a task which are novel or problematic' (Cockcroft 1982 para.239). The related products, tasks and classroom activities to achieve this goal we term *performances, rehearsals* and *practice exercises*. While it is undoubtedly important to strive for technical fluency in mathematics, the current emphasis on the repetitive practice of fragmented skills is ubiquitous. It is as if music teaching focused solely on scales and arpeggios. The goal of fluency, however, need not result in a boring diet of drill and practice. In a recent paper, Foster (2013) borrows the musical metaphor of the étude to show how fluency may be developed through the tackling of engaging, mathematically satisfying problems.

One example will illustrate this. Suppose a teacher wants students to develop fluency at finding areas and perimeters of a number of simple polygons. He might draw two orthogonal axes labelled perimeter (x) and area (y), and ask students to plot points to represent some simple polygons on the plane. This may then be followed up with more interesting questions, such as: "Can you draw some polygons represented by the coordinates (12, 4); (4, 12)?"; "Which points in the plane represent squares, triangles …?"; "Which points in the plane cannot represent *any* polygon"? At the same time as calculating areas and perimeters, students contribute their own examples, make conjectures and generalisations and arrive at surprising results. We summarise the task type and sample classroom activities for this goal in Figure 1.

Task types	**Sample classroom activities.**
Rehearsal of procedures and notations.	• Rehearsing through exercises and études that give repeated practice at using well-defined procedures. • Systematically using and memorising terms and notations.

Figure 1 - Task design framework for*factual knowledge and procedural fluency*

Goal 2: Developing conceptual understanding

A concept is a *"capsule of thought that embraces thousands of distinct experiences and that is ready to take in thousands more"* (Sapir 1970, p. 35). Concepts are *organic*; they are an individual's attempt to make sense of the world and as such they constantly evolve. Sierpinska (1994) suggests that people feel they have understood something when they achieve a sense of order and harmony, where there is a sense of a 'unifying thought', of simplification, of seeing some underlying structure and that in some sense, feeling that the essence of an idea has been captured. Pimm (1995, p.179) refers to the double meaning of the French word for understanding, *comprendre*, which also conveys a sense of 'inclusion' or 'incorporation'. Thus when we understand something, it becomes part of us, we own it. Sierpinska (ibid, p.32) lists four mental operations involved in understanding: "identification: we can bring the concept to the foreground of attention, name and describe it; discrimination: we can see similarities and differences between this concept and others; generalisation: we can see general properties of the concept in particular cases of it; synthesis: we can perceive a unifying principle." To this, we would add the notions of representation. When we understand something, we are able to represent it in a variety of ways: verbally, visually, and/or symbolically. The *products* that we might expect from students to demonstrate understanding will therefore include descriptions, classifications, representations, justifications, structural analyses. Below we summarise the task genres and typical classroom activities that are consequential (Figure 2).

Task genres	**Sample classroom activities.**
Observe, classify and define mathematical objects and structures.	• Observing and manipulating mental objects. • Identifying and describing attributes and sorting objects accordingly. • Creating and identifying examples and non-examples. • Creating and testing definitions.
Represent and translate between mathematical concepts and their representations.	• Interpreting a range of representations including diagrams, graphs, and formulae. • Translating between representations and studying the co-variation between representations.
Justify and/or prove mathematical conjectures, procedures and connections.	• Making and testing mathematical conjectures and procedures. • Identifying examples that support or refute a conjecture. • Creating arguments that explain why conjectures and procedures may or may not be valid.
Identify and analyze structure within situations	• Studying and modifying mathematical situations. • Exploring relationships between variables. • Comparing and relating mathematical structures.

Figure 2 - Task design framework for *conceptual understanding*

The development of conceptual understanding, which of course should underpin procedural knowledge, requires the careful negotiation of meaning in which objects are compared and classified, definitions are built, and representations are created, shared, interpreted and compared. These are *social, collaborative* activities. There is considerable research evidence to show, for example, the superiority of conflict discussion over individual guided discovery methods for concept development (Bell 1993; Swan 2006). The creation of a *network* of connections between concepts requires non-linear exploratory work - difficult to design and embody in some hierarchical curricula specifications.

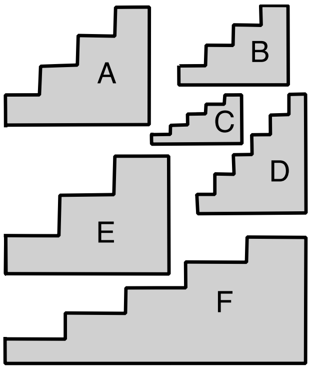
There is only space for a very few illustrative examples. For *observe, classify and define,* students may be invited to sort a collection of cards showing mathematical objects using their own criteria. The results of their sorting may be offered to other students, who then reconstruct the criteria that were used. The objects might be anything from geometric shapes to algebraic functions. As Zaslavsky (2008) has shown, this is a powerful way of enumerating properties of objects.

Students may then be presented with a mathematical object and asked to list as many of its properties as possible. The task then becomes: "do any of these properties, taken individually, *define* the object?" or "do any *pairs* of these properties define the object?" (Figure 3). This results in a search for justifications and counterexamples. This can be quite demanding. For example, one might consider the pair of statements: "When $x = 0$, $y = 0$"; "When x doubles in value, y doubles in value". Do these statements *define* proportion? If not, find a function that has both properties, but is not proportional. Seeking definitions in this way lies at the very heart of mathematical activity (Lakatos 1976).

Mathematical object	*A square*	*A proportional relationship exists between two continuous variables x and y.*
Properties	Four equal sides	The graph of y against x is linear.
	Two equal diagonals	$y \div x$ always gives the same result.
	Four right angles	When $x = 0$, $y = 0$
	Two pairs of parallel sides	When x doubles in value, y doubles in value
	Four lines of symmetry	When x increases by equal steps then so does y
	….	….

Figure 3 - Observe, Classify and define: Listing properties and building definitions

Students may be routinely offered alternative definitions and asked to evaluate them. For example, they may be asked to intuitively order a set of staircases according to their perceived 'steepness', and then be asked to evaluate alternative definitions of this concept (Figure 4). This leads naturally to discussions on the mathematical ideas of dimensionality and enlargement.



Staircases

Put these staircases in order of steepness.

Is **“Height of step - length of step”** a suitable definition of steepness? Test this definition on the examples.

Why is **“Height of step ÷ length of step”** a better definition?

Figure 4 - *Observe, Classify and define*: Challenging definitions

For *represent and translate,* I use activities that require students to translate between numerical, verbal, graphical, algebraic and other representations. Typically, groups of students are given collections of cards that they are asked to sort according to whether or not the cards convey equivalent representations. Common misinterpretations are foregrounded by including translations that are commonly confused. For example, students may be given a collection of 4 money cards (£120; £150; £200; £100) and a collection of ten ‘arrow’ cards showing percentage increase and decrease (e.g. “up by 25%”; “down by 25%). They are asked to place the money cards in a square formation and place the percentage cards between them in appropriate places (Figure 5 shows one side of the ‘square’). Typically, students will consider “up by 25%” and “down by 25%” to be inverse statements and place them together between the money cards £120 and £150. Subsequently, the teacher introduces further arrow cards showing “decimal multipliers” (e.g. x 1.25; x 0.8). As students place these, they check both with a calculator and by relating them to the percentage cards already in position. This causes conflict and discussion as inconsistencies are found. Later, further cards are added, as shown. Connections are drawn between all these representations and generalisations are made. Further examples of represent and translate tasks may be found in Swan (2008a; 2008b).

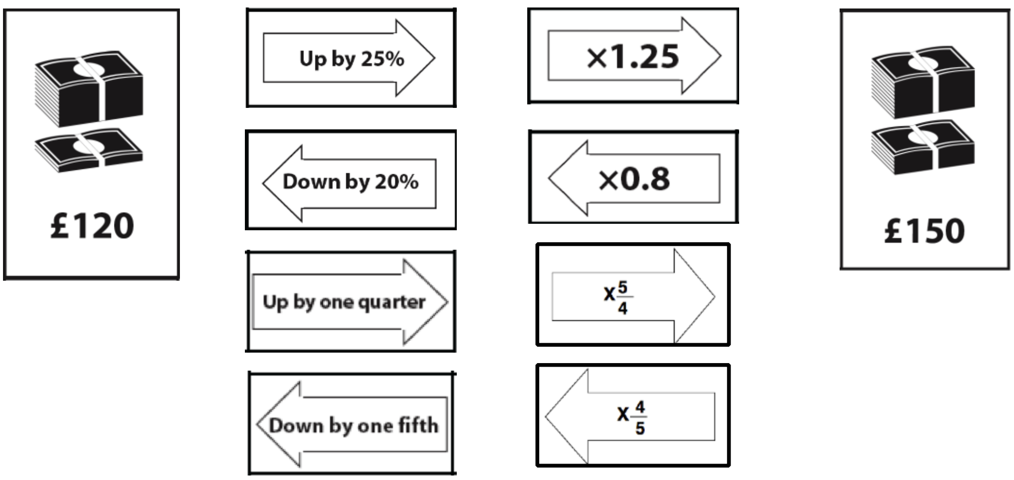


Figure 5 - *Represent and translate*: Percentage increase and decrease.

For *justify or prove* category, we typically offer students a collection of conjectures, and it is the students' task to determine their domains of validity. These are usually known as '*always, sometimes or never true*?' tasks. Figure 6 illustrates a typical selection of such assertions.

Pay rise

Max gets a pay rise of 30%.

Jim gets a pay rise of 25%.

So Max gets the bigger pay rise.

Fractions

If you add the same number to the numerator and denominator of a fraction, the fraction will increase in value.

Area and perimeter

When you cut a piece off a shape you reduce its area and perimeter.

Right angles

A pentagon has fewer right angles than a rectangle.

Diagonals

The diagonals of a quadrilateral divide the quadrilateral into 4 equal areas.

Right triangle

If a right-angled triangle has integer sides, the incircle has integer radius.

Figure 6 - Justify or prove: A selection of conjectures to test.

Normally, a set of cards will all be related to a particular mathematical topic, and will contain some commonly held beliefs. Students are instructed: *"If you consider a statement to be always true or never true, then try to explain clearly how you be sure. If you think a statement is sometimes true, then try to describe all the cases when it is true and all the cases when it is false."* Thus students have first to identify the variables involved and then test the assertion by constructing examples and counterexamples. In some cases a formal proof might be sought. When students are stuck, the teacher will point them towards particular cases to test. For example, in *Diagonals*, students usually claim that the statement is true for squares, but not for rectangles (this needs challenging!). The teacher may need to push them to consider a wider range of quadrilaterals to try to find all cases where the statement is valid.

Finally, we turn to *identify and analyse structure.* When students have tackled a conventional word problem, they are invited to analyse its structure and in so doing construct further problems. The problem is rewritten as a list of variables together with their original values (including the solution to the original problem, see Figure 7). The task is to first describe how each variable may be obtained from the others, then to explore the effect of changing the variables systematically. So we erase the profit. How is this constructed from the other variables? (60x4-50 or $p=ns-k$). Then we reinstate the profit and erase the selling price. How might this be found? ($s=(p+k)/n$). After working through each variable separately, we consider them in pairs. Suppose we erase both n and p? How will the profit depend on the number of cards made? Students generate a table and graph. Finally students may erase all values and describe the general structure algebraically ($p=ns-k$).

Making and selling greetings cards.

Jane wants to make exclusive hand made gift cards for charity. The cost of a kit for making the cards is €50. With this kit she can make 60 cards. She thinks they might sell at €4 each. What will be her profit if all the cards are sold? Answer €190.

Rewritten problem

		k	
The cost of buying one kit	€	50	
		n	
The number of cards that can be made with the kit		60	cards
		s	
The price at which each card is sold	€	4	
		p	
Total profit made if all cards are sold.	€	190	

Figure 7 - *Identify and analyse structure:* Working with word problems

Whenever students have tackled a problem, we may encourage this process of generalisation in order to focus more explicitly on structural relationships.

Goal 3. Strategic competence

Strategic competence refers to the capability of students to solve multi-step, non-routine problems and to extend this to the formulation and tackling of problems from the real world. The *products* that students may produce may therefore be designated as problem solutions and mathematical models. We define a problem as a task that the individual wants to tackle, but for which he or she "does not have access to a straightforward means of solution" (Schoenfeld 1985). One consequence of this definition is that it is pedagogically inconsistent to design problem-solving tasks for the purpose of practising a procedure or to develop understanding of a particular concept. In order to develop strategic competence, students must be free to experiment with a range of approaches. They may or may not decide to use any particular procedure or concept; these cannot be pre-determined. We have come across many lessons where the teacher offers students a so-called 'problem' to solve, but at the same time requires students to implement a given approach. To us, this is not in fact a problem but an *illustrative exercise*. Of course, a sequence of tasks may be designed where a problem is used to motivate the *subsequent* development of particular methods, but at its introduction, students must not know which method to use. Problem solving is contained within the broader processes of mathematical modelling. Modelling additionally requires the formulation of problems by, for example, restricting the number of variables and making simplifying assumptions. Later in the process, solutions must be interpreted and validated in terms of the original context. Some task genres and sample classroom activities for strategic competence are shown in Figure 8.

Task genres	Sample classroom activities.
Solve a non-routine problem by creating an extended chain of reasoning.	• Selecting appropriate mathematical concepts and procedures. • Planning an approach. • Carrying out the plan, monitoring progress and changing direction, where necessary. • Reflecting on solutions; examining for reasonableness within the context. • Reflecting on strategy; where might it have been improved?
Formulate and interpret a mathematical model of a situation that may be adapted and used in a range of situations.	• Making suitable assumptions to simplify a situation. • Representing a situation mathematically. • Identifying significant variables in situations. • Generating relationships between variables. • Identifying accessible questions that may be tackled within a situation. • Interpreting and validating a model in terms of the context.

Figure 8 - Task design framework for *strategic competence*

So, for me, the essence of a task in this category is that it should be amenable to a variety of alternative approaches, so that students may learn from comparing these approaches. An example of each type is given in Figure 9. The first is a pure mathematics 'puzzle' type problem set in an artificial context, that of a playground game. The second, a modelling task, is taken from a real-life context and involves the student in making simplifications and assumptions. Both however may be tackled in a variety of ways. The playground game may be tackled by practical drawing and measuring; by repeated use of Pythagoras' theorem; and also by 'pure, non-quantitative, geometric reasoning'. *Having Kittens* may be modelled with a wide variety of representations, and therein is its educational value. We return to this problem later in this paper.

The Playground Game

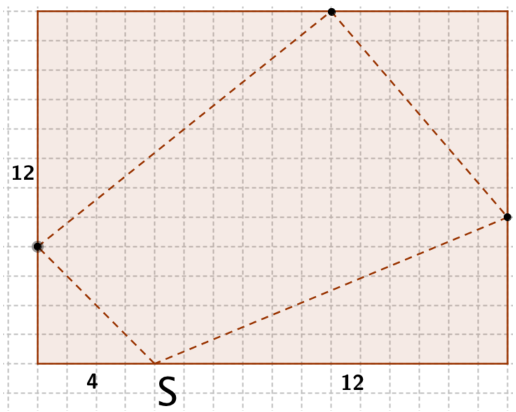
This is a plan view of a 12 metre by 16 metre playground.

The children start at point S, which is 4 metres along the 16-metre wall.

They have to run and touch each of the other three walls and then get back to S.

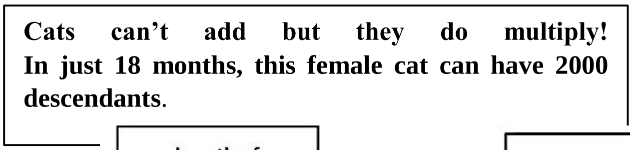
The first person to return to S is the winner.

What is the shortest route to take?



Having Kittens[1]

Here is a poster published by an organization that looks after stray cats.



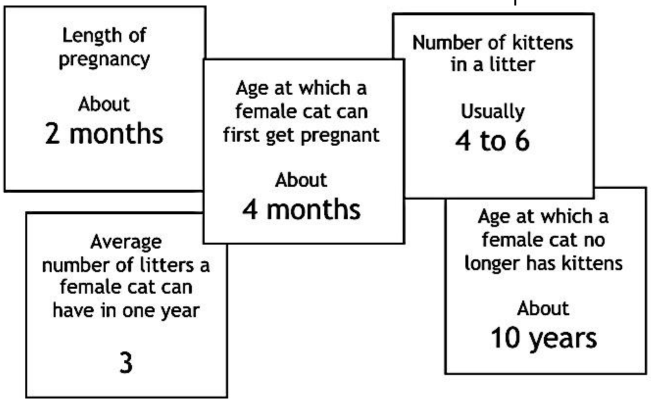


Figure out whether this number of descendants is realistic.

Here are some facts that you will need:

Figure 9 - Tasks focused on strategic competence.

Goal 4: Critical competence

So far the classroom activities that have been described involve students constructing their own procedures, concepts and strategies. For goal 4, the students are expected to work on mathematical products constructed by others. The products of this goal may be described as *critical commentaries*. The classroom activities typically involve a *comprehension* phase in which students try to interpret someone's reasoning, an *evaluation* phase where they test this reasoning and compare it with other approaches, and finally a *revision* phase in which students attempt to suggest improvements to the reasoning (Figure 10). The tasks generated are usually combined with tasks that foster goals 2 and 3. Examples are given later in this paper, when I discuss lesson construction.

Task genres	Sample classroom activities.
Analyse and critique a mathematical explanation of a procedure or concept.	• Interpreting and extending a given explanation (may be presented verbally or graphically). • Comparing alternative mathematical explanations of a phenomenon. • Evaluating and improving the mathematical procedures and reasoning of others.
Analyse and critique a problem solving strategy or a mathematical model of a phenomenon.	• Interpreting, adopting and continuing a given strategy; • Comparing alternative strategies; identifying relative strengths, weaknesses and domains of application. • Improving a given strategy.

Figure 10 - Task design framework for *critical competence*

[1] The *Having Kittens* task was originally designed by Acumina Ltd. (http://www.acumina.co.uk/) for Bowland Maths (http://www.bowlandmaths.org.uk) and appears courtesy of the Bowland Charitable Trust

In presenting this framework, I recognise that there are many features I have not mentioned, such as the intended audiences for the various products. It has, however, proved powerful when developing lesson experiences for students. Before describing how this happens, I must briefly consider the role of theories and principles in task design.

Principles for building lessons from tasks

The principles, which guide the design of tasks and the conduct of lessons, have a substantial basis in theoretical and empirical research. Space does not allow us to list them all here. They are mostly derived from the social constructivists: concepts and strategies are co-created as language and symbols are appropriated and internalized (Bakhtin 1981; Vygotsky 1996). The following principles are perhaps the most important:

- Use formative assessment; build on and adapt lessons to the knowledge that students already have (Black & Harrison 2002; Black, et al. 2003; Black & Wiliam 1998; Black, et al. 1999);
- Develop mathematical language through communicative activities that encourage dialogic talk (Ahmed 1987; Alexander 2006, 2008; Mercer 1995);
- Focus directly on either specific conceptual obstacles or processes (Bell, 1993; Wigley, 1994) and create surprise, tension and cognitive conflict that may be resolved through discussion (Brousseau 1997);
- Create connections between topics both within and beyond mathematics and with the real world. Use multiple representations (Askew, Brown, Rhodes, Johnson, & Wiliam, 1997);
- Foster peer assessment by using tasks that allow students to shift roles and explain and support one another (Bell, Swan, Crust, & Shannon, 1993b);
- Use tasks and questions that promote explanation, application and synthesis rather than mere recall (Bills, et al. 2004; Watson & Mason 1998).

Principles however are not enough. They must also be accompanied by an understanding of the context for which they are designed, creative flair and professional vision (Schoenfeld 2009).

Building Lessons from tasks: Some examples.

The design of a lesson involves the sequencing of mathematical tasks in in a way that will both captivate students and draw their attention towards particular concepts or strategies. Designing the flow of a lesson is rather analogous to the scriptwriter's task when planning a movie. According to Trottier (1998) the typical film script is structured in three phases. There is an initial 'set up' in which characters, their relationships and world are introduced and a dramatic premise, situation or question is posed. Then there is the confrontation with an obstacle. The characters must learn new skills and work collaboratively in order to deal with their predicament. They often fail; tension rises and reaches crisis point. Finally there is the resolution phase that includes a climax, a dénouement and maybe even a 'twist'. The common ground with lesson design is clear.

My own design of lessons has been influenced by the processes established in Japanese lesson study (Fernandez & Yoshida 2004; Shimizu 1999). These lessons are often structured with four key components: *hatsumon* (the teacher gives the class a problem to initiate discussion); *kikan-shido* (the students tackle the problem in groups or individually); *neriage* (a whole class discussion in which alternative strategies are compared and contrasted and in which consensus is sought) and finally the *matome*, or summary. Among these, the *neriage* stage is considered to be the most crucial. This term refers to kneading or polishing in pottery, where different colours of clay are blended together. This serves as a metaphor for the considering and blending of students' interpretations and approaches to solving a mathematics problem. In the *matome* stage of the lesson, the Japanese teachers will tend to make a careful final comment on the mathematical sophistication of the approaches used. When using this model, however, we have found that the demands on the teacher are great, particularly when trying to interpret, select and discuss students' extended reasoning.

In 2009, the Bill & Melinda Gates Foundation approached the Centre here at Nottingham to develop a suite of one hundred lessons to form a key element in the Foundation's program for "College and Career Ready Mathematics" based on the Common Core State Standards for Mathematics (NGA & CCSSO 2010). In response, the Mathematics Assessment Project (MAP) was designed to explore how far teaching materials can enable teachers to implement the principles we have described, coupled with high quality tasks, an integral part of the implemented curriculum in their classrooms, even where linked professional development support is limited or non-existent. The research-based design of these lessons, now called *Classroom Challenges*, is described elsewhere (Swan & Burkhardt 2014). In this paper, I briefly outline their structure and illustrate how the framework outlined above has been used in their design. Sample lessons may be downloaded from http://map.mathshell.org.

In the MAP project, we have devised two types of lesson: Concept Development lessons (aimed at goals 2 and 4) and Problem Solving lessons (aimed at goals 3 and 4). We decided early on that these two types needed to be kept separate for the reasons discussed above. The structure of these lessons is similar, with a clear formative assessment focus. We now outline the overall structure of a typical concept development and problem solving *Classroom Challenge* and consider how the above principles are realized within them.

The design of concept-focused lessons has been strongly guided by design principles that have proven effective in our earlier research (Swan 2006). Each lesson is preceded by a short diagnostic assessment, designed to uncover students' current understandings and interpretations. We provide teachers with some guidance as to what these might be. This is done to assist the teacher in preparing probing questions that might be used in the lesson itself. The lesson broadly follows the outline described below. The reader will find a full outline of a lesson related to the task in Figure 5 on the MAP website[2]; space does not permit us to reproduce all the details here.

1. ***Make existing concepts and methods explicit in the classroom.*** An initial task is offered with the purpose of making students aware of their own intuitive interpretations, to create curiosity and model the level of reasoning to be expected

[2] http://map.mathshell.org.uk/materials/lessons.php?taskid=208&subpage=concept

during the main activity. So, for example, the teacher displays the task shown in Figure 11 and asks students to select the story that best fits the graph. This usually results in a spread of student opinions, with many choosing option B. The teacher invites and probes explanations, and labels the diagram with these explanations, but does not correct students, nor try to reach resolution at this point.

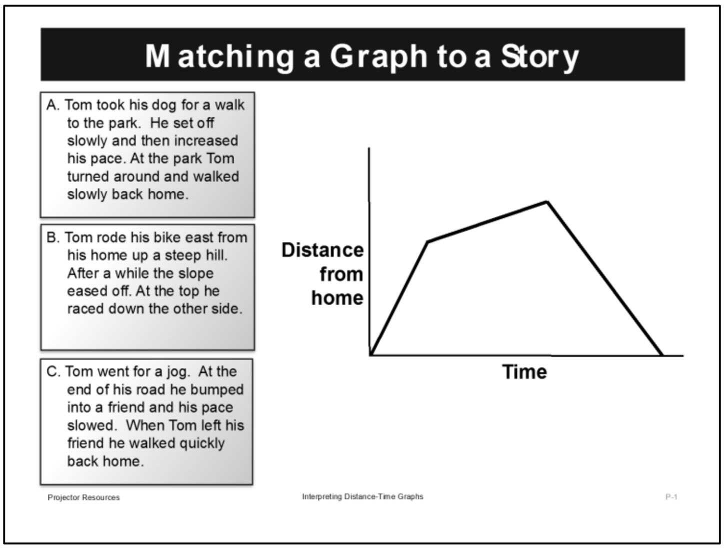


Figure 11 - Introductory activity: *Interpreting distance-time graphs*

2. ***Collaborative activity: Matching graphs, stories and tables.*** Each group of students is now given a set of the cards shown in Figure 12. Ten distance/time graphs are to be matched with nine 'stories' (the tenth to be constructed by the student). Subsequently, when the cards have been discussed and matched, the teacher distributes a further set of cards that contain distance/time tables of numerical data. These enable students to check their responses, and reconsider the decisions that have been made. Students make posters to display their reasoning.

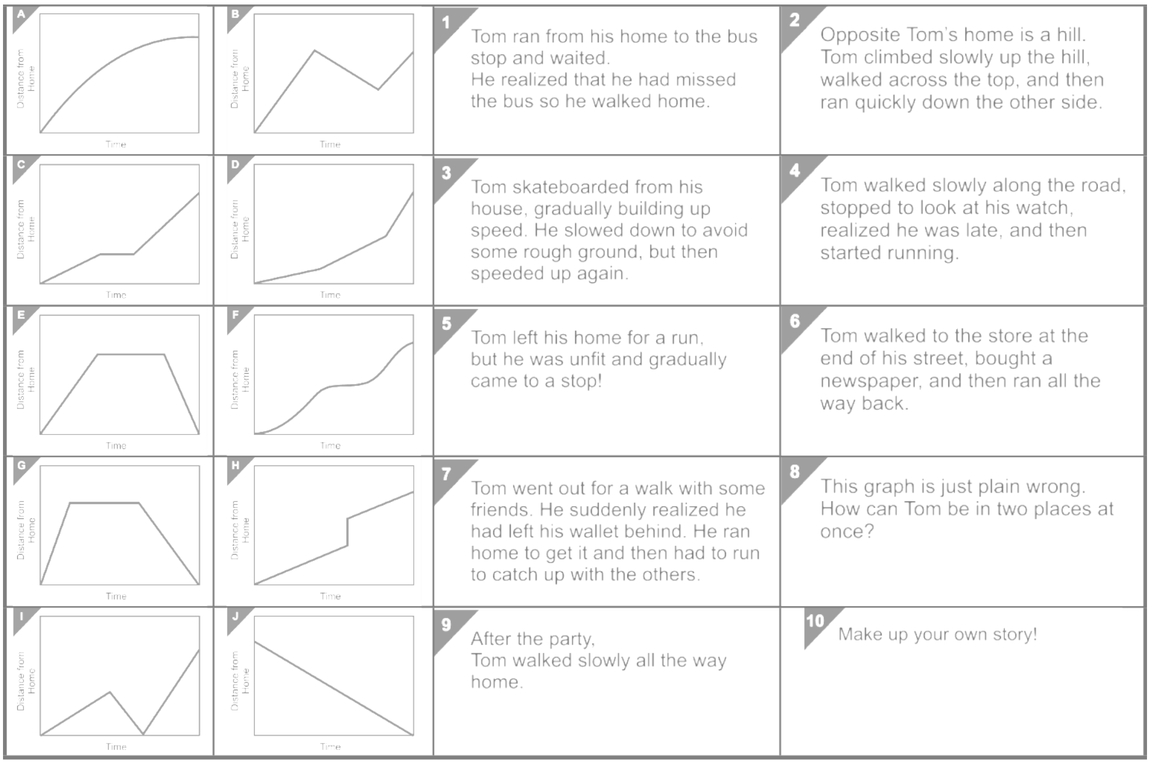


Figure 12 - Matching cards: *Graphs and stories.*

3. ***Inter-group discussion: Comparing interpretations*.** Students' posters are now displayed, and students visit each other's posters and check them, demanding explanations for matches that do not appear to be correct. This phase therefore emphasises peer-assessment.
4. ***Plenary discussion*.** Students revisit the task that was introduced at the beginning of the lesson and resolution is now sought. Drawing on examples of student work produced during the lesson, the teacher draws attention to the significant concepts that have arisen (e.g. the connection between speed, slopes on graphs, and differences in tables). Further questions are posed to check learning, using mini-whiteboards. "Show me a distance time graph to show this story"; "Show me a story for this graph"; "Show me a table that would fit this graph" ; and so on.
5. ***Individual work: Improving solutions to the pre-assessment task*.** Students now revisit the work they did on the pre-assessment task. They describe how they would answer the task differently and write about what they have learned.

The lesson structure described above contains many of the features of 'diagnostic teaching' (See e.g. Bell 1993; Swan 2006) that our earlier research showed to be more effective, over the longer term, than either expository or guided discovery approaches. This was replicated over many different topics: decimal place value, rates, geometric reflections, functions and graphs, and fractions (Bassford 1988; Birks 1987; Brekke 1987; Onslow 1986; Swan 1983). From these studies it was deduced that the value of diagnostic teaching appeared to lie in the extent to which it valued the intuitive methods and ideas that students brought to each lesson, offered experiences that created inter- and intra-personal 'conflicts' of ideas, and created opportunities for students to reflect on and examine inconsistencies in their interpretations.

I now illustrate one of the Classroom Challenges, focused on problem-solving: "*Having Kittens*" (Figure 9). As already noted, teachers find it very difficult to interpret, monitor and select students' extended reasoning during a problem-solving lesson. We therefore precede each lesson with a preliminary assessment in which students tackle the problem individually. The teacher reviews a sample of the students' initial attempts and identifies the main issues that need addressing in the lesson. Through pre-trialling, we have developed a "common issues table" that forewarns teachers of the difficulties that students may have, and suggests questions that the teacher might pose to prompt deeper thinking (Figure 13). Teachers analyse students' initial responses, with the help of this table. If time permits, they write feedback questions on each student's work, or alternatively prepare questions for the whole class to consider. This form of feedback has been shown to more powerful than grades or scores, that detract from the mathematics and encourage competition rather than collaboration (Black, et al. 2003; Black & Wiliam 1998).

Issue	*Suggested questions and prompts*
Has difficulty starting	Can you describe what happens during first five months?
Does not develop a suitable representation	Can you make a diagram or table to show what is happening?
Work is unsystematic	Could you start by just looking at the litters from the first cat? What would you do after that?
Develops a partial model	Do you think the first litter of kittens will have time to grow and have litters of their own? What about their kittens?
Does not make clear or reasonable assumptions	What assumptions have you made? Are all your kittens are born at the beginning of the year? Are all your kittens females?
Makes a successful attempt	How could you check this answer using a different method?

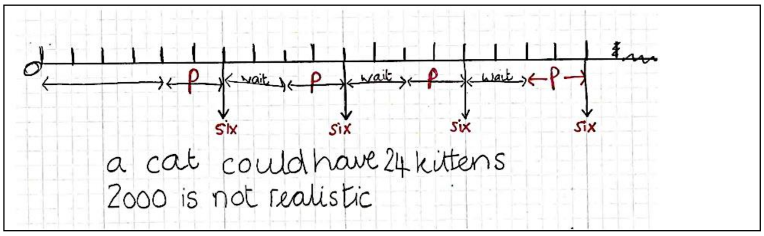
Figure 13 - An extract from the 'Common issues table' for *Having Kittens*

Now we come to the lesson itself. While the precise structure will be problem specific, problem solving lessons are generally organised as follows:

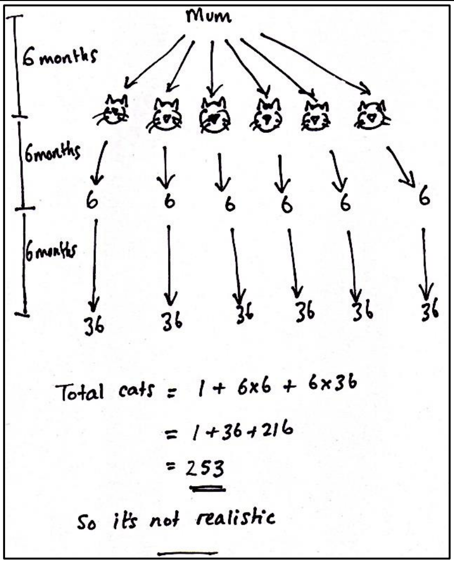
1. ***Introduction***. The teacher re-introduces the main task for the lesson and returns students' work along with the formative questions. Students are given a few minutes to read these questions and respond to them, individually.
2. ***Group work: comparing strategic approaches***. The students are asked to work in small groups to discuss the work of each individual, then to produce a poster showing a joint solution that is better than both individual attempts. Groups are organised so that students with contrasting ideas are paired. This activity promotes peer assessment and collaboration. The teacher's role is to observe groups and challenge students using the prepared questions and thus refine and improve their strategies.
3. ***Inter-group discussion: comparing strategic approaches***. Depending on the range of approaches in evidence, the teacher may at this point ask students to review the strategic approaches produced by other groups in the class, and justify their own. (Most will not have arrived at a solution at this stage). If there is not a sufficient divergence of methods, or more sophisticated representations are not becoming apparent, then the teacher may move directly to the next stage.

4. ***Group work: critiquing 'sample student work'.*** The teacher introduces up to four pieces of "sample student work", provided in the materials (Figure 14). This pre-prepared work has been chosen to highlight alternative approaches. Each piece of work is annotated with questions that focus students' attention. (E.g. "*What has each student done correctly? What assumptions have they made? How can their work be improved?"*) This introduces students to strategies and representations that they may so far not have considered.
5. ***Group work: refining solutions.*** Students are given an opportunity to respond to the review of approaches. They revisit the task and try to use insights to further refine their solution.
6. ***Whole class discussion: a review of learning.*** The teacher holds a plenary discussion to focus on the processes involved in the problem, such as the implications of making different assumptions, the power of alternative representations and the general mathematical structure of the problem. This may also involve further references to the approaches in the sample student work.

The above lesson description contains many features that are not common in mathematics teaching, at least in the US and UK. There is a strong emphasis on the use of preliminary formative assessment, which enables the teacher to prepare for and adapt interventions to the student reasoning that will be encountered. Students spend much of the lesson in collaborative talk, focused on comparing mathematical processes. The successive opportunities for refining the solution enable students to pursue multiple methods, and to compare and evaluate them. Finally, 'sample student work' is used to foster the development of *critical competence* (goal 4). This aspect has become the focus of our recent research, and we now draw out some of the issues this raises.



Alice chose to represent the task using a timeline. She has only considered the number of kittens from the original cat. She has used some of the given information correctly, and has assumed that 6 cats are born at regular intervals. She has forgotten that these kittens can also have litters of their own. She has not described her reasoning and assumptions.



Wayne has assumed that the mother has six kittens after 6 months, and has considered succeeding generations. He has, however, forgotten that each cat may have more than one litter. He has shown the timeline clearly. Wayne doesn't explain where the 6-month gaps have come from.

Figure 14 - Sample work for discussion, with commentary from the teacher guide.

Developing critical competence with sample student work.

Many researchers have emphasised the importance of comparing student approaches to cognitively demanding tasks, but this has proved extremely difficult for teachers to put into practice. In the heat of the classroom they struggle to monitor extended student reasoning; discern the mathematical value of alternative approaches; select solution-methods for whole class discussion; and orchestrate this discussion to build on the sense-making of students. They find it difficult to make connections between approaches and recognize and value students' methods by comparing this with existing valued knowledge (Brousseau 1997; Chazan & Ball 1999; Lampert 2001; Stein, et al. 2008). In practice, the sharing of ideas often degenerates into mere 'show and tell', with participation prioritized over learning (Stein, et al. 2008).

In response to this challenge we are currently researching the potential uses of pre-prepared 'sample student work' to focus classroom discussion on key concepts and processes, while at the same time developing critical competence. We have found that sample student work has many potential uses. In problem solving, for example, it can be used to encourage a student that is stuck in one line of thinking to consider others, to enable comparison of alternative representations and to focus on the identification of modeling assumptions. In concept learning it may be used to draw attention to common mathematical misconceptions and alternative interpretations. The sample work needs careful tailoring to each of these purposes, so that students' attention is aligned to the lessons' purpose. Usually we begin with genuine student work then adapt and rewrite this, making it clear, legible and focused on the issue we intend to be discussed.

From evidence gathered from observing over 100 teachers in US classrooms, we have established the following guidelines for the design of sample work (Evans 2014).

- Discourage superficial analysis by students, by stating explicitly the purpose of the sample work, and by asking specific questions that relate to this purpose;
- Encourage holistic comparisons by making the sample work short, accessible and clear, and by excluding procedural and other errors that distract attention away from the identified purpose;
- Leave the work unfinished, so that students have to engage with the reasoning in order to complete it;
- Sequence the distribution of the sample student work so that successive pairwise comparisons of approaches may be made;
- Offer students sufficient time and opportunity to incorporate what they have learned from the sample work into their own solutions;
- Offer the teachers support for the whole class discussion so that they can identify and draw out criteria for the comparison of alternative approaches.

Concluding remarks

This paper is a personal reflection on how we are now coming to understand the challenges of task design after many years of engaging in design research. The theoretical framework displayed here is not claiming to be comprehensive, but it has proved powerful in the hands of task and curriculum designers. When a desired goal is identified, the framework provides a way of identifying the type of classroom activity that may achieve that goal, and our accumulating body of exemplars provides us with models upon which to build. This is a slow, iterative process, where tasks are designed, built into lessons, then trialed, reviewed and revised. This approach, though standard in product development generally, is much more expensive than the "authorship model" so often used in education: produce draft; gather comments; revise; publish. In our work, we usually observe each lesson between three and five times at each of the two cycles of development. This enables us to obtain rich, detailed feedback, while also allowing us to distinguish general implementation issues from more idiosyncratic variations by individual teachers. We have devised systematic observation tools for gathering this data (Swan & Burkhardt 2014) and in the development of the *Classroom Challenges*, we now have over seven hundred of these observations upon which to draw. Slowly, we are learning. The field of design research is still in its infancy, perhaps, but we are making progress.

References

Ahmed, A. (1987). *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*. London: HMSO.

Alexander, R. (2006). *Towards Dialogic Teaching: Rethinking Classroom Talk* (3 ed.). Thirsk: Dialogos.

Alexander, R. (2008). *How can we be sure that the classroom encourages talk for learning? Here is what research shows.* Cambridge: Dialogos.

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays by M.M. Bakhtin* (C. Emerson & M. Holquist, Trans.): University of Texas Press.

Bassford, D. (1988). *Fractions: A comparison of Teaching Methods.* Unpublished M.Phil, University of Nottingham.

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics, 24*(1).

Bills, C., Bills, L., Mason, J., & Watson, A. (2004). *Thinkers: a collection of mathematical activities to provoke mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Birks, D. (1987). *Reflections: a Diagnostic Teaching Experiment.* University of Nottingham.

Black, P., & Harrison, C. (2002). *Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom*. London: GL assessment.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning: Putting it into practice*. Buckingham: Open University Press.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box : raising standards through classroom assessment*. London: King's College London School of Education 1998.

Black, P., Wiliam, D., & Group, A. R. (1999). *Assessment for learning : beyond the black box*. Cambridge: University of Cambridge Institute of Education.

Brekke, G. (1987). *Graphical Interpretation: a study of pupils' understanding and some teaching comparisons.* University of Nottingham.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Trans. Vol. 19). Dordrecht: Kluwer.

Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. (2003). Improving Educational Research: toward a more useful, more influential and better-funded enterprise. *Educational Researcher, 32*(9), 3-14.

Chazan, D., & Ball, D. L. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 2-10.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts*. London: HMSO.

Evans, S., Swan, M. (2014). Developing students' strategies for problem solving: the role of pre-designed "Sample Student Work". *Educational Designer, 2*(7),

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Mahwah, New Jersey: Laurence Erlbaum Associates.

Foster, C. (2013). Mathematical ´etudes: embedding opportunities for developing procedural fluency within rich mathematical contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 765-774.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Mercer, N. (1995). *The guided construction of knowledge*. Clevedon, Philadelphia, Adelaide.

NGA, & CCSSO (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/Math

Onslow, B. (1986). *Overcoming conceptual obstacles concerning rates: Design and Implementation of a diagnostic Teaching Unit.* Unpublished PhD, University of Nottingham.

Sapir, E. (Ed.). (1970). *Language and Concepts*. London: University paperbacks, Methuen.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2009). Bridging the cultures of educational research and design. *Educational Designer, 1*(2). Retrieved from http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue2/article5/

Shimizu, Y. (1999). Aspects of Mathematics Teacher Education in Japan: Focusing on Teachers' Roles. *Journal of Mathematics Teacher Education 2*, 107-116.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer.

Stein, M. K., Eagle, R. A., Smith, M. A., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Swan, M. (1983). *Teaching Decimal Place Value - a comparative study of 'conflict' and 'positive only' approaches.* Paper presented at the 7th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Jerusalem, Israel.

Swan, M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics: A Challenge to our Beliefs and Practices*. London: National Institute for Advanced and Continuing Education (NIACE) for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy (NRDC).

Swan, M. (2008a). *The design of multiple representation tasks to foster conceptual development*. Paper presented at the International Congress in Mathematics Education. from http://tsg.icme11.org/tsg/show/35

Swan, M. (2008b). A Designer Speaks: Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education*, *1*(1), article 3.

Swan, M. (2014). Improving the alignment between values, principles and classroom realities. In Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics Curriculum in School Education*: Springer.

Swan, M., & Burkhardt, H. (2014). Lesson Design for Formative Assessment. *Educational Designer*, *2*(7).

Trottier, D. (1998). *The screenwriter's bible*. Los Angeles: Silman-James Press.

Vygotsky, L. (1996). *Thought and Language* (A. Kouzlin, Trans. 9th ed.). Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press.

Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Watson, A., & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and Resources in Mathematics Teacher Education* (pp. 109-135). Rotterdam: Sense Publishers.

Whitehead, A. N. (1911). *An introduction to Mathematics*. New York, London: Henry Holt and Company; Williams and Norgate.

Zaslavsky, O. (2008). *Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education.* . Paper presented at the International Congress in Mathematics Education. from http://tsg.icme11.org/tsg/show/35

PRÁTICAS DE SELEÇÃO/CONSTRUÇÃO E PREPARAÇÃO DE TAREFAS QUE VISAM O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO

Catarina Delgado

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

catarina.delgado@ese.ips.pt

Resumo

O presente artigo decorre de um estudo sobre as práticas do professor focadas no desenvolvimento do sentido de número dos alunos, realizado num contexto de um projeto colaborativo que envolveu dois professores do 1.º ciclo e a autora deste texto. Pretende descrever e analisar as práticas dos professores na seleção/construção de tarefas a explorar na sala de aula, visando, em particular, identificar e compreender os aspetos que os professores valorizam e os desafios que se lhes colocam quando se envolvem neste tipo de trabalho.

A investigação insere-se no paradigma interpretativo e segue uma abordagem qualitativa. Os dados foram recolhidos através da realização de entrevistas, da observação participante e da recolha documental. Com a participação no projeto colaborativo, o desenvolvimento do raciocínio matemático e, em particular, o cálculo mental passam a constituir as principais preocupações destes professores quando selecionam/constroem tarefas para os seus alunos. Na preparação das tarefas destaca-se o valor que passam a atribuir à definição dos seus objetivos e à antecipação de estratégias de resolução.

Palavras-chave: Práticas do professor; Tarefas; Desenvolvimento curricular; Sentido de número

Introdução

As tarefas constituem, na sala de aula, o objeto da atividade dos alunos (Christiansen & Walther, 1986) e, em conjunto com as ações do professor, influenciam o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente (Stein & Smith, 1998) Podem, também, limitar ou ampliar a forma como os alunos veem os tópicos de ensino e transmitir-lhes mensagens acerca do que é a Matemática e sobre o que envolve fazer Matemática (NCTM, 1991/1994).

Uma vez que as tarefas marcam inquestionavelmente as oportunidades de aprendizagem matemática dos alunos, é fundamental compreender as características da prática do professor quando seleciona/constrói e prepara tarefas e quais os desafios que se lhe colocam, em particular, em momentos de mudança curricular. É também importante que estes estudos sejam focados em temas específicos de ensino, por permitir compreender em profundidade o trabalho do professor em torno da sua abordagem (Ponte, 2012).

Este artigo decorre de um estudo cujo objetivo, mais amplo, é descrever e analisar as práticas de dois professores de seleção/construção, preparação e exploração de tarefas centradas no desenvolvimento do sentido de número dos alunos do 1.º ciclo, no contexto de um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular (Delgado, 2013). Em particular, este artigo foca-se nas duas primeiras fases do trabalho do professor acima referidas (seleção/construção e preparação das tarefas), pretendendo analisar e compreender: (i) as características das tarefas que são valorizadas pelos professores e as preocupações que orientam a sua seleção/construção, (ii) os aspetos que valorizam na preparação das tarefas, (iii) os desafios com que se deparam na seleção/construção e preparação das tarefas e o que os desencadeia, e (v) os aspetos que valorizam e os desafios com que se deparam na seleção/construção das tarefas, quando esta é realizada tendo por base a conceção de sequências de tarefas.

Práticas do professor

As recomendações atuais da investigação sobre o professor salientam a importância de esta se centrar nas suas práticas profissionais (Ponte & Chapman, 2006; Ponte, 2012). Estas recomendações resultam essencialmente de dois argumentos. Por um lado, só analisando as práticas do professor se poderá compreender melhor as suas ações e os motivos que as desencadeiam (Schön, 1983). Por outro, porque ainda são pouco conhecidos os aspetos que as envolvem, sendo importante "estudar os elementos principais que estruturam essas práticas, os elementos que as condicionam e os contextos e recursos que podem apoiar a sua mudança, tendo em conta o desenvolvimento curricular" (Ponte, 2012, p. 95).

As decisões que o professor toma acerca do ensino, embora observáveis como ações individuais, são tomadas em determinados contextos e influenciadas por esses contextos (Ponte & Chapman, 2006). Para além dos contornos que estes podem assumir, as ações e intenções do professor são também influenciadas, por exemplo, pelas imagens que tem da profissão, pelas eventuais pressões profissionais a que está sujeito, pelas experiências profissionais que desenvolveu fora e dentro da escola e pela sua formação inicial (Ponte & Chapman, 2006).

Conhecimento, perspetivas, motivações, intenções e contexto constituem, assim, aspetos que surgem associados ao modo como o professor desenvolve as suas atividades profissionais, emergindo da prática, mas que simultaneamente influenciam o modo como cada professor interpreta, analisa e desenvolve a sua prática. Se atendermos a todos eles, "as práticas do professor podem ser vistas como as atividades que eles realizam regularmente, tomando em consideração o seu contexto de trabalho e as suas interpretações e intenções" (Ponte & Chapman, 2006, p. 481). É neste sentido que se entende a expressão 'práticas do professor'.

Quando falamos em práticas do professor importa clarificar, também, a que práticas nos referimos. Efetivamente, podemos pensar nas práticas que os professores desenvolvem na sala de aula, na escola, nos cursos de formação e em outros cenários profissionais (seminários, encontros, etc.) (Ponte & Chapman, 2006). As atividades desenvolvidas pelo professor na sala de aula e as que desencadeia fora deste contexto, para preparar o trabalho a realizar com os alunos e para avaliar aspetos relacionados com a aprendizagem e com o ensino, são habitualmente designadas por práticas letivas (Ponte, 2012). É na compreensão destas práticas que se circunscreve este texto.

Para Ponte (2012) é na prática letiva que os aspetos importantes do conhecimento didático do professor sobressaem, quer pelas atividades que desenvolve na sala de aula, quer as que realiza para preparar essas atividades. Este autor propõe um modelo de análise do conhecimento didático do professor, que assume como núcleo central o conhecimento da prática letiva, considerando que é através deste que "se fazem as opções fundamentais que orientam a prática e se regula todo o processo de ensino" (p. 88).

A importância do professor na transformação do currículo é salientada por diversos autores (Brown, 2009; Canavarro & Ponte, 2005; Pacheco, 2001; Stein, Remillard & Smith, 2007). Neste processo o professor recorre a diversos materiais curriculares que, simultaneamente, apoiam e influenciam a sua prática de sala de aula (Brown, 2009). Um dos materiais curriculares que assume particular importância na sua prática é o manual escolar (Pacheco, 2001). As tarefas propostas aos alunos, quer sejam retiradas dos manuais escolares quer sejam adaptadas/concebidas pelo professor, resultam de decisões suas e dependem do modo como interpreta e usa os materiais curriculares (Brown, 2009).

Analisando estudos que se centram no modo como o currículo é transformado pelo professor, Stein et al. (2007) identificam um conjunto de fatores que influenciam tanto o modo como o professor interpreta os documentos curriculares oficiais como o que acontece na sala de aula. Grande parte desses estudos ocorreram no contexto de reformas curriculares e concluem que o conhecimento, as crenças e a identidade profissional do professor têm impacto no modo como este compreende e põe em prática essas reformas. Alguns sugerem fatores relacionados com contextos organizacionais e políticos, nomeadamente no que diz respeito ao tipo de apoio que é dado aos professores. Em particular, a participação em comunidades profissionais é indicada como sendo fundamental na compreensão do currículo e no modo como o professor o coloca em prática.

Práticas de seleção/construção e preparação das tarefas orientadas para o desenvolvimento do sentido de número

Desde já é importante clarificar os significados associados às expressões seleção/construção de tarefas e preparação de tarefas assumidos neste artigo. A seleção corresponde à opção da escolha de uma determinada tarefa, tal como existe nos materiais curriculares e a construção inclui, quer a adaptação de uma tarefa desses materiais, quer a sua 'criação' integral por parte do professor. A preparação de uma tarefa envolve todo o trabalho que é realizado pelo professor para que esta possa ser explorada na sala de aula. Estes dois momentos de trabalho do professor em torno das tarefas não são aqui encarados como dois momentos separados, considerando-se que a seleção/construção de uma tarefa envolve já ações e ideias fundamentais à sua preparação.

Seleção/construção e preparação de tarefas. Ao selecionar/construir tarefas é fundamental que o professor atenda aos alunos a que se destinam, considerando as suas idades, os níveis de aprendizagem em que se encontram, os conhecimentos que possuem e as suas experiências anteriores relativas à aprendizagem da Matemática (Ponte, 2005; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). Por exemplo, sem conhecer o grupo de alunos a que se destina será muito difícil, à partida, identificar o grau de desafio que uma tarefa irá constituir para os alunos (Ponte, 2005). Baseando-se no modelo de classificação de tarefas que se centra no seu nível de exigência cognitiva, também Stein et al. (2009) afirmam que fazer a sua seleção com este foco não é independente de um conhecimento profundo dos alunos a que se destinam.

Ao selecionar/construir tarefas é importante que o professor consiga uma espécie de equilíbrio entre diferentes tipos de tarefas, por constituírem diferentes oportunidades para os alunos pensarem (Stein & Smith, 1998, Stein et al., 2009) e por contribuírem para atingir objetivos curriculares distintos (Brocardo, 2001). Contudo, alguns estudos revelam que, habitualmente, os professores tendem a efetuar a escolha das tarefas a partir de uma análise muito superficial das mesmas, centrada unicamente nos conteúdos que permitem abordar (Arbaugh & Brown, 2002; Stein, Baxter & Leinhardt, 1990).

Quando o professor seleciona/constrói e prepara tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número, para além de ter em conta os aspetos acima referidos, é essencial que atenda às características dos contextos das tarefas, que incluem as situações que lhe estão associadas, os modelos e os números envolvidos (Fosnot & Dolk, 2001). Assumindo que o sentido de número é essencialmente uma forma de pensar acerca dos números e das operações, planificar o ensino numa perspetiva do seu desenvolvimento exige, ainda, pensar nas ‘grandes ideias’ associadas a um determinado tópico (Clements & Sarama, 2009; Sood & Jitendra, 2007). Trata-se, sobretudo, de identificar conceitos-chave e pensar no modo como eles se relacionam, por forma a maximizar a aprendizagem dos alunos (Sood & Jitendra, 2007). É também fundamental que o professor identifique as estratégias que uma determinada tarefa suscita e que atenda aos aspetos que contribuem para a progressão das estratégias a que os alunos já recorrem (Fosnot & Dolk, 2001).

Integrar as tarefas em trajetórias de aprendizagem. Vários autores sugerem que a conceção das tarefas deve ser integrada na construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (Clements & Sarama, 2004; Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Simon, 1995). Para Simon (1995), este processo obriga a que elas sejam pensadas de modo sequencial, permitindo a progressão da aprendizagem dos alunos e partindo das hipóteses que o professor coloca sobre essa progressão. Esta trajetória representa um caminho plausível, que pode não corresponder ao caminho real de aprendizagem, sendo por isso uma trajetória hipotética.

De acordo com o ciclo de ensino da Matemática de Simon (1995), representado na Figura 1, uma trajetória hipotética de aprendizagem é constituída por três componentes: (i) os objetivos de aprendizagem, que orientam o caminho, (ii) as atividades de aprendizagem, que são pensadas tendo em conta os objetivos definidos e (iii) o processo hipotético de aprendizagem, que corresponde a uma previsão do pensamento e da compreensão dos alunos quando resolvem as tarefas. Na sala de aula, devido às interações que se estabelecem, professores e alunos fazem parte de uma experiência que, provavelmente, será diferente da que foi antecipada. Esta experiência irá influenciar o conhecimento do professor que introduzirá alterações na trajetória que foi planeada ou irá influenciar a construção de uma nova trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995).

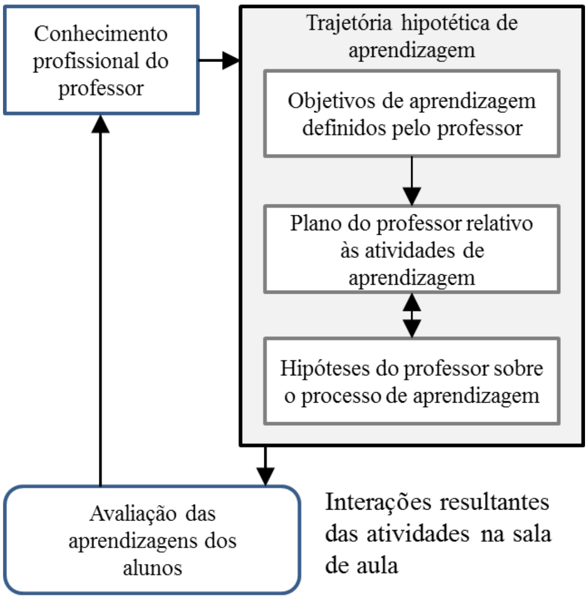


Figura 1 - Ciclo (abreviado) de ensino da Matemática (Simon, 1995)

O modelo de ensino proposto por Simon (1995) apresenta importantes vantagens quer para o professor quer para os alunos (Clements & Sarama, 2004; Cobb et al., 2001). Do ponto de vista do professor, a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem leva-o a fazer conjeturas sobre a aprendizagem da Matemática dos seus alunos e sobre os meios a que poderá recorrer para apoiar e organizar essa aprendizagem (Cobb et al., 2001). Ao envolver-se neste processo, aumenta o seu conhecimento sobre os alunos e sobre as estratégias de ensino (Clements & Sarama, 2004; Cobb et al., 2001). Do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, Clements e Sarama (2004) realçam a importância do recurso a sequências de tarefas na construção de conceitos e procedimentos matemáticos de uma forma progressiva.

Alguns estudos que têm recorrido à construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem para planificar o ensino dos números e das operações orientado para o desenvolvimento do sentido de número (Mendes, 2012; Whitacre & Nickerson, 2006; Sood & Jitendra, 2007), revelam que esta opção permite potenciar alguns aspetos importantes relacionados com as tarefas, salientando, sobretudo, a importância da construção de sequências de tarefas de forma articulada. Mas, quando se trata de pensar numa sequência de tarefas 'coerentemente articuladas' orientadas para o uso e desenvolvimento do sentido de número, há aspetos particulares a ter em conta. Trata-se, sobretudo, de atender ao modo como os contextos das tarefas (modelos, situações associadas e números) se articulam entre si (Mendes, 2012; Sood & Jitendra, 2007). Do ponto de vista do trabalho dos alunos esta articulação permite-lhes estabelecer relações entre as situações associadas aos contextos, os modelos subjacentes e os números, influenciando os procedimentos que utilizam (Mendes, 2012).

Às vantagens de perspetivar o ensino com base na construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem estão também associados desafios que se colocam ao professor. Ao implicar que, à partida, este defina os objetivos de ensino e pense numa sequência de tarefas que os permita atingir, este processo exige um conhecimento sobre as 'grandes' ideias matemáticas associadas à aprendizagem dos tópicos que pretende trabalhar com os alunos (Clements & Sarama, 2009). Para além disso, constitui um processo que implica uma relação constante entre a atividade e os seus efeitos (Simon & Tzur, 2004), obrigando o professor a refletir sobre as atividades desenvolvidas na sala de aula e nos seus efeitos na aprendizagem dos alunos. Exige, também, um forte conhecimento acerca dos seus alunos, no sentido em que, neste processo, o professor terá de prever o tipo de atividade mental que podem desenvolver e que permita a construção dos conceitos e a sua progressão (Clements & Sarama, 2009; Simon & Tzur, 2004).

Antecipar as estratégias que os alunos poderão usar na resolução das tarefas, constitui uma atividade fundamental a realizar pelo professor durante a sua preparação (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Esta atividade passa por inventariar as resoluções corretas e incorretas dos alunos e pensar antecipadamente em estratégias que traduzem diferentes níveis de desenvolvimento da aprendizagem (Stein, et al., 2008). Para além de permitir ao professor desenvolver a compreensão sobre como pensam os alunos, permite-lhe organizar e orientar as discussões na sala de aula sobre as suas resoluções e oferece-lhe a possibilidade de, ele próprio, apresentar estratégias mais eficazes, quando estas não são sugeridas pelos alunos (Markovits & Sowder, 1994). Em tarefas orientadas para o desenvolvimento do sentido de número, Yang e Hsu (2009) sugerem que a ordem de apresentação e discussão das estratégias seja realizada da de nível menos elevado de raciocínio para a de nível mais elevado.

Metodologia

O desenvolvimento do estudo foi apoiado por uma metodologia que segue uma abordagem interpretativa, de tipo qualitativo, na qual se valoriza a observação das ações dos professores e a compreensão do modo como eles próprios interpretam essas ações (Cohen, Manion & Morrison, 2007; Erickson,1986). Cada um dos professores constituiu um caso instrumental (Stake, 2007), construído e estruturado a partir das questões do estudo, da análise dos dados e da revisão da literatura focada nas práticas de desenvolvimento curricular dos professores.

Os dados da investigação resultaram de entrevistas, da recolha documental[3] e da observação participante que correspondem a três tipos de métodos de recolha frequentemente usados na investigação qualitativa (Patton, 2002). Foram realizadas duas entrevistas semiestruturadas a cada um dos professores que participaram no estudo, com registo áudio. Para as realizar foram elaborados guiões únicos para os dois professores, garantindo o questionamento aos dois professores acerca de aspetos que se mostram basilares neste estudo. Os documentos recolhidos e analisados nesta investigação

[3] Neste artigo os dados recolhidos respeitantes às entrevistas e às sessões de trabalho conjunto são identificados por E e S, respetivamente, seguidos de um número que corresponde à ordem temporal em que ocorreram.

incluíram: as produções dos alunos na resolução das tarefas, os materiais utilizados pelos professores nas aulas, as suas planificações da área da Matemática, as fichas de avaliação, fichas com indicações para o professor correspondentes às primeiras tarefas concebidas no âmbito do projeto e tarefas que os professores levaram para as sessões de trabalho.

Recorri, ainda, à observação participante nos contextos em que as práticas de seleção/construção e exploração de tarefas ocorreram – nas sessões de trabalho da equipa e na sala de aula de cada um dos professores. As sessões de trabalho da equipa foram áudio gravadas e para cada uma delas foi construído, posteriormente, um relatório que teve como principal objetivo descrever o que lá se passou e assinalar eventuais aspetos que, de algum modo, poderiam ser importantes para serem abordados em sessões seguintes ou na última entrevista. Cada uma das aulas observadas foi videogravada, tendo recorrido também a notas de campo.

A análise dos dados foi realizada em duas fases que, embora interligadas, correspondem a momentos diferentes do seu desenvolvimento. A primeira ocorreu durante a recolha dos dados, acompanhando o desenvolvimento do projeto colaborativo. Nesta fase, tal como afirma Patton (2002), fui construindo ideias acerca dos dados à medida que os ia recolhendo. A segunda, que se realizou após a conclusão do projeto, corresponde à escrita dos casos e ao que este trabalho implica – o 'refinamento' das categorias de análise e a definição e redefinição da estrutura dos mesmos.

O contexto do estudo: um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular

O estudo realizou-se no contexto de um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular que realizei com dois professores do 1.º ciclo, Manuel e Maria José. No ano letivo em que se inicia este projeto, ambos são professores na mesma escola há seis anos, lecionam o 3.º ano de escolaridade e encontram-se, pela primeira vez, a trabalhar com um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (ME, 2007). Têm, contudo, experiências profissionais muito distintas. Manuel tem 35 anos de idade e 12 anos de serviço e Maria José tem 55 anos de idade e 30 anos de serviço.

O Programa (ME, 2007), tal como o anterior Programa do Ensino Básico (ME-DGEBS, 1990), continua a atribuir um papel de destaque aos números e operações, mas apresenta mudanças de perspetiva sobre a sua abordagem, associada ao desenvolvimento do sentido de número (Ponte, 2008). Assim, este projeto surge num momento de mudança curricular que exige da parte dos professores o uso de metodologias e abordagens diferentes das que, até então, têm utilizado na abordagem deste tema.

O projeto. O projeto colaborativo teve como objetivo aprofundar modos de promover o desenvolvimento do sentido de número dos alunos através: (i) da seleção/construção de tarefas que tenham por base esse propósito e (ii) da reflexão sobre a sua exploração na sala de aula. A sua conceção inspira-se no ciclo de ensino de Simon (1995) e inclui, também, uma vertente de conceção de materiais de divulgação, relacionados com o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, nomeadamente: sequências de tarefas (com indicações para o professor), episódios de sala de aula e outros materiais.

Apresenta-se na Figura 2 um esquema que pretende resumir o trabalho perspetivado para este projeto, tendo em conta os dois contextos principais em que ele se desenvolveu – as sessões de trabalho da equipa do projeto e a sala de aula.

Nas sessões de trabalho da equipa perspetivou-se a seleção/construção de tarefas (assinalada por (a)), tendo por base a construção de trajetórias de aprendizagem, tal como é esquematizada por Simon (1995). A antecipação sobre o modo como os alunos iriam resolver as tarefas constitui um elemento importante para orientar a seleção/construção das tarefas e preparar a sua exploração na sala de aula. Depois de cada um dos professores explorar uma tarefa na sala de aula (assinalado por (b)), na sessão de trabalho seguinte, a equipa avalia a aprendizagem dos alunos e reflete sobre o modo como a tarefa foi explorada na sala de aula (assinalado por (c)), apoiando-se, essencialmente, nas produções dos alunos e em episódios da aula previamente selecionados pela investigadora e/ou pelos professores. Destas discussões resultam decisões a tomar relativamente à tarefa a propor a seguir e, eventualmente, uma reformulação da tarefa que foi explorada na sala de aula (indicado em (d)). A equipa pode recorrer a uma tarefa que faz parte da sequência de tarefas inicialmente prevista, sentir a necessidade de alterar a tarefa que previra ser explorada, ou, selecionar/construir uma nova tarefa. Estas duas últimas situações correspondem a uma reformulação da sequência de tarefas inicialmente prevista (indicado em (e)).

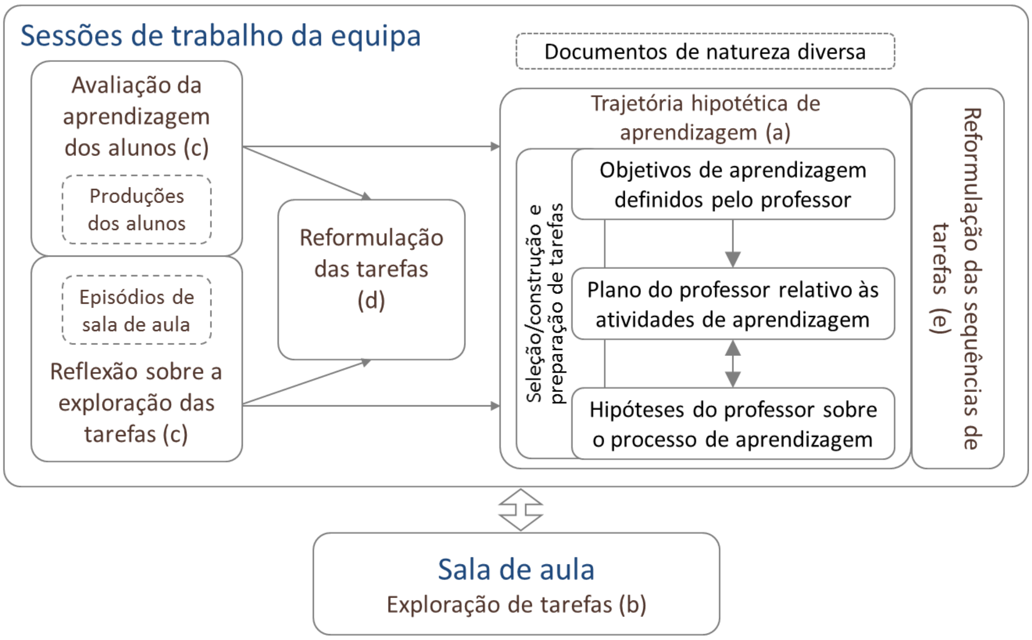


Figura 2 - Esquema que sintetiza o trabalho perspetivado para o projeto

Uma grande parte do trabalho planeado para este projeto centra-se, assim, na construção de sequências de tarefas e na sua reformulação, que resulta da reflexão que a equipa realiza acerca da exploração das tarefas na sala de aula e da análise do modo como os alunos pensam. Para apoiar este trabalho, perspetivou-se o uso de documentos de natureza diversa, uns propostos pela investigadora e outros pelos próprios professores.

A dinâmica do projeto e a adaptação ao trabalho com as turmas. Desde cedo que a dinâmica do projeto pensada inicialmente se mostra desajustada por dois motivos, que se interligam. Um deles relaciona-se com o facto de este projeto valorizar as práticas de sala de aula e a reflexão sobre essas práticas, e, o outro, prende-se com as necessidades reais do trabalho a realizar com os alunos.

A construção de sequências de tarefas, para além de exigir algum tempo para discutir a sua conceção enquanto conjunto de tarefas, exige um trabalho intenso em torno de cada tarefa. Para além deste aspeto, numa fase inicial do projeto, havia a intenção de construir um conjunto de materiais de divulgação que incluiriam as tarefas e uma ficha de indicações para o professor onde se explicitariam os objetivos de cada uma, se registavam modos de as explorar e se incluiriam possíveis caminhos a seguir pelos alunos. Após a reflexão sobre a exploração de cada tarefa, tanto a própria tarefa como a ficha de indicações para o professor seriam, eventualmente, reformuladas. Realizar todas estas atividades com uma reunião semanal, não perdendo de vista o objetivo de um projeto que exigia um trabalho sequencial e constante com os alunos em torno dos números e das operações, levou a equipa a tomar opções – investir nas atividades que diziam diretamente respeito ao trabalho dos alunos e mudar o foco das ações de divulgação do projeto, que se centraram na realização de uma sessão com Encarregados de Educação dos alunos das turmas que participaram no projeto e na apresentação de duas sessões em Encontros de professores.

Aspetos da conceção do projeto que se destacam. Na dinâmica do projeto foi previsto o envolvimento dos professores na análise das produções resultantes da exploração das tarefas. Este aspeto mostrou-se fundamental para melhorar a capacidade dos professores na formulação de hipóteses sobre o processo de aprendizagem, permitindo-lhes melhorar a antevisão das estratégias na resolução das tarefas e a compreensão de como os alunos pensam. Também os episódios de sala de aula constituíram um elemento fundamental da conceção inicial do projeto colaborativo, permitindo suscitar e centrar a reflexão dos professores em aspetos que se revelaram importantes na exploração de tarefas concebidas no âmbito do mesmo.

Os casos dos professores Manuel e Maria José

Características das tarefas: Aspetos que valorizam. Numa fase inicial do projeto, Manuel e Maria José salientam as situações problemáticas como o tipo de tarefas que valorizam. Manuel refere-se à importância de diversificar os seus contextos para motivar os alunos, assumindo, contudo, que nem sempre o consegue fazer.

> *Há atividades, tarefas que não conseguimos diversificar… que não conseguimos dar outro carisma que motive os alunos”. (M, E1)*

Maria José classifica as situações problemáticas em fáceis e difíceis, afirmando que vai tomando as suas opções tendo em conta as dificuldades manifestadas pelos alunos e realça, também, a preocupação com o envolvimento e o sucesso daqueles na resolução das tarefas.

> *Às vezes faço fichas que obriguem um bocado mais a pensar. (…) Por vezes sou surpreendida e eles não conseguem e depois tenho que fazer as outras mais fáceis. (MJ, E1)*

> *Nós quando estivemos a fazer isso [pensar numa tarefa] tivemos a preocupação de fazer coisas acessíveis para que eles não desmotivassem…, para sentirem que são capazes. (MJ, S3)*

Referindo-se aos contextos de diferentes tarefas, estes professores vão fazendo afirmações do tipo: "é muito interessante e muito atual" (M, S24), "é um contexto que eles conhecem" (M, S20), "e isto tem a ver com o dia-a-dia" (MJ, S25). Ainda que, inicialmente, estas características pareçam ser valorizadas como forma de motivar os alunos, ao longo do projeto vão igualmente refletindo sobre se os alunos podem ou não atribuir significado às situações que lhes são propostas. A dificuldade de atribuição de significado pelos alunos na exploração da tarefa "Gasolina", leva estes professores a explicitarem o valor que atribuem a este aspeto.

Gasóleo	1,	0	6	8
Gasolina 95	1,	3	3	3
Gasolina 98	1,	4	6	8
Diesel plus	1,	1	3	8

Figura 3 - Tabela de preços de combustível incluída na tarefa "Gasolina" explorada na turma de Maria José.

Maria José atribui as dificuldades dos alunos ao facto de não existir um material físico que represente os valores monetários correspondentes ao preço do combustível (ver Figura 3) e, na sequência desta reflexão, Manuel opta por retirar a coluna do algarismo das milésimas quando explora esta tarefa na sua aula por considerar ser difícil atribuir-lhe significado.

> *A leitura do número tornou-se muito complicada. (…) Porque este número aqui é muito complicado de ler, tendo em conta o contexto. Porque eles diziam 68 cêntimos [refere-se ao preço da gasolina 98 que consta na tabela da figura 3]. E não é! (MJ, S26)*
> *É um contexto real, mas é um contexto específico. (…) Nós próprios temos dificuldade. (…) Ou se corta aqui [algarismo das milésimas dos preços da figura 3] (…) Ou, então, vai acontecer aquilo que aconteceu. (M, S26)*

Os números envolvidos no contexto da tarefa é outra das características valorizadas particularmente por Manuel. O receio de os alunos manifestarem muitas dificuldades na resolução de uma tarefa, leva este professor a atender à grandeza desses números. Por exemplo, numa das primeiras sessões, quando a equipa discute a possibilidade de se proporem problemas que envolvem a operação divisão, Manuel não vê inconvenientes, desde que os números incluídos sejam ‘pequenos’:

> *Eu acho que fazíamos primeiro esta proposta (…) e víamos se a generalidade da turma, ou quase toda, consegue (…) Se estamos a introduzir algo de novo, se estamos a trabalhar com um número muito grande ou com que não estão tão familiarizados, o que é que acontece? (M, S4)*

Manuel sugere que ao iniciar a abordagem de um certo tópico, é importante optar por números ‘pequenos’ e ir aumentando, gradualmente, a sua grandeza nas tarefas seguintes. Embora esta preocupação se mantenha durante todo o projeto, este professor passa depois a considerar também as relações numéricas e os cálculos que os números possam suscitar. Por exemplo, na construção da primeira questão da tarefa “Quantas bolas de Natal?”, salienta a importância de se propor uma situação envolvendo o produto 7×7 por ser um dos que os alunos não conhecem, o que os obrigará a relacionar com outros já conhecidos:

> *O facto de eles [os alunos] não conhecerem a tabuada do 7, vão ter de a ‘desmontar’ para utilizar os produtos que já sabem (…) e desenvolvem a propriedade distributiva. (M, S12)*

Ao analisar as produções de um par de alunos (ver Figura 4), confirma a sua conjetura, relacionando esta resolução com a escolha dos números envolvidos:

> *Neste caso, eles não sabiam quanto era 7×7 e a partir daí tentaram arranjar uma estratégia para chegar lá (…) É engraçado, aqui, como não sabiam, recorreram à decomposição e à imagem. (M, S13)*

Figura 4: Registo efetuado por Renato e Rui na resolução da questão 1 da tarefa “Quantas bolas de Natal?”

Manuel seleciona o exemplo da figura 5 para indicar uma tarefa que pode propiciar o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. O modo como este professor a interpreta revela, não só, o valor que confere à articulação do contexto com o tipo de cálculos a efetuar, como também, ao recurso a números de referência (neste caso, 10, 100 e 1000).

> *Partindo desta situação, eles percebem que se para 8 é só subtrair 2, para 98 é a mesma coisa, vou subtrair no final 2... Porque é mais fácil trabalharem com o 10, com o 100 e com o 1000 (...) estamos a dar ferramentas aos alunos para eles desenvolverem e poderem aplicar. (M, S2)*

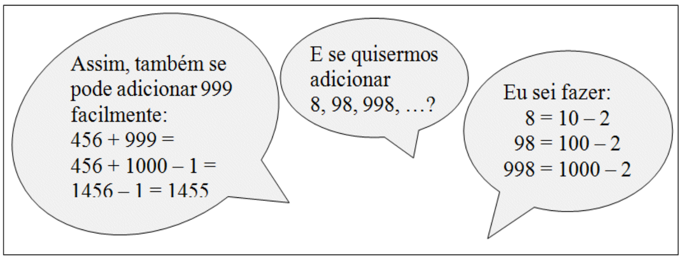


Figura 5 - Proposta do manual adotado que, na perspetiva de Manuel, permite o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental[4]

Associado à preocupação de os alunos se envolverem na resolução das tarefas, Manuel valoriza as que incluem questões que vão aumentando no seu grau de dificuldade. Tanto Manuel como Maria José salientam a possibilidade da tarefa permitir aos alunos estabelecerem relações entre as questões.

> *Eu acho que eles se sentem confortáveis com uma tarefa que os vai guiando. Neste caso, o grau de dificuldade vai aumentando e vai conduzi-los. (...) E aí está, vão relacionando com tudo o que foi feito na tarefa. (M, S6)*

> *Eles começaram logo a fazer e tiveram facilidade em fazer isto… e foram usando as perguntas anteriores. (MJ, S18)*

Manuel salienta ainda a importância das tarefas estarem 'bem estruturadas'. O significado atribuído a esta expressão parece relacionar-se com a intencionalidade educativa que considera dever estar presente na sua seleção/construção.

> *Ao estar bem estruturada, há todo um conjunto de passos ou procedimentos que os alunos sabem e vão fazendo, para depois podermos chegar ao objetivo final. (M, E2)*

[4] Retirado de Landeiro, A., Gonçalves, H. & Pereira, A. (2010). *A Grande Aventura – Matemática 3.º ano (manual escolar)*. Lisboa: Texto Editores Lda.

Em diversos momentos os professores vão referindo o modo como costumavam organizar o trabalho em torno dos números e das operações. O seu discurso é revelador da valorização do uso do algoritmo enquanto procedimento de cálculo e de uma seleção de tarefas orientada para a escolha de formas de resolução de entre as que os alunos já tinham aprendido.

> *[A Matemática] era muito mecanizada. (...) Se o problema diz isto e isto, se faz essa pergunta já sabemos que é 'de mais', ou já sabemos que é 'de menos'. Eles [os alunos] seguiam aqueles caminhos e era aquilo, e pronto. (MJ, E2)*

> *Ainda não propusemos problemas de divisão, porque ainda não demos a divisão. (MJ, S3)*

A análise do novo Programa (ME, 2007) parece estar na origem do valor que Manuel e Maria José passam a atribuir a tarefas que promovem o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemáticos dos alunos. Numa fase inicial do projeto, Manuel adjetiva estas tarefas como 'desafiadoras' por suscitarem o uso de diferentes estratégias e a explicação do modo como os alunos pensam:

> *Eu penso que este Programa apela muito a isso, ao raciocínio, ao pensar sobre. Não é só o fazer mais, mas também o pensar fazendo (...) Tarefas desafiadoras, essencialmente isso – que apelem muito à comunicação do aluno, ao raciocínio do aluno. (M, E1)*

> *Com este novo Programa, punha-os a pensar, a raciocinar sobre a maneira de lá chegar. (...) Ouvia-os mais e houve um maior desenvolvimento aqui. (MJ, E2)*

Ao refletirem, no final, sobre o trabalho realizado pelos alunos em torno das tarefas propostas durante o projeto, Manuel e Maria José valorizam o facto de estas suscitarem diversas estratégias, incentivando o uso das propriedades das operações e o estabelecimento de relações numéricas. Maria José fá-lo implicitamente quando, ao tentar caracterizar o que é uma 'boa tarefa', seleciona algumas que evidenciam estas características.

> Eu gostei de muitas tarefas! Eu acho que esta tarefa dos azulejos (…) Acho que foi uma tarefa muito interessante para eles. Utilizaram diferentes estratégias de cálculo, isso foi muito importante. (M, E2)

> *Uma boa tarefa é aquela em que os alunos se empenharam bastante e em que eu vi frutos desse empenhamento… Ora, a dos Ovos e o Relacionar para calcular, eles gostaram imenso de fazer, porque acharam: É tão fácil, então se eu juntar… este e aquele, então vou juntar este e o outro e saem aqueles resultados todos. (MJ, E2)*

Preparação das tarefas: Aspetos que valorizam. A antecipação das resoluções dos alunos é um dos aspetos que tanto Manuel como Maria José valorizam no momento de preparação das tarefas. Apesar de nenhum deles verbalizar que esta antecipação lhes permite compreender melhor o modo como os alunos pensam, na verdade, ao longo do desenvolvimento do projeto ambos mostram uma maior sensibilidade/capacidade para antever possíveis estratégias que poderão surgir durante a exploração das tarefas na aula. Manuel descreve-a como uma forma de "tentar prever o que é que o aluno vai fazer" (M, E2) e, acima de tudo, de valorizar os diferentes caminhos que poderão surgir.

> *Nós temos o nosso caminho pensado e é aquele caminho que nós achamos que é. No entanto, vão aparecendo outros caminhos. (M, S22)*

Tanto Manuel como Maria José consideram a antecipação das estratégias fundamental na melhoria das discussões coletivas, por facilitar a identificação de diferentes estratégias que possam surgir e da(s) que se mostra(m) mais eficaz(es). Ambos referem ainda que lhes oferece a possibilidade de serem eles próprios a avançar com uma estratégia que consideram importante ser discutida, mesmo que esta não tenha emergido das resoluções dos alunos.

> *Nós podemos também direcioná-los e levá-los para aquilo, se eles não chegaram lá, ao que nós pensámos. E notou-se isso, porque os possíveis caminhos que eles não usavam, nós podíamos ir lá buscá-los. (MJ, E2)*

Maria José vê na antecipação das estratégias, também, uma forma de garantir uma maior segurança e preparação para dar resposta à imprevisibilidade do trabalho desenvolvido pelos alunos.

> *Também os caminhos que eles poderão dizer… nós já estamos alertados para isso (…). Assim posso precaver-me um pouco mais na resposta que poderei dar. (MJ, E2)*

Manuel e Maria José atribuem importância à clareza dos objetivos da tarefa. Na perspetiva de ambos, uma compreensão clara dos objetivos da tarefa ajuda o professor a conduzir a sua exploração sem perder de vista a intencionalidade para a qual ela foi selecionada ou construída:

> *[É importante porque] temos a noção daquilo que eles irão percorrer e ver se eles percorreram aquilo que nós pensámos. Permite… ver se está a correr bem. (MJ, E2)*

> *O ter um objetivo é importante para nós, enquanto professores, porque… temos de conduzir os alunos. É óbvio que há aqui pelo meio o trabalho deles. Mas, temos que os conduzir a um objetivo final, ao objetivo daquela tarefa, para que eles percebam uma regra, uma propriedade… No final, para além de tudo o que foi feito, temos que ter a noção que os alunos atingiram, ou não, aquele objetivo. (M, E2)*

Na opinião de Manuel, ter os objetivos da tarefa bem claros constitui, também, um elemento importante para ajudar o professor a perceber se estes foram, ou não, atingidos, permitindo-lhe uma melhor perceção da aprendizagem realizada pelos alunos. Maria José considera que os momentos de preparação das tarefas contribuem para uma definição mais clara dos objetivos das mesmas. Afirma, também, que "ao fazermos isso [definir os objetivos das tarefas], vamos buscar os pormenores, que fazendo somente os outros mais abrangentes se calhar, nos escapam" (MJ, E2), parecendo referir-se aos contributos que este aspeto trouxe para um maior aprofundamento do trabalho em torno dos tópicos.

Com o desenvolvimento do projeto, os dois professores passam, também, a atribuir importância à definição da modalidade de trabalho na exploração das tarefas. Assumindo que na sua prática habitual anterior não costumava recorrer ao trabalho a pares na área da Matemática, Maria José, na última entrevista refere que este é um dos aspetos que pensa alterar na sua prática futura.

> *Eu praticamente não trabalhava a pares a Matemática, e foi uma das coisas que se propôs e que… que eu alteraria em mim. Vou alterar na minha maneira de trabalhar. (MJ, E2)*

Maria José justifica a sua opção por considerar que esta modalidade de trabalho possibilita o confronto e partilha de ideias acerca dos caminhos que poderão seguidos pelos alunos na resolução das tarefas e permite melhorar as escolhas desses caminhos. Identifica, ainda, nesta modalidade de trabalho, uma dimensão importante na formação pessoal e social dos alunos, ao promover a capacidade de partilharem ideias e de se ouvirem uns aos outros.

> *Porque eles ficam em confronto um com o outro e há ali uma disputa de… de conhecimentos, e uma troca de impressões: Ah! não… não vamos por aqui, porque se calhar é melhor ir por ali. E eles obrigam-se a ouvir um ao outro. Para além da prática, do trabalho na Matemática, também tem a ver com o trabalho todo de uma sociedade… de eles saberem, de começarem a ouvir-se uns aos outros. (MJ, E2)*

Ao tentar justificar a opção pelo trabalho a pares na exploração de uma tarefa, Manuel deixa transparecer que considera importante ir mudando a modalidade de trabalho adotada. Contudo, a última frase do excerto seguinte, parece traduzir a procura de uma razão para o trabalho individual, referindo a possibilidade de ter acesso a uma maior quantidade de estratégias de resolução.

> *Como também tínhamos feito muitas a pares… Não há assim uma justificação para… Como fizemos muitas a pares. E é assim, como são 24 meninos a pensar, podem surgir mais estratégias… podemos pôr esta individual. (M, S22)*

Em discussões posteriores sobre a modalidade de trabalho a adotar, Manuel aponta mais uma razão para a resolução das tarefas individualmente – a possibilidade de aceder ao modo como cada aluno pensa e, principalmente, às dificuldades de cada um. Embora tenha uma noção das dificuldades individuais dos seus alunos na área da Matemática, considera que o trabalho a pares poderá esconder algumas delas, o que não acontecerá se propuser a resolução individual das tarefas.

Durante a preparação das tarefas, ambos os professores encaram o manual adotado como um material importante para este momento.

> *[O manual adotado] é um livro feito à luz do novo Programa. (...) Agora, eles não estão habituados, se calhar por culpa nossa...se calhar por ser também novidade. (M, S5)*

A sua análise sistemática parece ter conduzido a uma maior consciencialização das potencialidades das tarefas nele incluídas e ao reconhecimento que este segue as perspetivas do Programa (ME, 2007).

Seleção/construção e preparação das tarefas: Desafios. Ao selecionar/construir tarefas, Manuel e Maria José depararam-se com alguns desafios que, numas situações, se traduziram em dificuldades e, noutras, em ambivalências no que respeita às opções a tomar. Para ambos o Programa (ME, 2007) conflitua com a perspetiva de ensino e de aprendizagem dos números e das operações com que os seus alunos foram confrontados nos dois últimos anos, nomeadamente com o trabalho realizado em torno do cálculo. Apesar de concordarem com as propostas deste Programa, não concordam com a sua implementação a meio de um ciclo de escolaridade. Esta constitui uma fonte de ambivalências e dificuldades relacionadas com o desenvolvimento do cálculo mental.

> *Não é muito culpa nossa, Manuel. (…) É iniciar um programa a meio do ciclo (…) Já vinha aquilo tudo mecanizado e de uma determinada maneira. (MJ, S5)*

Uma dessas ambivalências relaciona-se com a persistência de alguns alunos recorrerem a ‘regras’ de cálculo sem compreensão, aprendidas nos dois primeiros anos, em vez de usarem estratégias de cálculo mental. Por exemplo, analisando os raciocínios dos alunos no âmbito da exploração de uma cadeia numérica, Manuel identifica a tendência destes efetuarem os cálculos com os dígitos em vez de recorrerem a relações numéricas. Os dois professores reconhecem que é algo que querem mudar mas que eles próprios terão incentivado nos anos anteriores.

> *Eles disseram 'dois mais 2 igual a 4' e eu pensei assim: Eu sei que isto não é correto. Então, vou pôr $2 + 2 = 4$ ou vou pôr $20 + 20 = 40$? Eles têm as coisas de tal forma interiorizadas (...). Tenho que tentar levá-los a pensar nos números. (M, S8)*

A segunda situação tem a ver com a persistência dos alunos em recorrer ao algoritmo (tradicional), mesmo quando as tarefas apelam ao uso de determinadas estratégias de cálculo mental, reconhecendo, mais uma vez a influência do modo como os alunos estavam habituados a realizar os cálculos anteriormente.

> A questão da decomposição e a aplicação da propriedade. Para eles era difícil fazer isso (…) Porquê? Porque nós, quando trabalhávamos a tabuada, a tabuada terminava no 10. Tudo o que seja daí para cima neste caso o 6 vezes o 15, é pelo algoritmo. E portanto, foi isso que aconteceu. (M, S10)

Maria José identifica-se com estas ambivalências que vão sendo verbalizadas por Manuel, centrando o seu discurso nas dificuldades que ela própria sente em mudar a sua prática de ensino dos números e operações. Estas dificuldades estão relacionadas, sobretudo, com a ideia que tem de cálculo mental quando inicia a sua participação no projeto. Para além da ideia que cálculo mental é efetuar cálculos sem recorrer a qualquer registo escrito, sobressai no seu discurso a perspetiva que esta forma de cálculo é independente do tipo de procedimentos utilizados.

> *[É uma tarefa de cálculo mental], porque eles têm que mentalmente... Aqui eles não vão utilizar nada, pronto, vai ser só ao nível de raciocínio, de cabeça. (MJ, S2)*

Exemplificando como se efetua mentalmente $235 + 125$, Maria José recorre 'mentalmente' ao algoritmo, descrevendo o seguinte: "Cinco e cinco, dez e vai um. Três e dois, cinco e um, seis. Dois e um, três. Trezentos e sessenta" (MJ, S2). Este entendimento de cálculo mental, parece relacionar-se com alguma dificuldade que evidenciou em identificar a(s) estratégia(s) de cálculo que as tarefas visam desenvolver.

> *Hoje quando eu estive a trabalhar esta folha [proposta do manual adotado], acontece aqui com o $3 + 19$. Eles disseram logo que era 22. E disseram: Ó professora é muito mais fácil do que fazer $2 + 20$. E, aqui, fizeram logo 22. Portanto, eles quando fazem isto, é muito mais fácil. (MJ, S5)*

Maria José assume, algum desconforto em trabalhar com o manual adotado. Este desconforto parece ter dois focos que se interligam: os hábitos de trabalho dos alunos e os seus próprios hábitos de trabalho. Sobressaem, essencialmente, três críticas ao manual: (i) a falta de exercícios, (ii) a exigência de muitas explicações/justificações e (iii) o excesso de texto, obrigando a um grande esforço de interpretação por parte dos alunos.

> *Eu tive dificuldade! (...) situações problemáticas que eu lia a primeira e lia a segunda vez e dizia: Espera aí, parece que eu não estou a ver muito bem como é que é!, (...) E, depois, não há exercícios, percebe? (...) Muito escrita! Percebe? (...) Depois o aluno tem que ler aquilo muito bem, interpretar! (...) Eles às vezes têm dificuldade. (MJ, E2, p. 29)*

A participação no projeto despoleta um conjunto de desafios a estes professores. Um primeiro relaciona-se com o confronto com aspetos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, sobre os quais ainda não tinham refletido, nomeadamente a importância de distinguir exercício de problema quando se selecionam/constroem tarefas. Maria José parece entender um problema como um exercício especial. O que distingue o primeiro do segundo é a existência de uma situação associada ao problema e em qualquer um dos casos, a ideia é exercitar. Manuel reconhece alguma falta de rigor de linguagem, usando a palavra exercício como sinónimo de questão, mostrando que já tinha a perceção de que exercício e problema têm características diferentes. Ambos reconhecem a importância de ter presente a distinção entre estes dois tipos de tarefa.

Eu:	De vez em quando, chamam a estas tarefas exercício. É um exercício? É um problema? Um problema é a mesma coisa que um exercício? **(…)**
Maria José:	(…) Se formos ver, eles vão exercitar. Vão fazer qualquer coisa. Portanto, poderá ser um exercício. Mas é um exercício específico. **(…)**
Manuel:	(…) É um problema porque temos de interpretar e temos de resolver. Um exercício é algo que nós já temos bem definido e é só aplicar aquilo que nós sabemos. (…) Mas, ao dizer exercício, queremos dizer questão. Não estamos a pensar nisso. Mas, faz sentido essa distinção.
Maria José:	Faz todo o sentido. Eu nunca tinha pensado nisto. (S22)

Um segundo desafio é manifestado, sobretudo, por Manuel e relaciona-se com o seu receio da desmotivação dos alunos na resolução das tarefas. Perante uma tarefa que considera difícil, este professor parece tender a sugerir a sua simplificação, quer através da diminuição da grandeza dos números envolvidos (tal como foi exemplificado na página 38), quer através da eliminação de questões que considera mais complicadas (como se ilustra na figura 6).

Figura 6 - Adaptação da tarefa "Organizar Menus"[5]

Ao refletir sobre o modo como os alunos reagiram a esta tarefa, Manuel refere que estes "Não tiveram dificuldades [na sua resolução], porque era uma tarefa que eles, de certa forma, tinham feito já. Não com estes ingredientes (…)" (M, S21). Ainda assim, parece recear que os alunos manifestassem dificuldades na sua resolução, sem a simplificação do contexto.

> *Havia aqui um conjunto de fatores que eles tinham de combinar e de certa forma acho que ainda não estariam preparados para isso. (M, S21)*

Finalmente, assinala-se o desafio em encontrar/criar contextos de tarefas que suscitem o uso de determinadas relações numéricas e propriedades das operações. O seguinte excerto ilustra parte do processo de construção da tarefa "Quantas bolas de Natal?" (ver figura 4), no qual se enfrenta a dificuldade em encontrar imagens reais que contenham um determinado número de objetos (neste caso 7), cuja disposição suscite o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Maria José:	Pois é! Tem de ser coisas com 7. (…)
Eu:	Quantas bolas têm as embalagens de bolas de ping-pong?
Manuel:	4. É difícil!
Maria José:	Caixas de bombons. (…) Mas não as sei construir! (…)
Eu:	Como é que vamos fazer para fazer sair a propriedade distributiva?
Manuel:	Fazemos grupos de caixas. (S12, p. 4)

A conceção de sequências de tarefas: Aspetos que valorizam e desafios com que se deparam. Tanto Manuel como Maria José envolvem-se ativamente na procura de tarefas que visam atingir os objetivos subjacentes às sequências de tarefas discutidos pela equipa, revelando preocupações relacionadas, particularmente, com as estratégias que permitem suscitar e com ordem das tarefas. Na última entrevista, referindo-se à importância de se construírem sequências de tarefas, Manuel realça precisamente estes aspetos. Elege a

[5] Tarefa retirada de Mendes, Brocardo, Delgado e Gonçalves (2009).

sequência de tarefas que, na sua perspetiva, foi melhor conseguida, considerando a evolução das aprendizagens que observou nos alunos.

> O desenvolvimento de tarefas, como nós fizemos aqui. (…) Não aparecerem de uma forma que não esteja sequenciada, isso é muito, muito importante! (M, E2)

> *A que eu acho que resultou melhor e que comecei a ver uma evolução neles foi a da multiplicação! (...) o criar, o calcular, o fazer as tabuadas (...) Quando se pôs a dos azulejos, eles iam contando um a um… e já começaram a fazer o modelo retangular (...) Vi a evolução deles. Acho que deram um salto. (M, E2)*

A sequenciação das tarefas que vão propondo parece ser informada pelas suas experiências anteriores de ensino dos números e das operações e pelas discussões que se vão realizando nas sessões da equipa, tanto sobre o novo Programa (ME, 2007), como sobre algumas propostas de sequências de tarefas incluídas em materiais didáticos que seguem de perto as perspetivas deste documento. Nessa ordenação, destaca-se a crescente sensibilidade na escolha dos números (algumas tarefas usam os mesmos números ou alguns que resultam de relações de dobro, metade…) e a opção por diferentes tipos de tarefas (situações problemáticas, construção de tabuadas e cadeias numéricas). A título de exemplo, apresenta-se um excerto que inclui a proposta de Maria José para a sequenciação de um conjunto de tarefas:

> *Começaria por aqui, portanto pela situação problemática aqui do livro. (...) Eles têm aqui estas estratégias e estes problemas. A seguir, já vem o 6×4, com o exemplo das diferentes estratégias. Tem aqui depois esta tabela que vão fotocopiar e colocar no caderno. Isto é já uma maneira diferente daquilo que estão habituados… e dizer-lhes que além do* 10*, que eles estão habituados, vai aparecer o* 11*, o* 12 *(...). Partem de situações que eles conseguem ver melhor, visualizar (...) e depois é passar aqui para o papel o que nós dissemos e apresentar a tabuada como costumamos fazer. (...). Embora, com uma nuance, pronto, de justificar (...). (MJ, S6)*

A fase em que se definem os objetivos de aprendizagem e se procura um conjunto de tarefas que os concretizem articuladamente, constituiu provavelmente, o maior desafio para estes professores. Não é algo que verbalizem mas que se observa nas suas posturas expectantes relativamente ao que eu teria para sugerir. Planificar o ensino através da conceção de sequências de tarefas constituiu uma novidade para Manuel e Maria José. Efetivamente, no início do desenvolvimento do projeto, tanto um como outro relatam práticas anteriores de planificação centradas nos tópicos de ensino, em que a escolha das tarefas vai sendo realizada à medida que vão avançando na abordagem desses tópicos, com marcos de concretização negociados em Conselho de Ano e cuja sequência é orientada pelo manual adotado.

> *Pegamos nas planificações que são feitas no Conselho de Ano. (...) Depois dessa planificação, planificamos por semanas. E depois nós nas semanas vamos limpando. Vamo-nos orientando assim, e vamos consultando o manual [adotado]. Às vezes consultamos outros [materiais]. (MJ, E1)*

Um outro desafio com que os professores se deparam é a integração das propostas do manual adotado nas sequências de tarefas que vamos construindo. Para Manuel o manual adotado apresenta uma abordagem tardia de alguns tópicos, sugerindo a sua antecipação e a sua integração nas sequências de tarefas que vamos construindo.

> *A questão dos números racionais não negativos é algo novo para eles. Devíamos começar mais cedo. A divisão também. Podíamos antecipar. (...) Para quem trabalhou no segundo ano a tabuada do 6, a tabuada do 7 estar na página 84 é muito para a frente. (M, S5)*

Comparando com o percurso de ensino que costumavam 'efetuar' em anos anteriores, tanto Manuel como Maria José consideram que este manual não apresenta um aprofundamento de alguns tópicos (nomeadamente, no que se refere às unidades de medida) que deveria ser realizado no 3.º ano de escolaridade.

Maria José: Porque já agora ficávamos com as medidas trabalhadas. Porque agora vamos acabar por falar nas medidas de capacidade e nas medidas de massa. Pelo menos o quilograma e o grama.
Manuel: É que nós acabámos por fazer uma tarefa desta sequência todas as semanas. Já que estamos a trabalhar os números decimais podíamos ter aproveitado para fazer outras tarefas sobre as medidas.
Eu: E isso não aconteceu porquê?
Maria José: Se o livro tivesse tarefas sobre isso seria mais fácil. Encaixávamos e aproveitávamos para trabalhar… (S28)

Para além das dificuldades na compreensão da intencionalidade de algumas tarefas do manual, Maria José considera que este não inclui alguns tipos de tarefas que considera importante ir realizando com os alunos. Refere-se, sobretudo, à falta de exercícios e à inexistência de tarefas que permitam sistematizar os conceitos abordados num determinado período de tempo (como se ilustra na página 43).

Um outro desafio com que estes professores se deparam liga-se com a implementação de um 'novo' Programa que 'rompe' com a sua sequência habitual de ensino. A possibilidade de ensinar o algoritmo da divisão seguindo o caminho proposto pelo novo Programa (ME, 2007) provoca-lhes alguma tensão. Contudo, os motivos que lhe estão subjacentes parecem ter origens diferentes. Para Manuel trata-se de manter uma certa coerência com o trabalho desenvolvido anteriormente, com os mesmos alunos, a propósito dos algoritmos das outras operações.

> *Isso que diz e muito bem, para os alunos que vão trabalhando o número e não o algarismo em si, faz todo o sentido. Mas nós trabalhámos o algoritmo da adição usando dígitos, a subtração usando dígitos e a multiplicação usando dígitos. É óbvio que neste período, acabámos por desenvolver o cálculo mental. (…) Agora, não sei até que ponto devemos pegar na divisão desta maneira. (M, S27)*

Apesar de também valorizar a coerência no ensino dos algoritmos das quatro operações, Maria José revela, sobretudo, alguma preocupação com a sua adaptação, enquanto professora, a uma nova abordagem do algoritmo da divisão.

> *Eu tenho muita dificuldade em fazer isto. Eu olho para aí e penso: Mas porque é que eu vou pôr ali aquilo? Como é que vou transmitir-lhes…? Por exemplo, 370 a dividir por 24, eu vou pôr aqui um dez? (…) Pronto aquele (aponta para o algoritmo da divisão na sua forma condensada) tudo bem. Agora este, para o poder explicar… Eu não sei. Eu não sei se não será mais confuso para eles. Muitos números. (MJ, S27)*

Numa fase inicial do projeto, a sugestão de alteração da sequência de tarefas inicialmente prevista, resulta, sobretudo, de algumas preocupações de Manuel associadas à análise das estratégias usadas pelos alunos. Efetivamente, a constatação de dificuldades dos alunos na exploração de uma determinada tarefa ou o não surgimento de algumas estratégias antecipadas, nomeadamente se as considera estratégias eficazes, constituem motivos de preocupação e, por vezes, de alguma tensão para Manuel. Por exemplo, ao constatar que nenhum dos seus alunos recorreu a subtrações sucessivas na resolução da tarefa "Vamos colecionar cromos" (estratégia antecipada e que surgiu na turma de Maria José), Manuel mostra-se preocupado, questionando-se sobre a relevância desta situação para as futuras aprendizagens.

> *Ninguém fez assim (aponta para as produções dos alunos de Maria José). Vale a pena insistir para eles perceberem que esta é mais uma ferramenta? Como eu quero ir para a divisão e sendo que a multiplicação é a base para a divisão, a minha questão é só esta: Isto aqui é importante para eles? (M, S22)*

Na sequência da verbalização desta preocupação, refere que ele e a Maria José estiveram a analisar o manual adotado e verificaram que inclui problemas do mesmo tipo, sugerindo "Nós temos aqui muitos exemplos que podemos fazer!" (MJ, S22).

Com o desenvolvimento do projeto, Manuel e Maria José revelam alguma tensão com o facto de as sequências de tarefas que vão sendo construídas não estarem a acompanhar completamente a ordem de abordagem dos tópicos, definida em Conselho de Ano. A eventual comparação realizada pelos Encarregados de Educação, com o trabalho que está a ser efetuado em outras turmas do Agrupamento e o facto de todas elas realizarem uma mesma prova de avaliação no final de cada período, parecem desencadear esta tensão.

Manuel: Nós sentimos a necessidade de trabalhar o algoritmo, por vários motivos. Nós tivemos reunião de Conselho de Ano na quinta-feira e estamo-nos a atrasar. (…) Os decimais, os colegas já deram (…)
Eu: E vocês têm que dar todos o mesmo, é isso?
Maria José: Convém porque depois temos as fichas finais…
Manuel: Pois. E aqui compara-se muito. A questão é que os pais conversam uns com os outros e sabem que alguns já deram o algoritmo da divisão. (…)
Eu: Nós decidimos aqui começar pelas frações, mas tendo em conta esse constrangimento podemos trocar e começar pelos decimais. (S21)

A procura de solução para este problema, conduz os professores a sugerirem alterações quer da ordem das sequências previstas quer das próprias sequências. Nesta última situação, a solução encontrada passa por eliminar tarefas inicialmente previstas, sugerindo a construção de outras sequências relacionadas com tópicos cujo ensino tenha sido definido pelo Conselho de Ano num determinado período de tempo.

Conclusão

Características das tarefas que são valorizadas pelos professores e preocupações que orientam a sua seleção/construção. Ao selecionar/construir tarefas os professores atendem às características dos seus contextos, à sua estrutura e aos processos que poderão ser usados pelos alunos na sua resolução.

No que respeita aos contextos das tarefas, numa fase inicial do projeto, o valor atribuído à sua proximidade a situações do dia-a-dia dos alunos, relaciona-se com a motivação que pode suscitar no envolvimento na sua resolução. Com o desenvolvimento do projeto, passa a ser também reconhecida a importância dos contextos na atribuição de significado aos números e às operações a eles associados, ideia que é salientada por diversos autores quando se referem às características dos contextos das tarefas que promovem o DSN (Fosnot & Dolk, 2001; Sood & Jitendra, 2007; Yang, Hsu & Huang, 2004). Em particular, Manuel seleciona números que suscitem o uso de relações numéricas e que sejam de referência, aspetos que Mendes (2012) considera importantes no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental dos alunos.

Relativamente à estrutura das tarefas, os professores valorizam tarefas cujas questões surgem relacionadas entre si, apoiando os alunos a ‘avançar’ na sua resolução. Manuel valoriza, ainda, as tarefas em que as questões surgem com um nível de dificuldade crescente e salienta a importância da estrutura da tarefa na compreensão dos conceitos matemáticos.

Quanto aos processos de trabalho que suscitam, a participação dos professores no projeto parece ter contribuído para uma mudança de perspetivas sobre a atividade matemática dos alunos associada à resolução de situações problemáticas – da 'escolha' de formas de resolução deste tipo de tarefas para a ideia de 'procura' de diferentes estratégias e do uso de procedimentos de cálculo diferentes dos algoritmos convencionais. As preocupações relacionadas com o desenvolvimento do raciocínio e do cálculo mental conduzem à valorização do uso de diversas estratégias pelos alunos. Ambos valorizam tarefas que suscitem o uso de relações numéricas e propriedades das operações, aspetos que constituem componentes do sentido de número (McIntosh, Reys & Reys, 1992) e que são considerados fundamentais quando se constroem tarefas que visam o seu desenvolvimento (Yang et al., 2004). Também a possibilidade de as tarefas promoverem a explicitação do modo de pensar dos alunos constitui para Manuel um aspeto importante no desenvolvimento do raciocínio matemático e do cálculo mental.

No início do desenvolvimento do projeto, a preocupação dos professores com o envolvimento dos alunos nas tarefas, conduz à seleção/construção de tarefas que sejam exequíveis e cujos contextos sejam próximos da realidade destes. Durante a participação no projeto parece ocorrer uma mudança de foco das suas preocupações para o desenvolvimento do raciocínio matemático e do cálculo mental. Esta mudança parece ser impulsionada, sobretudo, pelas perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem dos números e das operações veiculadas pelo novo Programa (ME, 2007) e pela sua participação no projeto colaborativo.

Aspetos valorizados na preparação das tarefas. Ao preparar a exploração de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número, os professores valorizam a antecipação das estratégias que poderão ser usadas pelos alunos. Para além de lhes ter permitido melhorar a compreensão do modo como os alunos pensam, aquela antecipação aumentou a qualidade das discussões coletivas das tarefas. Ambos referem que, caso considerem essencial, permite-lhe discutir uma 'nova' estratégia com a turma, embora não tenha sido utilizada pelos alunos. Maria José considera, ainda, que constitui uma forma de premunir o professor para lidar com questões e estratégias apresentadas pelos alunos. Estas vantagens, decorrentes da antecipação das estratégias de resolução das tarefas, são também salientadas por Markovits e Sowder (1994).

Na perspetiva dos dois professores, uma melhor compreensão dos objetivos das tarefas constitui uma forma de não perder de vista a intencionalidade das mesmas durante a sua exploração. Maria José considera que este aspeto permite, ainda, aprofundar o trabalho em torno dos tópicos matemáticos e Manuel salienta a sua importância para uma melhor avaliação das aprendizagens dos alunos.

O manual adotado constitui uma referência importante para estes professores na preparação do trabalho a realizar com os alunos. Os momentos de preparação das tarefas contribuíram para uma análise crítica das propostas de trabalho do manual adotado, da qual resultou uma maior consciencialização acerca das suas potencialidades.

A reflexão sobre a escolha da modalidade de trabalho na exploração das tarefas contribuiu para uma maior consciencialização dos motivos dessa escolha. O valor atribuído por Manuel ao trabalho individual parece relacionar-se com a sua necessidade de ter uma melhor perceção das estratégias de cada aluno. O valor atribuído por Maria José ao trabalho a pares é justificado pela possibilidade de os alunos partilharem ideias e estratégias durante a realização das tarefas.

Desafios que se colocam na seleção/construção e preparação das tarefas e o que os desencadeia. A necessidade de mudança de práticas anteriores no que respeita ao trabalho com os números e as operações, tanto dos professores como dos alunos, parece constituir o principal desafio com que os professores se deparam na seleção/construção e preparação de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número. Este desafio surge associado a três aspetos. Um primeiro relaciona-se com a implementação do Programa (ME, 2007) em particular, valorizando o uso de relações numéricas e de propriedades das operações e, simultaneamente lidar com a constatação de que os alunos tendem a persistir no uso do cálculo algorítmico e na aplicação de regras de cálculo. Também o confronto com perspetivas diferentes das anteriores acerca de como o cálculo mental pode ser desenvolvido e, no caso de Maria José, do que caracteriza este tipo de cálculo, constitui uma dificuldade para estes professores.

Um segundo aspeto surge associado à participação no projeto que se evidencia: (i) pela dificuldade de selecionar/construir contextos que conduzam os alunos ao uso de determinadas relações numéricas e propriedades das operações e (ii) pela apreensão em propor tarefas de nível de exigência cognitiva mais elevado. Este desafio é manifestado por Manuel e traduz-se no receio de os alunos evidenciarem muitas dificuldades na resolução das tarefas, o que o conduz a uma simplificação dos contextos das tarefas.

Um terceiro aspeto relaciona-se com o manual adotado, salientando-se a ambivalência manifestada por Maria José acerca das suas características – por um lado, é valorizado por estar de acordo com o novo Programa (ME, 2007), por outro, apresenta propostas cuja intencionalidade nem sempre é completamente compreendida por si ou que se afastam demasiado das tarefas habituais. Esta é uma situação que se evidencia, sobretudo, numa fase inicial do desenvolvimento do projeto.

Aspetos valorizados e desafios que se colocam na seleção/construção de sequências de tarefas. Relativamente à conceção de sequências de tarefas observa-se, por parte dos professores: (i) a valorização da inclusão de tarefas de diferentes tipos, (ii) uma crescente atenção e sensibilidade para a relação entre os números envolvidos e a sequenciação das tarefas, (iii) a preocupação com a diversidade de estratégias que uma determinada sequência de tarefas poderá fazer emergir (aspeto particularmente valorizado por Manuel). O valor atribuído à conceção de sequências de tarefas é verbalizado, sobretudo, no momento de reflexão da exploração de uma determinada sequência ou no balanço do trabalho do projeto, e, surge associado à constatação de evolução dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos e de uma maior consciencialização da existência de múltiplas estratégias. Estes argumentos correspondem aos que são apresentados por alguns autores para justificar a importância da articulação e sequenciação das tarefas no desenvolvimento do sentido de número dos alunos (Mendes, 2012; Sood & Jitendra, 2007).

A conceção de sequências de tarefas coloca os professores perante desafios que se relacionam com: (i) a mudança de práticas de planificação do ensino, para uma perspetiva que parte de uma definição clara dos objetivos a atingir (Kraemer, 2008), (ii) a integração de propostas do manual adotado nas sequências de tarefas, por este não apresentar o aprofundamento desejado de alguns tópicos, por romper com a sequência habitual de abordagem de alguns deles e por não incluir alguns tipos de tarefas, (iii) a implementação do novo Programa (ME, 2007) a meio de um ciclo de escolaridade, que sugere um caminho diferente para a aprendizagem dos algoritmos, (iv) a necessidade de alteração da sequência inicialmente prevista e (v) a articulação e a ordem das sequências de tarefas com o espaço temporal definido pelo Conselho de Ano para a abordagem dos tópicos.

Referências Bibliográficas

Arbaugh, F., & Brown, C. A. (2002). Influences of the mathematical tasks framework on high school mathematics teachers' knowledge, thinking, and teaching. *Annual Meeting of the American Educational Research Association Conference*. New Orleans, LA.

Brocardo, J. (2001). *As Investigações na Aula de Matemática: Um Projecto Curricular no 8.º Ano,* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Colecção Teses. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Edits.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). New York, NY: Routledge.

Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 63-89). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Edits.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning , 8 (2)*, 81-89.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning trajectories in early Mathematics – sequences of acquisition and teaching*. Obtido a 28 de setembro de 2012, de

http://www.literacyencyclopedia.ca/pdfs/Learning_Trajectories_in_Early_Mathematics_-_Sequences_of_Acquisition_and_Teaching.pdf.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences , 10 (1),* 113-163.

Cohen, L. , Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. 6th ed. London: Routledge.

Delgado, C. (2013). *As práticas do professor e o desenvolvimento do sentido de número: Um estudo no 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa – Instituto de Educação)

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Gravemeijer, K. P. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Edits.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Kraemer, J-M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: Cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Edits.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

Landeiro, A., Gonçalves, H. & Pereira, A. (2010). *A Grande Aventura – Matemática 3.º ano (manual escolar)*. Lisboa: Texto Editores Lda.

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(1),* 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics , 12(3), 2-8 & 44.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa – Instituto de Educação)

Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalves, F. (2009). *Números e operações - 3.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa:

ME. http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/019_020_Sequencia_Numeros e Operacoes_ NPMEB_1c3(actualizado22Jun2010).pdf.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Obtido em 25 de Outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents /ProgramaMatematica.pdf.

Ministério da Educação. DGEBS. (1990). *Programa de Matemática. Ensino Básico. 1.º Ciclo*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991/1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Documento original em Inglês, publicado em 1991).

Pacheco, J. A. (2001). *Currículo: Teoria e práxis*. Porto: Porto Editora.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* California: Sage Publications, Lda.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em matemática. In GTI (Ed), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2008). Aprender Matemática. In A. P. Canavarro (Ed.), *20 Anos de temas na EeM* (pp. 2-13). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del professorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Educación matematics: Teoría, critica y prática* (pp. 83-98) Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutiérrez, & P. Boeno (Edits.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professional think in action*. Aldershop Hants: Averbury.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education , 26*, 114-145.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, 91-104.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Whitacre, I., & Nickerson, S. (2006). Pedagogy that makes (number) sense: A classroom teaching experiment around mental math. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Edits.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 736-743). Mérida, México: Universidade Pedagógica Nacional.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School , 3(4)*, 268-275.

Stein, M. K., Baxter, J. & Leinhardt, G. (1990). Subject matter knowledge and elementary instruction: Acase from functions and graphing. *American Educational Research Journal, 27*, 639-663.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M. k., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* New York: Teachers College.

Sood, S & Jitendra, A.K. (2007). A comparative analysis of number sense instruction in reform-based and traditional mathematics textbooks. *The Journal of Special Education, 41(3)*, 145-157.

Yang, D. C. & Hsu, C. J. (2009). Teaching number sense for 6th graders in taiwan. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(2)*, 92-109. http: letus.org/PDF/teaching_as_design.pdf.

Yang, D. C., Hsu, C. J., & Huang, M. C. (2004). A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2(3)*, 407-430.

GRUPO DE DISCUSSÃO 1

Design de tarefas

DESIGN DE TAREFAS

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação,
Instituto Politécnico de Lisboa

Isabel Cabrita
Universidade de Aveiro

O tipo de tarefas que os alunos resolvem influencia o modo como aprendem a pensar matematicamente (Stein, Remillard & Smith, 2007). As tarefas podem ter exigências cognitivas diferentes de acordo com o tipo e nível de pensamento que a sua resolução suscita: memorização, procedimentos sem ou com conexões e fazer matemática (Stein et al, 2007). Assim, no desenho, seleção ou adaptação de tarefas deve ter-se em conta o seu objetivo, considerando que é através da sua resolução, mais do que de qualquer outra forma, que as oportunidades para aprender são disponibilizadas aos alunos (Anthony & Washaw, 2007).

A resolução de tarefas mais ou menos desafiantes/complexas e mais ou menos abertas, como os problemas e tarefas exploratórias e de investigação, propicia aos alunos oportunidades para pensar em vez de simplesmente praticar algo que já sabem. Por exemplo, em vez de:

(i) propor encontrar a média de uma lista de números, pedir aos alunos que sugiram uma lista para uma dada média (por exemplo, a média do número de membros da família dos alunos da turma é 4. Como é que pode ser a distribuição numa turma de 20 alunos?);

(ii) um exercício para praticar a adição e a subtração, colocar uma questão do tipo: "se o João e os seus dois irmãos requisitaram 10 livros da biblioteca, quantos podem cada um deles ter requisitado?"

(iii) aprender listas de regras para classificar quadriláteros, pedir aos alunos para "desenharem tantas figuras diferentes de quatro lados quantas conseguirem agrupá-las por características comuns e descrever essas características".

Por outro lado, ao selecionar ou desenvolver tarefas matemáticas deve ter-se em consideração competências dos alunos e as suas experiências prévias. Assim, as tarefas devem relacionar-se proximamente com o conhecimento, capacidades e interesses dos alunos para serem compreendidas, mas serem suficientemente diferentes para ampliar o seu pensamento. Se as tarefas são demasiado fáceis ou demasiado difíceis têm um limitado valor cognitivo, não são motivantes e é improvável que envolvam os alunos (Anthony & Walshaw, 2007). Além disso, devem ser criteriosamente sequenciadas de modo a garantir uma progressão na aprendizagem de determinado tópico matemático.

Relativamente ao contexto das tarefas, que ganhou grande visibilidade na matemática realista, Gravemeijer (1997) considera que o principal uso do contexto não é motivar os alunos, mas proporcionar-lhes uma situação de aprendizagem que é experiencialmente real e que pode ser usada como um ponto de partida para uma compreensão avançada.

Ponte e Quaresma (2012) consideram como contexto o universo concetual associado a cada tarefa, o que pode remeter para um campo da vida quotidiana, do qual o aluno pode ter maior ou menor experiência pessoal, ou remeter apenas para o universo matemático. Skovsmose (2001) acrescenta uma terceira dimensão para o contexto das tarefas – as tarefas semirreais. Para este autor, as tarefas são reais quando retiradas diretamente do dia-a-dia dos alunos, matemáticas quando têm como referência a Matemática e semirreais quando se referem a algo que não existe na vida real, mas é construído nomeadamente para fins educativos.

Uso de contextos reais ou semirreais pode tornar a matemática acessível e apelativa para os alunos. No entanto, é importante que o contexto não obscureça a essência da tarefa. Contextos muito complicados podem levar a que uma tarefa seja mais de interpretação da questão do que realmente de matemática.

Na construção, adaptação ou seleção de tarefas uma preocupação com as estratégias também deve estar presente, optando-se, sempre que possível, por tarefas que possam admitir diferentes estratégias de resolução. E deve ser dada oportunidade aos alunos para explicar os diferentes processos usados, ajudando-os a desenvolver a sua compreensão matemática. A utilização de materiais, manipulativos e outros, deve também ser considerada.

A consideração de todos estes aspetos pode manter a matemática interessante e engraçada mas não deve desviar a atenção do que é essencial – a verdadeira aprendizagem da matemática.

Neste Grupo de Discussão (GD1) serão discutidos seis trabalhos desenvolvidos em diferentes níveis de ensino.

Pedro Almeida, António Domingos e Cecília Monteiro na comunicação *Formulação de Problemas no 1.º ciclo* discutem, a partir da literatura, a questão da formulação de problemas e da tipologia das tarefas que a promove, partindo de quatro tarefas de formulação de problemas, incluídas numa investigação em curso, desenvolvidas com uma turma de alunos no 3.º e no 4.º ano. Discutem a inclusão das tarefas na tipologia e refletem sobre as expectativas geradas, partindo das resoluções dos alunos.

Em *Contributos de um projeto de turma para o design de tarefas*, Helena Gil Guerreiro e Lurdes Serrazina reportam-se a um *design research* focado na aprendizagem dos números racionais, por alunos do 3.º ano de escolaridade que parece permitir concluir que a (co)construção dos significados matemáticos em causa foi influenciada, por um lado, pela natureza das tarefas (grau de desafio e complexidade), relacionadas com percentagens, bem como pelo contexto de intervenção e, por outro lado, pela interação entre os alunos que a situação real despoletou. Tais resultados reforçam a necessidade de se atender a estas dimensões no *design* das tarefas.

Renata Carvalho e João Pedro Ponte em *Design de tarefas para o desenvolvimento do cálculo mental dos alunos* apresentam um estudo, baseado numa experiência de ensino realizada no 6.º ano de escolaridade, cujo objetivo é identificar aspetos que possam apoiar a definição de princípios orientadores para o *design* de tarefas de cálculo mental com números racionais positivos. Com base na análise das estratégias dos alunos formulam quatro princípios orientadores do *design* de tarefas de cálculo mental, realçando a importância do uso de contextos, de diversas representações dos números racionais, do nível cognitive das tarefas e de conhecimentos sobre estratégias e erros dos alunos.

Na comunicação de Lurdes Serrazina e Margarida Rodrigues, *A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo*, as autoras centram-se no processo cíclico de *design* de tarefas que, neste caso particular, contempla: a recriação de uma tarefa considerada adequada para o desenvolvimento da referida capacidade, que discutem teoricamente; a realização de entrevistas clínicas a resolvedores dos 1.º e 2.º anos de escolaridade para compreender o seu pensamento sobre partição flexível, envolvendo decomposições do número 9, e a reformulação da tarefa à luz das resoluções apresentadas e atendendo à sua função, forma e foco matemático.

Isabel Vale, Ana Barbosa e Teresa Pimentel discutem características que *boas* tarefas devem apresentar para promover a criatividade em matemática, fortemente relacionada com as dimensões - fluência, flexibilidade e originalidade. E reportam-se a um estudo exploratório, no contexto da formação inicial de professores do ensino básico, centrado quer na resolução quer na formulação de problemas, cujos resultados preliminares permitiram concluir afirmativamente do potencial criativo das tarefas propostas, já que foi possível identificar alguma criatividade nos futuros professores. Por outro lado, também permitiram concluir que a flexibilidade parece ser a dimensão da criatividade de mais difícil identificação pelos alunos.

Na comunicação *Construção e preparação da exploração de tarefas de modelação matemática em Estatística: Uma experiência no ensino profissional*, Nélida Filipe, Ana Paula Canavarro e Leonor Santos reportam-se a um estudo cujo objetivo é descrever e compreender de que modo surgiu, foi criada e preparada a exploração de tarefas de modelação matemática, no tema da Estatística, no contexto de cursos profissionais. O objetivo das tarefas era o de desenvolver o sentido crítico dos alunos. O estudo desenvolve-se num contexto de trabalho colaborativo e são apresentados resultados preliminares do caso de uma professora. Esta sublinha como aspetos fundamentais para o sucesso das tarefas o terem tido em conta os perfis profissionais dos alunos e os terem envolvido na recolha de dados.

Referências

Anthony, G. & Walshaw, M. (2007). Effective Pedagogym in Mathematics/ Pàngarau: Best Evidence Synthesis Iteration [BES]. Wellington, New Zeland: Ministry of Education.

Gravemeijer, K. (1997a). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E.van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrecht: Techn.ipress.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 22, 196-216.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM*, 33(4), 123-132.

Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. II, pp. 319-369). Charlotte: Information Age Publishing.

Comunicações – GD1

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NO 1º CICLO

Pedro Cruz Almeida
Escola Superior de Educação de Lisboa – UIED[1]
pedroa@eselx.ipl.pt

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL - UIED[6]
amdd@fct.unl.pt

Cecília Monteiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
ceciliam@eselx.ipl.pt

Resumo: Vários estudos empíricos no âmbito da educação matemática têm encontrado estreitas relações entre as habilidades de formulação e de resolução de problemas, reivindicando que os alunos com maior sucesso na resolução de problemas são também os que detêm maior capacidade para os formular, para colocar questões coerentes e pertinentes sobre os dados fornecidos. A pesquisa sobre formulação de problemas tem mostrado como este tipo de tarefa, quando inserida no ensino da matemática, tem um efeito positivo no envolvimento dos alunos na resolução de problemas. Esta comunicação pretende expor uma parte significativa do que a literatura já desenvolvida considera ser a formulação de problemas e a tipologia das tarefas que tem vindo a ser definida e discutir tal tipologia a partir de exemplos de tarefas. Nesse sentido apresenta quatro tarefas de formulação de problemas procurando aferir da sua inclusão nessa tipologia, refletindo também sobre as expectativas geradas em torno deste tipo de tarefas a partir de resoluções dos alunos. Os dados aqui reunidos decorrem de uma investigação ainda em curso sobre formulação de problemas por alunos do 3º e do 4º ano de escolaridade. Tendo em vista um enquadramento dos dados apresentados é feita uma breve apresentação dos objetivos e metodologia da investigação e desenvolve-se a revisão da literatura centrada na formulação de problemas, nomeadamente no que se refere à categorização de tarefas.

Palavras chave: formulação de problemas, educação matemática

Introdução

A ideia de que a capacidade de resolução de problemas e a capacidade de os formular são dois aspetos indissociáveis, tem sido veiculada desde os anos oitenta (e.g., Kilpatrick, 1987; Silver, 1994). Desde essa altura que as orientações curriculares emanadas, nos Estados Unidos, pelo National Council of Teachers of Mathematics (1989; 2000), têm dado uma

[6] Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

relevância significativa à formulação de problemas, reconhecendo que a sua promoção no currículo contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas.

Em Portugal, tanto o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica, 2001), como o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) integraram a formulação de problemas como um aspeto relevante.

Contrariando esta tendência para a inclusão da formulação de problemas no ensino e aprendizagem da matemática, o atual programa (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timótio, 2013) de matemática para o ensino básico é omisso relativamente a este aspeto.

De acordo com Silver (2013) vários estudos empíricos têm encontrado estreitas relações entre as habilidades de resolução e formulação de problemas e reivindicado a importância da formulação de problemas no desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e que~~,~~ os alunos com maior sucesso na resolução de problemas são também os que detêm maior capacidade para os formular, para colocar questões coerentes e pertinentes sobre dados fornecidos. A pesquisa sobre formulação de problemas tem mostrado como este tipo de tarefa, quando inserida no ensino da matemática, tem um efeito positivo no envolvimento dos alunos na resolução de problemas (Silver & Cai, 2005) e no desenvolvimento de atitudes positivas para com as atividades matemáticas na escola (e.g. Georgiadou-Kabouridis & Bartzakli, 2009; Nicolaou & Philippou, 2007; Zakaria & Ngah, 2011).

É do interesse da investigação nesta área conseguir elaborar um quadro teórico que permita relacionar de uma forma coerente a diversidade de tarefas que têm vindo a ser consideradas na formulação de problemas. O objetivo deste artigo é discutir a classificação das tarefas que tem vindo a ser definida pela literatura já desenvolvida. Para isso, são apresentadas quatro tarefas de formulação de problemas, procurando aferir da sua inclusão nessa tipologia e refletir sobre as expectativas geradas em torno deste tipo de tarefas a partir de resoluções dos alunos.

Tendo em conta que as tarefas e as respostas dos alunos, resultam de um estudo que ainda está a ser desenvolvido, faz sentido apresentar brevemente o objetivo e metodologia dessa investigação.

Objetivo e metodologia do estudo

O objetivo do estudo, para o qual foram desenhadas as tarefas que se apresentam bem como as resoluções dos alunos, consiste em observar e descrever o modo como alunos do 3º e 4º ano de escolaridade se envolvem em tarefas de formulação de problemas, as suas interpretações pessoais sobre a tarefa, os processos e estratégias que manifestam e desenvolvem na formulação de problemas e o modo como o conhecimento matemático que possuem e constroem se relaciona com os problemas que formulam.

Tendo em conta este objetivo adotou-se uma metodologia qualitativa, assente no estudo de caso visto que se pretende fazer uma observação e descrição detalhada da ação dos alunos (Bogdan & Biklen, 1994; Stake, 2000).

Os participantes no estudo frequentam uma escola da periferia de Lisboa. Para a seleção dos alunos que constituem os casos tomou-se como critério o seu desempenho em cálculo e na resolução de problemas. Foi assim feita uma seleção de cinco alunos.

A recolha dos dados para o prosseguimento do estudo assenta essencialmente nas entrevistas em profundidade, semiestruturadas, tendo por base tarefas de formulação de problemas, e na observação participante em sala de aula. O trabalho de campo iniciou-se quando os alunos estavam no 3º ano (2013/14) e a recolha de dados está ainda a decorrer, estando os alunos já no 4º ano. As tarefas A, B, C, apresentadas neste artigo foram aplicadas quando os alunos estavam no 3º ano e a tarefa D em outubro deste ano letivo.

Nesta comunicação recorre-se principalmente às respostas de um aluno às quatro tarefas, configurando uma certa unidade que possibilite alguma comparação, ainda que isso não seja o objetivo central da comunicação. Foram escolhidas as respostas deste aluno porque possuem características interessantes para a problematização do que, naturalmente, se espera de cada tarefa. Também se apresenta a resposta de um outro aluno a uma das tarefas, apenas como ilustração de uma característica específica dessa tarefa.

Revisão da literatura

O interesse da investigação pela formulação de problemas tem vindo a crescer e a consolidar-se (Silver, 2013). Como afirmam Stoyanova e Ellerton (1996),

> Na educação matemática, depois de mais de uma década de estudos centrados na resolução de problemas, os investigadores começaram lentamente a perceber que desenvolver a capacidade de formular problemas de matemática é pelo menos tão importante, educacionalmente, como desenvolver a capacidade de resolvê-los. (p. 518)

Em 2009, Pelczer e Gamboa apresentavam como principais tendências da investigação i) relação entre formulação e resolução de problemas; ii) habilidades de formulação de problemas e processos envolvidos na sua formulação; iii) classificação de tarefas de formulação de problemas e iv) formulação de problemas e criatividade. Em 2013, Singer, Ellerton e Cai insistem na necessidade de perceber o efeito das atividades de formulação de problemas na aprendizagem e as relações entre estas atividades e o conhecimento matemático.

Definir a formulação de problemas e enquadrar a grande diversidade de tarefas e conceções sobre estas tem sido um esforço desenvolvido pela investigação. Para este objetivo contribuíram, entre outros, os trabalhos de Silver (1995), Stoyanova e Ellerton (1996) e Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, e Sriraman (2005).

Silver (1995) toma como referência a resolução de problemas e diferencia três tipos de tarefas de formulação: as que acontecem antes da resolução do problema, as que são feitas durante a resolução e as que ocorrem após a resolução. No primeiro caso o problema pode ou não estar ainda bem definido. Se ele estiver bem definido, a formulação de perguntas pode ter o objetivo de identificar dados, restrições ou relações que ajudem a compreender o enunciado. O segundo caso pode corresponder à intenção de testar ou modificar as condições do problema no sentido de encontrar uma estratégia. No terceiro caso, a tarefa de formulação pode procurar extensões do problema, outros contextos ou aplicações.

Stoyanova e Ellerton (1996) consideram que a formulação é "o processo pelo qual, com base na sua experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e as formulam como problemas matemáticos significativos" (p. 1). A amplitude desta definição permite abarcar uma grande diversidade de situações de formulação de problemas e serve também os propósitos da investigação que se debruça sobre as relações entre a formulação e a resolução de problemas enquanto meios de ensino e aprendizagem da matemática. É considerando esta definição que estas investigadoras pretendem agrupar qualquer tarefa matemática de formulação de problemas em três categorias de situações:

- Livres – quando a tarefa consiste em formular problemas a partir de uma dada situação mais ou menos natural, podendo conter algumas orientações acerca do que se pretende. Como exemplo de situações livres utilizadas em estudos, são referidas tarefas nas quais se pede aos alunos que formulem um problema para outro colega ou para a professora resolver, ou um problema que gostem de resolver ou que achem difícil.
- Semiestruturadas – quando a tarefa consiste em formular um problema a partir da exploração de uma situação aberta, completando-a com base no conhecimento, capacidades, conceitos ou relações que fazem parte da sua experiência matemática.
- Estruturadas – quando a tarefa consiste em formular problemas a partir de um problema bem determinado. Por exemplo, formular as questões possíveis de um problema cuja questão foi omitida, ou formular um semelhante a outro que já se conhece, ou identificar dados omissos ou desnecessários, ou modificar condições que alterem (ou não) o modo de resolução.

A classificação de Stoyanova e Ellerton (1996) toma em conta o nível de restrição que a tarefa impõe, enquanto a classificação de Silver (1995) assenta nas etapas de resolução de um problema, integrando a formulação de problemas nos processos de resolução.

Christou et al. (2005) apresentam uma outra classificação pretendendo reunir as duas anteriores:

- Formular um problema (situações livres);
- Formular um problema para uma expressão de cálculo que é apresentada;
- Formular um problema a partir de algumas informações;
- Formular questões para uma situação problemática;
- Formular um problema para uma resposta que é apresentada.

Com base em tarefas de formulação de problemas que se enquadram nas quatro últimas categorias, Christou et al. (2005) desenvolvem um modelo de análise das respostas de alunos a tais tarefas para identificar quatro processos cognitivos presentes na formulação de problemas.

- *Compreender* – Formular problemas para equações ou cálculos. Exige o conhecimento do significado e propriedades das operações.
- *Traduzir* – Formular problemas a partir de gráficos, diagramas ou tabelas. Requer a compreensão de diferentes representações de relações matemáticas.
- *Editar* – Formular problemas sem outras restrições senão partir de dados fornecidos por meio de uma história, imagem,…
- *Selecionar* – Formular problemas para uma dada resposta, a qual estabelece uma restrição, exigindo o relacionamento entre os dados fornecidos.

Estes investigadores encontraram ainda três categorias de alunos de acordo com o seu desempenho. Na primeira categoria ficaram os alunos que apenas tiveram melhor desempenho nas tarefas associadas ao *compreender*. Estes alunos manifestaram uma tendência para reproduzir os problemas de cálculo que são comuns ao treino das operações e que aparecem tradicionalmente nos manuais escolares. Na segunda categoria situaram-se os alunos que, para além de terem sucesso nas tarefas associadas ao *compreender*, tiveram também sucesso nas tarefas associadas ao *traduzir*. Estes alunos não só formularam problemas a partir de dados numéricos claramente fornecidos, como conseguiram também lidar com dados representados em tabelas e gráficos compreendendo as suas relações e formulando problemas com sentido. Na terceira categoria ficaram incluídos os alunos que tiveram um sucesso significativo em todas as tarefas associadas aos quatro processos.

Com base no que até aqui foi exposto pretende-se agora apresentar as tarefas e a sua integração nas diferentes categorias, refletindo também, a partir das respostas de um aluno, sobre as expectativas que tais tarefas podem gerar.

As tarefas de formulação de problemas

As quatro tarefas que se apresentam de seguida foram definidas para serem aplicadas no trabalho de campo do estudo já referido. Nesta comunicação pretende-se que sirvam de base para uma discussão sobre o seu enquadramento nas categorias definidas por Silver (1995) e por Stoyanova e Ellerton (1996). As tarefas foram desenhadas a partir dos exemplos apresentados no estudo de Christou et al. (2005) e cada uma delas é representativa das quatro (últimas) categorias da lista acima enunciada. De acordo com estes autores, cada uma exige, na sua resolução, um determinado processo cognitivo.

Destas quatro, as tarefas A, B, e D foram utilizadas em entrevistas individuais. A tarefa C, também desenhada pelo investigador, foi aplicada em aula a toda a turma.

Tarefa A:

Inventa um problema que possa ser resolvido pela seguinte expressão:
30 x 25

Tratando-se de uma tarefa em que a operação está definida, a formulação do problema passa pela criação de um contexto e de uma pergunta adequada à estrutura matemática que permita formular um problema que seja passível de resolução por tal operação. Pode então concluir-se que se trata de uma tarefa que, de acordo com Stoyanova e Ellerton (1996), pertence à categoria de tarefas estruturadas e que na classificação de Christou et al. (2005) envolve o *compreender* como principal processo cognitivo. Já a integração desta tarefa nas categorias definidas por Silver (1995) pode não ser única. Se se considerar que a resolução da operação constitui um problema, as perguntas que constituiriam a formulação do problema estariam relacionadas com a procura de estratégias para multiplicar 30 por 25. Neste caso estaria dentro da resolução do problema, mas não estaria aqui em causa o processo *compreender*. Para que este processo esteja efetivamente envolvido tem de se considerar a operação como estímulo para a definição de um contexto e de uma pergunta, pelo que se estaria na fase anterior à resolução do problema.

Um caso particular de resolução desta tarefa é-nos dada pelo Ricardo, que na entrevista, começou por enunciar o problema escrevendo "Calcula 30x25." Depois de um esclarecimento de que o que se pretendia era que inventasse uma situação da vida real, uma história na qual fosse necessário efetuar a operação, o Ricardo propôs "O menino Vítor não sabe quanto é 30x25. Ajuda-o." A formulação do Ricardo sai fora do que seriam as justas expectativas de quem pretende saber que entendimento tem da multiplicação pela contextualização de tal operação. É importante considerar que Christou et al. (2005) afirmam não haver uma relação exclusiva entre a categoria da tarefa e o processo cognitivo nela envolvido. O Ricardo não enquadra a operação dentro de um contexto que lhe dê significado pelo que não se pode dizer que faz uso do processo *compreender* Ter-se-á de admitir que o Ricardo, simplesmente, foge ao que é pedido na tarefa? Numa entrevista anterior, o Ricardo já tinha dito que gostava mais de matemática "porque, português, não me oriento muito bem." Explicou depois as suas dificuldades na ortografia e foi perentório quanto a não gostar de inventar histórias. Poderá ser esta uma justificação para a sua fuga?

Tarefa B:

A fotografia que vês ao lado mostra a embalagem e os pacotes do leite escolar que se bebe na tua escola.

Faz diferentes perguntas para serem respondidas a partir dos dados que a imagem mostra.

Nesta tarefa os dados são fornecidos através de uma imagem. Não há qualquer exigência relativamente à estrutura matemática a que deve ser endereçada a pergunta. Há dados que podem ser relacionados em estruturas aditivas ou multiplicativas. Por exemplo, pode-se definir um contexto em que alguém retirou da caixa os 6 pacotes que se veem fora e perguntar quantos lá ficaram dentro. Ou então perguntar quantos mililitros de leite há em 27 embalagens (ou na caixa, salvaguardando que contém as 27 embalagens, ou qualquer outra restrição). No caso desta tarefa, de acordo com Silver (1995), parece claro que se está numa fase anterior à resolução do problema (o problema ainda não está formulado), ou no tipo de tarefas que Christou et al. (2005) consideram relacionadas com o *editar*. Seguindo a classificação de Stoyanova e Ellerton (1996) a tarefa está claramente dentro da classe das semiestruturadas, dado que a estrutura matemática será definida pela pergunta e esta tem de lidar com os dados fornecidos.

O Ricardo perante esta situação foi capaz de formular várias questões (Fig. 1), algumas das quais reconhece, sorrindo, têm resposta evidente. Os numerais que estão junto das perguntas resultam do pedido que lhe foi feito, antes de iniciar a resolução, no sentido de ordenar as perguntas da mais fácil para a mais difícil.

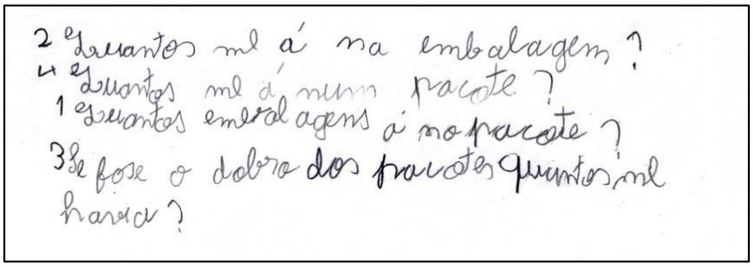


Figura 1: Produção escrita pelo Ricardo em resposta à tarefa B.

A ordem que o Ricardo estabelece para as perguntas é uma questão interessante para discussão, mas não cabe no objetivo desta comunicação. Basta, para já, reconhecer que as duas perguntas que ele identifica como primeiras têm como alvo a identificação de dados do contexto. As outras duas definem claramente uma situação/problema de estrutura multiplicativa. Nesta tarefa, a imaginação que o Ricardo diz não ter parece não interferir na formulação do problema. Pode reconhecer-se que o Ricardo reage à proposta dentro do que Christou et al. (2005) definem como *editar* e que corresponde ao processo associado a este tipo de tarefa.

Tarefa C

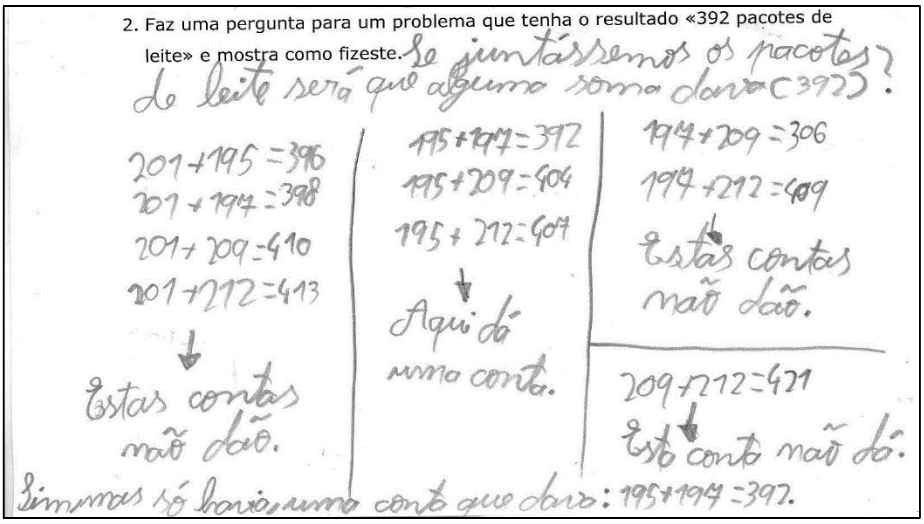
A D. Odete todos os dias regista o número de pacotes de leite que se consomem na nossa escola. Observa a tabela que mostra o registo dos pacotes de leite que se consumiram durante uma semana.

Faz uma pergunta para um problema que tenha o resultado «392 pacotes de leite» e mostra como fizeste.

Dias	N.º de pacotes
2ª feira	201
3ª feira	195
4ª feira	197
5ª feira	209
6ª feira	212

Christou et al. (2005) associam a esta tarefa o processo *selecionar*. A estrutura matemática está completamente definida: 195+197. É uma tarefa estruturada (Stoyanova & Ellerton, 1996). Embora se peça a formulação de uma pergunta, ela já está determinada – neste caso só pode ter um sentido. A tarefa consiste em descobrir a operação que permite chegar ao resultado que já se sabe e formular uma pergunta coerente com a operação e com a resposta. A discussão está em encaixá-la nas fases de Silver (1995). O facto de se ter uma resposta sugere que o problema está resolvido e, pela mesma razão, já formulado. Apesar disso, é preciso considerar que não é conhecido o processo de resolução nem, rigorosamente, a pergunta que conduziu à resposta. E para se conseguir formular uma pergunta coerente é preciso, antes de mais, descobrir a operação que produziu o resultado. Esta tarefa exige do seu solucionador uma procura sistemática de relações entre os dados numéricos. Não se está à procura de outros contextos ou outras questões para uma dada estrutura matemática, para um problema já resolvido. O caráter fechado desta tarefa impõe ao solucionador uma imersão no problema. Deste ponto de vista é possível considerá-la dentro da fase de resolução do problema.

Esta tarefa não foi colocada em ambiente de entrevista, mas decorreu na sala de aula. Revelou-se de difícil resolução, considerando que a pergunta adequada deve manter-se dentro do contexto, pois a maioria dos alunos alterou os dados da situação. Foi o caso do Ricardo que diz "Na outra semana houve 100 cada dia até quarta e [na quinta] venderam 92. Quanto ficou?" O seu enunciado, para além de não responder ao que é pedido na tarefa, mostra também uma falta de rigor na atenção ao contexto ao inserir termos como "venderam" e "quanto ficou". Enquanto na sua resposta à tarefa A podemos considerar plausível a justificação dada pelo próprio Ricardo para a sua dificuldade, aqui temos de considerar que a dificuldade se prende com a natureza da tarefa e com exigência do processo cognitivo nela envolvido, de acordo com Christou et al. (2005). A formulação feita por um outro aluno, o Daniel, ilustra bem tal exigência feita ao solucionador da tarefa (Fig. 2).


2. Faz uma pergunta para um problema que tenha o resultado «392 pacotes de leite» e mostra como fizeste. Se juntássemos os pacotes de leite será que alguma soma dava (392)?

201+195=396
201+197=398
201+209=410
201+212=413
Estas contas não dão.

195+197=392
195+209=404
195+212=407
Aqui dá uma conta.

197+209=306
197+212=409
Estas contas não dão.

209+212=421
Esta conta não dá.

Sim mas só havia uma conta que dava: 195+197=392.

Figura 2: Produção escrita pelo Daniel em resposta à tarefa C.

No entanto, tal como aconteceu com o Ricardo na resolução da tarefa A, a proposta feita pelo Daniel não é a que melhor responde ao que se desejava. A pergunta perfeita seria quantos pacotes de leite se consumiram, ao todo, na terça e quarta-feira. Embora o Daniel não faça essa pergunta é evidente que ele usa o processo cognitivo *selecionar* para encontrar os dados que pode relacionar.

Tarefa D

Os pais do António têm uma pastelaria. Um dia ele esteve a ajudar o pai a embalar uns pastéis que são vendidos em caixas iguais. À medida que ia colocando os pastéis nas caixas o António ia escrevendo:

Número de caixas →	…	4	8	16	…
Número de pastéis embalados →	…	16	32	64	…

Faz uma pergunta para um problema que seja resolvido com uma multiplicação.

Nesta tarefa, o solucionador tem, em primeiro lugar, uma coleção de dados num dado contexto. Estes dados são apresentados por meio de uma representação que os relaciona e tal relação precisa de ser interpretada. A tarefa exige que essa representação e relação sejam expressas numa outra representação – uma operação de multiplicação. De acordo com Christou et al. (2005) está aqui implicado o processo *traduzir*. A restrição imposta à pergunta restringe também a estrutura matemática da situação. Trata-se assim de uma tarefa estruturada. Podem ser feitas diferentes perguntas (incidindo sobre diferentes números), mas todas têm de fazer uso da multiplicação. Enquadrar esta tarefa numa das três fases definidas por Silver (1995) pode não ter uma resposta única. O que falta para completar a tarefa é uma pergunta que encerre o problema. Tal pergunta não está definida e, portanto, considera-se que a tarefa se situa numa fase em que o problema está ainda em formulação. Mas o facto de já se saber que a resolução passa pela multiplicação introduz o solucionador num problema que está parcialmente definido. Ainda que tenha de formular a pergunta, a condição estabelecida remete-o para a resolução do problema.

Esta tarefa foi realizada numa entrevista. O Ricardo não responde imediatamente ao pedido. Primeiro questiona o significado dos números apresentados. Apresenta-se a seguir um excerto do diálogo:

> Ric. – Estes números são o quê?
> Inv. – Não consegues entender o que esses números são?
> Ric. – Os números das caixas?
> Inv. – Este aqui, o quatro, por exemplo, é o quê?
> Ric. – O número de caixas?
> Inv. – É o número de caixas. E este 16 que está aqui em baixo?
> Ric. – Ah! É o que está lá dentro!

Este pequeno trecho ilustra bem o processo *traduzir* que Christou et al. (2005) considera central na resolução deste tipo de tarefa. O Ricardo mostra necessidade de entender o modo como os dados numéricos foram apresentados. Após este esclarecimento o Ricardo consegue formular uma pergunta de acordo com o que é pedido: "Em 32 caixas quantos pastéis são embalados?" É interessante a escolha do 32. Mais à frente o Ricardo, na justificação para a escolha do 32 dá a entender que o considera "óbvio" por ser o dobro do anterior. E depois do pedido para que considere outro número para uma pergunta do mesmo tipo escolhe 100, e resolve considerando que se em 1 caixa há 4, em 5 há 20, em 50 há 200 e em 100 há 400.

Conclusão

Neste texto apresenta-se e discute-se a classificação de tarefas de formulação de problemas que a literatura tem vindo a definir. Para além de uma classificação que tem por base uma maior ou menor evidência da estrutura matemática presente na tarefa (Stoyanova e Ellerton, 1996), uma outra classificação, que integra as tarefas de formulação na própria resolução de problemas, é feita tendo em conta três fases para a resolução de um problema: uma fase prévia à resolução do problema, uma outra que decorre durante a resolução e a última após a resolução do problema (Silver, 1995). Christou et al. (2005) apresentam uma terceira classificação que pretende reunir as duas anteriores, definindo cinco tipos de tarefas, a primeira das quais se pode enquadrar na primeira fase da classificação de Silver e na categoria de tarefas livres definidas por Stoyanova e Ellerton. Pela própria natureza desta classe de tarefas (livres) não é estabelecido um modelo. Já para cada uma das quatro seguintes Christou et al. (2005) fornecem um modelo a que fazem corresponder um processo cognitivo específico. As tarefas apresentadas nesta comunicação correspondem aos modelos definidos por Christou et al. (2005) e as respostas dadas pelo Ricardo (e uma do Daniel) possibilitam uma reflexão em torno do efeito provocado.

A tabela 1 pretende evidenciar o lugar de cada tarefa e, consequentemente, do processo envolvido, dentro das categorias de tarefas definidas por Silver (1995) e por Stoyanova e Ellerton (1996).

Tabela 1: Relação entre as diferentes categorias de tarefas definida por Silver(1995), Stoyanova e Ellerton (1996) e os processos cognitivos encontrados por Christou et al. (2005).

	Antes da resolução (prob. em formulação)	**Durante a resolução**	**Após a resolução**
Semiestruturadas	*Editar* (B)		
Estruturadas	*Compreender* (A) *Traduzir* (D)	*Compreender* (A) *Selecionar* (C) *Traduzir* (D)	*Traduzir* (D)

A disposição apresentada na tabela, com base nas tarefas apresentadas, sugere que não faz sentido haver tarefas semiestruturadas durante a resolução do problema ou após a resolução. De facto, se se está dentro da resolução de um problema ou após a sua resolução, a estrutura do problema está definida.

Os processos cognitivos identificados por Christou et al. (2005) foram definidos em função de tarefas específicas. Isso não implica que ocorram isoladamente.

O processo *editar* é aquele que claramente se pode situar antes da existência de qualquer problema, pois ele é claro na intenção da formulação do problema. Pertence à categoria das tarefas semiestruturadas desde que o solucionador tenha liberdade de, pela sua pergunta, definir a estrutura matemática. Imaginemos que, após a resolução de um problema para uma dada estrutura, o contexto tem dados suficientes para se formular uma outra pergunta que incida sobre outra estrutura matemática. Mesmo assim, o que está em causa é a formulação de outro problema e não uma exploração do problema resolvido.

O processo *compreender*, tal como está definido, dá-se quando se está perante um cálculo que é preciso contextualizar. Este contexto pode ser puramente matemático ou conter elementos do quotidiano. A sua localização na fase anterior à resolução, melhor dizendo, numa fase de formulação do problema, só faz sentido se se estiver à procura de um contexto para a expressão fornecida porque, em si mesma, a expressão já encerra um problema. Trata-se de um problema para um solucionador que não dispõe de uma ferramenta pronta a usar para o resolver. (Lester, 1980).

O processo *traduzir* incide na interpretação e capacidade de relacionar diferentes representações de informação. Na medida em que *traduzir* é necessário para se poder formular uma pergunta, a tarefa situa-se numa fase de formulação. Mas, sem desvirtuar o caráter da tarefa, o pedido nela feito, exigindo que se passe de uma representação para outra, cabe perfeitamente e é igualmente interessante em qualquer fase de resolução de um problema.

A tarefa definida para o processo *selecionar* tem um caráter completamente fechado. Ela introduz o solucionador na resolução do problema, mas tem uma resposta única. É justo questionar se se trata de formular um problema. De facto o que se exige é a descoberta do problema já formulado. É assim, aparentemente desinteressante, do ponto de vista da tarefa, mas não do ponto de vista do processo cognitivo exigido. A resolução do Daniel, o modo como enunciou a pergunta, permite, de certo modo, perceber o alcance e interesse deste tipo de tarefa.

Como já foi referido, Christou et al. (2005), no estudo que fizeram, encontraram três níveis para o desempenho dos alunos na resolução deste tipo de tarefas. Num primeiro nível, situaram-se os alunos que tiveram um bom desempenho nas tarefas desenhadas para o processo *compreender*. No segundo nível situaram-se os que tiveram melhor desempenho em ambas as tarefas que envolveram os processos *compreender* e o *traduzir*. Num terceiro nível, os alunos que tiveram bons desempenhos nos quatro tipos de tarefas definidas para os quatro processos. Naturalmente, isto não implica exclusividade. O Ricardo mostrou ser capaz de responder com à vontade à tarefa B (*editar*) e dificuldade em criar um contexto para a tarefa A (*compreender*). Como já foi dito, a sua dificuldade na tarefa A pode não ter a ver com a dificuldade em reconhecer os contextos da multiplicação mas, como ele disse, à sua resistência em criar histórias pelas dificuldades que sente em relação ao desempenho na disciplina de português.

Do ponto de vista do desenvolvimento do currículo há muitas questões que se colocam no que se refere à oportunidade e objetivo da utilização de tarefas específicas de formulação de problemas. Por exemplo, do mesmo modo que em relação à resolução de problemas se discutiu o seu papel no currículo, se deviam ser alvo ou meio de ensino/aprendizagem, o mesmo se coloca agora relativamente à formulação de problemas. A seleção das tarefas de formulação de problemas e o modo de as integrar no ensino é, como muitas outras, uma decisão que o professor tem de tomar de forma consciente e bem informada. Mas este é ainda um campo de estudo onde há muito por desbravar.

Referências

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timótio, M. (2013). *Programa e Metas Curriculares: Matemática: Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Recuperado em outubro de 2013 de file:///C:/Users/pedro/Downloads/programa_matematica_basico%20(4).pdf

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos* (2ª ed.). Porto: Porto Editora.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *37*(3), 149–158. doi: 10.1007/s11858-005-0004-6

Georgiadou-Kabouridis, B., & Bartzakli, M. (2009). Exploring the affect/cognition relation in problem posing situations. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education,* (Vol. 1, pp. 1 - 381). Thessaloniki, Greece: PME.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education,* (pp 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica. Recuperado em outubro de 2014 de http://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/wp-content/uploads/2010/09/Curriculo_Nacional1CEB.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nicolaou, A., & Philippou, G. (2007). Efficacy beliefs, problem posing, and mathematics achievement. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (Vol. 5, pp. 308–317). Larnaca, Cyprus: ERME. Recuperado em outubro de 2012, de http://ermeweb.free.fr/CERME 5/WG2/2_Nicolaou.pdf

Pelczer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 353-360). Thessaloniki: PME.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Meneses, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Recuperado em junho de 2009 de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/028_ProgramaMatematicaEnsinoBasico.pdf

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For The Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: mathematical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education, 27,* 67-72.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 157–162. doi:10.1007/s10649-013-9477-3

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3) 129-135.

Singer, F. M., Ellerton N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83,* 1-7. doi: 10.1007/s10649-013-9478-2

Stake, R. (2000). Case Studies. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). *A framework for research into students' problem posing in school mathematics.* Recuperado outubro de 2012, de http://www.merga.net.au/documents/RP_Stoyanova_Ellerton_1996.pdf

Zakaria, E., & Ngah, N. (2011). A preliminary analysis of students' problem-posing ability and its relationship to attitudes towards problem solving. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 3*(9), 866–870.

CONTRIBUTOS DE UM PROJETO DE TURMA PARA O DESIGN DE TAREFAS

Helena Gil Guerreiro

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hg@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa, Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo.

Nesta comunicação apresentam-se duas tarefas que integraram uma sequência de trabalho, no âmbito de uma experiência de ensino construída e implementada numa turma de 3º ano do 1ºCEB. Através de um *design research*, a experiência de ensino decorreu com o propósito de contribuir para aprofundar a compreensão da forma como os alunos desenvolvem a aprendizagem dos números racionais. A recolha de dados aconteceu em contexto educativo real e envolveu vários instrumentos de recolha. A análise das tarefas que se apresenta procura relacionar a intervenção dos alunos com o tipo de tarefas construído e com o contexto em que estas surgem, atribuindo sentido à gestão curricular implementada. Uma primeira interpretação dos dados permite identificar uma relação entre o contexto de intervenção, o tipo e o grau de desafio das tarefas e a construção de significados matemáticos comuns. A análise evidencia ainda que a interação entre os alunos, em função de uma situação real, parece contribuir para a compreensão das relações numéricas que vão estabelecendo.

Palavras-chave: 1º Ciclo Ensino Básico; aprendizagem; interação social; números racionais; sentido de número,

Introdução

As orientações curriculares para o trabalho em torno dos números racionais apontam este tópico como um tópico crítico do currículo (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Treffers, 1991; Fosnot & Dolk, 2002; Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2006; NCTM, 2007; Empson, Levi, & Carpenter, 2010). Por um lado, é um conteúdo complexo para o desenvolvimento de uma construção sustentada de conhecimento matemático. E, por outro, é gerador de conflitos conceptuais, dadas as dificuldades que muitos alunos, tradicionalmente, sentem em lidar com os conceitos relativos a estes números.

Diferentes correntes de investigação determinam diferentes caminhos no trabalho com os números racionais, nos primeiros anos. Um desses caminhos (Moss & Case, 1999) privilegiou a percentagem, atribuindo-lhe um papel preponderante na fase inicial de trabalho com esses números, com alunos do 4º ano de escolaridade. Moss e Case (1999) afirmam que esta representação permite combinar uma compreensão qualitativa das proporções e utilizar o domínio que os alunos possuem dos números de 1 a 100, resultando num desenho curricular experimental, baseado em contextos quotidianos e nos conhecimentos que os alunos já possuíam. Os pressupostos deste modelo curricular foram inspiradores do percurso desenvolvido com uma turma do 1º CEB, em torno da construção dos conceitos relativos aos números racionais. Um estudo exploratório realizado nessa turma, revelou que os alunos possuíam alguma intuição relativa à noção de percentagem. Esta surge, de algum modo, associada às suas vivências, dentro e fora da escola. A análise dos dados desse estudo veio apontar no sentido de partir dessas vivências, para desencadear a construção da rede de conhecimentos que se pretendia criar, definindo um percurso próximo do processo natural de aprendizagem dos alunos

Esse percurso foi-se construindo, numa perspetiva de aprendizagem, como processo comparticipado de construção de conhecimento e no quadro do desenvolvimento do sentido de número. Nesta comunicação serão apresentados alguns aspetos que dizem respeito à construção e à implementação de uma sequência de tarefas desse percurso. Será apresentado apenas um episódio, situando-o no grupo social em que aconteceu.

Para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão

Compreender como trabalhar os números racionais com os alunos, nos primeiros anos, torna-se um compromisso que se assume quando se pretende que façam um percurso de aprendizagem consistente, que lhes permita apreciar a matemática e vivenciar oportunidades de sucesso. Behr et al., afirmam que "o baixo desempenho dos alunos pode estar relacionado com um currículo que se centra nos procedimentos em vez de num cuidadoso desenvolvimento da compreensão" (1983, p. 92). Outros investigadores alertam para as dificuldades que persistem no trabalho com estes números. Monteiro e Pinto (2006) consideram que um dos obstáculos à compreensão dos números racionais, quer na forma de fração, quer na forma de numeral decimal, se prende com o facto do estudo dos aspetos formais destes números ser introduzido demasiado cedo e de haver uma excessiva preocupação com os procedimentos em detrimento dos conceitos.

Como afirma Lamon (2006), "compreender os números racionais envolve a coordenação de ideias e interpretações diferentes, mas interrelacionadas" (p. 23). Esta construção traduz-se num desenvolvimento gradual do sentido de número racional. Uma forma de ensino mais centrada nos procedimentos poderá não dar espaço para que os alunos possam ir estabelecendo relações no sentido do desenvolvimento do sentido do número racional o que poderá conduzir a equívocos.

Moss e Case (1999) desenvolveram um projeto de investigação no Canadá sobre o desenvolvimento da compreensão dos números racionais. O objetivo do estudo era "promover uma compreensão flexível e interligada do sistema de números racionais" (Moss, 2003, p.335). Estas investigadoras apontam algumas explicações para as dificuldades que normalmente surgem associadas à conceptualização do conhecimento relativo aos números racionais e que trespassam as suas diferentes representações simbólicas, nomeadamente: (1) o ênfase atribuído à sintaxe e não à semântica, considerando que no currículo do ensino básico dedica-se mais tempo ao ensino dos procedimentos de cálculo e à nomenclatura, do que à construção de significados e compreensão dos conceitos; (2) o facto de os professores não privilegiarem as tentativas espontâneas dos alunos de compreensão dos números racionais fazendo uma abordagem centrada na memorização de regras; (3) a opção, no início do trabalho com os números racionais, pela utilização de representações que se confundem facilmente com os números inteiros e (4) a ideia de que a notação dos números racionais, seja associada à fração, seja a numeral decimal, é algo tão evidente e transparente, que pode ser dado no início de uma aula. A preocupação com o aprofundamento da compreensão conceptual relativa aos números racionais é importante, no entanto, Moss e Case (1999) defendem que é necessário primeiro haver uma apropriação do sistema como um todo, em que as diferentes componentes encaixem, como a sua semântica e sintaxe, em vez de se centrar no estudo de uma ou outra, de forma isolada.

As investigadoras centram-se na construção de um desenho curricular experimental, que se apoia numa trajetória de ensino-aprendizagem que, para além de indicar que na base do trabalho inicial com os números racionais devem estar as percentagens, sugere que os alunos conseguem aprofundar a sua compreensão destes números, confrontando-se com situações em que percentagens, decimais e frações possam ser usadas indiferenciadamente.

Fosnot e Dolk (2002) afirmam que os alunos precisam de compreender as ideias importantes e progressivamente ir refinando as suas estratégias. Estas podem nem sempre ser eficientes, nem mesmo suficientes, mas tem que ter a possibilidade de as fazer evoluir. Parte do que significa fazer matemática é explorar relações e descobrir formas de criar os seus procedimentos. Esta ideia relaciona-se estritamente com a ideia de sentido de número, que como afirmam Abrantes, Serrazina, e Oliveira (1999), passa pelos alunos adquirirem uma compreensão global do número e das operações a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações.” (p.40). Estes autores lembram que é uma competência que se desenvolve ao longo do percurso escolar dos alunos, ao longo da sua vida.

A corrente de investigação holandesa descreve modelos matemáticos como mapas mentais de relações que podem ser usados como instrumentos na resolução de problemas. A tabela de razão, a reta numérica dupla, o relógio, grelhas e tiras de percentagens são modelos que podem ser usados também como instrumentos de cálculo poderosos. “Os modelos das crianças são normalmente representações das suas ações numa dada situação” (Fosnot & Dolk, 2002, p. 74). Compreender que modelos são importantes no que respeita ao trabalho com os números racionais, nomeadamente com as frações, pode facilitar a ação do professor quando este pretende ajudar os seus alunos a generalizar, a ir além do modelo específico de cada situação e interpretá-la com um modelo matemático poderoso como instrumento do seu pensamento (Fosnot & Dolk, 2002).

Os modelos emergem de representações de situações que os alunos vivenciam. Na resolução de um problema os alunos representam as suas estratégias e não a situação em si. Por exemplo, os alunos podem usar a reta numérica dupla ou tabelas de razão para representar as suas estratégias de cálculo. Essas representações evoluem para modelos matemáticos de relações numéricas e tornam-se instrumentos matemáticos. É este processo que Fosnot e Dolk caraterizam de generalização.

O cerne da modelação é o sentido do número e a representação das relações numéricas. Qualquer modelo deve ser desenvolvido no contexto de investigações ricas. À medida que os alunos os usam para olhar o seu mundo, usam também para representar as suas estratégias de cálculo e eventualmente podem tornar-se modelos para pensar. Inicialmente, a utilização destes modelos acontece para experienciar uma dada situação concreta. No entanto, pretende-se que os alunos mais tarde possam ser capazes de estabelecer raciocínios com recurso a modelos mais abstratos e independentes dos contextos.

Além da sua natureza complexa, uma outra dimensão que se reveste de alguma importância quando falamos na aprendizagem dos números racionais é a das interações a nível da sala de aula e do próprio modelo pedagógico desenvolvido. As dimensões da interação são um meio através do qual se pode aceder ao pensamento dos alunos, permitindo que este seja organizado num corpo de conhecimentos matemáticos significativos (Empson, 2002). Algumas investigações vêm reforçar a importância desta dimensão mostrando que o ambiente social, e socio matemático, de sala de aula pode ser gerador de dinâmicas de interação importantes no desenvolvimento de procedimentos adequados e eficientes por parte dos alunos (Yackel & Cobb, 1996; Ferreira, 2012). Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio (2005) reforçam a importância desta dimensão afirmado que "a situação específica de interação social em sala de aula pode comportar processos linguísticos e sociocognitivos sobremaneira relevantes para a aquisição de novas estratégias e de conhecimentos mais complexos" (p.57).

As tarefas e a construção compartilhada das aprendizagens matemáticas na sala de aula

O estudo que inspira esta comunicação procura contribuir para aprofundar a compreensão do processo de construção do conhecimento matemático dos alunos, no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula, tendo presente que este meio natural é um ambiente rico e diversificado de interações tanto simétricas como assimétricas e, portanto, potencialmente rico para o desenvolvimento de aprendizagens comparticipadas, por todos os seus membros, dos quais faz parte naturalmente, o professor.

Numa perspetiva sociocultural, considera-se a aprendizagem humana um processo de natureza social, em que a vida intelectual dos que nos rodeiam marca o nosso processo de desenvolvimento (Vygotsky, 2003). É pois, em interação com os Outros, mais experientes e competentes que o desenvolvimento humano acontece. Vygotsky (2003) identifica este processo de aprendizagem como um trabalho na zona de desenvolvimento próximo (ZDP), que define como o intervalo entre a capacidade potencial de um indivíduo, ao interagir com outro, e a capacidade real por ele demonstrada. Isto é, uma criança aprende mais e melhor se trabalhar numa tarefa com o Outro, do que se fizesse a mesma tarefa individualmente.

A este respeito, Daniels (2001) afirma que "os alunos podem cooperar com os professores ou colegas mais aptos numa atividade cuja complexidade ultrapassa a sua compreensão quando trabalham sozinhos." (p.147). As aplicações deste conceito parecem tornar-se evidentes quando se pensa em termos de organização de contextos de aprendizagem. É necessário assegurar que cada aluno possa fazer o seu percurso, tendo um conjunto de atividades adequadas ao seu desenvolvimento, isto é, que permitam fazer avançar a sua aprendizagem, com apoio e recursos, em interação social, de modo a que consiga alcançar um nível de conhecimento mais elevado do que aquele que alcançaria sozinho.

Da convicção acerca da importância do estar em grupo, surge o conceito de aprendizagem cooperativa, que, numa perspetiva pedagógica, se traduz quando no seio de um grupo cada um dos seus elementos tiver presente que o seu sucesso só se alcança com o sucesso de todos outros, sendo que os seus resultados condicionam os resultados dos outros com quem interage de forma cooperativa. (Salvador, 1997).

A planificação dos momentos de trabalho e o modo de organização dos alunos na sala de aula são determinantes no contexto de uma aprendizagem cooperativa. O modelo pedagógico[7] que se concretiza deve permitir que as sessões coletivas de matemática, procurem ter como ponto de partida os conhecimentos que os alunos já possuem e que se desenvolvam de forma situada em relação ao grupo social. Estes momentos podem envolver diversos tipos de tarefas, como problemas, tarefas de investigação ou tarefas de exploração e estas podem surgir por iniciativa do professor ou sugestão de um aluno, negociada com o professor (Ponte, 2005).

Segundo alguns autores, o momento de discussão e comunicação em coletivo é a pedra de toque de todas as etapas de resolução de uma dada tarefa. Fosnot e Dolk (2002) descrevem esse momento como congresso matemático. O congresso matemático é um momento em que a turma está reunida em coletivo e alguns alunos apresentam e discutem as suas estratégias e soluções com o coletivo da turma. Os autores destacam que é na antecipação das questões que os colegas podem colocar e na reflexão acerca da forma como vão comunicar, na organização da explicação do como pensaram, que o conhecimento se aprofunda.

Na estratégia de ensino-aprendizagem exploratório, a *discussão* ganha contornos semelhantes ao *congresso matemático* de Fosnot e Dolk. Ponte (2005) descreve-a como um momento gerador de "oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento." (p.16). A sua potencialidade reside na possibilidade de interação entre todos os participantes, expondo ideias e fazendo perguntas.

O tipo de tarefas (Ponte, 2005) que se desenvolvem na sala de aula condiciona o envolvimento dos alunos e podem proporcionar momentos de maior ou menor interação e discussão. Os momentos de interação são fundamentais a um tipo de tarefas mais abertas, como nas tarefas de exploração e na resolução de problemas, no entanto, poderão ser importantes nos momentos em que se pretende colocar em comum ideias ou sistematizar conceitos, em tarefa mais fechadas, como na resolução de exercícios. Bishop e Goffree (1986) ressalvam que "Apenas através do encorajamento do professor para a comunicação entre todos os participantes da aula é possível uma genuína partilha de significados matemáticos." (p.21).

No contexto de uma aprendizagem cooperativa, a construção compartilhada do conhecimento acontece, segundo Wells (1999), através de um processo de construção e reconstrução entre participantes em situações específicas, com recursos culturais à sua disposição. À medida que vão trabalhando na conquista colaborativa dos objetivos, acontece

[7] O modelo pedagógico concretizado é o do MEM, um sistema de organização cooperada do trabalho de aprendizagem para a formação democrática dos alunos.

a construção compartilhada das aprendizagens, que emerge no decurso da sua atividade. Cobb et al. (2011) sugerem que a construção da aprendizagem acontece na relação que se estabelece entre os aspetos sociais da prática e os aspetos individuais ou psicológicos dos alunos, isto é, segundo estes autores, na articulação entre a perspetiva social e a perspetiva psicológica na atividade matemática, que se geram aprendizagens.

Será evidente que a construção compartilhada das aprendizagens assim descrita, depende do tipo de tarefas propostas, do grau de desafio que essas tarefas comportam, dos artefactos usados para mediar essas tarefas, das metodologias de trabalho implementadas e da interação que se estabelece na resolução dessas mesmas tarefas.

Metodologia

A investigação que suporta esta comunicação é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e segue os procedimentos metodológicos de um *Design Research* (Cobb et al., 2011), com base numa experiência de ensino, orientada por uma conjetura. Consiste numa intervenção planeada que acontece durante um dado período de tempo numa sala de aula, em que se trabalha um dado assunto, a partir de uma inferência baseada numa evidência e sustentada por uma teoria, que vai sendo revista e reelaborada enquanto a investigação está a decorrer (Confrey & Lachance, 2000).

O *design research* é uma modalidade analítica usada para tentar compreender a aprendizagem matemática dos alunos, tal como ocorre no contexto social da sala de aula. A conjetura que orienta a experiência de ensino implementada é baseada em evidências e sustentada por um quadro teórico com duas dimensões: uma dimensão do conteúdo matemático e outra pedagógica.

Na experiência de ensino implementada, a primeira dimensão centra-se na construção da aprendizagem dos conceitos relativos aos números racionais, com compreensão, no quadro do desenvolvimento do sentido de número. A dimensão pedagógica tem por base uma perspetiva sociocultural, em que a construção do conhecimento se faz em interação na sala de aula, no contexto de uma comunidade de aprendizagem, desencadeando uma compreensão socialmente construída das aprendizagens. Estas duas dimensões complementam-se permitindo estudar as práticas e a sua evolução, na articulação de uma perspetiva social com uma perspetiva psicológica do processo de aprendizagem (Cobb, et al., 2011).

A parte empírica desta investigação centra-se no desenvolvimento de um percurso de aprendizagem, construído com uma turma de uma escola pública de Lisboa. É possível organizar esse percurso em três fases distintas: inicia-se com a exploração da percentagem; segue-se o estudo da representação decimal, na sua relação com a percentagem. E, por fim, o trabalho em torno do estudo das frações, em articulação com as restantes representações. As tarefas escolhidas para esta comunicação enquadram-se na primeira fase do estudo.

A recolha de dados acontece em algumas aulas de matemática do terceiro período do 3º ano de escolaridade e do primeiro período do 4º ano de escolaridade da turma e apoia-se num conjunto progressivo de sequências de tarefas, do qual se escolheram duas para apresentar nesta comunicação. A turma, enquanto comunidade de aprendizagem, foi desenvolvendo uma construção compartilhada das aprendizagens, relativas aos números racionais, que se pretende analisar e compreender neste estudo. Esta construção constitui um desafio da prática na sala de aula e envolve, nomeadamente a compreensão da relação entre a dimensão do conteúdo matemático e a dimensão pedagógica.

A professora da turma é também investigadora e a primeira autora desta comunicação. Este facto acontece dada a intencionalidade de agir e refletir sobre a prática. Se planeada e refletida, segundo Alarcão (2000), pode assumir-se como uma investigação sobre a sua prática e o professor desempenhar também o papel de investigador. No entanto, importa ter presente que quando o professor é também investigador os seus campos de intervenção intersetam-se, pelo que será necessário assumir o grau de subjetividade crítica associado às decisões que vão sendo tomadas em cada etapa da investigação.

A recolha de dados foi feita através de registos áudio e vídeo das interações e dos momentos coletivos, do diário de bordo da professora/investigadora e das produções dos alunos. A análise de dados procura identificar sequências fortes do ponto de vista da aprendizagem dos alunos, procurando estabelecer relações com a construção das tarefas (contexto e tipo de tarefas) e com a estratégia de implementação escolhida.

Uma sequência de tarefas a propósito de um projeto da turma

As tarefas que se apresentam surgem na sequência de um projeto de intervenção da turma. A construção de algumas tarefas envolveu a participação de todos os alunos, na medida em que se procurou encontrar respostas para problemas identificados, outras surgiram como forma de sistematização dos conteúdos que iam sendo trabalhados.

A organização de um Encontro entre turmas, que se correspondem há três anos, demorou alguns meses e envolveu uma planificação cuidada de todas as atividades a realizar. Desenvolveu-se como um projeto interdisciplinar que envolveu toda a turma. Também no âmbito da Matemática foi gerador de contextos de aprendizagem potentes.

Este encontro incluía uma visita à *Kidzania*. Uma das primeiras iniciativas da turma foi saber os custos, que envolviam bilhete e almoço. Perante valores muito elevados, decidiu-se escrever uma carta à *Kidzania* a solicitar um desconto. Este pedido foi atendido pela empresa (figura 1) e a resposta que enviaram para além de ajudar a perceber que o que acontece na escola tem ligação com a vida, muito contribuiu para o trabalho em Matemática, com as percentagens.

Exma. Sra. Professora Helena,

Antes de mais gostaríamos de agradecer a forma tão criativa e engraçada que escolheram para nos fazer chegar o vosso pedido. É com todo o prazer que enviamos abaixo a informação geral referente ás visitas escolares.
Relativamente ao vosso grupo em especial, visto que pretendem visitar-nos numa altura de grande afluência, podemos apenas aplicar um desconto de 25% na entrada de cada criança. Neste sentido, o valor por criança será 9€ de entrada, em vez de 12€ associado ás crianças do ensino básico. Para efetuar a pré-reserva, deverá preencher o formulário em anexo, indicando um dos dias abaixo indicados.

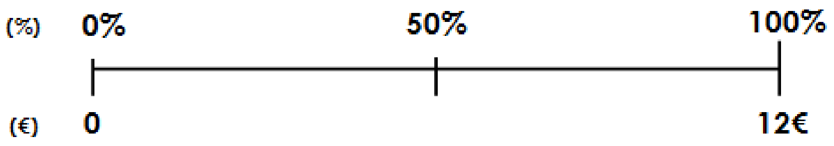
Figura 1 – Resposta da Kidzania ao pedido de desconto da turma

Este projeto permitiu desenvolver um conjunto de tarefas diversificadas e significativas para os alunos, cada uma com intencionalidade, que pretendiam fazer com que os alunos se envolvessem em atividade matemática produtiva, especificamente em torno dos números racionais e para resolver problemas que se colocavam especificamente no contexto do Encontro.

Inicialmente, foi lançado à turma o desafio de confirmar o valor em euros do desconto. Os alunos encontravam-se dispostos em cinco pequenos grupos de quatro elementos. Cada grupo era heterogéneo, procurando, na medida do possível, representar a turma, garantindo que, em cada grupo, pudesse haver um ou mais alunos que teriam a capacidade de explicar o que pudesse não ficar claro para os restantes. Meneses (1999) reforça que as intervenções verbais dos alunos são facilitadas quando se dispõem em pequenos grupos e que o desenvolvimento das tarefas, de forma cooperativa, permite que os alunos se exprimam com mais confiança.

A sequência de tarefas criada procurava encaminhar os alunos, ao longo de várias tarefas, e fornecer modelos potentes para o cálculo de percentagens.

2. Se o desconto tivesse sido de 50%, quanto seria esse valor em euros? Marca na reta.



2.1. Completa a tabela.

Percentagem	**100%**	**50%**
Preço (€)	12	

3. Confirma agora qual é a percentagem correspondente ao desconto que foi feito pela *Kidzania*. (explica como pensaste)

Figura 2 – A tarefa 2 e 3 da proposta de trabalho.

Foi interessante perceber que alguns grupos deram um uso adequado à reta numérica vazia, revelando alguma apropriação do modelo, e outros recorreram à explicação do raciocínio por palavras (figura 3). Na primeira imagem da figura 3, podemos observar que a reta numérica é utilizada para apoiar o raciocínio dos alunos acerca das relações numéricas que estão a estabelecer.

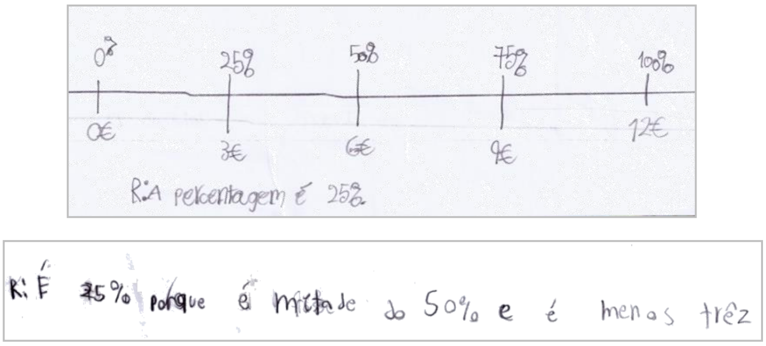


Figura 3 – Duas justificações, de grupos de alunos diferentes, ao desafio de confirmar a percentagem correspondente ao desconto.

A tarefa que se seguiu envolvia o cálculo do total a pagar por toda a turma para a visita de estudo. Era importante saber porque a *Kidzania* tinha pedido um sinal. Como a deslocação não comportava custos, pois seria a pé, apenas seria necessário incluir o preço do almoço, que era de 1,50€/aluno. (figura 4).

A resolução desta tarefa decorreu em pequenos grupos. No apoio ao trabalho dos grupos, foi possível identificar dificuldades em operar com a representação decimal, uma vez que surgia, sem ter sido trabalhada formalmente. Perante as hesitações, surgiu a necessidade de fazer um momento de discussão coletiva, inicialmente não previsto, em que foram escolhidas três estratégias utilizadas por diferentes grupos (G1, G2 e G3) para serem apresentadas e debatidas, no sentido de identificar fragilidades e potencialidades.

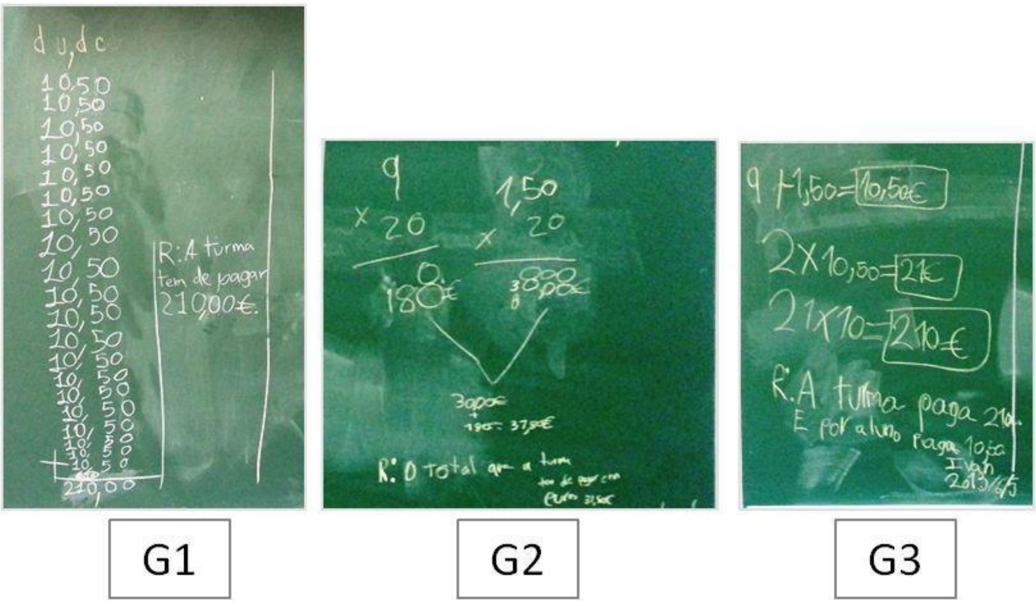


Figura 4 – Três resoluções, de grupos de alunos (G) diferentes, à tarefa 4.

A estratégia seguida pelo G1 recorreu ao cálculo, usando o algoritmo da adição. O grupo considerou que o fundamental foi manter as ordens. Este grupo chegou a um resultado correto. Na discussão coletiva considerou-se que o procedimento escolhido era correto mas muito moroso.

O G2 resolveu o cálculo separando os cálculos do almoço dos da entrada. Os alunos tentaram fazer o algoritmo e organizaram os cálculos como se o tivessem resolvido, mas recorreram a um cálculo horizontal, como mostra a figura 5 (retirada do registo da resolução da tarefa de um elemento do G2). Esta estratégia não permitiu chegar a um resultado correto, no entanto o procedimento escolhido foi considerado rápido, na discussão em coletivo.

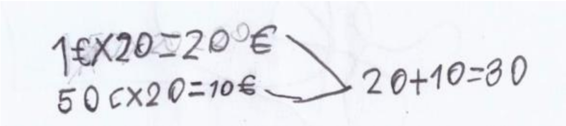


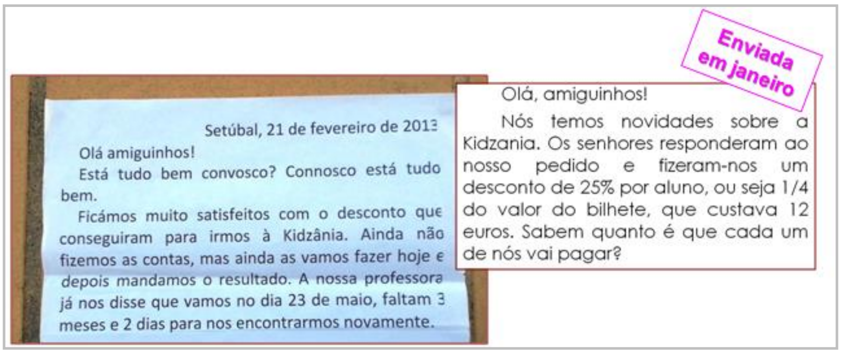
Figura 5 – Uma das etapas de resolução da tarefa 4, do G2.

A estratégia adotada pelo G3 foi calcular a totalidade por aluno e depois calcular para dois alunos para facilitar o cálculo, uma vez que apenas teriam que lidar com números inteiros. Esta foi considerada eficaz, por ser rápida e conduzir a um resultado correto.

Os diferentes procedimentos postos em comum e refletidos em conjunto permitiram encontrar algumas pistas sobre como podemos fazer cálculos, mesmo sem ainda dominar os algoritmos com números na representação decimal. Este momento permitiu perceber o quanto é importante que os alunos reflitam em conjunto sobre o trabalho que realizam, sobre atividade que desenvolvem.

Na sequência da exploração desta sequência de tarefas foi sugerido na turma que se enviasse um desafio aos correspondentes. A troca regular de desafios e novas propostas de trabalho era uma constante na correspondência. O desafio consistia em descobrir o preço do bilhete, sendo que a empresa nos tinha feito um desconto de 25% sobre o valor inicial.

A proposta foi aceite por parte dos correspondentes, como é possível ver nos excertos de cartas trocadas na figura 6, tendo constituído uma proposta desafiante também para os correspondentes.


Enviada em janeiro

Olá, amiguinhos!
Nós temos novidades sobre a Kidzania. Os senhores responderam ao nosso pedido e fizeram-nos um desconto de 25% por aluno, ou seja 1/4 do valor do bilhete, que custava 12 euros. Sabem quanto é que cada um de nós vai pagar?

Setúbal, 21 de fevereiro de 2013
Olá amiguinhos!
Está tudo bem convosco? Connosco está tudo bem.
Ficámos muito satisfeitos com o desconto que conseguiram para irmos à Kidzânia. Ainda não fizemos as contas, mas ainda as vamos fazer hoje e depois mandamos o resultado. A nossa professora já nos disse que vamos no dia 23 de maio, faltam 3 meses e 2 dias para nos encontrarmos novamente.

Figura 6 – Excerto das cartas trocadas sobre o desafio lançado pela turma de Lisboa

No fim destas tarefas, podia ler-se no diário de bordo da investigadora:

> A partilha de estratégias permite ir notando uma co-construção do pensamento em grupo turma. As estratégias de uns, vão sendo adotadas por outros, permitindo que progressivamente, um número maior de alunos vá conseguindo usar raciocínio proporcional nos cálculos com percentagem.

O design das tarefas diretamente relacionado com uma atividade concreta dos alunos e para a qual havia uma forte motivação, parece ter tido aqui um papel preponderante.

Considerações finais

As tarefas apresentadas e discutidas fazem parte de uma sequência de tarefas integradas no percurso de aprendizagem desta turma. A sua construção foi acontecendo em função de um propósito – um projeto de intervenção da turma – e foi evoluindo de acordo com as experiências que se foram vivendo na sala de aula, através da monotorização do processo e da avaliação regular estabelecida.

Mendes, Oliveira e Brocardo (2011) destacam que a seleção e a construção de tarefas, bem como a sua exploração são atividades às quais se deve dar particular atenção, dado que o tipo de tarefas propostas na aula influencia o modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente. Nesta sequência a intencionalidade e o tipo de tarefas escolhido para a sua concretização foram aspetos importantes. Como afirma Meneses (1999), o seu grau de dificuldade deve permitir abordar as tarefas, mas deve potenciar a discussão, conduzindo os alunos a pensar, a conjeturar, a trocar opiniões e argumentar.

Depois do trabalho em pequenos grupos, seguiam-se os momentos coletivos de matemática. Estes encontram semelhanças nos princípios do ensino-aprendizagem exploratória da matemática (Ponte, 2005) que defendem que os alunos podem ser responsáveis pela construção do conhecimento que se gera durante a realização de uma dada tarefa. Neste processo, a natureza da tarefa, o contexto e as estratégias são fundamentais para fazer emergir ideias matemáticas. A definição e antecipação das suas etapas são determinantes para que a comunicação se centre no que é relevante e conduza ao sucesso da tarefa.

Os alunos sentiram-se desafiados e houve lugar para o trabalho em pequenos grupos, durante o qual, o professor apoiou o processo de forma rotativa, e para os momentos de trabalho curricular comparticipado pela turma, momentos coletivos, dirigidos pelo professor e comparticipados por todos onde a compreensão dos conceitos foi alcançada em interação, explicitando e clarificando o pensamento de cada um, promovendo a negociação de significados. Os resultados obtidos evidenciam uma compreensão dos alunos quer das tarefas propostas quer dos cálculos a efetuar para a sua resolução.

O conhecimento, segundo Wells (1999) é construído e reconstruido entre participantes em situações especificas, com os recursos culturais à sua disposição, à medida que vão trabalhando na conquista colaborativa dos objetivos que emergem no decurso da sua atividade. Assim, a aprendizagem depende do tipo de tarefas que são propostas, nos desafio que essas tarefas comportam, nos artefactos usados para mediar essas tarefas e do feedback que recebem, ao se confrontarem com esses desafios, quer do professor, quer dos pares.

O projeto de investigação levado a cabo por Moss e Case (1999), sustenta a ideia de que as percentagens podem ser a base do trabalho inicial no âmbito dos números racionais. Estas tarefas surgem na fase do trabalho inicial com a percentagem, recorrendo a números de referência, em contextos específicos e antes da introdução formal de outras representações dos números racionais. Bishop e Goffree (1986) afirmam que "o método e o nível da atividade [dos alunos] dependem muitíssimo do contexto no qual a tarefa se enquadra" (p.14). É ainda possível identificar uma apropriação do uso de modelos pelos alunos e a construção de relações e significados no trabalho com os números racionais.

Referências:

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira I. (1999). A Matemática na educação básica. Lisboa: ME/DEB.

Alarcão, I. (2000). Professor-investigador: Que sentido? Que formação?. In Campos, B.P. (Org.). *Formação profissional de professores no Ensino Superior*. Porto: INAFOP/Porto Editora, (21-30).

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York, NY: Academic Press.

Bishop, A. J. & Goffree. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & Otte (Eds), *Perspectives on Mathematics Education* (pp.309-365). Dordrecht: D. Reidel, (Tradução de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte).

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). A Investigação Qualitativa em Educação. Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2011). Participating in Classroom Mathematical Practices. *A Journey in Mathematics Education Research: Insights from the Work of Paul Cobb*, Springer, 117–163.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Daniels, H. (2001). Aplicações das teorias sociocultural e da atividade na educação. In *Vygotsky e a Pedagogia*. Edições Loyola: Rio de Janeiro.

Empson, S. B. (2002). Organizing Diversity in Early Fraction Thinking. Em Bonnie Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 29-40). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Empson, S. B., Levi, L. & Carpenter, T. P. (2010). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. (pp. 409-428) Heidelberg: Springer.

Ferreira, E. (2012). *O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento). Lisboa: IE-UL.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions, Decimals and Percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Mendes, F., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2011). As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. *Actas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 1-16). Lisboa: APM.

Meneses, L. (1999) Matemática, Linguagem e Comunicação. In *Atas do ProfMat 99*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática consultado online http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2008%202009/Comunicacao/Proff.pdf

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14 (1), 89-108.

Moss, J. (2003). Introducing Percents in linear Measurement to Foster an Understanding of Rational-Number Operation. *Teaching Children Mathematics*. 9(6), 335-339.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and na experimental curriculum. *Jounal for Research in Mathematics Education*, 30, 122-147.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In *GTI* (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (11-34). Lisboa: APM.

Pontecorvo, C., Ajello, A. M. & Zucchermaglio, C. (2005). *Discutindo se aprende – interação social, conhecimento e escola*. Porto Alegre: Artmed.

Salvador, S. (1997) *Aprendizaje escolar y construcion del conhecimento*. Barcelona: Editorial Paidós Ibérica, S.A.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland. (Ed.). *Realistic Mathematics Education in primary school*. (pp. 21-56). Utrecht: Freudenthal Institute.

Vygotsy, L. S. (2003). *A Formação Social da Mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Towards a Socio-cultural Practice and Theory of Education*. New York: Cambridge University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458-477.

DESIGN DE TAREFAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO MENTAL DOS ALUNOS

Renata Carvalho
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: O cálculo mental contribui para o desenvolvimento, nos alunos, de diversas capacidades importantes para a aprendizagem da Matemática. O objetivo deste estudo, que tem por base uma experiência de ensino, é identificar aspetos nas estratégias dos alunos que possam apoiar a definição de princípios orientadores para o *design* de tarefas de cálculo mental com números racionais positivos para alunos do 6.º ano. As tarefas apresentadas foram criadas e aperfeiçoadas no quadro de um projeto baseado nos princípios do *design research*. A análise das estratégias dos alunos permitiu formular quatro princípios orientadores do *design* de tarefas de cálculo mental, que realçam a importância do uso de contextos, de diversas representações dos números racionais, do nível cognitivo das tarefas e de conhecimentos sobre estratégias e erros dos alunos.

Palavras-chave: Cálculo mental, Números racionais, Estratégias dos alunos, *Design* de tarefas.

Introdução

Promover o cálculo mental na sala de aula ao longo do ensino básico potencia o desenvolvimento de aprendizagens sobre números e operações em diversos conjuntos numéricos. Na perspetiva de vários autores (e.g., Bourdenet, 2007; Taton, 1969) desenvolver o cálculo mental dos alunos contribui não só para a consolidação de aprendizagens e aferição de conhecimentos, mas desenvolve noções de ordem e de lógica e outras capacidades importantes para a aprendizagem matemática dos alunos, tais como concentração, reflexão e sentido crítico.

Na perspetiva de Ponte (2005), as tarefas determinam em grande parte, as "oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (p. 31). Esta é uma perspetiva partilhada por Ainley, Bills e Wilson (2005) ao considerarem que uma tarefa proposta de forma intencional fornece aos alunos oportunidades para usar e aprender sobre ideias matemáticas específicas, de forma a poderem apreciar a sua utilidade. Neste sentido, a realização de tarefas de cálculo mental representa uma oportunidade para envolver os alunos em atividades matemáticas que lhes permitem pensar sobre números, operações e suas relações e desenvolver estratégias de cálculo.

Para Thompson, Carlson e Silverman (2006) as tarefas têm três propósitos: envolver os alunos numa determinada prática; promover a abstração reflexiva; e possibilitar discussões onde alunos e professores partilham o mesmo objeto de discurso. Estes propósitos remetem-nos para a necessidade de criar tarefas que promovam práticas de cálculo mental na sala de aula e possibilitem a reflexão dos alunos acerca das tarefas e do conteúdo matemático envolvido e a discussão coletiva. As tarefas e a discussão na sala de aula, enquanto aspetos essenciais desta prática e promotoras do desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos, são decisivas para a construção de um reportório de estratégias de cálculo mental.

Considerando estes propósitos como pontos de partida para o *design* de tarefas de cálculo mental, o objetivo deste estudo é identificar aspetos nas estratégias dos alunos, ao longo de uma experiência de ensino, que possam apoiar a definição de princípios orientadores para o *design* de tarefas de cálculo mental com números racionais positivos para alunos do 6.º ano.

Design de tarefas de cálculo mental com números racionais

As práticas de cálculo mental na sala de aula requerem a elaboração cuidadosa de tarefas. Para isso é importante definir cálculo mental, perceber o que este envolve e que conhecimentos acerca dos números racionais podem ser contemplados e desenvolvidos através das tarefas.

Cálculo mental

Reys, Reys, Nohda e Emori (1995) indicam que o cálculo mental se refere aos processos mentais usados para calcular um resultado aritmético exato sem a ajuda de dispositivos externos. Seguindo em parte esta perspetiva, consideramos que o cálculo mental é um cálculo exato ou aproximado, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz, e que, recorrendo a modelos mentais (Johnson-Laird, 1990), faz uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações, sendo possível recorrer a registos intermédios em papel.

Para calcularem mentalmente, os alunos necessitam de compreender a grandeza e valor dos números, o efeito das operações sobre os números, saber factos numéricos que lhes permitam calcular rapidamente e com precisão, e serem capazes de fazer estimativas e avaliar a razoabilidade de um resultado (Heirdsfield, 2011). Dado que o cálculo mental com números racionais envolve um raciocínio mais complexo do que com números naturais (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010), o recurso a regras memorizadas pode, por vezes, apoiar o pensamento relacional dos alunos (Empson, Levi & Carpenter, 2010). O pensamento relacional é um aspeto importante do cálculo mental pois refere-se à capacidade para usar propriedades fundamentais das operações e a noção de igualdade, para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson et al., 2010). Baseia-se em relações numéricas e o seu desenvolvimento serve de suporte à transição da aritmética para a álgebra (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

No cálculo mental, para além do uso de factos numéricos (e.g., tabuadas), regras memorizadas (e.g., multiplicação por potências de 10) e relações numéricas (e.g., conversão entre representações), a teoria dos modelos mentais (Johnson-Laird, 1990) permite compreender as estratégias dos alunos. Quando estes calculam mentalmente, recorrem a representações mentais para relacionar números e operações com as experiências e conhecimentos que possuem acerca do mundo real, incluindo conhecimentos sobre Matemática. Segundo esta teoria, o individuo constrói representações mentais acerca do mundo que o rodeia, às quais recorre para compreender a realidade e fazer inferências. Estas representações podem ser; (i) modelos, se representam perceções gerais do mundo real (e.g., usar um contexto de saldos para calcular 25% de 20); (ii) imagens, se envolvem uma perceção mais específica da realidade onde se identificam algumas características do objeto (e.g., relacionar $\frac{1}{2}$ com uma piza dividida em duas parte iguais da qual apenas se considera uma); (iii) representações proposicionais, se representam proposições verdadeiras/falsas desempenhando um papel importante no processo de inferência (e.g., para calcular x na expressão 40% de x = 48, usa uma sequência de proposições para chegar à solução: “se 48 corresponde a 40%, 48÷4 corresponde a 10%, ou seja 12. Então, como 10%×10 é 100%, 12×10 corresponde a x”). Assim, quando os alunos calculam mentalmente recorrem às suas representações mentais da realidade (modelos, imagens ou representações proposicionais) para mobilizar factos numéricos, regras memorizadas e relações numéricas.

Números racionais

Diversos autores (e.g., Bell, 1993; Callingham & Watson, 2004; Caney & Watson, 2003; Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijzer, 2008; Lamon, 2006) apontam aspetos relativos à aprendizagem dos números racionais que importa ter em conta no *design* de tarefas de cálculo mental. Um desses aspetos, como refere Bell (1993), é o contexto em que os números racionais são apresentados e abordados com os alunos. Segundo o autor, um conhecimento estruturado, por norma, está relacionado com o contexto em que foi aprendido, sendo difícil transpor esse conhecimento para novas situações. Galen et al. (2008) acrescentam ainda que o contexto pode ajudar os alunos a dar significado aos números.

Outro aspeto prende-se com o uso de diversas representações dos números racionais (decimal, fração, percentagem) com o intuito de ajudar os alunos a relacionarem diferentes representações (Caney & Watson, 2003) e a estabelecerem relações entre representações e imagens mentais de determinados conceitos matemáticos (Swan, 2008). Os números de referência (e.g., $\frac{1}{2}$, 75%, 0,25), desempenham um papel importante no apoio ao estabelecimento destas relações.

O conhecimento acerca das estratégias dos alunos e níveis de cálculo mental com números racionais (Callingham & Watson, 2004; Caney & Watson, 2003) apoia o professor na construção de tarefas que possam desenvolver determinado tipo de estratégias, bem como na compreensão das estratégias e dos conhecimentos matemáticos usados pelos alunos. Quando estes calculam mentalmente, por vezes, as suas estratégias dão origem a soluções incorretas, fruto de erros que cometem. Por exemplo, os alunos ao percecionarem uma fração como dois números e não apenas um, na adição de frações, adicionam numeradores e denominadores (Lamon, 2006). Outras vezes generalizam propriedades (Carpenter et al., 2003) de modo inválido, como é o caso da propriedade comutativa, que se aplica à adição e multiplicação mas não à subtração e divisão. Na perspetiva de McIntosh (2006), os alunos cometem erros essencialmente de natureza concetual (quando não compreendem a natureza dos números ou a operação envolvida) ou processual (quando sabem que estratégia usar e ao pô-la em prática cometem erros por falta de atenção). Este autor indica ainda que os erros processuais são mais comuns no trabalho com números naturais e os erros concetuais são mais comuns no trabalho com números racionais. A compreensão dos erros dos alunos ajuda o professor a percecionar esses mesmos erros nas discussões de sala de aula e a usá-los como oportunidades para esclarecer conceções erradas dos alunos.

Metodologia de investigação

Este estudo é qualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2005) com uma metodologia de *design research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere & Schauble, 2003). Participam duas professoras e duas turmas do 6.º ano (39 alunos), que já trabalharam os números racionais nas suas várias representações (decimal, fração, percentagem) e a primeira autora (a partir deste momento designada por investigadora) como observadora participante. O estudo desenvolveu-se em três fases (figura 1): preparação, experimentação e análise.

A preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar, com alunos do 5.º ano de outra escola, baseado num protótipo de experiência de ensino com 6 tarefas de cálculo mental, com o intuito de perceber estratégias e erros dos alunos no cálculo mental com números racionais e as dinâmicas inerentes à realização de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas. Foi construída uma experiência de ensino com 10 tarefas de cálculo mental, partindo da conjetura de que um trabalho regular realizado durante dois períodos letivos, baseado em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e de resolução de problemas com números racionais envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias, erros e dificuldades dos alunos no 6.º ano, contribui para o desenvolvimento do seu reportório de estratégias e para a melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental, levando-os a cometerem cada vez menos erros. O estudo envolveu alunos do 6.º ano pelo facto de estes já terem abordado todas as operações com números racionais.

A fase de experimentação contemplou dois ciclos, um em 2012 e outro em 2013. Os dados foram recolhidos recorrendo a observação direta das aulas em que se realizaram tarefas de cálculo mental e de reuniões de preparação/reflexão da experiência de ensino com as professoras participantes. A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora e discutida com as professoras da turma que a realizaram na sala de aula. A gestão da discussão na sala de aula foi da responsabilidade das professoras, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias e erros dos alunos. As reuniões de trabalho com as professoras foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva.

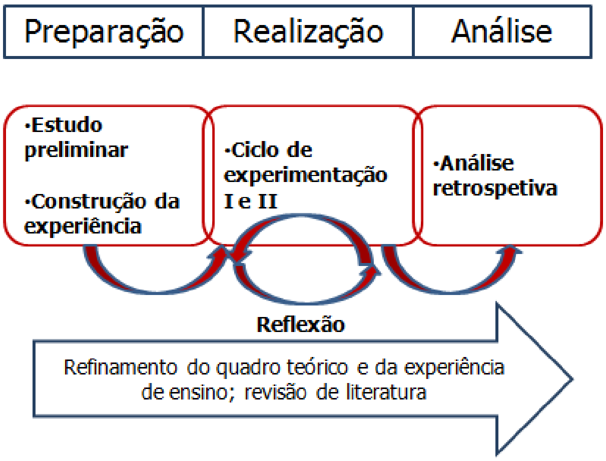


Figura 1. Fases de desenvolvimento do estudo.

Na fase de análise foram visionados os episódios de aula com o intuito de identificar as estratégias e os erros de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão. Consideramos três categorias de estratégias, nomeadamente, baseadas: (i) em factos numéricos; (ii) em regras memorizadas; e (iii) em relações numéricas. Estas categorias (e suas subcategorias) foram construídas com base em estudos anteriores (e.g., Caney & Watson, 2003) e nos dados recolhidos. O nome dado à estratégia do aluno foi escolhido em função do elemento mais forte presente na sua estratégia (i.e., se faz um uso forte de relações numéricas, nomeadamente da relação parte-todo é considerada uma estratégia de categoria "relações numéricas" e subcategoria "comparação parte-todo"). Sendo as representações mentais dos alunos (modelos, imagens ou representações proposicionais) comuns a todas as categorias, não as consideramos como uma quarta categoria, optando por analisá-las sempre que estão explicitas nas estratégias dos alunos.

Para analisar os erros dos alunos usamos duas categorias sugeridas por McIntosh (2006): (i) erro concetual; e (ii) erro processual, dentro das quais construímos diversas subcategorias (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$, erro de categoria "concetual" uma vez que não compreende o significado de uma fração e subcategoria "opera com numeradores e denominadores na adição de frações").

As três fases do estudo foram acompanhadas por uma reflexão individual, por parte da investigadora, e coletiva, entre esta e as professoras nas reuniões de preparação/reflexão nos dois ciclos de experimentação. Esta reflexão, em conjunto com uma contínua revisão de literatura, permitiu melhorar e aprofundar não só o quadro concetual mas também as conjeturas de ensino e aprendizagem e a experiência de ensino, tendo levado a diversos ajustes nas tarefas. As tarefas que apresentamos neste artigo são fruto deste refinamento constante.

A experiência de ensino

A experiência de ensino é composta por 10 tarefas de cálculo mental, que denominámos de "Pensa rápido!" e que foi aperfeiçoada ao longo dos dois ciclos de experimentação. São tarefas em contextos matemáticos (exercícios) e extramatemáticos (problemas) que foram projetadas semanalmente na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado. No primeiro ciclo de experimentação foram realizadas sete tarefas envolvendo exercícios, duas com problemas e uma envolvendo exercícios e problemas. No segundo ciclo de experimentação foi feita uma reorganização, dando origem a cinco tarefas com exercícios e cinco tarefas com exercícios e problemas. Esta reorganização emergiu da necessidade dos alunos darem sentido aos números usando situações contextualizadas (Galen et al., 2008).

Cada tarefa é constituída por duas partes, cada uma das quais com cinco exercícios ou quatro problemas. A primeira parte envolve a realização de um primeiro conjunto de questões, que culmina com um primeiro momento de discussão coletiva de estratégias e erros dos alunos que possa influenciar positivamente a realização da segunda parte da tarefa. A segunda parte envolve a realização de um novo conjunto de questões e um novo momento de discussão. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada exercício e 20 segundos para resolver cada problema individualmente e anotar o resultado numa folha de registo. No final de cada uma das partes, os momentos de discussão coletiva têm uma duração entre 30 e 90 minutos. Nas tarefas em contexto matemático cada uma das partes contém cinco exercícios, intercalando-se expressões numéricas (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$) com expressões de valor em falta (e.g., 0,7 +__=1). As expressões de valor em falta representam um contexto de aprendizagem promotor de pensamento relacional ao invés de uma aplicação direta de procedimentos de cálculo (Carpenter et al., 2003), pelo que decidimos incluí-las nas tarefas. Nas tarefas com problemas (e. g., *Uma camisola custa 25€. O Vasco comprou-a com 20% de desconto. Calcula o valor do desconto*), cada parte é constituída por quatro problemas. A dinâmica de realização das tarefas é igual ao longo de toda a experiência de ensino. A opção por tarefas envolvendo exercícios e problemas teve o objetivo de ajudar os alunos a dar significado aos números através da relação entre situações contextualizadas e representações simbólicas que as podem representar e resolver.

Privilegiámos o uso de números racionais em diferentes representações (decimal, fração e percentagem) (ver figuras 3 e 6), estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o tópico que as professoras estavam a trabalhar. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades a representação em fração e em estatística usam-se as três representações. Esta opção permite desenvolver o cálculo mental de forma integrada com a aprendizagem dos números racionais, prolongada no tempo e estabelecendo relações entre diferentes tópicos matemáticos. Recorremos ao uso de numerais decimais com o último dígito par, números múltiplos de 5 e de 10 e números de referência para facilitar a equivalência entre as representações decimal, fracionária e percentagem. Enfatizámos a importância de algumas relações numéricas fazendo-as surgir em diversas expressões ao longo das 10 tarefas (e.g., dividir por $\frac{1}{2}$ é o mesmo que multiplicar por 2).

O conhecimento dos possíveis erros dos alunos apoiou-nos na construção de tarefas que pudessem promover o aparecimento de determinados erros para que, no momento de discussão coletiva, pudessem ser abordados e discutidos com o intuito de esclarecer eventuais conceções erradas. Assim, na adição e subtração de números racionais representados por frações existem situações em que os denominadores são diferentes (e.g., discutir o erro de adicionar numeradores e denominadores), na representação decimal surgem operações envolvendo décimas e centésimas (e.g., enfatizar a importância do valor posicional, especialmente na multiplicação e divisão), e na representação em percentagem selecionámos números que permitissem obter um resultado correto seguindo uma estratégia errada (e.g., para calcular 20% de 25, em que o cálculo de 25-20 dá o mesmo resultado que 0,2 × 25).

As tarefas permitem não só rever e consolidar o trabalho com números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental e conduzir à diminuição dos erros dos alunos. Mas as tarefas, por si só, são insuficientes para desenvolver o cálculo mental. Tal como refere Thompson (2009), é fundamental que o professor crie um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam confortáveis a partilhar as suas estratégias, em que o professor oiça atentamente as suas estratégias e as reforce positivamente, contribuindo para a melhoria do conhecimento pelos alunos dos números e das operações e sua capacidade de implementar estratégias eficazes. O professor deve também assegurar-se que os alunos tiveram oportunidade de experienciar situações diversificadas de cálculo mental para assim desenvolverem estratégias cada vez mais sofisticadas. Acrescentamos ainda a importância do questionamento na sala de aula, quer no sentido professor-aluno, quer entre alunos, por exemplo: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Quem consegue explicar o erro do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Estas questões têm o objetivo de ajudar o aluno a explicar e a clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as estratégias dos alunos, através da interação entre eles.

Tarefas e estratégias dos alunos

Com o objetivo de desenvolver princípios orientadores do *design* de tarefas de cálculo mental com números racionais para alunos do 6.º ano, analisamos as suas estratégias em algumas questões de cálculo mental. Procuramos perceber que ideias emergem dessas mesmas estratégias, que possam informar a definição de princípios orientadores.

A expressão de valor em falta que apresentamos na figura 2 foi realizada na tarefa 2 com o objetivo de ajudar os alunos a estabelecerem relações numéricas, tal como fez Ana, que a partir de uma multiplicação conhecida (facto numérico) completa o valor em falta numa divisão. Ana poderá ter em mente uma imagem mental da operação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (e.g., metade de metade de um chocolate), embora isso não esteja explicito na sua explicação. No que se refere a João, este não apresenta uma estratégia de resolução num primeiro momento, apenas o faz depois de Ana dizer o seu resultado. João usa o algoritmo de divisão de frações (inverte e multiplica), para confirmar o resultado da colega apresentando uma postura apreensiva face ao resultado $\frac{2}{4}$ e não $\frac{1}{2}$ como estava na expressão. Embora o pretendêssemos, os alunos não associaram a divisão por $\frac{1}{2}$ com a multiplicação por 2, talvez pelo facto do valor em falta ser $\frac{1}{2}$. Mas, curiosamente, Ana partiu da operação inversa da divisão para descobrir o divisor, embora não no sentido esperado (i.e., $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$), pois pretendíamos discutir a aplicabilidade da operação inversa com os alunos em situações cujo valor em falta é o divisor. O conhecimento, por parte do professor, acerca das possíveis estratégias dos alunos revela-se importante nesta questão uma vez que será pertinente discutir e refletir acerca da eficácia destas duas estratégias.

Tarefa 2	$g)\ \frac{1}{4} \div \_ = \frac{1}{2}$
Objetivo	Relacionar 1/2 com 1/4 e a divisão por 1/2 com a multiplicação por 2, onde não é possível recorrer à operação inversa da divisão para resolver a expressão.
Estratégia dos alunos	**Ana**: *Como eu sei que 1/2×1/2 dá 1/4 pus logo 1/2.* **João**: *Para dar 1/2... se pusessemos ali 1/2, tinhamos de ir inverter depois 1/2 e multiplicar, que dava 1×2, 2 e 4×1, 4.*

Figura 2. Análise de uma questão da tarefa 2.

Na tarefa 3 (figura 3) surge a representação decimal e fracionária em simultâneo. Dina apresenta uma estratégia onde explicita a relação numérica que pretendíamos discutir. A estratégia de Marta revela-nos um erro comum dos alunos na divisão de um número por $\frac{1}{2}$. Marta reconhece que $\frac{1}{2}$ representa metade e calcula metade de 2,4 não considerando que a divisão por um número racional menor do que 1 produz um quociente superior ao dividendo. Este é um erro concetual onde o sentido de operação não está devidamente compreendido. Nesta expressão, a relação numérica, não detetada pelos alunos na expressão anterior, ganha sentido e torna-se explícita através da estratégia de Dina. O conhecimento acerca dos erros dos alunos ajuda o professor a detetar e a esclarecer erros, como o cometido por Marta.

Tarefa 3	$c)\ 2{,}4 \div \frac{1}{2}$
Objetivo	Dividir um numeral decimal por 1/2 e reforçar a relação com a multiplicação por 2.
Estratégia dos alunos	**Dina**: *Dividir por 1/2 é equivalente a multiplicar por 2, foi o que eu fiz.* **Marta**: *Deu-me 1,2. Então fiz 2,4 a dividir por 1/2. Primeiro dividi o 2 por 1/2 que me deu 1 e depois dividir 4 por 1/2 e deu-me um... e pus 1,2... deu-me 2.*

Figura 3. Análise de uma questão da tarefa 3.

Na tarefa 4 (figura 4) os alunos adicionaram/subtraíram números racionais na representação decimal. As estratégias apresentadas por Rogério e Acácio apresentam pontos de partida distintos. Rogério relaciona parte-todo (quanto preciso adicionar a 7 para obter 10) e, recorrendo a factos numéricos (adições que dão 10), chega ao resultado 3. O aluno poderá ter mudado de representação (operando com numerais decimais como se fossem números naturais) ou pode ter operado pensando na leitura oral dos decimais (7 décimas mais 3 décimas dá 10 décimas). Por fim, ”tira o zero” ao 10 e indica como resultado 3 décimas.

Tarefa 4	$f)\ 0{,}7 + \_\_ = 1$
Objetivo	Relacionar um numeral decimal com a unidade usando da relação parte-todo.
Estratégia dos alunos	**Rogério**: *Eu vi logo que para dar 1, era que 7+3 dá 10. Eu tirei o zero e vi logo que é 0,3.* **Acácio**: *Eu sabia que 0,7 é 70 centimos. 70 cêntimos para 100 [cêntimos] falta 30 cêntimos. Então 0,3 porque sei que 0,3 é 30 cêntimos.*

Figura 4. Análise de uma questão da tarefa 4.

A estratégia de Acácio remete-nos para o uso de um modelo mental de um contexto de dinheiro para realizar o cálculo. Relaciona parte-todo como Rogério e, de forma sistemática, compara o numeral decimal (e.g., 0,7) com a verbalização do valor correspondente em dinheiro (e.g., 70 cêntimos). O recurso a expressões de valor em falta (figuras 2 e 4) quando comparado com outras expressões (figura 3) revela promover o estabelecimento de relações, talvez pelo grau de dificuldade que envolvem e pela impossibilidade de aplicação direta de uma regra. Contudo, estes dois tipos de expressões desempenham um papel importante na criação de uma rede de relações numéricas por parte dos alunos, onde a utilização de números de referência é essencial.

Na tarefa 6 (figura 5) surge um problema que se relaciona com a questão apresentada na figura 3, uma vez que pode ser resolvido usando a mesma operação e o mesmo conceito de divisão de um número por $\frac{1}{2}$. Este problema surge com o intuito de contextualizar expressões matemáticas, ajudando os alunos a estabelecerem relações entre os contextos e as representações simbólicas que podem representar esses mesmos contextos (Bell, 1993).

Tarefa 6	$f)$ Uma tina tem de capacidade 22,5 l . Quantos baldes de $\frac{1}{2}$ l são necessários encher para despejar por completo a tina?
Objetivo	Dividir um numeral decimal por uma fração que representa "metade".
Estratégia dos alunos	**Eva**: *Deu-me 45 baldes. Bastou multiplicar 22,5 litros por 2 e deu-me logo . . . Porque 1/2 para dar uma unidade tem que se somar 5 décimas duas vezes então era a multiplicar por 2.* **João**: Eu vi que dividir por 1/2 é o mesmo que multiplicar por 2.

Figura 5. Análise de uma questão da tarefa 6.

Através das estratégias de Eva e João, percebemos que ambos reconhecem a relação que pretendíamos enfatizar com esta questão. A forma como João explicita a sua estratégia leva-nos a perceber que este memorizou a relação numérica, enquanto Eva o faz de forma pensada, relacionando $\frac{1}{2}$ com 0,5 e estas partes com a unidade. A discussão da estratégia de Eva ajuda a dar sentido à relação memorizada por João. Este é um aspeto que emerge do uso de situações contextualizadas a par de exercícios onde é possível estabelecer relação entre eles. Outro aspeto é o facto das situações contextualizadas poderem criar modelos mentais a que os alunos recorrem em contextos matemáticos (como fez Acácio na tarefa 4). Salientamos ainda a mudança de representação como um aspeto facilitador do raciocínio dos alunos. A facilidade com que transitam entre representações ("*Porque* $\frac{1}{2}$ *para dar uma unidade tem que se somar 5 décimas duas vezes")*, para pensarem e efetuarem o cálculo, só é possível se apostarmos no uso simultâneo de diversas representações dos números racionais.

Na tarefa 8 (figura 6) surgem as representações decimal, fracionária e percentagem e o número racional como operador (e.g., $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ de 0,18). Selecionámos a questão d) por ilustrar a forma como alguns alunos conseguiram "mobilizar" conhecimentos provenientes de discussões anteriores, nas suas estratégias, e por ser possível identificar o recurso a uma representação mental (representações proposicionais).

Tarefa 8	$d)$ 20% de 50
Objetivo	Calcular o valor de uma percentagem múltipla de 10.
Estratégia dos alunos	**Eva:** *Eu mobilizei uma conta que estava na parte anterior [0,2 de 10], na primeira parte que era, duas décimas vezes 10, acho eu. E então duas décimas é 20% vi logo isso e depois vi que dava 2 na outra. Então... e então multipliquei o resultado, o outro resultado por 5 porque 10 a multiplicar por 5 dá 50. Então multiplicamos o resultado da outra por 5 e deu 10.*

Figura 6. Análise de uma questão da tarefa 8.

Através da estratégia de Eva é possível perceber que esta reconhece que 20% é equivalente a 0,2 bem como o facto numérico 0,2×10=2 que recorda de uma discussão anterior. Relaciona duas expressões com base numa representação proposicional: se 0,2×10 é 2 então 0,2×50 é 10 pois se 10×5=50 logo 2×5=10. Ao assumir que 20% é equivalente a 0,2, Eva compara os valores sobre os quais tem de aplicar a percentagem e verifica que, se 50 (de 20% de 50) é 5 vezes maior que o 10 (de 0,2 de 10), o resultado 2 (de 0,2 ×10) terá de ser igualmente 5 vezes maior, para obter o resultado 10 (de 20% de 50). Eva mostra mais uma vez facilidade em transitar entre representações (percentagem para decimal) e apresenta uma estratégia complexa envolvendo relações numéricas entre 0,2×10 e 20% de 50, embora pudesse ter recorrido ao cálculo de 10% como referência e posteriormente duplicado o valor obtido.

Por fim, na tarefa 10 (figura 7), o problema que apresentamos pretende ser mais uma situação contextualizada que pode ser representada simbolicamente através de uma expressão semelhante à apresentada na figura 4. Este problema envolve a relação parte-todo, mas também o reconhecimento de que, como diz Diogo na sua explicação: "*A frequência relativa no total tem que dar uma unidade"*. Diogo consegue avaliar corretamente os dados do problema e selecionar a operação que o conduz à solução correta. A sua estratégia baseia-se na relação parte-todo: "*Se está lá 40 centésimas, 40 centésimas para uma unidade faltam 60* *centésimas"*. Este foi um dos problemas onde os alunos tiveram mais dificuldades em calcular mentalmente, talvez por não conseguirem interpretar a frequência relativa da forma como Diogo o fez, uma vez que o cálculo envolvido era relativamente fácil. Os problemas apresentam um nível de complexidade superior ao dos exercícios uma vez que exigem a compreensão do contexto e seleção da operação enquanto nos exercícios, a operação está explicita.

Tarefa 10	*a*) Lançou-se uma moeda ao ar 20 vezes e registaram-se os valores numa tabela de frequências relativas. Se à face Euro corresponder 0,40 de frequência relativa, qual a frequência relativa da face nacional?
Objetivo	Relacionar um numeral decimal com a unidade usando a relação parte-todo.
Estratégia dos alunos	**Diogo**: *É 60 centésimas . . . Porque eu sei que a frequência relativa no total tem que dar uma unidade. Se está lá 40 centésimas, 40 centésimas para uma unidade faltam 60 centésimas.*

Figura 7. Análise de uma questão da tarefa 10.

Conclusão

A análise das estratégias dos alunos reforçou alguns aspetos, que considerámos importantes contemplar nas tarefas de cálculo mental com números racionais, e fez emergir outro, como a importância do nível de exigência cognitiva das tarefas sobre o qual não tínhamos pensado previamente. Para nós os contextos sempre foram importantes mas, dentro destes, o nível de exigência cognitiva das tarefas revelou ser um aspeto mais essencial, pelas oportunidades de aprendizagem que proporciona no que se refere ao estabelecimento de relações numéricas e da qual destacamos as expressões de valor em falta.

Os aspetos identificados permitem enumerar diversos princípios orientadores para o *design* de tarefas de cálculo mental:

Princípio 1- *Usar contextos que possam ajudar os alunos a dar significado aos números.* O uso de contextos matemáticos e problemas com situações contextualizadas ajuda os alunos a darem significado aos números (Galen et al., 2008) e a transitarem entre diferentes contextos (Bell, 1993) onde podem usar estratégias semelhantes para os resolver. Os contextos através dos quais se abordam os números racionais podem proporcionar a criação de modelos mentais (Johnson-Laird, 1990) aos quais os alunos recorrem quando necessário.

Princípio 2 – Usar diversas representações de um número racional. O recurso a diversas representações de um número racional (decimal, fração e percentagem) e a números de referência facilitam a equivalência entre representações (Caney & Watson, 2003) e operações e o estabelecimento de relações entre representações e imagens mentais de determinados conceitos matemáticos (Swan, 2008).

Princípio 3 – Usar tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva. Tarefas com características diferentes podem levar os alunos a desenvolverem estratégias baseadas em raciocínios diversos (Henningsen & Stein, 1997). O uso de diferentes contextos (como os referidos no *princípio 1*) proporciona oportunidades de aprendizagem com níveis de exigência cognitiva diversificados. Enquanto os problemas são de nível cognitivo alto por exigirem ao aluno uma análise mais cuidada do contexto e a seleção da operação a utilizar, os exercícios (expressões sem valor em falta) são de nível de exigência cognitiva baixa pois, na sua maioria, apelam ao uso de procedimentos simples. Dentro dos exercícios, destacamos o papel das expressões de valor em falta como sendo questões de nível de exigência cognitiva elevada pela oportunidade que representam para desenvolver o pensamento relacional dos alunos e consequentemente um suporte à aprendizagem da Álgebra (Carpenter et al., 2003).

Princípio 4 – Ter em conta a investigação sobre o cálculo mental e os números racionais. O conhecimento acerca do que envolve o cálculo mental (Heirdsfield, 2011) e da aprendizagem dos números racionais, no qual se inclui a importância dos aspetos enumerados nos *princípios* 1 e 2, bem como as possíveis estratégias e erros dos alunos (e.g., Caney & Watson, 2003) apoiam a seleção de números e contextos que promovam o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e potenciem relações entre números e operações.

Os quatro princípios apresentados contemplam um vasto leque de conhecimentos sobre números e operações que permitem construir tarefas de cálculo mental capazes de promover nos alunos o desenvolvimento de capacidades de cálculo e de conhecimentos sobre números e operações, mas também oportunidades para discutir aprendizagens que necessitam de ser aprofundadas e/ou revisitadas. Reforçamos a ideia de que as tarefas são o ponto de partida para a atividade matemática dos alunos e a sua realização na sala de aula deve promover a reflexão e ser objeto de discussão para que se construam conhecimentos de forma coletiva.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora (referência SFRH/BD/69413/2010).

Referências

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2005). Purposeful task design and the emergence of transparency. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 17-24). Melbourne: PME.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics, 24*(1), 5-34.

Bourdenet, G. (2007). Le calcul mental. *Activités mathématiques et scientifiques*, *61*, 5 32.

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010)

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9 –13.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: SAGE.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96-102.

Henningsen, M., & Stein, M. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 524-549.

Johnson-Laird, P. N. (1990). *Mental models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

McIntosh, A. (2006). Mental computation of school-aged students: Assessment, performance levels and common errors. *The Fifth Swedish Mathematics Education Research Seminar*. (Retirado de http://www.mai.liu.se/SMDF/madif5/papers/McIntosh.pdf em 21/10/2011).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(4), 304-326.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra. *Educational Designer*, *1*, 1-17.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental*. Lisboa: Arcádia.

Thompson, P. W., Carlson, M., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal for Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 415-432.

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

A TAREFA COMO INSTRUMENTO DE DESENVOLVIMENTO DA FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO

Lurdes Serrazina, Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: Este artigo insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* e situa-se no âmbito de um dos seus objetivos: o design de tarefas, tendo em conta o conhecimento atual sobre números e operações. Começa por discutir teoricamente o constructo de flexibilidade de cálculo bem como os fundamentos subjacentes ao design de tarefas. Seguidamente, apresenta uma tarefa envolvendo a estrutura aditiva e discute dois níveis diferentes de desenvolvimento do pensamento numérico a que correspondem duas abordagens diferentes de exploração da tarefa pelos alunos. Visa-se articular o conhecimento sobre a evolução dos conhecimentos numéricos dos alunos e a caracterização das suas trajetórias de aprendizagem, com o suporte profissional dos professores para práticas que favoreçam essa mesma evolução. Esta hierarquização de diferentes desempenhos dos alunos é suportada por resultados empíricos obtidos com a condução de entrevistas clínicas individuais a quatro alunos, dois do 1.º ano e dois do 2.º ano. Assim, o presente artigo apresenta o processo cíclico inerente ao design de uma tarefa em particular: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver o cálculo mental flexível e adaptativo dos alunos; (2) análise do que as crianças reparam nos números e como usam o seu conhecimento numérico e operatório para resolver a tarefa em causa ao longo das entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa.

Palavras-chave: design de tarefas, raciocínio aditivo, cálculo flexível, relações numéricas

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre, tendo como objetivos: (i) Identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas; (ii) Analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental e (iii) Retirar implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstica do desenvolvimento do cálculo mental. Incide, em particular, numa das dimensões do 3.º objetivo do Projeto: a construção de tarefas. Assim, começamos por discutir as diferentes perspetivas sobre flexibilidade de cálculo no que se refere à adição e subtração, presentes na literatura, e também a problemática da construção e adaptação de tarefas úteis para o seu desenvolvimento. Seguidamente, apresentamos uma tarefa concebida para trabalhar de modo flexível a estrutura aditiva e respetivos níveis diferenciados de desempenho, discutindo os aspetos que foram considerados no seu design, com base no enquadramento teórico bem como nos resultados empíricos obtidos em entrevistas clínicas individuais realizadas a quatro alunos, onde foi proposta para exploração a referida tarefa.

Cálculo flexível

O NCTM (2000) afirma que ser proficiente num domínio complexo como a Matemática implica a capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra. A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos, devendo a escola elementar promover o seu desenvolvimento em todos os alunos (Anghileri, 2001; NCTM, 2000). Um problema aritmético pode ser resolvido mentalmente de diferentes formas, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema resolvido é afetado pelas circunstâncias, sejam elas relacionadas com as características das tarefas específicas, ou com as características individuais, ou ainda com as variáveis contextuais (Threlfall, 2009). Por exemplo, um aluno que use uma determinada estratégia de modo variável dependendo dos números envolvidos no problema revela possuir flexibilidade estratégica.

Star e Newton (2009) definem flexibilidade como conhecimento de múltiplas soluções assim como a capacidade e tendência para escolher a mais adequada para um dado problema e um objetivo particular de resolução de problemas. Estes autores afirmam ainda que flexibilidade existe num *continuum*; quando os alunos ganham flexibilidade eles podem primeiro mostrar um maior conhecimento de múltiplas estratégias, depois preferências particulares e por último o uso adequado da estratégia preferida. O termo adequado refere-se à estratégia mais eficiente, isto é, aquela que exige o menor número de passos intermédios de cálculo para chegar ao resultado.

Para outros autores (Baroody & Rosu, 2006; Rathgeb-Schierer & Green, 2013), a flexibilidade de cálculo está relacionada com o facto de os alunos, à medida que vão desenvolvendo o sentido do número, terem estabelecido relações e padrões entre eles, construindo assim uma teia de relações. Por exemplo, os alunos que reconhecem a propriedade comutativa da adição, perante a necessidade de calcular 3+9, sabem que podem fazer 9+3. O modo como esta propriedade é mobilizada, relevando ou não os aspetos contextuais das tarefas, pode variar consoante a idade das crianças. A este respeito, De Corte e Verschaffel (1987) referem que os aspetos semânticos das tarefas influenciam os alunos mais novos na forma como as resolvem. Os alunos que compreendem as várias composições de um número, a partir das suas diferentes partes (e.g., 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, e 4 + 4 = 8…) e decomposições (e.g., 8 = 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 4 + 4) desenvolvem, provavelmente, formas de raciocínio como os “dobros + 1” (e.g., 7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1) ou fazer uma “dezena” (e.g., 9 + 7 = 9 + 1 + 6 = 10+6). À medida que aquela teia de relações vai sendo construída, vão adquirindo flexibilidade para usarem essas relações em situações concretas de cálculo, as quais dependem do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013).

Na nossa perspetiva, o pensamento flexível está focado no desenvolvimento conceptual e refere-se a um pensamento que pode ser flexivelmente adaptado tanto a tarefas familiares como a novas tarefas. O seu foco não é a estratégia de cálculo mas o raciocínio quantitativo. Este tipo de raciocínio consiste na análise de uma situação numa estrutura quantitativa, sendo que esta constitui uma rede de quantidades e de relações quantitativas. Assim, no âmbito do raciocínio quantitativo, o que importa são as relações entre as quantidades (Thompson, 1993).

O desenvolvimento de relações entre a adição e subtração pode partir de situações de composição e decomposição de um número. Segundo Freudhental (1983), os alunos devem caminhar no sentido da compreensão da estrutura da adição e não se ficar pelo ato de juntar. Essa estrutura implica compreender todas as relações expressas em

$$a + b = c \text{ e também por } c - b = a \quad (\text{para } b \leq c)$$

Num nível superior, implica o conhecimento das propriedades: comutativa, associativa e de equivalência de $a + b = c$ e $c - b = a$. Esta estrutura vai crescendo à medida que se explora N.

Mas a relação $a + b = c$, pode ser estruturada, pensando em c e pedindo a totalidade das soluções para o a e para o b. Por exemplo, o 7 pode ser obtido adicionando diferentes pares de números, conforme apresentamos no esquema seguinte:

$$7 = + \quad \begin{array}{cccccccc} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Este esquema apresenta uma estrutura notável de sequências crescente e decrescente e uma simetria central. A procura da resposta ao porquê desta situação ajuda a compreender a estrutura aditiva do N. Também é importante verificar que os pares que são soluções do problema são em número finito e que podem ser determinados até à exaustão.

Outras listas podem ser criadas a partir de $a + b = c$. Fixando o b, que condições para a e c? O $b = c\text{-}a$.

Por exemplo se $b = 3$, que condições para a e c? Neste caso, o 3 pode ser obtido subtraindo uma infinidade de diferentes pares de números (c,a), conforme apresentamos no esquema seguinte:

$$3 = - \quad \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \hline 0 & 1 & 2 & \ldots \end{array}$$

Novamente, é importante discutir o porquê.

As crianças que mobilizem as relações numéricas compreendem que: se $a+b=c$, então $c\text{-}b = a$ ou $c\text{-}a = b$; ou se $a+b = c$, então $b+a = c$, isto é reconhecem a propriedade comutativa. Tal como referido por Freudenthal (1983), a estrutura aditiva dos números naturais inclui um conjunto complexo de relações baseadas nas propriedades: comutativa, associativa e equivalência de $a+b = c$ e $c\text{-}b = a$.

Assim, a flexibilidade de cálculo envolvendo a estrutura aditiva passa por desenvolver uma compreensão relacional e flexível, de modo a que o processo de reverter a adição para obter a subtração não seja encarado pelos alunos como um novo processo, possibilitando-lhes *comprimir* (Gray & Tall, 1994) as ideias matemáticas, tornando-as mais simples.

Tal como sustentado por Sfard (1991) e Tall (2013), os processos e os objetos matemáticos são duas faces da mesma moeda. De acordo com Gray e Tall (1994), é essencial considerar a combinação cognitiva de processo e conceito, propondo o constructo *proceito* (*procept* no original) enquanto amálgama de três componentes: (1) *processo* que produz um dado objeto; (2) *objeto* matemático produzido pelo processo; e (3) *símbolo* representativo do processo ou do objeto.

O pensamento *proceptual* inclui o modo flexível como o simbolismo pode ser visto na representação simultânea de processo e objeto, isto é, de uma ação procedimental ou de um objeto mental que, num nível mais elevado, pode ser manipulado, decomposto ou recomposto (Gray & Tall, 1994). Quando o aluno retira *a* de *c*, para obter o *b* que falta, pode fazê-lo através da contagem, ou através de um raciocínio inverso – a subtração é a operação inversa da adição. Por outro lado, o $a+b$ é c, ou seja a soma de *a* com *b* é *c*. Assim, $a+b$ pode ser visto ou como o processo de adição de dois números ou como o conceito de soma (Gray & Tall, 1994). Podemos assim referir-nos ao proceito *c*, que para estes autores engloba o processo de contar *c* e um conjunto de outras representações como as diferentes decomposições de *c*. "Todos estes símbolos são considerados pelos alunos como representando o mesmo objeto, embora obtidos através de diferentes processos. Mas podem ser decompostos e recompostos numa maneira flexível" (Gray & Tall, 1994, p. 7).

Design de tarefas

É através da resolução de tarefas, mais do que de qualquer outra forma, que as oportunidades para aprender são disponibilizadas aos alunos (Anthony & Washaw, 2007; Stein & Smith, 1998). As tarefas devem ter em conta as competências dos alunos, mas simultaneamente a sua resolução deve constituir um desafio. O contexto da tarefa não é apenas para motivar os alunos, mas para lhes proporcionar uma situação de aprendizagem que é experiencialmente real e que pode ser usada como um ponto de partida para uma compreensão avançada (Gravemeijer, 1997). A tarefa assume, assim, a par de outros fatores como a sua implementação pelo professor, um papel relevante no ensino e aprendizagem da Matemática (Felício & Rodrigues, 2010). Stein e Smith (1998) alertam para o facto de a natureza das tarefas poder mudar radicalmente quando passam da fase de *apresentação* (nos manuais ou outros materiais auxiliares) para a fase de *implementação,* podendo manter ou não o seu nível de exigência conceptual. Esta questão remete para a importância de o professor assumir plenamente um papel criativo de um profissional crítico que utiliza a sua autonomia, no que respeita à participação nas decisões curriculares. E no que respeita à implementação de tarefas na sala de aula, "um professor criativo não é apenas aquele que procura novas tarefas ou as realiza de modo pessoal, é também o que possui os fundamentos das tarefas que concretiza" (Rodrigues, 2008, p. 178). Será a consciência reflexiva dos fundamentos das tarefas propostas nas aulas de Matemática que dotará o professor da capacidade de manter o nível elevado de exigência conceptual numa tarefa concebida com esse fim.

Grevholm, Millman e Clarke (2009) afirmam mesmo que o que os alunos aprendem é, em larga medida, definido pelas tarefas que lhes são propostas. À partida, uma tarefa desenhada para mobilizar um pensamento matemático de elevado nível cognitivo terá maior probabilidade de produzir esse tipo de pensamento nos alunos do que uma tarefa desenhada para um pensamento de baixo nível cognitivo como o envolvido em exercícios de treino procedimental. No entanto, a exploração cabal das potencialidades de uma tarefa depende da forma como o professor monitoriza a sua realização na aula e do modo como promove a sua discussão (Stein & Smith, 1998). De acordo com Grevholm et al. (2009), o envolvimento dos alunos na atividade matemática é suscitado pelo desafio colocado pela tarefa: esta deverá ser suficientemente desafiante mas não comportar um nível excessivo de desafio de tal modo que o aluno não seja capaz de lidar com o mesmo. Estes autores explicitam três aspetos associados às tarefas e fundamentais na implementação do que o professor pretende enfatizar: a função, a forma e o foco. As tarefas têm um objetivo em relação à aprendizagem que se espera que os alunos desenvolvam, têm "uma forma para inspirar, desafiar e motivar os estudantes, e têm focos específicos escolhidos pelos construtores da tarefa" (Grevholm et al., 2009, p. 1).

Consideramos existir um processo cíclico inerente ao *design* de tarefas com três fases: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver determinadas competências matemáticas; (2) análise do conhecimento matemático das crianças e de como raciocinam ao resolver a tarefa em causa ao longo de entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa. No âmbito do Projeto, as três fases deste processo cíclico estão focadas na flexibilidade de cálculo: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver o cálculo mental flexível e adaptativo dos alunos; (2) análise do que as crianças reparam nos números e como usam o seu conhecimento numérico e operatório para resolver a tarefa em causa ao longo de entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa (ver Figura 1; Brocardo, 2014).

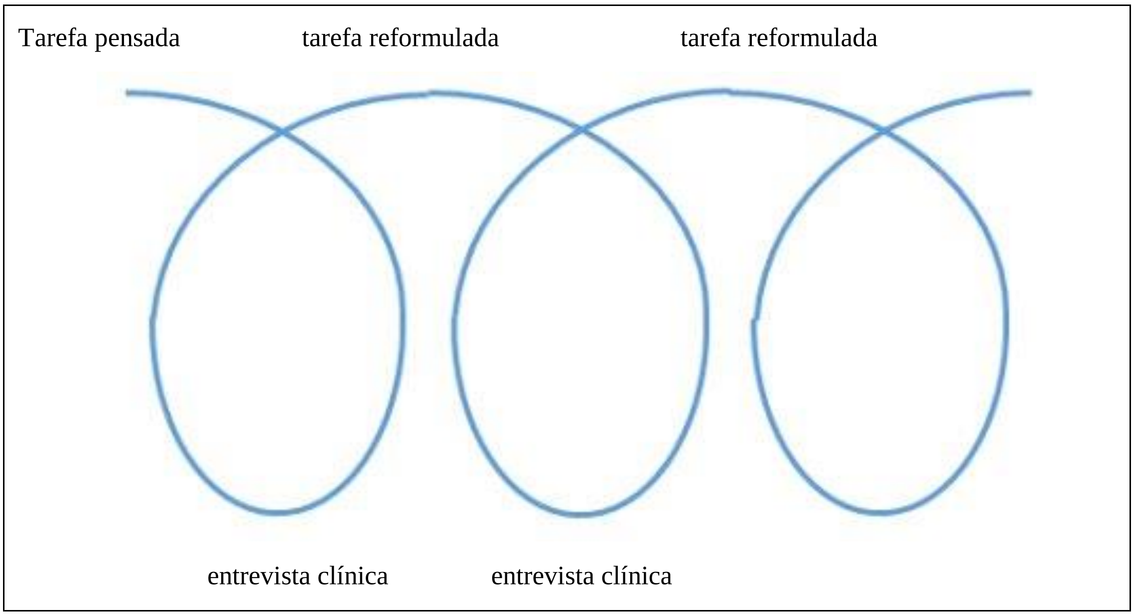


Figura 1: O processo cíclico de *design* de tarefas

De acordo com Hatano (1982), os três princípios globais do *design* de tarefas relacionam-se com a variabilidade inerente (1) ao contexto da tarefa, (2) aos procedimentos usados pelo indivíduo na exploração da tarefa na entrevista clínica, e (3) à explicação que é dada pelo entrevistado.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa dentro do paradigma interpretativo. O seu objetivo é descrever e interpretar um fenómeno educacional (Erickson, 1986).

Para esta comunicação, descrevem-se resultados obtidos através de entrevistas clínicas a quatro alunos: dois do 1.º ano, Ana e Rui, e dois do 2.º ano, João e Diogo. Trata-se de uma técnica dirigida pelo investigador que procura uma descrição da forma de pensar dos entrevistados (Tavares, 2000; Zazkis & Hazzan, 1999) e que começa pela apresentação de uma tarefa a ser explorada pelo entrevistado, cujo contexto deve ser realístico para as crianças (Hunting, 1997). Assim, a entrevista clínica surge como uma oportunidade de construção de um modelo do conhecimento matemático dos alunos (Hunting, 1997) e os resultados obtidos com este método são usados na reformulação da tarefa explorada na entrevista, no âmbito do *design* de tarefas, atrás descrito.

Segundo Hunting (1997), a entrevista clínica é um diálogo e pressupõe que os alunos entrevistados individualmente expliquem as ações realizadas ou as soluções apresentadas. Esta explicação é fundamental para a compreensão do seu pensamento. Um aspeto central neste método é o reconhecimento do papel da linguagem. Daí que seja importante clarificar o significado dos discursos, seja do entrevistador, seja do entrevistado. As questões colocadas pelo entrevistador devem ser suficientemente abertas para permitir aos alunos escolherem o seu próprio processo de resolução e explorarem livremente a tarefa, e devem maximizar a oportunidade de diálogo potenciador da revelação dos processos de pensamento dos alunos. O entrevistador deve ter a preocupação em encorajar as crianças a explicitar o que pensaram, mantendo sempre um tom neutro relativamente à correção das suas respostas.

As entrevistas individuais foram realizadas em janeiro de 2014 pelas autoras desta comunicação, membros da equipa do Projeto. Os quatro alunos estavam pela primeira vez a frequentar os respetivos anos de escolaridade e foram selecionados pelos seus professores, com base nos seguintes critérios, indicados pelas investigadoras: (i) alunos que normalmente expressam o que pensam, e (ii) alunos com um desempenho razoável em Matemática. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas posteriormente. Realizaram-se numa sala da escola, que não a sala de aula dos alunos e tiveram uma duração de cerca de 15 minutos, tempo adequado a entrevistas a crianças com idades compreendidas entre 5 e 8 anos, para que consigam manter concentração em toda a sua duração (Hunting, 1997). Complementando a áudio-gravação das entrevistas, as investigadoras usaram também a técnica de observação no decurso das entrevistas, registando, após o seu término, o observado em notas de campo. Por razões éticas, os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade. Nesta comunicação, vamos analisar apenas uma das duas tarefas resolvidas por cada aluno, a qual apresentamos na secção seguinte.

O conjunto das bolas da tarefa permaneceu visível durante toda a entrevista, de forma que cada aluno fosse capaz de propor várias maneiras de distribuição das bolas pelas duas caixas. Uma folha de papel com duas caixas desenhadas foi disponibilizada aos alunos para que, se quisessem, pudessem desenhar nela as bolas.

Com a tarefa, queríamos compreender o pensamento dos alunos sobre partição flexível (e.g., um conjunto de 9 elementos conceptualizado mentalmente como cinco e quatro, três e seis, etc.). Mais precisamente, queríamos compreender se os alunos conseguiam obter todas as decomposições possíveis, como conseguiam justificar que tinham obtido todas, e como é que conseguiam identificar os aspetos matemáticos envolvidos.

Para a análise dos dados obtidos nas entrevistas clínicas, adotámos categorias provenientes do modelo de Threlfall (2009): abordagem ao problema (reparar nos números; cálculos exploratórios parciais); solução do problema (aplicação de relações numéricas e operatórias).

1ª fase do *design* de tarefas: a conceção da tarefa

A tarefa proposta (inspirada em Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997) está relacionada com as decomposições do 9 (Figura 2) e visa generalizar o uso sistemático da propriedade comutativa. Tem, pois, como objetivo que os alunos compreendam a relação entre somas representando as possíveis decomposições de um dado número de objetos.

Era uma vez duas caixas e 9 bolas saltarinas mágicas que passavam a vida a saltar de uma caixa para a outra.

bolas

caixa azul caixa vermelha

As bolas vão continuar a saltar.

Quantas bolas podem estar em cada caixa? (analisar todas as possibilidades)

Figura 2: Tarefa das caixas com bolas

Os alunos têm de estabelecer diferentes decomposições do número 9. Em qualquer caso, têm de perceber que vão dividir o conjunto das bolas em dois subconjuntos (decomposição do 9), mas também, quando definem um dos subconjuntos, por exemplo, de 4 bolas, têm de perceber qual o número de bolas que falta para terem as 9, ou fazer uma subtração direta e perceber que ao tirar 4 a 9, ficam 5. É-lhes solicitado que façam isto para as diferentes decomposições aditivas do 9. Em ambas as situações, os alunos lidam com as duas operações, adição e subtração, como sendo intrinsecamente inversas uma da outra (Greer, 2012).

No contexto desta tarefa, a expressão 4+5 é a notação simbólica que representa simultaneamente o processo operacional de adicionar 4 a 5 e o objeto matemático produzido, a soma.

Identificamos dois níveis de desenvolvimento na forma de abordar esta tarefa:

<u>**Nível 1**</u> – Os alunos conseguem registar várias decomposições do 9, utilizando a propriedade comutativa sem exaustão.

<u>Nível 2</u> –Os alunos relacionam a adição e a subtração e utilizam a propriedade comutativa de modo consciente e exaustivo, justificando ter alcançado todas as possibilidades com a sistematicidade e generalização da propriedade comutativa.

A tarefa assume uma forma que foi concebida para cativar as crianças e apelar ao seu mundo imaginário em que objetos inanimados como as bolas tomam uma vida própria e saltam de uma caixa para outra, sem interferência humana. A ideia de movimento foi central no *design* da forma da tarefa para que a mesma possa ligar-se intrinsecamente ao objetivo da tarefa atrás enunciado. Assim, será a consideração da vertente dinâmica desse mesmo movimento que induzirá a criança a explorar diferentes possibilidades de decomposição do 9, já que as bolas não se distribuem estaticamente por duas caixas mas continuam a saltar de uma caixa para a outra, variando em número em cada instante. Um outro aspeto da forma da tarefa ao serviço da função da mesma tem a ver com a atribuição de cores diferentes a cada uma das duas caixas para conduzir à comutatividade das situações exploradas: o par $a+b$ (a bolas na caixa azul e b bolas na caixa vermelha) é distinto do seu comutativo $b+a$ (b bolas na caixa azul e a bolas na caixa vermelha), embora ambos representativos do mesmo número. Por fim, um terceiro aspeto associado à forma da tarefa e também relacionado com a sua função prende-se com o facto de se ter considerado duas caixas e não mais para induzir a estruturação do 9 em dois grupos.

2ª fase do *design* de tarefas: Alguns resultados das entrevistas clínicas

Após a apresentação da tarefa, os dois alunos do 1.º ano, Ana e Rui, escreveram primeiro 5+4, sem recorrer ao desenho das bolas. Perante a pergunta sobre as outras possibilidades, foram escrevendo as diferentes decomposições do 9. No caso da Ana:

Ana: 5+4

Investigadora: E outras possibilidades?

Ana escreveu imediatamente no papel: 2+7, 7+2, 8+1, 1+8, 4+5, 3+6, 6+3.

Ana não fez qualquer outra representação da situação e a folha de papel apenas foi usada para escrever as representações simbólicas indicadas.

Após aqueles registos, Ana acrescentou oralmente que também podia ser 9+0. Perante a pergunta da investigadora se tinha de escrever 2 + 7 e 7 + 2, Ana respondeu: "Dá o mesmo, mas não é o mesmo. Aqui [*apontando para a primeira caixa*] estão 2 e ali 7 [*apontando para a segunda caixa*] e aqui [*7+2*] está ao contrário."

Embora não tendo tido necessidade de desenhar as bolas, parece que ela não conseguiu desligar-se das bolas concretas e olhou para os números como um par ordenado.

No caso do Rui, depois de registar 5+4, a sequência dos registos foi: 4+5, 6+3, 3+6, 8+1, 1+8, 9+0.

Após uma pequena pausa, escreveu no papel: 7+2 e 2+7.

Rui também foi questionado se "6+3 é o mesmo que 3+6", e respondeu: "É. Só que é ao contrário."

Os dois alunos conseguiram visualizar todas as decomposições do 9, mas nenhum deles se abstraiu da situação real – caixas e bolas — embora nenhum dos dois tivesse sentido necessidade de as desenhar nas caixas. Parece que ambos pensaram sobre pares ordenados, tentando escrever todos os pares.

No caso dos alunos do 2.º ano, João, quando lhe foi apresentada a tarefa, escreveu, de imediato, “4+5, 3+6, 2+7, 1+8”, e depois parou. Perguntado se não havia mais hipóteses, replicou: “Não, eu podia mudar a ordem dos números, mas era a mesma coisa, a soma é a mesma”.

Diogo escreveu no papel: 5+4, 6+3, 8+1, 7+2.

Quando a investigadora perguntou se já tinha escrito todas as possibilidades, disse: “Sim. Se eu trocar, a soma é a mesma, 9”.

Os dois alunos do 2.º ano fizeram todas as partições não vazias do 9, não tendo considerado a possibilidade de 9+0 (ou 0+9). Estes alunos parecem ter apenas pensado sobre os números, abstraindo da situação real. Parece-nos ainda que já tinham compreendido a propriedade comutativa da adição.

Podemos afirmar que o contexto da tarefa foi tido em conta pelos alunos do 1.º ano, mas não pelos do 2,º ano, que ignoraram o facto de as parcelas terem papéis diferentes na situação proposta. Os alunos do 1.º ano compreenderam a situação concreta e a forma como pensam parece estar próxima da situação real, tendo considerado pares ordenados de números. Mas já não tiveram necessidade de concretizar a situação, pois nenhum deles desenhou os subconjuntos das bolas nas caixas, embora parecendo raciocinar a partir da situação concreta. No caso dos alunos do 2.º ano, já ultrapassaram a fase das situações concretas, pelo menos neste caso, e pensaram sobre a soma, organizando os diferentes números cuja soma é 9, mas usando a propriedade comutativa para omitir os respetivos pares comutativos.

3ª fase do *design* de tarefas: Reformulação da tarefa

Esta tarefa revelou-se uma tarefa com potencial para ser explorada na sala de aula com alunos do 1.º ano, na fase inicial de aprendizagem, no sentido de desenvolver a ideia da estrutura aditiva de **N** (Freudenthal, 1983). Parece-nos ser importante, que, na síntese final, após a fase de discussão coletiva com a turma, o professor conduza os alunos à construção coletiva do esquema,

9= +	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

focando a sua atenção nas duas sequências crescente e decrescente e na simetria central presente. Já no caso dos alunos do 2.º ano, a tarefa parece ter sido demasiado fácil e pouco adequada na medida em que não lhes colocou desafios cognitivos.

Os resultados obtidos levam-nos a considerar que para a fase inicial de aprendizagem dos alunos de 1.º ano, a tarefa não necessita de reformulação, embora seja pertinente investigar se o uso das cores para as caixas tem influência nas abordagens dos alunos. Já para fases mais avançadas da aprendizagem, nos primeiros dois anos de escolaridade, a tarefa necessita de ser reformulada para números com uma ordem de grandeza superior a 20, explorando outro tipo de contextos, como por exemplo, os passageiros de um autocarro de dois andares.

Considerações finais

Tal como referido por Grevholm et al. (2009), a tarefa proposta tem uma função, uma forma e um foco matemático. Tendo por função generalizar o uso sistemático da propriedade comutativa, a tarefa assume uma forma que, por um lado, cativa as crianças, e por outro, está intrinsecamente relacionada com a sua função. As duas cores das caixas, pensadas para conduzir à exploração da comutatividade, foram irrelevantes para os alunos entrevistados: os alunos de 1.º ano consideraram a ordem das duas caixas mas não deram indícios de repararem nas suas cores, e os alunos de 2.º ano abstraíram-se da situação contextual das caixas. No que respeita ao facto de se ter considerado duas caixas, são vários os fundamentos para esta opção. Para além da pertinência do proceito 9 ser estruturado em dois grupos, e não num número superior de grupos, de modo a que a criança encare $a+b$ como processo (operação) e simultaneamente como produto (isto é, como soma que constitui uma representação não canónica de um número, neste caso, do 9) (Sfard, 1991; Tall, 2013), o uso sistemático da propriedade comutativa através da simetria central das decomposições do 9 é facilitado se a decomposição incidir apenas em dois grupos. No que respeita ao foco matemático da tarefa, este incide na flexibilidade de cálculo alcançada através do uso da propriedade comutativa na estrutura aditiva de N (Freudenthal, 1983), bem como através da compreensão da inversão das operações adição e subtração (Greer, 2012).

Os resultados obtidos com as entrevistas clínicas relativamente à exploração desta tarefa merecem-nos também algumas considerações. Apesar de todos os alunos terem começado com os números 4 e 5 (ou 5 e 4), grupos quase iguais, os alunos do 1.º e do 2.º ano resolveram a tarefa de maneira diferente, correspondendo a diferentes níveis de desenvolvimento. Embora os do 1.º ano não necessitassem de concretizar a situação com materiais manipuláveis ou desenhos, eles resolveram a tarefa muito próxima do seu contexto. Como referem De Corte e Verschaffel (1987), os aspetos semânticos da tarefa influenciam os alunos mais novos na forma como a resolvem. Assim, os alunos do 1.º ano, olharam para pares ordenados de números cuja soma é 9. Conseguiram listar todos os pares, mas de novo, considerando o contexto. Podemos conjeturar que eles estavam certos que tinham obtido todos os pares possíveis, porque usaram alguma organização na apresentação dos pares, escrevendo de uma forma quase consistente pares comutativos (por exemplo, 2+7, 7+2). Pelo contrário, os do 2.º ano, abstraíram da situação concreta e procuraram a soma 9. Libertaram-se da situação concreta e só consideraram o facto que tinham de obter o 9 através de uma soma de duas parcelas. Como já conheciam a propriedade comutativa, embora não de uma forma formal, aplicaram-na para justificar que tinham todos os casos. Portanto, resolveram o problema em termos matemáticos, mas não o problema real proposto, onde deviam ter considerado as duas caixas diferentes e, nesta perspetiva, não é o mesmo ter as bolas na caixa vermelha ou na caixa azul. Embora todos os alunos tenham aplicado a propriedade comutativa, fizeram-no com intencionalidades distintas: enquanto os alunos do 1.º ano a aplicaram para gerar todas as possibilidades, atendendo à semântica da tarefa em que releva a ordem dos números cuja soma é 9 (Ana: “Dá o mesmo, mas não é o mesmo”), os alunos do 2.º ano aplicaram-na para dispensar a apresentação dos pares comutativos, considerando que as partes simétricas seriam as mesmas (Diogo: “Se eu trocar, a soma é a mesma, 9”).

O cálculo flexível diz respeito ao conhecimento e ao uso de relações numéricas, sendo mais rico na medida em que os alunos vão desenvolvendo o seu sentido de número e são capazes de usar a rede de relações que vão construindo (Baroody & Rosu, 2006). A tarefa proposta aos quatro alunos entrevistados, e aqui discutida, indicia a sua potencialidade no desenvolvimento da compreensão da generalização associada à propriedade comutativa e do seu papel na obtenção, pelos alunos, da certeza da exaustão das soluções do problema. Relativamente ao processo cíclico do *design* desta tarefa em particular, a análise da forma como as crianças a resolveram nas entrevistas clínicas sugere que a mesma não carece de reformulação, embora seja pertinente explorar diferentes contextos (formas) para a mesma função e foco matemático, e averiguar da sua influência no desenvolvimento do pensamento flexível dos alunos.

Referências

Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Buckingham: Open University Press.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2007). *Effective Pedagogy in Mathematics/ Pàngarau: Best Evidence Synthesis Iteration [BES]*. Wellington, New Zeland: Ministry of Education.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations — The number sense view. In A. J. Baroody & T. Torbeyns (chairs), *Developing adaptive expertise in elementary school arithmetic*. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association.

Brocardo, J. (2014, September). *Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning*. Paper presented in ECER, Porto, Portugal.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 258-277.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 363-381.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Felício, C., & Rodrigues, M. (2010). A natureza da tarefa e os desafios da gestão curricular. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 2010*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and* *models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrecht: Technipress.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education*, *79*, 429-438.

Grevholm, B., Millman, R., & Clarke, B. (2009). Function, form and focus: The role of tasks in elementary mathematics teacher education. In B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education: Purpose, use and exemplars.* New York: Springer.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathgeb-Schierer, E., & Green, M. (February, 2013). *Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes*. Paper presented in CERME 8, Antalya, Turquia.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, *22*, 1-36.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 557-567.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives)*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tavares, M. (2000). A entrevista clínica. In J. A. Cunha (Org.), *Psicodiagnóstico V* (5ª ed., pp. 45-56). Porto Alegre: ArtMed.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.

TAREFAS PARA PROMOVER A CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA

Isabel Vale, Ana Barbosa, Teresa Pimentel
Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt; anabarbosa@ese.ipvc.pt; terpimentel@gmail.com

Resumo: Sendo a criatividade um tema recente na educação matemática, parece importante começar por identificar e/ou desenhar tarefas que tenham potencial para desenvolver características do pensamento criativo nos futuros professores. Para além disso, é também do nosso interesse analisar a forma como identificam dimensões da criatividade em produções escritas de tarefas desafiantes. Neste artigo discutimos as principais características destas tarefas e apresentamos dois exemplos explorados ao nível da formação inicial de professores. Defendemos que estas tarefas têm potencial para a aprendizagem matemática e promovem múltiplas formas de resolução indo ao encontro do desenvolvimento das componentes da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade.

Palavras chave: tarefas; criatividade; resolução de problemas; formação de professores.

Introdução

Atualmente, não é suficiente ser-se proficiente na realização de cálculos, na memorização de factos e procedimentos ou até mesmo na resolução de problemas rotineiros. Apesar de estas capacidades serem importantes, ser capaz de reconhecer e definir problemas, de gerar várias soluções ou caminhos para chegar a uma solução, encontrando os mais eficientes ou elegantes, de justificar conclusões, e comunicar resultados é mais importante. As capacidades elencadas não são inatas, podendo ser cultivadas e desenvolvidas se os professores proporcionarem aos alunos oportunidades de aprendizagem apropriadas para despoletar o potencial criativo, inovador e crítico.

Tem vindo a ser atribuído à criatividade um interesse cada vez maior ao nível da investigação educacional, por isso é importante que os formadores de professores conheçam formas de introduzir e abordar esta nova componente da matemática nas nossas salas de aula. Isso significa que devemos preocupar-nos não só com o que os alunos fazem, mas também com o que os professores fazem. Assim, temos de confrontar os futuros professores com situações que terão de propor e discutir com os seus alunos, permitindo-lhes confrontar o seu conhecimento matemático com o dos seus alunos. A investigação mostra que as tarefas influenciam significativamente a forma como os alunos aprendem, principalmente se forem usadas tarefas desafiantes relacionadas com a resolução e formulação de problemas que podem levar à compreensão de conceitos matemáticos fundamentais, incentivando ao mesmo tempo a fluência, a flexibilidade e a originalidade - dimensões do pensamento criativo (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997).

Com base nestas premissas, estamos a desenvolver um estudo ainda em curso, usando uma abordagem qualitativa, com futuros professores do ensino básico. Na sua formação, estes alunos têm uma experiência didática centrada na criatividade, fundamentada na exploração de tarefas ricas e desafiantes, fator que consideramos contribuir para o desenvolvimento do seu pensamento criativo. A par deste desenvolvimento, e sendo a análise da criatividade um tema recente na educação matemática, parece importante começar por selecionar/desenhar tarefas que tenham potencial para identificar/desenvolver características do pensamento criativo dos alunos. Ao nível da formação inicial, para além do interesse em identificar traços de criatividade nos futuros professores quando resolvem tarefas desafiantes, estamos interessadas em analisar a forma como reconhecem algumas dessas dimensões quando analisam as produções escritas de outros alunos em tarefas do mesmo tipo que realizaram. Deste modo, foram selecionadas as seguintes questões de investigação: 1) Que dimensões da criatividade podem ser identificadas em futuros professores quando resolvem tarefas desafiantes?; e 2) Como é que os futuros professores identificam dimensões da criatividade, ao analisarem produções de tarefas do mesmo tipo que eles resolveram?

A aula de Matemática, o professor e as tarefas

No contexto das salas de aula, professor, alunos e conteúdo (matemática) estão ligados num sistema, o triângulo didático, onde o ensino depende da coordenação da participação ativa dos alunos na exploração de uma matemática com significado, no qual o papel do professor é garantir que os estudantes estejam empenhados em aprender. Neste sistema destacamos o papel das tarefas usadas para representar o conteúdo a ser aprendido na interação professor aluno (Figura 1) (Vale & Barbosa, 2013).

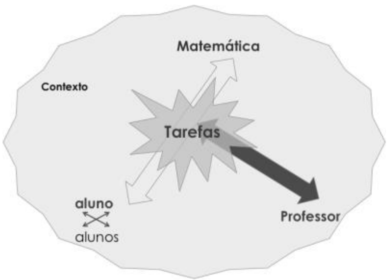


Figura 1. O triângulo didático (adaptado de Lampert, 2012; Sträβer, 1994)

Numa aula de matemática, a aprendizagem depende fortemente do professor e das tarefas que este propõe. As tarefas selecionadas são fundamentais para caracterizar e apresentar o seu trabalho. O *design* das propostas define a atividade que podem despoletar nos alunos, permitindo aos professores introduzir novas ideias e procedimentos e aos alunos a oportunidade de fazer a diferença, pensando de forma divergente (e.g. Stein & Smith, 1998). A orientação do questionamento que procura provocar discussão e reflexão de ideias é fundamental para a aprendizagem dos alunos e só surge quando os professores têm um bom conhecimento do tema que ensinam, da forma como o ensinam e quando o ensinam. O questionamento é uma ferramenta poderosa no apoio aos alunos enquanto pensadores criativos. Isto só é possível se os professores estiverem eles próprios confortáveis em fazer este tipo de trabalho, se apresentarem tarefas criativas aos seus alunos, dispuserem de recursos didáticos para explorar e aplicarem estratégias de ensino adequadas. Assim, é fundamental que os professores possam tirar proveito de todo o potencial associado a uma tarefa e, por isso, precisam de oportunidades para as explorar e resolvê-las da mesma forma que serão exploradas com os seus próprios alunos. Neste trabalho, damos especial atenção às tarefas que envolvem padrões em contextos visuais/figurativos, pelo facto de a visualização não estar apenas relacionada com a mera ilustração, mas também ser reconhecida como uma componente do raciocínio - profundamente relacionada com o conceptual e não apenas com a perceção. Muitas vezes, é mais fácil apresentar um conceito através da criação de uma imagem visual, já que é mais rapidamente entendida e retida por mais tempo do que uma sequência de palavras. Os aspetos figurativos da tarefa podem ajudar os alunos a ultrapassar algumas das dificuldades com determinados conceitos matemáticos e procedimentos para resolver com sucesso uma situação problemática.

O professor

É consensual a opinião de que os professores precisam ter um bom conhecimento de conteúdo, já que afeta o que ensinam e também a forma como ensinam (Ponte & Chapman, no prelo). Deste modo, os futuros professores em formação inicial precisam desse conhecimento, que deve ser adquirido através de programas de formação de professores, do desenvolvimento profissional e das experiências de sala de aula. É um desafio envolver os futuros professores em diferentes experiências e percursos matemáticos em contextos variados, para que possam desenvolver as suas ideias matemáticas, o raciocínio e estratégias de resolução de problemas na exploração de tarefas matemáticas.

Em relação à criatividade, enquanto formadores de professores de matemática defendemos que os futuros professores devem possuir um conhecimento do conteúdo sólido sobre este assunto, não só para que se possa identificar o seu potencial criativo, através das suas produções em tarefas criativas, mas também desenvolvendo capacidades para identificar as dimensões da criatividade nos alunos com quem irão trabalhar. É por isso que Bolden, Harries e Newton (2010) consideram importante discutir com os professores em formação inicial e professores em serviço as suas crenças sobre a criatividade em matemática, tentando perceber o impacto dessas ideias nas suas estratégias de ensino e práticas de sala de aula.

Tarefas desafiantes

Partindo do princípio que o que os alunos aprendem é influenciado pelas tarefas que lhes são propostas (e.g. Doyle, 1988, Stein & Smith, 1998), é importante dispor de boas tarefas matemáticas. A tarefa é considerada *boa* quando serve para introduzir ideias matemáticas fundamentais, quando se trata de um desafio intelectual para os alunos e lhes permite usar várias abordagens (NCTM, 2000). Para Stein e Smith (1998), uma tarefa é um segmento da atividade da sala de aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática específica e a sua natureza afeta o tipo de aprendizagem produzido. Mason e Johnston-Wilder (2006) referem-se a uma tarefa matemática como aquilo que os alunos são convidados a fazer durante uma aula. Consideramos que uma tarefa, reforçando a ideia de Margolinas (2013), é tudo o que o professor utiliza no processo de ensino e aprendizagem da matemática para envolver os alunos na resposta/resolução de uma situação (e.g. exercícios, problemas, investigações, questões, definições, demonstrações, projetos, construções, jogos, relatórios) que conduz os alunos à aprendizagem. Mas o trabalho desenvolvido deverá ter impacto na atividade matemática que lhe está associada, isto é, interessam-nos tarefas que permitam aos alunos avaliar a sua compreensão matemática, estabelecendo relações entre conceitos, e ter flexibilidade suficiente para pensar de forma divergente.

Desafio é uma ideia relacionada com a criatividade. Uma tarefa desafiante, para Barbeau (2009), pode ser definida como uma questão que se coloca intencionalmente para atrair os alunos a tentar uma resolução, enquanto alargam a sua compreensão e o conhecimento de algum tópico. A expressão tarefa *desafiante* é normalmente usada para descrever uma tarefa que é interessante e talvez até agradável, mas nem sempre fácil de lidar ou atingir, e deve envolver ativamente os alunos na construção de uma diversidade de ideias e estilos de aprendizagem. As tarefas desafiantes podem ser aquelas que exigem que o aluno relacione conceitos matemáticos ou procedimentos, considerando, por exemplo, as suas diferentes representações, perspetivas ou aplicações (Kadijevich, 2007). Esses desafios devem permitir responder à situação com flexibilidade e imaginação (Barbeau, 2009). O desafio é importante na aula de matemática, porque os alunos podem tornar-se desmotivados e entediados muito facilmente numa aula "rotineira" a menos que sejam desafiados (Holton, Cheung, Kesianye, Losada, Leikin, Makrides, Meissner, Sheffield & Yeap, 2009).

Becker e Shimada (1997) utilizam a expressão *tarefa rica* quando se quer promover nos alunos uma atividade matemática complexa através dessa tarefa. São consideradas ricas porque dão aos alunos a oportunidade de aprender, escolhendo a partir de um grande conjunto de capacidades matemáticas e não matemáticas, e usando estas capacidades de forma integrada, criativa e significativa. As tarefas ricas não só dão aos alunos a oportunidade de estarem envolvidos na sua resolução, mas encorajam-nos a realizar essas ações de uma forma natural, equilibrada e com propósito (Flewelling & Higginson, 2003), o que contrasta com as tarefas mais tradicionais que enfatizam em excesso as ações de manipulação e transformação, pedindo aos alunos para seguir determinadas receitas, dando-lhes poucas oportunidades para considerar alternativas e serem criativos. Deste modo a nossa visão sobre as tarefas só faz sentido num ensino exploratório onde o professor é o orquestrador da atividade na sala de aula (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). As tarefas rotineiras normalmente tendem a manter os alunos desconectados e desinteressados do trabalho. A ideia de desafio está geralmente associada à resolução de problemas. Um problema matemático ocorre quando um indivíduo não tem conhecimento de um procedimento rotineiro ou de ferramentas algorítmicas para o resolver. Assim, é obrigado a envolver-se em algum tipo de reflexão e análise da situação, podendo agregar diversos fatores, tendo assim que construir ou inventar ações matemáticas para chegar à solução.

As tarefas devem permitir que os alunos explorem, cometam erros, reflitam, ampliem e abranjam novas áreas que estão relacionadas, dando-lhes a oportunidade de demonstrar capacidades em diferentes vertentes, verbal, geométrica, gráfica, algébrica, numérica, etc. No entanto, o professor, como a pessoa que apresenta desafios na sala de aula e sendo o seu orquestrador, deve estar ciente de algumas circunstâncias particulares como apresentar e explorar as tarefas. Por exemplo, podem ser dados desafios apropriados para alunos matematicamente bem sucedidos, assim como para os menos qualificados. A resolução da mesma tarefa também pode ser nivelada de forma distinta para diferentes alunos, proporcionando desafios a vários níveis. A principal responsabilidade dos professores passa por propor oportunidades ricas para os alunos aprenderem e para demonstrarem, não apenas o que sabem, mas o que são capazes de fazer com o conhecimento.

Criatividade e resolução de problemas

Perspetivas sobre a criatividade

Analisando a investigação em torno da definição de criatividade matemática, descobrimos que não existe uma definição aceite consensualmente, uma vez que existem inúmeras maneiras de a expressar. De acordo com Mann (2006) a criatividade matemática é essencial para o desenvolvimento do talento em matemática, mas também muito difícil de identificar e de avaliar. A criatividade começa com curiosidade e envolve os alunos em tarefas de exploração e experimentação, nas quais podem manifestar a sua imaginação e originalidade (e.g. Barbeau, 2009). Parece consensual que se considerem três componentes/dimensões da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade (e.g. Conway 1999; Leikin, 2009; Mann, 2006; Silver, 1997). *Fluência* é a capacidade de gerar um grande número de ideias e refere-se à continuidade dessas ideias, o fluxo de associações e utilização de conhecimentos básicos; *Flexibilidade* é a capacidade de produzir diferentes categorias ou perceções em que há uma variedade de ideias diferentes sobre o mesmo problema ou coisa. Torna-se clara quando os alunos mostram a capacidade de mudar de ideias entre as soluções; e *Originalidade* é a capacidade de criar ideias ou produtos incomuns, totalmente novas, ou extremamente diferentes. Estas componentes do pensamento criativo funcionam em harmonia umas com as outras, e raramente ocorrem isoladamente nos processos de pensamento. No entanto, gostaríamos de destacar a flexibilidade, uma vez que exige fluência, pode envolver a originalidade e é uma faceta muito importante do pensamento divergente.

Tarefas desafiantes: Resolução e formulação de problemas

Muitos autores (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1997) referem que a resolução e formulação de problemas matemáticos relacionam-se diretamente com a criatividade. Tarefas que podem promover as dimensões acima referidas devem ser abertas e pouco estruturadas, assumindo a forma de resolução de problemas, formulação de problemas, explorações matemáticas e investigações. Defendemos as tarefas com múltiplas resoluções propostas por Leikin (2009), argumentando que estas são as que envolvem vários caminhos para o mesmo problema, utilizam diferentes representações e incluem diferentes propriedades de um conceito matemático (Barbosa, Vale & Pimentel, 2014; Vale & Pimentel, 2011).

O processo de criação de problemas tem sido definido de várias maneiras e com diferentes termos como inventar, representar, formular. Silver (1997) considera a formulação de problemas como a criação de novos problemas ou a reformulação de problemas dados. Stoyanova (1998) considera a formulação de problemas como o processo pelo qual, com base na experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e formulam-nas como problemas matemáticos significativos. Para o aluno, a atividade de formulação de problemas envolve a problematização de situações usando a sua própria linguagem, as suas experiências e os seus conhecimentos. Brown e Walter (2005) apresentam duas estratégias de formulação de problemas. A primeira é *aceitando os dados*, que começa com uma situação estática (e.g. expressão, tabela, condição, imagem, diagrama, frase, cálculo, conjunto de dados), a partir da qual o aluno coloca questões, de modo a ter um problema, sem mudar os dados. A segunda consiste em estender uma tarefa alterando os dados, através da estratégia *E se em vez de*. A partir da informação dada num problema particular, deve-se identificar qual é a questão, o que é conhecido, o que são as condições e as limitações que a resposta ao problema envolve. A modificação de um ou mais desses aspetos pode levar à formulação de mais perguntas.

Metodologia

Um dos propósitos do nosso estudo é identificar/desenhar tarefas que poderão ajudar os futuros professores a desenvolver a criatividade matemática nas suas salas de aula. Por outras palavras, procurar tarefas que envolvam os alunos na sua resolução, permitindo-lhes usar diferentes temas e abordagens, e ajudar o professor a identificar o tipo de pensamento usado pelos alunos que se pode qualificar como criativo. Isto significa compreender a relação entre criatividade e a resolução e formulação de problemas. Para abordar as questões de investigação atrás enunciadas propusemos um modelo para tarefas desafiantes, ainda em elaboração, que incorpora ideias da resolução de problemas (e.g. Polya, 1973; Silver, 1997) e da formulação de problemas (Brown & Walter, 2005; Silver, 1997; Stoyanova, 1998). Na categoria da resolução de problemas, as tarefas são, principalmente, problemas de processo ou de natureza aberta que dependem das capacidades matemáticas dos alunos e do conhecimento matemático geral, exigem boa capacidade de organização e em que o resolvedor pode usar várias estratégias e representações. Na categoria da formulação de problemas, consideramos situações semi-estruturadas em que os alunos são convidados a criar problemas a partir de uma situação estática, utilizando a estratégia *aceitando os dados*. As tarefas utilizadas ao longo deste estudo foram desenhadas ou escolhidas com base na identificação de uma das dimensões da criatividade, e com o objetivo de serem um desafio para todos os alunos. Sempre que possível, foram privilegiados contextos figurativos e tarefas com padrões (e.g. Barbosa, 2013; Vale & Pimentel, 2011).

Este estudo exploratório teve por base o contexto das aulas de uma disciplina de didática da matemática, com dezanove futuros professores do ensino básico, onde desenvolvemos uma experiência didática na qual se pretendia discutir o papel da criatividade na matemática. Os dados recolhidos incluíram, principalmente, observações em sala de aula, notas metodológicas e produções dos alunos com base nas tarefas. Num primeiro momento, os alunos foram convidados a resolver diferentes tarefas que nos permitiram identificar, além do potencial criativo das tarefas, dimensões da criatividade nas produções escritas dos alunos, e, num segundo momento, foram confrontados com as resoluções das tarefas, do mesmo tipo que tinham feito no primeiro momento, identificando eles próprios essas dimensões. Para analisar estas tarefas, seguimos as ideias básicas de alguns autores (e.g. Conway, 1999; Silver, 1997) sobre a criatividade, usando na formulação de problemas as mesmas dimensões aplicadas na resolução de problemas: fluência, flexibilidade e originalidade - fluência, medida pelo número de respostas/soluções corretas, obtidas pelo aluno para a mesma tarefa; flexibilidade, medida pelo número de soluções com abordagens diferentes que o aluno consegue produzir, organizadas em diferentes categorias; e originalidade, medida pelas respostas correspondentes ao menor número de um dado tipo por comparação com as respostas do grupo. Foi possível superar o problema inerente à medição da fluência solicitando aos alunos a resolução das tarefas de várias maneiras diferentes. Vemos potencialidades nessa ação uma vez que permite contradizer a perspetiva de alguns estudantes de que o importante é conseguir uma resposta correta, sem ponderarem se há outra maneira mais simples ou mais interessante para abordar a tarefa. Para a flexibilidade, construímos uma categorização indutiva das propostas de resolução para cada tarefa resolvida; eventualmente poderiam escolher-se outros indicadores.

Não foi atribuída qualquer pontuação aos estudantes a respeito dessas dimensões; em vez disso, fez-se uma análise global do trabalho apresentado, considerando a frequência das respostas mais comuns e mais originais. Utilizamos um conjunto de várias tarefas, de resolução e formulação de problemas, das quais apresentamos dois exemplos (Figura 2).

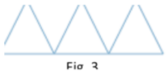
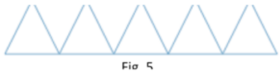
TAREFA 1 – As traves	Considere a sequência de figuras contruídas com palitos, da qual se mostra o 3º e o 5º termos.   1. Desenhe as figuras em falta: Fig.1, Fig.2 e Fig.4, de forma a que todas juntas constituam um padrão. 2. Escreve uma expressão para calcular o número de palitos para o n-ésimo termo da sequência. Descubra tantas expressões quantas consiga para representar o termo de ordem n.
TAREFA 2- O fio	Temos um fio flexível com 36 cm de comprimento. Formule questões que pode colocar com base na situação apresentada de modo a ter um problema.

Figura 2. Exemplos de duas tarefas

Como foi referido previamente, num primeiro momento os alunos resolveram individualmente cada uma das tarefas, de tantas maneiras diferentes quantas conseguiram. Depois, num segundo momento, foi entregue aos alunos uma resposta à tarefa 2 hipoteticamente realizada por um aluno com o objetivo de analisarem em pares essa produção, de acordo com as dimensões da criatividade. Neste trabalho selecionamos as resoluções da tarefa 1 e apresentamos a análise feita pelos alunos com base na resolução da tarefa 2.

O texto que se segue evidencia a forma como pedimos aos alunos para realizar a tarefa correspondente ao segundo momento:

Analise a resolução de acordo com as três dimensões da criatividade (fluência, flexibilidade e originalidade), da seguinte situação:

Temos um fio flexível 36 centímetros de comprimento. Formule questões com base na situação apresentada de modo a obter um problema.

A resolução está disponível.

Alguns resultados preliminares

Primeiro momento

Com a tarefa 1, trabalhada no primeiro momento, pretendia-se que os alunos resolvessem tarefas do tipo da procurassem um padrão na sequência figurativa, identificando o arranjo visual que muda de uma forma previsível, e escrevessem expressões numéricas e algébricas que traduzissem o modo de *ver*, a fim de tornar possível a generalização para termos distantes. Este tipo de tarefa requer que os alunos tenham algumas capacidades visuais, de modo a ver o arranjo de formas diferentes, estabelecendo associações com o conhecimento anterior. Existem diferentes modos de contar os palitos e cada tipo de contagem pode ser respetivamente escrita através de uma expressão numérica que traduz o pensamento dos alunos e a forma como viram as figuras, que os conduziu a uma regra geral.

Os alunos usaram diferentes representações, mais ou menos formais, na resolução desta tarefa. Vamos apresentar aqui apenas as diferentes formas de ver o padrão para obter a generalização distante, porque consideramos que este aspeto é o maior indicador de criatividade. Foi obtida uma regra geral através de diversas formas: esquemas, desenhos e tabelas, usando o raciocínio funcional que permitiu atingir a generalização distante.

Todos os estudantes completaram a sequência de modo a ter um padrão de crescimento. A Figura 3 ilustra de forma sintética as produções mais comuns para obter o n-ésimo termo da sequência, com as expressões correspondentes a cada forma de *ver*.

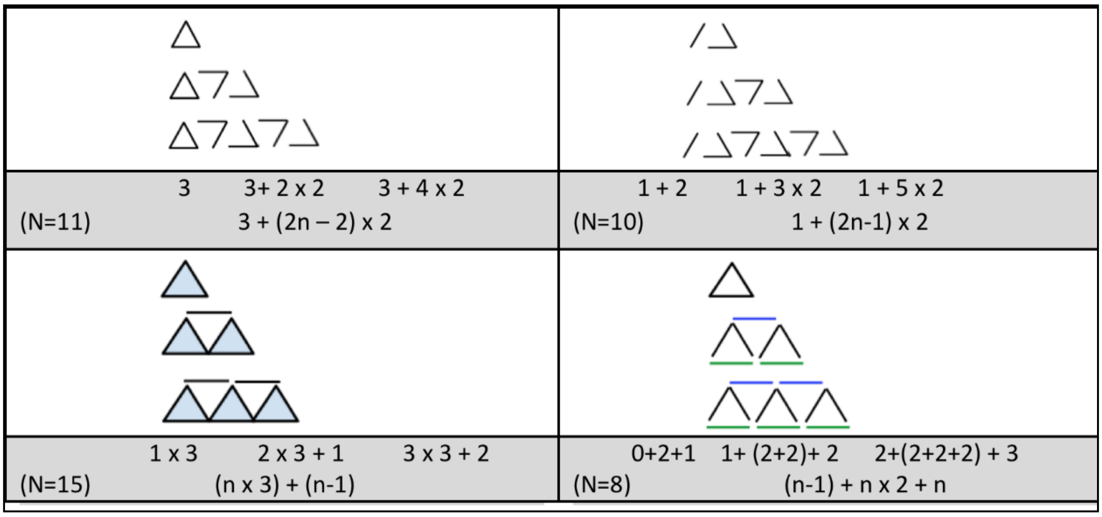


Figura 3. Síntese das respostas mais comuns dos alunos

As respostas mais originais, apresentadas por dois estudantes diferentes, são ilustradas na Figura 4. A primeira é considerada a solução mais elegante, representada através de uma expressão simples. Considerou-se o segundo caso como sendo mais complexo porque envolveu raciocínio desconstrutivo (Rivera & Becker, 2009).

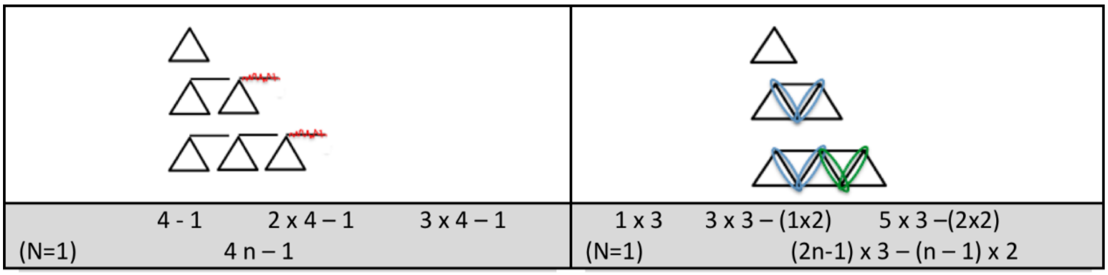


Figura 4. Síntese das respostas mais originais dos alunos

Apenas um aluno utilizou uma abordagem numérica, sem qualquer relação com as características da sequência de figuras, recorrendo apenas à manipulação numérica, como se vê na Figura 5.

# figura	1	2	3	4	…	n
# palitos	3 = 2x1+1	7=2x3+1	11=2x5+1	15=2x7+1	…	2x(2n-1)+1

Figura 5. Abordagem numérica apresentada por um aluno

Podemos destacar que a maioria dos alunos revelou fluência e flexibilidade. Quanto à fluência quase todos os estudantes (85%) apresentaram mais de uma solução correta. A flexibilidade foi revelada nas diferentes abordagens utilizadas para alcançar o n-ésimo termo, que analisamos por meio da categorização que construímos, a partir das resoluções propostas pelos alunos para cada tarefa (Figura 6). No entanto, nenhum dos alunos confirmou a equivalência das expressões obtidas.

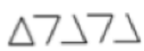
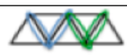
Indicadores	Construtivo		Desconstrutivo
Decompor pelos lados	Fixar o 1º lado, dois lados		
	Decompor em três partes		
Decompor por triângulos e lados	Fixar triângulos, um lado		
	Fixar o 1º triângulo, dois lados		
Decompor em triângulos			

Figura 6. Categorização das resoluções

Segundo momento

O segundo momento foi bem diferente. Foram distribuídas pelos alunos algumas resoluções da tarefa 2. Para facilitar a discussão coletiva, decidimos que todos os alunos tinham as mesmas resoluções. Evidenciaram grandes dificuldades em analisar o trabalho feito através das dimensões da criatividade. Após a leitura da tarefa, começaram a analisar as diferentes propostas apresentadas, para verificar se faziam sentido e se tinham solução. Algumas eram perguntas simples, outras eram problemas. Na Figura 7 são apresentados alguns exemplos dessas respostas.

- Quantos fios de 3 cm cabem em 36 cm?
- Corta o fio em cinco fios de diferentes comprimentos. Em seguida, coloca-os por ordem crescente.
- A Maria tem 36 centímetros de fio flexível para secar roupa. Sabendo que cada mola está a uma distância de 6 cm de outra mola, será possível colocar o fio?
- A Sofia tem um fio flexível de 36 centímetros. No primeiro dia usou metade do fio. No 2 º dia usou um terço do fio que sobrou. Quantos metros de fio sobraram?
- Descobre quantos retângulos de áreas diferentes podes construir com um fio de 36 cm de comprimento?
- Será que o fio tem comprimento suficiente para fazer um laço em torno de uma panela cilíndrica com 15 cm de raio?
- Sabendo que o perímetro de um retângulo é de 36 cm, e um dos lados tem o dobro do comprimento do outro lado. Quanto mede cada lado do retângulo?

Figura 7. Resolução da tarefa 2 apresentada para análise

Os alunos começaram por eliminar algumas propostas porque perceberam que algumas questões não estavam corretas, por exemplo, "A Joana pretende decorar duas caixas com dois fios de comprimento 36 cm. Uma das caixas é um quadrado e a outra é rectangular. Quais são as dimensões das caixas?". Em outros casos, porque as tarefas formuladas estavam desadequadas aos níveis de escolaridade do ensino básico que irão ensinar: "Qual é o lado do maior hexágono que se pode construir com um fio de 36 cm de comprimento?". Posteriormente tentaram criar categorias de análise. Esta categorização foi também difícil e complexa para os futuros professores. Os principais problemas que enfrentaram foram: Que critérios utilizar? Que conteúdos? Que estratégias de resolução de problemas? Que dificuldades? Que tipo de problemas? Consequentemente, durante a discussão em grupo, assumiram alguns mal-entendidos como interpretações equivocadas dos problemas formulados e da categorização. Assim, para as mesmas resoluções, alunos diferentes propuseram diferentes categorizações que lhes permitiram analisar a flexibilidade (Figura 8).

-Cálculos -Problemas de um passo -Factos matemáticos -Problemas de tentativa e erro	-Perímetros -Números racionais -Cálculos -Áreas -Figuras geométricas -Proporcionalidade direta -Dinheiro	-Problemas de um ou mais passos - Factos matemáticos - Cálculos	-Falta de dados - Cálculos - Factos matemáticos - Problemas de um ou mais passos

Figura 8. Algumas categorizações das respostas à tarefa 2

Mesmo que algumas das categorizações tivessem os mesmos itens, os problemas associados não eram os mesmos. Estas dificuldades foram associadas à flexibilidade, que é a dimensão mais difícil de identificar, pois envolve o pensamento divergente e conhecimento de conteúdo. Quanto à fluência, de acordo com o nosso modelo, todos os alunos concordaram que o aluno que apresentou a resolução da tarefa 2 é fluente. Sobre a originalidade não chegaram a um consenso, já que, usando a unicidade da resposta, encontraram muitas, e, por outro lado, nem sequer as consideraram"originais".

No final, todos estes futuros professores disseram que a tarefa 2 tem potencial criativo porque provoca muitas resoluções, mas também referiram que é muito difícil analisar as produções dos alunos.

Conclusões

Acreditamos que a criatividade emerge como uma componente muito importante que deve ser usada no processo educacional. A formulação de problemas é uma parte da resolução de problemas e ambas estão interligadas com a criatividade. Assim, essas duas capacidades devem ser desenvolvidas em paralelo, incentivando os alunos a criarem os seus próprios problemas (Polya, 1973; Silver, 1997), com base em determinadas situações ou experiências e, ao mesmo tempo, a resolver problemas recorrendo a uma variedade cada vez maior de estratégias. Ambas exigem o pensamento divergente e outras componentes da criatividade.

Os resultados preliminares, baseados principalmente nas produções dos alunos, sugerem que os futuros professores revelam algumas características da criatividade, o que significa que as tarefas utilizadas têm potencial para desenvolver essas características nos estudantes. Também sugerem que a flexibilidade é a dimensão mais difícil de identificar pelos futuros professores.

De todas as dimensões da criatividade estamos especialmente preocupados com a fluência e a flexibilidade, considerando que estas duas dimensões são componentes fundamentais na formação dos professores. Nesta fase do estudo, podemos dizer que encontramos, na sua maioria, estudantes motivados na procura de muitas e diferentes resoluções e as tarefas com padrões em contextos visuais (e.g. a tarefa 1) foram as que deram origem a mais resoluções, proporcionando aos alunos a oportunidade de serem mais criativos. Isto parece estar relacionado com a natureza das tarefas em si, mas também com o trabalho anterior que foi feito com estes alunos sobre os padrões.

A resolução da tarefa 1 é consistente com o que temos vindo a observar.

A análise das resoluções escritas da tarefa 2 é um outro aspeto do nosso trabalho que ainda está numa fase exploratória, e que se centra no estudo da forma como os futuros professores analisam a criatividade nas produções escritas. Mostraram uma clara dificuldade nesta análise, apesar de estarem conscientes do que se pretendia, que era identificar características das três dimensões da criatividade. Uma possível explicação pode ser a sua falta de conhecimento matemático e didático e/ou pouca confiança na sua capacidade de fazer matemática. No nosso trabalho anterior, nas produções relacionadas com tarefas de formulação de problemas, os alunos já revelaram também menos criatividade (e.g. Barbosa et al., 2014; Vale & Barbosa, 2013). Outra possível dificuldade pode ter a ver com a falta de familiaridade com este tipo de trabalho. Esta é uma tarefa que não é muito comum para os estudantes, que estão mais familiarizados com olhar para resoluções no sentido tradicional, por outras palavras, analisar a formulação de um problema é muito diferente de analisar a sua resolução. Consideramos que é necessária uma reflexão mais aprofundada sobre esta abordagem.

Quanto às tarefas, neste trabalho abordaram-se duas tarefas muito específicas que foram de encontro aos objetivos pretendidos. No entanto, em futuros estudos deverá diversificar-se a natureza das tarefas.

Todos reconhecemos que o professor desempenha um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem. O que pensa, sabe e faz na sala de aula com os alunos pode fazer a diferença na prática docente. O processo de ensino e aprendizagem deve dar aos alunos a oportunidade de "pensar fora da caixa", mas isso só é possível se os professores acreditarem que a criatividade pode ser promovida e souberem como o fazer. Para isso é fundamental encontrar tarefas ricas e desafiantes para desenvolver a criatividade matemática, mas também temos de procurar estratégias adequadas para usar na sala de aula, para que os professores sejam mais confiantes e eficientes no seu ensino. Os futuros professores devem tornar-se pensadores criativos, reconhecendo que tanto a flexibilidade como a originalidade incentivam o pensamento divergente, uma componente crucial do pensamento matemático.

Referências

Barbeau, E. (2009). Chapter 0 - Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – New ICMI Study Series 12* (pp. 1-10). NewYork: Springer.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa & R. Ferreira (Orgs.), *Investigação em Educação Matemática - Raciocínio Matemático* (pp. 51-80). Penhas da Saúde: SPIEM.

Barbosa, A., Vale, I. & Pimentel, T. (2014). Teaching and learning mathematics for creativity through challenging tasks. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 335-336). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Bolden, D., Harries & Newton, D. (2010). Preservice primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143-157.

Brown, S. & Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4* (8), 510-514.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psychologist*, *23* (2), 167-180.

Flewelling, G. & Higginson, W. (2003). *A Handbook on rich learning tasks.* Kingston, Canada: Centre for Mathematics, Science and Technology Education of Queen's University

Holton, D., Cheung, K., Kesianye, S., Losada, M., Leikin, R., Makrides, G., Meissner, H., Sheffield, L. & Yeap, B. (2009). Teacher development and mathematical challenge.

In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. – *New ICMI Study Series 12* (pp. 205-242). New York: Springer.

Kadijevich, D. (2007). Suitable activities for and possible factors influencing the outcomes of challenging mathematics in and beyond the classroom. Presented paper ICMI Study 16 Trondheim-Norway. Recuperado em 1 junho de 2014, de http://www.amt.edu.au/pdf/icmis16psemkadijevich.pdf.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Margolinas, C. (Ed.) (2013). Task Design in Mathematics Education. *Proceedings of ICMI Study*. Oxford.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St. Albans: Tarquin.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Polya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (in press). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.) New York, NY: Routledge/Taylor & Francis.

Rivera, F. & Becker, J. (2009). Algebraic Reasoning through Patterns. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(4), 212-221.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, Essence of Mathematics*, *29*(3), 75–80. Retrieved March 10, 2003, from http://www.fizkarlsruhe.de/fix/publications/zdm/adm97

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University: MASTEC.

Vale, I. & Barbosa, A. (2013). Challenging and Creative Mathematical Tasks: an exploratory study with elementary pre-service teachers. In J. Portela, I. Vale, F. Huckaby & G. Bieger (Eds.), *Proceedings of the 23th Annual Conference of the European Teacher Education Network* (pp.63-70). Hasselt, Belgium: ETEN.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp.1154-1164. Rzeszow: ERME.

CONSTRUÇÃO E PREPARAÇÃO DA EXPLORAÇÃO DE TAREFAS DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA EM ESTATÍSTICA: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO PROFISSIONAL

Nélida Filipe
Agrupamento de escolas Dra. Laura Ayres
nelidafilipe@sapo.pt

Ana Paula Canavarro
Departamento de Pedagogia e Educação, Universidade de Évora e UIDEF/IEUL
apc@uevora.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo*:* Este texto reporta-se a um estudo que tem por objetivo descrever e compreender de que modo surgiu, foi criada e preparada a exploração de tarefas de modelação matemática, no tema da Estatística, no contexto de cursos profissionais. O objetivo para as tarefas foi proporcionar a capacidade de desenvolver o sentido crítico dos alunos, usando a Estatística como ferramenta útil na resolução de problemas surgidos a partir da realidade. Neste contexto, a modelação matemática constitui-se como um conceito adequado para que a professora visada neste texto, Sara, levasse os alunos a terem essa oportunidade.

A investigação desenrola-se em contexto de trabalho colaborativo coordenado pela investigadora, onde foi criado um *design* de tarefas de modelação matemática adaptado a alunos de vários cursos profissionais.

A recolha de dados, inscrita numa abordagem qualitativa e interpretativa, recorreu à observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo; entrevistas iniciais, finais, pré e pós aula da professora; e à recolha de materiais produzidos pela professora.

O estudo, na sua fase atual, permite já apontar alguns resultados preliminares: Sara sublinha como aspetos fundamentais para o sucesso das tarefas o ter tido em conta os perfis profissionais dos alunos e os ter envolvido na recolha de dados. Isto permitiu que estes estabelecessem relações entre possíveis variáveis estatísticas e experimentassem todas as fases do ciclo de modelação matemática, o que contribuiu para simultaneamente atribuírem relevância à Estatística e aprenderem conhecimentos estatísticos.

Palavras-chave: construção de tarefas; exploração de tarefas; modelação matemática em Estatística; ensino profissional; trabalho colaborativo entre professores.

Introdução

Um dos aspetos cruciais da prática ensino passa pela seleção/criação/adaptação de tarefas ricas e motivadoras para os alunos (Canavarro & Santos, 2012). Esta preocupação com as tarefas e sua adequação assume contornos muito particulares nos Cursos Profissionais, nos quais as orientações curriculares sugerem que a criação de tarefas deve partir de situações reais e do senso comum dos alunos (ME, 2007). Estes cursos são, pois, o contexto para o estudo focado neste texto, que se suporta no trabalho colaborativo desenvolvido por um grupo de professoras de uma mesma escola, que lecionam Matemática nestes cursos. O trabalho retratado neste texto incide no tema da Estatística, comum a todos os cursos profissionais. Como ideia fundamental para o desenvolvimento do trabalho considerámos que poderia ser fértil a ideia de modelação matemática que proporciona o surgimento da Matemática a partir da realidade. Desenvolvemos esta ideia usando o ciclo de modelação proposto por Borromeo Ferri (2006), que será descrito posteriormente. Foi no contexto de situações reais que surgiu, colaborativamente, um *design* de tarefas, que obedeceram a uma determinada estrutura visando a aprendizagem de conceitos estatísticos (distribuições bidimensionais) e obedecendo ao ciclo de modelação referido.

Enquadramento teórico

Steen (2002) refere que a Estatística é uma das áreas mais presente no dia-a-dia do cidadão comum. Não basta este saber ler, escrever, fazer contas – deve estar preparado para analisar, criticar e tirar conclusões acerca da informação que lhe é fornecida e ser capaz de pensar estatisticamente em situações relevantes (Rosen, Weil & Zastrow, 2003; Ponte 2002; De Lange, 2001). A forma como cada pessoa manifesta essa capacidade traduz o seu domínio da literacia estatística. Nas profissões, a Estatística desempenha um papel importante porque à medida que a interpretação de dados se tem tornado cada vez mais relevante em decisões que afetam a vida das pessoas espera-se que os profissionais de praticamente todas as áreas sejam versados na utilização de ferramentas quantitativas. A Estatística assume deste modo um papel preponderante nessa preparação porque proporciona ferramentas metodológicas gerais para analisar a variabilidade (Gal & Garfield, 1997), determinar relações entre variáveis, desenhar as suas próprias experiências e tomar decisões em situações de incerteza (Batanero & Diaz, 2004). Apesar da importância da Estatística no ensino da Matemática ser apontada por vários autores e a sociedade em geral, existem dificuldades inerentes ao ensino da Estatística.

Neste estudo, o estabelecimento de associações entre variáveis, a partir de elementos da realidade, levou à necessidade de recorrermos ao estudo das distribuições bidimensionais. É interessante em dados bivariados, verificar se existe ou não algum tipo de associação entre eles e, caso exista, caracterizar essa relação. Relativamente às distribuições bidimensionais, vários autores referem a complexidade do ensino e aprendizagem sobre dados e relações bivariadas (Engel & Sedlmeier, 2011; Estepa & Batanero, 1996; Garfield & Ben-Zvi, 2008; Mugabe, Fernandes & Correia, 2012). A compreensão da regressão e correlação exige conhecimento básico sobre funções e, acima de tudo, a consideração da variação à volta de uma possível tendência (Engel & Sedlmeier, 2011). Essa complexidade e dificuldade inerente às distribuições bidimensionais, do saber como ensinar e que tarefas propor aos alunos do ensino profissional levou-nos a procurar contextos reais e à modelação matemática.

A modelação matemática surge da necessidade do Homem em compreender os fenómenos que o cercam para interferir ou não no seu processo de construção e é uma forma privilegiada de resolução de problemas do mundo real. A palavra modelação aparece intimamente associada aos problemas da realidade. Algumas definições de modelação matemática surgem na literatura, mas aqui destacamos as de Niss (1992) e Borromeo Ferri (2006). Segundo Niss (1992), um caso de modelação matemática para que seja considerado autêntico terá que estar associado a uma disciplina ou atividade existente fora da matemática e que compreende fenómenos, objetos, questões e problemas que têm interesse genuíno de uma perspetiva extra matemática para pessoas ligadas a essa disciplina ou atividade, ideia também defendida por Borromeo Ferri (2006). A modelação é descrita, usualmente, através de um esquema: o ciclo de modelação. Neste estudo, a opção recai sobre o ciclo de modelação de Borromeo Ferri (2006). Esta opção é devida ao facto desta autora dar extrema importância à realidade, conhecimento extra matemático e envolvência dos alunos na recolha de dados, aspetos especialmente relevantes no tema da Estatística. Segundo Borromeo Ferri (2006), a primeira fase do ciclo de modelação começa com a compreensão da situação a estudar. Pode-se tornar acessível através de uma representação visual, por exemplo, como uma foto que em alguns casos poderá corresponder ao registo da situação real vivida de modo a captar a atenção do aluno e a possibilitar a conexão imediata com o mundo real. A segunda fase passa pela representação mental da situação. Os alunos têm que compreender a tarefa e o que têm de fazer com ela, mas eles próprios criam as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados, tendo em conta o conhecimento extra matemático que possuem. Eles começam a simplificar e a estruturar a tarefa e constroem o chamado *modelo real*, correspondendo ao terceiro passo do ciclo. Posteriormente, os alunos irão trabalhar no domínio estrito da matemática. Ao obterem resultados, os alunos terão que interpretá-los e a seguir validar o modelo, que consiste na comparação entre a matemática e a realidade.

O programa para o ensino profissional recomenda a implementação de tarefas de modelação matemática. Uma das razões apontada por alguns autores é de cariz social: "preparação dos alunos para uma melhor inserção na sociedade" (Matos & Carreira, 1994, p. 11). Nesta perspetiva, que em certos aspetos coincide com o NCTM (2007), o cidadão deverá ter a capacidade de criticar modelos e processos matemáticos, de desmontar exemplos de matemática aplicados a fenómenos reais e de questionar o uso de modelos matemáticos na sociedade na qual está envolvido (Carreira, 1995).

Quando o professor pretende conduzir tarefas de modelação com os seus alunos, precisa de ter em conta critérios na elaboração/criação dessas tarefas. Primeiramente, na criação de uma tarefa de modelação há que cuidar do contexto (Matos & Carreira, 1994), o partir de situações reais e significativas para o aluno. Lesh & Yoon (2007) definem tarefas geradoras de modelos matemáticos (*modeliciting activities*) como resolução de problemas dos quais se extraem modelos matemáticos, mas que requerem dos alunos a explicitação dos seus raciocínios de modo a testá-los e refiná-los várias vezes, se necessário. As soluções e conclusões finais da atividade matemática baseada em tarefas geradoras de modelos matemáticos envolvem, obviamente, o modelo matemático criado e, também, todo o processo desenvolvido e inerente à sua construção, que inclui os sistemas de conceitos que esse modelo possa envolver. Kaiser & Maaβ (2007), referem que a resolução de problemas de modelação matemática promove um maior enriquecimento da educação matemática porque toda a atividade matemática dos alunos, decorrente destes problemas, é diversificada e por isso mais rica, no sentido em que se relacionam e interagem na sala de aula com uma diversidade de conhecimentos, não só matemáticos, como também sociais, ou baseados nas vivências dos alunos. A decisão quanto ao grau de estruturação da tarefa de modelação cabe ao professor e deve ter em conta os objetivos dessa tarefa, o contexto, os alunos em questão, os conteúdos matemáticos e o ciclo de modelação.

Como já foi referido é crucial o contexto, pois é importante que os alunos reconheçam nele algo motivador e útil. Deste modo, as conexões com a realidade, a modelação matemática e o tema Estatística constituem um bom motivo para levar à criação de tarefas motivadoras e ricas conduzindo os alunos a estabelecer relações com a realidade e perceberem a utilidade, neste caso, da Estatística.

Metodologia

O estudo apresentado neste artigo faz parte de uma investigação mais alargada, que visa compreender o conhecimento estatístico e não estatístico para ensinar que os professores de Matemática mobilizam, em contexto de trabalho colaborativo, na gestão curricular do programa de Matemática dos cursos profissionais. Pretende-se compreender esse conhecimento através da realização de tarefas de modelação, no tema da Estatística. Trata-se de um estudo qualitativo, de natureza interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 2006), seguindo um *design* de estudo de caso (Merriam, 1988; Yin, 2003). Neste texto apresentamos o caso referente à professora Sara, uma das professoras envolvidas no trabalho colaborativo, focando os resultados preliminares relativos à construção e exploração das tarefas.

Sara tem cerca de 30 anos, é licenciada em Matemática – Ramo de Formação Educacional e tem uma pós graduação em ensino da Matemática. A sua relação com a modelação matemática é praticamente inexistente e sobre o ensino da Estatística, refere em entrevistas, que basicamente seguiu os manuais, nunca tendo aprofundado alguns conceitos. Nas entrevistas que antecederam o trabalho de criação e preparação da exploração das tarefas de modelação sobre as distribuições bidimensionais menciona que nunca antes se preocupou em adaptar as tarefas de sala de aula ao curso em lecionação.

A turma de Sara em que pôs em prática as tarefas é constituída por 24 alunos, sendo muitos deles oriundos de turmas CEF. Uns inscreveram-se neste curso devido à falta de aproveitamento escolar no ensino secundário regular e outros porque gostam de desporto. Trata-se de uma turma de 10.º ano do curso profissional Técnico de Apoio à Gestão Desportiva.

Sara optou por lecionar todo o módulo de Estatística com recurso a tarefas de modelação e organizou os alunos em grupos de quatro elementos, segundo as motivações e afinidades, mantendo-os assim agrupados ao longo da lecionação deste módulo.

O trabalho colaborativo com o grupo das professoras a que Sara pertencia realizou-se essencialmente no ano letivo 2011/2012. Neste trabalho, conduzido pela investigadora também professora na mesma escola (primeira autora deste texto), procurou-se criar um clima onde houve lugar à partilha, discussão e elaboração de tarefas de modelação matemática para implementar em sala de aula, assim como à reflexão sobre episódios decorrentes da prática da sua implementação, com o objetivo de criar condições para uma maior compreensão sobre o conhecimento estatístico e não estatístico das professoras. A criação e seleção das tarefas foram da responsabilidade da equipa de trabalho colaborativo e a adaptação aos alunos de cada turma foi da responsabilidade de cada professora, tendo sido alvo de discussão e reflexão em sessões de trabalho colaborativo e reflexão individual (entrevista pós aula).

A recolha de dados recorreu a diversas técnicas: observação participante de aulas da professora e sessões de trabalho colaborativo; entrevistas iniciais (caracterização da professora; compreender como interpreta o programa, como prepara e planifica as aulas: o que entende por modelação matemática; e que evidências do conhecimento da Estatística manifesta), finais (compreender evolução do conhecimento estatístico e entendimento do que é modelação matemática e tarefas de modelação), pré aula (compreender de que forma a professora planificou e estruturou a aula e o que teve em conta para a criação da tarefa) e pós aula (recolher de forma imediata uma reflexão sobre o sucedido na aula, reajustes da tarefa e se esta passou por todas as fases de modelação); e materiais produzido pela professora.

A análise de dados aqui reportada foi feita a partir de uma tarefa de modelação da professora Sara. Apresentam-se excertos da estrutura da tarefa e da entrevista que antecedeu a aula em que a professora revela como surgiu e foi pensada a tarefa, que *design* se adotou, e como foi planificada. Esta tarefa foi escolhida pela riqueza do trabalho que proporcionou e que permite uma análise bastante completa.

O trabalho colaborativo

Para melhor compreensão de como Sara criou esta tarefa, é importante fazer uma breve descrição do trabalho realizado colaborativamente com vista à construção das tarefas a propor aos alunos.

Situação de partida

A ideia que deu origem às tarefas de modelação emergiu de um objetivo e preocupação comum a todas as professoras participantes: proporem um tema comum aos três cursos profissionais e que fosse do interesse dos alunos. Esta ideia levou a um debate durante algumas sessões de trabalho colaborativo uma vez que pretendiam encontrar uma situação real que envolvesse gestão desportiva, infância e alimentação: temas relacionados com a área profissional dos três cursos. Foi acordado que as professoras pensassem em temas, falassem com as turmas, com os colegas das disciplinas técnicas e numa próxima reunião de trabalho colaborativo trouxessem ideias. As professoras acharam importante analisar as saídas profissionais dos três cursos. Assim conseguiram mais facilmente pensar em algo que envolvesse os três cursos e fosse ao encontro das motivações dos alunos. Numa sessão, Sara, propôs um contexto relacionado com a promoção para a saúde e assim transversal a todos os cursos. Como um dos cursos profissionais envolvido era Técnico de apoio à infância, não foi difícil pensarem na amostra que iriam escolher: crianças do pré-escolar no agrupamento de escolas onde todas lecionavam. Sara, ao pensar nesta ideia, sugeriu uma forma de realizarem no mesmo dia ou dias um conjunto de atividades que envolvesse os cursos e de concretizarem esta ideia. Surgiu a ideia de conhecer, em primeiro lugar, melhor a amostra (elaboração de um inquérito). As professoras perceberam que a criação das tarefas seria facilitada após esta recolha, pois só aí iriam perceber que variáveis poderiam surgir e que relações emergiriam. Nesta sessão de trabalho foi lançado o desafio de pensarem na estrutura de uma primeira tarefa de modelação, tendo em conta a previsão do que poderia surgir a partir da recolha de dados e dos contextos reais acordados.

Resultados preliminares

Nesta secção serão apresentados alguns resultados inerentes a uma tarefa de modelação realizada por Sara. Optou-se, neste texto, por apresentarmos a segunda tarefa de modelação implementada em sala de aula, porque surgiram várias relações entre pares de variáveis que levaram ao estudo do sinal de correlação linear dos vários modelos matemáticos construídos. Para além disso, esta tarefa adequou-se ao ciclo de modelação de Borromeo Ferri (2006), permitindo compreender o que envolveu a sua criação e exploração de todas as fases do ciclo de modelação.

Tarefa - "Os magricelas rápidos e saltitantes ou …talvez não!*"*

Ideias base para a construção da tarefa: Os alunos de Sara, do curso profissional de gestão desportiva, por sugestão desta, em aulas que antecederam a observação de aulas, propuseram um conjunto de questões relacionadas com características das crianças escolhidas para amostra do estudo que queriam analisar e a organização de uma gincana. Estes alunos, tendo como objetivo a organização de um evento desportivo destinado a crianças dos 4 aos 6 anos, tinham interesse em conhecer previamente as características físicas e hábitos desportivos destas crianças. A partir daí, foi construído um inquérito destinado aos encarregados de educação, que visava a recolha dessa informação. A ideia para a criação da tarefa "Os magricelas rápidos e saltitantes ou …talvez não!*"* surgiu a partir da análise, em sala de aula, das respostas dos inquéritos e da recolha de dados oriunda da gincana organizada com as crianças do pré- escolar. O ciclo de modelação de Borromeo Ferri (2006), sugere que se comece com uma representação visual da situação da realidade, de modo que o aluno consiga de imediato e com o conhecimento extra matemático que possui estabelecer uma conexão com a realidade. Nesta fase, em que Sara envolveu os seus alunos, na recolha de dados (gincana), foi possível a observação direta da realidade, o que levou à primeira fase do ciclo de modelação. À medida que os jogos da gincana foram decorrendo, os alunos iam mobilizando o seu conhecimento extra matemático (conhecimento relacionado com outras áreas do saber e do senso comum) e foram estabelecendo relações e suposições sobre a adequabilidade dos jogos às crianças, sobre as suas características físicas e competências físicas para a concretização desses jogos. Eles próprios criaram as suas próprias associações no que respeita aos elementos da realidade apresentados, tendo em conta o conhecimento extra matemático que possuíam, levando à representação mental da situação e segunda fase de modelação. As associações que surgiram e que deram origem à criação da tarefa e à exploração a nível estatístico são referidas a seguir.

<u>A construção da tarefa:</u> Sara introduziu imagens e usou diálogos que tinha ouvido entre alunos, no dia em que recolheram os dados, de modo a mobilizar de imediato a atenção dos alunos:

> *Num agrupamento de escolas algarvio, durante uma aula de matemática em que se estudaram distribuições bidimensionais, surgiram várias ideias por parte dos alunos do curso profissional técnico de gestão desportiva:*
>
> *Lucas disse: "Acho que o tamanho do pé está relacionado com a altura!"*
>
> 
>
> *A Giovanna, por seu lado, pensou "O peso provavelmente influencia a corrida… acho que os mais pesados devem demorar mais tempo!"*
>
> *O Joel ficou a pensar "O peso pode influenciar o número de saltos dado pelos alunos… os mais leves talvez saltem mais vezes…"*

Tendo em conta, que os alunos teriam de construir o modelo real e matemático, Sara estruturou a tarefa no sentido de levar os alunos não só a passar por essas fases do ciclo de modelação como também fazer o estudo que pretendia. Para isso, construiu previamente as tabelas que relacionavam os pares de variáveis e chegou aos três pares de variáveis acima referidas. Sara pretendeu deste modo, compreender se era possível a construção do modelo real (tabelas que relacionam os pares e variáveis e diagramas de dispersão) e se os alunos de forma ainda inconsciente e natural conseguirem chegar a esse modelo. Neste sentido, colocou questões na tarefa que conduziam os alunos à construção dos vários modelos reais, estruturando a tarefa no sentido de passar pela terceira fase do ciclo de modelação:

"1. Crie três tabelas distintas, uma para cada situação (por exemplo):

Número de identificação da criança	Peso (Kg)	Tempo do 2º sprint
1		
2		
3		
…		

2. Represente os diagramas de dispersão, com recurso ao *Excel*."

A Sara percebeu que com estes três pares de variáveis conseguiria levar os alunos a chegarem por eles ao estudo e interpretação, em contexto real, da intensidade do sinal de correlação linear. O objetivo da Sara foi levar os alunos a trabalharem matematicamente e assim chegar à construção do modelo matemático (quarta fase do ciclo de modelação). Na entrevista pré aula, Sara menciona que fez a construção da tabela inerente aos três pares de variáveis em estudo e foi verificar, com recurso ao *Excel* se conseguia ou não chegar a um modelo de regressão linear (modelo matemático) onde surgisse uma correlação com sinal positivo, negativo e outra nula. Caso isso se verificasse poderia avançar para a construção da tarefa:

> Construí uma tabela no *Excel* para cada par de variáveis que tinha ouvido das conversas dos miúdos. Eu queria chegar ao estudo da intensidade do sinal de correlação linear e fui testando. Construi vários diagramas de dispersão e umas davam outras nem tanto …as que se aproximavam mais do modelo linear foram as que referi e uma delas aparecia muito disperso…. não digo já qual é para ser surpresa para ti! Achei interessante e construi a tarefa nesse sentido. (EPATM2VB, 14/06/12)

Ao colocar questões específicas, Sara pretendeu que os alunos construíssem o modelo matemático e conduziu-os nesse sentido, estruturando bastante as questões de modo a cumprir esse objetivo:

> "3. Consideremos o modelo de regressão linear para os vários pares de variáveis. Indique a equação da função obtida e determine o coeficiente de correlação. Represente a reta sobre o diagrama de dispersão, em cada situação.

	Função escolhida	Coeficiente de correlação (r)
Nº sapato e altura		
Peso e tempo		
Peso e saltos		

> 4. Por observação direta do diagrama e tendo em conta os coeficientes de correlação encontrados, como considera a possível correlação? Existe ou não? Será positiva ou negativa? Forte ou fraca?

A fase de testagem e interpretação de resultados foi pensada no sentido de colocar questões que levasse os alunos a trabalhar matematicamente e utilizassem conhecimentos matemáticos (quinta fase do ciclo de modelação matemática). As questões colocadas por Sara levaram à testagem e previsão de resultados a partir dos modelos de regressão linear obtidos:

> "5. Teste os modelos encontrado, fazendo estimativas.
>
> a) Qual o número de sapato previsto para um aluno com 1,34cm?
>
> b) Quanto tempo se prevê que demore na atividade "Sprints- O + rápido" um aluno com 23kg?
>
> c) Pode estimar-se o número de saltos previsto por um aluno com 23kg? Explique porquê."

Na última questão, Sara apela à comparação dos resultados obtidos com os diálogos presentes no início da tarefa. Sara tem como objetivo principal que os alunos reflitam sobre a validade dos modelos e apresentem justificações que confirmem ou não as conjeturas iniciais (última fase do ciclo de modelação):

> "6. Existirá fundamento nas ideias do Lucas, da Giovanna e do Joel? Observe atentamente os dados recolhidos, resultados matemáticos obtidos a partir dos modelos e intensidade do sinal de correlação e dê a sua opinião."

Preparação da exploração da tarefa: Sara ao planificar a tarefa preparou-a para a implementar em uma única aula de 90 minutos e sequenciou-a da seguinte forma: Leitura da tarefa: 10 minutos; questão 1: 10 minutos; questão 2: 10 minutos; questão 3: 10 minutos; questão 4: 10 minutos; questão 5: 20 minutos; questão 6: 15 minutos. A Sara não apresentou na sua planificação tempo para discussão da tarefa. Quanto aos recursos que Sara teve necessidade de usar para a criação da tarefa, ela refere-se à grelha com dados recolhidos e *Excel*. A estrutura e ordem das questões da tarefa foram acordadas em colaboração com as colegas, mas adaptadas a este curso e obedecendo a um fio condutor que levasse os alunos a passarem pelas várias fases do ciclo de modelação.

Conclusões

Dos resultados preliminares, relativamente ao *design* da tarefa pode afirmar-se que Sara conseguiu conciliar mais do que um propósito: a tarefa de modelação contemplou as várias fases do ciclo de modelação (Borromeo Ferri, 2006), esteve relacionada com a área profissional dos alunos e que levou ao surgimento de conteúdos estatísticos. Assim Sara demonstrou capacidade em adequar tarefa e em planificar aulas de modelação.

A professora aproveitou o que os alunos conheciam do contexto profissional do seu curso e pensou em preparar uma tarefa que a possibilitasse ensinar conceitos inerentes às distribuições bidimensionais, considerando assim as tarefas como ponto de partida da abordagem aos conceitos (Canavarro & Santos, 2012), explorando em simultâneo o ciclo de modelação. A primeira parte da tarefa, com a introdução da foto e diálogos, levou os alunos a reconhecerem a situação real, o que possibilitou a conexão imediata com a realidade (primeira fase do ciclo de modelação). Esta parte da tarefa teve como objetivo lembrar os alunos que estiveram envolvidos na recolha de dados, aumentando não só a sua curiosidade como vontade em resolver a tarefa. A segunda fase do ciclo de modelação surgiu quando os alunos criaram as suas próprias associações (conjeturas), no dia da gincana, no que respeita aos elementos da realidade apresentados, tendo em conta o conhecimento extra matemático que possuíam, levando à representação mental da situação (Ferri, 2006). Sara pensou em colocar questões (1 e 2) para fazer emergir a terceira fase do ciclo de modelação: construção do modelo real. Nesta tarefa, os modelos reais foram as tabelas que relacionam os pares de variáveis e os diagramas de dispersão. A questão 3, visava a construção dos três modelos de regressão linear e também o cálculo do coeficiente de correlação. Na construção desta questão, a professora teve em consideração a quarta fase do ciclo de modelação. A quarta questão, teve por objetivo levar à compreensão da regressão e correlação, conhecimento básico sobre funções e, acima de tudo, a consideração da variação à volta de uma possível tendência (Engel & Sedlmeier, 2011). A quinta questão exemplifica que a Sara, ao pensar na estrutura da tarefa, teve em conta, na sua elaboração, o objetivo de levar os alunos a mobilizar o conhecimento que tinham sobre a situação real e desta forma criticarem os resultados que iam obtendo. Esta possível comparação entre os resultados matemáticos obtidos e a realidade deveu-se à forma como a questão foi elaborada e pensada tendo em conta a quinta fase do ciclo de modelação (Borromeo Ferri, 2006).

Neste contexto, foi notório que a Estatística desempenhou um papel importante porque à medida que a interpretação de dados se foi tornando cada vez mais relevante em decisões relacionadas com a futura profissão destes alunos, estes revelaram-se mais versados na utilização de ferramentas quantitativas. A Estatística assumiu deste modo um papel preponderante nessa preparação porque proporcionou ferramentas metodológicas gerais para analisar a variabilidade (Gal & Garfield, 1997), para determinar relações entre variáveis, e tomar decisões em situações de incerteza (Batanero & Diaz, 2004). Por último, a questão 6, teve por objetivo levar à reflexão. Uma vez, conhecida a situação real os alunos conseguiram interpretar de forma mais válida e consciente os resultados estatísticos a que chegaram, validando ou refutando o modelo matemático construído (última fase do ciclo de modelação de Borromeo Ferri, 2006). Esta tarefa geradora de modelos matemáticos, requereu dos alunos a explicitação dos seus raciocínios (Lesh & Yoon, 2007). Para além disso, Sara conseguiu promover uma atividade matemática rica e diversificada, no sentido em que se relacionou e interagiu em sala de aula com uma diversidade de conhecimentos, não só matemáticos, como sociais e baseados nas vivências dos alunos (Kaiser & Maaβ, 2007).

Sara demonstrou estar sensível à curiosidade e motivação dos seus alunos e aproveitou o que eles conheciam do senso comum para explorar e ensinar conteúdos estatísticos que de outra forma provavelmente não teriam o mesmo grau de envolvência e aprofundamento. Este tipo de tarefas e a forma como foram exploradas com os alunos influenciou o seu pensamento e a forma como aprenderam e estabelecem conexões (Stein & Smith, 1998). Este tipo de trabalho levou a professora a compreender que a criação de tarefas motivadoras e contextualizadas é não só uma mais-valia no que diz respeito às aprendizagens dos alunos, mas também a coloca, enquanto professora, num papel mais ativo, assumindo um papel investigativo, criativo e reflexivo na prática e sobre a prática.

Referências bibliográficas

Batanero, C., & Diaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. In J. Patrício Rojo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125- 164). Zaragoza: Instituto de Ciencias de la Educación.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Carreira, S. P. (1995). A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação Matemática – Realidade. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e

M. Santos (Orgs.), *Matemática e Realidade: Que papel na educação e no currículo?* (pp. 25-70). Lisboa: SPCE.

De Lange, J. (2001). Mathematics for literacy. In NRC, *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 52-80). Washington, D.C.: National Academy of Sciences.

Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations on phases in the modeling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38(2),* 86-95.

Gal, I., & Garfield, J. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.

Griffiths, H. B., & Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and curricula*. London: Cambridge University Press.

Engel, J., & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.). *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 247-258). New York: Springer.

Estepa, A., & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatterplots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 24-41.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom - problems and opportunities. In W. Blum, Galbraith PL., H & Henn M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (pp. 99 – 108). New York: Springer.

Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is distinctive in (our views about) models & modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching?. In (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education.* (pp. 161 – 170). New York: Springer.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching Practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mugabe, D. A., Fernandes, J. A., Correia, P. F. (2012). Avaliação da associação Estatística num diagrama de dispersão por estudantes universitários. In H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 403-414). Coimbra: APM.

Matos, J. F., & Carreira, S. (1994). *Modelação e aplicações no ensino da Matemática: Situações e problemas.* Projecto MEM. DEFCUL.

Ministério da Educação (2004). *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática PISA 2003*. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional.

ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Profissional de nível Secundário. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Niss, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, *23*, 1-2.

Ponte, J. P. (2002). Literacia matemática. In M. N. Trindade (Org.), *Actas do Encontro Internacional Literacia e cidadania: Convergências e interfaces* (em CD-ROM). Universidade de Évora: Centro de Investigação em Educação Paulo Freire.

Ponte, J. P. (2005). A gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*.(pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Rosen, L.P., Weil, L., & Zastrow, C. (2003). Quantitative Literacy in the Workplace: Making It a Reality [Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C. on December 1-2, 2001 Part I: Background Papers]. MAA Online. Retrieved November 11, 2006, from The Mathematical Association of America: http://maa.org/Ql/pgs43_52.pdf; http://www.maa.org/QL/qltoc.html

Steen, L. (2002). *A problemática da literacia quantitativa. Educação e Matemática*, *69*, 79-88.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods* (Third Ed.). Newbury Park: Sage.

Grupo de Discussão 2

As tarefas e a aprendizagem dos alunos

AS TAREFAS E A APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

António Borralho
Centro de Investigação em Educação e Psicologia, Universidade de Évora
amab@uevora.pt

O uso do termo "tarefa" tem marcado presença no vocabulário da comunidade de educação matemática, a nível internacional e nacional, já por algumas décadas, correspondendo ao reconhecimento do papel central que as mesmas desempenham na atividade do aluno e do professor na aula de Matemática. A seleção de tarefas significativas para a aprendizagem matemática tem merecido uma atenção especial por parte da comunidade de investigação, sendo visível no nosso país um desenvolvimento importante no número de estudos que se desenrolam a partir da realização de unidades de ensino ou sob a forma de experiências de ensino, no contexto dos quais as tarefas assumem um papel estruturante relativamente à atividade matemática que é esperada ocorrer na sala de aula.

De facto, as tarefas podem proporcionar ao aluno a exploração de conceitos e estratégias matemáticos e contribuir para o desenvolvimento do seu pensamento matemático, constituindo-se como ferramentas mediacionais para o ensino e aprendizagem da matemática (Watson *et al.*, 2013). As características das tarefas que melhor podem contribuir para a aprendizagem matemática dos alunos enquadram-se num campo muito vasto de estudo, salientando-se na sua discussão, entre outros, a tipologia das mesmas e os contextos que as integram.

Relativamente à tipologia das tarefas (por exemplo, problemas, exercícios, investigações ou projetos), na sua relação com aprendizagem, importa compreender os objetivos perseguidos quando estas são introduzidas. Diferentes tipos de tarefas matemáticas podem contribuir para o desenvolvimento de capacidades fundamentais nos alunos, tais como o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação matemática, conteúdos de aprendizagem, enquanto capacidades transversais, do anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2007). A escolha de uma tarefa, tendo em conta a sua tipologia, também se relaciona com a intenção e relevância atribuída pelo professor a aspetos tais como a diversidade de estratégias ou de representações usadas pelos alunos ou aos processos matemáticos, por exemplo, a argumentação, que se pretendem promover,

Associada à tipologia das tarefas surge, muitas vezes, a ideia do maior ou menor desafio que elas suscitam nos alunos e como isso afeta a possibilidade de envolvimento na atividade matemática esperada. Hodge *et al*. (2007) destacam a importância de considerar o interesse do aluno na tarefa, que designam por *pragmático*, que o levem a ter um interesse em desenvolver o problema/situação matemática ali proposto. Os autores, seguindo Dewey, assumem uma perspetiva de desenvolvimento que enfatiza a natureza profundamente cultural dos interesses dos alunos. No seu estudo tornam evidente como a tentativa de cultivar o interesse matemático dos alunos (no caso no domínio da estatística) ancorou-se fortemente na atenção inicial dada aos seus interesses pragmáticos e na promoção da sua participação em práticas consistentes com as dos profissionais da área. No entanto, salientam que podem surgir tensões ao procurar-se articular os interesses pragmáticos e os interesses ligados ao conteúdo matemático, o que exige considerar que características as tarefas devem possuir para apoiar os interesses dos alunos na aprendizagem da matemática, ao longo do tempo.

No que diz respeito ao contexto das tarefas, em particular nos níveis mais elementares, existem diversos elementos que devem ser considerados na sua seleção ou elaboração, como por exemplo: permitir o uso de modelos; fazer "sentido" para os alunos e; suscitar surpresa e questionamento (Fosnot & Dolk, 2001). Os contextos das tarefas, nomeadamente as situações que enquadram os problemas matemáticos, podem constituir um importante suporte ao raciocínio dos alunos e à orquestração de discussão de ideias matemáticas contribuindo para a aprendizagem matemática (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

A inclusão de contextos não matemáticos nas tarefas a propor aos alunos tem uma longa tradição nos chamados "problemas de palavras" que nas últimas décadas alguns investigadores têm criticado por se tratarem de "pseudo-realísticos", dado não representarem situações da realidade e não incentivarem o uso ao conhecimento comum dos alunos ou a avaliação de resultados em função do que seria razoável na situação real (Palmer, 2009). Ainda assim, há autores que defendem que essas situações cumprem um papel importante dado fornecerem as imagens mentais necessárias para construir e discutir conceitos abstratos, como refere Gerofsky (2009). Este autor recorda que o conceito de "realístico" para as situações a propor aos alunos está presente no movimento RME (*Realistic Mathematics Education*), adotando as perspetivas de Hans Freudenthal, configurando-se como algo que é imaginável, para o qual é possível criar uma imagem mental. Deste modo, considera que os alunos estão conscientes que tais problemas não são transparentes e não têm como intenção elucidar a utilidade da matemática na vida quotidiana.

Para além das características das tarefas individualmente, importa considerar as sequências de tarefas que são propostas aos alunos, considerando que a aprendizagem é um processo que se desenvolve ao longo do tempo. Na construção de tais sequências de tarefas, Watson *et al*. (2013) referem-se a três tipos diferentes: i) o problema mantem-se de tarefa para tarefa mas vai-se aumentando a complexidade das tarefas, por exemplo, através do tipo de números que vão sendo introduzidos; ii) o problema vai tornando-se mais complexo, por exemplo, pela adição de mais passos ou variáveis, e iii) o conceito envolvido na tarefa vai sendo ele próprio mais complexo. Este é um trabalho exigente ao nível da planificação mas que permite estabelecer um percurso coerente de aprendizagem, levando em conta as características dos alunos.

No entanto, ao considerar a relação entre tarefas e sequências de tarefas e a aprendizagem, há também que atender à cultura de sala de aula em que estas são exploradas e o papel assumido pelo professor, ou seja, segundo Gravemeijer e Cobb (2013) considerar a ecologia da aprendizagem. A perspetiva destes autores vem ao encontro do que muitos estudos têm vindo a revelar: a qualidade das aprendizagens dos alunos não depende apenas do cuidado colocado na seleção ou construção das tarefas mas da natureza do discurso e das normas de sala de aula que se estabelecem ao longo do tempo. Esta perspetiva coloca desafios aos investigadores, dado que a análise das aprendizagens a partir da atividade do aluno não se confina, assim, à resolução escrita do aluno, havendo um espaço coletivo de produção de conhecimento, através das interações entre alunos e entre professor e aluno.

As oito comunicações que integram o grupo de discussão "As tarefas e a aprendizagem do aluno" incidem sobre uma variedade de problemáticas que nos permitem discutir aspetos bastante relevantes no âmbito deste tema.

A primeira comunicação, de autoria de Ana Henriques e Hélia Oliveira (*Raciocínio inferencial informal de alunos do 8.º ano no contexto de uma investigação estatística usando o TinkerPlots*), centra-se num estudo que parte do desafio de selecionar tarefas que apoiem os alunos nos processos de inferência informal e que permitam trabalhar os conteúdos programáticos relativos à Estatística, dado essa componente do raciocínio estatístico não ser contemplada no programa de matemática do ensino básico, no nosso país. O texto incide sobre uma investigação estatística realizada por uma turma do 8.º ano, usando o *software TinkerPlots*, e evidencia como a natureza das questões colocadas aos alunos influenciou fortemente a sua atividade. Por exemplo, numa fase inicial os alunos não realizaram processos inferenciais mas tendiam a fazer descrições dos dados obtidos, uma vez que foram eles próprios a recolhê-los. No entanto, esta atividade terá contribuído para os alunos verem os dados como agregado e obterem evidências a partir dos dados para produzirem generalizações, uma vez que estavam familiarizados com o contexto e este correspondeu ao seu interesse pragmático (Hodge *et al*., 2007). As autoras realçam, ainda, o papel mediador significativo do recurso tecnológico usado pelos alunos, em sintonia com as características da tarefa proposta.

A comunicação de autoria de Isabel Velez e João Pedro da Ponte (*Promover a compreensão de representações no 3.º ano*) incide sobre um estudo que procura compreender a prática de uma professora na exploração de uma tarefa em sala de aula com vista à promoção da aprendizagem das representações. Em consonância com este objetivo, a tarefa realizada pelos alunos – um problema de palavras – permitia que os alunos usassem uma variedade de representações. Os autores salientam como resultado que, mais do que a escolha de uma ou outra representação, o sucesso dos alunos depende da capacidade de usarem de forma sistemática uma certa representação. No entanto, a professora teve um papel importante ao incentivar alguns alunos a recorrer a representações escritas para resolver o problema, uma vez que aparentemente se centravam no que era pedido na pergunta – “quantos” – e tendiam a dar apenas uma resposta numérica. Salienta-se também que a partir das resoluções dos alunos, a professora procurou estabelecer conexões entre as várias representações a que recorreram de modo a chegar à simbólica. A escolha do contexto do problema, muito próxima dos alunos, e dos números envolvidos, terá contribuído para a emergência das representações mas verifica-se, também, o importante papel da professora em diversos momentos da aula de forma a atingir os objetivos definidos.

O texto de autoria de Joana Silva e Ema Mamede (*Explorando tarefas de padrões no 2.º ano do ensino básico*) apresenta uma análise de alunos, do 2.º ano de escolaridade, envolvidos em tarefas sobre padrões de repetição e crescimento em sala de aula. As autoras discutem a importância do conhecimento da tarefa (matemática envolvida na tarefa) e do conhecimento pedagógico da tarefa (conhecimento matemático envolvido e conhecimento matemático dos alunos). As tarefas propostas foram exploradas de acordo com o modelo tetraédrico de Rezat e Strasser (2012) enfatizando a relação entre o aluno, a tarefa e a matemática, embora o papel do professor no processo também seja relevante. Os resultados fornecem indicadores interessantes sobre a natureza das tarefas (sobre padrões), o papel dos alunos e a matemática envolvida (álgebra/pensamento algébrico) em relação à comunicação matemática, ao raciocínio matemático e à resolução de problemas. A relação tarefa-aluno-matemática do modelo tetraédrico constituiu uma oportunidade dos alunos desenvolverem: i) a comunicação oral porque foram incentivados a descrever, por palavras suas e pormenorizadamente, as resoluções de cada problema; ii) o raciocínio matemático porque justificavam as resoluções de forma simples e elementar e, progressivamente, argumentavam de forma mais complexa e completa, com recurso a linguagem matemática mais elaborada e; iii) a resolução de problemas porque foi discutido e aceite, em sala de aula, várias resoluções da mesma tarefa o que contrariou a ideia dos alunos que os problemas apenas tinham um processo de resolução.

O trabalho de António Domingos (*A aprendizagem da matemática através de tarefas baseadas em recursos tecnológicos*), assente na Teoria da Atividade, analisou de que forma um conjunto de tarefas de cariz tecnológico, enquanto artefactos mediadores, promove a aprendizagem dos alunos. Em particular, pretendeu compreender o papel desempenhado pelas tarefas que, apresentadas em formato eletrónico formando sequências de aprendizagem, simulam em grande parte a organização dos conteúdos apresentados no manual escolar. Sendo essas tarefas retiradas dos manuais escolares e dos materiais eletrónicos que lhe estavam associados, portanto inerentes ao currículo apresentado aos professores, tentou explicitar a forma como o currículo modelado e o currículo em ação se transformam em ferramentas de aprendizagem. A partir da observação e gravação das ações dos alunos na resolução das tarefas propostas pela ferramenta foi caraterizada a aprendizagem realizada, considerando que esta é mediada pela sequência das tarefas apresentada pelo recurso em uso. Procurou, ainda, caracterizar o papel desempenhado pelo professor ao intervir nas sequências de aprendizagem que são apresentadas nesses materiais. As tarefas revelaram-se bons mediadores da aprendizagem, verificando-se um desenvolvimento significativo do pensamento proceptual (combinação de pensamento processual e conceptual) dos alunos. Quando as tarefas em estudo envolviam uma linguagem mais formal ou uma tradução simbólica dos conceitos, os alunos manifestaram grandes dificuldades na sua compreensão e manipulação, solicitando a mediação do professor. Também se verificou que a relação entre o currículo apresentado, na sequência de tarefas definida pela ferramenta, e o currículo em ação através da implementação dessas mesmas tarefas foi importante para a intervenção do professor na definição do currículo modelado, nomeadamente através de uma abordagem baseada na produção de documentos de apoio à intervenção do aluno.

O texto de autoria de Célia Mestre e Hélia Oliveira (*As tarefas e a mobilização da capacidade de generalização: um estudo com alunos do 4.º ano*) investiga a relação entre as características das tarefas propostas, e o nível de pensamento relacional e a capacidade de generalização evidenciados por alunos. As tarefas surgem no âmbito de uma experiência de ensino realizada numa turma do 4.º ano, adotando uma perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um fio condutor curricular, numa lógica de integração curricular e caracterizam-se pela sua diversidade. As tarefas foram agrupadas em sequências segundo as ideias algébricas a explorar, apresentando quer contextos de modelação, no sentido de serem realísticas para os alunos (Gerofsky, 2009), quer contextos puramente matemáticos, embora suportados em representações familiares aos alunos. A análise do desempenho dos alunos revela um aparente retrocesso em determinada sequência de tarefas, o que leva as autoras a analisar as características particulares das tarefas que o poderão justificar. Verifica-se que as tarefas que apresentavam mais do que um caso particular ou um contexto de modelação facilitador da compreensão das relações numéricas promoveram nos alunos um maior reconhecimento dessas relações e uma maior capacidade de expressão da generalização. Estes resultados relevam a importância da escolha das tarefas e da sua sequenciação, assim como a necessidade de atender às suas características quando se analisam as aprendizagens ocorridas.

O estudo apresentado por Ana Caseiro, João Pedro da Ponte e Cecília Monteiro (*Investigações no ensino de conceitos e representações estatísticas no 1.º ciclo*) centra-se sobre as potencialidades e dificuldades decorrentes da implementação de um tipo de tarefas matemática (as investigações estatísticas) com o objetivo de promover a aprendizagem de conceitos e representações estatísticas no 1.º ciclo do ensino básico. A tarefa proposta trata-se, neste caso, de uma investigação estatística que é desenvolvida ao longo de diversas aulas e que tem um carácter aberto na medida em que são os alunos que formulam as questões que pretendem vir a investigar, denotando a preocupação das professoras em fazer desenrolar a atividade a partir de temas que sejam do interesse dos alunos. Esta opção, no entanto, evidencia a tensão referida por Hodge *et al*. (2007), na medida em que a oportunidade que é dada aos alunos para investigarem temas do seu interesse dificulta a definição de um problema a ser investigado e o desenvolvimento de um planeamento adequado, ou seja, não se torna fácil compatibilizar os interesses pragmáticos com os interesses relacionados com as aprendizagens pretendidas, como é referido por estes mesmos autores.

A comunicação de autoria de Cristina Loureiro e Lurdes Serrazina (*Estruturação espacial e geométrica - contributos para a sua construção em coletiva*) discute os contributos da fase de discussão coletiva de grande grupo para o desenvolvimento de sequências de tarefas matemáticas com o objetivo de construir percursos didáticos. A análise da atividade resultante das tarefas propostas evidencia, segundo as autoras, ser possível introduzir tarefas significativas e exigentes do ponto de vista da estruturação geométrica, integradas em percursos didáticos, com alunos dos níveis elementares. Os resultados apontam no sentido de que a conceção de novas tarefas e a tomada de decisões sobre a sequência a imprimir aos percursos são fortemente informados pelos momentos de discussão coletiva com a turma. Na construção de percursos didáticos salientam-se dilemas relativos à escolha das tarefas e aos elos a estabelecer entre elas e evidenciam uma preocupação compatível com uma perspetiva de ecologia de aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2013).

Finalmente, o texto de autoria de Rosário Monteiro e Leonor Santos (*A resolução de problemas no âmbito de uma competição inclusiva e a eficácia do feedback: o caso de Maria*) relata-nos um estudo sobre a relação entre a capacidade de resolução de problemas desafiantes evidenciada por uma aluna e o *feedback* escrito proporcionado pela professora, de forma sistemática. As tarefas propostas integram um concurso de problemas desafiantes que, segundo as autoras, se caracterizam pela existência de um certo grau de dificuldade e pela necessidade que criam no aluno de ultrapassar o obstáculo, ou seja, que o incitam a tentar uma solução e que encontram eco nos comentários da aluna participante sobre esta sua experiência. Os resultados apontam no sentido de uma evolução da aluna na forma como comunica as suas resoluções e de algumas características do *feedback* proporcionado pela professora que podem estar associadas a essa evolução, de que se destaca o facto de se focarem no processo, não emitindo juízos de valor sobre os erros cometidos pela aluna mas incentivando-a a refletir sobre os mesmos.

Em síntese, na maioria dos estudos que integram este tema, salientam-se aspetos importantes relativamente às características da tarefas propostas e também ao papel do professor no decurso da aula para garantir que a tarefa proposta atinge os objetivos de aprendizagem visados. Nestes textos é possível observar aspetos da prática do professor associada ao trabalho com tarefas em sala aula, como sejam o apoiar os alunos na interpretação de enunciados, em gerir a discussão coletiva e na sistematização das ideias fundamentais conduzindo a níveis mais formais de pensamento. Torna-se bastante evidente nestes estudos, uma certa cultura de sala de aula que é criada, salientando a estreita associação entre a atividade decorrente das tarefas e as normas socio-matemáticas estabelecidas (Gravemeijer & Cobb, 2013).

Observa-se que, na maioria dos estudos relatados, as tarefas matemáticas visam o ensino de aspetos da matemática, onde o professor tem um papel relevante em sala de aula, e as aprendizagens. Assumindo as tarefas esta centralidade no processo de ensino e aprendizagem e sendo a avaliação um processo inerente ao ensino e à aprendizagem, será importante que a avaliação cumpra a sua principal função: melhorar o ensino e a aprendizagem. Tal função é evidenciada num artigo de Black & Wiliam (1998) que apresenta uma meta-análise de vários artigos de investigação sobre avaliação das aprendizagens, evidenciando o papel da avaliação formativa na melhoria das aprendizagens dos alunos. Nessa avaliação formativa é dado especial destaque ao *feedback* de qualidade em todo o processo de melhoria das aprendizagens e do ensino. Black e Wiliam (2006). O trabalho de Rosário Monteiro e Leonor Santos revela a possibilidade que, através de uma tarefa ou sequência de tarefas, se possa integrar avaliação, aprendizagem e ensino, sem que existam tarefas para ensinar e aprender e outras, distintas das anteriores, para avaliar. Existem alguns estudos que evidenciam a dificuldade, assumindo mesmo como um desafio, a articulação entre a avaliação formativa e a avaliação sumativa (Harlen, 2006).

A terminar, deixamos um conjunto de questões, agrupadas em três blocos, que consideramos pertinente discutir relativamente a este tema e que podem apontar caminhos para futuros estudos que ajudem a aprofundar o nosso conhecimento sobre a relação entre as tarefas e a aprendizagem do aluno da matemática, enquadrada numa perspetiva ecológica de aprendizagem.

(1) Relação entre o tipo de tarefas e as aprendizagens que estas potenciam

- Como as características das tarefas influenciam a natureza da atividade dos alunos?
- Como os alunos interpretam as tarefas matemáticas propostas, nomeadamente no que diz respeito aos contextos que são usados?
- Em que medida as aprendizagens dos alunos vão ao encontro dos objetivos visados pelas tarefas?
- De que forma as tarefas usadas pelo professor têm o propósito de fornecer informação relevante sobre o ensino e a aprendizagem (articulação entre ensino, avaliação e aprendizagem)?

(2) Exploração das tarefas: metodologias de trabalho, o papel do professor, o papel dos alunos

- Que dinâmicas de sala de aula são promovidas com diferentes tipos de tarefa matemática?
- Como os professores adaptam as tarefas de acordo com o contexto em que estas são propostas?
- Que aspetos se salientam quanto ao papel do professor no trabalho com as
- tarefas matemáticas em sala de aula?
- Que aspetos se salientam quanto ao papel do aluno ao trabalhar com diferentes tipos de tarefas matemáticas?

(3) Recursos de apoio à exploração e resolução de tarefas

- Que características particulares possuem as tarefas que pressupõem o uso de recursos pelos alunos?
- Como as tarefas podem apoiar a transformação de um artefacto num instrumento pedagógico?
- Que ambientes de aprendizagem podem ser criados para potenciar a aprendizagem dos alunos em torno de tarefas com diferentes recursos?

Referências

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. Assessment in Education. *Principles, Policy & Practice*, *5*(1), 7-74.

Black, P., & Wiliam, D. (2006). Developing a Theory of Formative Assessment. In J. Gardner (Ed.), *Assessment and learning* (pp. 81-100). London: Sage.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Gerofsky, S. (2009). Genre, simulacra, impossible exchange, and the real: how postmodern theory problematises word problems. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: modelling verbal descriptions of situations* (pp. 21-38). Rotterdam: Sense Publishers.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspetiva. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: An introduction* (pp. 72-113). Enschede, The Netherlands: SLO – Netherlands Institute for Curriculum Development.

Harlen, W. (2006). On the Relationship Between Assessment for Formative and Summative Purposes. In J. Gardne (Ed.), *Assessment and Learning* (pp. 103-118). London: Sage.

Hodge, L., Vinovska, J., Zhao, Q., & Cobb, P. (2007). What does it mean for an instructional task to be effective? In *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 392-401). MERGA, Australia.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, *22*(1), 133-162.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situation. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense Publishers.

Rezat, S., & Strasser, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tethahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *44*, 641-651

Watson, A., Ohtani, M.; Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education - Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 9-15). Oxford, UK: International Commission on Mathematics Instruction.

Comunicações – GD2

RACIOCÍNIO INFERENCIAL INFORMAL DE ALUNOS DO 8.º ANO NO CONTEXTO DE UMA INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA USANDO O TINKERPLOTS

Ana Henriques e Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt; hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo. Este estudo debruça-se sobre o raciocínio estatístico inferencial informal de alunos de uma turma do 8.º ano e pretende investigar de que modo as bases desse raciocínio podem emergir através de tarefas orientadas para o raciocínio estatístico (TORE), em particular na exploração de uma investigação estatística utilizando o software TinkerPlots. Os dados que servem de base à análise foram recolhidos a partir da resolução escrita das tarefas pelos alunos e dos registos da sua atividade no computador com o TinkerPlots. Os resultados mostram um grande envolvimento dos alunos na tarefa e fornecem compreensão sobre os diversos aspetos de inferência estatística informal que evidenciam. Além disso, sugerem que a tarefa proposta, em associação com o recurso tecnológico usado, tem potencial para tornar a inferência estatística informal acessível aos alunos desta faixa etária.

Palavras-chave: Raciocínio estatístico; Investigações estatísticas; Raciocínio inferencial informal; TinkerPlots; Tarefas TORE

Introdução

A Estatística tem ganho destaque nas orientações curriculares (GAISE, 2005; NCTM, 2007) à medida que a sociedade valoriza a análise de dados e a capacidade de raciocinar sobre eles e de usá-los de modo efetivo e crítico na tomada de decisões. Em linha com essas recomendações, investigadores em educação matemática têm defendido um papel mais aprofundado e alargado da Estatística na matemática escolar (Makar & Ben-Zvi, 2011), perspetivando novas abordagens no ensino e aprendizagem, mais holísticas e orientadas para os processos e para o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos, que vão para além das técnicas de análise de dados (Makar & Rubin, 2009).

Contudo, o foco do ensino ainda é, frequentemente, a aprendizagem de ferramentas estatísticas (gráficos, medidas estatísticas e procedimentos) sem que os alunos conheçam as razões para o fazerem, conduzindo às reconhecidas dificuldades em usá-las adequadamente em problemas de aplicação (Bakker & Derry, 2011). É vital que os alunos situem essas ferramentas dentro do processo estatístico e em contextos sob investigação, isto é, que o foco no uso dessas ferramentas esteja inserido na razão de fazer estatística para compreender o fenómeno subjacente.

Indo ao encontro destas ideias, o documento "*Framework for Teaching Statistics within the K-12 Mathematics Curriculum*" (GAISE, 2005) sugere uma abordagem curricular à

Estatística que, enfatizando e revisitando um conjunto de ideias estatísticas ao longo da escolaridade, promove gradualmente nos alunos a compreensão da Estatística como um processo investigativo envolvendo as seguintes componentes:

(i) clarificação do problema a resolver e a formulação de questões (ou hipóteses) que podem ser respondidas com dados;

(ii) desenho e utilização de um plano para recolher dados apropriados;

(iii) seleção de métodos numéricos e gráficos apropriados para analisar os dados: sumariar, formular conjeturas, tirar conclusões e fazer generalizações;

(iv) interpretação dos resultados da análise tendo em conta o âmbito de inferência baseada nos dados e relacionar a interpretação com a questão original.

Dada a relevância atribuída à capacidade de tirar conclusões que se estendem para além dos dados em análise, deduzindo que os padrões neles observados estão também presentes num contexto mais alargado (de facto o interesse de uma investigação não está nos dados disponíveis mas nas suas características mais gerais e nos processos que os criaram), o ciclo de investigação estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999) é compreendido como um processo inferencial. Este reconhecimento desencadeou um grande interesse pela inferência estatística tornando-a num objetivo central do raciocínio estatístico.

A promoção do raciocínio inferencial informal (RII) nos alunos, desde níveis elementares, permite aprofundar a compreensão do propósito e utilidade dos dados para dar significado ao mundo real e suporta a transição para a inferência formal, em estudos mais avançados, que se tem verificado ser fonte de inúmeras dificuldades (Rubin, Hammerman, & Konold, 2006; Zieffler, Garfield, delMas, & Reading, 2008). Este raciocínio, segundo Ben-Zvi (2006), está ligado às atividades cognitivas "envolvidas ao se tirar conclusões ou fazer predições, informalmente, sobre um 'universo mais alargado' a partir de padrões, representações, medidas estatísticas e modelos estatísticos de amostras aleatórias, ao mesmo tempo que se atende à força e limitações da amostra e das inferências realizadas" (p. 2).

A inferência estatística informal não deve, pois, ser ensinada como uma entidade em si mesma mas focada no raciocínio usado para tirar conclusões úteis e ricas em contexto sobre os dados. No entanto, a emergência deste conceito (RII) coloca desafios aos professores. É necessário repensar a natureza das experiências que se proporcionam aos alunos através das tarefas a explorar e abordagens a adotar de modo a desenvolver as suas ideias de inferência estatística. Nomeadamente, no nosso país, onde a inferência formal está reservada para o ensino superior e os alunos não experienciam métodos de inferência informal, o desafio é selecionar tarefas que simultaneamente se enquadrem no programa e apoiem os alunos nos processos de inferência informal.

Refletindo este recente interesse no campo da RII, este estudo pretende investigar de que modo as bases do raciocínio inferencial informal dos alunos podem emergir através de tarefas orientadas para o raciocínio estatístico (TORE), em particular na exploração de investigações estatísticas suportadas pelo uso do *software TinkerPlots*, com uma turma do 8.º ano do ensino básico.

Inferência estatística informal e Raciocínio inferencial informal

A inferência estatística informal, descrita como um processo de raciocínio informal que usa dados disponíveis como evidência para fazer generalizações probabilísticas ‘para além’ dos dados, é reconhecida como uma base importante do raciocínio estatístico (Makar & Rubin, 2009). Esse raciocínio, segundo Rubin et al. (2006), envolve a consideração das seguintes ideias relacionadas:

(i) propriedades de agregados em vez de propriedades de casos individuais; (ii) tamanho amostral e o seu efeito na precisão das estimativas da população; (iii) controlo de enviesamento; e (iv) tendência, distinguindo entre afirmações que são sempre verdadeiras e as que são frequentemente ou algumas vezes verdadeiras. Além disso, para Makar e Rubin (2009), três princípios são essenciais à caracterização da inferência estatística informal, sendo que o primeiro é particular do processo de inferência e os dois últimos são específicos da estatística:

(1) fazer generalizações (previsões, estimativas de parâmetros e conclusões) que se estendem ‘para lá dos dados’;

(2) usar dados como evidência para as generalizações; e

(3) usar linguagem probabilística na descrição das generalizações.

Uma vez que a obtenção de conclusões que se aplicam a um universo para além dos dados requer uma argumentação persuasiva baseada em análise de dados, Ben-Zvi (2006) compara raciocínio inferencial à argumentação e defende a integração destes dois no desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos em contextos de aprendizagem.

Os estudos que se têm debruçado sobre a inferência estatística informal e o raciocínio dos alunos que lhe está subjacente (Makar & Rubin, 2009; Pfannkuch, 2006; Rubin, Hammerman, & Konold, 2006; Zieffler et al., 2008), têm apresentado definições destes conceitos nem sempre unânimes, dado a sua dependência do contexto e do tópico focado mas os quadros teóricos propostos facilitam o desenho de ambientes de aprendizagem e a análise do raciocínio inferencial informal dos alunos. Zieffler et al. (2008) combinam várias pespetivas e apresentam uma definição de raciocínio inferencial informal como “o modo como os alunos usam o seu conhecimento estatístico informal para formular argumentos que suportam inferências sobre populações desconhecidas baseadas em amostras observadas” (p. 44). Neste sentido, o quadro conceptual que estes autores propõem, focado especificamente na construção de tarefas que podem ser usadas para analisar o raciocínio dos alunos, identifica RII como envolvendo as seguintes componentes: (i) generalizações para ‘além dos dados’; (ii) utilização de conhecimento prévio na medida em que está disponível; (iii) fornecer justificações baseadas em evidências para as generalizações; e (iv) usar linguagem probabilística na descrição das generalizações enquanto fazem referência a níveis de incerteza sobre as conclusões tiradas.

Tentando articular as práticas de sala de aula prevalentes no dia-a-dia e as oportunidades que elas representam para conduzir ao RII, Leavy (2010) defende o uso de investigações estatísticas e fornece um quadro conceptual para o desenho de tarefas para suportar o IIR (Quadro 1). Segundo a autora este tipo de tarefa apresenta características que vão ao encontro das que na literatura são referidas como essenciais às atividades que suportam um foco na inferência: Usar dados amostrais para raciocinar sobre as características da população; Comparar amostras de dados para raciocinar sobre possíveis diferenças entre populações.

Quadro 1 - Características orientadoras para o desenho e seleção de tarefas que suportam o RII (Leavy, 2010, p. 48)

Propósito da investigação	**Ações sobre os dados**	**Natureza da atividade estatística**	**Características das tarefas**
Tirar conclusões sobre relações entre características de grupos de observações (estatística inferencial)	Olhar para além dos dados	Usar amostras para raciocinar sobre populações Comparar amostras de dados para raciocinar sobre diferenças entre populações	Utilizam conhecimento prévio Requerem o uso de evidências para suportar generalizações Baseiam-se no uso de linguagem probabilística

Além disso, para a autora, faz sentido um esforço para ajudar os alunos a procurar 'para além dos dados' e que os conduza a olhar para os dados antes, no sentido de identificarem padrões subjacentes. A seleção de tarefas que suportam o raciocínio informal pode também ser informada pelo grau com que essas tarefas requerem que os alunos: utilizem conhecimento prévio na medida em que está disponível (Zieffler et al., 2008), forneçam justificações para as generalizações baseadas em evidências (Makar & Rubin, 2007; Zieffler et al., 2008) e usem linguagem probabilística na descrição de generalizações enquanto fazem referência a níveis de incerteza sobre as conclusões retiradas (Makar & Rubin, 2007).

Os avanços na tecnologia e a crescente facilidade de acesso a dados reais, também fornecem aos professores e alunos novas ferramentas para adotar abordagens informais orientadas para os dados (Ben-Zvi et al., 2012). Em particular, os ambientes dinâmicos de aprendizagem estatística, como por exemplo o *TinkerPlots*, que são desenhados explicitamente para facilitar a visualização de conceitos estatísticos, têm evidenciado um enorme potencial para tornar acessível aos alunos o raciocínio inferencial (Ben-Zvi, 2006; Rubin et al., 2006).

Contexto do estudo

O projeto

Este estudo integra-se num projeto de investigação e desenvolvimento que visa a construção e experimentação de sequências de tarefas orientadas para o raciocínio estatístico (TORE) dos alunos do ensino básico, recorrendo ao *software TinkerPlots*. Assente numa perspetiva de Design research (Cobb, Zhao, & Dean, 2009), envolvendo ciclos interativos de preparação, experimentação e reflexão, uma parte significativa do projeto foi desenvolvida no âmbito de uma Oficina de Formação, com 11 professoras de Matemática dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, tendo as autoras do estudo assumido o papel de investigadoras e formadoras. O trabalho na Oficina, que ocorreu entre novembro e junho do ano letivo de 2013/14, com 40 horas presenciais, assumiu um carácter eminentemente colaborativo, sendo as professoras co-responsáveis pela proposta e discussão das tarefas, experimentação na sala de aula e reflexão sobre todo o processo.

A tarefa em análise

No presente estudo debruçamo-nos sobre a última tarefa, de uma sequência de três, do primeiro ciclo de experimentação desenvolvido, numa turma do 8.º ano, por um par de professoras participantes. Não sendo a inferência estatística um objetivo de aprendizagem do programa de matemática para este nível de escolaridade, esta não se constituiu como um tópico a ser aprendido pelos alunos. No entanto, as tarefas permitiram que os alunos experimentassem aspetos significativos da prática de inferência estatística de modo informal, fortemente apoiados na exploração de dados reais através de diversas representações que um ambiente dinâmico de aprendizagem estatística, como o *TinkerPlots*, favorece (Ben-Zvi, 2006).

A tarefa em análise, intitulada "O corpo humano: um estudo na escola" (em anexo) consiste numa investigação estatística que visa levar os alunos a percorrer as diferentes fases de um estudo estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999) e que compreende um conjunto de conhecimentos e processos: Compreender a necessidade de dados (variáveis, métodos recolha dados) e a sua influência nas conclusões (enviesamento, erros de medição); Distribuição e Variabilidade (construção e interpretação de diferentes representações gráficas e medidas estatísticas, comparar distribuições); Amostragem (recolher amostras, obter estimativas, fatores que afetam a precisão das inferências; variabilidade resultante do processo de amostragem). A tarefa contém também um conjunto de questões com as quais se pretende levar os alunos a realizar inferências informais, incorporando as componentes do RII que foi descrito na literatura (Zieffler et al., 2008), como apontamos no Quadro 2.

Quadro 2. Componentes do RII e sua relação com as características da tarefa

Componente RII	**Características da tarefa**
Fazer julgamentos ou previsões	Fazem afirmações a prever as características da população (forma, centro ou dispersão); sobre a existência ou não de diferenças entre duas populações baseadas nas semelhanças ou diferenças nas amostras.
Usar ou integrar conhecimento prévio	Precisa de recorrer a conhecimento e linguagem prévia ou intuitivo para prever características da população; para comparar dois conjuntos de dados.

Articular argumentos baseado em evidência	Requer explicações sobre como e porque é que os alunos validam ou não as suas afirmações

A tarefa cria condições para que os alunos integrem na sua resolução o seu conhecimento prévio sobre conceitos fundamentais. Ela desafia os alunos a fazer julgamentos e previsões sobre a população da escola sem o uso de metodologia estatística formal. Por fim, tendo os alunos que explicar o seu raciocínio, ela põe a descoberto a articulação dos seus argumentos e justificações para as suas previsões e julgamentos.

Metodologia do estudo

Adotando uma perspetiva de *Design Research*, a investigação procurou abranger as várias fases do processo e diversificar os métodos de recolha de dados de modo a permitir não só contribuir para compreender aspetos importantes do raciocínio estatístico dos alunos mas também recolher elementos que permitissem rever o *design* do processo instrucional (Stephan, Bowers, Cobb, & Gravemeijer, 2003), em particular as tarefas a propor em ciclos subsequentes.

No estudo que relatamos neste texto, debruçamo-nos sobre a realização da terceira e última tarefa por uma turma do 8.º ano, de uma das professoras que colaborou com o projeto. A turma era constituída por 30 alunos, dos quais 20 eram rapazes (com idades compreendidas entre os 13 e os 16 anos). Os alunos exploraram esta tarefa em grupos de dois ou três elementos, ao longo de dois blocos de 90 minutos, após terem recolhido os seus dados no final de uma aula anterior.

Tal como nas restantes aulas, o desenho metodológico foi definido pela equipa de investigadoras mas a professora da turma e uma colega que com ela colaborou foram responsáveis pela recolha de dados, com o auxílio de uma bolseira de investigação. A recolha de dados incluiu a resolução escrita das tarefas pelos alunos e os registos da sua atividade no computador com o *TinkerPlots*, recorrendo a um *software* de gravação de écrans (*AutoScreenRecorder 3.1 Pro*).

Para a análise de dados, de natureza qualitativa, foi usado o quadro conceptual de Makar e Rubin (2009), anteriormente apresentado, envolvendo três categorias (*Generalizar para além dos dados; Usar dados como evidência para suportar generalizações; Usar linguagem probabilística para generalizar*) de modo a identificar os principais aspetos do Raciocínio Inferencial Informal (RII) que os alunos (neste texto referenciados pela letra inicial do seu nome, tanto nas afirmações individuais como nas resultantes do trabalho de grupo) revelaram ao realizar a tarefa proposta. Nessa análise procurámos também identificar como as características das tarefas suportam o RII, de acordo com o objetivo do presente estudo.

A emergência de Raciocínio Inferencial Informal

Generalizar para além dos dados. O raciocínio estatístico inferencial informal, segundo os autores referenciados, envolve a realização de generalizações que se estendem ‘para além dos dados'. Esta componente inferencial emergiu no trabalho dos alunos, em vários momentos da tarefa com ênfase diferente.

A tarefa foi introduzida com uma questão inicial "Como caracterizarias os alunos do 3.º ciclo da tua escola, no que diz respeito a algumas das medidas referidas por Vitrúvio, por exemplo, altura, pé e envergadura?". Esta questão suscitou uma discussão interessante, no grande grupo, onde foi clara a intenção dos alunos utilizarem uma amostra para prever as características da população em estudo (os alunos do 3.º ciclo), ao afirmarem "Dentro do 3.º ciclo podendo selecionar um grupo de alunos mistos de cada turma" (J&D), "O melhor era fazer uma sondagem" (E) ou ainda "Acho que ao escolher uma turma dos 3anos [de escolaridade] podemos ter uma boa ideia das [suas] características. Realizar uma sondagem e [porque] levará mais tempo fazer um censo" (S).

Apesar de perceberem a utilidade do processo inferencial – generalizar para além dos dados –, os alunos não foram unânimes em relação ao modo como a amostra seria recolhida e usada para generalizar resultados, embora na sua maioria tenham mencionado a aleatoriedade como fundamental para garantir a representatividade da amostra, como evidenciado nas seguintes respostas: "Escolher aleatoriamente entre o 7.º e o 9.º ano" (R) e "Escolher aleatoriamente alunos de diversas turmas de todos os anos do 3.º ciclo" (E). Devido a limitações de tempo, os alunos concordaram em recolher dados da sua turma, embora reconhecendo a falta de representatividade da amostra, após a discussão em grande grupo.

Depois de recolherem dados relativos à altura, número calçado e envergadura, na própria turma, os alunos formularam questões sobre o fenómeno em estudo. Alguns alunos não compreenderam a intenção das questões formuladas para os ajudar a responder à questão inicial e consideram propriedades de casos individuais em vez de verem os dados como agregados. As questões "Quanto é a maior envergadura dos rapazes?" (W&F) e "Será que o maior número de sapato é o aluno mais alto da turma?" (B&R), formuladas por estes alunos, têm uma natureza determinística e não os conduzem a tirar conclusões para além dos dados. Os restantes alunos, no entanto, são capazes de formular questões como "Qual é a altura média dos alunos da turma?" (M&S) ou "Será que os rapazes têm tendência a ser maiores que as raparigas?" (T&D), que mostram tentativas de encontrar tendências e uma descrição global dos dados, focadas em propriedades de agregados e que têm em conta a variabilidade. Apesar de as podermos considerar um progresso em relação às anteriores, atendendo às características estatísticas que apresentam (e que são centrais na inferência informal), as questões formuladas ainda são pensadas em termos de caracterização dos alunos da turma.

Após a exploração dos dados recolhidos na turma, recorrendo ao *software* TinkerPlots, os alunos escreveram um pequeno texto sobre quais seriam as características apresentadas pelos alunos do 3.º ciclo, em relação aos atributos em estudo e que foram alvo das questões formuladas inicialmente. Como verificado em estudos com alunos mais novos (por exemplo, Watson, 2008), o seu foco inicial na descrição da turma não limitou os alunos a usar os dados inferencialmente.

Na sequência das questões formuladas inicialmente, sobre possíveis diferenças entre géneros em relação às características em estudo, os alunos envolveram-se na comparação de duas amostras (rapazes e raparigas da turma) e determinaram a existência (ou não) de diferenças que generalizaram para a população do 3.º ciclo do seguinte modo: "Os rapazes vão ser maiores que as raparigas" (D&B&B) e "Na totalidade dos alunos do 3.º ciclo [as conclusões relativamente a] as alturas e as envergaduras vão ser que os rapazes vão ser maiores (…) em comparação com as raparigas" (A&A).

As suas respostas também sugerem que a maioria vê os dados recolhidos na turma como evidência para prever quanto à altura, número de calçado e envergadura, mais geralmente, dos alunos do 3.º ciclo. Alguns alunos assumem que os dados da turma e os do 3.º ciclo terão propriedades semelhantes, generalizando as características verificadas na turma a todo o 3.º ciclo, como evidenciado na seguinte afirmação de um dos grupos: "Nos alunos do 3.º ciclo, a altura e envergadura dos rapazes é maior quando comparada com as raparigas, baseados na nossa turma" (A&E). É interessante verificar que ao generalizarem, estes alunos parecem focar a sua atenção na distribuição e não tanto em medidas específicas, como tinham feito na formulação inicial de questões ou anteriormente na exploração dos dados para caracterizar a turma, sugerindo que o trabalho prévio na organização e descrição dos seus próprios dados poderá ter apoiado uma mudança para o raciocínio inferencial, ajudando-os a melhorar a sua visão dos dados como um agregado e a considerar variabilidade. Embora a maioria tenha calculado a média das alturas dos alunos da turma, algumas das previsões vão para além disso e incluem um intervalo de valores mais alargado e alguma incerteza, adotando a perspetiva estatística de uma tendência que geralmente é verdadeira mas que admite exceções, como se pode verificar na seguinte afirmação: "Em média os rapazes são mais altos mas também se verifica que há rapazes com 1.4 [m] mais baixo do que as raparigas, enquanto [que para] as raparigas o valor mínimo é 1.44 [m]" (W&F).

No entanto, a maioria dos alunos reconhece que haverá algumas diferenças entre as características dos alunos da turma e as dos alunos do 3.º ciclo em relação às distribuições da altura ou número de sapato. Estas diferenças estão refletidas nas suas previsões, expressas da seguinte forma: "Nós prevemos que a altura média dos alunos do 3.º ciclo da Escola (…) provavelmente irá aumentar devido ao crescimento natural" (M&S) e "Embora possa haver desnivelações de altura, a média da altura será maior consoante o maior ano de escolaridade" (J&D). Estas afirmações mostram que, no seu raciocínio, os alunos têm em consideração a variabilidade, o efeito da não representatividade da amostra (referido anteriormente) na precisão das estimativas da população e integram o conhecimento do contexto, que lhes é familiar, para justificar as suas afirmações.

Usar dados como evidência para suportar generalizações. Um dos princípios essenciais à inferência estatística informal é o uso de dados como evidência para as afirmações ou previsões feitas sobre a população a partir de amostras. Numa primeira fase, os alunos exploraram os dados recolhidos na turma, recorrendo a representações gráficas que construíram utilizando o *TinkerPlots*, para responder às suas questões iniciais ou confirmar as suas previsões (sobre as características da turma).

Atendendo a que os alunos não foram orientados para um gráfico específico, é interessante observar que foram capazes de criar uma variedade de representações gráficas e de as usar adequadamente para representar e interpretar os seus dados para obter evidência para as suas afirmações. O gráfico de pontos, sendo o mais intuitivo, foi o mais usado, tanto para responder às questões iniciais de natureza determinística, como para confirmar as previsões sobre as características da turma. Por exemplo, nos gráficos da Figura 1, os alunos selecionaram adequadamente as variáveis, o gráfico e respetiva escala e ferramentas do *TinkerPlots* (percentagem), permitindo-lhes obter evidência para responderem às suas questões iniciais: "O aluno mais alto calça o número de sapato mais elevado" (B&B&R) e "A percentagem de alunos com mais de 1,60 cm é 55%" (B&B&R).

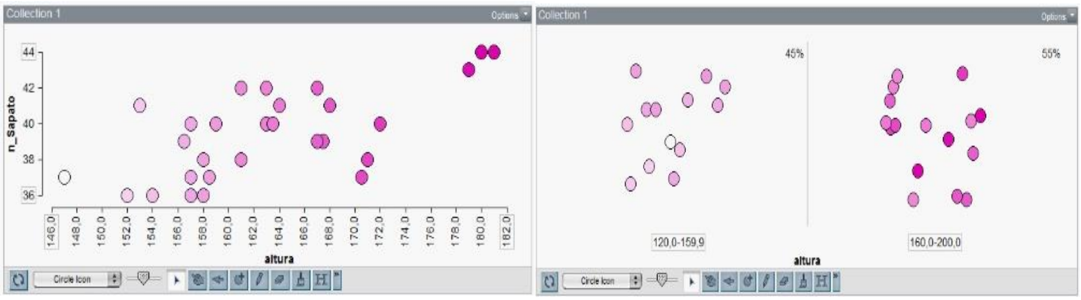


Figura 1 – Gráficos de pontos para caracterizar a altura dos alunos (B&B&R)

Os gráficos de pontos, como os da Figura 2, também foram usados pelos alunos para comparar amostras e confirmar as suas previsões relativas às diversas características dos alunos. No primeiro caso, referem que "Com base nas representações gráficas, os dados demonstram que é verdade que os rapazes são, por norma, mais altos que as raparigas" (AP&N) porque observaram que na classe das alturas mais elevadas (160-200 cm), o número de raparigas (F) é inferior ao número de rapazes (M). Deste modo, confirmaram a sua previsão inicial feita com base na observação direta dos alunos da sua turma, embora se tenham focado nos valores absolutos e não nas proporções. Em relação ao segundo gráfico, os alunos fazem uma interpretação semelhante mas já têm em consideração as proporções e são capazes de articular informação de 3 variáveis, recorrendo à cor para representar o género (que é uma facilidade específica deste *software*). Neste caso, os alunos afirmaram "Com base nas representações gráficas, os dados demonstram que há mais raparigas do que rapazes a calçar números menores e tendo também alturas menores sendo as raparigas 6 e os rapazes igualmente 6" (AP&N), observando que existem doze alunos (e referem explicitamente que são seis rapazes e seis raparigas) na classe correspondente aos números de sapato mais baixos, sendo que as seis raparigas se encontram todas na classe inferior da distribuição das alturas. No último gráfico os alunos comparam os géneros recorrendo às médias das envergaduras e concluem: "Não, [a envergadura não é semelhante entre os rapazes e as raparigas porque] os rapazes têm uma envergadura média de 161 cm e as raparigas de 157 cm" (D&J).

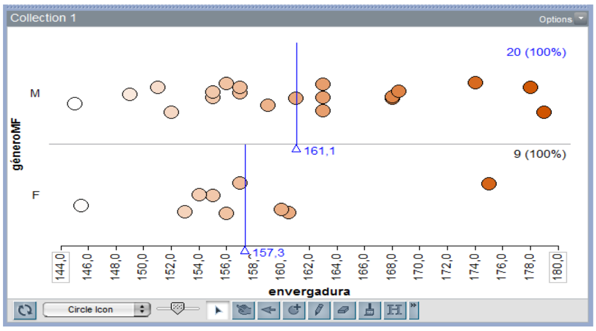


Figura 2 – Gráfico de pontos para comparações entre géneros (AP&N; D&J)

Não é claro, no entanto, o que está na base da divisão da escala nas classes consideradas nos dois primeiros gráficos nem são considerados conceitos como variabilidade, distribuição e dispersão, aspetos que parecem limitar a visão dos dados como agregado e podem influenciar a evidência obtida a partir dos dados para as generalizações.

Alguns alunos ainda criaram diagramas de extremos e quartis, sobrepostos nos gráficos de pontos, para compararem os dois géneros em relação às diversas características em estudo, como os apresentados na Figura 3. No entanto, não aproveitaram as potencialidades deste tipo de gráfico para comparar distribuições limitando-se a notar valores especiais, como a média (que não está presente nesta representação mas obtida através de outras ferramentas do *software*) ou o máximo e o mínimo, concluindo: “O comprimento mínimo das raparigas é 154,0 cm e o máximo é 172,0 cm” (C&R) e “Os rapazes são mais altos que as raparigas. A média dos rapazes é 163 e a média das raparigas é 160 cm” (E&S).

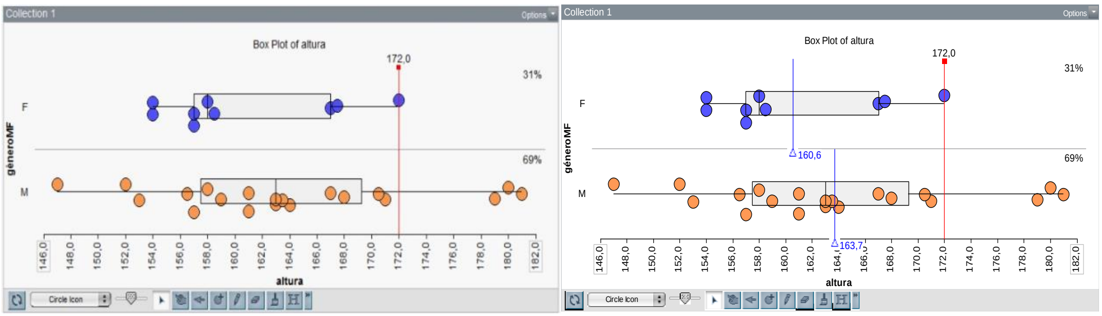


Figura 3 – Diagramas de extremos e quartis para comparações entre géneros (C&R; E&S)

Estes resultados evidenciam dificuldades dos alunos na interpretação dos diagramas de extremos e quartis e na sua utilização no processo inferencial. Apesar das dificuldades identificadas nesta atividade de comparação, numa fase posterior à exploração dos próprios dados, os alunos procuraram suportar as suas afirmações sobre o 3.º ciclo na análise dos dados da turma, ao afirmarem “Sim, os rapazes tendem a ser maiores que as raparigas, com base no ficheiro da turma” (T&D) ou “Os rapazes vão ser maiores que as raparigas, logo a média haverá de andar para os lados dos rapazes porque provavelmente também deve haver mais rapazes a estudar do que raparigas. Baseamo-nos devido a nossa turma ter mais rapazes que raparigas e serem mais altos” (D&B&B).

Além disso, usaram uma argumentação baseada em dados e generalização (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2008), integrando conhecimento prévio e do contexto, para explicar como validam as suas afirmações ou previsões. Um dos grupos justifica que “A média das alturas [do 3.º ciclo] vai aumentar [em relação à turma] porque o 3.º ciclo tem o 8.º e o 9.º ano, ou seja, os alunos vão sendo maiores, ter uma maior envergadura e maior pé” (T&D), baseados no seu conhecimento sobre a maior altura dos alunos do 9.º ano, articulando-o com a observação dos dados da turma que evidenciou associações positivas entre duas das variáveis: a envergadura, a altura e o número de calçado. Outro grupo afirma “No 3.º ciclo, penso que irá acontecer algo parecido pois a nossa turma é do 8.º ano ‘mediana’ do 3.º ciclo. Os alunos também não são muito diferentes pois é um ano acima e um abaixo” (R&R), mobilizando o conceito de média.

A exploração dos dados da turma, orientada pelas questões iniciais e facilitada pela visualização proporcionada pelas representações gráficas criadas no TinkerPlots, suportaram assim o envolvimento seguinte dos alunos na generalização das características observadas e no uso desses dados como evidência.

Usar linguagem probabilística para generalizar. A inferência estatística envolve também o uso de linguagem probabilística na descrição das generalizações. Esta componente esteve presente no trabalho realizado pelos alunos nesta tarefa, uma vez que se observaram diversas referências a incerteza nas conclusões retiradas para o 3.º ciclo.

Os excertos das resoluções dos alunos, apresentados nas secções anteriores, sugerem que na sua maioria reconhecem que as suas previsões para o 3.º ciclo são experimentais (a partir dos dados da turma) quando utilizam nas suas afirmações termos como “provavelmente”, “talvez” ou “algo semelhante” em vez de igual. O uso do termo “tendem a ser” revela, igualmente, que os alunos começam a adotar uma perspetiva estatística de tendência. Nestes casos, a incerteza é expressa de forma qualitativa, sem níveis de confiança ou margens de erro (Dierdorp, Bakker, van Maanen & Eijkelhof, 2012), como seria de esperar da experiência em Estatística de alunos desta faixa etária.

Apesar disso, esta foi a componente do RII menos evidenciada pelos alunos, sugerindo um trabalho específico em torno da linguagem da incerteza ajudando-os a afastarem-se de uma perspetiva determinística de inferência e evoluírem para a inclusão de noções de incerteza e níveis de confiança nas suas afirmações.

Discussão e Implicações

Neste estudo, ilustrámos como o raciocínio inferencial informal emergiu no trabalho dos alunos na realização de uma investigação estatística (Wild & Pfannkuch, 1999) utilizando o *software* TinkerPlots. Todos os alunos se envolveram na tarefa e, mesmo os grupos que evidenciaram dificuldades em realizar inferências integradas no processo investigativo, foram capazes de mostrar algum aspeto de inferência estatística informal durante a sua realização, o que nos parece significativo dada a reduzida experiência dos alunos com este tipo de processos.

Desde o início da tarefa, introduzida através de uma questão geral, os alunos mostraram compreender a utilidade do processo inferencial, isto é, fazer inferências sobre uma população desconhecida (3.º ciclo) baseados nos dados que recolheram da sua turma, articulando incerteza (Makar & Rubin, 2009). O facto de as questões inicialmente formuladas pelos alunos terem como foco a descrição da turma, resultado já observado em outros estudos (Watson, 2008), pode, neste caso, advir da recolha prévia dos próprios dados que terá desviado a atenção dos alunos do processo inferencial. Este aspeto deverá ser tido em consideração na implementação deste tipo de tarefa, embora não tenha impedido os alunos de usar os dados inferencialmente numa fase posterior da tarefa, como foi verificado também por Watson (2008) com alunos mais novos. Na verdade, o trabalho na organização e descrição dos seus próprios dados parece ter apoiado uma mudança no foco da atenção dos alunos de medidas específicas, para caracterizar a sua turma, para uma visão dos dados como um agregado e a consideração de variabilidade, componentes essenciais ao raciocínio inferencial. A familiaridade dos alunos com o contexto e o seu conhecimento/domínio de ideias estatísticas (como por exemplo, variabilidade, distribuição, dispersão e gráficos, entre outras) parece ter facilitado a visão dos dados como agregado e a obtenção de evidências a partir dos dados para as generalizações, suportando, desse modo, a emergência de práticas de inferência estatística informal, como defendem diversos autores (por exemplo, McPhee & Makar, 2014).

Existem, igualmente, alguns indicadores no estudo que a exploração dos dados da turma, orientada pelas questões iniciais e facilitada pela visualização proporcionada pelas representações gráficas criadas no TinkerPlots, suportaram o envolvimento seguinte dos alunos na generalização das características observadas e no uso desses dados como evidência. A familiarização dos alunos com este *software*, nas duas tarefas anteriores, parece ter contribuído para a sua competência metarepresentacional (English, 2014), apesar das dificuldades evidenciadas na interpretação dos diagramas de extremos e quartis e na sua utilização no processo inferencial. Estas dificuldades, também observadas em outros estudos com alunos de diferentes idades e até com professores (Pfannkuch, 2006; Watson, 2008), sugerem a necessidade de trabalho específico em torno destas representações. No entanto, o complexo papel da tecnologia (e em particular o TinkerPlots) como ferramenta no suporte do raciocínio estatístico inferencial informal (Ben-Zvi, 2006) merece uma maior discussão, uma vez que não foi foco neste estudo.

Finalmente, os resultados apresentados, apesar de limitados a uma turma e a uma tarefa, fornecem, por um lado, alguma compreensão sobre as capacidades dos alunos e dos desafios que enfrentam com a inferência estatística informal quando experienciam a Estatística como um processo investigativo e, por outro, permitem reexaminar a tarefa e as suas condições de implementação antes de um novo ciclo de experimentação. Estes resultados sugerem que a tarefa proposta suportou o desenvolvimento das capacidades acima referidas e que as investigações estatísticas, apoiadas por um ambiente tecnológico, são um recurso apropriado e valioso para tornar a inferência estatística informal acessível aos alunos destas faixas etárias, tal como observado noutros estudos (Ben-Zvi et al, 2012), sobretudo se esta temática não estiver contemplada explicitamente no currículo, como é o caso em Portugal.

Agradecimentos

Trabalho realizado no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-

CED/117933/2010) financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Referências

Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from inferentialism for statistics education. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1-2), 5-26.

Ben-Zvi, D. (2006). Using Tinkerplots to scaffold students' informal inference and argumentation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: ISI.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM Mathematics Education, 44*, 913–925.

Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences, 18*, 165–199.

Dierdorp, A., Bakker, A., van Maanen, J., & Eijkelhof, H. (2012). Supporting students to develop concepts underlying sampling and to shuttle between contextual and statistical spheres. *Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Topic Study Group 12*. Seoul, Korea: ICME. [Online: http://www.icme12.org]

English, L. D. (2014). Establishing statistical foundations early: Data modeling with young learners. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*, Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: ISI.

GAISE Report (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: The American Statistical Association. [Online: http://www.amstat.org/education/gaise]

Leavy, A. M. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 9(1), 46-67.*

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1/2), 152-173.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

McPhee, D., & Makar, K. (2014). Exposing young children to activities that develop emergent inferential practices in statistics. In K. Makar, R. Gould, & B. de Sousa (Eds.), *Sustainability in statistics education: Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, the Netherlands: ISI.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Developing young children's informal inference skills in data analysis. *Statistics Education Research Journal, 7,* 83–106.

Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education: Proceedings of the Seventh International Conference of Teaching Statistics*, Salvador, Brazil. [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: ISI.

Rubin, Hammerman & Konold, (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Working Cooperatively in Statistics Education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CDROM]. Voorburg, The Netherlands: ISI.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

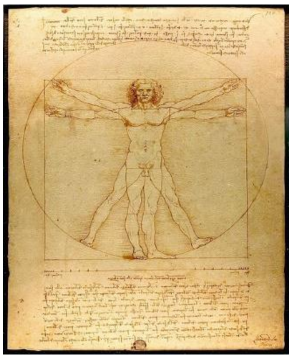
Watson, J. (2008). Exploring beginning inference with novice grade 7 students. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 59-82. [Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/serj]

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7(2), 40-58.*

TAREFA – O corpo humano: um estudo na escola

O *Homem Vitruviano* é um desenho famoso que acompanhava as notas que Leonardo da Vinci fez, no ano 1490, num dos seus diários. Este descreve uma figura masculina separada e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num círculo e num quadrado.



Este desenho baseia-se numa famosa passagem do arquiteto romano *Marcus Vitruvius*, no terceiro livro do tratado *De Architectura*, por volta do primeiro século AC, em que descreve as proporções perfeitas do corpo humano masculino. Por exemplo, nesse livro é referido que:

- um **palmo** é o comprimento de quatro dedos
- um **pé** é o comprimento de quatro palmos
- o comprimento dos braços abertos de um homem (**envergadura**) é igual à sua altura.

Vitruvius já tinha tentado encaixar as proporções do corpo humano dentro da figura de um quadrado e um círculo, mas as suas tentativas ficaram imperfeitas. Foi apenas com Leonardo da Vinci que o encaixe saiu corretamente perfeito dentro dos padrões matemáticos esperados. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Homem_Vitruviano_(desenho_de_Leonardo_da_Vinci))

Como caracterizarias os alunos do 3.º ciclo da tua escola, **no que diz respeito a algumas das medidas referidas por Vitrúvio, por exemplo, altura, pé e envergadura?**

Parte I

1. Pensa que informação será necessária para responder a esta questão e como proceder para recolher os dados, respondendo às seguintes questões.

a) Qual é a população em estudo?
b) Qual é a dimensão da amostra com que poderemos trabalhar?
c) Indica como proceder para escolher uma amostra representativa.
d) Quais algumas variáveis a estudar? São qualitativas ou quantitativas? São contínuas ou discretas?

2. Indica um procedimento que conduza à escolha de uma amostra enviesada (não representativa).

Parte II

1. Propomos-te agora a exploração dos dados que recolheste e que já se encontram numa base de dados do *TinkerPlots*.

a) Que questões interessantes poderias colocar sobre estes dados quanto a:

- altura média dos alunos;
- envergadura de rapazes e raparigas;
- relação entre a envergadura e a altura dos alunos;
- outro aspeto que consideres relevante estudar.

b) Qual pensas ser a resposta a essas questões? Explica em que te baseaste para responder.

c) Responde a duas das questões que formulaste na questão 1.a) recorrendo a representações gráficas e verifica as tuas conjeturas.

2. A partir dos dados recolhidos sobre a tua turma elabora um pequeno texto sobre o que prevês que aconteça com a **totalidade dos alunos do 3.º ciclo da escola**, quanto aos aspetos considerados na questão 1.a). Não te esqueças de explicar em que baseaste a tua previsão.

PROMOVER A COMPREENSÃO DE REPRESENTAÇÕES NO 3.º ANO

Isabel Velez
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
velez@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: Nesta comunicação analisamos as práticas de Sara, uma professora do 3.º ano na exploração de uma tarefa, com especial atenção no modo como promove a compreensão das representações. Os dados foram recolhidos através da gravação em vídeo das aulas e da recolha dos trabalhos dos alunos e foram analisados em três momentos de realização da tarefa: introdução, trabalho autónomo dos alunos e discussão de resultados em grande grupo. Os resultados mostram que a forma como a professora organiza a exploração da tarefa e o modo como atua contribuem para que os alunos recorram a diferentes representações e usem estratégias distintas. Para promover o uso das representações e levar os alunos a estabelecer conexões, a professora questiona-os de forma aberta, guia-os e desafia-os a estabelecer conexões. A promoção da reflexão nos seus alunos é a atividade que coloca mais dificuldades à professora.

Palavras-chave: Tarefas, Práticas dos professores, Representações.

Introdução

As práticas dos professores, nomeadamente, o que estes fazem na sala de aula e as decisões que tomam, influenciam fortemente as aprendizagens dos alunos. Em particular, a forma como utilizam as representações na sala de aula influencia não só a compreensão dos alunos relativamente às representações (Stylianou, 2010) mas também o desenvolvimento do seu raciocínio matemático. Estando as representações e o raciocínio tão fortemente relacionados e sendo o desenvolvimento do raciocínio um objetivo fundamental do ensino desta disciplina, é importante perceber de que forma os professores promovem a compreensão das representações nos seus alunos.

Tripathi (2008) refere a importância do professor promover a utilização de vários tipos de representações relacionadas com o mesmo conceito para que os alunos os entendam melhor. Pelo seu lado, Acevedo Nistal et al. (2009) e Webb, Boswinkel e Dekker (2008) sugerem que, para promover a aprendizagem e compreensão das representações simbólicas, os professores podem começar por encorajar os seus alunos a criar e utilizar representações informais. No entanto, pouco se sabe sobre o modo como os professores lidam com as representações na sala de aula. Nesta comunicação pretendemos compreender de que forma uma professora explora uma tarefa com os seus alunos, com especial atenção à forma como promove a aprendizagem das representações.

Práticas dos professores e representações

Uma representação é uma construção física ou mental definida por um conjunto de características e pelas conexões que estabelece com diversos conceitos (Tripathi, 2008). Um dado conceito ou ideia matemática admite muitas vezes uma multiplicidade de representações. Perante um problema é necessário escolher a representação ou combinação de representações mais adequada para a respetiva resolução. Bruner (1999) distingue as representações ativas (objetos e movimentos), icónicas (desenhos e símbolos não matemáticos) e simbólicas (símbolos matemáticos). Pelo seu lado, Thomas, Mulligan e Goldin (2002) referem três tipos diferentes de representações: pictóricas (imagens e desenhos não matemáticos), icónicas (traços, círculos, e pontos) e notacionais (linguagem matemática). Finalmente, Webb, Boswinkel e Dekker (2008) referem a existência de representações informais (muito relacionadas com o contexto), preformais (com uma relação próxima do contexto mas que incluem também aspetos formais) e formais (notação e linguagem matemática). No trabalho com as representações podem surgir algumas dificuldades por parte dos alunos. Assim, conhecer várias representações sem as compreender pode originar problemas na escolha da representação mais adequada (Acevedo Nistal et al., 2009). A dificuldade na compreensão das relações existentes entre as várias representações pode também gerar obstáculos na compreensão e aprendizagem das representações (Goldin, 2008).

Representar é um processo complexo em que uma representação pode ter vários significados e um significado pode ter várias representações (Goldin, 2008). Por isso, durante a realização de uma tarefa, as representações que o professor privilegia e a forma como as explora têm um papel importante na aprendizagem e compreensão das representações por parte dos alunos. Bishop e Goffree (1986) indicam que os professores devem promover a interpretação das representações e o estabelecimento de conexões entre elas. Sugerem que, para além das representações informais dos alunos, os professores usem outro tipo de representações que estes já compreendam, permitindo-lhes assim o estabelecimento de conexões entre várias representações. Estes autores referem a importância dos professores respeitarem o ritmo de aprendizagem dos alunos, possibilitando-lhes compreender, utilizar e estabelecer conexões entre as diferentes representações. Através da observação e análise das representações dos alunos, os professores podem tentar identificar as suas dificuldades e também compreender o seu raciocínio, ou seja, o modo como fazem inferências a partir de informação conhecida (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). Assim, numa tarefa, ao apresentar e explicar as suas representações os alunos dão aos professores a oportunidade de conhecer e compreender o seu raciocínio (NCTM, 2000).

As tarefas selecionadas pelos professores e a forma como estes conduzem a sua realização na sala de aula são aspetos centrais da prática dos professores (Ponte & Chapman, 2006). Durante a realização de uma tarefa a atividade dos alunos depende do que o professor faz, do papel que assume, de como introduz a tarefa, das questões que coloca e da forma como gere a discussão de resultados em grande grupo (Swan, 2007). Ponte (2005) sugere que a realização de uma tarefa envolve três momentos principais: (i) introdução, que pode ser realizada coletivamente com a participação dos alunos ou guiada em exclusivo pelo professor e em que é discutido o enunciado da tarefa e é feita a negociação de significados; (ii) trabalho dos alunos, em que os alunos resolvem a tarefa tanto quanto possível autonomamente (de forma individual, a pares ou em pequeno grupo); e (iii) discussão de resultados em grande grupo, onde os alunos apresentam e explicam as soluções encontradas, desenvolvem a sua capacidade de comunicar e de justificar as respostas dadas; é também neste momento que se verifica a sistematização de toda a informação mais relevante.

Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) identificam as possíveis ações do professor durante a discussão de resultados em grande grupo: (i) convidar, (ii) desafiar, (iii) apoiar ou guiar, e (iv) informar ou sugerir. Por sua vez, a atividade dos alunos numa tarefa pode ser analisada relativamente à compreensão das representações e ao desenvolvimento do seu raciocínio. Isto leva-nos a definir diversas ações específicas do professor relativamente às representações e ao raciocínio, diretamente relacionadas com a atividade dos alunos durante a realização de uma tarefa (tabela 1).

Tabela 1. Ações dos professores relacionadas com a atividade dos alunos numa tarefa.

Atividade dos alunos (relativa a representações)	Ações do professor Representações
Produzir/Escolher	Promover a escolha livre de representações
	Guiar/Dar pistas através do questionamento
	Sugerir ou dar exemplos
Usar/Transformar	Desafiar os alunos através de questionamento aberto (promovendo conversões ou tratamentos)
	Guiar/Pedir para explicar de forma mais estruturada
	Sugerir alternativas
Refletir	Desafiar para estabelecer conexões, conversões, tratamentos, generalizações ou justificações
	Guiar para estabelecer conexões, conversões ou tratamentos
	Promover a avaliação do trabalho realizado
	Promover a sistematização de informação relevante

Na realização de uma tarefa, a atividade dos alunos pode envolver a produção ou escolha de uma representação ou estratégia, a utilização ou transformação da representação ou estratégia escolhida e, por fim, a reflexão sobre o trabalho realizado. As ações dos professores estão relacionadas com a atividade dos alunos. Desta forma, para apoiar a produção e escolha de representações e estratégias, os professores podem (i) promover a escolha livre de representações ou estratégias, (ii) dar pistas sobre a representação ou estratégia a utilizar questionando e guiando os alunos, ou (iii) sugerir explicitamente ou dar exemplos da representação ou estratégia que os alunos devem utilizar. Relativamente à atividade dos alunos de usar ou transformar as representações ou estratégias escolhidas, os professores podem (i) desafiar os alunos através do questionamento aberto promovendo a transformação de representações (conversões ou tratamentos, na aceção de Duval, 2006) ou a reestruturação de estratégias, (ii) pedir aos alunos que expliquem de forma mais estruturada as representações ou estratégias que escolheram, ou (iii) sugerir aos alunos alternativas às suas representações ou estratégias. Na terceira fase da atividade dos alunos, no que diz respeito às representações, os professores podem desafiar ou guiar (dependendo do tipo de questionamento utilizado) os alunos no estabelecimento de conexões entre representações ou na realização de conversões ou tratamentos. Para promover o raciocínio dos alunos, os professores podem encorajá-los (i) a generalizar ou (ii) a justificar as suas estratégias. Podem ainda procurar promover (i) a avaliação do trabalho realizado e (ii) a sistematização de informação relevante.

Metodologia da investigação

Esta comunicação é parte integrante de um estudo sobre as práticas de professores de 1.º ciclo num agrupamento de escolas na zona de Lisboa. Nesta comunicação analisamos as práticas de uma professora, Sara, com cerca de 5 anos de serviço, que integrou em 2012/13 a equipa de trabalho constituída por quatro professores de 3.º ano e pela primeira autora. A escolha desta professora prende-se com o facto de na sua aula terem surgido episódios ilustrativos de uma grande variedade de situações. No início da investigação a equipa definiu os tópicos que gostaria de abordar ao longo do ano e a investigadora sugeriu-lhes algumas tarefas. Durante entrevistas individuais iniciais os professores consideravam as suas práticas como promotoras do recurso de diversos tipos de representações por parte dos alunos. Nesse sentido, referiam que permitiam que estes utilizassem as representações que considerassem mais adequadas, ao mesmo tempo que os tentavam encaminhar para a utilização da linguagem matemática. Numa das sessões de planificação, tendo em conta a sua avaliação das necessidades dos seus alunos na resolução de problemas com números inteiros, os professores escolheram a tarefa que analisamos nesta comunicação. A realização da tarefa ocupou cerca de uma hora:

> Numa peça de teatro realizada pelo 3.º A, o João, o Pedro e o Ulisses queriam ser o rei. A Ana, a Inês e a Estrela disputaram o papel de rainha. Quantos pares de rei/rainha poderão ser formados?

Os dados foram recolhidos através da gravação vídeo e áudio da sessão de planificação e da recolha dos registos escritos (representações escritas) dos alunos na aula. As representações orais dos alunos (ou seja, em linguagem oral) foram recolhidas a partir dos diálogos aluno-aluno e aluno-professor através de gravações áudio e vídeo. Os dados foram analisados através de análise de conteúdo tendo em conta os três momentos da aula indicados por Ponte (2005). As representações escritas dos alunos (recolhidas dos seus registos pessoais ou do quadro) foram categorizadas a partir das definições de Bruner (1999), Thomas, Mulligan e Goldin (2002) e Webb, Boswinkel e Dekker (2008) (tabela 2). Considerámos ainda representações mistas quando os alunos usam diferentes tipos de representações, simultaneamente.

Tabela 2. Categorização das representações.

Representações	
Ativas	Informais
Pictóricas	
Icónicas	Pré-formais
Simbólicas	Formais
Mistas	

Por sua vez, as estratégias dos alunos foram categorizadas como se indica na tabela 3, em que uma variável (por exemplo, rapazes) se representa com letras e a outra variável (nesse caso raparigas) com números. As estratégias não planeadas verificam-se quando os alunos não planeiam a ordem de formação de pares. Nas estratégias semiplaneadas os alunos escolhem uma das variáveis e apresentam-na de modo ordenado, enquanto nas estratégias planeadas ambas as variáveis são apresentadas ordenadamente. As ações do professor foram categorizadas de acordo com a tabela 1.

Tabela 3. Categorização das estratégias dos alunos.

Estratégias dos alunos	
Não planeadas	a1,b2,c1,b3,c2,c3,a2,a3,b1
Semiplaneadas	a2,a3,a1,b3,b1,b2,c3,c2,c1
Planeadas	a1,a2,a3,b1,b2,b3, c1,c2,c3

Realização da tarefa

Introdução. Promovendo a interpretação da tarefa em coletivo, depois de pedir a André que leia o enunciado do problema, Sara questiona alguns alunos.

Sara:	Então vamos lá tomar atenção… André o que é que tu percebeste do exercício? (o aluno lê novamente o enunciado). Sem ler… Olha, sem ler . . .
André:	Então… O João, o Pedro e o Ulisses querem ser reis…A Ana, a Inês e a… Querem ser rainhas…
Sara:	Queriam ser rainhas… E qual era a pergunta?
André:	A pergunta era quantos pares de reis e rainhas…

Sara: Quantos pares de reis… O que é um par de rei e rainha? (os alunos começam a falar ao mesmo tempo e mostram estar confusos) . . . Então vamos tomar atenção… Boris! Quando é que eu tenho um par rei/rainha?
Boris: Quando é um casal…
Sara: Quando tem um casal… Tem que ter um rei e uma rainha! Então e com esses meninos eu quero ter par rei/rainha… Vamos tentar descobrir, quantos pares é que eu consigo formar com esses meninos… Para já… Quantos meninos é que eu tenho?
Boris: Três!
Sara: E quais são os meninos?
Alunos: O João, o Pedro e o Ulisses… (a professora escreve no quadro)
Sara: E as meninas? Quais são as meninas?
Alunos: A Ana, a Inês e a Estrela… (professora escreve no quadro)

Através de questionamento aberto Sara guia André a explicar o que entendeu das condições do problema. Face às dificuldades do aluno, decide questioná-lo de forma mais estruturada, o que faz com que se aperceba que existe um problema de interpretação com a palavra “par”. Este problema é rapidamente resolvido por Boris, que, face ao pedido para interpretar a palavra, sugere outro significado (a palavra “casal”). Aproveitando a definição dada pelo aluno, a professora continua a guiar a discussão, questionando os alunos de forma estruturada e recordando as condições do problema.

Quando termina a introdução da tarefa, alguns alunos interpelam Sara e tentam responder oralmente. A professora interrompe o modo de trabalho coletivo e incentiva os alunos a trabalharem autonomamente:

Leonardo: Podemos fazer assim… Por exemplo…
Sara (interrompe-o): Então faz lá… No teu caderno! Está bem? Não quero ouvir os “por exemplos”… Quero que tu me faças… Por esquemas! Quero que tu me expliques porquê! Eu não quero que me digam só quantos são! Quero que me expliquem, quais são os pares! E porquê! Porque é que vocês acham que é determinado número!

Sara informa os alunos sobre o que é e não é pretendido (incitando ao uso de representações escritas) e, ao mesmo tempo, guia os alunos, pedindo-lhes para explicar e justificar a sua resposta nos seus cadernos.

Trabalho dos alunos. A partir deste ponto, os alunos trabalham individualmente, enquanto a professora circula pela sala observando o que fazem e questionando-os. Sara observa a resposta escrita de Carlos (figura 1) perguntando-lhe quantos são os pares. O aluno responde oralmente (representação oral), dizendo que há nove pares possíveis:

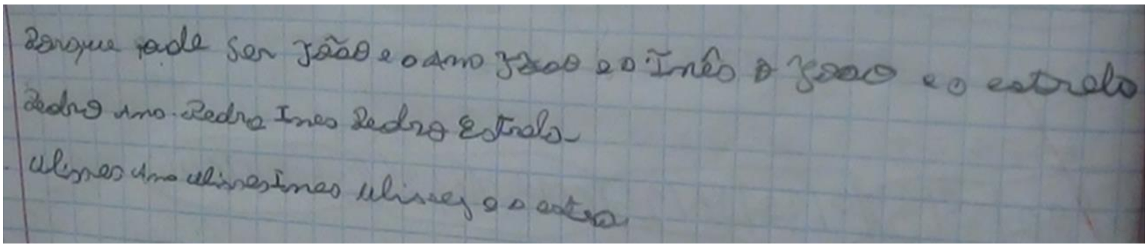


Figura 1. Representação de Carlos.

Sara: Então ao todo quantos pares são? . . .

Carlos: Nove!

Sara: E porquê? Como é que tu viste? (silêncio do aluno) Estiveste a formar esses pares… Ou olhaste e viste logo que podiam ser nove?

Carlos: Eu fiz num quadro (referindo-se à representação que utilizou)… O João e a Ana, João e a Inês e o João e a Estrela… E depois fiz igual nas outras vezes [conjuguei um rapaz com todas as raparigas]…

Carlos tinha conjugado todos os pares possíveis de rei/rainha, através de uma estratégia planeada, que mostra no seu registo. Ou seja, o aluno converteu a sua representação oral inicial numa representação simbólica, conjugando, de forma planeada, cada rapaz com as três raparigas, seguindo sempre a mesma ordem (“E depois fiz igual nas outras vezes”). Sara começa por guiar o aluno, através de questionamento aberto, repetindo a pergunta que consta no enunciado do problema “Então ao todo quantos pares são?” Face ao silêncio de Carlos, Sara pede-lhe que explique a representação escrita (que o aluno denomina de “quadro”) e a estratégia que utilizou, recorrendo a um questionamento mais estruturado.

De seguida, Sara analisa a resposta de Mauro, que apresenta uma representação diferente (mista), ligando com traços uma dada rapariga a diferentes rapazes (figura 2):

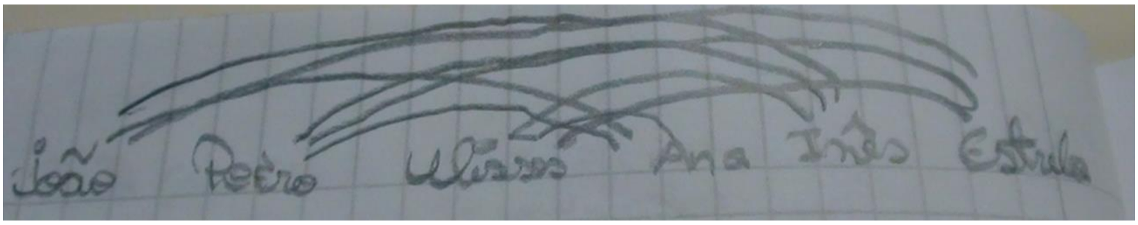


Figura 2. Representação de Mauro.

Sara (em voz alta): Boa Mauro!

Mauro: Eu acho que não se percebe muito bem…

Sara (em voz alta): Eu acho que se percebe muito bem… Explica lá…

Mauro: Fiz assim: Ulisses-Ana, Pedro-Ana e João-Ana… (aponta para a ligação entre os nomes). Depois fiz Ulisses-Inês, Pedro-Inês e João-Inês… E depois fiz Ulisses-Estrela, Pedro-Estrela e João-Estrela…Nove!

Sara: E dá quanto? No total?

Mauro (começa a contar, apontando para o início das ligações dos rapazes): Seis… São três… Dá nove!

Sara começa por elogiar em voz alta o aluno, pedindo-lhe para explicar a representação e a estratégia que utilizou de forma a obter a sua resposta. Ao mesmo tempo encoraja os colegas a encontrar também uma representação adequada e interessante. Ao sentir o reforço positivo da professora, Mauro fica motivado e explica a sua estratégia. Nas suas intervenções, Sara desafia-o algumas vezes através do questionamento aberto (“Explica lá…”, E dá quanto?”) e no final desafia-o a dar outra explicação acerca de como chegou à resposta dada a partir da sua representação.

Mariana é a única aluna da turma que produziu uma representação matemática simbólica (figura 3). Sara questiona-a:

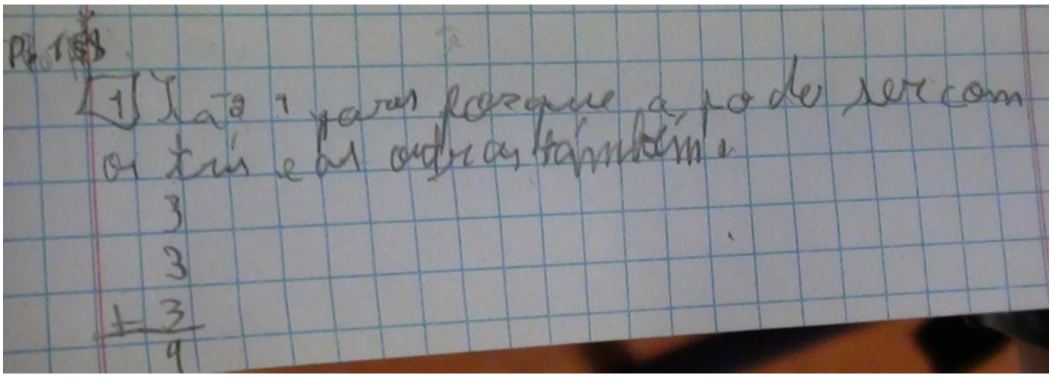


Figura 3. Representação de Mariana.

Sara: Eu não percebi como é que tu chegaste a este resultado aqui… Explica-me lá isto (aponta para o cálculo vertical)…

Mariana: Isso eu fiz… A Ana com eles os três [rapazes] (referindo com o dedo a primeira parcela “3”), a Inês com eles os três (referindo a segunda parcela “3”) e a Estrela com eles os três… E deu nove!

Sara: Muito bem! Embora o escrito (refere-se à resposta escrita da aluna) não esteja perfeito… (para a investigadora) A justificação dela é correta… (para a aluna) Então vamos tentar aqui, melhorar a tua frase… Podes dizer: “Porque cada menina”… Pode formar quantos pares?

Mariana: Três…

Depois de ler a resposta escrita da aluna e de a considerar pouco clara, Sara questiona de forma aberta Mariana para que explique a sua representação e a sua estratégia e promove o tratamento da representação utilizada. Face à facilidade com que a aluna explica a representação simbólica que utilizou (explicitando o significado de cada parcela), Sara compreende que esta utilizou uma estratégia planeada e sugere uma forma para responder de modo claro ao problema guiando a aluna para o estabelecimento de conexões entre a linguagem matemática simbólica e o registo escrito.

À medida que vai circulando, Sara elogia algumas das resposta dos alunos, principalmente quando apresentam representações invulgares na sala de aula mas adequadas, o que funciona simultaneamente como um encorajamento. Leonardo é um dos alunos que tentou responder oralmente no início da tarefa e que se sente motivado com as palavras da professora, convertendo a sua representação oral numa representação icónica (figura 4). Habitualmente, é um dos primeiros alunos a responder corretamente por escrito, mas desta vez investe algum tempo na escolha da representação e da estratégia mais adequadas:

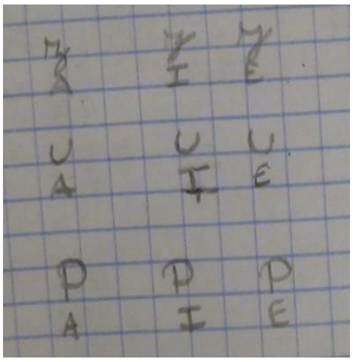


Figura 4. Representação de Leonardo.

Sara:	Então Leonardo… Explica-me lá…
Leonardo:	O "J" tá aqui… É de João… O "I" é de Inês… Ai!…Então… (apontando para as iniciais) Ana, Inês e Estrela. O U que é do Ulisses é Ana, Inês e Estrela (aponta para o P) é do Pedro com Ana, Inês e Estrela… São os nove pares que podemos formar…
Sara:	Os nove pares que podemos formar, muito bem! Gostei desta representação (em voz alta)!

Sara guia o aluno (através de questionamento aberto) a explicar a sua representação e a sua estratégia. Leonardo descreve com facilidade a estratégia planeada e a representação icónica que utilizou. No final da explicação do aluno, a professora dá-lhe um feedback positivo e elogia a sua representação em voz alta, encorajando os restantes alunos a seguirem o exemplo do colega.

Discussão. Depois do trabalho autónomo, Sara dá início à discussão coletiva dos resultados e pede a Jonas que apresente a sua resposta no quadro (figura 5).

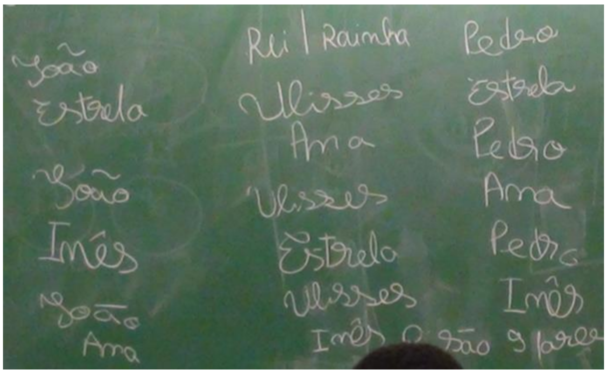


Figura 5. Representação de Jonas.

Sara: . . . Então e quantos pares são?
Jonas: São nove…
Sara: Então… Escreve isso aqui em baixo… (Jonas escreve a resposta). Então… Vamos lá todos tomar atenção… Jonas… Queres tentar explicar esse esquema que fizeste? Explica-me lá porque é que tu fizeste assim...
(silêncio)
Jonas: Fiz aqui o João… (silêncio)
Sara: E porque é que tu escolheste o João? O João e a Inês? O João e a Estrela…? Porquê? Porque é que tu fizeste um esquema assim?
Jonas: Para fazer quais os pares que dava para fazer… Então eu fiz [os pares]…
Sara: Fizeste os pares… E não sabes porquê? Apeteceu-te fazer assim? Foi?
Jonas: Então… Estava a tentar fazer um rapaz… (silêncio)
Sara: Estavas a tentar fazer um rapaz e depois a rapariga… É isso?
Jonas: É…
Sara: Está bem… Toda a gente fez assim?
Alunos: Nãoooooo…

Jonas é um aluno muito tímido, com muita dificuldade em expressar-se. Durante o trabalho autónomo dos alunos, Sara verificou que a representação simbólica e a estratégia semiplaneada que utilizou estavam corretos, e decide pedir-lhe que explique a sua solução à turma. No entanto, face às dificuldades de comunicação de Jonas, Sara, que começou por questionar o aluno abertamente, opta por questioná-lo de forma mais estruturada (dizendo “Explica-me lá”) ajudando-o a explicar aos colegas como pensou. No final, sente necessidade de sistematizar a informação transmitida pelo aluno.

De seguida, Sara pede a Mauro (o único aluno a recorrer a este tipo de representação) que apresente a sua resposta:

Sara: Mauro… Queres explicar como é que tu fizeste? Anda lá explicar como é que tu fizeste…
(Mauro vai para o quadro e pega num pedaço de giz…)

Sara: Como é que tu fizeste? Explica aos teus colegas como é que tu fizeste? Como é que chegaste ao teu resultado? . . .

Mauro: Eu escrevi os nomes . . . Posso fazer [no quadro]?

Sara: Podes. (Mauro começa a fazer o seu esquema e desenha o primeiro traço – figura 6).

Figura 6. Representação de Mauro (1.ª parte).

Sara: Isso é o quê?

Mauro: O que está ligado? É um par!

Sara: É um par… Qual é o par?

Mauro: Ulisses e Ana!

Sara: Ulisses e Ana! Ele tem ali um par… Ulisses e Ana! Mais? (aluno continua a fazer pares e Sara lê o que o aluno faz)… Pedro e Ana… João e Ana… E a seguir (figura 7)?

Figura 7. Representação de Mauro (2.ª parte).

Mauro: Pedro e Inês…

Sara: O Pedro e a Inês… E o João e a Inês… E era a Estrela… O João e a Estrela… E a seguir o que é que tu fizeste? Acho que já me perdi! (aluno indica que falta fazer pares com a Estrela). Ah! Falta a Estrela, sim! Então… Fizeste o João e a Estrela…

Leonardo (ao mesmo tempo que Mauro completa o esquema): O Ulisses e a Estrela…

Sara (ao mesmo tempo que Mauro completa o esquema): . . . Se vocês repararem… Quantos pares é que pode fazer o João?

Alunos: Nove!!

Sara: Quantos pares é que fez aqui o João (aponta para o esquema de Mauro e circula o início das três linhas – figura 8)?

Figura 8. Representação de Mauro e Sara.

Alunos: Trêsss!!

Sara: Três pares… O Pedro pode fazer… (aponta e circula o início das três linhas)

Alunos: Três!!!

Sara: E o Ulisses pode fazer… (aponta e circula o início das três linhas)

Alunos: Três!!

Sara: Mais três pares! OK, podes sentar-te… Muito bem!

Sara guia Mauro, através de questionamento estruturado, para que explique a sua representação e a sua estratégia. Por vezes, quando considera que a explicação do aluno é insuficiente, sistematiza a informação mais relevante, para que todos compreendam a estratégia do colega. No final, guia os alunos no estabelecimento de conexões entre a representação de Jonas (que listou todos os pares em grupos de 3) e a representação de Mauro (dando especial enfoque aos 3 traços), para que a turma compreenda que através de duas representações diferentes se obtém a mesma solução (3 grupos cada um com 3 pares). Seguidamente, aproveitando a interpretação da representação de Mauro, Sara desafia implicitamente os alunos a estabelecer conexões entre a representação dos alunos anteriores e a de Mariana, a quem pede que explique a sua representação simbólica. No entanto, à semelhança de Jonas, a aluna tem dificuldade em comunicar os seus resultados aos colegas:

Sara: Mariana … Queres vir explicar o que é que tu fizeste? (aluna vai ao quadro) Como é que resolveste o teu exercício… Diz lá… Olhem que eu quero ouvir a Mariana! (…)

Mariana: A Estrela e o João, a Ana e o João, a Inês e o João. Depois fiz outra vez a Estrela com o Ulisses, a Inês com o Ulisses e a Ana com o Ulisses (enquanto enumera os pares, a aluna conta-os pelos dedos).

Sara: Ela viu que… Podia fazer os… A Ana com o João, A Inês com o João e a Estrela com o João… Então o João pode fazer quantos pares?

Alunos: Três…

Sara: Com três não foi? Então vá…Coloca lá… (aluna escreve "3" no quadro) Depois ela fez a Ana e o Pedro, a Inês com o Pedro e a Estrela com o Pedro. Então Quantos pares é que pode fazer o Pedro…

Alunos: Três!!

Sara: E ela…Colocou lá o 3… Depois fez a Inês com o Ulisses, a Estrela com o Ulisses e a Ana com o Ulisses… Quantos pares é que pode fazer o Ulisses?
Alunos: Três!! E a seguir o que é que tu fizeste?
Mariana: Fiz a soma… (figura 9)

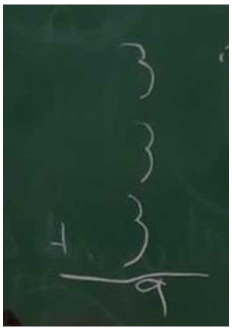


Figura 9. Representação de Mariana.

Sara: E a seguir fez a soma! Muito bem!
Mariana: E dava nove!

À semelhança do que fez com os outros alunos, Sara convida Mariana a apresentar a sua solução e a explicá-la aos colegas. Inicialmente, pede-lhe que explique como pensou, questionando-a de forma mais estruturada. Ao sentir-se constrangida perante a turma, a aluna não recorre à representação simbólica que utilizou durante o trabalho autónomo mas a uma representação ativa (conta pelos dedos). A professora alterna as suas ações, questionando a aluna de forma estruturada e sistematizando a informação mais relevante. Com a sua ajuda, Mariana utiliza a representação simbólica a que tinha recorrido até que, no final da sua apresentação se sente motivada a estabelecer uma conexão entre a estratégia e a representação que utilizou e os resultados dos colegas anteriores ("dava nove!!").

A partir da representação simbólica na forma de cálculo vertical de Mariana, que ficou registada no quadro, Sara desafia os alunos:

Sara: Olha então vou-vos ensinar um truque…!! Então vamos lá tomar atenção… Quantos rapazes é que eu tenho?
Alunos: Três!!
Sara: E quantas meninas?
Alunos: Três!!
Sara: Cada menino pode fazer três pares…
Fernando: Professora! São três pares de três!
Mauro: É três vezes três!
Sara: Então também podes fazer 3×3 (escreve no quadro) que dá…
Alunos: Nove!!

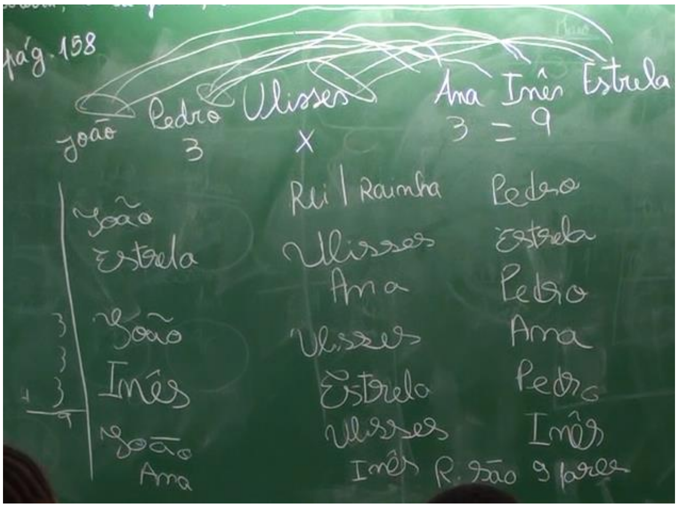


Figura 10. Representações utilizadas pelos alunos durante a discussão.

Sara convida os alunos a participar na sistematização, ao referir que “lhes vai ensinar um truque” e com isso capta imediatamente a sua atenção. Através do questionamento estruturado, começa lentamente a rever todos os dados do problema, referindo as representações apresentadas pelos diferentes alunos. A certa altura, com o auxílio visual das representações dos alunos (que se encontram registadas no quadro – figura 10), faz um comentário que aparentemente é apenas recordar uma conclusão a que já se chegou na turma (“Cada menino pode fazer três pares”). Na realidade, a professora desafia os alunos a ir mais além, o que é correspondido por Fernando e Mauro, tendo o último concluído, usando uma representação simbólica, que a resposta é 3×3.

Discussão e conclusão

Durante a introdução da tarefa, Sara, questiona os alunos de forma estruturada, guiando-os na identificação dos elementos principais do problema e sistematizando informação que considera relevante.

Durante o trabalho dos alunos, perante aqueles que tentam responder oralmente ao problema, Sara reforça a necessidade de apresentar por escrito as respostas. Esta ação faz com que os alunos reflitam nas estratégias apresentadas e nas representações que as suportam. Assim, enquanto alguns concluem que a solução apresentada inicialmente está errada e pensam numa nova solução, outros investem um pouco mais nas suas respostas, sofisticando as representações e estratégias iniciais. Neste momento da realização da tarefa, a professora desafia alguns alunos a descobrir novas informações através de questionamento aberto (“Quais são esses pares?”), a explicar o seu raciocínio (“Porquê?”, “Como é que tu viste?”, “Explica lá…”) e a questionar as soluções encontradas (“Mas…”, “E ao todo?”). Ao mesmo tempo questiona de forma mais estruturada outros alunos e reforça o desafio colocado inicialmente à turma, para que encontrem estratégias e representações mais sofisticadas. Fá-lo implicitamente ao elogiar em voz alta (quando toda a sua intervenção individual é em voz baixa), as representações apresentadas por alguns alunos.

A discussão de resultados parte das representações dos três alunos que Sara escolheu a partir do que observou durante o trabalho autónomo, que são convidados a apresentar a sua solução. As ações da professora visam sobretudo guiar a turma no estabelecimento de conexões entre as representações apresentadas. No final da discussão, através de questionamento aberto, desafia os alunos a transformar as representações utilizadas noutra representação que considera ser importante identificar (multiplicação).

Na introdução da tarefa, as ações de Sara são essencialmente promotoras da escolha livre de representações e estratégias pelos alunos, o que possibilita o surgimento de diferentes caminhos por parte destes. A interpretação do enunciado do problema (em linguagem oral) requer uma negociação de significados dado que alguns alunos demonstram dificuldade em compreender a palavra “par”. Para ultrapassar esta situação, a professora procura “desformalizar” o enunciado da tarefa, guiando os alunos na conversão da representação dada numa representação menos formal.

Durante o trabalho dos alunos, com o intuito de promover a explicação das representações utilizadas e a explicação e a justificação das estratégias utilizadas, as ações da professora orientam-se principalmente para pedir explicações de forma estruturada, guiando os alunos através de questionamento estruturado, tendo em vista promover o uso adequado das representações e estratégias. Por vezes promove um questionamento aberto, levando-os a explicar de outro modo a sua resolução.

Na discussão de resultados em grande grupo, ao contrário do que acontece no estudo de McClain (2000), as representações dos alunos têm grande relevância. Assim, a partir da exploração das diferentes representações, Sara guia os alunos na compreensão e explicação das representações, relacionando as representações orais dos alunos com as representações escritas. Para além disso, por vezes, desafia os alunos a estabelecer conexões com novas representações e a promover tratamentos (Duval, 2006).

A tarefa proposta admite uma variedade de representações (ativas, pictóricas, icónicas, simbólicas), tendo gerado uma variedade de respostas interessantes por parte dos alunos. A realização correta da tarefa parece resultar sobretudo da capacidade de trabalhar de forma sistemática (isto é, planeada) com uma dada representação, e não tanto da escolha desta ou daquela representação. Note-se que os registos escritos dos alunos e das interações na sala de aula permitem perceber as explicações dos alunos, mas não são totalmente explícitos em relação ao modo como estes pensaram para resolver a tarefa.

Sara pede aos alunos que expliquem as representações utilizadas, questionando-os de forma estruturada para que clarifiquem o seu pensamento e, eventualmente, compreendam o que está errado ou incompleto. Para além disso, dá-lhes oportunidade de refletir sobre o trabalho realizado. De acordo com as dificuldades dos alunos a professora tende a ajustar as suas ações, elevando por vezes o nível de exigência cognitiva das suas intervenções (desafio). Reconhece e valoriza as representações icónicas, e aproveita todas as oportunidades para, a partir delas, apresentar representações simbólicas. Futuros estudos, com tarefas semelhantes e com outros tipos de tarefa, poderão ajudar a perceber se outras práticas são suscetíveis de ter lugar em aulas deste nível de ensino.

Referências

Acevedo Nistal, A., Dooren, W. V., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM*, *41*(5), 627–636.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Goldin, G. (2008). Perpectives on representattion in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

McClain, K. (2000). An analysis of the teachers' role in supporting the emergence of symbolizations in one first-grade classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*, 189-207.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Ponte; J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante,* 22(2),55-82.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

Swan, M. (2007). The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education,10,*217-237.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 117-133.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110-113.

EXPLORANDO TAREFAS DE PADRÕES NO 2.º ANO DO ENSINO BÁSICO

Joana Silva & Ema Mamede
CIEC - Universidade do Minho
joanasilva1989@hotmail.com & emamede@ie.uminho.pt

Resumo
Este artigo centra-se na abordagem aos padrões com alunos do 2.º ano do Ensino Básico, analisando como estes reagem a tarefas sobre padrões. Procura-se responder às seguintes questões: 1) Como entendem os alunos tarefas envolvendo padrões de repetição e de crescimento, em contexto de sala de aula? 2) Quais as dificuldades e as facilidades por eles sentidas na resolução destas tarefas? Implementaram-se 4 tarefas de padrões (3 para continuar sequências e 1 para descobrir o intruso). Adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa com estudo de casos múltiplos, tendo sido estudados três pares de alunos: um par de alunos competentes em Matemática; outro de alunos razoáveis; e um terceiro de alunos com dificuldades em Matemática. Os resultados revelam que as crianças foram capazes de continuar as sequências propostas e de identificar o elemento que quebra a regularidade numa sequência. A exploração das tarefas em sala de aula constituiu um veículo para resolver problemas e estimular o raciocínio matemático dos alunos, tendo resultado num ambiente de trabalho motivador e interessante para eles. Constituiu também a oportunidade dos alunos desenvolverem a comunicação matemática oral, sendo que a escrita revelou-se ser mais difícil para estes alunos. Os alunos mais competentes em Matemática manifestaram mais facilidade na resolução das tarefas e explicação das suas resoluções, sendo tudo mais difícil para os alunos com mais dificuldades. O rigor na resolução das tarefas, bem como nas suas explicações parece ter evoluído progressivamente em todos os alunos.

Palavras-chave: padrões, regularidades, resolução de problemas.

Introdução

Uma tarefa matemática pode ser entendida como um instrumento facilitador da aprendizagem do aluno. Para Stein e Smith (1998) é entendida como componente da atividade da sala de aula direcionada para o desenvolvimento de uma ideia matemática particular, que pode envolver vários problemas relacionados entre si, ou um trabalho mais prolongado sobre um único problema mais complexo. No sentido amplo, a tarefa inclui a atividade que resulta do envolvimento dos alunos nela, incluindo a interpretação da tarefa de modo a dar-lhe sentido, o modo como o professor orienta a atenção do aluno e o estímulo à reflexão ou à aprendizagem da experiência de envolvimento na atividade iniciada pela tarefa. Watson e Mason (2007) referem que a reflexão, a discussão, o trabalho individual ou em grupo, o tempo de ponderação e o uso de recursos são relevantes para a exploração das tarefas em sala de aula. À luz desta orientação desenvolveu-se um trabalho de intervenção na sala de aula sobre padrões.

De acordo com Orton (1999), umas das dificuldades em definir padrão reside no facto da palavra ter uma variedade de significados diferentes, podendo por exemplo ser usada para referir uma disposição particular ou arranjo de formas, cores ou sons onde se detetam regularidades. O termo padrão é de difícil definição, mas da literatura podemos depreender que se associa a termos como regularidade, sequência, ordem e estrutura.

Relativamente aos tipos de padrões existentes, Orton (1999) considera que se podem distinguir padrões dentro do campo geométrico, onde o tipo de regularidade assenta na ideia de simetria, ou ainda dentro do campo numérico (sequência numérica). Vale e Pimentel (2009) distinguem padrões de repetição e de crescimento afirmando: "um padrão de repetição é um padrão no qual há um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente" e "nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Há padrões de crescimento lineares e não lineares, ou seja, cuja tradução algébrica pode ser feita, ou não, através de uma expressão polinomial do 1º grau" (p.14). Zazkis e Liljedahl (2012) dividiram-nos da seguinte forma: padrões numéricos, padrões geométricos, padrões em procedimentos computacionais, padrões lineares e quadráticos, e padrões repetidos. Mas, mais do que ressaltar a diversidade de classificações de tipos de padrões existentes na literatura, interessa aqui centrar a atenção nos contextos em que os padrões podem surgir.

Este trabalho aborda maioritariamente padrões de repetição. Os diferentes contextos em que podem surgir são relevantes, destacando-se em particular os contextos numéricos e figurativos. Conhecer as reações dos alunos a tarefas sobre padrões, centrar a atenção no seu modo de pensar na resolução de tarefas específicas sobre padrões ajuda a alargar o conhecimento sobre aquilo que é possível abordar em sala de aula, com crianças em níveis iniciais de escolaridade, contribuindo assim para o conhecimento sobre as tarefas.

Sobre tarefas para a sala de aula

Pensar o ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula é uma tarefa complexa. Rezat e Strasser (2012), adaptando o triângulo didático professor-alunos-matemática a um tetraedro didático, propõem um modelo em que os vértices são constituídos pelo professor, pelos alunos, pela matemática e por artefactos mediadores (ver Figura 1). Estes artefactos mediadores incluem manuais escolares, instrumentos tecnológicos, tarefas, entre outros.

Para Rezat e Strasser (2012), cada uma das faces triangulares deste tetraedro diz respeito a uma perspetiva particular sobre o papel das tarefas na educação matemática: no triângulo professor-tarefa-aluno, o professor assume o papel de orquestrador da atividade matemática do aluno; o triângulo aluno-tarefa-matemática representa a atividade de aprendizagem da matemática do aluno mediada pela tarefa; o triângulo professor-tarefa-matemática diz respeito à atividade de mediação da tarefa na representação da matemática efetuada pelo professor num quadro de instrução; a última face do tetraedro é o triângulo original e constitui a base do modelo que é aluno-professor-matemática. Esta estrutura tetraédrica mostra bem a complexidade envolvida no papel didático que as tarefas assumem no contexto de ensino/aprendizagem em sala de aula. Desde logo ressalta o facto de os alunos serem afetados pelas ideias do professor sobre a natureza da matemática e a sua aprendizagem, aspeto que sai do foco deste artigo, mas também a atividade de aprendizagem da matemática do aluno mediada pelas tarefas propostas na aula de matemática.

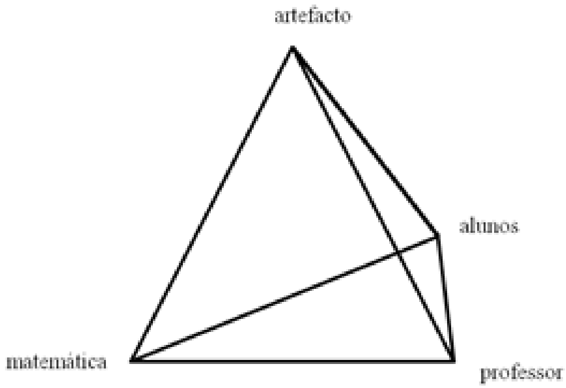


Figura 1 – Modelo tetraédrico (Adaptado de Rezat & Strasser (2012), "Tethahedron model of the didactical situation").

O que as crianças aprendem é fortemente determinado pelas tarefas que lhes são proporcionadas (Hiebert & Wearner, 1993). As tarefas só por si não são geradoras de aprendizagem, mas, de acordo com Watson e Mason (2007), possibilitam a iniciação, estruturação e enquadramento para a pedagogia e a aprendizagem.

É um facto que as tarefas que cada professor seleciona constituem a base para a aprendizagem dos alunos (Stein & Smith, 1998) e a sua natureza influencia, de forma significativa, o tipo de trabalho que é desenvolvido na aula de Matemática. Em educação matemática, as tarefas são utilizadas para aceder a conteúdos matemáticos, mas também para sublinhar e exemplificar aspetos no âmbito da pedagogia matemática (Liljedahl, Chernoff & Zazkis, 2007). Qualquer tarefa matemática deve aceder a alguma ideia matemática. Contudo, nem sempre é fácil utilizar tarefas matemáticas para aceder a ideias matemáticas específicas, pois tal exige uma compreensão ampla e profunda da matemática envolvida na tarefa. A este conhecimento Liljedahl e colegas (2007) designam por conhecimento da tarefa – *Task knowledge*. Mas utilizar uma tarefa matemática para aceder a conceitos matemáticos na sala de aula requer uma dinâmica particular. À semelhança das ideias de Shulman (1986) sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo - *pedagogical content knowledge*, ou de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento de conteúdo e dos alunos – *knowledge of content and students*, que combina o conhecimento sobre os alunos e sobre a matemática, surge a noção de conhecimento pedagógico da tarefa - *pedagogical task knowledge* - apresentada por Liljedahl et al. (2007). Esta última assenta no pressuposto de que não só é necessário conhecer a matemática envolvida na tarefa, mas também é necessário compreender o conhecimento matemático dos alunos, como indivíduos e como grupo, e ainda ser capaz de mobilizar este conhecimento para a aprendizagem dos alunos. Na realidade, este tipo de conhecimento poderia ainda incluir a capacidade de antecipar e prever que exemplos os alunos podem achar confusos ou difíceis e que tarefas os alunos podem achar interessantes e motivadoras. Ou seja, conhecer que conceções possuem os alunos inclui conhecer como estas podem ser usadas na sala de aula.

O artigo aqui apresentado foca um estudo desenvolvido centrado no triângulo aluno-tarefa-matemática, atendendo à atividade de aprendizagem da matemática do aluno mediada por tarefas sobre padrões implementadas em sala de aula.

Os padrões no ensino da matemática com crianças pequenas

Brocardo, Delgado, Mendes e Rocha (2006) defendem que as crianças devem ter oportunidade de contactar com experiências algébricas desde a educação de infância, de forma a favorecer um futuro estudo mais formalizado da Álgebra e a contribuir para uma contínua formulação de generalizações. Também Palhares e Mamede (2002) argumentam que os padrões, em particular os de repetição, constituem um tema de grande interesse na educação pré-escolar na medida em que servirão no futuro de suporte para a aprendizagem da Álgebra. Esta ideia é também partilhada por Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2006) que defendem que a aprendizagem da Álgebra deve ser iniciada no jardim-de-infância, com recurso à investigação de padrões que sejam estimulantes, promovendo a análise e descrição dos mesmos.

Por forma a fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico, Vale e Pimentel (2009) argumentam que se impõe trabalhar a álgebra através da resolução de problemas envolvendo padrões, visto que a investigação de padrões é uma estratégia poderosa de resolução de problemas, e referem que "a resolução de problemas não rotineiros e não tradicionais é um poderoso caminho que envolve os alunos na exploração e formalização de padrões, levando-os a conjeturar, a verbalizar relações entre os vários elementos do padrão e a generalizar" (p. 10). Vale e Fonseca (2011) consideram que os padrões oferecem aos alunos a oportunidade de desenvolver conhecimentos matemáticos, na medida em que lhes permitem relacionar diferentes conceitos e conteúdos em contextos distintos. Neste sentido, os padrões são um tema imperioso na aquisição de capacidades e processos matemáticos, tais como resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático destacados no Programa de Matemática (DGIDC, 2007) e no documento Princípios e Normas para a Matemática Elementar (NCTM, 2007).

Sobre o tipo de tarefas a explorar com as crianças, Baratta-Lorton (1995) afirma que a capacidade de reconhecer e usar padrões constitui uma valiosa ferramenta na resolução de problemas e pode ainda ter um efeito profundo no desenvolvimento da compreensão matemática da criança. Considera que deve haver oportunidades de experimentar padrões na forma visual, auditiva e física, e atribui ainda grande importância à verbalização de padrões. A autora propõe atividades variadas com padrões enfatizando a transposição de padrões para outras formas, a observação de semelhanças e de diferenças, a análise e comparação de padrões, o reforço da progressão da esquerda para a direita, o raciocínio dedutivo, a conexão de ideias abstratas com o mundo real, a produção e verificação de conjeturas, além da reprodução e extensão e/ou criação de padrões.

Frobisher e Threlfall (2005) defendem que as crianças, nos primeiros anos de trabalho com padrões, desenvolvem capacidades para descrever, completar e criar padrões, transformar uma expressão escrita numa simbólica, ou vice-versa, prolongar um padrão para resolver problemas, explicar a generalização associada a um padrão e usar os padrões para estabelecer relações. Também Garrick, Threlfall e Orton (2005) argumentam que a exploração de tarefas que envolvem regularidades, em grupo ou individualmente, constituem oportunidades para as crianças serem desafiadas a verbalizar as suas perceções e incentivadas a expor os seus conhecimentos, desenvolvendo assim a comunicação matemática. Sobre este aspeto, Vale e Pimentel (2009) asseguram ser essencial que os alunos sejam incentivados a descrever, por palavras suas, um padrão e a justificar a forma como o continuam ou constroem, com o objetivo de desenvolver a comunicação matemática. Para as autoras, esta vivência é extremamente benéfica para as crianças, pois permite o conhecimento das variadas formas de continuação que um padrão pode ter.

Os padrões podem sugerir abordagens numéricas, visuais e mistas (Orton, 1999). Os alunos devem, desde os primeiros anos de escolaridade, ser encorajados a observar padrões e a representá-los geométrica e numericamente, começando a estabelecer conexões entre a geometria e a aritmética. Para Vale (2012), o ensino precisa propor tarefas desafiantes que enfatizem compreensão da generalização, através dos seus aspetos numéricos e figurativos, capitalizando a capacidade inata dos alunos de pensar visualmente. Fomentar as representações visuais dos alunos pode passar por levá-los a exprimir o que veem através de outras formas de representação, como sejam, descrever padrões em tabelas utilizando expressões numéricas adequadas (Vale, 2012).

As tarefas com padrões podem facultar aos alunos oportunidades para observar e verbalizar as suas próprias generalizações e traduzi-las numa linguagem mais formal, ajustada à idade. Vale (2012) refere que a generalização envolve pensamentos de ordem superior como sejam por exemplo o raciocínio, a abstração, ou a visualização. Assim, a seleção das tarefas é crucial se se pretendem criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações. A exploração de tarefas de padrões centrada apenas na identificação do que se repete/cresce, ou na continuidade dos padrões pode ser limitativa. Contudo, pode constituir um ponto de partida à abordagem dos padrões com crianças pequenas.

Colocando a atenção na atividade de aprendizagem da matemática do aluno mediada por tarefas sobre padrões, este estudo procura perceber como crianças do 2.º ano de escolaridade do Ensino Básico exploram e entendem os padrões de repetição e de crescimento. Para tal, tentou-se encontrar resposta às seguintes questões: 1) Como entendem os alunos tarefas envolvendo padrões, em contexto de sala de aula? 2) Quais foram as dificuldades e facilidades sentidas pelos alunos na realização das tarefas propostas sobre padrões?

Metodologia

Para perceber como crianças exploram e entendem os padrões adotou-se uma metodologia de investigação qualitativa, pois segundo Bogdan e Biklen (1994), nesta metodologia, o interesse do investigador recai sobre o processo e não tanto sobre os resultados, dando especial atenção à compreensão dos participantes. Utilizou-se uma abordagem interpretativa com recurso ao estudo de caso descritivo (Yin, 2009) que, de acordo com Yin (2009) e Ponte (1994), possibilita a compreensão em profundidade do “como” e do “porquê” da problemática em estudo, não alterando o contexto em questão, mas antes compreendendo-o.

Os participantes foram 6 alunos do 2.º ano do Ensino Básico, de uma turma de 25 alunos de uma escola pública de Braga. Estes 6 alunos foram selecionados pela professora titular da turma, a quem foi solicitado que indicasse 2 alunos competentes na área da Matemática (Maria e Rodrigo); outros 2 alunos razoáveis em Matemática (Ana e Gabriel); e ainda mais 2 alunos (Bárbara e Rui), como tendo mais dificuldades na área da Matemática. Os nomes são fictícios. Segundo a professora da turma, estes alunos não tinham abordado antes o tema Padrões, em sala de aula.

Ao longo de quatro semanas implementou-se uma intervenção de quatro aulas, cada uma com duração média de 120 minutos. A intervenção foi conduzida por uma das investigadoras e autora deste artigo, não tendo sofrido a intervenção da professora titular da turma, que assumiu apenas o papel de observadora não participante.

Durante a intervenção foram propostas a todos os alunos da turma tarefas diversificadas envolvendo padrões de repetição e de crescimento, do tipo numérico e geométrico, em contextos figurativos/visuais. Todavia, a análise aqui apresentada recai apenas sobre os 6 alunos da turma na implementação de 4 tarefas (3 para continuar sequências, 1 para descobrir o intruso).

Todas as tarefas foram lidas em voz alta pela investigadora e questões de interpretação foram colocadas para garantir que os alunos entendiam o que lhes era pedido. As tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares, sendo que no final de cada uma era efetuada a resolução da mesma no grupo turma, em que todos tinham oportunidade de intervir e colaborar. Em todas as tarefas foi solicitado aos alunos que justificassem as suas respostas, oralmente e/ou por escrito.

Ao longo das aulas foram registadas as intervenções dos alunos, os debates criados, as resoluções das tarefas e as dúvidas colocadas, de modo a identificar as facilidades e os constrangimentos das crianças perante as atividades.

A recolha de dados foi efetuada através de gravações com vídeo e fotografias, de anotações escritas do investigador e de registos escritos dos alunos. Esta diversidade procura, assim, assegurar a veracidade e fidelidade dos dados.

Resultados

A análise efetuada foi descritiva e interpretativa debruçando-se em particular sobre as resoluções dos alunos das tarefas propostas. Os resultados aqui apresentados centram-se nos estudos de caso ao longo de das duas primeiras sessões da intervenção, que tiveram lugar com uma semana de intervalo.

A 1.ª sessão foi iniciada com um diálogo com as crianças, por forma a recolher os seus conhecimentos prévios sobre as sequências (ver Transcrição 1).

Maria: Uma sequência é um padrão que se repete, é uma repetição de imagens, de números ou de objetos.”

Inv.: Exatamente! E no nosso dia-a-dia, encontramos sequências em alguma situação?

Gabriel: Podemos encontrar sequências em muitos sítios. Na rua onde moro, os prédios têm todos um número que é depois do outro.

Ana: Em Educação Musical, as notas musicais repetem-se sempre!

Transcrição 1 – Diálogo inicial com os alunos sobre as suas ideias de sequências

Em seguida foram propostas aos alunos 2 tarefas para completar sequências, sendo que na primeira se pedia para identificar o grupo que se repete.

Tarefa 1- Continuação de sequências

A Tarefa 1 era composta por 6 questões sobre continuação de sequências de repetição. Os alunos não mostraram grandes dificuldades na resolução das 5 primeiras questões, tendo-a resolvido sem, praticamente, nem erros. Contudo, referiram que a última alínea era “mais difícil do que as outras”, havendo mesmo quem a tivesse resolvido com algumas imprecisões, como foi o caso do Gabriel (ver Figura 2.1), mas também quem a tivesse resolvido corretamente como a Ana (ver Figura 2.2), explicando “duas bolas brancas e uma preta; uma branca, uma preta e uma branca; uma preta, uma branca e uma branca; etc.”, fazendo a leitura da sequência por triângulos por considerar essa a forma mais fácil de identificar o padrão.

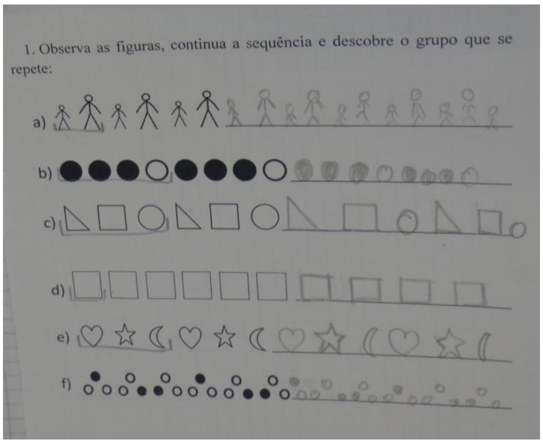


Figura 2.1 – Resolução do Gabriel na Tarefa 1.

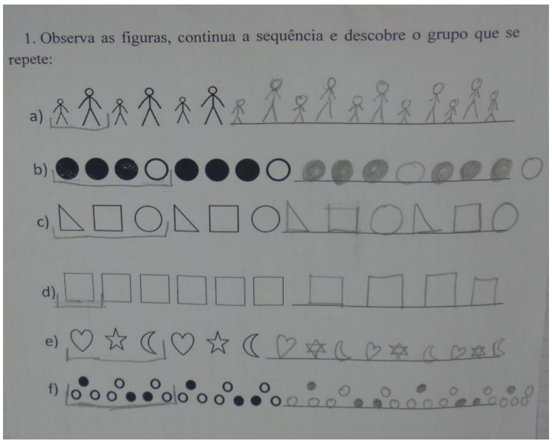


Figura 2.2 – Resolução da Ana na Tarefa1

A Maria e a Ana participaram imenso por iniciativa própria, mostraram muitas vezes vontade em responder às questões e quando eram solicitadas, respondiam com correção. Por exemplo, sobre a questão c), a Maria explica que “Vi que o triângulo, o quadrado e o círculo se repetiam e então fiz a sequência sempre assim: triângulo, quadrado e círculo, triângulo, quadrado e círculo...”.

No momento de discussão das suas resoluções, os alunos foram convidados a explicar ao grupo turma como tinham encontrado as suas soluções para as questões propostas. Para tal projetou-se cada uma das questões e os alunos iam explicando como tinham pensado para resolver a tarefa. A Figura 3 mostra o Rodrigo a explicar à turma como pensou (ver Transcrição 2).

Relativamente aos restantes alunos, participaram espontaneamente um menor número de vezes nas discussões geradas mas, quando questionados diretamente, a participação era igualmente correta. A Bárbara e o Rui distraíam-se com maior facilidade e interagiam pouco com os restantes colegas.

Figura 3 – Rodrigo explica à turma como identificou a regularidade e descobriu a sequência.

Inv.:	Queres então explicar aos teus colegas o que descobriste?
Rodrigo:	Reparei que, na primeira imagem, a bolinha preta estava em cima, na segunda imagem rodou para a direita e na terceira imagem voltou a rodar para a esquerda. Como na imagem a seguir já estava outra vez em cima, descobri que este grupo que se repetia. Foi um bocadinho difícil, mas consegui!

Transcrição 2 – Explicação do Rodrigo à turma sobre a resolução da questão f) da Tarefa 1.

Ao longo das atividades insistiu-se na explicação dos raciocínios, mas encontraram-se alguns obstáculos porque esta não era uma atividade usual para os alunos. Os alunos com mais dificuldades foram os que apresentaram maiores constrangimentos a este nível. Aliás, foi notória a dificuldade dos alunos no trabalho em pares, como lhes tinha sido sugerido no início da intervenção. As interações entre os alunos na resolução dos problemas foram parcas, percebendo-se algum desconforto delas nessa atividade.

Tarefa 2 - Continuação de sequências

A Tarefa 2 foi sobre a continuação de sequências e tinha 3 questões de sequências de crescimento. A primeira questão envolvia uma sequência de crescimento num contexto figurativo. Apenas o Rodrigo conseguiu realizá-la corretamente na totalidade (ver Figura

4.1), os restantes alunos entenderam a sequência como sendo de repetição, como aconteceu à Maria ou ao Rui (ver Figuras 4.2 e 4.3).

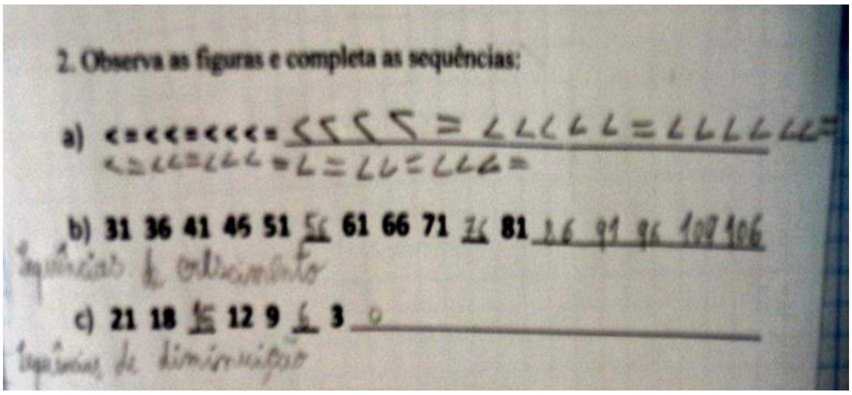


Figura 4.1 – Resolução do Rodrigo na Tarefa 2 de sequências de crescimento.

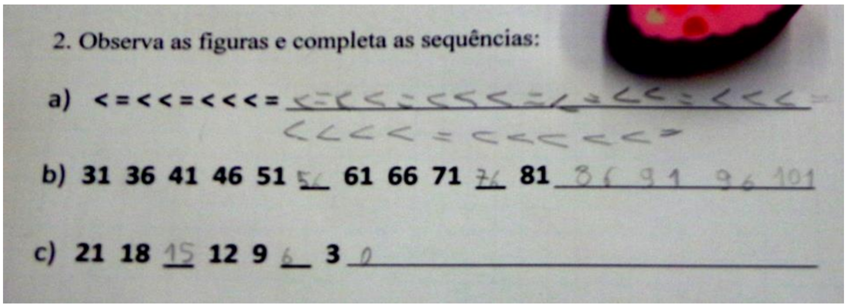


Figura 4.2 - Resolução da Maria na Tarefa 2 de sequências de crescimento.

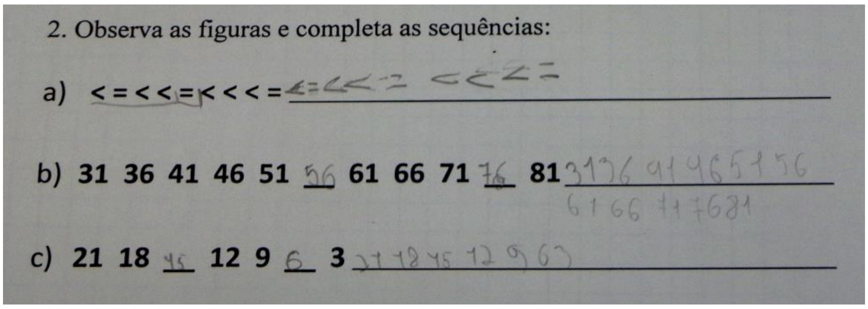


Figura 4.3 - Resolução do Rui na Tarefa 2 de sequências de crescimento.

Sobre a questão a), a Maria descobre que afinal o sinal de menor também aumenta e verbaliza esse facto “Ah! Tinham de ver que o sinal de menor aumenta de termo para termo por isso temos de continuar a aumentá-lo.”

Verificou-se que as sequências de repetição parecem oferecer menos dúvidas aos alunos, principalmente as geométricas. Em contrapartida, os alunos pareciam sentir mais dificuldade nas sequências numéricas de crescimento porque estas requerem um grau de abstração que, em crianças desta idade, podia ainda não estar adquirido na totalidade, mas também porque é mais difícil descobrir a lei de formação das sequências de crescimento. Os padrões de repetição associam-se ao pensamento sequencial enquanto os de crescimento se associam ao pensamento relacional.

A Figura 4.3 mostra a resolução incorreta do Rui nas questões b) e c), antes de ser efetuada a correção. Uma outra causa dos erros observados prende-se com falhas nas operações, pois foi frequente os alunos descobrirem o termo pretendido mas, quando realizavam as operações necessárias para descobrir os termos seguintes, enganavam-se. Esta dificuldade reflete falhas no cálculo, o que é menos preocupante do que se não conseguissem identificar a lei de formação, ou que não reconhecessem uma sequência de crescimento.

A Tarefa 3 estava prevista apenas para o caso dos alunos terminarem antes do previsto e ainda manifestarem interesse e vontade de continuar a trabalhar com sequências. Nela procurava-se descobrir o intruso em 6 situações distintas, com o objetivo de capacitar para a identificação de elementos não pertencentes a uma sequência.

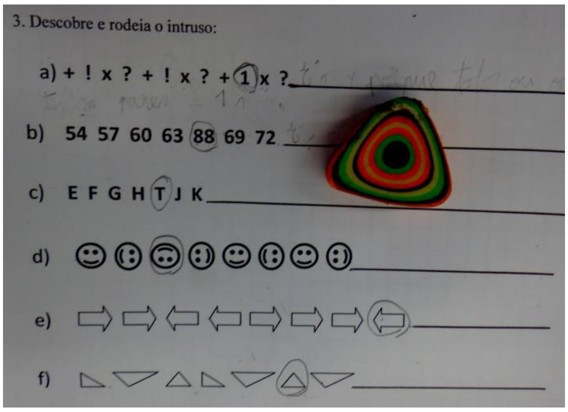


Figura 5.1 – Resolução da Bárbara na identificação do intruso.

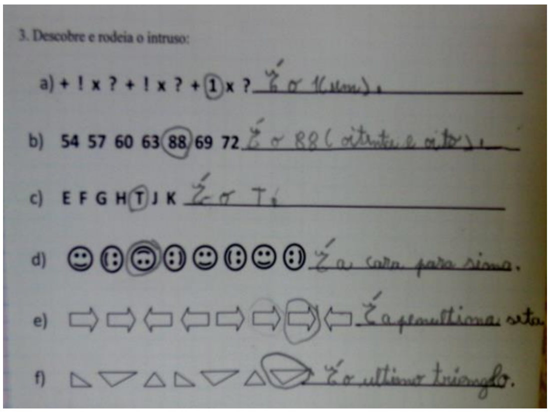


Figura 5.2 – Resolução da Maria na identificação do intruso.

Nenhum dos 6 alunos resolveu corretamente todas as situações, o que talvez tenha acontecido por cansaço e saturação. As Figuras 5.1 e 5.2 mostram, respetivamente, as resoluções da Bárbara e da Maria nesta última tarefa. A Bárbara começa por escrever a explicação, apaga e desiste das explicações escritas (ver Figura 5.1), mas explica oralmente "Esta sequência só tinha símbolos, menos o 1, que é um número. Concluí que esse era o intruso.". A Maria para justificar as respostas, escreve-as (ver Figura 5.2). A Ana, a respeito da questão e) explica "A sequência só tem setas e é duas para a direita, duas para a esquerda, duas para a direita, duas para a esquerda. A única que não estava assim era a penúltima, por isso assinalei essa.". Apesar de tudo, os alunos parecem ter conseguido identificar a quebra de regularidade nas sequências. Claramente mais difícil foi justificar as suas respostas por escrito.

Nas correções em grande grupo, tentou-se que todos os alunos compreendessem as resoluções que surgiam, tendo consciência que há alunos que, apesar de terem dúvidas, não as expõem. No final das resoluções, solicitou-se a algumas crianças que expusessem à turma a forma como tinham resolvido. A partilha é extremamente importante para o enriquecimento e expansão dos conhecimentos das crianças e para a sua motivação. Pois, não só se sentem capazes de concretizar as tarefas com sucesso como promove uma possível melhor compreensão dos conteúdos na medida em que quando são os alunos a explicar, a linguagem usada é mais simplificada, além de ser estabelecida uma organização do raciocínio.

Na 2.ª sessão apresentou-se aos alunos a Tarefa 4 de sequências numéricas, com duas questões, para que as completassem. Os alunos tiveram algumas dificuldades em descobrir a regularidade e completar a sequência da questão a), sendo que apenas dois alunos conseguiram resolver a tarefa sem qualquer ajuda. O Rodrigo e a Maria inicialmente parecem identificar uma lei de formação da sequência, mas no entanto, não são capazes de a continuar corretamente, como ilustram as Figuras 6.1 e 6.2.

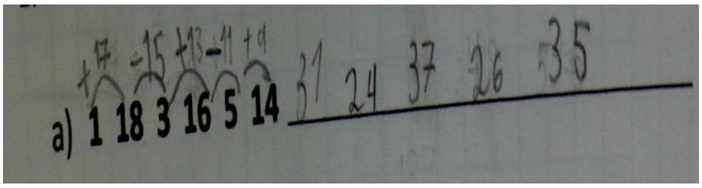


Figura 6.1 – Resolução incorreta do Rodrigo na primeira abordagem à questão a) da Tarefa 4.

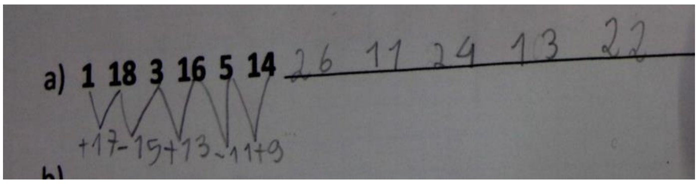


Figura 6.2 – Resolução incorreta da Maria na questão a) da Tarefa 4.

Ao constatar que os restantes alunos não estavam a conseguir perceber aquele padrão, optou-se por ler os números nele apresentados de forma estratégica, ou seja, lendo-os aos pares, de modo a tornar mais claro que a regularidade era mais facilmente descoberta intercalando os termos. Quando se solicitou que explicassem o raciocínio efetuado, conseguiram fazê-lo sem dificuldades, o que mostra que compreenderam bem a sequência. A Figura 6.3 apresenta a resolução da Ana na Tarefa 4, em que explica (ver Transcrição 3):

Inv.: Queres explicar como fizeste?

Ana: Esta sequência era para ver de 2 em 2. Do 1 saltávamos para o 3 e era mais 2; do 3 passávamos para o 5 e também era mais 2. Então, depois do 5 vinha um 7 porque 5 mais 2 dá 7, depois era o 9, 11, 13, 15 e 17. Do 18 que estava no início, saltávamos para o 16 e era menos 2. Fazíamos sempre menos 2 ao número anterior e deu 14, 12, 10, 8, 6, 4 e 2.

Esta foi muito difícil!

Transcrição 3 – Explicação da Ana sobre a sua resolução da questão a).

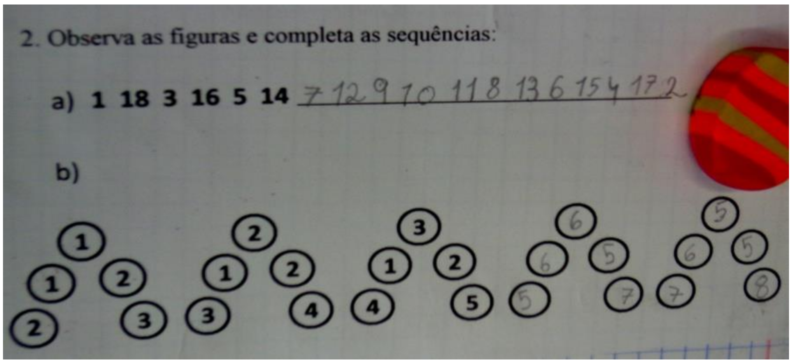


Figura 6.3 – Resolução da Ana na Tarefa 4 sobre continuação de sequências numéricas.

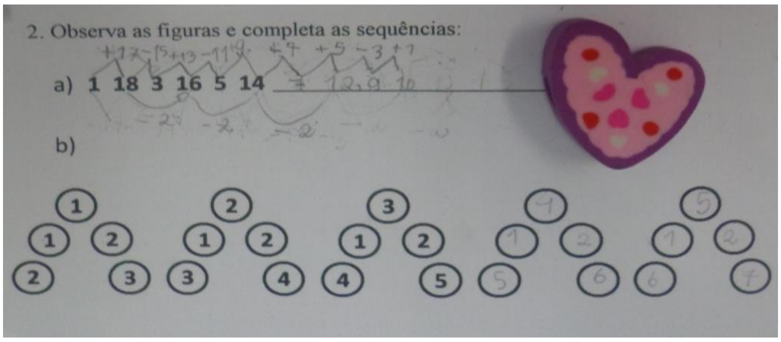
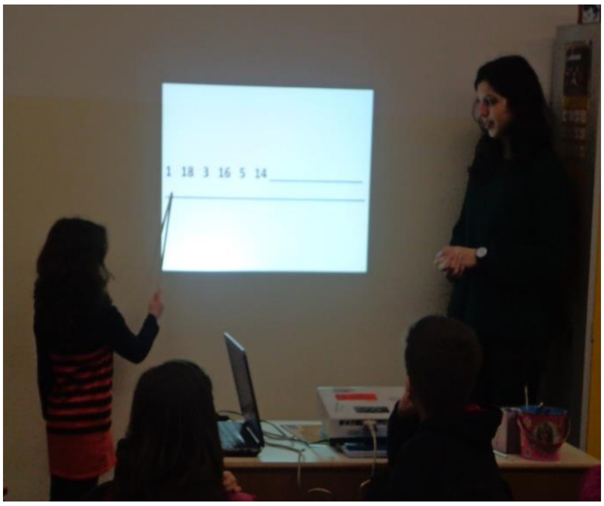


Figura 6.4 – Resolução da Bárbara na Tarefa 4 sobre continuação de sequências numéricas.

Sobre a questão a) desta tarefa, também o Rodrigo explicou "olhei para o 1 e para o 18 e depois vi o 3 e o 16. Reparei que do 1 para o 3 vão 2 e do 18 para o 16 também vão 2. Então, pensei que era mais dois e menos dois!". Também a Bárbara descobriu outra regularidade e estendeu a sua sequência de modo diferente (ver Figura 6.4). A Maria foi explicar à turma como pensou (ver Figura 6.5) tendo apresentado também uma resolução correta.



Figuras 6.5 – Maria explica à turma a regularidade identificada na sequência da questão a).

As exposições das várias resoluções contribuíram para que os alunos, progressivamente, prestassem atenção às explicações e estabelecessem mais diálogos. As crianças escutavam com atenção os colegas e procurando compreender as suas resoluções e nos momentos finais da implementação, investigavam com facilidade novas resoluções.

A questão b) foi bem mais difícil, mas a maioria conseguiu resolver corretamente a tarefa. Foi notória a persistência dos alunos na descoberta da solução e a atenção por eles atribuída às explicações que iam surgindo. Ao contrário do Rui, a Bárbara e a Maria resolveram corretamente a questão b). Sobre a sua resolução, a Maria explicou (ver Transcrição 4):

> **Maria:** Como na fila de cima era 1, 2 e 3, vi que era sempre mais 1 e escrevi o 4 e o 5. Na fila do meio, repeti o 1 e o 2 porque os primeiros também eram assim. Na fila de baixo, repeti o número da pirâmide anterior e adicionei um no número a seguir. Deu 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6 e 7.

Transcrição 4 – Explicação da Maria sobre a sua resolução da questão b).

A Tarefa 4 tinha um grau de dificuldade superior às da aula anterior, o que influenciou o desempenho dos alunos. Nas primeiras tentativas de resolução da questão a), os 6 alunos sentiram dificuldades e nenhum conseguiu concretizá-la com êxito na totalidade. Nesta tarefa, o Gabriel e o Rui sentiram grandes dificuldades na identificação da regularidade.

Globalmente, as quatro tarefas propostas foram desafiantes e motivadoras para os alunos, pois eram diferentes de todas as atividades com que estes já tinham contactado. Envolviam atividades complexas, mas pertinentes e adequadas ao nível de escolaridade dos alunos, e deram aos alunos oportunidade de resolver problemas, estimular o raciocínio e ainda experienciar o desenvolvimento da comunicação. Sobre este último ponto, foi notória a dificuldade dos alunos na descrição e explicação de processos de resolução de forma oral, mas muito mais na forma escrita.

As tarefas propostas constituíram uma novidade para os alunos deste estudo. O seu entusiasmo e motivação ao longo das questões sugerem que os padrões e as sequências deviam integrar a prática de resolução de problemas destes alunos, até como veículo para promover o raciocínio e a comunicação matemática. No momento da resolução escrita, as crianças não respondiam se não soubessem a resposta. Os alunos demonstraram constrangimentos ao nível da comunicação matemática, uma vez que usualmente não explicavam detalhadamente a forma como interpretavam os problemas, nem como os resolviam. As exposições das várias resoluções foram constantes e bastante exploradas. As crianças escutavam com atenção os colegas e procuravam compreender as suas resoluções, tentando implementar as resoluções que eram novidade.

Foi importante facultar aos alunos tarefas que desenvolvessem o trabalho a pares e em grande grupo, de forma a dinamizar as aulas e as atividades, e a estimular os alunos. Inicialmente ofereceram alguma resistência às interações com os colegas, claramente por estarem habituados a resolver as tarefas individualmente, na aula de Matemática.

Considerações finais

As tarefas propostas aos alunos ofereceram-lhes a oportunidade de desenvolver a capacidade de resolução de problemas, comunicação (oral) e raciocínio matemático. O desenvolvimento destas três capacidades constitui uma componente relevante à aprendizagem matemática, como é defendido no Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) ou nos Princípios e Normas para a Matemática Elementar (NCTM, 2007). Os alunos foram incentivados a descrever, por palavras suas e pormenorizadamente, as resoluções de cada problema, promovendo o desenvolvimento da comunicação matemática. Esta descrição permitiu que a turma tivesse conhecimento das resoluções encontradas para o mesmo problema e as debatessem para aferir a sua validade. O raciocínio matemático esteve igualmente em constante evidência, na medida em que os alunos, inicialmente, justificavam as resoluções de forma simples e elementar, e progressivamente, argumentavam de forma mais complexa e completa, com recurso a linguagem matemática mais rigorosa. Ao nível do raciocínio matemático foi ainda identificada alguma resistência e surpresa dos alunos, porque as tarefas que habitualmente resolviam só possuíam uma resolução possível. Esta análise converge com a ideia defendida por Garrick, Threlfall e Orton (2005), Vale e Fonseca (2011) e Vale e Pimentel (2009), de que os padrões são um tema fundamental para a aquisição das capacidades transversais da Matemática.

Em convergência com as ideias de Frobisher e Threlfall (2005), estas crianças desenvolveram capacidades para descrever e completar padrões, prolongá-los para resolver um problema e estabelecer relações, revelando possuir um conhecimento informal e correto sobre as regularidades. As tarefas exploradas neste estudo foram fortemente de observação e continuação de sequências numéricas e geométricas, em contextos figurativos/visuais, mas também de identificação do intruso, em que as crianças reconheceriam elementos não pertencentes às sequências. Os alunos concretizaram mais facilmente os problemas com padrões geométricos de repetição. As maiores dificuldades sentidas pelos alunos neste processo prenderam-se com a continuação de padrões numéricos de crescimento.

A parte do estudo aqui analisada integrou apenas 4 tarefas e 6 alunos, tornando impossível o estabelecimento de generalizações. No entanto, facultam-se indicadores sobre o impacto destas tarefas permitindo antecipar exemplos adequados a alunos destas idades e que constituem uma parte relevante do conhecimento pedagógico da tarefa - *pedagogical task knowledge* (ver Liljedahl et al., 2007).

Este estudo conduz uma análise focada na interação alunos-tarefa-matemática. Contudo, dado ter sido desenvolvido por um curto período de tempo e apenas com um pequeno número de alunos, muito há ainda a descobrir sobre a exploração de padrões neste nível de ensino. Mais tarefas com maior diversidade precisam ser analisadas no âmbito da face alunos-tarefa-matemática do modelo tretraédrico de Rezat e Strasser (2012). Mais ainda, outras faces deste modelo, nomeadamente a professor-tarefa-matemática, carecem de análise urgente. Afinal, estes alunos contataram com padrões pela primeira vez, apesar de todas as recomendações nos documentos curriculares oficiais.

Referências

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Baratta-Lorton, M. (1995). *Mathematics Their Way*. California: Addison-Wesley Publishing Company.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação.

Frobisher, L. & Threlfall, J. (2005). Teaching and Assessing Patterns in Number in the Primary Years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 84-103). London: Cassel.

Garrick, R., Threlfall, J. & Orton, A. (2005). Pattern in the Nursery. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 1-17). London: Cassel.

Hiebert, J. & Wearner, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and student learning in second grade. *American Educational Research Journal*, *30*, 393-425.

Liljedahl, P., Chernoff, E. & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 239-249.

National Council Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Palhares, P. & Mamede, E. (2002). Os Padrões na Matemática do Pré-escolar. *Educare/Educere*, *10*(2), 115-131.

Ponte, J. P. (1994). O Estudo de Caso na Investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Orton, A. (1999). Children's Perception of Patterns in Relation to Shape. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.149-167). London: Cassell.

Rezat, S. & Strasser, R. (2012).From the didactical triangle to the socio-didactical tethahedron: Artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *44*, 641-651

Threlfall, J. (2005). Repeating Patterns in the Early Primary Years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 18-30). London: Continuum.

Watson, A. & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 205-215.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interações, 20*, 181-207.

Vale, I. & Fonseca, L. (2011). Patterns tasks with geometric transformation in elementary teacher's training: some examples, *Journal of the European Teacher Education Network, 6*, 76-86.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). Os Padrões no ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale. T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193-211). Lisboa: Secção de Educação Matemática – Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o Ensino Básico*. Viana do Castelo: ESE- Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões.

Yin, R. K. (2009). *Case Study research: Design and methods* (4th Ed.). Newbury Park: CA: Sage.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2012). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DE TAREFAS BASEADAS EM RECURSOS TECNOLÓGICOS[8]

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL – UIED
amdd@fct.unl.pt

Resumo: Atualmente estão à disposição dos alunos uma grande diversidade de conteúdos eletrónicos. Os manuais escolares são, também eles, acompanhados de recursos tecnológicos (CD-ROMs e portais web) com propostas dirigidas a professores e alunos. Muitos dos materiais que são apresentados nos CD-ROMs e portais web são essencialmente compostos por vídeos, *applets*, *quizzes*, textos e audiotextos. Neste artigo pretende-se discutir o papel que um conjunto de tarefas de cariz tecnológico desempenha na aprendizagem dos alunos que são emersos nestes ambientes de aprendizagem. Partindo da Teoria da Atividade pretende-se investigar de que forma estes recursos, enquanto artefactos mediadores, promovem a aprendizagem dos alunos. Neste sentido serão discutidas algumas das potencialidades e restrições de um conjunto de tarefas disseminadas em CD-ROM e associadas a manuais escolares específicos. É dada especial relevância aos documentos produzidos pelo professor para apoiar o desenvolvimentos das tarefas propostas considerando-os como mediadores da aprendizagem. Os dados empíricos foram recolhidos em turmas de alunos do ensino secundário, 10.º ano de escolaridade, versando sobre os temas das funções e geometria. A metodologia de investigação é de natureza qualitativa, baseada em estudos de caso. Os resultados encontrados apontam para aprendizagens significativas dos alunos quando manipulam diferentes representações dos conceitos, bem como dificuldades de compreensão quando as tarefas propostas usam uma linguagem formal ou simbólica que os alunos têm dificuldade em manejar.

Palavras chave: recursos tecnológicos, teoria da atividade, aprendizagem dos alunos, tarefas

Introdução

O recurso a materiais e ferramentas eletrónicas é uma das componentes essenciais ao desenvolvimento da sociedade atual e a escola não se pode alhear desse movimento. O uso de ferramentas tecnológicas no contexto da sala de aula deve ter em conta aspectos relacionados com o desenvolvimento curricular, a aprendizagem e o uso das tecnologias (Domingos, Carvalho, Costa, Matos & Teixeira, 2008).

Na dimensão curricular assumimos que o currículo pode ser apropriado de diferentes formas. Partimos da categorização de Gimeno-Sacristán (1998) que define seis níveis de decisão curricular: o prescrito (o currículo decidido pela administração central), o

[8] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Promover o Sucesso em Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

apresentado aos professores (através dos mediadores, principalmente dos manuais), o modelado (que é o resultado das representações dos professores sobre os diversos níveis de decisão curricular), o em ação (o que decorre na aula, operacionalizando a perceção dos professores sobre o currículo modelado), o realizado (presenciado por observadores externos) e o avaliado (objeto de apreciação externa). Partindo do currículo apresentado aos professores, através dos manuais e de materiais eletrónicos que lhe estão associados, pretendemos explicitar a forma como o currículo modelado e o currículo em ação se transformam em ferramentas de aprendizagem. Esta abordagem pressupõe que as tarefas apresentadas na ferramenta computacional correspondem ao currículo modelado (pelos seus autores quando interpretam o currículo prescrito) e pelo professor quando aceita essa mesma proposta e a implementa, transformando-o em currículo em ação no ato da sua implementação. De notar que o currículo modelado e o em ação podem ser mediados por outras ferramentas que o professor possa vir a desenvolver, nomeadamente documentos de apoio à sua implementação.

Em Portugal há uma forte tradição de utilização de manuais escolares que são acompanhados por propostas de integração de ferramentas tecnológicas disponibilizadas em CD-ROMs, páginas web, plataformas de aprendizagem, entre outras. Estas materiais são compostos por videos, *applets*, *quizzes*, textos e audiotextos e recentemente integram os manuais em formato digital. O currículo modelado pelos professores assenta essencialmente na utilização do manual adotado, em formato de papel e por vezes recorre a algumas das ferramentas tecnológicas que lhe estão associadas, sobretudo as que não implicam manuseamento por parte do aluno.

É neste contexto que recorremos a um dos mediadores tecnológicos disponibilizados por uma das editoras, "Escola Virtual" no sentido de compreender as dimensões curriculares relacionadas com o currículo modelado e o currículo em ação na aprendizagem dos alunos. Consideramos que este mediador é composto por tarefas de cariz tecnológico que medeiam a aprendizagem dos alunos. Estas tarefas são de natureza diversa, sendo necessária uma especial atenção do professor, quer na sua preparação quer durante a sua implementação. É de referir que o mediador tecnológico usado se apresenta bastante estruturado, seguindo a sequência de aprendizagem apresentada no manual reproduzido em papel.

Quadro teórico

O ensino e a aprendizagem que decorre em ambientes com recurso às tecnologias envolvem quase sempre um pensamento matemático complexo. Por vezes este tipo de pensamento é encarado do ponto de vista cognitivo e tem sido designado por pensamento matemático avançado (Tall, 1991, 2007; Dubinsky, 1991, Dreyfus, 1991). Os processos de representação e abstração permitem-nos passar de um nível de pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado e quando usados neste sentido são muitas vezes processos matemáticos e psicológicos em simultâneo. Neste sentido espera-se que a capacidade de representar objetos matemáticos e de os traduzir em diferentes representações proporcione ao indivíduo uma maior capacidade de abstração que lhe permita manipular mentalmente esses objetos sem ter que os referenciar com procedimentos ou processos que estiveram na sua origem.

O uso de símbolos é uma das principais características no desenvolvimento deste tipo de pensamento e pode ser encarado com um duplo significado, introduzindo alguma ambiguidade entre o procedimento e o conceito. Esta combinação de pensamento processual e conceptual é designada por pensamento proceptual, (Gray & Tall, 1994), e é caracterizado pela habilidade em manipular os símbolos de forma flexível quer como processos quer como conceitos, interligando diferentes simbolismos para o mesmo objeto. É o pensamento proceptual que dá um grande poder através do uso flexível e ambíguo do simbolismo que representa a dualidade entre processo e conceito usando a mesma notação.

A Teoria da Atividade iniciada por Vygotsky e desenvolvida por Leont'ev, assume o seu sistema de atividade coletiva (orientada por objetos e mediada por artefactos) como a unidade de análise e tem sido desenvolvida ao longo de três gerações. Inicialmente assentava na ideia de *mediação* introduzida por Vygotsky no seu modelo triangular transformando-se na tríade *sujeito – objeto – artefacto mediador,* deixando para trás a separação entre o indivíduo e o meio social envolvente (Engeström, 2001). Numa segunda geração, centrada em Leont'ev a unidade de análise deixou de ser individual e passou a incluir ligações a outras áreas envolvidas num sistema coletivo de atividade, focalizando-se agora nas inter-relações entre os objetos individuais e as comunidades (Figura 1).

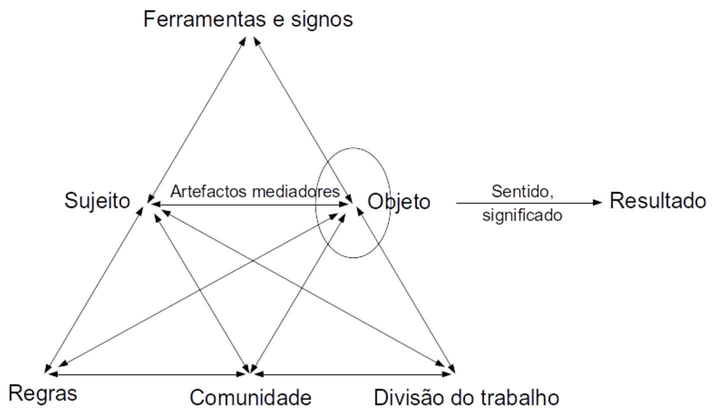


Figura 1. A estrutura do sistema de atividade humana (Engeström, 2001)

Partindo do sistema coletivo de atividade e dando especial destaque ao papel que os artefactos mediadores desempenham na relação entre o sujeito e o objeto, torna-se crucial abordar os conceitos de génese instrumental e génese documental. A génese instrumental (Rabardel, 1995) envolve dois processos, instrumentalização e instrumentação, processos estes que permitem a elaboração e a evolução dos instrumentos. A génese documental é um constructo que aprofunda o conceito de artefacto definindo a noção de documento como a construção de esquemas de utilização na ação dos professores mediada pelos recursos didáticos (Gueudet & Trouche, 2012).

Em resumo estamos a utilizar como suporte teórico as dimensões social e cognitiva da aprendizagem, mediada por artefactos tecnológicos enquadrados nas dimensões curriculares do currículo modelado pelos professores e o currículo em ação. É neste contexto que vamos procurar compreender o papel desempenhado pelas tarefas reproduzidas em meios computacionais e o seu impacto na aprendizagem dos alunos que são emersos nestes ambientes de aprendizagem.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia de natureza qualitativa e é baseado em dois estudos de caso. Pretende-se compreender o papel desempenhado pelas tarefas que são apresentadas em formato eletrónico, formando sequências de aprendizagem que simulam em grande parte a organização dos conteúdos apresentados no manual escolar. A partir da observação e gravação das ações dos alunos na resolução das tarefas propostas pela ferramenta, caracteriza-se a aprendizagem realizada por estes considerando que esta é mediada pela sequência das tarefas apresentada pelo recurso em uso. Procura-se ainda caracterizar o papel desempenhado pelo professor ao intervir nas sequências de aprendizagem que são apresentadas nesses materiais.

O trabalho aqui reproduzido faz parte de um estudo mais amplo que procurou compreender o papel da ferramenta tecnológica “Escola Virtual” no ensino e aprendizagem de conteúdos programáticos em diferentes níveis de escolaridade. Na base da abordagem aos dados empíricos que aqui se apresentam estão dois trabalhos de investigação realizados em duas turmas do 10.º ano de escolaridade lecionadas por dois professores diferentes, ainda que da mesma escola. Cada uma destas turmas configurou um estudo de caso. Numa turma foi usado o CD-ROM no tema das Funções enquanto que na outra o mesmo CD-ROM foi utilizado no tema da Geometria. Em cada um destes estudos de caso foram observados grupos de alunos em interação com a ferramenta tecnológica com o objetivo de compreender o papel desempenhado por esta na aprendizagem dos conceitos em estudo. Os alunos envolvidos tinham como livro de texto adotado o manual corresponde à Editora que é proprietária dos materiais tecnológicos associados à “Escola Virtual”. Em ambos os casos, os alunos usam diariamente o manual escolar e esta foi a primeira vez que utilizaram o recurso da Escola Virtual como ferramenta de aprendizagem, nestes tópicos. Os professores consideram-se tecnologicamente competentes, embora desenvolvam este tipo de atividades de forma esporádica.

Cada uma das turmas usou duas aulas para completar a abordagem proposta pela ferramenta. Nestas aulas os professores assumiram formas diferentes de implementar o seu uso. Enquanto que no grupo que estudou o tema das funções havia um guião que indicava os procedimentos a seguir para a realização das várias tarefas, no grupo que abordou o tema da geometria apenas estavam disponíveis as informações fornecidas pela ferramenta, assumindo o professor que estas seriam suficientes para a abordagem dos conceitos em estudo. A exploração dos conteúdos é baseada na manipulação da ferramenta pelos alunos. Estes conteúdos não tinham sido abordados pelo professor anteriormente, sendo a manipulação da ferramenta iniciada com o processo de aprendizagem proporcionado pela realização das tarefas propostas. Dada a falta de equipamentos computacionais os alunos estão organizados em grupos de 2, de modo a que toda a turma possa ter acesso ao manuseamento da ferramenta eletrónica em uso. As sessões de trabalho dos grupos de alunos foram gravadas através de *software* próprio que além do som grava toda a ação desenvolvida no ecrã do computador. Foi assim possível identificar um conjunto alargados de casos particulares onde é possível observar os alunos em contexto na manipulação da ferramenta e na construção do seu conhecimento acerca dos tópicos em estudo.

Ambiente de aprendizagem da ferramenta

Os tópicos que são objeto de análise neste artigo referem-se ao tema da Geometria (método cartesiano no plano) e Funções (estudo da função quadrática). A ferramenta tecnológica utilizada apresenta uma estrutura semelhante em ambos os tópicos. Inicia-se com a introdução do tema a partir de um problema em contexto (Figura 2). Esta introdução é baseada numa apresentação áudio e acompanhada por imagens que vão surgindo no ecrã ou mesmo por uma animação em vídeo. Posteriormente são apresentadas definições áudio do conceito em estudo (Figura 3) acompanhadas de representações visuais, que são ligadas à simbologia formal do conceito e por vezes seguidas de exemplos concretos. Nos audiotextos apresentados a linguagem utilizada é a linguagem formal que é reproduzida nos manuais e segue as representações simbólicas apresentadas no ecrã.

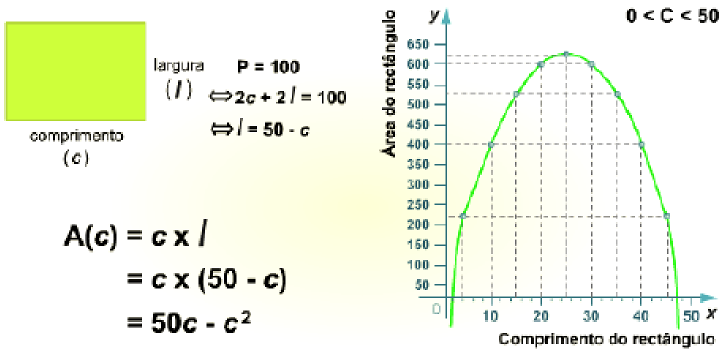


Figura 2 – Exemplo de tarefa inicial

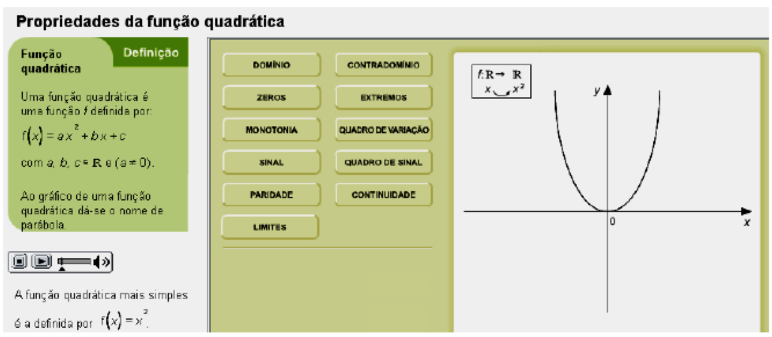


Figura 3 – Exemplo de tarefa com definições de conceitos

Após a definição dos conceitos são apresentados exercícios de aplicação dos mesmos, onde o aluno pode observar determinadas representações (gráficos, domínios planos, etc.) e tem que lhe associar a respetiva representação algébrica (muitas vezes escolhida de entre um conjunto de representações dadas, Figura 4). Há ainda situações onde é possível o aluno proceder a manipulações de seletores para poder induzir sobre o papel dos parâmetros envolvidos (Figura 5).

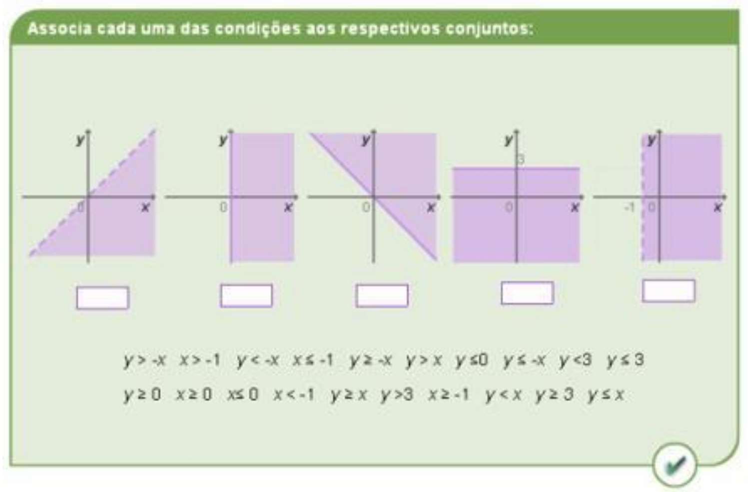


Figura 4 – Exemplo de tarefa de geometria

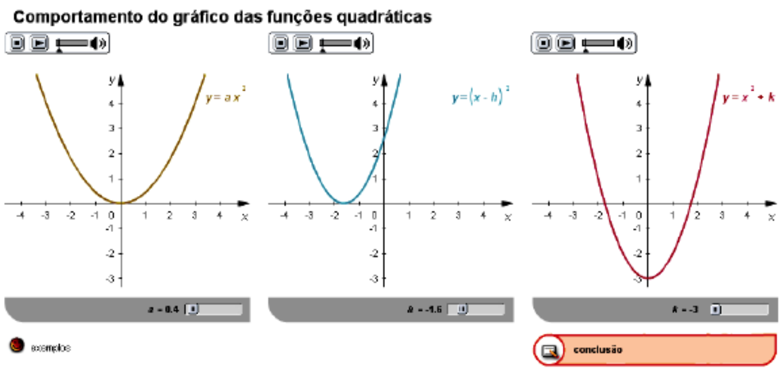


Figura 5 – Exemplo de tarefa de funções

A sequência de aprendizagem apresentada neste ambiente tecnológico reproduz um formato próximo do que é transcrito no manual do aluno, destacando-se deste pela existência de audiotextos, vídeos e *applets* interativos e os exercícios de consolidação dos conceitos que são autocorretivos ou permitem uma verificação das respostas sem a intervenção do professor.

Implementação do ambiente de aprendizagem e desempenho dos alunos

Em ambas as turmas os alunos trabalharam em grupos de dois por computador, dispondo de um CD-ROM, previamente instalado no mesmo. Dado que a ferramenta se apresentava bastante estruturada, os professores propuseram inicialmente aos alunos que seguissem a estrutura apresentada no CD, tendo apenas a turma que abordou o tema das funções sido munida de um guião que indicava a sequência a seguir. Os professores de ambas as turmas acompanharam as interações dos alunos com a ferramenta e entre os elementos do grupo.

Tratando-se de uma primeira abordagem à ferramenta no tópico em estudo, as questões da génese instrumental foram rapidamente ultrapassadas. Como exemplo desse desempenho podemos analisar o diálogo que se estabeleceu entre o Alberto e a Elisabete na resolução de uma das tarefas propostas:

Alberto - O 1º vídeo explica bem a definição de concavidade de um gráfico de uma função num dado intervalo. Percebeste Elisabete?

Elisabete - Sim. Um gráfico tem a concavidade voltada para cima se nesse intervalo está acima de todas as rectas tangentes à curva. Está correto o que eu disse?

Alberto - Ok. Vamos agora ao 2º e 3º vídeos. O sinal de a, coeficiente do termo de grau 2, na função quadrática, faz variar o sentido da concavidade da parábola. Correto?

Elisabete - Sim. Já percebi. E quanto maior é o valor absoluto de a mais a parábola se aproxima do eixo das ordenadas.

Alberto - Vamos ver o resumo e a conclusão.

Elisabete - O CD-ROM explica muito bem este estudo da concavidade da parábola, não achas?

Os alunos apropriaram-se rapidamente do uso da ferramenta mostrando-se cada vez mais eficientes no seu manuseamento. É também de relevar a capacidade de os alunos compreenderem o papel que os parâmetros desempenham na representação algébrica permitindo que consigam relacionar as diferentes representações do conceito em estudo, mesmo sem ter um papel ativo na sua manipulação. Esta capacidade de compreensão do papel dos diferentes parâmetros continua evidente na resolução de outra tarefa proposta na sequência de aprendizagem, que é ilustrada na figura 5:

Elisabete - O 1º vídeo consolida o que já aprendemos atrás: o parâmetro a vai fazer com que a parábola estique ou encolha na horizontal.

Alberto - Explica-te melhor!

Elisabete - Repara que quanto mais se aumenta o valor absoluto de a mais a parábola de equação $y = ax^2$se fecha em torno do eixo das ordenadas.

Alberto - Ok. Vamos agora ver para que serve o h em $(x - h)^2$?

Elisabete - A parábola desloca-se horizontalmente, para a direita e para esquerda, ao variar h.

Alberto - E é a abcissa do vértice da parábola.

Elisabete - Bestial. Já entendi! E o k faz subir ou descer a parábola. E é a ordenada do vértice.

Alberto - Vamos analisar o resumo e a conclusão.

Elisabete - Parece-me que já entendi!

Verifica-se assim que a aprendizagem dos conceitos pode ser potenciada pela possibilidade de manusear as diferentes representações do mesmo. A manipulação de seletores proporcionou uma melhor compreensão da representação algébrica e gráfica, ajudando os alunos a desenvolver o seu pensamento proceptual. É também de destacar o papel mediador deste tipo de tarefa que envolve a manipulação de diferentes representações.

Como já foi referido anteriormente a ferramenta que os alunos utilizaram apresentava-se bastante estruturada e exibia várias tarefas de avaliação das aprendizagens realizadas na forma de *quizzes* e outras tarefas autocorretivas. Nalgumas destas tarefas os alunos foram convidados a resolvê-las individualmente (um por computador). Neste contexto os alunos mostraram uma forte motivação e um bom desempenho, mesmo tratando-se de tarefas rotineiras de resolução de exercícios, como se pode constatar pelo diálogo entre a Elisabete e o Alberto no final de um *quizze* com espaços para preencher:

Elisabete -	Das 36 respostas possíveis e certas errei 4. Não acertei, por exemplo, no cálculo dos zeros e das coordenadas do vértice da parábola de $y = -x^2 - 2$. Mas voltei a fazer este exercício [mas agora na folha de rascunho] e verifiquei onde errei.
Alberto -	Acertei tudo à primeira.

A realização destas tarefas, por vezes próximas do exercício e com um caráter repetitivo, proporcionou aos alunos uma maior interação e predisposição para a sua resolução, sendo por vezes esta resolução abordada em competição entre grupos ou entre os elementos do grupo. A existência deste tipo de tarefas com possibilidade de obter uma pontuação em função dos acertos realizados proporcionou por vezes o estabelecimento de uma competição entre os grupos e desta forma permitiu melhorar o desempenho na realização de procedimentos algébricos, ainda que rotineiros.

Se por um lado este tipo de tarefas pode propiciar o desenvolvimento e consolidação dos conceitos em estudo também pode trazer alguns constrangimentos, caso o professor não acompanhe o processo de resolução que os alunos venham a implementar. A existência de autocorreção das respostas (Figura 6) pode conduzir os alunos a uma resolução por tentativa e erro, levando a um acerto total das respostas, sem que o aluno compreenda efetivamente os conceitos matemáticos envolvidos.

Estes constrangimentos foram ultrapassados pelos professores, através da produção de documentos escritos (com a reprodução da imagem dos *quizzes* das tarefas em estudo) que os alunos eram solicitados a resolver antes de recorrerem à ferramenta para posterior verificação das suas respostas. Esta é uma das abordagens em que o professor sente necessidade de recorrer à produção de documentos que orientem a atividade do aluno, produzindo artefactos que conduzem a esquemas de utilização, envolvendo assim uma dimensão da génese documental.

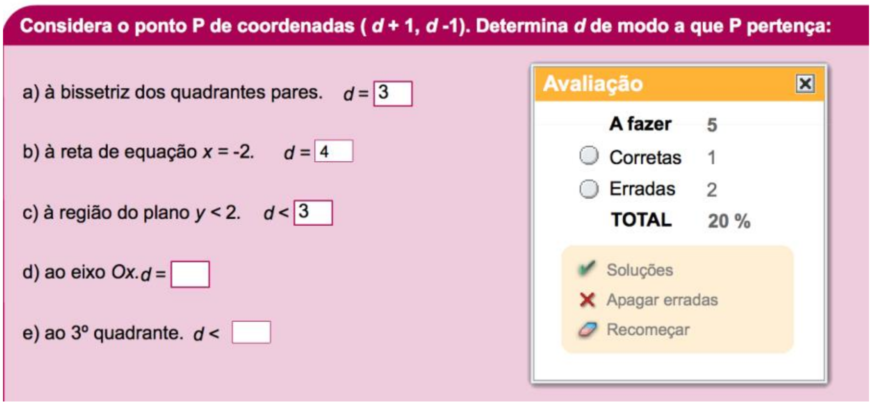


Figura 6 – Exemplo de tarefa de geometria com autocorreção

A ferramenta em estudo apresenta ainda algumas tarefas que comportam outros constrangimentos à aprendizagem dos alunos. Um desses constrangimentos prende-se com a linguagem formal que é usada nos vídeos e audiotextos. Um exemplo dessas dificuldades está patente no diálogo seguinte que pode ser apoiado pela figura 2:

Alberto -	Percebeste a resolução deste problema?
Elisabete -	Tive dificuldade em calcular os valores que o comprimento do rectângulo pode tomar.
Alberto -	Queres que repita o vídeo?
Elisabete -	Sim.
Elisabete –	[depois da 2ª passagem do vídeo] Que valores pode tomar c? Explica-me tu este passo porque o vídeo não está muito claro neste ponto.
Alberto -	Vejamos: a largura $l = 50 - c$ não pode ser negativa nem nula. Logo, $50 - c > 0 \Leftrightarrow -c = -50 \Leftrightarrow c < 50$.
Elisabete -	E c maior que zero pois é um comprimento. E o valor de c que corresponde a uma área máxima? Como achavas este valor sem teres ouvido a resposta dada pelo vídeo? Reparaste que a parábola desenhada no CD-ROM não passa na origem? Está errado porque quando $c = 0$, a área vale zero. Já encontramos um erro no CD-ROM!

Outra dificuldade introduzida por algumas das tarefas prende-se com a utilização de representações simbólicas que, devido ao formalismo com que são apresentadas, causam obstáculos à compreensão aos alunos. O diálogo seguinte é exemplo do que acabamos de referir:

Professor:	Vamos lá ver. Vocês não estão a perceber?
Vanessa:	Não, eu não estou a perceber.
Professor:	Não estás a perceber o quê?
Vanessa:	Não percebo esta coisa dos sinais.
	[Ouvem mais um pouco a locução da negação]. (…)

Professor: Então qual é a dúvida?
Vanessa: É aqui *stor*, eu não consigo perceber estas expressões.
[Aponta para as expressões da figura 7]

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2\} \qquad \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2\}$$

$$\sim (y \leq 2) \quad \Leftrightarrow \quad y > 2$$

$$\sim (y > 2) \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 2$$

Figura 7 – Exemplo de tarefa envolvendo simbolismo

As dificuldades manifestadas pelos alunos assentam em tarefas que envolvem audiotextos e vídeos, reproduzindo todo o formalismo envolvido no conceito e apelando a representações simbólicas que os alunos nem sempre dominam.

Estas dificuldades na compreensão dos conceitos levaram a que os alunos tivessem que repetir várias vezes o mesmo vídeo ou audiotexto tendo mesmo, por vezes, que pedir ajuda ao professor. Com o objetivo de ultrapassar estas dificuldades foi necessário o professor intervir sobre a proposta de currículo que estava a ser implementada, essencialmente através de dois tipos de abordagem: alteração da sequência de aprendizagem proposta na ferramenta e elaboração de propostas intermédias baseadas em documentos próprios produzidos para o efeito. Esta necessidade de intervenção no currículo modelado induzida a partir do currículo em ação mostra-nos como o acompanhamento e a integração das várias dimensões curriculares pode ser crucial para promover a aprendizagem e levar os alunos a desenvolver o seu pensamento matemático. É ainda de salientar que mesmo perante a utilização de ferramentas computacionais bastante estruturadas a utilização de documentos de apoio se torna num artefacto poderoso para desenvolver esquemas de uso que promovam a aprendizagem dos alunos.

A produção de documentos de apoio foi ainda desenvolvida pelo professor com o objetivo de proporcionar aos alunos meios e materiais que poderiam ser consultados posteriormente, em situações que não pudessem recorrer à ferramenta. Esta abordagem revelou-se uma mais valia para a forma como os alunos completaram a sua documentação escrita, mas essencialmente como elemento de reflexão e sistematização dos conceitos abordados. Foi assim possível observar várias situações de aprendizagem que envolveram a passagem de um pensamento processual para um pensamento proceptual. Esta passagem foi mediada quer pelo artefacto tecnológico através das tarefas que este envolve, quer pelos documentos produzidos pelos professor.

Conclusões

A interação entre os alunos e os conceitos matemáticos, mediada por ferramentas tecnológicas, pode constituir-se num ambiente de aprendizagem muito rico. Neste artigo evidenciamos a forma uma ferramenta tecnológica, formada por uma sequência de tarefas, se constituiu num artefacto mediador na aprendizagem de conceitos geométricos e funcionais.

Destacamos a dimensão curricular do artefacto que se apresenta bastante estruturado e próximo da sequência de ensino exibida em alguns manuais escolares. Verificamos que a relação entre o currículo apresentado na sequência de tarefas definida pela ferramenta e o currículo em ação através da implementação dessas mesmas tarefas é importante para a intervenção do professor na definição do currículo modelado, nomeadamente através de uma abordagem baseada na produção de documentos de apoio à intervenção do aluno.

As questões relacionadas com a génese instrumental são importantes neste contexto, sendo fáceis de ultrapassar dado que a sequência de tarefas se apresenta bastante estruturada. Esta sequência apresenta potencialidades e constrangimentos quando se relaciona com a aprendizagem dos alunos, mostrando-nos que o papel do professor é fundamental para a regulação deste processo. Constata-se que os alunos conseguem melhorar o seu desempenho na realização de procedimentos e processos rotineiros, evoluindo para a utilização de um pensamento proceptual, mas ao mesmo tempo há que ter em consideração a linguagem formal, falada e escrita, que está presente na sequência de tarefas apresentadas pela ferramenta.

A aprendizagem dos conceitos matemáticos é potenciada pelo recurso a tarefas que envolvem o uso e manipulação das diferentes representações e a tradução entre elas. Estas tarefas revelaram-se bons mediadores da aprendizagem, verificando-se um desenvolvimento significativo do pensamento proceptual dos alunos. Quando as tarefas em estudo envolvem uma linguagem mais formal ou uma tradução simbólica dos conceitos os alunos manifestam grandes dificuldades na sua compreensão e manipulação, solicitando a mediação do professor.

Referências

Domingos, A., Carvalho, C., Costa, C., Matos, J. M., & Teixeira, P. (2008). Aprendizagem da matemática com recurso a materiais tecnológicos. Em S. E. I. E. Matemática (Ed.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 689-696). Badajoz

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work 14 (1),* 133-156: DOI: 10.1080/13639080020028747

Gimeno-Sacristán, J. (1998). *O Currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.

Gray, E. & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115–141.

Gueudet, G., Trouche, L. (2012). Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. Em G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 23-41). New York/Berlin: Springer.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments comptemporains*. Paris: Armand Colin.

Tall, D. (2007). *Developing a theory of mathematical growth*. *ZDM 39 (1-2)*, 145-154.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

AS TAREFAS E A MOBILIZAÇÃO DA CAPACIDADE DE GENERALIZAÇÃO: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DO 4.º ANO

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo

Esta comunicação centra-se na mobilização da capacidade de generalização dos alunos de uma turma de 4.º ano em tarefas que exploram aspetos do pensamento relacional, no âmbito da realização de uma experiência de ensino enquadrada por uma perspetiva de desenvolvimento do pensamento algébrico. O estudo tem como objetivo analisar possíveis relações entre o desempenho dos alunos, quanto ao nível de pensamento relacional e da capacidade de generalização, e as características das tarefas propostas. A recolha de dados incidiu sobre seis tarefas matemáticas realizadas em diferentes momentos da experiência de ensino. Conclui-se sobre a estreita relação entre o desempenho dos alunos e as características das tarefas implementadas, salientando-se a importância da apresentação da variação de quantidades, numa perspetiva relacional da aritmética, e a introdução de contextos de modelação significativos para os alunos.

Palavras-Chave: Generalização, pensamento relacional, pensamento algébrico, tarefas, experiência de ensino, 1.º ciclo.

Introdução

A aritmética é o tema com maior foco no currículo dos níveis de escolaridade iniciais mas a forma como é ensinada e aprendida nem sempre tira pleno proveito das suas potencialidades para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, muito em particular no que concerne ao pensamento algébrico. Ao considerar-se o pensamento algébrico como um "processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade" (Blanton & Kaput, 2005, p. 413), assume-se a generalização e a sua representação em formas gradualmente mais simbólicas como aspetos centrais desse tipo de pensamento. Atendendo ao carácter potencialmente algébrico da aritmética, numa perspetiva de desenvolvimento do pensamento relacional, deve ser explorada a possibilidade de os alunos expressarem generalizações de relações numéricas e as propriedades das operações, e desenvolverem a noção de equivalência associada ao sinal de igual.

Considerando a importância das tarefas matemáticas enquanto propostas que condicionam fortemente a atividade dos alunos e, consequentemente, a sua aprendizagem (Ponte, 2005), importa considerar como as características das tarefas podem favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, mais concretamente na sua vertente de pensamento relacional e na apreensão e expressão da generalização. Desta forma, esta comunicação pretende analisar possíveis relações entre o desempenho dos alunos, quanto ao nível de pensamento relacional e da capacidade de generalização evidenciado, e as características das tarefas propostas.

O pensamento relacional e o desenvolvimento do pensamento algébrico

Tendo em conta a predominância da aritmética nos primeiros anos de escolaridade, uma reformulação da forma como é ensinada permite a introdução de ideias algébricas (Cai & Knuth, 2005). Assim, e de acordo com Carraher e Schliemann (2007), a introdução do pensamento algébrico na escola elementar acarreta novas visões sobre a aritmética e a álgebra e a forma como estas se relacionam, assumindo que se pode construir uma ponte entre elas.

Também Carpenter, Franke e Levi (2003) referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a matemática nos primeiros anos e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados. Ainda na perspetiva de Carraher, Schliemann, Brizuela e Earnest (2006), se ficarmos apenas na natureza concreta da aritmética corremos o risco de oferecer aos alunos uma visão superficial da matemática e desencorajar a generalização. Embora a fluência de cálculo seja crucial para permitir raciocinar algebricamente, isso não assegura que os alunos estejam despertos para as regularidades e relações aritméticas e consigam generalizá-las.

Carpenter et al. (2003) sintetizam as ideias sobre a aritmética generalizada naquilo que designam por *Pensamento Relacional* e que consideram dizer respeito à capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua conceção mais ampla, revelando as relações existentes. No pensamento relacional atende-se às relações e propriedades fundamentais das operações aritméticas em vez de se focar exclusivamente nos procedimentos de cálculo (Carpenter et al., 2005). Assim o pensamento relacional diz respeito à capacidade de usar relacionalmente a aritmética de forma a fazer uso da estrutura subjacente das relações numéricas e das propriedades das operações e encarar a igualdade como uma relação de equivalência. Esta forma relacional de usar a aritmética permite que a análise não se centre exclusivamente nos cálculos e nas respostas numéricas, embora também fortaleça a flexibilidade de cálculo e de pensamento aritmético.

A generalização envolve deliberadamente a extensão do alcance do raciocínio para além do caso ou casos considerados, o que implica a identificação e exposição explícita da comunalidade entre casos, elevando o raciocínio para um nível onde o foco não é tanto o caso ou as situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre eles (Kaput, 1999). Britt e Irwin (2011) salientam a necessidade de os alunos mais novos trabalharem em diferentes níveis de compreensão da generalização que envolvam a expressão dessa generalização em palavras, imagens e gráficos, assim como com símbolos numéricos que atuem como quase-variáveis. No âmbito do pensamento relacional, a noção de quase-variável reveste-se de particular importância, significando um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Ou seja, expressões quase-variáveis são expressões numéricas particulares passíveis de serem generalizadas.

No que concerne à generalização algébrica, Radford (2013) apresenta os conceitos de indeterminação, denotação e analiticidade como condições que caracterizam o pensamento algébrico e o diferenciam do pensamento aritmético. A indeterminação refere-se à existência de quantidades não determinadas, como incógnitas, variáveis, parâmetros, etc. A denotação implica que as quantidades indeterminadas sejam nomeadas ou simbolizadas. Essa nomeação pode revestir-se de diferentes formas, usando a linguagem natural, gestos, signos não convencionais ou a notação alfanumérica. A analiticidade permite tratar as quantidades indeterminadas como se fossem conhecidas, ou seja, tornando possível operar (adicionar, subtrair, multiplicar, dividir) essas quantidades como se procede com quantidades numéricas conhecidas. Centrando-se, especificamente, nos conceitos de indeterminação e analiticidade, Radford (2010) refere que estes podem assumir diversas formas, conduzindo a diferentes níveis de generalidade. Alguns níveis são mais concretos, em que a indeterminação e a analiticidade podem aparecer de uma forma intuitiva, e os outros níveis mais gerais, em que esses conceitos se evidenciam mais explicitamente.

As tarefas matemáticas

A aprendizagem dos alunos é fortemente condicionada pela atividade que desenvolvem e reflexão que realizam sobre a mesma (Ponte, 2005). Deste modo, a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que se pretende que os alunos realizem. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998).

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994), tarefas que sejam matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a aptidão matemática, estimular a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a matemática, mostrar a matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática. As tarefas são, pois, “um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (Ponte, 2005, p. 23). Stein e Smith (1998) consideram ainda que o tipo de tarefas que os alunos exploram na sala de aula, cumulativamente, dia após dia, conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas sobre a natureza da matemática.

Em educação matemática é reconhecido com alguma naturalidade que os contextos das tarefas, nomeadamente dos problemas, desempenham um papel importante na aprendizagem da matemática, especialmente dos alunos dos primeiros anos de escolaridade. O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (ME, 2007) refere a importância dos contextos na resolução de problemas afirmando que, no 1.º ciclo, "os contextos desempenham um papel particularmente importante, em especial os que se relacionam com situações do quotidiano, devendo ser escolhidos de modo cuidadoso uma vez que servem de modelos de apoio ao pensamento dos alunos" (p. 29). Este programa refere ainda que "resolver problemas constitui um ponto de partida para a abordagem de conceitos e ideias matemáticas e funciona como um suporte para o seu desenvolvimento e aplicação" (idem).

De acordo com Borasi (1986), os contextos providenciam informação significativa que ajuda a resolver os problemas matemáticos. Ponte e Quaresma (2012) entendem o contexto como o "universo experiencial associado a cada tarefa, que pode remeter para um campo da vida quotidiana em que o aluno tem maior ou menor experiência pessoal, ou remeter para o universo matemático" (p. 196). Neste sentido, os contextos podem ser de realidade, semi-realidade ou de matemática pura (Ponte, 2005; Skovsmose, 2001).

Gravemeijer e Doorman (1999) sugerem a denominação de *problemas contextualizados* para problemas cujas situações são experienciadas como realistas para os alunos. Desta forma, um problema de contexto marcadamente matemático pode ser considerado como problema contextualizado desde que os alunos o experienciem como real. Na Matemática Realista os problemas contextualizados são usados como fonte para a atividade de reinvenção da matemática, funcionando também como ponte de passagem das estratégias informais para as formais. Estes autores referem, ainda, que à medida que os alunos experimentam o processo de reinventar a matemática através da resolução de problemas contextualizados, para além de desenvolverem os seus conhecimentos matemáticos, também expandem a sua compreensão do mundo real, existindo aqui uma relação reflexiva entre a utilização de problemas contextualizados e a própria apreensão da realidade. Por um lado, os problemas contextualizados têm raízes nessa realidade, por outro, a resolução desses problemas ajuda os alunos a expandirem a sua própria noção de realidade.

Os contextos dos problemas podem ter um papel motivador por permitirem ao aluno apropriar-se do problema, encarando-o como um desafio para resolver. Embora reconhecendo o papel importante da motivação para a aprendizagem, Ponte e Quaresma (2012) referem que mais do que isso, o contexto deve ser um suporte para a aprendizagem matemática. Também Palm (2009) considera que o contexto deverá constituir-se como favorável à aprendizagem, estimulando a interação construtiva entre os alunos, orientada, naturalmente, pelo professor. Nesta linha de pensamento, Tabach e Friedlander (2008) consideram ainda a importância dos contextos de modelação, particularmente para dar sentido aos conceitos mais abstratos.

Contexto e metodologia do estudo

Esta comunicação insere-se num estudo mais amplo, enquadrado no *design* de "experiência de ensino em sala de aula" (Gravemeijer & Cobb, 2006) realizado durante o ano letivo 2010/11 (Mestre, 2014). Durante o estudo foram desenvolvidas, pelas autoras do estudo, quarenta e duas tarefas matemáticas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual da professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um fio condutor curricular (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. As tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de cerca de duas horas cada uma. As aulas onde se aplicaram as tarefas foram lecionadas pela investigadora (primeira autora) e a professora titular de turma desempenhou o papel de coadjuvante.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (ME, 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, ao se iniciar a experiência de ensino os alunos revelaram algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização de algoritmos na sua resolução, o que veio reforçar a necessidade de dar uma atenção particular à proposta de tarefas assentes numa perspetiva de uma aritmética generalizada.

As tarefas exploradas na experiência de ensino pretendiam, assim, promover o desenvolvimento da generalização em contextos que envolviam, inicialmente, o pensamento relacional e, posteriormente, o pensamento funcional. A expressão da generalização desenvolveu-se de acordo com um percurso gradual de utilização da linguagem natural e progressiva apropriação da linguagem simbólica. O quadro 1 sistematiza as cinco sequências de tarefas realizadas ao longo da experiência de ensino, identificando os aspetos do pensamento algébrico focados, e os temas, tópicos e subtópicos do programa onde se enquadram.

Quadro 1 - Síntese da experiência de ensino, de acordo com o PMEB (ME, 2007).

De acordo com o Programa de Matemática (ME, 2007)			Experiência de Ensino	
Temas	Tópicos - Subtópicos	Objectivos específicos	Aspetos do pensamento algébrico explorados	Sequências de tarefas
Números e Operações	Números naturais - Relações numéricas - Múltiplos e divisores	- Identificar e dar exemplos de múltiplos e de divisores de um número natural - Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores)	- Regularidades nos múltiplos e divisores - Relações numéricas - Relação de igualdade - Propriedades das operações - Expressão da generalização em linguagem natural	I
	Operações com números naturais - Multiplicação	- Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades. - Compreender os efeitos das operações sobre os números	- Propriedades das operações - Relação de igualdade - Propriedades das operações - Operações inversas - Tradução da linguagem natural para a linguagem simbólica - Outras representações (tabelas, diagramas)	II
			- Propriedades das operações - Relação de igualdade - Variação - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica)	III
Medida	Comprimento e área - Perímetro - Área	- Resolver problemas envolvendo perímetro e área	- Variação e covariação - Relações funcionais - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, gráficos, linguagem simbólica)	IV
Números e Operações	Regularidades - Sequências	- Investigar regularidades numéricas - Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional	- Relações numéricas - Relações funcionais - Diferentes representações (linguagem natural, tabelas, diagramas, linguagem simbólica)	V

Esta comunicação centra-se na análise longitudinal do desempenho dos alunos em seis tarefas que promoviam o pensamento relacional e que se enquadram nas sequências II, III e IV. Os alunos trabalharam nas tarefas em pares ou em trios, tendo sido analisadas as suas resoluções escritas para identificar os níveis de pensamento relacional e os níveis de generalização, de acordo com as categorias apresentadas no Quadro 2 (Mestre, 2014). A partir dessa primeira análise procurou-se interpretar o desempenho dos alunos à luz das características das tarefas que realizaram.

Quadro 2 – Categorias de análise dos níveis de pensamento relacional e dos níveis de generalização.

Níveis de Pensamento Relacional		
Nível 0	Não relacional	Não reconhece as relações numéricas e/ou propriedades das operações, centrando-se em procedimentos de cálculo.
Nível 1	Utilização de exemplos particulares	Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares.

Nível 2	Utilização de Quase-variáveis		Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações em exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis.
Nível 3	Relacional		Reconhece e usa relações numéricas e/ou propriedades das operações independentemente dos casos particulares, evidenciando a sua generalidade.
Níveis de Generalização			
Nível 0	Não Generaliza		Não reconhece a comunalidade entre os casos apresentados. Apresenta, eventualmente, tentativas de apreensão da comunalidade, mas que se baseiam em palpites e não são testadas.
Nível 1	Generalização Aritmética		Reconhece a comunalidade entre os casos apresentados, mas apenas considera as quantidades conhecidas e opera com elas. Não faz a extensão para quantidades indeterminadas e, desta forma, não define uma regra geral.
Nível 2	Generaliza-ção Algébrica	Factual ou empírica	Reconhece a indeterminação com sentido de quase-variável, a partir de casos particulares, mas não a nomeia. Apresenta, eventualmente, uma regra para os casos particulares.
Nível 3		Contextual	Nomeia a indeterminação e trata-a analiticamente, apoiando-se numa descrição do contexto da situação. Define uma regra geral, mas dentro do contexto da situação.
Nível 4		Global	Nomeia a indeterminação de forma global e trata-a analiticamente, não se apoiando na descrição do contexto da situação. Define uma regra geral.
Nível 5		Estrutural	Nomeia a indeterminação de forma geral e trata-a analiticamente, revelando a estrutura matemática dos objetos. Define uma regra estrutural.

A mobilização da capacidade de generalização dos alunos em tarefas de promoção do pensamento relacional

Nas seis tarefas selecionadas, neste estudo, para caracterizar a capacidade de generalização evidenciada pelos alunos em contextos de promoção do pensamento relacional, foram exploradas relações numéricas em casos particulares com o objetivo que os alunos as identificassem e conseguissem também fazer generalizações para além dos casos apresentados.

A forma como os alunos reconheceram relacionalmente as relações numéricas envolvidas nas seis tarefas analisadas é apresentada sucintamente na Figura 1.

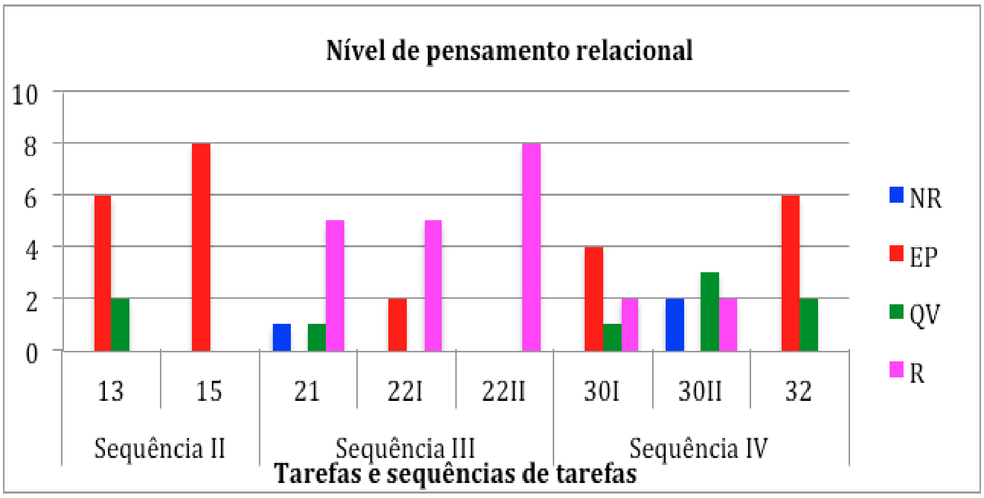


Figura 1 – Nível de pensamento relacional evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

Constata-se que, de forma geral, os níveis de pensamento relacional mais presentes nas resoluções dos grupos foram os de "utilização de exemplos particulares" (EP) e "relacional" (R). Nas tarefas analisadas da segunda sequência, os alunos apenas apresentaram níveis de pensamento relacional centrados em "exemplos particulares" (EP) e através da "utilização de quase-variáveis" (QV). As tarefas analisadas na terceira sequência foram as que mais mobilizaram o nível de pensamento relacional, sendo este apresentado pela maioria dos pares/grupos de alunos nas duas tarefas. Nas tarefas analisadas na quarta sequência os níveis de pensamento relacional mobilizados pelos alunos foram diversos, mas com maior incidência no nível de "utilização de exemplos particulares" (EP) e, em número ligeiramente inferior, o nível de "utilização de quase-variáveis" (QV). Desta forma, constata-se que os alunos apresentaram um nível superior de pensamento relacional nas tarefas analisadas da terceira sequência, apresentando um aparente retrocesso nas tarefas da sequência seguinte.

Relativamente ao nível de generalização evidenciado pelos alunos nestas tarefas, constata-se que aqueles que tiveram maior expressão foram o aritmético (A) e, em valores muito próximos, o contextual (C) e o global (G) (Figura 2). Nas tarefas analisadas da segunda sequência, apenas na primeira tarefa os alunos evidenciaram um nível de generalização identificado como aritmético (A), pois, na segunda tarefa não evidenciaram qualquer nível de generalização. Na terceira sequência, os níveis de generalização nas tarefas analisadas foram maioritariamente contextuais (C), embora um número considerável de evidências da generalização global (G) se tenha registado na última tarefa. Nas tarefas analisadas da quarta sequência, os níveis de generalização foram de sofisticação inferior relativamente aos apresentados nas tarefas analisadas da sequência anterior. Nestas tarefas da quarta sequência, os níveis de generalização foram maioritariamente aritméticos (A). De forma geral, nas sequências de tarefas que trabalhavam o pensamento relacional, os níveis de generalização manifestados pelos alunos nas tarefas analisadas foram maioritariamente aritméticos (A), embora com uma expressão significativa de níveis de generalização contextual (C) e global (G), evidenciados particularmente nas tarefas da terceira sequência.

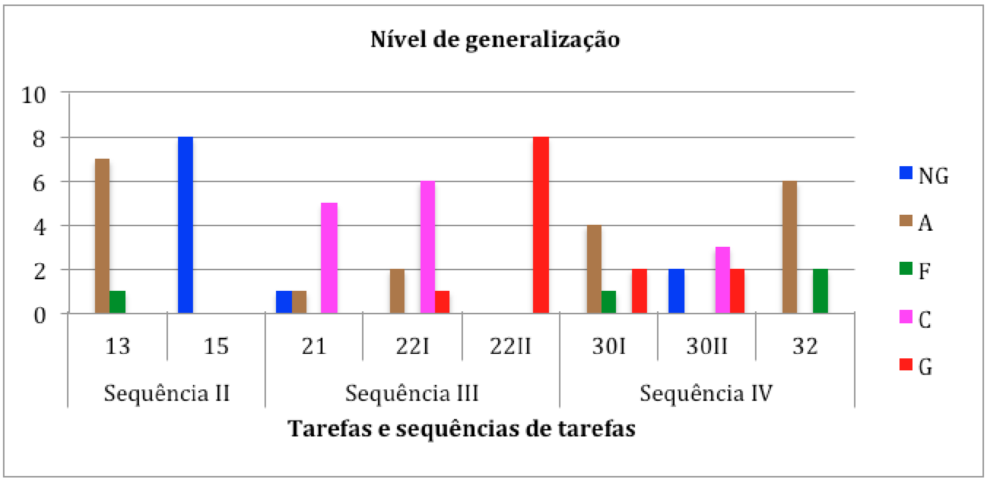
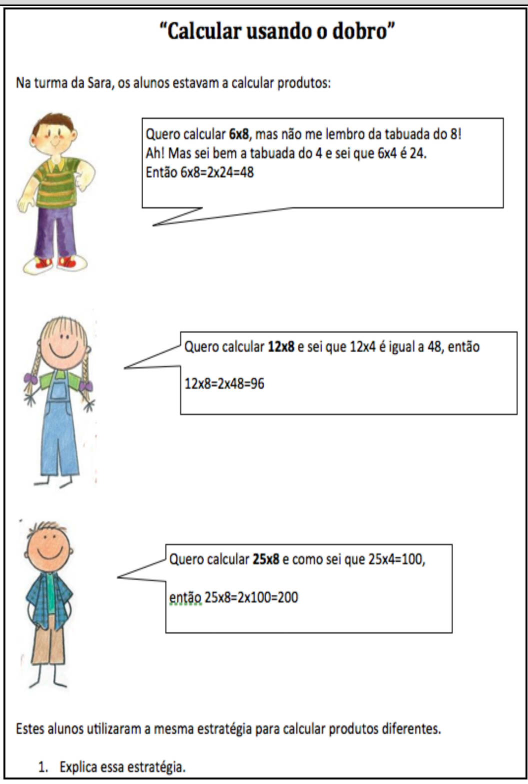
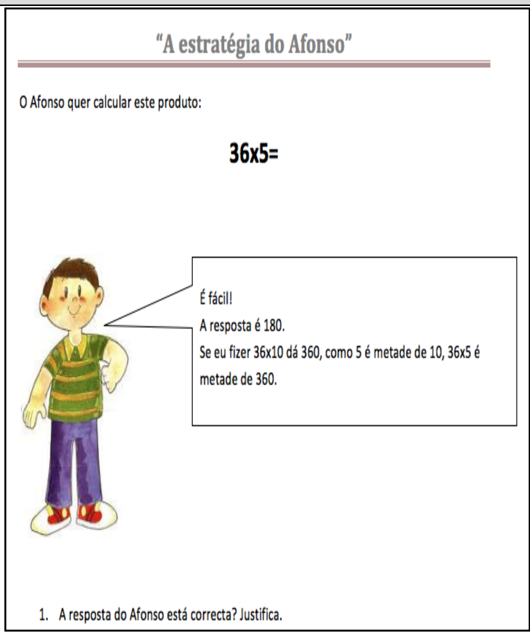


Figura 2 – Nível de generalização evidenciado pelos pares/grupos de alunos nas tarefas analisadas das sequências II, III e IV.

Considerando os níveis de pensamento relacional e de generalização evidenciados pelos alunos, atendemos também às características das tarefas analisadas, das três sequências referidas, para procurar compreender a não linearidade dos resultados apresentados.

Assim, analisando as tarefas da segunda sequência (Figura 3), constata-se que a primeira apresentava diferentes exemplos da estratégia de cálculo e a segunda apenas um exemplo. Pela evidência dos níveis de pensamento relacional e de generalização apresentados, a primeira tarefa parece ter sido mais promotora da expressão da generalização do que a segunda, o que seria o oposto do que se pretendia.

Tarefa 13	Tarefa 15
	

Tarefa 13

“Calcular usando o dobro”

Na turma da Sara, os alunos estavam a calcular produtos:

Quero calcular **6x8**, mas não me lembro da tabuada do 8!
Ah! Mas sei bem a tabuada do 4 e sei que 6x4 é 24.
Então 6x8=2x24=48

Quero calcular **12x8** e sei que 12x4 é igual a 48, então
12x8=2x48=96

Quero calcular **25x8** e como sei que 25x4=100,
então 25x8=2x100=200

Estes alunos utilizaram a mesma estratégia para calcular produtos diferentes.

1. Explica essa estratégia.

Tarefa 15

“A estratégia do Afonso”

O Afonso quer calcular este produto:

36x5=

É fácil!
A resposta é 180.
Se eu fizer 36x10 dá 360, como 5 é metade de 10, 36x5 é metade de 360.

1. A resposta do Afonso está correcta? Justifica.

Figura 3 – Enunciados das Tarefas 13 e 15, da Sequência II.

De facto, na resolução da Tarefa 13, seis dos oito grupos de alunos reconheceram as relações numéricas de dobro e metade nos exemplos particulares apresentados. Dois grupos conseguiram ainda usar esses exemplos particulares, mas com sentido de quase-variáveis, ou seja, tomando-os como exemplos da relação numérica, mas não a circunscrevendo a esses casos particulares. Como exemplo deste tipo de resolução apresenta-se na Figura 4 a resolução do par Joana e Gonçalo que usam outros exemplos para explicar a estratégia de cálculo, estendendo-a a outros casos para além dos apresentados no enunciado da tarefa.

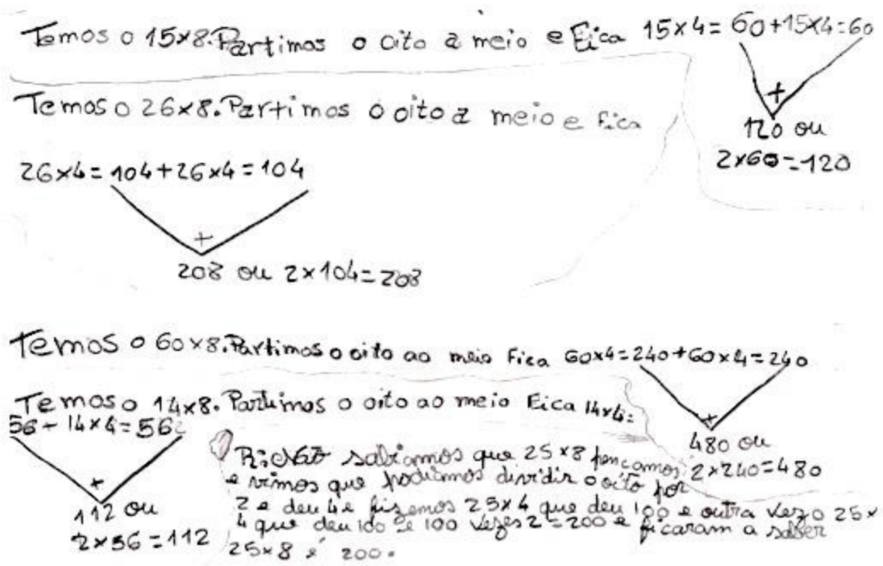


Figura 4 – Resolução do par Joana e Gonçalo da tarefa 13.

Outro par de alunos, Matilde e do André, apresentou um nível mais elaborado de generalização, a generalização factual (Figura 5). Este par, apesar de usar os casos particulares, consegue descrever a relação usando esses casos com sentido de quase-variáveis. Desta forma, a indeterminação aparece quando estes alunos não se referem a casos concretos, mas a um “fator” qualquer, como referem na explicação da estratégia: “... já que não sabiam o que era o fator multiplicado por 8, multiplicaram 2 vezes a metade de 8 pelo fator”. No entanto, não nomeiam ainda a indeterminação de forma explícita, como sucederia num nível de generalização superior, uma vez que mencionam um fator e não os fatores em geral. Este par mostra, assim, a relação aritmética através dos casos particulares usados com sentido de quase-variável e exprimindo um nível de generalização factual.

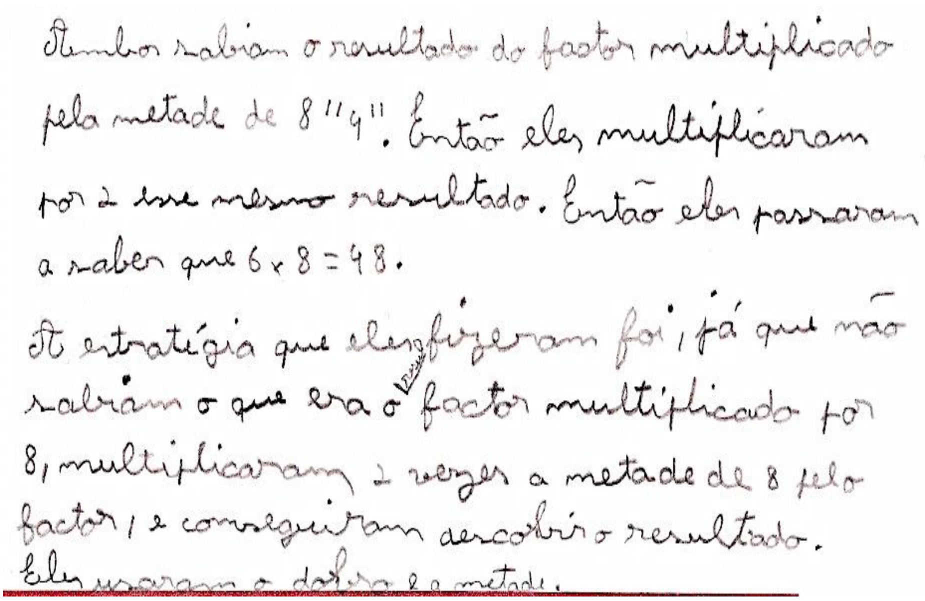


Figura 5– Resolução do par Matilde e André da tarefa 13.

No entanto, na resolução da tarefa 15, nenhum par de alunos conseguiu expressar de forma geral a relação aritmética, centrando-se apenas na explicação do caso particular apresentado no enunciado. A Figura 6 é um exemplo desse tipo de resolução, mostrando como este par aplicou a relação aritmética no exemplo apresentado, não expressando qualquer nível de generalização da estratégia de cálculo.

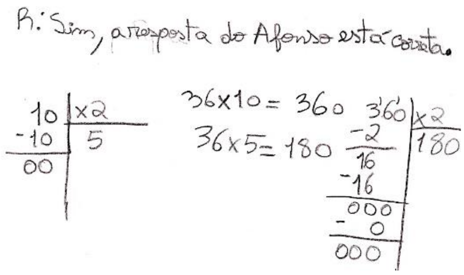


Figura 6 – Resolução do par Carolina e António da tarefa 15.

Também a figura seguinte (Figura 7) mostra como outro par de alunos apresentou a aplicação da estratégia de cálculo apenas para o exemplo particular do enunciado da tarefa. Estes alunos usaram uma representação esquemática.

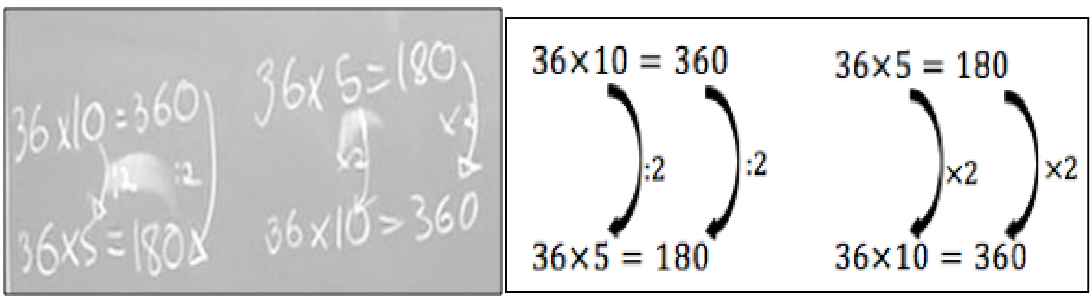


Figura 7 – Resolução apresentada pelo par João V. e Lawry da tarefa 15.

Desta forma, constata-se que a apresentação de mais exemplos da estratégia de cálculo na Tarefa 13 parece ter conduzido os alunos a um nível mais elaborado de pensamento relacional e de expressão da generalização. De outro modo, a apresentação de apenas um exemplo da estratégia de cálculo, na Tarefa 15, dificultou o despreendimento dos alunos desse caso particular, não possibilitando a expressão de qualquer nível de generalização. Assim, parece ser evidente que a apresentação no enunciado da tarefa da variação de quantidades, numa perspetiva relacional da aritmética, poderá conduzir os alunos a exprimir um nível mais sofisticado de pensamento relacional e também de generalização.

Importa ainda considerar as características das tarefas analisadas das Sequências III e IV. A primeira tarefa analisada da terceira sequência, Tarefa 21 (Figura 8), embora introduzisse símbolos alfanuméricos, apresentava um contexto de modelação significativo que parece ter sido facilitador para a apreensão e compreensão das relações numéricas exploradas. A tarefa de continuidade desta, Tarefa 22, embora sem contexto de modelação, apresentava a mesma estrutura da tarefa anterior. Já as tarefas analisadas da quarta sequência, como é exemplo a Tarefa 32, apresentavam contextos marcadamente numéricos, centrados em casos particulares, e esse facto parece ter provocado dificuldades na expressão da generalidade das relações numéricas. Nessas tarefas, particularmente a trigésima segunda, o nível de exigência era consideravelmente superior às restantes, e os alunos centraram-se nos casos particulares das relações consideradas, não conseguindo nomear a indeterminação, mesmo nos poucos casos em que evidenciaram um nível de generalização algébrica (factual).

Tarefa 21	Tarefa 32
"Os cromos da Ana e do Bruno"  A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B. Podemos representar **a quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma: 18 + Ⓐ Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa A Podemos representar **a quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma: 20 + Ⓑ Número de cromos colados na caderneta — cromos guardados na caixa B Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade: 18 + Ⓐ = 20 + Ⓑ	

Tarefa 22

"Descobre A e B"

1. Observa a seguinte igualdade:

$$6 \times A = 12 \times B$$

a) Coloca números nas caixas A e B de modo a teres três afirmações verdadeiras.

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas A e B?

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas A e B?

$$15 \times A = 5 \times B$$

Tarefa "Explorando calendários e tabelas"

2. Os números na tabela...

2.1. Observa a seguinte tabela e os números que estão destacados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	**55**	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	**65**	**66**	67	68	69	70
71	72	73	74	**75**	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2.1. O Pedro diz que se adicionar os números em linha obtém o mesmo valor que na adição dos números em coluna. Verifica se o Pedro tem razão.

2.2. Consegues encontrar outros números com a mesma disposição na tabela onde isso aconteça? Mostra as tuas descobertas.

2.3. Será que a mesma relação se verifica quando o número que está no centro é 823? Explica porquê.

Figura 8 – Enunciados das Tarefas 21 e 22 da Sequência III e da Tarefa 32 da Sequência IV.

Na resolução da Tarefa 21[9], cinco dos oito pares de alunos conseguiram mostrar de forma muito clara a relação entre os números das caixas A e B. O exemplo seguinte é de um desses grupos (Figura 9), evidenciando como estes alunos reconheceram a relação numérica empregue na igualdade e como esta estava dependente da relação entre os valores iniciais 20 e 18.

A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que na caixa A há sempre mais 2 cromos do que na caixa B.

Porque o 20 é mais dois cromos do que o 18, por isso é sempre mais dois cromos

Figura 9 – Resolução do par Henrique e Rita da tarefa 21.

[9]Tarefa adaptada de Stephens e Wang (2008).

Na segunda parte da Tarefa 22 (alínea c) do enunciado), oito dos nove pares de alunos conseguiram apreender a relação aritmética de triplo e terça parte, evidenciando o nível relacional (R) e esses oito pares também conseguiram enunciar um nível global (G) da relação aritmética. Estes alunos apresentaram uma regra geral, nomeando a indeterminação e não se apoiando na descrição do contexto da tarefa.

A resolução apresentada em seguida (Figura 10) mostra como estes alunos explicitaram as relações numéricas de triplo e terça parte entre os valores A e B e também essa relação de dependência com os valores numéricos 15 e cinco. Estes alunos utilizaram corretamente mais do que uma forma de representação em simultâneo para expressar a relação numérica: linguagem natural, diagrama com setas e modelo da balança. Embora usando exemplos particulares para explicar as relações numéricas no diagrama com setas e no modelo da balança, apresentam a sua generalização através da linguagem natural.

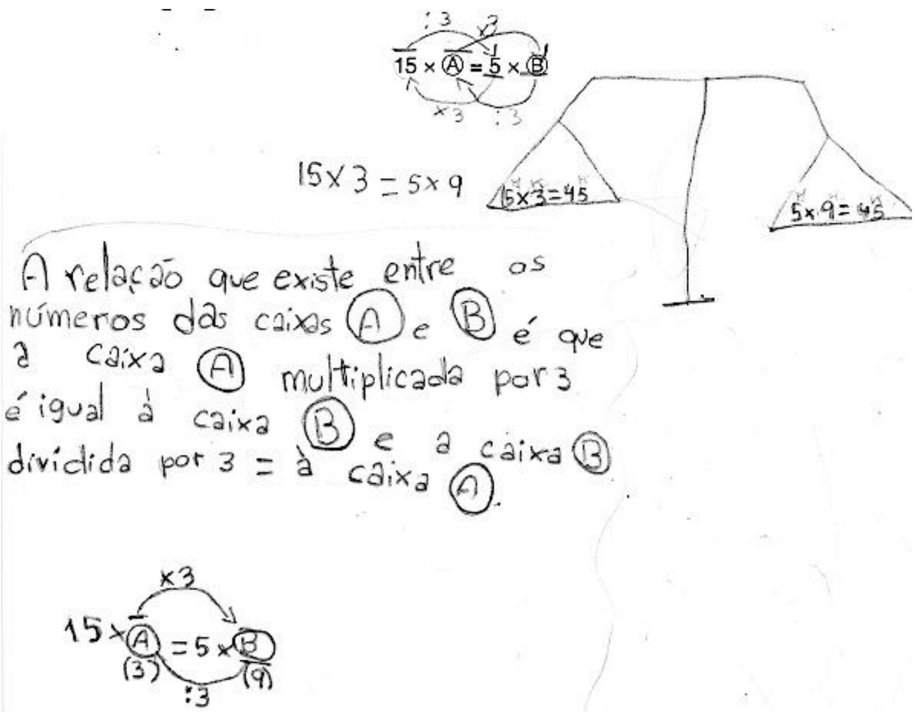


Figura 10 – Resolução do par Gonçalo e Joana da segunda parte da tarefa 22.

Nas resoluções da Tarefa 32, os alunos tiveram mais dificuldade em expressar a generalização das relações numéricas. A Figura 11 apresenta duas resoluções diferentes onde os grupos de alunos centraram-se na explicação das relações numéricas no caso particular apresentado, mais concretamente na resposta à questão 2.3 do enunciado da Tarefa 32. Embora usando diferentes tipos de representação, todos os grupos centraram-se no caso particular não conseguindo expressar a indeterminação e, desta forma, não expressando a generalização das relações numéricas apresentadas na tarefa.

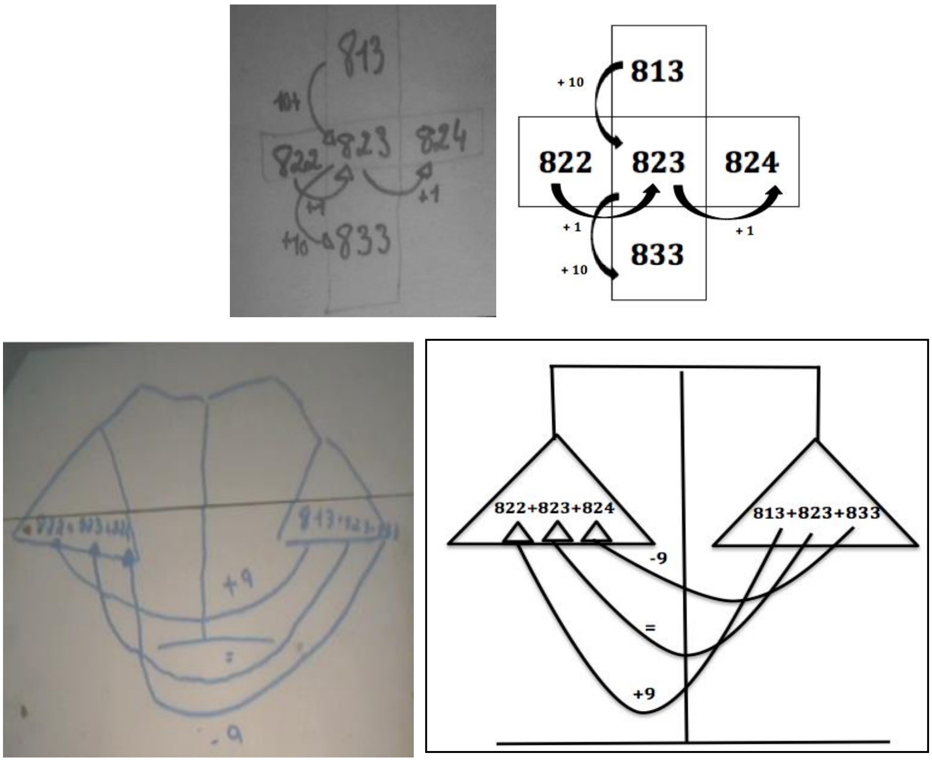


Figura 11 – Resoluções do grupo João V., Lawry e Marco e do par Fábio e António, na tarefa 32.

Desta forma, a existência de um contexto modelador significativo na Tarefa 21 permitiu que mais facilmente os alunos apreendessem as relações aritméticas e as expressassem de forma mais geral. O contexto dessa tarefa influenciou ainda o desempenho dos alunos na tarefa seguinte pelo facto de esta apresentar a mesma estrutura da anterior. Já no que respeita à Tarefa 32, o seu contexto marcadamente numérico parece ter dificultado a apreensão mais geral da relação aritmética, impedindo a nomeação da indeterminação.

Conclusões

Embora a capacidade de generalização dos alunos da turma tenha evoluído ao longo da experiência de ensino nas tarefas com contextos de promoção do pensamento relacional, o seu desempenho foi fortemente condicionado pelas características das tarefas apresentadas. Neste aspeto, salientam-se dois fatores particulares: o primeiro prende-se com a apresentação da possibilidade da variação de quantidades numéricas, numa perspetiva relacional da aritmética, e o segundo com a existência de contextos de modelação significativos.

Quando as tarefas apresentavam não apenas vários casos particulares, os alunos acederam com maior facilidade às relações numéricas e expressaram-nas de forma geral, como se exemplificou com as resoluções dos alunos na Tarefa 13. Em tarefas que apresentavam apenas um caso particular, como a Tarefa 15, os alunos centraram-se na exploração desse caso e, com maior dificuldade conseguiam apreender a possibilidade de variação de quantidades, o que dificultou a sua extensão para além dos casos particulares e a generalização.

A existência de contextos de modelação, para além dos contextos numéricos, também foi facilitador para a compreensão da situação, conduzindo a uma maior apreensão do nível relacional e de generalização. Como exemplo deste tipo de tarefas apresentaram-se algumas resoluções de alunos nas Tarefas 21 e 22. Por outro lado, contextos estritamente numéricos acarretaram maiores dificuldades na apreensão das relações e na sua generalização, como se exemplificou com as resoluções dos alunos na Tarefa 32. Constata-se, assim, a importância dos contextos de modelação de forma a dar sentido aos conceitos (Tabach & Friedlander, 2008) e, em particular, à indeterminação.

Concluindo, a capacidade de generalização dos alunos, em contextos de promoção do pensamento relacional revelou-se particularmente dependente das características das tarefas. Salienta-se assim que o desempenho dos alunos está intimamente vinculado às propostas que são feitas, o que reforça a importância de uma escolha criteriosa das mesmas pelo professor e a necessidade de a investigação levar em conta o carácter situado de resultados dos estudos relativos ao pensamento matemático dos alunos.

Referências

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(*5), 412-446.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 125-141.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: a pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 137-159). New York: Springer.

Cai, J. & Knuth, e. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 37*(1), 1-4.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM, 37* (1), 53-59.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th* *conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 49–65). Honolulu: PME.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 111-129.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahawah, NJ: Erlbaum.

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: uma experiência de ensino* (tese de doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Retirado de http://www.nctm.org/standards/.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense Publishers.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interações, 22,*196-216.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Brasil: PME.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM, 33*(4), 123-132.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.

Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: A study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education, 1*(1), 28–39.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 223-232). Reston, VA: NCTM.

INVESTIGAÇÕES NO ENSINO DE CONCEITOS E REPRESENTAÇÕES ESTATÍSTICAS NO 1.º CICLO

Ana Caseiro
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
anac@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Cecília Monteiro
Escola Superior de Educação de Lisboa
ceciliam@eselx.ipl.pt

Resumo. A realização de investigações estatísticas possibilita um forte envolvimento dos alunos na resolução de problemas do seu interesse e cria condições favoráveis para a aprendizagem de conceitos e representações que se tornam importantes explorar. Nesta perspetiva, este estudo visa compreender quais as potencialidades e dificuldades inerentes à realização de investigações para o ensino e aprendizagem de conceitos e representações estatísticas com alunos do 1.º ciclo. O estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa tendo por base as aulas da professora Maria a lecionar uma turma de 4.º ano. A recolha dos dados inclui o registo vídeo e áudio de sete aulas dedicadas ao desenvolvimento de investigações estatísticas, assim como o registo áudio das reflexões pós aula realizadas por Maria. A professora assumia que os alunos já conheciam diversas representações estatísticas dado o trabalho anteriormente feito na turma, tendo percebido que persistiam diversas dificuldades que a surpreenderam. Os resultados mostram ainda que a realização de investigações estatísticas levou os alunos a aprenderem e aprofundarem conceitos estatísticos e, sobretudo, a distinguir e realizar representações estatísticas.

Palavras chave: Investigações estatísticas; Representações estatísticas; Conceitos estatísticos; 1.º ciclo

Introdução

A crescente relevância do ensino da Estatística decorre das necessidades da sociedade, que constantemente nos coloca em contacto com dados estatísticos representados de diferentes formas (em especial, tabelas e gráficos), o que requer a capacidade de os analisar e interpretar para nos tornarmos cidadãos informados, conscientes e ativos. O seu papel na compreensão da realidade social e também a sua aplicação noutras áreas torna-a um tema de grande importância nos currículos escolares desde os primeiros anos. Além disso, a Estatística pode contribuir para o desenvolvimento do sentido crítico dos alunos, fundamental para a sua vida escolar, mas, sobretudo, para o exercício da cidadania (Batanero, Godino & Roa, 2004).

O ensino dos conceitos e representações estatísticas pode ser concretizado através da realização de investigações estatísticas. Por exemplo, Groth (2006) refere que os alunos as devem realizar a partir de situações do seu quotidiano, de modo a que, mais tarde, sejam capazes de interpretar e avaliar criticamente estudos estatísticos. Neste quadro, o presente estudo visa compreender quais as potencialidades e dificuldades inerentes à realização de investigações para o ensino e aprendizagem de conceitos e representações estatísticas com alunos do 1.º ciclo.

Investigações e o ensino da Estatística

As investigações estatísticas constituem uma importante forma de trabalho dos alunos, envolvendo-os ativamente no processo de aprendizagem. Ensinar através de investigações estatísticas pode proporcionar também a identificação das dificuldades dos alunos, mesmo em conceitos e ideias que se assumem bem consolidados (Ponte, 2007).

É referido por Graham (1987) e Franklin et al. (2007) que uma investigação estatística normalmente envolve quatro etapas: (i) colocar uma questão; (ii) recolher dados; (iii) analisar dados; e (iv) interpretar os resultados de modo organizado. Kader e Perry (1994) sugerem uma quinta etapa que diz respeito à comunicação dos resultados obtidos. Wild e Pfannkuch (1999) vão mais além e sugerem quatro dimensões fundamentais no trabalho estatístico: *ciclo investigativo* (figura 1), *tipos de pensamento, ciclo interrogativo e disposições*. Para Burgess (2007) o *ciclo investigativo* é o que funciona quando alguém está envolvido na resolução de problemas usando dados.

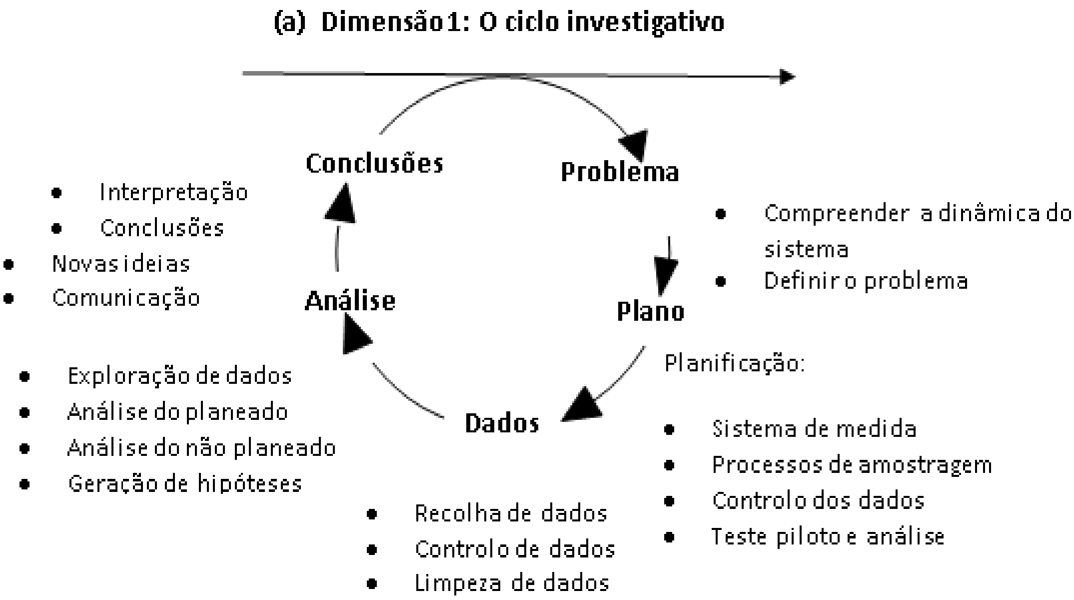


Figura 1 – Ciclo investigativo (Wild e Pfannkuch, 1999)

Tal como referem Makar e Fielding-Wells (2011), a fase de colocação do problema é muito importante, uma vez que a questão de investigação é o ponto de partida de todo o trabalho. Segundo as autoras, essas questões devem motivar os alunos relacionando-se com os seus interesses. Esta fase é, muitas vezes, esquecida pelos professores que acabam por se centrar noutras fases do ciclo (Nunes, 2008). Na colocação do problema devem ser tidos em consideração diversos aspetos: o nível etário, o desenvolvimento matemático e a experiência anterior em investigações dos alunos (Ponte, 2001).

A segunda fase do ciclo investigativo (*plano*) é, também, uma etapa importante deste tipo de trabalho, envolvendo as questões da apropriação do estudo e do uso e seleção de amostras (Gal, 2002). Segundo Shaugnessy (2007), em Estatística é dedicado pouco tempo às fases do *problema* e do *plano*, sendo que à maioria dos alunos apenas são ensinadas "pré-estatísticas" em que as decisões difíceis da formulação do problema, conceção e produção dos dados já foram feitas para eles, o que torna o ciclo investigativo bastante empobrecido.

É nas duas fases seguintes (*recolha* e *análise dos dados*) que se verifica a familiarização dos alunos com conceitos e representações estatísticas. Por fim, na fase final do ciclo (*conclusões*) os alunos devem ser capazes de verificar se as suas questões iniciais foram respondidas ou se é necessário reformular e realizar uma nova investigação.

Tabelas e gráficos são representações que os alunos devem saber construir, interpretar e usar, tanto na realização de tarefas estruturadas como na realização de investigações. Torna-se importante que os alunos ganhem sensibilidade para as potencialidades das diversas formas de representação de dados e da sua adequação em função da natureza dos dados. Alguns estudos realizados sobre o desenvolvimento da compreensão das representações estatísticas têm mostrado que os alunos sentem dificuldades e cometem erros na sua construção (Carvalho, 2001; Morais, 2011; Shaughnessy, 2007). No que diz respeito, por exemplo, ao gráfico de barras, os erros identificados como os mais comuns são a falta de centralidade das barras nos valores do eixo e a construção de barras unidas (Morais, 2011), problemas na construção das escalas e a ausência de títulos e de rótulos nos eixos (Wu, 2004).

Os conceitos de moda e de média são largamente utilizados no dia-a-dia para sintetizar informação contida num conjunto de dados, sendo necessário ter alguns cuidados quer na sua utilização, quer como procedimento, quer na sua interpretação, com o risco da informação que elas traduzem não ter qualquer utilidade. De acordo com Batanero (2001) muitas das dificuldades associadas ao conceito de média resultam de uma incorreta apropriação deste conceito e das suas propriedades. A autora refere também a dificuldade de alguns alunos relativamente ao conceito de moda, sendo o mais frequente, considerar a frequência absoluta em vez do valor da variável.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) tendo por base as aulas de uma professora (Maria, nome fictício) que lecionava uma turma do 4.º ano aquando da recolha dos dados (2012/2013). Maria tinha 28 anos e encontrava-se no seu 8.º ano de serviço, tendo sempre lecionado no mesmo colégio de Lisboa. As tarefas habitualmente usadas pela professora para o trabalho estatístico eram as do manual ou similares, isto é, situações em que era dada uma representação gráfica e era pedido aos alunos para responder a questões sobre ela. A professora demonstrou interesse em alterar essa prática sobretudo por algumas dessas tarefas serem relativas à introdução de novas representações, referindo que gostaria de realizar um trabalho como o que realiza com outras temáticas, nomeadamente trabalhos de projeto. Enquanto profissional, Maria sentia-se uma professora empenhada e que apenas trabalhava individualmente devido ao facto de não haver uma prática de trabalho conjunto entre professores no seu colégio.

A recolha dos dados foi realizada durante o 3.º período escolar, pela primeira autora desta comunicação (daqui em diante designada por investigadora). Foi feito o registo vídeo e áudio de sete aulas lecionadas por Maria, assim como do registo áudio das reflexões pós-aula realizadas pela professora em diálogo com a investigadora que, no decorrer das aulas, assumiu o papel de observadora participante. Os dados são analisados seguindo as diversas etapas do ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999) sendo focadas as potencialidades e as dificuldades sentidas pela professora e pelos alunos ao longo de todo o trabalho.

A decisão da realização deste tipo de tarefa foi tomada no grupo de trabalho colaborativo que era composto pela investigadora, por Maria e por outras duas professoras do 3.º e 4.º ano, uma delas do mesmo colégio e a outra de outra escola. A investigadora propôs que numa das sessões do grupo de trabalho fosse discutido o ciclo investigativo de Wild e Pfannkuch (1999) e um artigo sobre os diferentes tipos de tarefas, o qual incluía uma explicação sobre trabalho de projeto, assim como sobre as fases envolvidas na sua realização. Depois dessa discussão as professoras decidiram utilizar esse material para planificar as suas aulas tendo como referência curricular o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) então em vigor (ME, 2007).

Quando foi discutido que tarefa se deveria propor aos alunos, as professoras decidiram apostar na realização de investigações estatísticas com o objetivo de envolver os alunos na sua própria aprendizagem, motivando-os através de temas do seu interesse. Como já tinham trabalhado vários conceitos e representações estatísticas com os alunos, ficou decidido que, com este trabalho, iriam verificar o conhecimento das suas turmas sobre os conceitos e as representações já conhecidas e explorariam as novas representações que fossem surgindo. Dessa forma, o trabalho foi sendo planificado, discutido e ajustado em conjunto no grupo colaborativo. A investigação aqui apresentada refere-se a dados recolhidos no decorrer das aulas de Maria destinadas à realização de investigações estatísticas pela sua turma e às suas reflexões pós-aula. A primeira aula observada foi destinada à proposta da tarefa, tendo a professora procurado motivar e envolver os alunos na sua concretização. Na segunda aula foram discutidas, em coletivo, todas as sugestões de temas e de questões de estudo que os grupos apresentaram. As três aulas seguintes foram reservadas para a recolha, organização e tratamento dos dados. A sexta aula teve como objetivo a análise dos dados e a preparação da apresentação à turma e a sétima aula foi destinada à apresentação dos trabalhos dos grupos. Para a introdução da tarefa foi decidido que se iria realizar uma abordagem junto dos alunos de forma a envolvê-los em todas as decisões, principalmente na decisão de como incluir conceitos e representações estatísticas nos seus trabalhos.

Realização de investigações estatísticas

A construção do problema

Os alunos começaram por referir temas do seu interesse. Alguns deles mostraram preocupação de saber se o estudo é do interesse de todos ou, pelo menos, da maioria dos colegas da turma. De forma a poderem discutir entre todos e com a professora, os alunos vão referindo as ideias que lhes vão surgindo, como, por exemplo:

Beatriz:	Tivemos a ideia de fazer as letras chinesas. São mais do que as nossas.
Professora:	Pois, são símbolos, por isso é tão difícil.
Mafalda:	Em que países as letras são diferentes do A, B, C, D, E.
António:	Também era giro perguntar o que acham: quantas letras acham que tem o alfabeto X.
Professora:	Mas isso é só uma opinião, uma resposta.

Neste exemplo verifica-se um grande envolvimento dos alunos que reagem às propostas dos colegas fazendo sugestões que eles podem utilizar, assim como algumas das intervenções da professora que os vão ajudando a definir melhor o seu problema de estudo.

De forma a possibilitar um amadurecimento das ideias dos alunos, a professora sugere que tenham alguns dias para pensar e decidir o que querem realmente estudar devendo preencher a folha para registo dos problemas que se iria encontrar exposta na sala (figura 2).

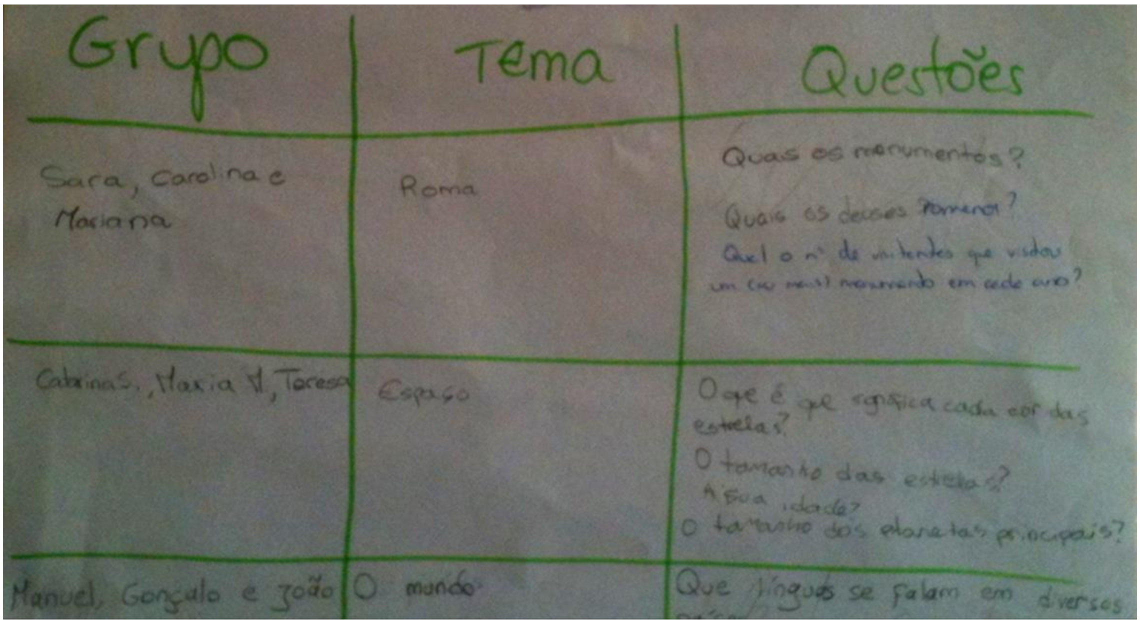


Figura 2 – Registo dos grupos, temas e questões das investigações

Passados os dias estipulados, os alunos sentam-se numa grande roda na sala de aula referindo a professora que todos devem participar na discussão dos problemas, auxiliando os colegas na definição das suas questões de estudo.

Durante a discussão das propostas, o foco da professora e dos alunos começa por se situar nas representações que os alunos pretendem realizar e na forma como as pretendem fazer acabando por ficar secundarizada a discussão dos problemas em si:

Professora:	O grupo de Roma: "Quais os monumentos? Quais os deuses romanos? Qual o número de visitantes que visitou um (ou mais) monumento em cada ano?". O que querem saber com este trabalho?
Leonor:	Queremos saber o número de visitantes dos monumentos por ano, ou de um (…). Depois tivemos mais uma ideia, cada fatia tem cada cor, cada monumento.
Professora:	Mas fatia do quê? Ainda não falaste qual é a representação.
Leonor:	Gráfico circular. E depois púnhamos uma cor para cada monumento e depois sabíamos quantas pessoas visitaram o monumento.
Professora:	E então qual era o total do gráfico circular? O gráfico circular ao todo representa algo e aí o total representa o quê? (…) Fariam o gráfico circular para representar isso?
Leonor:	Se calhar o gráfico de barras.
Professora:	Então e esta questão dos deuses?
Leonor:	Nós íamos usar um diagrama de Carroll para pôr os deuses, aqueles que são do sexo feminino e do sexo masculino e depois púnhamos aqueles que são dos sentimentos e aqueles que não são dos sentimentos e depois púnhamos os nomes deles.
José:	Vocês podiam fazer, se vão fazer por ano, podiam fazer mais ou menos a média ou a moda do número de visitantes.
Professora:	Agora perdi-me um bocadinho. O que é a moda?
José:	Entre 50 000 e 60 000. Quais eram as datas com mais anos. Qual era o número de visitantes que mais se repetia.
Professora:	Isso é a moda. Então e o que é a média? Por acaso nós já falámos sobre isso.
Tiago:	É quando temos dois valores, somamos e depois dividimos.
Professora:	Quando falámos sobre isso, o que é que tu usaste como exemplo?
Tiago:	As notas.
Professora:	As notas que ele tinha tido nos exames de Português e de Matemática que foi fazer para a escola para o ano. Portanto eles pegaram na tua nota de Matemática juntaram à de Português e dividiram por quanto?
Tiago:	Dividiram por 2.
Investigadora:	Mas vocês têm notas a Matemática, Língua Portuguesa e a Estudo do Meio. Como é que fazem para saber a média?
José:	Juntamos todas e dividimos por 3.
Professora:	Ok, isso é a média. E agora pegando noutro exemplo. Então se eu quisesse saber a média das notas numa determinada ficha de avaliação, como é que eu fazia?
Ricardo:	Juntar todos e depois ver qual é que havia mais.

Professora: Então 7 elevados, 2 médios, 1 reduzido.

Ricardo: Um muito elevado com um muito reduzido dá um médio, um elevado com um reduzido dá um médio. A média é o que está entre esses.

Neste exemplo verifica-se que os alunos, para além de serem interventivos e fazerem sugestões para o trabalho dos colegas, também quiseram referir que representações queriam construir, o que fez com que a professora lhes seguisse a ideia.

O diálogo apresentado mostra que os alunos não se recordavam corretamente da forma de construção de um gráfico circular, tendo sido importante a intervenção de Maria ao lhes colocar a questão acerca do que representaria o total. Somente ao ser confrontada com essa situação é que a aluna parece ter percebido ou recordado que com os dados que tencionava recolher não lhe seria possível construir tal representação.

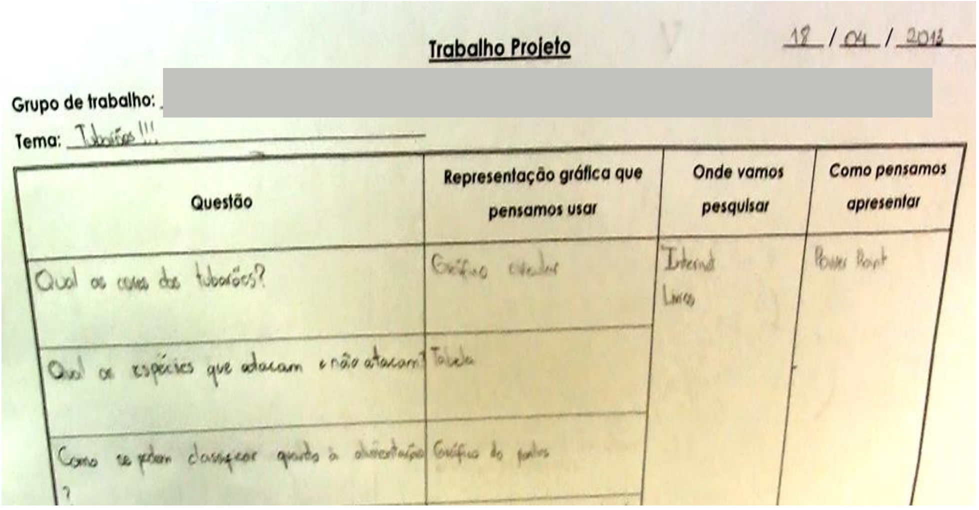
Por outro lado, a última intervenção de Leonor, na qual refere a forma como pretendia construir um diagrama de Carroll, parece demonstrar compreensão por parte da aluna acerca da construção desse tipo de representação, na medida em que se expressou corretamente sobre todos os aspetos que iriam estar contidos no diagrama. Por sua vez, a discussão acerca dos procedimentos de cálculo da moda e da média de um conjunto de dados (que surgiu através das sugestões dos alunos) mostrou ser bastante produtiva na medida em que fez com que algumas dúvidas surgissem e pudessem ser discutidas, tais como a confusão entre média e moda e a forma de cálculo da média. Embora o conceito de média apareça no PMEB apenas no 2.º ciclo, devido a uma situação ocorrida com um aluno da turma (ter feito exames para ingressar noutra escola e lhe terem feito a média das notas obtidas nessas avaliações) foi necessário discutirem esse aspeto que se verificou não ter ficado compreendido anteriormente pelos alunos.

Da discussão surgiram 9 problemas que os alunos gostariam de estudar nos seguintes temas: monumentos e deuses romanos; o espaço, mais concretamente estrelas e planetas; curiosidades sobre o mundo; os tubarões; Rally Dakar; as borboletas; os animais mais estranhos do Mundo; curiosidades sobre escritores; e as profissões.

O foco da aula era analisar todos os problemas propostos pelos alunos, mas não houve tempo para o fazer, algo que Maria refere na sua reflexão. A maior dificuldade sentida pela professora no decorrer desta primeira fase do ciclo investigativo prende-se com a correta formulação de problemas cuja resolução tivesse de utilizar representações e/ou conceitos estatísticos na medida em que, segundo refere, nunca tinha formulado problemas desse género e não se sentiu capaz de ajudar muito os seus alunos.

O plano de trabalho

A professora começa por referir aos alunos que o trabalho que vão realizar é de extrema importância pois será a base de tudo o que se seguirá. Com esse objetivo Maria distribui pelos grupos um modelo de plano de trabalho (figura 3) para se organizarem, reforçando a ideia que devem registar as questões que querem estudar e assinalar que representações pretendem construir com os dados recolhidos para dar resposta a cada uma dessas questões.



Trabalho Projeto 12 / 04 / 2013

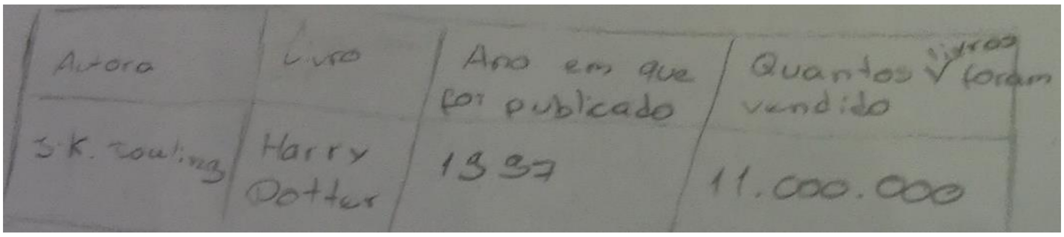
Grupo de trabalho: [redacted]

Tema: Tubarões!!!

Questão	Representação gráfica que pensamos usar	Onde vamos pesquisar	Como pensamos apresentar
Qual as cores dos tubarões?	Gráfico circular	Internet Livros	Power Point
Qual as espécies que atacam e não atacam?	Tabela		
Como se podem classificar quanto à alimentação?	Gráfico de pontos		

Figura 3 – Modelo do plano de trabalho de um dos grupos

Maria e a investigadora vão apoiando os grupos no preenchimento do seu plano de trabalho questionando-os sobre as diversas representações que eles referem querer construir. Ao longo desse apoio começam a ser evidentes algumas dificuldades dos alunos. O grupo que decidiu estudar curiosidades sobre escritores, após referir que gostaria de fazer uma tabela de frequências com os livros mais vendidos de certos escritores, foram interrompidos pela investigadora que lhes pediu que lhe mostrassem como é que essa tabela iria ficar (fig. 4), tendo essa construção sido seguida de uma discussão acerca da diferença entre tabela de registo de dados e tabela de frequências.



Autora	Livro	Ano em que foi publicado	Quantos livros foram vendido
J.K. Rowling	Harry Potter	1997	11.000.000

Figura 4 – Tabela de registo de dados construída por um dos grupos

Investigadora:	Então uma tabela de frequências o que é que tem de ter?
Beatriz:	Tem de ter de um lado [depois de muita hesitação] a autora e depois o número de livros que ela vendeu.
Mafalda:	Não. Só pode ter, por exemplo, que três pessoas gostaram de queijo e não a Mónica, a Rute ou o Duarte gostaram de queijo.
Investigadora:	Vocês lembram-se o que é a frequência, ou não?
Beatriz:	É aquilo que ocorre mais vezes.
Investigadora:	Não é o ser frequente. Por exemplo no caso das sandes: é quantos meninos gostam de determinado tipo de sandes.

Apesar do histograma ser uma representação estatística que o PMEB refere como devendo ser abordada no 3.º ciclo, acabou por aparecer por necessidade dos grupos que pensaram organizar os seus dados em intervalos de valores. Um desses casos foi o grupo com a temática dos tubarões:

Francisco:	No tamanho estávamos a pensar fazer uma tabela de frequências e dizer não sei quantas espécies rondam 1,5m.
Investigadora:	Mas quando dizem que "rondam 1,50m".
Francisco:	Normalmente tem à volta de.
Investigadora:	Então porque é que não dizem que entre 1,5m e 2m têm não sei quantas espécies. Entre 2m e 2,5m têm não sei quantas. Percebem o que estou a dizer? O que é isso de "rondar"?
Manuel:	É, temos de pôr dois valores e dizer quantas espécies vão deste tamanho até este.
(…)	
Francisco:	Estávamos a pensar fazer um gráfico de barras, mas não ia dar certo. Porque se fosse com diferença de 3 ia dar no 56, 59, 62 e depois o 60 não dava.
Investigadora:	Vocês já falaram da diferença do gráfico de barras ter as barrinhas juntas ou separadas?
Manuel:	Acho que já falámos. Eu já fiz um mas estava errado.
Investigadora:	As barras só podem estar juntas em alguns casos. Por exemplo, quantos irmãos têm?
Francisco:	2.
Manuel:	2.
Rodrigo:	1.
Investigadora:	Ninguém tem 1 irmão e ¾ de outro, pois não?
Os três:	Não.
Investigadora:	Ninguém tem 1 irmão e 1/10 de outro, pois não?
Os três:	Não.
Investigadora:	Ou têm 0, ou têm 1, ou têm 2, por aí fora. Portanto existe uma quantidade de números entre o 1 e o 2 que não tem nada, não pode, não existe. Por isso é que as barras têm de ficar separadas, para dizer que há ali um espaço de valores que não pode ter ninguém. Agora neste caso do tamanho, se vocês vão fazer de 1,5m a 2m, de 2m a 2,5m, existe algum valor que não possa ter ninguém?
Manuel:	Ah pois, aí as barras têm de ficar juntas.

Segundo a professora, tanto o gráfico de barras como a tabela de frequências foram as representações mais trabalhadas na turma desde o 1.º ano. Com a realização deste trabalho começou a perceber que, apesar de muitas vezes analisadas e algumas vezes construídas, essas representações ainda apresentavam um desafio e uma dificuldade assinalável para os alunos.

Notou-se que o foco dos alunos passou a ser as representações estatísticas, ficando para segundo plano as questões a estudar, que pouco foram trabalhadas na aula de discussão dos problemas, assim como a forma de se organizarem para recolherem a informação necessária para a concretização dos seus trabalhos. Ao refletir sobre esta fase do ciclo investigativo, Maria refere que se trata de um trabalho difícil de realizar quer por ela quer pelos alunos na medida em que não estavam habituados a fazê-lo e não sabiam ao certo como iria decorrer. Refere ainda a formulação correta de questões como a maior dificuldade sentida no decorrer desta etapa, salientando a dificuldade de ajudar os grupos a definir corretamente os tipos de representações a realizar sem lhes dizer diretamente quais deveriam ser.

Processo de recolha de dados

Para recolherem os dados que necessitavam para o seu trabalho, alguns grupos recorreram a pesquisas em revistas, livros e internet, enquanto outros construíram um questionário. O apoio da professora foi fulcral nesta fase, sobretudo para os últimos grupos, na medida em que nunca tinham realizado esse tipo de trabalho.

Um grupo decidiu estudar os empregos dos pais dos alunos da turma, resolvendo construir um pequeno questionário que contou com a orientação da professora. Esta foi questionando o grupo sobre diversos aspetos e sugerindo alguns elementos que um questionário deve conter e que os alunos desconheciam:

Professora:	E não vos interessa saber se é feminino ou masculino?
Afonso:	Mas para saber isso temos de colocar que "é o pai da Mónica" ou "é a mãe do Duarte".
Professora:	Mas é isso que é importante saberem ou apenas querem as profissões dos pais da turma em geral?
António:	Ah, podíamos meter para porem uma cruz no género e depois escrever o nome do filho.
Professora:	Ah, boa. E não deveriam colocar o objetivo do questionário?
(…)	
Afonso:	Nós queremos saber os desempregados.
Professora:	Mas saber o quê dos desempregados?
Afonso:	O número.
Professora:	E não vos interessa perguntar aos pais que curso superior têm? E depois não vos interessará ver se os pais estão a trabalhar na sua área?

Este excerto mostra a ajuda que Maria foi dando aos seus alunos que nunca tinham construído um questionário. Quando lhe parecia que os alunos conseguiam refletir sobre as suas questões e sozinhos conseguiam melhorar o seu questionário, a professora apenas os ia provocando, mas quando percebia que o trabalho não avançava sugeria questões que os alunos deveriam colocar no questionário e que não se estavam a lembrar.

Processo de análise de dados e conclusões

No decorrer das aulas que os alunos tiveram para tratar e analisar os dados (que organizaram primeiro em tabelas e depois passaram a representações gráficas com recurso ao Excel), a professora foi circulando pelos diversos grupos de forma a apoiar o seu trabalho e a auxiliar na resolução das suas dúvidas. Quando verificava que estas não eram apenas de um grupo e até se referiam a aspetos já trabalhados e discutidos em aula, Maria remetia a discussão para toda a turma:

Professora:	O grupo das borboletas descobriu várias espécies de borboletas e então agora querem fazer um gráfico de barras e querem pôr aqui [no eixo do x] o nome da borboleta e depois aqui [eixo do y] as alturas. E a minha questão é: isto é um gráfico de barras?
Gonçalo:	Não é porque não tem frequências.
Professora:	E o que é a frequência?
Gonçalo:	Era por exemplo, se elas aí [eixo do x] tinham de 2m a 5m. Imagine que dessas duas [borboletas] uma tem 3m e outra tem 4m, aí [eixo do x] ficavam as duas nesse intervalo e assim já era um gráfico de barras com a frequência.
Professora:	Não sei se está tudo bem mas o que ele está a dizer é que se calhar seria uma boa ideia arranjarem intervalos de tamanho. (…), Tem de ter aquilo que o Gonçalo disse: frequência, com que frequência é que acontece, o número de vezes, o número de borboletas com 20cm (…).

Muitas das dificuldades sobre noções estatísticas que emergiram ao longo destas aulas prenderam-se, sobretudo, com a distinção entre representações, como tabela de frequências e tabela de registo de dados, representação gráfica com barras e gráfico de barras (que, para a professora, era a representação estatística melhor trabalhada na turma) e gráfico de barras e histograma (que os alunos desconheciam). É de notar que os alunos rapidamente perceberam a diferença entre estas duas representações, compreendendo que muitas vezes constroem, erradamente, histogramas pensando tratar-se de gráficos de barras.

Verifica-se que com este trabalho os alunos realizaram diversas aprendizagens relativamente à apresentação de dados, quer em termos de representações estatísticas, quer em termos da utilização de recursos informáticos, usando a folha de cálculo do Excel para construir algumas das representações gráficas que utilizaram no seu trabalho.

Devido ao final do ano letivo os alunos acabaram por não ter tempo suficiente para analisar os dados e tirar conclusões. Tendo em consideração esse aspeto, Maria sugeriu que todos os grupos se dedicassem à realização da apresentação com os dados que já tinham organizado e fizessem a análise de forma oral aquando das apresentações. Dessa forma, os grupos apresentaram as representações e foram fazendo breves análises dos dados que as compunham, tendo a professora colocado questões ou afirmado alguns aspetos de modo a provocar os alunos e chegarem a algumas conclusões.

Por exemplo, quando o grupo que realizou um estudo sobre o Rally Dakar apresentou o gráfico da figura 4 referente às motas utilizadas pelos vencedores entre 1979 e 2011, os alunos foram questionados pela professora:

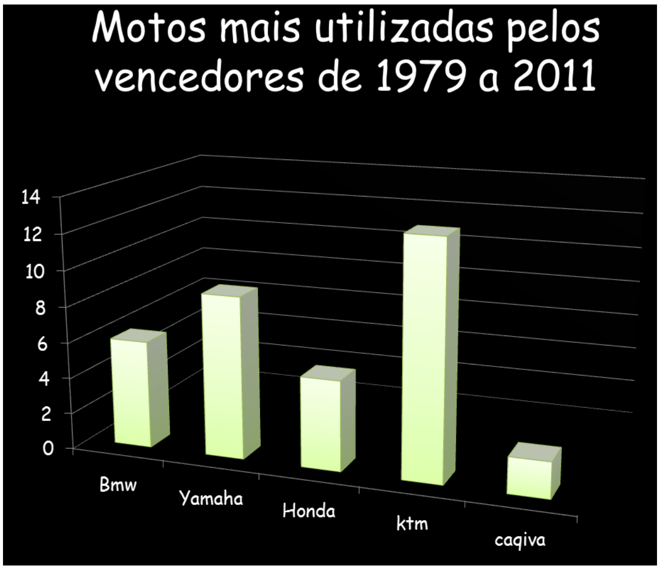


Figura 5 – Gráfico construído pelo grupo cujo estudo era sobre o Dakar

Professora: Então se quisermos ganhar tem de ser com uma ktm?

Miguel: A *ktm* costuma ser a que quase todos os vencedores usam. É quase sempre a *ktm* que ganha.

Os alunos identificaram a *ktm* como a marca mais usada pelos vencedores, mas reconheceram por vezes os vencedores usavam outras marcas. Para além de provocar os alunos de forma a fazerem alguma análise e chegarem a algumas conclusões a partir das representações, Maria incentivou os alunos a referirem que ideias tinham antes de realizar o trabalho e o que pretendiam fazer.

Durante as apresentações os alunos mostraram-se bastante motivados e empenhados em interessar os colegas pelos seus trabalhos. Apesar do pouco tempo disponível para esta fase, ainda foi possível à professora discutir diversos aspetos de análise das representações estatísticas.

Considerações finais

A realização destas investigações estatísticas nas aulas de Maria mostram a importância deste tipo de trabalho na aprendizagem de conceitos e representações estatísticas. Ao longo de todo o trabalho, a professora procurou envolver os seus alunos nas decisões a tomar, tendo a turma demonstrado à-vontade para o fazer por se tratar de uma rotina já interiorizada. Este aspeto parece ter facilitado o trabalho realizado pois os grupos acabaram por se entreajudar sempre que necessário, dando opiniões e levantando questões, o que deixavam os colegas a refletir para melhorar o seu trabalho.

Uma das maiores dificuldades sentidas pela professora e pelos alunos prendeu-se com a formulação dos problemas e das questões de estudo que acabaram por ser pouco discutidas nas aulas com esse objetivo. Numa investigação estatística, a formulação das questões é de extrema importância (Makar & Fielding-Wells, 2011), na medida em que questões mal formuladas podem nem dar origem a estudos estatísticos. As fases *problema* e *plano* de trabalho parecem ter sido as mais complicadas para alunos e professora, talvez por se tratar de aspetos que nunca tinham sido realizados em sala de aula com o envolvimento de conceitos e representações estatísticas. Esta dificuldade e falta de trabalho neste campo estão de acordo com o que é referido por Shaugnessy (2007) quando afirma que em Estatística é dedicado pouco tempo a essas duas fases do ciclo investigativo.

Por outro lado, no desenrolar deste trabalho verificou-se que os alunos realizaram diversas aprendizagens de conceitos e representações estatísticas, sobretudo relativamente a aspetos que a professora considerava estarem já trabalhados e sobre os quais os seus alunos não teriam dúvidas, tais como a distinção entre tabela de frequências e tabela de registo de dados, gráfico de barras e representação gráfica com barras e gráfico de barras e histograma. Tal aspeto está de acordo com o referido por Ponte (2007) quando afirma que a realização deste tipo de trabalho permite identificar dificuldades dos alunos que não se identificaram anteriormente com outros tipos de tarefa.

Este estudo mostra também que os alunos podem aprender novas representações gráficas a partir da sua necessidade (de forma a conseguirem dar resposta às questões dos seus estudos), tal como aconteceu com o histograma, assim como podem aprender a construir instrumentos de recolha de dados (como o questionário), o que apenas foi realizado com a concretização deste trabalho de investigação. Por sua vez, os conceitos de moda e de média foram desenvolvidos tendo sido possível clarificar a distinção entre essas duas medidas de tendência central. Também a utilização da folha de cálculo Excel para a construção das representações gráficas escolhidas pelos alunos demonstrou ser um importante auxiliar.

Como a turma não se encontrava habituada a trabalhar conceitos e representações estatísticas de forma diferente da forma proposta pelo manual, esta primeira experiência na realização de investigações estatísticas não se mostrou fácil. No entanto, o trabalho parece ter sido compensador para todos, na medida em que se tornou bastante interessante para os alunos que referem ter aprendido representações que desconheciam ou conceitos que pensavam saber e afinal não sabiam, assim como para a professora, que percebeu que este tipo de trabalho pode e deve ser utilizado para trabalhar conceitos e representações estatísticas desde muito cedo com os alunos. Deste modo, este tipo de trabalho apresenta muitas potencialidades de aprendizagem para os alunos devendo, merecer, por isso, a atenção dos professores.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010).

Referências

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12*(1).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Burgess, T. A. (2007). *Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics.* Massey University, Palmerston North, NZ.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares. Contributo para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano de escolaridade.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre K-12 curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Groth, R. E. (2006). An exploration of students' statistical thinking. *Teaching Statistics, 28*(1), 17-21.

Kader, G., & Perry, M. (1994). Learning statistics with technology. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 130-136.

Makar, K., & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 347-358). New York, NY: Springer.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Morais, P. (2011). *Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho.

Nunes, A. R. (2008). *Ensino da estocástica no 6.º ano de escolaridade: Opções metodológicas e dificuldades sentidas pelos professores*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, 39, 419-430.

Shaugnessy, J. M. (2007) Research on students' understanding of some big concepts. *Thinking and reasoning with data and chance* (68th Yearbook). Reston: VA: NCTM.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

Wu, Y. (2004). *Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs*. (Retirado em 25/09/2014 de http://iase-web.org/documents/papers /icme10/Yingkang.pdf)

ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL E GEOMÉTRICA — CONTRIBUTOS PARA A SUA CONSTRUÇÃO EM COLETIVO

Cristina Loureiro, Lurdes Serrazina

CIED, Escola Superior de Educação de Lisboa

UIDEF – Unidade de Investigação em Educação e Formação, Universidade de Lisboa

crisloureiro@mail.telepac.pt

lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: O estudo que se apresenta está integrado numa investigação mais ampla que seguiu a modalidade de *design research*. Nesta investigação foram experimentadas mais do que uma vez, em salas de aula do 1.º ciclo do ensino básico, várias tarefas sequenciadas de geometria. O objetivo do estudo que aqui se apresenta é identificar e compreender os contributos da fase de discussão coletiva de grande grupo na aplicação de sequências de tarefas matemáticas tendo em vista a construção de percursos didáticos.
A experiência realizada permitiu obter dados que ajudam a compreender o modelo de estruturação perspetivado por Battista, nas suas duas dimensões de estruturação espacial e geométrica, bem como a relação entre as duas (Battista, 2007, 2008). Embora a análise dos dados não esteja concluída, apresentamos a análise de dois episódios que nos estão a ajudar a construir um quadro de referência que permita estabelecer relações entre as formas de conhecimento matemático individuais de cada aluno, as práticas matemáticas partilhadas da comunidade de sala de aula e as práticas matemáticas partilhadas da sociedade em geral (Cobb, Yackel & Wood, 1992).

Palavras chave: Estruturação espacial, Estruturação geométrica e Momentos coletivos

Apresentação

No contexto educativo português o ensino da geometria elementar ainda é muito pobre e tem reflexos desfavoráveis nos conhecimentos dos futuros professores que trabalharão depois nestes níveis de ensino (Tempera, 2010). Como formadoras de professores e de futuros professores reconhecemos a necessidade de valorizar esta área de ensino, procurando produzir materiais de trabalho úteis para a formação e conhecer melhor as condições em que podem ser utilizados (Loureiro 2012; Serrazina, 2013). Estas necessidades são coerentes com os interesses de investigação nesta área (Battista, 2007).

Este estudo integra-se numa investigação mais ampla cujo propósito é conceber, experimentar e avaliar percursos didáticos em Geometria e Medida geométrica no 1.º ciclo do ensino básico. A investigação, que se desenvolveu segundo a modalidade de um *design research* (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney e Nieveen, 2006), orientou-se na implementação das tarefas por um referencial em três fases (Jackson, Garrison, Wilson & Shahan, 2013). Este referencial, que decorre de (Smith, Henningsen & Silver, 2000), inclui a instalação da tarefa, *fase 1*, e a sua implementação, sendo esta última desdobrada em duas componentes distintas: a *fase 2*, que corresponde ao momento em que os alunos trabalham na tarefa, e a *fase 3* que é o momento da discussão coletiva de grande grupo. Progressivamente, ao longo dos ciclos de experiências de implementação das tarefas nas diversas turmas em que esta investigação esteve presente, a fase de discussão foi ganhando maior atenção e relevo, proporcionando uma intervenção crescente da investigadora (primeira autora deste texto) como professora, atuando sempre em conjunto com as professoras titulares de turma presentes.

O objetivo do estudo que aqui se apresenta é identificar e compreender os contributos, para a construção de percursos didáticos, da fase de discussão coletiva de grande grupo na implementação de tarefas focadas na estruturação espacial e geométrica (Battista, 2008).

Enquadramento teórico

A investigação assenta em três eixos fundamentais: a estruturação do raciocínio geométrico (Battista, 2008; Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998; Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1998; Wilder-Johnston & Mason, 2005); percursos didáticos baseadas em trajetórias hipotéticas de aprendizagem (Clements & Sarama, 2007; Confrey & Kazak, 2006; Gravemeijer, 1998; Sarama & Clements, 2009; Simon, 1995; Simon, Tzur, Heinz & Kinzel, 2004); implementação de tarefas matemáticas em sala de aula (Yackel & Cobb, 1996; Jackson *et. al.*, 2013; Stein *et. al.*, 2000).

Adotámos a perspetiva de Battista (2008) para a aprendizagem da geometria e que contempla três tipos de estruturação: (a) Estruturação espacial; (b) Estruturação geométrica; (c) Estruturação lógico formal. Dado o nível de ensino em que trabalhamos atendemos apenas às duas primeiras, embora tenhamos sempre presente que o desenvolvimento de uma boa estruturação lógico formal depende de uma boa estruturação geométrica, assim como, o desenvolvimento de uma boa estruturação geométrica depende da qualidade da estruturação espacial.

Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter-relações entre as componentes e os compostos (Battista, 2008). Por exemplo, um geoplano é um instrumento de estruturação espacial através de uma malha quadriculada de linhas perpendiculares, uma estrutura ortogonal isométrica. Ao utilizá-lo para representar retângulos estamos a estruturar espacialmente o retângulo. Se os lados do retângulo coincidem com as linhas da malha quadriculada a estruturação é imediata. Se o retângulo está numa posição inclinada, a sua estruturação espacial exige outro tipo de recurso. Por exemplo, o destaque de ângulos retos, como componentes do retângulo, pode ser uma maneira de estruturar esta figura e identificá-la em qualquer posição.

Ao analisar um conjunto de retângulos diferentes, identificando como invariante a existência de quatro ângulos retos, estamos perante uma estruturação geométrica desta figura. De certa forma, libertamo-nos dos protótipos de retângulo que temos em presença para construir um modelo de retângulo. Este esquema conceptual permitir-nos-á reconhecer se um dado quadrilátero é ou não um retângulo, sendo desejável que neste esquema conceptual o quadrado seja reconhecido como um retângulo.

Ligamos esta compreensão à de trajetórias de aprendizagem. Neste âmbito, é reconhecida a necessidade de investigação sobre a natureza das tarefas que desenvolvem a visualização espacial e as competências de visualização (Sarama & Clements, 2009) e se inscrevem no desenvolvimento das estruturações espacial e geométrica. Encaramos esta necessidade com a perspetiva de Simon (1995) que associa intrinsecamente o professor à implementação de uma cadeia de tarefas e afirma que "a única coisa que é previsível é que as atividades não decorram como estava previsto" (p.133), destacando também que "o professor propõe a tarefa, mas é o que os alunos fazem da tarefa e a experiência que esta proporciona que determina o seu potencial de aprendizagem" (p. 133).

Utilizamos a designação de percurso didáctico para identificar um conjunto de tarefas devidamente estruturadas, com base em trajectórias hipotéticas de aprendizagem, depois de sujeitas a uma utilização experimental em sala de aula que permite o seu refinamento a partir da experimentação. De certa forma, um percurso didáctico pode ser considerado como uma fotografia de um percurso de aprendizagem e ensino já realizado, que inclui a sua análise reflexiva.

Para a implementação das tarefas, seguimos uma análise baseada no referencial em três fases de Jackson *et al.* (2013). Encaramos a construção do saber matemático a partir da implementação em sala de aula de tarefas exploratórias, atendendo à cultura de sala aula (Yackel & Wood, 1992; Yackel & Cobb, 1996) e focamos a nossa atenção na *fase 3*. Atendemos aos diferentes papéis e responsabilidades, tanto do professor como dos alunos distinguindo para os alunos a responsabilidade do raciocínio e a responsabilidade pela participação (Wood, 1999; Wood & Turner-Vorbek, 1999). Para o professor contemplanmos o papel de orquestração que está presente, o estabelecimento de um guião adequado para a organização da implementação das tarefas (Smith & Stein, 2011; Stein & Smith, 1998; Stein *et. al* 2008), bem como o tipo de perguntas (clarificação, argumentação, confirmação) que vão sendo colocadas e a importância destas para o estabelecimento de diálogos produtivos (Boaler & Brodie, 2004, Wood & Turner-Vorbek, 1999). Destacamos também o papel do professor na filtragem dos contributos dos alunos (Sherin, 2002) e os dilemas do professor durante todo este processo (Carter & Richards, 1999; Wood & Turner-Vorbek, 1999).

Metodologia

A investigação base deste estudo seguiu a orientação de um *educational design research* segundo Van den Akker *et al*. (2006). As tarefas foram experimentadas mais do que uma vez e em anos de escolaridade diferentes com especial incidência nos 2.º e 3.º anos, tendo estado envolvidas as turmas de quatro professoras da mesma escola durante três anos letivos. Cada conjunto de tarefas experimentado funcionou como um ciclo de aprendizagem (Simon, 1995) e o desenvolvimento da investigação constituiu-se ele próprio como um processo cíclico cumulativo, em que a interpretação de um percurso proporciona mais-valias para o planeamento, experiência, reflexão e interpretação dos ciclos seguintes. São assim valorizadas as dimensões de intervenção, iteração e orientação para os processos de uma investigação desta natureza. O objetivo da iteração foi o de ir melhorando as condições da implementação das tarefas com os alunos bem como sua sequenciação e a introdução de novas tarefas.

As tarefas que integram estes percursos são de natureza aberta e proporcionam discussões coletivas (*fase 3*) que têm por base as produções dos alunos. São tarefas de muito fácil adesão pois a sua compreensão é muito simples e envolve-os na atividade, em que podem raciocinar e agir de modo pessoal e significativo (Gravemeijer & Cobb, 2006).

O trabalho de campo foi assim constituído por dois períodos fundamentais. O primeiro, em que as tarefas foram experimentadas em mais do que uma sala de aula, com a investigadora como observadora participante, e o segundo que circunscreveu a experiência a uma única sala de aula e foi marcado por um duplo papel desempenhado pela investigadora que assumiu a liderança da *fase 3* da implementação das tarefas. Esta alteração ocorreu porque no primeiro período as discussões coletivas eram muito pobres ou inexistentes e foi possível graças à relação estabelecida com as quatro professoras envolvidas neste trabalho bem como com os seus alunos. Neste segundo período, que ocorreu em dois anos letivos seguidos, foram gravadas em vídeo as aulas onde as tarefas foram implementadas. Posteriormente, foram identificados como unidade de análise vários episódios relevantes da fase de discussão coletiva das tarefas. Estes episódios fazem parte do último período de experiências, e correspondem à experimentação das tarefas com os mesmos alunos, de uma das turmas, nos seus 2.º e 3.º anos de escolaridade.

Exemplos, contraexemplos, estruturação espacial e geométrica

Escolhemos dois episódios que servem de base à discussão que pretendemos fazer. Eles ilustram o papel dos exemplos construídos pelos alunos nas discussões que ocorreram, bem como a importância dos contraexemplos. Ilustram também vários aspetos da estruturação espacial e geométrica que estão presentes nestas tarefas e a importância de lhes dar destaque e de ir trabalhando a várias níveis sobre as figuras geométricas.

Episódio 1 — “Quase iguais”

A tarefa proposta consistia em identificar pares de figuras congruentes, tendo dois quadrados suscitado bastante polémica. A investigadora perguntou aos alunos se os dois exemplares em falta eram ou não iguais (Fig. 1). Quase todos os alunos afirmaram que eram iguais, embora houvesse um aluno que dissesse que não eram. A investigadora pediu a uma aluna, a Beatriz, para vir mostrar aos colegas porque é que eram iguais.

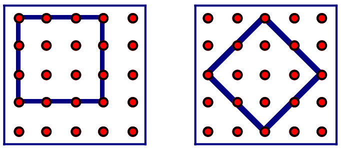


Figura 1 — Os dois quadrados que geraram a polémica em torno da sua congruência

Como esperávamos que isto acontecesse, de acordo com a prática de antecipação (Smith & Stein, 2011), tínhamos preparado dois acetatos com as figuras. A aluna pegou nos acetatos para experimentar. Beatriz procurou sobrepô-los, no retroprojetor, para fazer coincidir os dois quadrados, não diz nada, mas vai dando voltas aos acetatos para os conseguir coincidir. Durante este processo os outros alunos observam. A investigadora pergunta "*quem continua a achar que os dois quadrados são iguais*". Vários alunos afirmam já que "*não são iguais*". No entanto a Beatriz continua teimosamente a tentar sobrepô-los. A investigadora solicita aos colegas que argumentem:

Ana:	Um dos quadrados é maior do que o outro.
Leonor:	Não se consegue pôr um por cima do outro.
Zé:	O número de pontos dentro dos quadrados é diferente. Dentro de um quadrado há 4 pontos e no outro há 5.

Temos três validações diferentes, sendo que o último aluno apresenta uma justificação mais elaborada que denota uma capacidade de visualização mais apurada. Será de seguir o raciocínio deste aluno e partilhá-lo? Esta tensão entre aproveitar bons contributos individuais e decidir a orientação do movimento coletivo esteve presente em vários episódios e constitui a base de dilemas significativos que o professor enfrenta durante a prática de sala de aula (Carter & Richards, 1999). Neste caso a decisão foi de não partilhar esta última intervenção, em outros casos a decisão foi de partilhar. O tipo de raciocínio e as capacidades de visualização envolvidas são algumas das razões que estão na base da decisão de partilhar ou deixar cair intervenções dos alunos.

Episódio 2 — "O retângulo que não é retângulo"

Este segundo episódio aconteceu já no ano letivo seguinte. Teve lugar num outro percurso em que foram trabalhados quadriláteros como figuras compostas, destacando os seus elementos e procurando estabelecer relações simples entre esses elementos, nomeadamente os ângulos. O percurso foi constituído por seis tarefas que deram origem a quatro momentos coletivos de discussão. Este episódio ocorreu no fim da segunda tarefa e teve como suportes de discussão os trabalhos dos alunos realizados nas tarefas 1 e 2. Nestas duas tarefas os alunos tinham que descobrir todos os quadrados e todos os retângulos possíveis de desenhar numa rede ponteada ortonormada de 5 por 5. Estavam expostos trabalhos com todas as soluções encontradas por eles para quadrados e retângulos.

Na primeira parte da discussão a investigadora e a professora procuraram sensibilizar os alunos para a discussão que pretendiam criar. A apropriação pelos alunos de normas de discussão é um processo lento e construído ao longo de várias experiências (Wood & Turner-Vorbeck, 1999). A discussão inicia-se com o apelo ao respeito pelas opiniões diferentes, com destaque para o valor das opiniões dos alunos e para atenção e cuidado para não repetirem o que outros já disseram, aspeto muito comum com crianças pequenas.

A investigadora solicita aos alunos se têm alguma figura diferente, quadrados ou retângulos. Duas alunas levantam o dedo no ar, a Inês e a Beatriz e vêm ao quadro para expor as suas figuras já devidamente ampliadas para a exposição. Esta preparação de figuras ocorre durante a *fase 2*, correspondente à prática de seleção de Smith e Stein (2011).

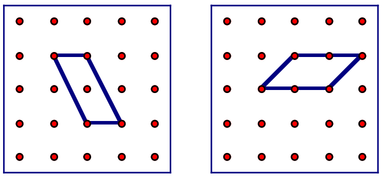


Figura 2 — Os “retângulos” da Inês e da Beatriz

Nós já sabíamos que estas figuras iam ser importantes para a discussão. Para estas alunas as suas figuras eram retângulos (Fig. 2) no entanto, quando as mostraram aos colegas dois alunos identificaram logo a falha.

Dois alunos em coro: *É um paralelogramo.*

A investigadora pede calma aos alunos e solicita à Inês que justifique porque acha que a sua figura é um retângulo. A aluna não é capaz de explicar. O episódio desenvolve-se com contributos de vários alunos que vão sucessivamente ao quadro mostrar porque é que o paralelogramo da Inês não é um retângulo.

Hugo: Não é porque tem assim 2 bicos para o lado.

O Hugo vai ao quadro e contorna com os dedos os paralelogramos. Aponta dois lados opostos e diz que está inclinado por comparação com os retângulos em que considera que não está inclinado. O Hugo tem de recorrer à comparação com outra figura exposta, um retângulo em posição prototípica “ao alto”, embora identifique elementos da figura importantes para esta decisão. Perante a dificuldade deste aluno em justificar o seu raciocínio, a investigadora decide pedir a outro aluno, Duarte, que apresente aos colegas como tinha pensado.

Duarte: Não é retângulo porque está torto. Em vez de ser assim está assim.

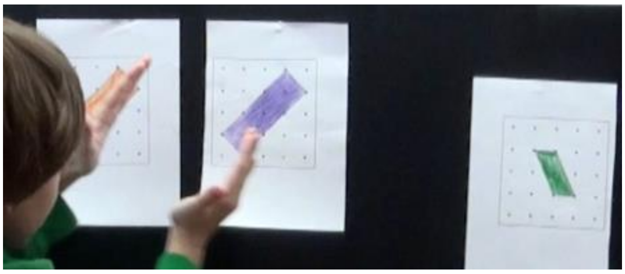


Figura 3 — Um dos paralelogramos que gerou a controvérsia e o retângulo que Duarte usou para comparar

O Duarte acompanha o que diz com gestos com as mãos (Fig. 3). No primeiro faz dois segmentos paralelos ao alto, ||, e depois faz dois segmentos paralelos inclinados, //, e contorna com os dedos o paralelogramo. Além disso, é capaz de fazer com as mãos a modificação necessária para que o paralelogramo ficasse retângulo, isto é, coloca as duas mãos de modo que dois lados consecutivos façam um ângulo reto. No entanto não verbaliza esta relação entre os lados. Acompanha a sua justificação comparando também com um outro retângulo exposto mas em posição não prototípica isto é, “inclinado”. Embora este aluno mostrasse que tinha ideias muito claras sobre a justificação geométrica correta não foi capaz de as verbalizar totalmente.

Toda esta discussão se centrou na observação e análise de figuras. Esta discussão tornou evidente a necessidade de trabalhar mais aspetos da estruturação espacial dos quadriláteros, necessários para a estruturação geométrica (Battista, 2008). Permitiu evidenciar a necessidade de dar atenção aos elementos que compõem uma figura, neste caso os ângulos e os lados. Permitiu também identificar as dificuldades em verbalizar o raciocínio, revelando que a maior parte das vezes as imagens mentais dos alunos estão corretas e são adequadas à sua argumentação.

Este episódio evidenciou a necessidade de enriquecer a linguagem dos alunos e de lhes proporcionar um instrumento simples de visualização para destaque e comparação de ângulos. Este objeto, a que chamámos “detetor de ângulos retos”, não é mais do que um canto de uma folha A4 cortado de maneira a ser facilmente manipulado e já tinha sido bastante usado em anteriores experiências destas tarefas com outros alunos. Nesta turma nunca tinha sido usado este objeto.

Este episódio marcou a orientação do resto do percurso, que se centrou principalmente na estruturação espacial, tendo as tarefas seguintes sido orientadas para a descoberta e comparação de ângulos em quadriláteros. Destaca-se assim a focalização no ângulo reto como referência de estruturação espacial e geométrica, sem necessidade de recorrer ainda a nenhum sistema de medida para identificar ângulos agudos, retos e obtusos em figuras geométricas planas.

Estes dois episódios ilustram como os alunos foram assumindo progressivamente a responsabilidade por descobrirem contra-exemplos e figuras incorretas ou que não respeitavam as condições estabelecidas, bem como por explicitar os seus argumentos de validação. Esta foi umas das formas encontradas com sucesso para conceder aos alunos a validação do conhecimento matemático em tarefas de estruturação espacial e geométrica.

Discussão

Parece-nos que os dados recolhidos valorizam o potencial desta perspetiva de estruturação defendida por Battista (2007, 2008), e nos ajudam a compreender melhor as estruturações espacial e geométrica, bem como as relações entre as duas (Battista, 2008).

Destacamos a importância da visualização na estruturação espacial dos quadriláteros e a necessidade de encontrar estratégias e objetos de apoio à visualização, como foi o recurso ao “detetor de ângulos retos”. Nas tarefas que deram origem a estes episódios as figuras foram sempre desenhadas sobre uma rede de pontos ortonormada que é estruturante espacialmente.

Em nosso entender, os dados recolhidos evidenciam especialmente a importância de estruturar espacialmente os quadriláteros como figuras compostas por quatro ângulos, em especial o retângulo como figura composta por quatro ângulos retos (Battista, 2008), para poder depois estruturar geometricamente cada um dos vários tipos de quadriláteros de modo favorável à sua classificação hierárquica (De Villiers, 1994). Realçam também a necessidade de incorporação de diversos modelos de estruturação espacial nos modelos pessoais como determinante para a essência da estruturação espacial mental de cada um e que potencia a sua maneira de pensar própria, como referido por Battista (2008, p. 138).

> Como a estruturação espacial é incorporada no modelo mental pessoal de um objeto espacial, ela determina a representação mental pessoal da essência do objeto espacial, e capacita a pessoa para o manipular mentalmente, refletir sobre ele e analisá-lo, bem como para compreendê-lo.

No que respeita à estruturação geométrica, o caminho seguido foi o de classificar os ângulos incorporados em figuras compostas (quadriláteros), procurando assim construir com os alunos a estruturação geométrica de uma classe de figuras, no caso apresentado a classe dos retângulos.

Os exemplos que trabalhámos mostraram-nos ser possível implementar tarefas significativas com alunos dos 2.º e 3.º anos de escolaridade, exigentes do ponto de vista da estruturação geométrica (congruência de figuras, identificação das propriedades de uma figura para a reconhecer como elemento de uma classe), integradas em percursos didáticos. Na aplicação destas tarefas, a especial atenção aos momentos de discussão coletiva revelou-se fundamental para a conceção de novas tarefas a implementar e para a tomada de decisões sobre a sequência a imprimir aos percursos. Os objetivos de aprendizagem das tarefas (estruturação espacial ou geométrica) e como proporcioná-los estiveram na base de dilemas presentes nesta tomada de decisões.

Os dados recolhidos nesta experiência também dão conta dos vários desafios associados a uma prática centrada no trabalho dos alunos quando se pretende que estes se tornem responsáveis pela construção do conhecimento matemático (Wood & Turner-Vorbeck, 1999), e se procura um equilíbrio entre o valor matemático dos trabalhos de cada aluno e a garantia de que este trabalho é reconhecido e aceite do ponto de vista matemático (Cobb, Yackel & Wood, 1992; Yackel & Cobb; 1996).

Os episódios vividos ajudam-nos a compreender a exigência do papel do professor em momentos de discussão coletiva. Esta exigência está expressa na atenção simultânea que este precisa de dar aos contributos individuais dos alunos e ao movimento coletivo que tem de imprimir a toda a turma para avançar, garantindo que o conjunto de ideias e processos em jogo são largamente aceites como tendo valor e importância matemática e como necessários para as aprendizagens matemáticas escolares futuras. Ilustram também a importância decisiva dos momentos coletivos para a construção de um ambiente de aprendizagem que responsabiliza os alunos e que lhes confere autonomia e autoridade na validação das ideias e conhecimentos matemáticos, os seus próprios e os dos colegas. Tudo isto numa atmosfera de sala de aula favorável à realização de atividades de natureza exploratória (Yackel & Cobb, 1996).

Encontramo-nos na fase de criação de referenciais e de indicadores em que perspetivamos duas dimensões fundamentais. Uma delas será naturalmente para os aspetos de estruturação espacial e geométrica e para a visualização em jogo. Queremos também destacar a outra dimensão referente ao ambiente, papéis e responsabilidades pela aprendizagem em discussões de grande grupo a partir de tarefas de natureza exploratória (Goos, Galbraith & Renshaw, 1999; Gravemeijer & Cobb, 2006; Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Wood & Turner-Vorbeck, 1999; Yackel & Cobb, 1996).

Para esta segunda dimensão, destacamos alguns indicadores referentes ao papel dos alunos: (a) identificação de erros, (b) validação dos trabalhos e argumentos de outros alunos, a convite ou por iniciativa própria, (c) ideias dos alunos para avançar na discussão coletiva, (d) interesse generalizado em participar e a iniciativa por o fazer, mesmo quando não são diretamente solicitados. No que respeita ao papel do professor, há a considerar os indicadores de práticas de orquestração (Smith & Stein, 2011), perguntas com potencial (Boaler & Brodie, 2004) e dilemas (Carter & Richards, 1999; Jaworski, 1999; Wood & Turner-Vorbeck, 1999). Estes indicadores cosntituem a base de construção de um quadro de referência (Quadro 1) que nos propomos discutir.

Com base no enquadramento teórico e na análise dos episódios identificados nos momentos coletivos construímos uma primeira versão de um quadro de referência em que colocamos em paralelo a responsabilidade do professor e a responsabilidade dos alunos nos momentos coletivos de grande grupo na implementação de tarefas exploratórias. Nesta primeira versão (Quadro 1) registamos apenas as especificações dos campos cruzados que nos permitem obter oito blocos de práticas e em que distinguimos práticas discursivas, práticas interativas e práticas reflexivas, tanto para o professor como para os alunos.

Quadro 1 — Quadro de referência de análise dos momentos coletivos de grande grupo na implementação de tarefas exploratórias (versão ainda em construção)

<table>
<tr><th></th><th>Responsabilidade do professor
(A)</th><th>Responsabilidade dos alunos
(B)</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemática socialmente partilhada
(Cobb et al., 1992)</td><td><u>Práticas Discursivas</u>
Formulação de perguntas</td><td><u>Práticas Discursivas</u>
Validação dos conhecimentos próprios ou dos colegas</td><td rowspan="2">Responsabilidade pelo raciocínio
(Wood & Turner-Vorbeck, 1999)
(Smith & Stein, 2011)</td></tr>
<tr><td><u>Práticas Reflexivas</u>
Decisões sobre o avanço da discussão</td><td><u>Práticas Reflexivas</u>
(Emergentes)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Gestão da discussão coletiva
(Oliveira, Meneses & Canavarro, 2013)</td><td><u>Práticas Interativas</u>
Gestão da participação dos alunos</td><td><u>Práticas Interativas</u>
Envolvimento na discussão</td><td rowspan="2">Responsabilidade por participar
(Wood & Turner-Vorbeck, 1999)</td></tr>
<tr><td><u>Práticas Reflexivas</u>
(Fundamentam as decisões que o professor toma sobre a participação dos alunos)</td><td><u>Práticas Reflexivas</u>
(Fundamentam as iniciativas e ações dos alunos)</td></tr>
</table>

Os vários aspetos expressos na coluna relativa à responsabilidade dos alunos (B), bem como a natureza das práticas identificadas, evidenciam o peso que estas podem ter nas discussões coletivas. Esta coluna dá destaque às formas de conhecimento matemático dos alunos. A coluna (A) corresponde às práticas matemáticas partilhadas da sociedade em geral visto que cabe ao professor o domínio do saber matemático em causa nas tarefas implementadas, considerando que, em última instância, será sempre o professor que valida a matemática construída e aceite (Goos *et al.*, 1999).

O paralelo que pode existir entre as duas colunas e a aproximação das práticas identificadas evidenciam a valorização crescente da responsabilidade dos alunos na construção do conhecimento matemático. Embora esta análise ainda esteja em curso e este quadro de referência em construção, parece-nos poder afirmar que este trabalho permite encarar com esperança a possibilidade de aproximar as formas de conhecimento matemático individuais de cada aluno, as práticas matemáticas partilhadas da comunidade de sala de aula e as práticas matemáticas partilhadas da sociedade em geral (Cobb *et al.*, 1992), no domínio específico da geometria.

Retomando o objetivo deste estudo, consideramos que este quadro de referência ajuda a compreender o papel dos momentos coletivos de grande grupo para a tomada de decisões na construção de percursos didáticos em geometria (Simon *et al.*, 2004), evidenciando dois aspetos críticos: a existência de várias tarefas significativas e por isso a exigência de tomar decisões para a escolha das tarefas em função de contributos das discussões coletivas; e o estabelecimento de elos entre as tarefas que integram um percurso.

Referências

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In G. W. Blume, & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Cases and Perspectives,* (Vol. 2, pp. 131-156). NCTM & IAP.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K., & Borrow, C. (1998) Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503-532.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester, Jr. (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 463-555). Reston, VA: NCTM.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The Importance, Nature and Impact of Teacher Questions. In D. E. McDougall, & J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group* *for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 774-790). Toronto: OISE/UT.

Carter, R., & Richards, J. (1999). Dilemmas of Constructivist Mathematicas Teaching: Instances from Classroom Practice. In B. Jaworski, T. Wood, & S. Dawson (Eds.), *Mathematics Teacher Education, Critical international Perspectives* (pp. 69-77). London: Falmer Press.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1990). Classrooms as learning environments for teachers and researchers. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist view on the teaching and learning of mathematics. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Number 4* (pp. 125-146). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2-33.

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam: Sense Publishers.

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For The Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

htpp//:mysite.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf., em 29.08.2010.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education – China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (1999). Establishing a Community of Practice. In Leone Burton (Ed.) *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (pp. 36-61). London: Falmer Press.

Gravemeijer, K. P. (1998). From a different perspetive: building on students' informal knowledge. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 45-66). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspetive. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17-51). New York and London: Routledge.

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(4), 646-682.

Jaworski, B. (1999). Tensions in teacher's conceptualizations of mathematics and of teaching. In L. Burton (Ed.) *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (pp. 153-172). London: Falmer Press.

Loureiro, C. (2012). Percursos didáticos em Geometria e Medida geométrica – aspetos metodológicos. In C. Tomás & C. Gonçalves (Eds.), *Atas do V Encontro do CIED — Escola e Comunidade*. http://www.eselx.ipl.pt/cied/eventos/index_v_encontro_pt.html

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29-54.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children*. New York and London: Routledge.

Serrazina, L. (2013). O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo e a melhoria o ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas*, *3*(2), 75-97.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 205-233.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspetive. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(5), 305-329.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston, Va: NCTM.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268–275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: teachers Colege Press.

Stein, M. K., Engle, Randi, A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show ant Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Tempera, T. (2010). *A Geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes*. Dissertação de Mestrado. http://hdl.handle.net/10400.21/113

Van Den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Cobb, P. (2006). Introducing educational design research. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 3-7). London and New York: Routledge.

Wilder-Johnston, Sue, & Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.

Wood, T (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education 30*(2), 171-191.

Wood, T., & Turner-Vorbeck, T. (1999). Developing teaching of mathematics: making connections in practice. In L. Burton (Ed.) *Learning mathematics. From hierarchies to networks* (pp. 173-186). London: Falmer Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ÂMBITO DE UMA COMPETIÇÃO INCLUSIVA E A EFICÁCIA DO FEEDBACK: O CASO DE MARIA

Rosário Monteiro
xicomate@gmail.com

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: A presente comunicação relata parte de uma investigação, emergente de um projeto de formação de professores, subordinado ao tema «competir para incluir». Nesta ação, a primeira autora do texto desempenhou as funções de formadora. O relato que agora se apresenta reporta-se a um trabalho de investigação, realizado *a posteriori*, que tem como principal propósito estudar a relação entre a capacidade de resolução de problemas matemáticos desafiantes, evidenciada pelo aluno, e o *feedback* escrito proporcionado pelo professor, de forma sistemática e após solicitação do próprio aluno. Esta intenção tem subjacente a ideia de que as aprendizagens realizadas pelos alunos dependem, em grande parte, da atividade que desenvolvem e da reflexão que fazem sobre a mesma, ainda que para isso tenham de ser incentivados pelo professor. Seguindo uma metodologia de natureza interpretativa, a recolha de dados foi realizada através da análise dos diários de bordo elaborados pelos formandos, das produções dos alunos e dos questionários elaborados pela equipa de formação e aplicados aos participantes na competição. Nesta apresentação, cingir-nos-emos, apenas, a um dos casos estudados: Maria. Dos resultados da análise realizada sobressaem as dificuldades observadas por Maria que, à exceção das referentes a um dos quatro problemas, foram ultrapassadas com o auxílio do *feedback* proporcionado pela professora.

Palavras-chave: Avaliação reguladora, competições inclusivas, *feedback* escrito, resolução de problemas matemáticos desafiantes.

Introdução

O trabalho que agora se relata é parte de um estudo mais abrangente baseado no desenvolvimento de uma ação de formação de professores intitulada “Resolução de problemas em matemática – competir para incluir”, que foi gizada com base no *ProjetoProblem@Web.* Foi nosso propósito, desenvolver um projeto de formação que permitisse ajudar os cinco professores (formandos) a selecionar tarefas desafiantes, a propor a alunos do 3.º ciclo em ambiente extracurricular, e a avaliar as produções escritas – resoluções dos problemas –, proporcionando *feedback* escrito, de caráter regulador, e permitindo aos alunos, quando tal se mostrasse necessário, voltarem a resolver os problemas ou a melhorarem, sucessivamente, as suas versões, sempre dentro de um período de tempo limitado. Com este agir avaliativo pensávamos conseguir promover a inclusão de alunos, mesmo dos que não tivessem um desempenho muito satisfatório em Matemática. Tal como vem acontecendo nos campeonatos de matemática SUB12 e SUB14[10], foi concebida uma competição de resolução de problemas dirigidos a todos os alunos do 3.º ciclo de uma escola situada nos arredores do Porto. Era a instituição aonde lecionavam os cinco formandos que frequentaram a ação. Este campeonato integrava duas fases – a fase de apuramento, *online*, e a final, presencial. De acordo com o regulamento elaborado pelos formandos, na primeira fase, essencialmente formativa, os alunos resolveram, à distância, quatro problemas, podendo beneficiar da ajuda dos professores, sempre que a solicitassem e, inclusivamente, se o professor entendesse que o trabalho do aluno poderia vir a ser melhorado. Note-se que o apoio só poderia ser proporcionado durante o tempo previsto para a resolução do problema em questão. Inicialmente, inscreveram-se 93 alunos e, após a conclusão da fase de apuramento, foram selecionados 27 alunos para realizarem a final, também de acordo com as normas constantes no regulamento - caso tivesse apresentado a resolução correta de, pelo menos, dois problemas passaria à final. Esta última etapa da competição foi presencial e decorreu, no dia 28 de maio, na escola que os alunos frequentavam. A competição foi designada por **MatNet**, após ter sido ouvida a opinião dos alunos do 3.º ciclo.

Era já tradição naquela escola dinamizar, com alunos do 3.º ciclo, a realização de diversas competições, nomeadamente as Olimpíadas Portuguesas da Matemática, o Canguru Matemático sem Fronteiras e o EQUAmat. Porém, todo o trabalho realizado na formação pressupunha que deveríamos levar a cabo um outro tipo de competição (com finalidades semelhantes às dos SUB12 ou SUB 14). Esta opção prendeu-se com o facto de considerarmos que a natureza das competições, com que os alunos estavam familiarizados, não poderiam ser consideradas inclusivas, pelo contrário, tratava-se de desafios destinados aos alunos com um bom desempenho em Matemática. Por esta mesma razão, a avaliação das produções escritas – resoluções dos problemas – pressupunha que as respostas ao *feedback* escrito, de caráter regulador, permitissem aos alunos, quando tal se mostrasse necessário, voltarem a resolver os problemas ou a melhorarem, sucessivamente, as suas versões, dentro de um período de tempo limitado.

O foco da investigação que se relata neste artigo é emergente do trabalho realizado na formação e incide sobre a adequação ou não das resoluções de problemas matemáticos usadas pelos alunos e as características do *feedback* escrito, proporcionado pelo professor, que visava regular a atividade intelectual e afetiva do aluno, aquando da resolução dos problemas propostos na fase de apuramento da competição. Assim, o objetivo deste trabalho consistia em estudar a relação entre a capacidade de resolução de problemas matemáticos evidenciada pelo aluno, e o *feedback* escrito proporcionado pelo professor, de forma sistemática e após solicitação do próprio aluno. Será necessário, agora, precisar o que se entende, neste estudo, por algumas das expressões usadas: *competições inclusivas*, *resolução de problemas* e *feedback escrito,* uma vez que os significados não são, de modo nenhum, universais.

---

[10] Campeonatos matemáticos nacionais promovidos pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciência e Tecnologias da Universidade do Algarve, incluídos no Projeto Problem@Web (projeto de investigação financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia)

Competições inclusivas

Importa começar por referir que as *competições inclusivas* emergem de contextos "onde a matemática é apresentada como desafiante, entusiasmante, acessível, social e emocionalmente envolvente, e próxima da vida quotidiana dos alunos" (Carreira, Ferreira & Amado, 2013, p. 544). Consequentemente, uma *competição inclusiva* é uma atividade realizada pelos alunos e orientada para desenvolver o gosto por fazer matemática, assumindo que todo o aluno, independentemente do seu sucesso escolar, se poderá transformar, com êxito, num resolvedor de problema (Carreira, Ferreira & Amado, 2013). Da experiência recente pode afirmar-se que as competições inclusivas promovem o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da capacidade de comunicação matemática (Jacinto & Carreira, 2011).

Assim, à semelhança do que sucede nas competições SUB12 e SUB 14, foram selecionados ou adaptados quatro problemas que pretendiam ser desafiantes e cuja resolução deveria integrar, de forma explícita, as estratégias usadas na resolução de cada um dos problemas.

Resolução de problemas

Segundo English, Lesh e Fennewald (2008), a resolução de problemas deve ser encarada como uma oportunidade para a construção e revisão de modelos, para o que será necessário a composição, por parte do aluno, de ciclos de compreensão que o levem a rever, clarificar e refinar sistemas conceptuais. Trata-se, assim, de uma capacidade transversal, presente em todo o currículo, que, para além de apelar à criatividade, proporciona diferentes formas de raciocinar e comunicar as ideias desenvolvidas. Ao permitir a apropriação dos conceitos, relacionando-os com outros, matemáticos ou não matemáticos, vai facultar o reconhecimento de regularidades e a compreensão de relações. Um outro aspeto desenvolvido é o da comunicação. Efetivamente, o aluno é convidado a descrever as estratégias usadas, os resultados obtidos e a explicitar a sua adequação ao contexto em que se enquadra o problema.

Neste trabalho, considerámos que

> a competência de resolução de problemas é a capacidade individual para levar a cabo um processo cognitivo que permita ao indivíduo compreender e resolver situações problemáticas para as quais não dispõe de um método imediato. Inclui a vontade de se envolver com tais situações como forma de realização do seu potencial enquanto cidadão construtivo e reflexivo (OCDE, 2012, p. 4)

No programa de Matemática para o ensino básico de 2007[11] preconizava-se o desenvolvimento desta capacidade ao longo dos vários ciclos e era referido que os alunos deveriam ter a possibilidade de experienciar diversas heurísticas, ou estratégias de descoberta, na resolução de problemas, nomeadamente, (1) partir do fim para o princípio; (2) tentativa e erro, (3) criação de um problema equivalente; (3) simplificação do

[11] Note-se que o Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007 encontrava-se ainda em vigor, exceto para os alunos do 7.º ano de escolaridade.

problema; (4) identificação de regularidades; (5) utilização de casos mais simples ou particulares.

Para além disso, a resolução dos problemas propostos não pressupunha o domínio de conteúdos curriculares, até porque se destinavam a alunos de 7.º, 8.º e 9.º anos não poderiam, obviamente, apelar diretamente para o conhecimento de tópicos matemáticos respeitantes ao programa. Caso tal sucedesse, os alunos de 9.º ano estariam, à partida, numa posição privilegiada. Tratava-se de problemas que poderiam ser resolvidos recorrendo a estratégias e processos de raciocínio, usando pensamento matemático e modelos conceptuais simples ao alcance dos alunos daquela faixa etária. Assim, optou-se por problemas que os alunos pudessem resolver recorrendo a diferentes abordagens, estratégias e, ainda, a representações diversas (figuras, tabelas, diagramas, etc.). Foi ainda dada, aos alunos, liberdade em relação ao modo como iriam apresentar as suas resoluções – digitalização das produções, texto redigido no *mail*, etc.). Porém, o uso do computador seria um requisito indispensável na fase de apuramento do MatNet.

Tivemos ainda o cuidado de selecionar ou adaptar problemas cujo grau de dificuldade não fosse demasiado elevado, mas que implicasse, eventualmente, a procura de pistas e não de respostas, por parte do aluno, junto do professor para os conseguir resolver com sucesso. Tínhamos consciência de que tal opção conduziria a uma autorregulação da aprendizagem do aluno, pois, tendo em conta alguns estudos realizados neste âmbito (procura de ajuda por parte do aluno para realizar, com sucesso, uma tarefa), há evidência de que os alunos que procuram ajuda para realizar uma determinada tarefa, fazem-no porque desejam aprender e compreender a situação apresentada (Zusho & Barnett, 2011). Considerámos, neste estudo, que um *problema matemático desafiante* deveria pressupor não só algum grau de dificuldade, mas também a necessidade de ultrapassar um obstáculo. Consequentemente, incitam deliberadamente os sujeitos a tentar uma resolução (Barbeau, 2009).

Para auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de resolução de problemas, isto é, ao pretender integrar um processo regulador da sua aprendizagem desta competência transversal, o professor poderá usar diversos recursos, nomeadamente o *feedback* escrito.

Feedback

Defendemos que o *feedback* ajuda o aluno a perceber o que sabe fazer, o que falta saber, o que fez mal e o que não sabe fazer (Hattie & Timperley, 2007). Neste sentido, o *feedback* não consiste em informar o aluno, apenas, do que ele não sabe, mas dizer-lhe qual poderá ser a causa e dar-lhe indicações de possíveis ações que deverá desenvolver para que possa vir a melhorar os seus conhecimentos. Consequentemente, o *feedback* deve: (1) ser claro, para que o aluno possa tomar consciência do seu estado em relação ao propósito daquela aprendizagem; (2) incentivar o aluno a analisar a resposta dada e reconhecer o que já está correto e (3) ser elaborado para que, com aquele comentário, o aluno possa melhorar a sua aprendizagem (Fernandes, 2005; Santos, 2003). Além disso, o *feedback* não deve incluir a correção do erro, mas apontar pistas de ação futura, para que o aluno saiba como deve continuar o trabalho. (Santos, 2003), De facto, sendo o próprio aluno a identificar e corrigir o erro, a aprendizagem será mais significativa. Um outro aspeto importante é a indicação da incompletude da produção do aluno, sem referência a pistas de ação, o que, muitas vezes, como defende Bruno (2006), não é suficiente para melhorar a segunda fase do trabalho.

Semana e Santos (2010) conceberam um instrumento de análise, adotado neste trabalho, que engloba os aspetos acima referidos e que permitem tipificar o *feedback* proporcionado às produções dos alunos:

Tabela 4: Dimensões e categorias de análise do *feedback*

Foco	aluno produto processo autorregulação
Natureza	formula juízos de valor chama a atenção incentiva à reflexão
Tratamento do erro	assinala e corrige assinala, mas não corrige não assinala, mas estimula a correção incentiva a completar/ melhorar
Forma sintática	simbólica afirmativa interrogativa afirmativa e interrogativa
Dimensão	curto médio longo

Tendo por base estes pressupostos, todos os participantes, que na fase de apuramento enviavam uma resposta incorreta ou incompleta, recebiam *feedback* do seu professor, incitando à reformulação da resposta e fornecendo algumas pistas se necessário e, em vários casos, a partir do *feedback* proporcionado resultou nova versão com uma resposta correta e completa.

Metodologia

Seguindo uma metodologia de natureza interpretativa, a recolha de dados foi realizada através da análise dos diários de bordo elaborados pelos formandos, das produções dos alunos e dos questionários concebidos pela equipa de formação e aplicados aos participantes na competição MatNet.

Foi opção consensual da equipa, constituída pela formadora e pelos cinco formandos, que cada professor auxiliasse os seus próprios alunos para que o *feedback* pudesse vir a ser mais eficaz. A justificação para esta decisão prende-se com o facto de, a *priori*, haver maior garantia da eficácia do *feedback* quando se conhece bem o aluno (Monteiro, 2013). No entanto, o tipo de *feedback* registado, sobre a produção de cada participante, era analisado e discutido por cada um dos seis professores envolvidos (formadora e formandos).

Dos 93 participantes, optámos por nos focarmos nos 27 que conseguiram ultrapassar a fase de apuramento e destes, selecionámos três casos, sendo um deles o da Maria. De facto, após a definição, *a priori*, dos critérios de seleção dos casos, analisámos os dados, relativos aos 27 alunos que passaram a fase de apuramento, integrados nos diários de bordo dos formandos e nos questionários apresentados aos alunos. Selecionámos três dos quais agora se apresenta, apenas, o caso de Maria. Procedemos a uma análise de conteúdo, de acordo com os critérios definidos – pretendíamos estudar um aluno de cada ano de escolaridade, com algum insucesso académico na disciplina de Matemática, uma vez que a ideia subjacente ao projeto é a de incluir os alunos que não mostravam um bom desempenho académico na disciplina de Matemática, e que tivesse manifestado empenho na resolução de problemas ao longo da fase de apuramento. Assim, a opção pelo estudo de caso de Maria prendeu-se com o facto de se tratar de uma aluna de 8.º ano, que não apresenta um desempenho bom na disciplina de Matemática, (Maria foi classificada, apenas, com um nível 3 ao longo do 2.º ciclo e, posteriormente, só no final 7.º ano voltou a conseguir atingir aquele nível) e de se tratar de uma aluna responsável que revelou gosto por aprender a resolver problemas.

Para cada problema, serão analisadas e comparadas as duas resoluções de Maria, procurando verificar a evolução da correção e completude dos raciocínios desenvolvidos, bem como da sua explicitação. O *feedback* recebido em cada problema seguirá o instrumento de análise proposto por Semana e Santos (2010).

A resolução de problemas de Maria

Começamos por fazer uma análise detalhada da forma como as sucessivas versões das produções de Maria evoluíram ao longo do vaivém de respostas e *feedback*.

Na primeira versão da resolução do problema 1 - era dada uma sequência de três imagens de balanças equilibradas com objetos (uma jarra, uma garrafa, um copo, e três pratos) e pedia-se para determinar a relação entre as massas da garrafa e do copo) Maria limita-se a apresentar um esquema do raciocínio desenvolvido e consegue chegar a uma resposta correta, porém, não explicita o seu raciocínio.

Na primeira versão da resolução do primeiro problema, Maria não recorre à escrita para explicar o seu processo de resolução, apesar de ter recorrido a um anexo em formato *Word*, para enviar, por e*mail*, a sua primeira resolução. Este recurso, usado por Maria, propiciou a opção da professora pela forma de comentário ao fornecer o *feedback* a esta produção. Tal *feedback* parece ter tido alguma eficácia, uma vez que, como se pode constatar na figura 2, Maria usou um esquema, elaborado no computador com ferramentas que dominava, que ilustra bem o raciocínio desenvolvido. Além disso, digita algum texto para complementar a explicação da estratégia sugerida no esquema (figura 2). Tratou-se de um *feedback* com uma dimensão *média*, afirmativo, com o foco no *processo*, que *chama a atenção* para a necessidade de explicitar os raciocínios desenvolvidos e que *incentiva o aluno a melhorar* a sua produção. Este *feedback* revelou-se claro para a aluna e incentivou-a a analisar a resposta para poder melhorá-la.

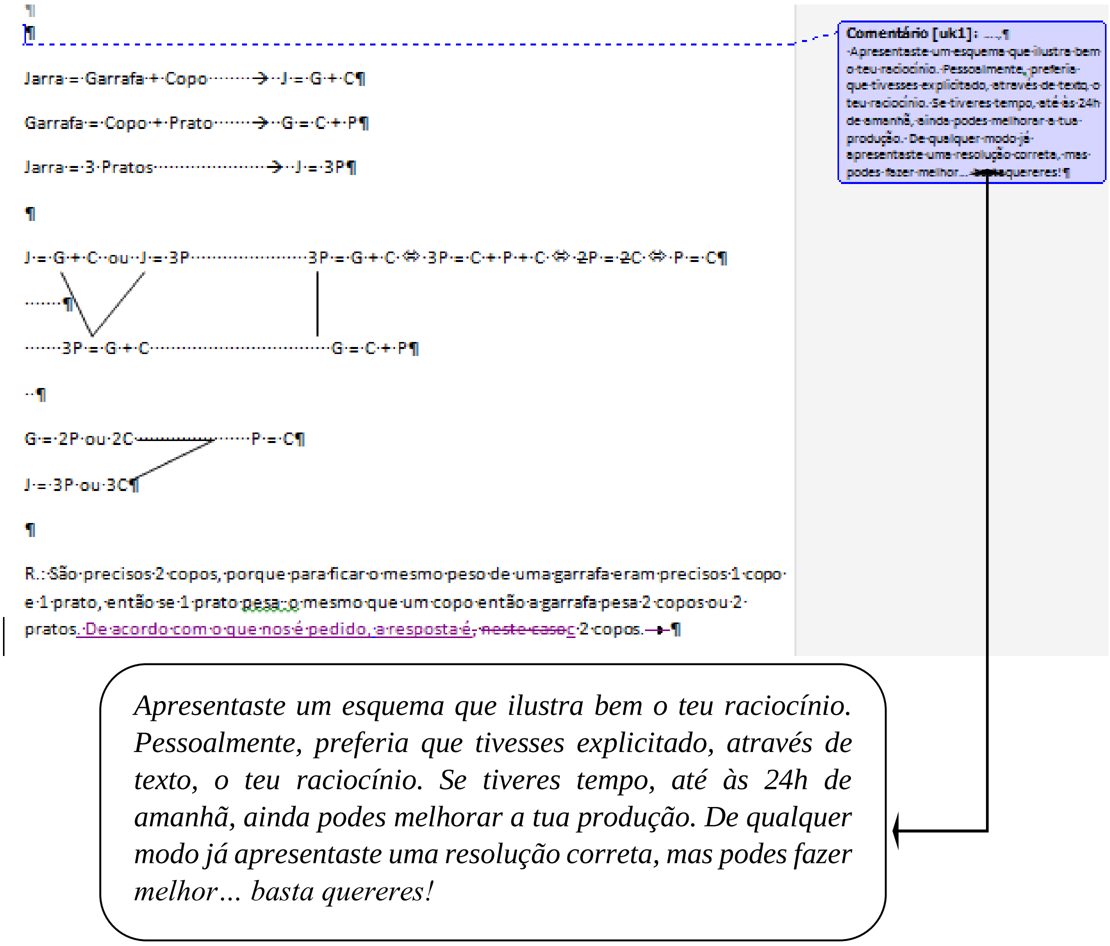


Figura 1: Primeira produção de Maria relativamente ao problema1

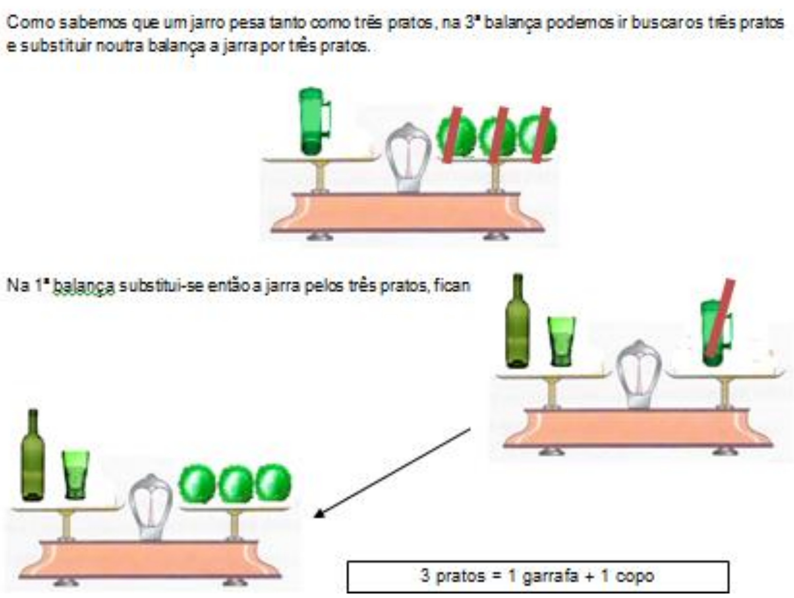
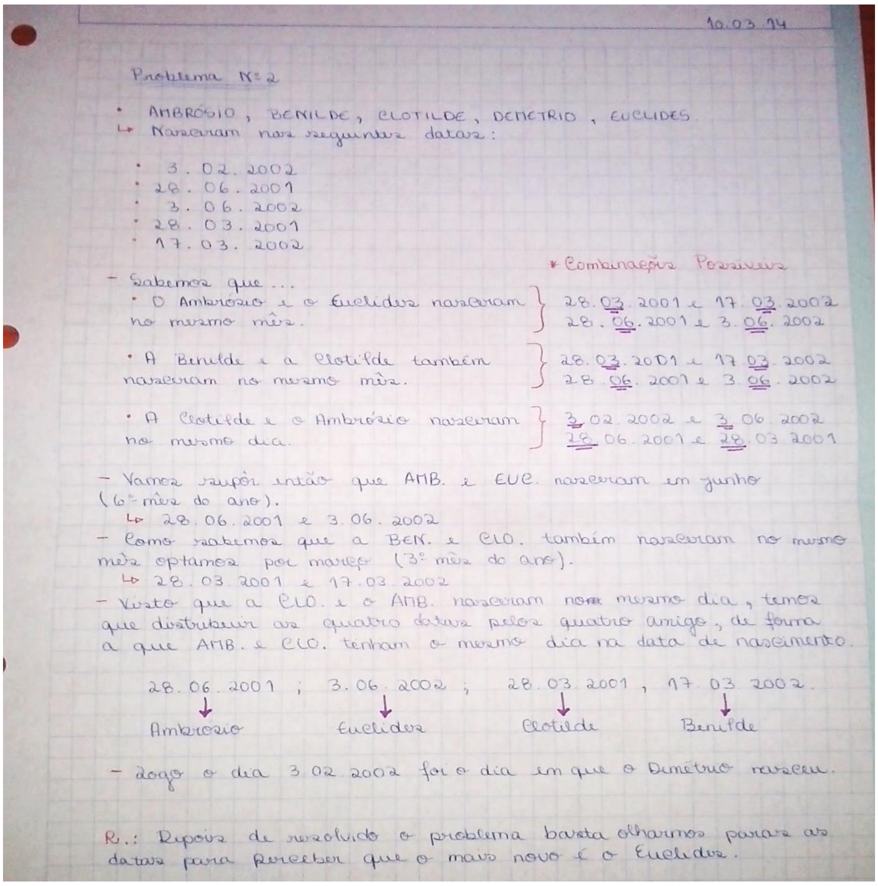


Figura 2: Excerto da segunda produção da Maria (após *feedback*)

Já na resolução do segundo problema (eram dadas cinco datas que correspondiam às datas de aniversário de cinco indivíduos; sabia-se que dois pares dos seis indivíduos tinham nascido no mesmo mês e um par tinha nascido no mesmo dia. Pretendia saber-se qual era o mais novo). Maria opta por resolver o problema em papel e fotografa o texto, enviando, via e*mail*, a sua produção em suporte digital (figura 3).


10.03.14

Problema Nº 2

- AMBRÓSIO, BENILDE, CLOTILDE, DEMETRIO, EUCLIDES.
  ↳ Nasceram nas seguintes datas:
  - 3. 02. 2002
  - 28. 06. 2001
  - 3. 06. 2002
  - 28. 03. 2001
  - 17. 03. 2002

* Combinações Possíveis

- Sabemos que...
  - O Ambrósio e o Euclides nasceram no mesmo mês. } 28.03.2001 e 17.03.2002 / 28.06.2001 e 3.06.2002
  - A Benilde e a Clotilde também nasceram no mesmo mês. } 28.03.2001 e 17.03.2002 / 28.06.2001 e 3.06.2002
  - A Clotilde e o Ambrósio nasceram no mesmo dia. } 3.02.2002 e 3.06.2002 / 28.06.2001 e 28.03.2001
- Vamos supôr então que AMB. e EUC. nasceram em junho (6º mês do ano).
  ↳ 28.06.2001 e 3.06.2002
- Como sabemos que a BEN. e CLO. também nasceram no mesmo mês optamos por março (3º mês do ano).
  ↳ 28.03.2001 e 17.03.2002
- Visto que a CLO. e o AMB. nasceram no mesmo dia, temos que distribuir as quatro datas pelos quatro amigo, de forma a que AMB. e CLO. tenham o mesmo dia na data de nascimento.

28.06.2001 → Ambrosio; 3.06.2002 → Euclides; 28.03.2001 → Clotilde, 17.03.2002 → Benilde.

- Logo o dia 3.02.2002 foi o dia em que o Demétrio nasceu.

R.: Depois de resolvido o problema basta olharmos para as datas para perceber que o mais novo é o Euclides.

Figura 3: Digitalização da resolução do problema 2

Ao analisar esta produção, o professor limitou-se a registar um comentário onde congratulava a aluna pela sua resolução. Trata-se de uma mudança significativa no modo de abordagem do problema., uma vez que Maria consegue, aparentemente sem auxílio, interpretar o enunciado, explicitar os dados e os raciocínios usados na estratégia que lhe permitiu encontrar a solução, ao contrário do que tinha sucedido na primeira versão do problema anterior - a forma esquemática utilizada. Tal não será exclusivamente consequência do *feedback* proporcionado pelo professor na resolução do problema anterior. Muito provavelmente, o trabalho sistemático com as tarefas realizadas em sala de aula e que terão merecido, por parte do professor, o mesmo tratamento poderão ter contribuído também para esta grande mudança na forma como Maria consegue explicitar os raciocínios desenvolvidos. Estas inferências podem ser legitimadas pela análise do diário de bordo da formanda.

> A Maria parece estar cada vez mais motivada…Nas tarefas em duas fases que já realizámos, reagiu sempre bem ao feedback que lhe proporcionei. Ainda tenho muita falta de confiança quando estou a registar os meus comentários sobre as produções dos alunos, mas tenho

> tentado dar sugestões que lhes sirvam para poderem aplicar noutras tarefas.
> Nesta produção [resolução do problema 2], Maria estava confusa, pois não tinha entendido o enunciado… Disse-me que não ia entregar, porque o problema era impossível. Quando a questionei sobre o motivo que a levava a dizer tal coisa, respondeu-me que não havia 4 datas com o mesmo mês e que assim não podia resolver o problema. Disse-lhe, então, para ler bem o enunciado e para tentar fazer corresponder a cada uma das personagens uma data de nascimento e que, depois disso, voltasse a ler o enunciado para ver se mantinha a mesma opinião. Maria agradeceu e, no dia seguinte, trouxe a folha onde tinha resolvido o problema, informando-me que já tinha enviado a resposta (Registo elaborado pela professora de Maria a 25 fevereiro)

Na resolução do problema 2, Maria explicitou corretamente a interpretação do enunciado e, simultaneamente, encontrou uma forma que a levou a uma estratégia adequada. O *feedback* proporcionado pela professora oralmente que apontava para ações concretas a desenvolver pela aluna (ler novamente o enunciado e estabelecer uma correspondência entre cada personagem e uma data de nascimento) foi um *feedback* curto, *afirmativo*, com foco no *processo* e que *incentiva a reflexão*. Levou a aluna a reformular a sua opinião inicial quanto à incapacidade para resolver o problema. Maria, ao corrigir a interpretação do enunciado, conseguiu encontrar uma estratégia adequada à resolução daquele problema.

Na resposta ao problema 3, Maria apresenta, de novo, um texto escrito em formato *Word*, que envia, em anexo, por e*mail* (fig. 4).

O trabalho de Maria melhorou consideravelmente, inclusivamente na apresentação. Apesar de esta ser a única versão enviada por Maria relativamente ao problema 3, analisando o diário de bordo da professora, verificamos que a aluna começou por solicitar esclarecimentos sobre a interpretação do enunciado deste problema. Só depois de lhe ter sido proporcionado *feedback* é que a aluna entregou, dentro do prazo, a resolução que se encontra na figura 4. De facto, ao analisar o texto produzido pela professora de Maria, verificamos que apesar de esta ter sido a única versão que foi enviada, houve um trabalho prévio em colaboração com a professora, como se pode inferir do extrato seguinte:

> Maria continua entusiasmada! São estes alunos que nos fazem crer que vale a pena ser professora… Mais uma vez, no fim da aula, veio ter comigo para a ajudar, para lhe esclarecer umas dúvidas relativas ao problema 3. Não estava a entender como é que ia começar. Entregou-me uma folha onde tinha escrito, para além do enunciado do problema, duas colunas com os múltiplos de 5 e o seguinte texto: ”Não sei por onde começar! Para ver se são múltiplos, tenho de escrever muitos números… Não sei como vou descobrir os números. Eu já pensei escrever os múltiplos de 5 até 1000 e os de 3 de 4 e 11 também. Mas, nunca mais vou acabar. Deve haver uma maneira mais simples. Ajude-me, professora, por favor!”.

Depois de ter lido o texto, pensei que tinha de lhe indicar os critérios de divisibilidade, mas sem lhe dizer explicitamente de que se tratava. Depois de ter pensado muito no assunto e de voltar a ler os textos que tínhamos analisado nas sessões [textos que abordavam aspetos teóricos sobre o feedback escrito], decidi registar o seguinte comentário: Maria, parece que encontraste uma forma de resolver o problema, só que é muito trabalhosa! Se olhares para os múltiplos de 5 que começaste a registar, és capaz de encontrar alguma regularidade, não és? Já estudámos esse tópico. Consulta o teu caderno e o teu manual do ano passado e verás que encontras a informação que te irá ajudar a resolver o problema de um modo mais rápido. Mãos à obra. Tu consegues! (Registo elaborado pela professora de Maria a 23 de março)

PROBLEMA 3 – Um desafio de Pierre Fermat

Enunciado

Com os dígitos **1, 2, 3, 4, 5, 6** Pierre Fermat formou um número de seis algarismos distintos, *ABCDEF*. Sabe-se que o número de três algarismos *ABC* é múltiplo de 4, o número de três algarismos *BCD* é múltiplo de 5; o número de três algarismos *CDE* é múltiplo de 3 e o número de três algarismos *DEF* é múltiplo de 11.

Que número formou Fermat?

Resolução

1º Passo: Se o número de três algarismos BCD é múltiplo de 5, o seu último algarismo ou é 0 ou 5, mas como Pierre não utilizou o algarismo 0, o número D é 5.

A B C 5 E F

2ºPasso: Se o número DEF é múltiplo de 11 temos que descobrir os múltiplos de 11 entre 500 e 600, que são 506, 517, 528, 539, 550, 561, 572, 583 e 594. Mas como o número só pode ter como algarismos o 1, 2, 3, 4, 5 e 6, o número DEF é o 561.

A B C 5 6 1

3ºPasso: Se o número ABC é múltiplo de 4, o seu último algarismo só pode ser 2 ou 4. Mas como o número CDE é múltiplo de 3, entre o número 256 e 456, o número 456 é que é múltiplo de 3.

A B 4 5 6 1

4ºPasso: Só sobram os algarismos 2 e 3. Mas como o número ABC é múltiplo de 4, entre o número 324 e 234, o número 324 é que é múltiplo de 4.

3 2 4 5 6 1 = A B C D E F

Figura 4: Produção de Maria relativamente ao problema 3

Maria terá posto em prática o que a professora já lhe havia dito a respeito das dúvidas colocadas aquando da resolução do problema 2, nomeadamente sobre a organização da resposta e conseguiu entender o *feedback* da professora. Este *feedback* parece ter sido claro para Maria, incentivou a análise da primeira resposta dada pela aluna e proporcionou a descoberta de uma resposta correta. No extrato do diário de bordo da professora, parece evidente o incentivo que é dado a Maria. De facto, a professora, encoraja-a a prosseguir e mostra-lhe que acredita nas suas capacidades. Este *feedback* foi por nós caracterizado do seguinte modo: (1) com foco no *processo*; (2) *incentiva a melhorar*; (3) chama a atenção; (4) tem uma dimensão *média; e (5) é simultaneamente afirmativo e interrogativo*.

Já na resposta ao problema 4, Maria começa por apresentar, à professora, uma folha com os seguintes esquemas:

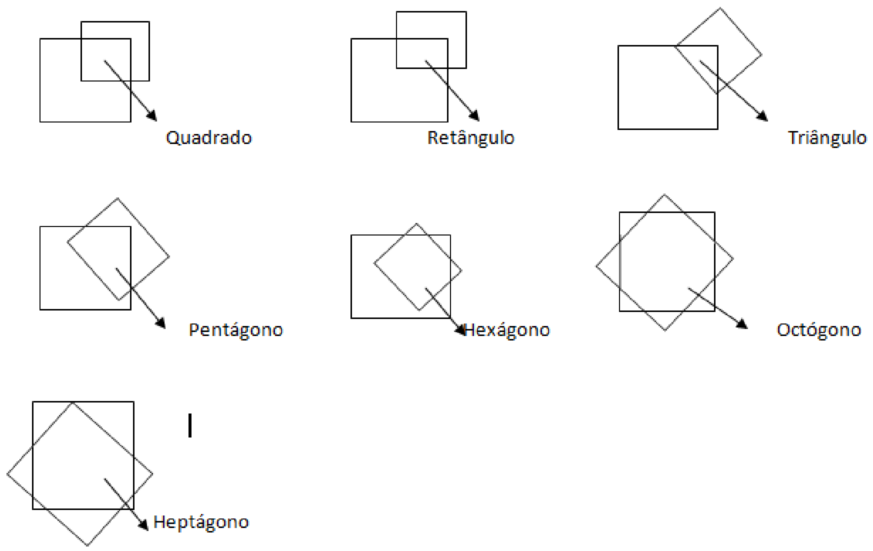
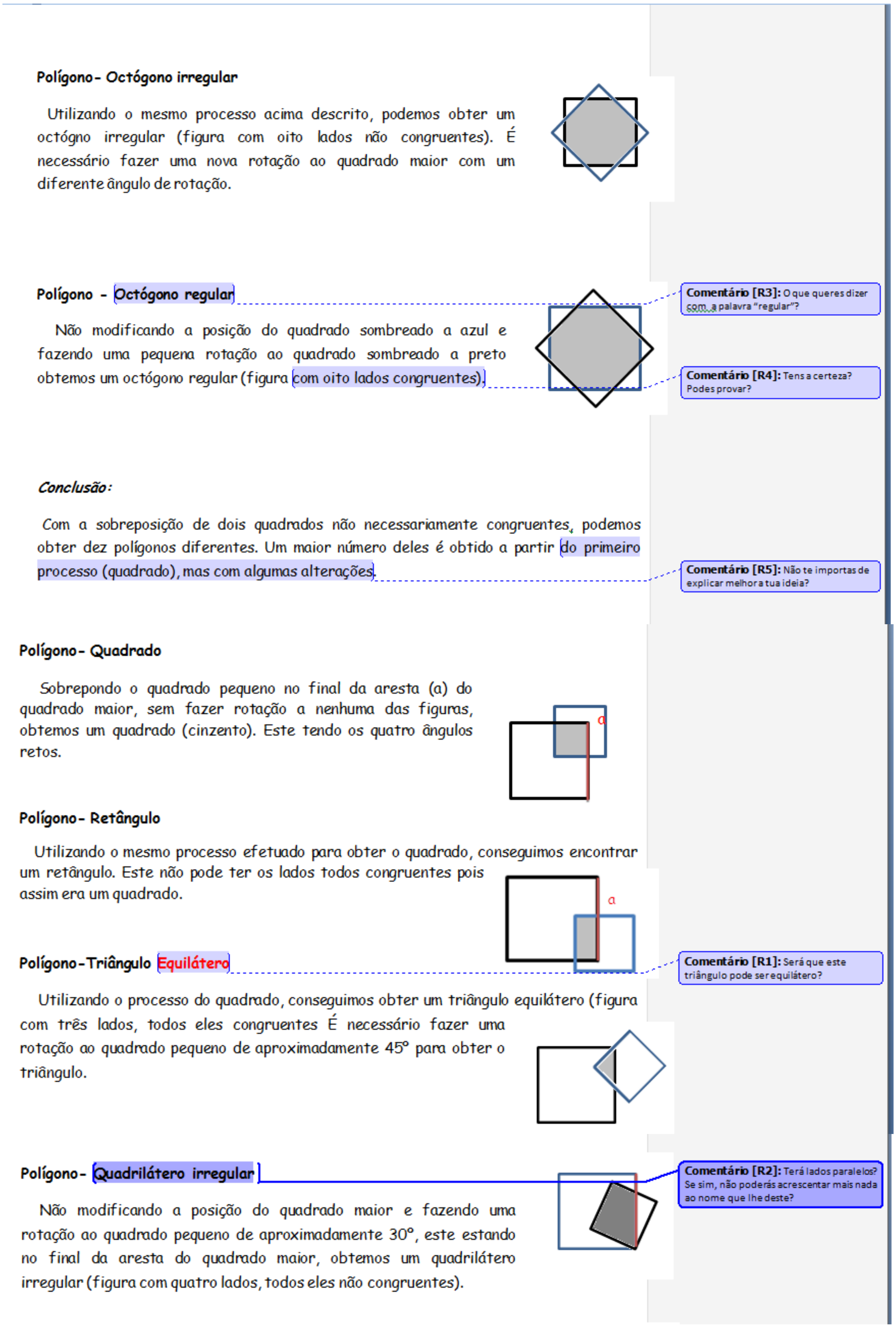


Figura 5: Primeira produção de Maria em relação ao problema 4

Ao mostrar estes esquemas, a professora incentiva-a a pensar melhor para poder elaborar uma resposta mais completa, dizendo-lhe que tem uma boa base de trabalho, mas que poderá apresentar uma resolução melhor, como pode ser inferido do registo no diário de bordo da professora:

> A Maria apresentou-me um esquema com 7 exemplos. Eu comecei por lhe dar um incentivo, dizendo que tinha entendido o enunciado e, como tal, estava de parabéns! Ficou tão satisfeita! Até as lágrimas lhe brilharam naqueles olhitos azuis… Mas, tive de acrescentar que a exploração que tinha feito não estava muito organizada… Se ela reparasse, no enunciado havia referência a quadrados congruentes e não congruentes, pelo que, na minha opinião, seria melhor separar … (Registo elaborado pela professora de Maria a 15 de maio)

Tratou-se de um *feedback* uma vez mais focado no processo, chama a atenção, assinala o erro, mas não o corrige, é afirmativo e de dimensão média. Maria prometeu rever o que tinha feito e tentar melhorar o problema e, enviou, para a equipa do MatNet, antes do prazo de entrega terminar via *email*, uma segunda versão que, posteriormente, foi comentada pela professora.



Polígono- Octógono irregular

Utilizando o mesmo processo acima descrito, podemos obter um octógno irregular (figura com oito lados não congruentes). É necessário fazer uma nova rotação ao quadrado maior com um diferente ângulo de rotação.

Polígono - Octógono regular

Não modificando a posição do quadrado sombreado a azul e fazendo uma pequena rotação ao quadrado sombreado a preto obtemos um octógono regular (figura com oito lados congruentes).

Comentário [R3]: O que queres dizer com a palavra "regular"?

Comentário [R4]: Tens a certeza? Podes provar?

Conclusão:

Com a sobreposição de dois quadrados não necessariamente congruentes, podemos obter dez polígonos diferentes. Um maior número deles é obtido a partir do primeiro processo (quadrado), mas com algumas alterações.

Comentário [R5]: Não te importas de explicar melhor a tua ideia?

Polígono- Quadrado

Sobrepondo o quadrado pequeno no final da aresta (a) do quadrado maior, sem fazer rotação a nenhuma das figuras, obtemos um quadrado (cinzento). Este tendo os quatro ângulos retos.

Polígono- Retângulo

Utilizando o mesmo processo efetuado para obter o quadrado, conseguimos encontrar um retângulo. Este não pode ter os lados todos congruentes pois assim era um quadrado.

Polígono-Triângulo Equilátero

Utilizando o processo do quadrado, conseguimos obter um triângulo equilátero (figura com três lados, todos eles congruentes É necessário fazer uma rotação ao quadrado pequeno de aproximadamente 45º para obter o triângulo.

Comentário [R1]: Será que este triângulo pode ser equilátero?

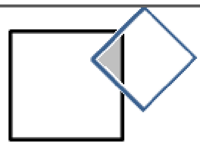
Polígono- Quadrilátero irregular

Não modificando a posição do quadrado maior e fazendo uma rotação ao quadrado pequeno de aproximadamente 30º, este estando no final da aresta do quadrado maior, obtemos um quadrilátero irregular (figura com quatro lados, todos eles não congruentes).

Comentário [R2]: Terá lados paralelos? Se sim, não poderás acrescentar mais nada ao nome que lhe deste?

Figura 6: Excerto da segunda produção de Maria em relação ao problema 4

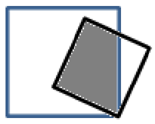
A análise desta segunda versão, comentada pela professora, permite inferir que Maria melhorou significativamente a produção anterior, apesar de não ter conseguido resolver corretamente a tarefa. Importa recordar que este foi o último problema a ser apresentado na fase de apuramento. Apesar do *feedback* proporcionado pela professora, Maria atende apenas a dois dos comentários e entrega a última versão deixando o resto da resolução como tinha apresentado na versão anterior, isto é, limitou-se a corrigir o texto para dois dos casos apresentados e comentados na versão 2:



Polígono-Triângulo retângulo

Utilizando o processo do quadrado, conseguimos obter um triângulo retângulo (figura com dois lados perpendiculares que são os do quadrado). É necessário fazer uma rotação ao quadrado pequeno de aproximadamente 45° para obter o triângulo.

Polígono- trapézio retângulo



Não modificando a posição do quadrado maior e fazendo uma rotação ao quadrado pequeno, obtemos um trapézio retângulo (figura com quatro lados, 2 paralelos que são os do quadrado ou parte deles e 1 que é um dos lados do quadrado).

Figura 7: Excerto da terceira produção de Maria em relação ao problema 4

Analisando o texto produzido pela professora de Maria, verificamos que, na sua opinião, o insucesso da aluna neste problema prende-se, essencialmente com a sua natureza, como se encontra evidenciado no extrato seguinte:

> Sinto-me um bocado constrangida com o insucesso dos meus alunos (…) Maria tentou dar o seu melhor, mas não conseguiu! Eu penso que isto se deve, sobretudo, ao grau de exigência deste problema quando comparado com os anteriores… Foi demasiado desafiante! Desta vez, acho que não foi o feedback que falhou… (Registo elaborado pela professora de Maria a 20 de maio)

Da análise deste extrato, parece possível inferir que, na opinião da professora de Maria, existe uma estreita relação entre a natureza das tarefas e o sucesso do aluno, aquando da sua resolução, mesmo que apoiado por um *feedback* adequado. Efetivamente, o problema 4 tinha um cariz exploratório, mais aberto do que os anteriores, o que poderá ser responsável pela dificuldade verificada na sua resolução. Mas será que o *feedback* proporcionado foi mesmo o mais adequado, como refere a professora?

Um outro aspeto, para nós importante, é a perceção de Maria de problema desafiante. No final do campeonato, na resposta ao questionário concebido pelos formandos, Maria afirma:

> Eu, quando estava a resolver os problemas do MatNet, nunca esperava nada demasiado fácil. Sabia que tinha de haver alguma dificuldade para ultrapassar. Mas, ao mesmo tempo, sentia-me atraída em relação a ele, ou seja, o problema chamava-me para o resolver, fazia-me querer vencer… E acho que venci! Com a ajuda da *stora*, claro, mas consegui chegar à final. Obrigada!

Há dois fatores determinantes na evolução de Maria: o gosto pela resolução de problemas e a relação afetiva que estabeleceu com a professora!

Conclusões

Maria, com o auxílio da professora, consegue apresentar respostas corretas e completas a três dos quatro problemas da fase de apuramento, apresentando no quarto problema apenas algumas melhorias na sua resolução. Na competição final ficou em sétimo lugar. Trata-se de uma aluna responsável e preocupada pelo cumprimento dos prazos estipulados e que evoluiu bastante ao longo do ano letivo, no que diz respeito à interpretação de enunciados, à organização das respostas e, inclusivamente, à descoberta de estratégias adequadas à resolução de um dado problema. Para tal terá contribuído o seu trabalho em colaboração com a professora.

Durante a participação na fase de apuramento foi notório o seu progresso na forma como comunicava as resoluções, sendo evidente que ia explicitando cada vez melhor o seu processo de resolução. Maria, de um modo geral, solicita, à professora, o *feedback* de que necessita para progredir e só posteriormente é que envia, via e*mail*, as suas produções num documento em anexo, por vezes com mais de uma página.

O *feedback* proporcionado pela professora foi, em todas as situações, sempre claro e incentivou a aluna a procurar uma solução para ultrapassar as dificuldades com que se deparava. Além disso, pudemos constatar que os comentários da professora foram sempre focados no *processo*, de um modo geral, *chamavam a atenção* para aspetos menos claros das produções de Maria, mas, nunca incluíram juízos de valor relativamente a erros cometidos pela aluna, continham, em vez disso, *chamadas de atençã*o e incentivavam Maria para que refletisse sobre as suas incorreções (Hattie & Timperley, 2007). É de salientar que o *feedback* proporcionado nunca teve uma forma *simbólica*. Estas características podem explicar, em certa medida, a sua eficácia (Santos & Pinto, 2009).

Estamos conscientes, no entanto, de que, nesta competição, por muito regulador e formativo que o *feedback* seja, carrega consigo um elemento avaliativo, uma vez que o aluno é informado acerca da correção ou completude da resposta enviada. No entanto, analisando o caso de Maria, com base em dados qualitativos recolhidos ao longo da fase de apuramento, podemos concluir que o *feedback* proporcionado facultou um progresso significativo no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, não desvirtuando a sua principal função: auxiliar a aluna a tomar consciência das suas dificuldades, procurando forma de as superar, isto é, facultar o desenvolvimento da sua capacidade de autorregulação.

Referências

Barbeau, E. (2009). Introduction. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom. The 16th ICMI Study* (pp. 1-9). New York, NY: Springer.

Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback – um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Carreira, S., Ferreira, R., & Amado, N. (2013). Fatores afetivos na resolução de problemas matemáticos desafiantes no contexto de uma competição inclusiva baseada na Web. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.

English, L., Lesh, R. & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME11) - Topic Study Group 19: Research and development in problem solving in mathematics education*. Acedido em setembro, 2014, em http://tsg.icme11.org/document/get/458.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas*. Cacém: Texto Editores.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback, *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112.

Jacinto, H. & Carreira, S. (2011). Nativos digitais em atividade de resolução de problemas de matemática. *Conferência Online de Informática Educacional.* Lisboa, UCP. Acedido em agosto, 2014, em http://www.coied.com/2011/actividades/artigos/tema1/.

Monteiro, R. (2013) *Práticas avaliativas da capacidade de argumentação matemática de alunos do ensino secundário: um estudo com professores de matemática A*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing. Acedido em setembro, 2014, em http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. In *Actas do XIV SIEM - Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-27). Lisboa: APM.

Santos, L., & Pinto, L. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. *In Proceedings of PME 33, International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 5, pp. 49-56). Thessaloniki, Greece.

Semana, S. (2008). *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8.º ano de escolaridade em Matemática.* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Zusho, A. & Barnett, P. (2011). Personal and contextual determinants of ethnically diverse female high school students' patterns of academic help seeking and help avoidance in English and mathematics. *Contemporary Educational Psychology*, *36*(2), 152-164.

Grupo de Discussão 3

Conhecimento matemático das tarefas para ensinar

CONHECIMENTO MATEMÁTICO DAS TAREFAS PARA ENSINAR

Ana Maria Roque Boavida
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

José António Duarte
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
jose.duarte@ese.ips.pt

É indiscutível que as tarefas matemáticas que o professor propõe na aula não são irrelevantes para as aprendizagens dos alunos. No entanto, é também consensual que por mais significativas e cognitivamente desafiadoras que sejam as tarefas, por si só não garantem uma aprendizagem da Matemática com compreensão. As tarefas não têm vida própria; é o professor que lhes dá vida quando as interpreta e explora com os alunos (Chapman, 2013). Este trabalho pode ser feito de modos muito diferentes, o que pode conduzir a que uma tarefa aberta se transforme numa fechada — ou reciprocamente — ou que outra potencialmente favorável ao desenvolvimento do raciocínio matemático conduza, na prática, à mera memorização de técnicas e procedimentos desprovidos de significado.

Neste âmbito, tão essencial como selecionar e sequenciar boas tarefas, isto é, tarefas que contribuam para o desenvolvimento do que Kilpatrik, Swafford e Findell (2001) designam por *proficiência matemática*, é o modo como o professor concebe e concretiza a sua exploração na aula, como apoia o trabalho dos alunos, como orquestra uma discussão coletiva de estratégias de resolução que seja matematicamente produtiva para todos e como promove a institucionalização de ideias e conceitos matemáticos relevantes, de modo a que passem a fazer parte das memórias matemáticas da turma.

Este trabalho de ensino requer um conhecimento profissional multidimensional, polifacetado e abrangente que tem ressonâncias com o que Chapman (2013) designa por "conhecimento matemático das tarefas para ensinar" (p. 1). Segundo a autora, este conhecimento inclui:

– A compreensão da natureza de tarefas que têm valor educativo para permitir o aprofundamento da compreensão matemática dos alunos — Por exemplo, as tarefas envolvem conteúdos matemáticos significativos? Têm vários processos de resolução? Requerem, dos alunos, explicações, justificações, formulação, teste e prova de conjeturas?

- A capacidade de identificar, selecionar e criar tarefas matematicamente ricas e significativas para os alunos tendo em conta os seus interesses e necessidades de aprendizagem;
- O conhecimento dos níveis de exigência cognitiva das tarefas e das mais-valias que podem ter para favorecer a compreensão da Matemática;
- O conhecimento do que os alunos sabem, de quais os seus interesses e experiências e dos diversos modos como aprendem Matemática;
- A compreensão de como a seleção das tarefas e o modo como são usadas na aula influencia a forma como os alunos atribuem sentido à Matemática e a aplicam;
- O conhecimento de quais os aspetos da tarefa a destacar, de como organizar e orquestrar o trabalho com os alunos, de quais as questões a colocar para desafiar alunos com diferentes níveis de maturidade matemática e de como os apoiar sem eliminar desafios que os ajudem a progredir.

Este grupo de discussão tem por propósito debater diversas questões relacionadas com o conhecimento matemático das tarefas para ensinar, considerando as suas diferentes dimensões. Que contextos são favoráveis à construção deste conhecimento? Será suficiente o envolvimento do professor na construção de tarefas e na discussão de como poderão ser exploradas na aula? Que desafios se lhe colocam quando decide levar para a aula tarefas com um nível elevado de exigência cognitiva? Como se pode preparar para lidar com estes desafios? Que papel/papéis deve assumir na exploração das tarefas na aula? Na discussão coletiva das estratégias de resolução de uma tarefa, como promover e sustentar o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de explicações e justificações que, do seu ponto de vista, validam as ideias que enunciam e, simultaneamente, assegurar o caráter matemático de tais práticas argumentativas? Como lidar com os alunos que pensam não fazer parte do seu papel comprometerem-se com a coerência, avaliação ou justificação dos seus raciocínios, nem com a análise crítica e fundamentada do que ouvem dos colegas? Como controlar o andamento da discussão de modo a que haja espaço para a expressão de outras vozes além das valorizadas na turma? Como selecionar e seriar as estratégias usadas pelos alunos na resolução de uma tarefa, de modo a que a sua discussão contribua para a aprendizagem de todos? A estas questões várias outras se poderiam acrescentar.

As cinco comunicações apresentadas neste grupo de discussão abordam aspetos relacionados com várias destas questões. A sua discussão pode contribuir para se avançar na compreensão de como encontrar caminhos para que o professor que ensina Matemática possa tirar o melhor partido possível para a aprendizagem de todos os alunos das tarefas que seleciona e decide levar para as suas aulas. Esta discussão constitui, assim, uma mais-valia para o conhecimento matemático do professor acerca das tarefas para ensinar.

A primeira comunicação, *Formação de professores que ensinam matemática: escolha, proposição e implementação de tarefas*, da autoria de Cristina de Jesus, Márcia Cyrino e Hélia Oliveira, foca-se em investigar como a análise de tarefas realizada num contexto de formação contínua, pode ajudar professores que ensinam Matemática nos primeiros anos (1º ao 5º ano) do Ensino Fundamental a refletir sobre a sua prática.

Para o efeito constituiu-se um grupo de estudos que funcionou uma hora por semana, durante seis meses, com catorze professoras, em posições relevantes na escola, para análise do nível cognitivo de tarefas, com base nas categorias propostas no projeto QUASAR (Stein & Smith, 1998).

Os resultados discutem-se com base em: episódios acerca das razões para a escolha das tarefas; diferentes perspetivas sobre a implementação das tarefas; e nas mudanças desencadeadas pela discussão e reflexão no grupo de estudos.

Inicialmente os conteúdos constituem a razão forte para a utilização das tarefas (para os introduzir ou verificar) e, na sua implementação, a interpretação é ainda muitas vezes realizada pelo professor. No entanto, o trabalho do grupo de estudos permitiu às professoras compreender o impacto das suas escolhas relativamente ao tipo de tarefas e das ações que promovem na sala de aula. Progressivamente, as professoras colocam-se no lugar dos alunos e dão mais atenção às suas respostas de modo a identificarem as questões a colocar na sala de aula e a forma de monitorizar o trabalho. A atividade do grupo facilitou também um outro 'olhar' mais crítico na escolha das tarefas e no seu nível de exigência.

Na segunda comunicação, intitulada *Conhecimento Didático sobre as tarefas na formação inicial de professores: o caso de Berta*, Nádia Ferreira e João Pedro da Ponte centram-se na análise do conhecimento sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais mobilizado e reconhecido por uma futura professora do 2º ciclo do ensino básico. Debruçam-se, em especial, sobre o impacto no seu conhecimento didático relativo às tarefas e aos alunos proporcionado por uma experiência formativa apoiada no trabalho com um caso multimédia. A análise dos dados apresentados, que foram recolhidos numa turma do 6º ano de escolaridade durante duas aulas em que foi explorada uma tarefa, permite destacar que o referido caso multimédia foi um importante recurso para a seleção da tarefa proposta e para a planificação do ensino. Em particular, contribuiu para que a professora se sentisse mais segura quanto às potencialidades da tarefa, para que ampliasse o seu conhecimento sobre possíveis materiais de apoio à atividade da aula e sobre eventuais resoluções dos alunos e, ainda, para que fosse capaz de preparar uma síntese que tivesse em conta a sua agenda de ensino. Estes resultados evidenciam que o uso de meios tecnológicos que permitam representar a atividade das aulas e ter acesso tanto a registos filmados desta atividade como às planificações e reflexões de quem as leciona, podem contribuir para o enriquecimento do conhecimento matemático para ensinar, nomeadamente de futuros professores.

A análise da preparação de uma tarefa, de elevada exigência cognitiva, associada ao tema Organização e Tratamento de Dados, é o cerne da terceira comunicação da autoria de Luciano Veia, Joana Brocardo e João Pedro da Ponte: *Práticas de preparação de uma tarefa de Organização e tratamento de dados com características investigativas*. Esta comunicação surge no âmbito de um estudo mais amplo, realizado num contexto de trabalho colaborativo, que envolve, para além do investigador, três professores do 1º ciclo do ensino básico. De acordo com os autores, a preparação de tarefas incluiu não apenas a seleção e/ou construção do seu enunciado, mas também a antecipação de eventuais estratégias de resolução dos alunos, a produção dos materiais necessários e a discussão da dinâmica das aulas: momentos de trabalho e sua sequência e de que modo como as tarefas serão exploradas. Mais concretamente, na comunicação discutem-se as práticas de preparação de uma tarefa no grupo colaborativo que, do ponto de vista dos intervenientes, constitui um desafio para os alunos, tendo por base uma proposta apresentada pelo investigador. Em particular, dedica-se uma atenção especial aos aspetos valorizados pelos professores e aos desafios com que se confrontam.

Os resultados permitem evidenciar que os professores consideram importante construir tarefas com propósito, isto é, que tenham significado para os alunos e que estejam conectadas com situações da vida real. Além disso, preocupam-se em inventariar possíveis estratégias de resolução e dificuldades dos estudantes, em identificar ações que lhes permitam apoiar a sua atividade sem diminuir o grau de exigência cognitiva das tarefas e em encontrar meios de os incentivar a questionar argumentos apresentados. Os principais desafios decorrem da novidade da tarefa face a outras anteriormente trabalhadas e das situações de incerteza que podem surgir no decurso da sua exploração. Sentem-se, no entanto, confiantes na sua capacidade para lhes fazer face, sentimento que pode não ser alheio ao contexto de trabalho colaborativo, o que vai ao encontro das potencialidades deste tipo de trabalho destacado por vários outros autores (por exemplo, Hargreaves, 1998; Boavida & Ponte, 2002).

A quarta comunicação, *Promover o desenvolvimento do raciocínio matemático: perspetivas de professoras num estudo de aula*, da autoria de João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Mónica Baptista e Joana Mata-Pereira, foca-se na análise das perspetivas de um grupo de cinco professoras do 2.º ciclo sobre as tarefas a propor e o trabalho (exploratório) a realizar na sala de aula para promover a aprendizagem dos alunos, com especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio.

O contexto é um estudo de aula, um processo de desenvolvimento profissional centrado num agrupamento de escolas e que parte da identificação de um problema: a melhoria do ensino da Matemática, incidindo sobre o tópico da comparação e ordenação de números racionais. Na comunicação são analisados episódios de oito sessões de trabalho, procurando identificar perspetivas das professoras sobre as tarefas para desenvolver o raciocínio e o trabalho a realizar na sala de aula.

As professoras propõem e discutem diferentes tipos de tarefas (exercícios, problemas, explorações e investigações) para promover o ensino exploratório, com especial atenção ao raciocínio. A reflexão em grupo vai permitindo perceber as dificuldades dos alunos. Nas tarefas para promover o raciocínio são discutidas as oportunidades para generalizar, o desafio matemático e a estrutura (aberta/fechada) envolvida.

Os momentos de reflexão permitiram dar maior atenção às dificuldades e capacidades dos alunos e à forma como foram geridas as oportunidades de aprendizagem. Além disso, possibilitaram estabelecer relações entre o que a tarefa pede e o que os alunos sabem. Existiram oportunidades de envolvimento na realização de tarefas, de discussão das suas caraterísticas e de aspetos do raciocínio, nomeadamente a justificação e a generalização. Também antecipar o que os alunos vão fazer e observar o que fazem na aula foram um importante contexto para o desenvolvimento profissional dos professores, na medida em que se cruzou o conhecimento da investigação com o conhecimento da prática.

A quinta comunicação, *Tarefas matemáticas no ensino da Álgebra*, da autoria de Cátia Rodrigues, Luís Menezes e João Pedro da Ponte, foca-se em investigar de que modo o conhecimento que uma professora mobiliza quando seleciona e explora tarefas em sala de aula, contribui para a aprendizagem dos alunos ao nível da justificação e generalização de raciocínios algébricos, no 7º e 8º ano de escolaridade.

Este estudo de caso de uma professora insere-se numa investigação mais vasta, onde a professora integrou, com mais outras duas e a investigadora, um grupo de trabalho colaborativo. Por sua vez, todas integraram um grupo de quinze professores que participou em 10 sessões de formação sobre discussões matemáticas. Nesta comunicação são analisadas três aulas da referida professora, com ênfase no momento da discussão, através da análise de três tarefas.

Os resultados discutem-se a partir da identificação do conhecimento didático que a professora mobiliza na escolha de três tarefas de Álgebra e na forma como as explora na sala de aula. Os diálogos, que constituem evidência do conhecimento mobilizado na exploração das diferentes tarefas, elucidam sobre o processo de monitorização do trabalho dos alunos em sala de aula (as questões, as sínteses, o debate de ideias em pequeno e grande grupo), nomeadamente sobre a relação entre o tipo e natureza da tarefa e os momentos de discussão que proporciona.

As tarefas que favorecem a partilha e a justificação de ideias, passam por diferentes fases e adaptações e contribuem para os alunos atingirem diversos objetivos de aprendizagem no domínio da Álgebra (tradução algébrica de diferentes situações, uso de diferentes representações, etc.). A escolha de diferentes tipos de tarefas e a sua resolução prévia pela professora decorrem do seu conhecimento didático, nomeadamente o conhecimento do currículo, da Matemática e dos alunos e da aprendizagem. A forma como acompanha o trabalho dos alunos e proporciona momentos de apresentação e discussão de ideias constituem, também, componentes importantes do seu conhecimento didático, no que respeita à condução do ensino na sala de aula.

Referências

Boavida, A. M. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org.), Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6.

Hargreaves, A. (1998). Os professores em tempos de mudança. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

COMUNICAÇÕES – GD3

FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: ESCOLHA, PROPOSIÇÃO E IMPLEMENTAÇÃO DE TAREFAS

Cristina Cirino de Jesus[12]
Universidade Estadual de Londrina
criscirino@gmail.com

Márcia Cristina de C. T. Cyrino
Universidade Estadual de Londrina
marciacyrino@uel.br

Hélia Oliveira
Instituto de Educação - Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ulisboa.pt

Resumo: Neste artigo apresentamos os resultados de uma pesquisa, cujo propósito foi investigar como a análise de tarefas, em um contexto de formação continuada, pode auxiliar professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental a refletir e (re)pensar sua prática pedagógica. Para isso constituímos um grupo de estudos de quatorze professoras que atuam em uma escola da rede pública de ensino do estado do Paraná, Brasil. Destacamos que as ações de conhecer os níveis de demanda cognitiva[13], analisar e classificar tarefas de acordo com esses níveis, mobilizaram as professoras a perceber a importância de tarefas de elevado nível de demanda cognitiva para os processos de ensino e de aprendizagem e, a reconhecer como as suas ações e especial a escolha de tarefas, podem influenciar esses processos. As discussões e reflexões ocorridas no grupo nos permitiram identificar indícios de mudanças quanto a escolha, a proposição e a implementação de tarefas.

Palavras-chaves: Tarefas Matemáticas. Níveis de demanda cognitiva. Formação de professores.

Introdução

No ambiente de sala de aula as tarefas se constituem como instrumentos que podem influenciar em aspectos como o quê e de que modo os alunos aprendem (Doyle, 1983; Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2009). Embora, observamos que neste mesmo contexto, em geral, elas são utilizadas somente para trabalhar conteúdos ou porque aparecem no livro didático. Porém, propor tarefas exclusivamente para esse fim pode conduzir a uma forma

[12] Bolsista do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).
[13] É o tipo de raciocínio matemático exigido por uma tarefa - memorização, procedimentos sem conexão com significados, procedimentos com conexão com significados e fazer matemática, (Stein, et al., 2009).

limitada de trabalhá-las, uma vez que não determinam apenas o conteúdo que os alunos aprendem, mas como eles começam a pensar sobre, a dar sentido aos conceitos matemáticos.

Alguns pesquisadores têm desenvolvido estudos nos quais as tarefas são o foco de investigação que indiciam que existe uma relação entre o tipo de tarefas propostas e o tipo de pensamento que os alunos desenvolvem (Doyle, 1983; Christiansen & Whalter, 1986; Shimizu et al., 2010; Stein & Lane, 1996; Stein & Smith, 1998; Stein et al., 2008, 2009). Pensamos ser necessário mobilizar os professores a discutir e refletir sobre o papel da tarefa e sua relevância para os processos de ensino e de aprendizagem, e por meio dessas ações perceber a influência que elas têm sobre esses processos e assim modificar seu modo de escolhê-las, organizar e conduzir sua prática pedagógica.

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), são os professores que têm que decidir

> quais aspectos de uma tarefa devem ser destacados, como organizar e coordenar o trabalho dos alunos, quais questões apresentar como desafio para aqueles com níveis de habilidades variados e como ajudar os alunos sem atropelar o raciocínio deles e, assim, não eliminar os desafios (NCTM, 2000, p.19).

Consideramos que o professor precisa estar preparado teoricamente para selecionar as tarefas que irá propor, de modo a atingir seus objetivos de ensino. É importante que o professor reflita a respeito do seu processo de ensino, pois “cultivar hábitos de reflexão ponderada e sistemática pode ser a chave tanto para melhorar o ensino como para sustentar o seu desenvolvimento profissional ao longo da vida” (Stein & Smith, 1998, p 268).

Neste estudo, apresentamos os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar como a análise de tarefas, em um contexto de formação continuada, pode apoiar professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental a refletir e (re) pensar sua prática pedagógica, principalmente no que diz respeito a escolha, a proposição e a implementação de tarefas. Essa análise teve como referência os níveis de demanda cognitiva.

A importância das tarefas

Muitos professores desenvolvem sua prática pedagógica em torno das tarefas que propõem aos alunos. É difícil imaginar uma aula, seja de Matemática ou não, sem a presença delas. Neste estudo assumimos tarefa como uma proposição feita pelo professor em sala de aula, cujo objetivo é focar a atenção dos alunos em uma determinada ideia matemática e que implica uma atividade por parte do aluno (Stein et al., 2009).

Concentrar a atenção do professor para as tarefas que escolhe e propõe aos alunos pode ser fundamental para que ele se conscientize da influência que a tarefa pode ter sobre a aprendizagem dos alunos (Doyle, 1983; Stein et al., 2009). Por isso, com o propósito de evidenciar a importância que as tarefas têm sobre os processos de ensino e de aprendizagem, em especial ao ensino de Matemática, apresentamos a seguir três argumentos que podem auxiliar o professor a compreender a importância de estabelecer critérios para a sua seleção.

Primeiro, “as tarefas nas quais os alunos se engajam constituem, em grande medida, o domínio de oportunidades para os mesmos aprenderem Matemática” (Stein et al., 2009, p.131). O trabalho do aluno é definido pelas tarefas que ele realiza diariamente. Tarefas distintas constituem em diferentes oportunidades para o aluno pensar, pois algumas têm o potencial de mobilizar os alunos a formas complexas de pensamento e outras não. Assim

> tarefas que pedem ao aluno para realizar um procedimento memorizado em uma forma rotineira conduzem a um tipo de oportunidade para o aluno pensar; tarefas que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que estimulam os alunos a fazerem conexões conduzem a um diferente grupo de oportunidades para os alunos pensarem (Stein & Smith, 1998, p.68)

Um segundo argumento defende que as tarefas são instrumentos para conectar os objetivos para a aprendizagem dos alunos (Stein et al., 2009). Ao escolher tarefas é importante que os professores tenham um objetivo claro para propô-la ao aluno. Pensar antecipadamente nos objetivos que se pretende com aplicação de determinada tarefa pode ajudar o professor a criar um ambiente de sala de aula que estimule o aluno a engajar-se na tarefa gerando assim uma atividade.

Outro argumento é “iniciar com tarefas cognitivamente desafiadoras, que tenham potencial de engajar os estudantes em formas complexas de pensamento, se o objetivo é desenvolver a sua capacidade de pensar, raciocinar e resolver problemas” (Stein et al., 2009. p.5). Esse tipo de tarefa tem o potencial de mobilizar o aluno a desenvolver formas de raciocínio e estratégias que permitem ir além da memorização de fatos ou procedimentos. Porém, exige que o professor esteja consciente de que selecionar tarefas desafiadoras não é garantia de um envolvimento por parte do aluno, pois, são vários os fatores presentes na sala de aula que podem colaborar com a manutenção ou declínio do nível de demanda cognitiva da tarefa.

Os níveis de demanda cognitiva de tarefas

Considerando o fato de que as tarefas determinam os diferentes tipos de raciocínios que os alunos desenvolvem, pesquisadores do projeto QUASAR[14] estabeleceram quatro categorias para analisar e classificar as tarefas, que são: memorização; procedimentos sem conexão com significado; procedimentos com conexão com significado e fazer matemática. As duas primeiras categorias envolvem tarefas de baixo nível de demanda cognitiva, enquanto as duas últimas referem-se às tarefas de elevado nível de demanda cognitiva. Essa classificação deu origem ao Guia de Análise de Tarefas (Quadro 1), que consiste em uma lista de características de tarefas em cada um dos quatro níveis e pode servir como um parâmetro para a classificação de tarefas (Stein et al., 2009). É uma ferramenta para apoiar os professores na análise de tarefas e pode também ser utilizado “como uma lente para refletir

[14] Quasar Project (Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) foi desenvolvido nos Estados Unidos com o objetivo de melhorar o ensino de matemática para estudantes que frequentavam escolas de comunidades economicamente desfavorecidas, com ênfase no raciocínio, na resolução de problemas e na comunicação de ideias matemáticas.

sobre seu próprio ensino e como uma linguagem compartilhada para discutir o ensino com seus colegas” (Stein et al., 2009, p.2).

Quadro 1: Guia de Análise das tarefas

	Memorização	**Procedimentos sem conexão com significados**
Características de Tarefas que envolvem baixo nível de demanda cognitiva	- envolvem ou a reprodução dos fatos aprendidos previamente, regras, fórmulas, ou a memorização de fatos, regras, fórmulas ou definições; - não podem ser resolvidas usando procedimentos porque estes não são exigidos ou porque o tempo no qual a tarefa será completada é curto para utilização de um procedimento; - não são ambíguas: tanto a questão que envolve uma reprodução exata do material visto previamente quanto o que é para ser reproduzido está claro e diretamente apresentado; - não têm conexão alguma com os conceitos ou significados que embasam os fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidos ou reproduzidos.	- são algorítmicas, de modo que o uso do procedimento ou é especificamente pedido ou está evidente de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão; - requerem uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem sucedida e existe pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo; - não têm conexão com conceitos ou significados que estão por trás dos procedimentos usados inicialmente; - estão focadas na produção de respostas corretas ao invés do desenvolvimento da compreensão matemática; - não exigem explicação, ou, quando exigem, são explicações que focam unicamente a descrição do procedimento que foi usado.
	Procedimentos com conexão com significado	**Fazer Matemática**
Características de Tarefas que envolvem elevado nível de demanda cognitiva	- focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos a fim de desenvolver mais profundamente os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas; - sugerem explicita ou implicitamente caminhos a serem seguidos, que são procedimentos amplos e gerais que têm íntima conexão com as ideias conceituais; - usualmente permitem representação em múltiplos caminhos, tanto com diagramas visuais, manipuladores, símbolos, e situações-problemas, fazendo conexões entre múltiplas representações que ajudam a desenvolver os significados; - exigem esforço cognitivo. Apesar de procedimentos gerais poderem ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam envolver-se com ideias conceituais que estão por trás dos procedimentos a serem seguidos para completar a tarefa com sucesso e desenvolvendo a compreensão.	- exigem um pensamento complexo e não algorítmico, e não é sugerido explicitamente pela tarefa um caminho previsível, instruções para sua execução, ou um exemplo a ser seguido, que bem treinado leva à resolução da mesma; - exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos matemáticos, procedimentos, ou relações; - exigem alta monitoração ou alta regulamentação de seu próprio processo cognitivo; - exigem que os alunos mobilizem conhecimentos relevantes e experiências, e façam uso apropriado desses no trabalho durante a tarefa; - exigem que os estudantes a analisem e examinem ativamente se esta pode ter possibilidades limitadas de estratégias de resoluções e soluções; - exigem um considerável esforço cognitivo e podem envolver alguns níveis de ansiedade para o aluno por não ter uma lista antecipada natural de processos exigidos para a solução.

Fonte: Adaptado de Stein e Smith (1998)

Consideramos que conhecer os níveis de demanda cognitiva de tarefas pode permitir ao professor: diferenciar as demandas cognitivas de tarefas; identificar quais tipos de tarefas oferecem oportunidades suficientes para o aluno pensar; reconhecer que o nível de pensamento no qual o aluno trabalha pode determinar o que ele irá aprender e perceber que oportunidades para os alunos aprenderem não são criadas simplesmente colocando-os em grupos ou favorecendo um contacto com materiais manipuláveis, ou ainda possibilitando a eles o trabalho com calculadora.

A seleção de tarefas, sustentada nos níveis de demanda cognitiva, exige que o professor além de conhecer o guia de análise de tarefas tenha um conhecimento aprofundado dos alunos para os quais essa tarefa se destina. Pois, uma tarefa pode ser considerada rotineira e de baixo nível de demanda cognitiva para alguns alunos, enquanto para outros poderá representar uma tarefa de elevado nível de demanda cognitiva (Stein et al., 2009).

É importante evidenciar que o fato do professor selecionar tarefas de elevado nível de demanda cognitiva, não é garantia de um engajamento por parte do aluno. Ao escolher uma tarefa, o professor tem determinadas expectativas que podem não se efetivar durante a aula ou ela pode sofrer influências das ações do professor que a propõe e dos alunos que a realizam ou ainda de outros fatores, presentes ou não, na sala de aula.

Contexto da investigação e procedimentos metodológicos

Nosso estudo constituiu-se em uma pesquisa de natureza qualitativa de cunho interpretativo, conforme Bogdan e Biklen (1994). Trabalhamos na perspetiva de grupo de estudos que envolveu a participação de quatorze professoras que atuavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública no Brasil. Essa escola atendia a 341 alunos que cursavam o Ensino Fundamental (1º ao 5º ano) ofertado em período integral e a Educação de Jovens e Adultos (EJA), oferecida somente no período noturno. As professoras tinham mais de oito anos de experiência de trabalho e desenvolviam diferentes funções na escola: dez eram regentes de sala, duas coordenadoras pedagógicas, uma orientadora pedagógica e professora da sala de recursos e uma atuava na direção da escola. A escolha de desenvolver um trabalho com estas professoras foi motivada por considerarmos a importância do papel social dessas profissionais, por serem as primeiras profissionais responsáveis pelo trabalho com as ideias matemáticas na escola e por exercerem um papel decisivo na formação matemática do aluno.

Os encontros do grupo foram desenvolvidos semanalmente, com duração de uma hora, por um período de seis meses. O foco do trabalho no grupo de estudos foi conhecer e aprender a respeito dos níveis de demanda cognitiva das tarefas, com base nas categorias propostas pelo projeto QUASAR (memorização, procedimentos sem conexão com significado, procedimentos com conexão com significado e fazer matemática).

As discussões do grupo foram organizadas em quatro momentos. No primeiro momento foram discutidas as tarefas trazidas pelas professoras. Elas apresentaram os motivos que nortearam a escolha dessas tarefas e o como lidavam com a proposição de tarefas em sala de aula. No segundo momento, as professoras estudaram e discutiram as características de tarefas em cada nível de demanda cognitiva, para realizar uma nova análise dessas tarefas, classificando-as de acordo com o nível de demanda cognitiva. E em um terceiro momento, as professoras resolveram tarefas de diferentes níveis de demanda cognitiva, analisaram e classificaram essas novas tarefas, e algumas professoras manifestaram o interesse de aplicar algumas dessas tarefas em sala de aula. Após essa aplicação, no quarto momento, o grupo de estudos discutiu os pontos considerados relevantes e as dificuldades enfrentadas pelas professoras em sala de aula, e avaliou a importância da análise de tarefas e dos níveis de demanda cognitiva.

Os instrumentos usados para recolha de dados foram transcrições dos áudios das gravações dos encontros, de modo que as falas das participantes pudessem ser captadas na sua forma original, mantendo a integridade dos diálogos; produções escritas, com as reflexões e impressões das professoras sobre as discussões realizadas no grupo (escrita livre); observação de aulas com a intenção de perceber o modo como as professoras conduziam o trabalho com as tarefas na sala de aula e entrevistas[15] semiestruturadas com algumas professoras para aprofundar a investigação e diário de campo.

Para a construção das unidades de análise realizamos várias leituras das transcrições dos encontros, das produções escritas, das observações de aulas e das entrevistas destacando os trechos relevantes para nosso estudo. Em seguida, agrupamos essas informações por encontro, por participante e por instrumento de coleta, separando as informações de modo que pudessem ser comparadas, para procurarmos pontos de enfoque (Bardin, 1977). Em seguida, trabalhamos com a interpretação dos dados e realizamos algumas inferências acerca do nosso objeto de estudo. Para identificar o instrumento do qual fora retirada uma informação descrita na análise, utilizamos logo após a sua descrição, o nome fictício, para manter o anonimato da participante, seguido da letra incial do instrumento. Assim, para os encontros do grupo, utilizou-se letra G, para as produções escritas P, observações de aula, O, para as entrevistas, E.

Razões para a escolha de tarefas num primeiro momento

Quanto a escolha de tarefas, no primeiro encontro do grupo de estudos solicitamos as professoras que falassem a respeito das razões que as levam a selecionar tarefas, em especial aquelas que propuseram aos alunos nas duas semanas anteriores ao início do grupo, nomeadamente, o porquê da escolha destas tarefas, para que elas serviam, que conteúdos contemplavam, qual o grau de complexidade e se os seus objetivos foram alcançados. Obtivemos as seguintes razões: abordar os conteúdos matemáticos; verificar se o conteúdo matemático foi assimilado; trabalhar com aspectos não matemáticos; relacionar a matemática com a realidade do aluno e desenvolver o raciocínio.

Algumas professoras apontaram mais de uma razão para a seleção das tarefas, tendo sido o objetivo de trabalhar um conteúdo o aspeto mais referido. A seguir apresentamos um episódio para ilustrar.

Cláudia:	Eu acho que a gente não escolhe tarefa, ela vem de acordo com o conteúdo. Você dá a tarefa de acordo com o conteúdo proposto.
Juliana:	Não. Você pode explicar de maneira diferente, mas é o professor que escolhe que tarefa vai dar ao aluno.
Cintia:	Por exemplo, você tem fracções para trabalhar, você vai escolher uma tarefa e vai dar. No caso você tem o conteúdo, mas a tarefa é você que escolhe.
Isabela:	Quem escolhe a tarefa para seus alunos?

[15] Entrevistamos seis das quatorze professoras. Escolhemos para entrevistar as professoras que mais frequentaram os encontros. As entrevistas foram realizadas individualmente e na escola, em horário combinado anteriormente com cada uma.

Cláudia: Eu, mas é de acordo com o conteúdo. Quando a gente fala aqui no grupo em escolha de tarefa, eu não concordo com isto, porque você não escolhe tarefa. É a tarefa que está ali proposta.

Denise: Não, a gente não escolhe o conteúdo. O que temos que trabalhar já vem para nós no início do ano e a gente divide por bimestres, agora as tarefas a gente escolhe sim.

As declarações destas professoras nos leva a inferir que escolher tarefas tendo em vista somente um determinado conteúdo matemático é comum a muitos professores. Esses professores, muitas vezes, utilizam um planejamento ou um livro didático guiado por conteúdos matemáticos e as tarefas são assumidas como um meio para alcançar a aprendizagem desses conteúdos. Outra razão apontada pelas professoras foi utilizar a tarefa para verificar se o conteúdo matemático foi assimilado.

Fabiane: Quando proponho tarefas aos alunos é sempre com intuito de verificar se meu aluno aprendeu o conteúdo e também de perceber quais conteúdos ainda precisam ser mais trabalhados […].

Ana Lívia: Eu escolhi esta tarefa para verificar se os alunos sabiam multiplicação, a tabuada do dois.

Consideramos que propor uma tarefa com o objetivo de “verificar o que foi assimilado” pode não ser muito eficiente, pois a maioria das tarefas que têm como foco a verificação são as tarefas de memorização (baixo nível de demanda cognitiva).

Algumas professoras declararam que escolhem tarefas para trabalhar com conteúdos não matemáticos. Elas acreditam que é possível por meio de uma tarefa matemática trabalhar outros assuntos, como, ortografia, interpretação, leitura e até mesmo tópicos de outras áreas disciplinares.

Cintia: Eu não pego uma tarefa exclusiva de Matemática, eu pego um problema que dê para trabalhar várias coisas, ciências, português, geografia, várias disciplinas. Uma tarefa que não seja só cálculo.

Cláudia: [...] eu quis com este problema (discutir) a questão do ler, porque tem bastante pontuação; a questão ambiental, animais em extinção; deveres, direitos e proibições, questão de condutas sociais, questões que acho importante.

As mesmas professoras que afirmaram selecionar tarefas para trabalhar conteúdos não matemáticos, também escolhem tarefas para trabalhar a realidade do aluno. Elas entendem que ao utilizar tarefas com essa característica o aluno terá mais facilidade em compreender o assunto trabalhado e sentirá prazer em resolvê-la. No entanto, pensamos que escolher tarefas com essa intenção não é garantia de que o aluno apresentará uma compreensão ou terá prazer em resolvê-la, pois, muitas vezes ele não se identifica com o contexto da tarefa e isso pode tornar-se um obstáculo para seu trabalho.

Finalmente, escolher tarefas para desenvolver o raciocínio do aluno, apareceu de forma tímida entre as justificativas das professoras, nesse momento inicial da formação. É, ainda, uma razão muito pouco utilizada por elas. Porém, entendemos que possibilitar aos alunos a realização de tarefas que mobilizem o raciocínio, o pensar sobre, é essencial para os processos de ensino e de aprendizagem centrados na compreensão do aluno, uma vez que “o grande objetivo do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade dos alunos de pensarem matematicamente” (Ponte et al., 2011, p. 347).

Implementação das tarefas na sala de aula

Quanto a implementação de tarefas na sala de aula, durante a observação de aulas das professoras, foi possível perceber três perspectivas diferentes assumidas por elas: (i) interpretam as tarefas no lugar dos alunos, (ii) questionam os alunos para que ele explique como pensou e (iii) valorizam a resposta correta em detrimento do processo.

Algumas professoras acreditam que as “suas” leituras são indispensáveis para que os alunos compreendam a tarefa, porém, durante essa ação elas não percebem que podem eliminar, mesmo que de forma inconsciente, os aspectos desafiadores da tarefa (Stein et al., 2009). Porém, é importante ressaltar que essa “ideia” não é compartilhada pela maioria das professoras.

Isadora: Eu dou a tarefa e vou acompanhando. Eu leio para eles. Vou interpretando, circulo os dados, senão eles não conseguem

Gisele: Mesmo que a gente não queira, não dá, a gente acaba tendo que ler e ajudar. Então a gente acaba fazendo a tarefa para eles, porque eles são muito apáticos e não têm interesse.

A ideia de que os alunos só conseguem realizar uma tarefa se forem direcionados pelo professor de como resolvê-la, pode reduzir ou eliminar as oportunidades deles de desenvolverem a autonomia e a capacidade de interpretação. Por isso, é indispensável ao professor o monitoramento de si mesmo e a reflexão para analisar o ensino, de forma que proporcione ao aluno oportunidades de aprendizagem que desenvolvam o pensamento matemático (Stein et al., 2009).

Realizar questionamentos para incentivar os alunos a explicar suas resoluções ou dizer como pensaram para chegar ao resultado, é outra forma que algumas professoras afirmaram utilizar para gerir o trabalho em sala de aula. Porém, era muito pouco explorada por elas.

Denise: Na maioria das vezes que trabalho um problema, peço para alguém contar como chegou à resposta, ir ao quadro mostrar como fez. Eu comparo estratégias diferentes que têm a mesma resposta, vou sempre pedindo para eles falarem.

Cintia: Ao dar uma tarefa, eu vou perguntando para os alunos como fizeram, por que fizeram aquilo. Não dá para eles escreverem porque estão no primeiro ano, mas vou perguntando oralmente. Acho isso importante porque ajuda o aluno para o qual faço a pergunta e também os coleguinhas que às vezes não entenderam.

Outra forma de trabalho que as professoras destacam, foi a valorização da resposta correta em detrimento do processo. E é prática de sala de aula muito assumida por algumas professoras.

Fernanda: Eu geralmente passo a tarefa, deixo eles fazerem, após algum tempo eu faço a correção. [...] o jeito que ele fez, não tem importância, olho o resultado final.

Gisele: Para mim o importante é a resposta, se ele conseguiu acertar. Eu quero ver se ele sabe fazer a continha, aí eu olho só o resultado. Não levo em conta outras coisas. Não me interessa se ele compreendeu. Se ele acertou isso é importante para mim.

Ao valorizar mais a resposta correta do que a própria resolução da tarefa, o professor não oferece ao aluno um aprofundamento das ideias matemáticas e pode deslocar a ênfase do significado, dos conceitos ou da compreensão para a correção e perfeição da resposta (Stein et al., 2009).

Mudanças desencadeadas pela discussão e reflexão no grupo de estudos

Ao longo dos encontros, trabalhamos com a resolução, a análise e a classificação de tarefas sustentada nos níveis de demanda cognitiva. A realização dessas ações possibilitou as professoras desenvolver um outro olhar para a escolha de tarefas e para o modo como as trabalhavam em sala de aula, ou seja, para a implementação das tarefas.

Quanto *à escolha de tarefas*, observamos nos primeiros encontros do grupo que as professoras não tinham o hábito de pensar a respeito das tarefas que escolhiam e algumas mostraram dificuldades em explicar o porque da escolha das tarefas.

Ana Lívia: Nunca parei para pensar por que escolhi as tarefas. Hoje comecei a ver que isto é importante.

Vitória: Percebi a dificuldade que algumas colegas encontraram para justificar os critérios utilizados para aplicar determinada tarefa aos alunos. Isso é um alerta para nós, que temos que ser mais conscientes de como ou de que maneira vamos ensinar […].

Porém, durante os encontros do grupo percebemos que algumas professoras começaram a ficar mais atentas quanto à escolha das tarefas e a agregar os níveis de demanda cognitiva às suas razões de escolha anteriores, reduzindo a proposição de tarefas com foco na memorização ou na realização de um procedimento sem conexão com significado. Destacamos um episódio para ilustrar.

Isabela: Acho que algumas das razões apresentadas aqui (no início da formação) não eram totalmente erradas, elas tinham que ser repensadas, mas não abolidas.

Pesquisadora: Por quê?

Isabela: Porque eu acho que uma tarefa, por exemplo, de memorização tem a sua função, a gente precisa de trabalhar também este tipo de tarefa. Por exemplo, eu acho que a tabuada tem que ser memorizada para facilitar os cálculos.

Denise: Eu penso que este estudo aqui no grupo nos mostrou que existem outras razões para a escolha de tarefas, porque na verdade na maioria das vezes a gente só pensa no conteúdo.

Pesquisadora: Quais razões vocês pensam que foram acrescentadas?

Denise: Por exemplo, pensar no grau de complexidade das tarefas, se é de elevado nível ou de baixo nível, antes não pensava nisso. Aliás, nem conhecia estes níveis de demanda cognitiva.

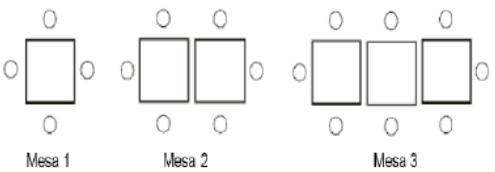
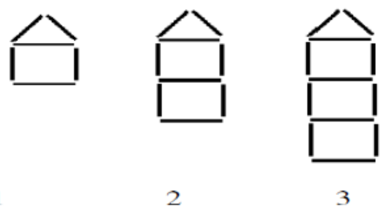
A participação no grupo de estudos e aplicação de tarefas de elevado nível em suas salas de aula foi importante para que essas professoras (re) pensassem suas escolhas de tarefas, no entanto, sem abandonar as “antigas” razões que as sustentavam. Ao aplicarem as tarefas que trabalharam no grupo começaram a reconhecer que os níveis de demanda cognitiva podem ser uma razão adequada para escolher uma tarefa e talvez por isso, passaram a propor tarefas rotineiras com menos frequência.

Isabela: É, acho que toda essa reflexão no grupo nos ajudou a repensar nossas escolhas. Agora vejo nos cadernos que os exercícios mecânicos, rotineiros estão sendo usados em menor quantidade pelas professoras.

Denise: Foi muito bom ter levado aos alunos aquelas tarefas que resolvemos aqui no grupo, porque vimos que é possível trabalhar tarefas de elevado nível de demanda cognitiva. Eles conseguem fazer. É claro que temos que ficar dando atenção, esclarecendo dúvidas, mas eles conseguiram. Por isso agora vou escolher mais tarefas de elevado nível de demanda cognitiva.

A seguir apresentamos alguns exemplos de tarefas que foram trabalhadas com as professoras no grupo e depois aplicadas por algumas professoras em suas salas de aula (Quadro 2), conforme referido pela professora Denise.

Quadro 2: Exemplos de tarefas que foram trabalhadas no grupo de estudos e na sala de aula.

1) Como tarefa a professora de Maria pediu-lhe para olhar para o padrão abaixo e desenhar a figura que deveria vir em seguida.  Maria não sabe como encontrar a figura a seguir. a) Desenhe a próxima figura para Maria b) Escreva uma descrição para Maria dizendo-lhe como você sabia a figura que vem em seguida. *Adaptada de Stein et al. (2009)*	**2)** A soma de dois números pares e a soma de dois números impares são, respectivamente: (a) par e par (b) ímpar e ímpar (c) ímpar e par (d) par e ímpar (e) depende do número *Adaptada de Blanton e Kaput (2005).*
3) Em uma reunião com 4 pessoas, cada uma cumprimenta as demais com um único aperto de mão. a) Nessa reunião, qual será o número total de apertos de mão? b) Nessas mesmas condições, se nesta reunião estivessem 6 pessoas, qual seria o número total de apertos de mão? c) Determine uma regra para descrever o número de apertos de mão em uma reunião com uma quantidade qualquer (arbitrária) de pessoas. *Adaptada de Blanton e Kaput (2005).*	**4)** O que deve ser substituído por ♫ para obtermos: ♫ x ♫ = 5 x 5 x 7 x 7 a) 5 b) 7 c) 5 x 5 d) 7 x 7 e) 5 x 7 Explique a forma como chegou a sua resposta. *Adaptada de Canguru Matemático sem Fronteiras 2008 – Categoria Benjamin.*
5) Na figura encontra-se um esquema de uma das salas de jantar de um restaurante, em que a mesa 1 tem 4 cadeiras e as outras foram arrumadas como mostradas a seguir:  As mesas seguintes seguem a mesma sequência da figura. Nessas condições, responda: a) Quantas cadeiras terá a mesa 5? E a mesa 20? b) Qual mesa terá 48 cadeiras? c) Quantas cadeiras terá uma mesa qualquer deste tipo? *Adaptada do Exame Nacional de Matemática (PORTUGAL, 2006).*	**6)** Heloísa construiu uma sequência de figuras com palitos da seguinte forma:  As figuras 1, 2 e 3 são as primeiras da sequência. Para cada figura posterior, um "quadrado" é acrescentado. a) Calcule o perímetro de cada uma das três primeiras figuras (considere o lado do palito como sendo a unidade de medida). b) Determine o perímetro da décima figura sem construí-la. c) Descreva como pode ser calculado o perímetro de uma figura qualquer dessa sequência. (Observação: encontre diferentes maneiras de calcular (e justificar) o perímetro). *Adaptada de Blanton e Kaput (2005).*

Fonte: Elaborado pela autora

A insegurança, o receio de não atingir os objetivos propostos nos processos de ensino e de aprendizagem, a crença de que tarefas de elevado nível de demanda cognitiva são "difíceis" de serem realizadas pelos alunos, constituíram-se em obstáculos, para algumas professoras, no trabalho com este tipo de tarefa. Porém, mesmo com essas dificuldades, elas incorporaram tarefas de elevado nível de demanda cognitiva em suas práticas pedagógicas e começaram a priorizar um ensino focado no entendimento do aluno.

Fabiane: Ainda tenho um pouco de medo de trabalhar com tarefas só de alto nível. Não tenho segurança de que forma tenho que desenvolver a aula, quais perguntas devo fazer, para que o aluno se envolva na tarefa. E ainda trabalho com o primeiro ano, tenho medo de não trabalhar o tradicional e chegar no fim do ano os alunos não saberem nada.

Denise: A partir do momento que vocês trouxeram aquele guia que tinha as características de uma tarefa de alto nível, o que ela exige, o que uma tarefa de baixo nível exige, para a gente classificar, então, quando eu vejo as tarefas agora, eu fico pensando será que essa tarefa é alto nível, é baixo nível? Com certeza conhecer isto me ajudou nas escolhas das tarefas, porque eu passei a proporcionar para eles tarefas de elevado nível, de raciocínio, que façam eles pensarem. Conhecer sobre a demanda cognitiva ajudou muito.

Quanto a *implementação* de tarefas as professoras começaram a valorizar mais o trabalho dos alunos. Pensamos que isso se deve ao fato de se terem colocado no lugar dos alunos quando resolveram as tarefas no grupo e com isso vivenciado algumas das dificuldades que eles poderiam apresentar ao realizá-las. Entendemos que esta experiência as deixou mais conscientes de qual postura deveria assumir para ajudar o aluno a resolver uma tarefa de elevado nível de demanda cognitiva e ainda a abandonar a ideia de que somente a resposta correta é importante.

Gisele: Hoje eu dou a tarefa e estimulo mais eles a falarem. Sei que ainda está no começo, mas estou tentando.

Fabiane: Esse trabalho que nós fizemos no grupo não ajudou só a gente a conhecer a tarefa, mas agora a gente tenta trabalhar a tarefa de outra maneira. Por exemplo, eu nunca dei espaço para o meu aluno explicar o que ele fez. Agora não, eu peço que eles expliquem como fizeram para mim e para os colegas.

Percebemos que o foco da prática pedagógica de algumas professoras deslocou-se para o processo de resolução que o aluno desenvolveu, abandonando a preocupação com a resposta correta. Consideramos que essa mudança em relação ao seu modo de implementar uma tarefa em sala de aula se deve ao fato de que começaram a compreender que o seu modo de ensinar e de agir nesse momento tem uma forte influência na maneira como o aluno desenvolverá a tarefa.

Considerações

No contexto educacional no qual as professoras estavam inseridas, utilizar tarefas para abordar os conteúdos é algo que está muito presente. Tarefa e conteúdo parecem manter uma relação de dependência, talvez porque as tarefas chamam a atenção do aluno para aspectos específicos de conteúdos. Porém, utilizar as tarefas somente para este fim não é o suficiente, uma vez que são as ações que os alunos realizam ao desenvolver a tarefa que influenciam sua aprendizagem.

Outra razão de escolha, verificar se o conteúdo matemático foi assimilado, também aparece de forma muito expressiva na prática dessas professoras. Porém, consideramos que promover uma prática pedagógica apoiada neste tipo de tarefas o professor pode reduzir as oportunidades de aprendizagem dos alunos, pois, as tarefas de verificação exigem apenas a realização de procedimentos sem conexão com significados ou a memorização de regras, fórmula ou fatos (Stein et al., 2009).

Trabalhar com aspectos não matemáticos e relacionar a matemática com a realidade do aluno também foram outras razões apresentadas. Algumas professoras acreditam que o aluno só terá prazer em resolver uma tarefa ou terá mais facilidade em compreendê-la se ela estiver relacionada com sua realidade e ainda que a tarefa matemática pode ser utilizada para trabalhar outros conteúdos disciplinares. Uma última razão de escolha apresentada pelas professoras, no início da formação, foi a de escolher tarefas para desenvolver o raciocínio do aluno, porém, essa razão apareceu de forma pouco expressiva.

Ao longo da formação, notamos que algumas professoras ao trabalhar a tarefa em sala de aula, muitas vezes interpretavam a tarefa no lugar do aluno, valorizavam somente a resposta correta ou questionavam o aluno para saber como ele pensou. É essencial que o professor dê um suporte adequado ao pensamento dos alunos, possibilite o tempo necessário para que eles pensem sobre a tarefa e saiba preservar a complexidade da tarefa, ou seja, não dar a resposta ao aluno ou indicar um caminho ou estratégia de resolução.

Consideramos que as respostas dos alunos, corretas ou não, podem ser utilizadas pelo professor para conhecer: como o aluno pensou e realizou a tarefa, que procedimentos e estratégias desenvolveu ou de que modo entendeu a tarefa. Esse conhecimento pode ser usado para orientar o trabalho do professor. Olhar para as respostas pode, ainda, permitir ao professor uma reflexão sobre como a tarefa poderá ser discutida em sala de aula, quais aspectos da tarefa destacar e quais questionamentos poderão ser elaborados para apoiar os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa.

Entendemos que as ações desenvolvidas no grupo possibilitaram as professoras compreenderem o impacto que suas ações têm sobre os processos de ensino e de aprendizagem e isso resultou em uma mudança em seu modo de trabalhar a tarefa em sala de aula. Á medida que começaram a ficar mais atentas ao modo como trabalhavam a tarefa em sala de aula, passaram a proporcionar tempo suficiente para o aluno realizar a tarefa, a monitorar-se para não falar a respostas e a questionar o aluno para que ele resolvesse a tarefa de forma autônoma. Enfim, perceberam que o papel do professor no momento de implementação da tarefa é dar apoio ao trabalho do aluno e que a sua leitura ou a ênfase a algumas palavras do enunciado da tarefa pode não ser a melhor maneira de fazer a proposição de uma tarefa. Podemos afirmar que elas começaram a superar um processo de ensino sustentado por tarefas de memorização ou de reprodução de procedimentos. E, além disso, a agregar os níveis de demanda cognitiva como critério para a escolha de tarefas.

A formação continuada desenvolvida com as professoras não seguiu os pressupostos de um curso tradicional, no qual são ensinados aos professores conteúdos matemáticos ou estratégias metodológicas. Constituímos um espaço no qual elas tiveram a oportunidade de estudar, partilhar experiências e repertórios, discutir e refletir a respeito de sua prática pedagógica, tendo como mote a análise de tarefas matemáticas. Não temos como avaliar se os conhecimentos produzidos por elas foram incorporados em sala de aula, ou quanto tempo vai demorar para que isso ocorra. Sabemos que os hábitos, as crenças e as pressões (institucionais e particulares) impostas a elas são muito fortes, no entanto acreditamos que elas vivenciaram uma oportunidade viável de formação com vistas ao desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Christiansen, B. & Whalter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, G. Whalter, & M. Otte (Eds.), *Perspective on Mathematics Education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Doyle, W. (1983). Academic work. *Review of Educational Research Summer, 53(2)*, 159-199.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Authors.

Ponte, J. P. & Mata-Pereira, J. (2011). O raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos de 9º ano. In: M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 347-364). Póvoa de Varzim, Portugal.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R. & Clark, D. (2010). The role of mathematical tasks in different cultures. In Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang; D. Clark (Eds.). *Mathematical tasks in classrooms around the world* (pp.1-14). Rotterdam: Sense Publishers.

Stein, M. K. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2 (1), 50-80.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268-275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10(4)*, 313-340.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

CONHECIMENTO DIDÁTICO SOBRE TAREFAS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES: O CASO DE BERTA[16]

Nadia Ferreira, João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
nadiadferreira@gmail.com; jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. Esta comunicação apresenta resultados de um estudo de caso cujo objetivo é compreender o conhecimento de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no momento da sua prática supervisionada. Damos especial atenção ao impacto que uma experiência formativa, o trabalho com um caso multimédia, teve no conhecimento didático de uma futura professora relativamente às tarefas e ao conhecimento dos alunos. Os dados foram recolhidos de planificações das aulas, reflexões escritas, entrevistas semiestruturadas e aulas observadas. Os resultados evidenciam que a futura professora, na sua prática supervisionada, mobilizou conhecimento didático, nomeadamente sobre os alunos (dificuldades e estratégias possíveis na resolução de tarefas), sobre as potencialidades das tarefas a propor e sobre as ações e questões a colocar na exploração das tarefas.

Palavras-chave: Conhecimento didático, Tarefas, Números racionais, Formação inicial

Introdução

O conhecimento matemático e didático que os futuros professores desenvolvem durante a sua formação inicial constitui um campo de muitas dúvidas e controvérsias (Ponte & Chapman, 2008; Shulman, 1986). É necessário compreender que conhecimento para ensinar Matemática têm os futuros professores à entrada, durante e no final da sua formação (Ponte & Chapman, 2008). Em particular, consideramos importante entender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática supervisionada, assumindo que tal conhecimento, nessa altura, é sujeito a circunstâncias que permitem a perceção de debilidades e o seu reforço e desenvolvimento. Centramos a nossa atenção no conhecimento nos números racionais dado ser um tema matemático que levanta dificuldades na aprendizagem dos alunos e desafia os professores a constituírem uma prática promotora de uma aprendizagem com compreensão (NCTM, 2007). Nesta comunicação apresentamos o caso de uma futura professora do 2.º ciclo, procurando compreender o conhecimento didático que manifesta e que reconhece como relevante para o trabalho a realizar em torno de uma tarefa a propor aos alunos no âmbito do ensino e a aprendizagem dos números racionais.

[16] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora pela mesma fundação (referência SFRH/BD/99258/ 2013).

O conhecimento didático na seleção e exploração de tarefas

O conhecimento didático, dizendo respeito ao modo como ensinar, é decisivo para que o professor possa exercer cabalmente o seu papel. O professor tem de saber como transformar o seu conhecimento em conhecimento para os alunos, como os apoiar, identificar o conhecimento que devem aprender, as suas dificuldades, quando aprendem e as orientações curriculares para o ensino de um conteúdo (Shulman, 1986). Por exemplo, é importante que saibam que podem trabalhar os números racionais nas suas diversas representações de modo a salientar as relações existentes. Relativamente às tarefas, devem ser capazes de prever resoluções dos alunos e, ainda, saber o que os alunos podem considerar desafiante e interessante (Norton, McCloskey & Hudson, 2011). Ainda relativamente às tarefas, os professores também têm que ser capazes de as sequenciar estabelecendo um percurso de aprendizagem, reconhecendo os prós e contra da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e saber aproveitar as estratégias dos alunos estabelecendo uma sequência de ensino. Finalmente, temos o reconhecimento de que as ações dos professores influenciam as oportunidades de aprendizagem (Scherrer & Stein, 2012). Relativamente aos números racionais, é importante saber como equacionam a sua exploração a par das várias representações dos racionais (fração, numeral decimal, percentagem) e as relações que se estabelecem, permitindo que os alunos tenham uma compreensão global do conjunto numérico.

A prática letiva do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Quaresma & Branco 2012). No que respeita às tarefas, o professor pode optar por propor exercícios ou tarefas mais desafiantes como tarefas exploratórias, problemas e investigações, nas quais os alunos têm que conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios. A comunicação que se estabelece na sala de aula pode assumir um caráter sobretudo unívoco ou dialógico, dependendo do maior ou menor espaço dado ao professor ou aos alunos e ao do tipo de questões colocadas (inquirição, focalização ou confirmação) (Ponte, Quaresma & Branco 2012).

As ações do professor influenciam de modo decisivo a dinâmica em sala de aula. Relativamente a estas ações nas discussões em sala de aula, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram um quadro de análise segundo o qual o professor realiza ações diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações que têm a ver com a gestão da aprendizagem. Assinalam quatro tipos de ações: convidar, quando se inicia a discussão; apoiar/guiar, quando o professor conduz os alunos na resolução da tarefa através de diferentes tipos de questões; informar/sugerir, quando o professor dá informação, argumenta ou valida as ideias dos alunos; e desafiar, quando incentiva os alunos a uma participação ativa na interpretação das situações, na sua resolução recorrendo a diferentes representações para explicar as suas ideias, estabelecendo conexões e avaliando o seu trabalho.

Os futuros professores precisam de integrar conhecimento sobre conteúdos e processos, sobre questões relativas aos seus alunos e às orientações curriculares. Para isso, precisam de se envolver em ciclos de preparação, experiência/exploração, e reflexão construindo conhecimento. De modo a que considerem o ensino da Matemática de uma nova forma, devem conseguir contextualizar, descontextualizar e recontextualizar as ideias matemáticas de forma a não perderem a autenticidade das tarefas e a riqueza da própria Matemática. Isso requer um processo formativo envolvendo experiências que lhes permitam ampliar e integrar o conhecimento matemático e pedagógico, de forma a criar novo conhecimento (Ponte & Chapman, 2008). Muitos são os aspetos a analisar, desde o desenvolvimento de conhecimento sobre determinadas abordagens a tópicos específicos, a questões relativas às tarefas, comunicação e dinâmica de sala de aula.

Muitos estudos recentes sobre formação inicial de professores mostram o uso de ferramentas tecnológicas como meios para representar a atividade da sala de aula, procurando desenvolver a capacidade de análise crítica de situações da prática letiva e antecipando e analisando os raciocínios dos alunos (Norton et al., 2011). Em Portugal, também têm sido utilizados vídeos multimédia na formação inicial de professores de Matemática. Por exemplo, no estudo de Branco e Ponte (2014), nestes momentos formativos os futuros professores conhecem o contexto onde foi realizada a aula e resolvem e analisam as tarefas propostas; além disso, analisam as planificações e reflexões da professora envolvida no vídeo. Depois do visionamento do filme, fazem a sua análise e discutem as diferentes resoluções e aprendizagens dos alunos. Segundo os autores, as formandas integraram, na sua prática letiva, os aspetos discutidos na experiência formativa tais como: a natureza das tarefas, antecipação da prática e a importância dos diferentes momentos na aula no ensino exploratório.

Metodologia de investigação

Este estudo assume uma abordagem qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), com um design de estudo de caso. Esta opção prende-se com a importância dada aos processos e significados na ação de uma futura professora (Berta) quando leciona duas aulas sobre números racionais a uma turma do 6.º ano. As aulas de Berta foram observadas e videogravadas para posterior análise. Foram ainda recolhidos e analisados dados de entrevistas semiestruturadas realizadas no início e no final do estágio e das entrevistas realizadas antes e depois da aula (EAA; EDA) e documentos produzidos por Berta (planificações e reflexão escrita (RE)). As entrevistas foram transcritas na totalidade e as aulas foram transcritas seletivamente, sendo analisadas através de análise de conteúdo com base em categorias que emergiram da revisão de literatura e dos dados recolhidos (Bardin, 1977). A análise assume um cunho descritivo procurando caracterizar a prática letiva evidenciando as ações de Berta e o seu conhecimento na prática. É dada atenção ao conhecimento didático, com foco nas tarefas e nas ações e comunicação, e na exploração da tarefa, analisando o seu conhecimento didático.

Berta tem 23 anos tendo estudado Matemática 12 anos, antes de ingressar no ensino superior. Reflete com facilidade e é muito segura relativamente ao que pretende realizar na sua prática. Tem uma boa relação com o professor cooperante com quem discute sempre as tarefas que seleciona e que pretende propor na semana que irá gerir autonomamente. A sua segurança é coerente com o percurso de excelência que tem tido ao longo da sua formação inicial. Ao relembrar o seu percurso na ESE, menciona tópicos, abordagens e tarefas que explorou enquanto aluna. Refere que as experiências vividas na formação inicial contribuíram para o seu conhecimento da Matemática e da sua didática, mencionando como muito significativa uma experiência formativa baseada num “caso multimédia”. Também na primeira entrevista refere que as experiências vividas a levaram a gostar mais da disciplina porque a Matemática deixou de ser “decorar fórmulas mas perceber de onde é que veem, como é que veem . . . Foi o que eu gostei muito! Também gostei muito das didáticas...”.

Seleção das tarefas e antecipação da sua exploração

Seleção da tarefa

Berta e o professor cooperante decidiram que seria importante explorar aspetos centrais no tema dos números racionais. Como propósito para a aula em análise foi estabelecido o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e comunicação matemática. Especificamente, pretendia-se que os alunos:

> Compreendam o sentido da percentagem, o significado . . . Vamos trabalhar com a mesma percentagem para valores diferentes para que percebam que [apesar de] estarmos a falar da mesma percentagem o valor em que ela incide, acaba por influenciar!… (EAA)

A tarefa a propor na aula em análise foi selecionada em simultâneo com outras duas de modo a constituir uma semana de trabalho sobre números racionais. Berta reviu diferentes tarefas que trabalhou em diversas unidades curriculares da ESE, o que sugere que essas experiências foram significativas para o desenvolvimento do seu conhecimento didático. Ao fazê-lo transpôs a sua experiência, enquanto aluna, para o que era necessário trabalhar com os alunos, afirmando:

> [Escolhi estas] por considerar que são importantes para o desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos [que] apresentam muitas dificuldades na compreensão do sentido do número, no que se refere ao trabalho com números racionais. Estas dificuldades prendiam-se, principalmente, com o relacionar das diferentes representações. (RE)

Na entrevista inicial Berta explica o seu processo de seleção de tarefas. Mostra ter procurado, especificamente, tarefas de natureza desafiante, afirmando:

> [Na ESE] conseguem sempre cativar-nos. . . Há sempre uma tarefa inicial… portanto o que é que eu pensei… vou na próxima semana, desenvolver também tarefas . . . Fui pesquisar, além dos manuais, que considero que não têm grandes tarefas, têm exercícios… Não têm problemas como queria, fui ver o que é que havia [nas várias UCs].

Berta justificou também a seleção da tarefa porque a conheceu no âmbito de um “caso multimédia”, numa aula de Didática:

> Analisámos uma aula de uma docente que colocou a tarefa em prática com os seus alunos. Assim, examinámos a planificação realizada, o decurso da aula, as resoluções dos diferentes grupos de trabalho, a síntese elaborada pela professora e a sua conclusão acerca da aula lecionada. Por este motivo, ao planificar senti que seria uma segurança para mim, pois já tinha alguns conhecimentos acerca da tarefa.

Nesta experiência Berta explica como viveu, enquanto aluna, o processo de resolução projetando-o para os seus alunos:

> A professora apresentou-nos a tarefa e, automaticamente, ao olhar para o enunciado pensei… vai voltar ao mesmo valor! Mas depois pensei… não pode ser . . . [Mais tarde] percebi que estando a falar de percentagem tinha que haver aqui uma influência tendo em conta o preço. Achei interessante [porque] considero que os alunos acabam por ter esta dificuldade. E, tenho quase a certeza que a grande maioria me vai dizer que vai voltar ao mesmo valor. E é também daqui que eu quero partir . . . Do erro deles. E que experimentem também algum valor para que percebam… Esta implicação da percentagem sobre o valor (EAA).

Berta seleciona um problema por assumir que este tipo de tarefas permite explorar o conceito de percentagem e porque as suas vivências enquanto aluna da ESE mostraram-lhe que estas tarefas são desafiantes e promovem o gosto pela Matemática. Explicando como contactou com a tarefa selecionada, descreve a sua experiência enquanto aluna, projetando as suas dificuldades para as dificuldades que os seus alunos poderão viver. Deste modo, percebe-se o impacto da formação inicial e do uso do “caso multimédia”. As experiências vividas parecem ter promovido conhecimento didático sobre as potencialidades de determinadas tarefas relativamente aos propósitos da aula, o desafio que estas propõem aos alunos e sobre as possíveis resoluções erradas que podem emergir.

Antecipação da prática letiva

Berta planifica a sua aula usando uma estrutura que lhe foi sugerida na ESE e que inclui enunciar os objetivos, tópicos, recursos e avaliação, bem como descrever as ações a desenvolver, antecipar resoluções corretas e incorretas dos alunos (identificando erros e dificuldades) e ainda prever questões que possam orientar as aprendizagens dos alunos. Assim, na antecipação da sua prática, Berta resolve as tarefas que vai apresentar (figura 1) e sublinha: “resolvo-as de várias maneiras…” (EI). Acrescenta que as várias resoluções incluem resoluções erradas.

Na figura 1 observamos que a futura professora regista a possível ideia errada. Depois disso, parte para a resolução da tarefa de forma mais geral e testando com valores reais. Na figura podemos apenas observar a resolução com 1€ mas Berta resolve de modo igual para os valores 1,5€ e 2€ recorrendo sempre a resoluções aritmeticamente corretas com a representação decimal dos números racionais.

O professor deve levar os alunos a experimentar valores para a gasolina, pois à partida a resposta é que a gasolina volta ao preço inicial.

10% do valor inicial = valor de aumento
Valor inicial + valor do aumento = novo valor
10% do novo valor = valor de desconto
Novo valor - valor de desconto = preço final
- o preço final é sempre mais baixo do que o preço inicial.

Exemplo: preço inicial – 1€
10% x 1 = 0,10 x 1 = 0,10
1 + 0,10 = 1,10
10% x 1,10 = 0,10 x 1,10 = 0,11
1,10 – 0,11 = 0,99

Figura 1: Antecipação das resoluções

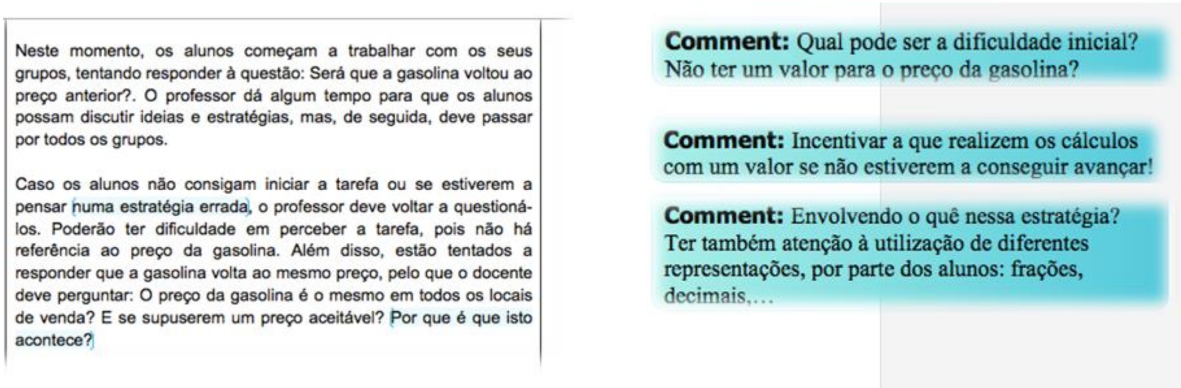
Além disso, Berta antecipa as ações dos alunos, as suas ações e as questões que poderá realizar aos alunos. Afirma que esta é a parte mais complicada do processo de antecipação:

> Eu acho que o grande desafio vai ser, eu própria, colocar as questões porque, acho que eles primeiro vão dizer que o preço vai voltar ao inicial e portanto, tentar que eles desconstruam esta ideia, tentar levá-los a dar o valor à gasolina . . . Para ver se acontece num caso e se acontece, também, no outro, por exemplo. Depois . . . As questões, também vão ser importantes. Tenho algumas preparadas mas vamos ver se consigo… Com que eles sigam, mais ou menos, o que eu pretendo. (EAA)

Como é usual, depois de selecionar a tarefa, de a resolver, de preparar todos os materiais e de planificar a aula, Berta envia o que fez aos seus supervisores. De seguida, reuniu com o professor cooperante para discutir a sua proposta, incluindo questões relativas à gestão curricular. Este concordou com a planificação, mas levantou algumas questões relativamente à ordem de exploração das tarefas e ao número de tarefas a explorar nas três aulas da semana. No final registaram-se alterações na ordem das tarefas e Berta imediatamente enviou uma nova versão à supervisora da ESE.

Esta supervisora comentou, sugeriu e questionou, levando a futura professora a melhorar o processo de antecipação da prática letiva (figura 2). A este respeito, Berta afirma que "foram indicadas algumas sugestões para melhorar a planificação, assim como os materiais. Estas sugestões e questões fizeram-me pensar e questionar sobre o meu trabalho dentro da aula" (RE). Analisando a primeira versão da planificação, verificamos que no primeiro parágrafo Berta descreve ações comportamentais gerais sem que explicite os objetivos de tais ações e como pretende interagir com os alunos. No segundo parágrafo antecipa dificuldades dos alunos na compreensão mas não antecipa como vai dar resposta a tal dificuldade e antecipa a resposta errada e formula algumas questões a colocar. As questões são muito gerais e distantes de possíveis resoluções erradas ou dificuldades dos alunos.

No final, a sua planificação foi alterada tentando dar resposta aos comentários da supervisora da ESE. Analisando e comparando as duas podemos verificar alguns avanços (figura 3). As questões diversificaram-se. No primeiro parágrafo, Berta passa a definir questões mais próximas dos conceitos que quer trabalhar e com as possíveis dificuldades que os alunos podem ter na interpretação do enunciado. As questões que antecipa são de inquirição e focalização. No segundo parágrafo, não amplia o tipo de questões de inquirição e apenas acrescenta a sugestão dada pela supervisora nos seus comentários. Podia ter antecipado algumas questões para apoiar os alunos que resolvem a tarefa recorrendo a diferentes representações, mas tal pode não ter acontecido porque a futura professora não antecipou diferentes resoluções corretas com diferentes representações formais e informais.



Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos.

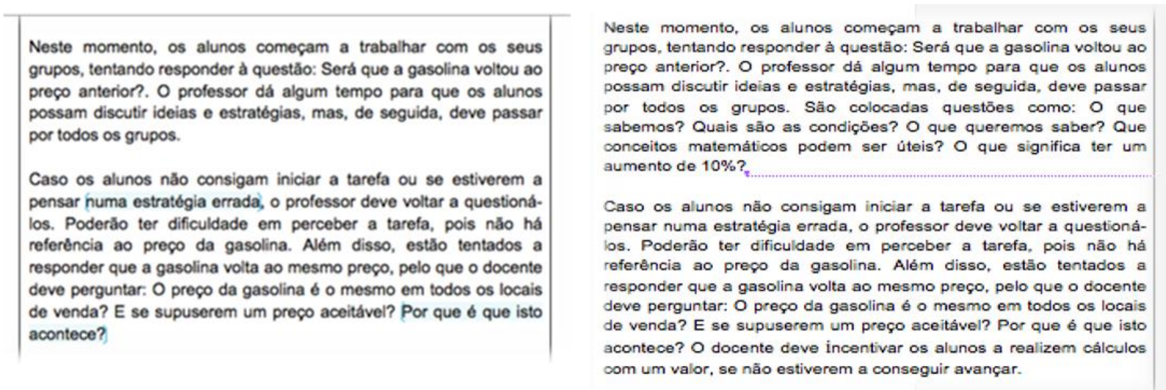
Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece?

Comment: Qual pode ser a dificuldade inicial? Não ter um valor para o preço da gasolina?

Comment: Incentivar a que realizem os cálculos com um valor se não estiverem a conseguir avançar!

Comment: Envolvendo o quê nessa estratégia? Ter também atenção à utilização de diferentes representações, por parte dos alunos: frações, decimais,…

Figura 2: Antecipação da prática letiva e respetivos comentários



Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos.

Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece?

Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. São colocadas questões como: O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis? O que significa ter um aumento de 10%?

Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece? O docente deve incentivar os alunos a realizem cálculos com um valor, se não estiverem a conseguir avançar.

Figura 3: Antecipação de questões nas planificações antes e depois das sugestões da supervisora

Berta preparou, também, com bastante cuidado o momento da síntese final, apesar de não o ter registado na sua planificação escrita. A sua ideia era recorrer a uma representação construída em cartolina da situação, tal como fez a professora do vídeo:

> [No vídeo] a professora utiliza um pedaço de cartolina que ela vai recortando na aula . . . A professora não faz com 10%, acho que faz com 50, inicialmente, porque a professora tem uma tira de cartolina e depois dobra a cartolina ao meio e vai a outro pedaço de cartolina para eles verem que já tem três partes e vai acrescentar ali àquela com fita-cola e vai colando no quadro. A minha ideia foi um bocadinho diferente, uma vez que eu queria já trazer os 10% cortados e juntar, no quadro, para depois apresentar a nova unidade. [Farei assim] porque … primeiro não ia demorar tanto tempo, no sentido em que não ia estar naquela altura a recortar e queria mesmo experimentar. [Queria que] eles percebessem que

> aqueles 10% iam caber 10 vezes na unidade que tinha, do preço inicial. Foi por isso não que não fiz da forma da professora.

Ao antecipar a resolução dos seus alunos e a resposta errada previsível, Berta transformou o seu conhecimento em conhecimento para os alunos. No entanto, não antecipou todas as representações corretas e a exploração das representações informais dos números racionais. Talvez por isso, também não tenha antecipado como apoiar os alunos nas suas dificuldades com as representações dos números racionais e explorar as suas relações. Esta questão foi sinalizada pela supervisora mas a futura professora incorporou apenas a ideia não retirando consequências para a exploração da tarefa. Apesar de referir que a experiência do "caso multimédia" a ajudou a planificar, não indica aspetos que tenha mobilizado para a antecipação das resoluções dos alunos. No que respeita a este aspeto, o trabalho de apoio da supervisora parece ter sido mais significativo.

Ao discutir com o professor cooperante a sequenciação das tarefas, Berta estabeleceu um percurso de aprendizagem fazendo uma gestão entre o tempo definido para o trabalho a realizar e as tarefas a propor. Neste processo pôde usufruir da experiência do professor relativamente à gestão curricular. Neste trabalho de preparação, prevaleceram aspetos didáticos, sem que os aspetos da Matemática se tenham revelado problemáticos.

Relativamente à preparação da síntese, verificamos que Berta recorreu ao caso multimédia e, com base na sua experiência, desenvolveu conhecimento didático sobre a exploração da tarefa na aula. É interessante verificar que não reproduz de modo exato o que observou, introduzindo alterações que considera adequarem-se à realidade dos seus alunos.

Exploração da tarefa

Berta introduziu a tarefa (figura 4) distribuindo o enunciado a cada aluno e solicitando que um a lesse.

> Como já deves ter dado conta, os preços dos combustíveis variam, com muita frequência, consoante o preço do barril de petróleo.
>
> As bombas de combustível Petrolex Lda aumentaram o preço da gasolina em 10%, o que fez com que os automobilistas protestassem imenso. Perante isto, o Diretor da Petrolex Lda mandou voltar a baixar o preço da gasolina em 10%.
>
> Será que a gasolina voltou ao preço anterior? Justifica a tua resposta.

Figura 4: Tarefa proposta

Depois, com todo o grupo, fez um levantamento dos dados que eram indicados e esclareceu dúvidas, evidenciando a questão que devia ser respondida: Será que a gasolina voltou ao preço anterior? De imediato, a maioria dos alunos disse que o preço do combustível voltava ao preço inicial, pois aumentava em 10% e depois baixava na mesma percentagem. Perante a situação, e enquanto circulava pela turma, Berta questionou os alunos:

Aluno 1: Isto é uma rasteira!

Berta: Porquê? Eu não digo nada… eu pergunto se volta ao preço inicial? Não é rasteira nenhuma!
Aluno 2: Volta ao preço inicial!
Berta: Então nós podemos ver isso… e se vocês experimentassem uma forma de ver isso?
Aluno 2: Cálculos!
Berta: Podes fazer!
Aluno 2: Posso inventar um preço?
Berta: Podes inventar um preço! Mas vejam bem qual é o preço…
Aluno 1: 60 euros
Berta: Vocês não têm que dizer um preço real mas achas que esse preço é assim…
Aluno 2: Não… na bomba é 1 ponto trinta e nove, 1 ponto vinte e tal…
Berta: Pronto… então estão a trabalhar a pares e por isso podem conversar e inventar um preço…
Berta (para a turma toda): Atenção ao que escreverem… não apaguem para vermos como pensaram!

Neste diálogo, Berta, introduzindo a tarefa, começa por convidar os alunos a pensar na questão proposta. Em seguida sugere que testem a sua conjetura (o preço volta ao valor inicial). Na sua quarta intervenção rediz a frase do aluno sugerindo que inventem um preço e guia-os de modo a que escolham um preço usando valores concretos e "razoáveis". Quando percebe que os alunos estão no bom caminho, incentiva o trabalho entre pares, aconselhando a que discutam as suas ideias e reforça a necessidade de registarem o seu raciocínio. Até ao final daquela aula, circulou pela sala iniciando diálogos deste tipo e apoiando os alunos a verificar cálculos. Entretanto a aula termina e o momento de discussão e síntese fica para a aula seguinte. Nesta aula, e depois de ter analisado as resoluções dos alunos, Berta, para a discussão coletiva, sequencia as resoluções da que considera menos interessante para a mais criativa e interessante. Dirige esta discussão, guiando os alunos na apresentação das suas resoluções, com questões de inquirição e focalizando a atenção para ideias importantes a aprender, repetindo algumas ideias. Eis o primeiro momento de discussão:

Berta: A maior parte de vocês considerou que o preço da gasolina vai voltar ao preço inicial. Depois do aumento e depois de baixar! Por isso o vosso colega vai começar por explicar a primeira parte. Porque é que achaste que o preço volta a ser o mesmo? . . . Não copiem nada primeiro vamos ver…

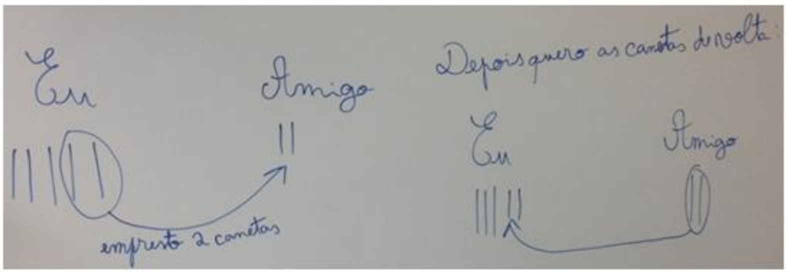


Figura 4 – Resolução inicial do primeiro aluno

Tomás: Eu fiz... Era eu mais um amigo... E eu emprestei as canetas e voltei a pedir de volta e por isso o preço volta ao mesmo!
Berta: Depois foste tentar dar um preço à gasolina… de 10 euros e foste ver se dava o mesmo valor!

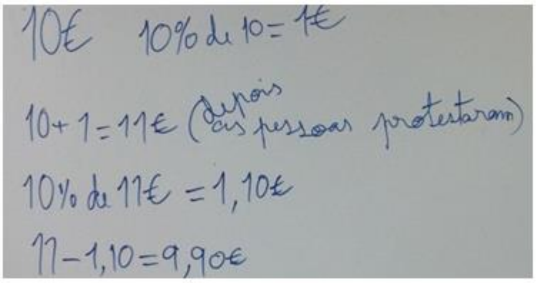


Figura 5 – Segunda parte da resolução do primeiro aluno

Tomás: A gasolina custava 10 euros e 10% de 10 euros é 1 euro.

Berta: E isso era para nós sabermos … Porque é que fizeste 10% de 10!

Tomás: Para sabermos quanto é o valor que temos que somar aos 10 euros.

Berta: Exatamente! E depois?

Tomás: Depois somei 1 euro a 10 e deu 11 euros. E depois as pessoas protestaram…

Berta: Calma! Então esses 11 euros eram …. Portanto tu tinhas dito que o preço da gasolina era 10 euros, 10% desses 10 euros era 1 euro, que ele foi aumentar. Quanto foi o aumento do valor do combustível? Passou para quanto?

Tomás: Aumentou 1 euro.

Berta: Para 11 euros.. E o que aconteceu nesse momento? As pessoas começaram a protestar. E que aconteceu de seguida?

Tomás: Desceu 10% e 10% de 11 é 1,10 euros.

Berta: E aqui o Tomás fez e muito bem… porque é que o Tomás foi fazer 10% de 11 euros e não calculou (como alguns meninos fizeram) 10% de 10 euros?

Aluno: Porque estávamos a errar porque 10% de 10… já tínhamos feito! E ficava o mesmo preço! E se fizermos 10% de 11 ficava melhor porque...

Berta: Porque nós tínhamos que ir ver os 10% do valor que tínhamos de novo! Certo? Então o valor do desconto foi de 1 euro e 10. Certo? Portanto o combustível ficou a 9 euros e 90. Se tu fosses automobilista preferias que isto acontecesse ou não?

Tomás: Sim!

Neste episódio podemos ver como Berta apoiou um par a apresentar a sua resolução permitindo que os outros alunos a compreendessem. Note-se que a primeira parte da resolução não foi antecipada pela futura professora e que a segunda parte foi antecipada mas não com números naturais. Neste episódio podemos ver que a professora convida os alunos a identificarem-se com a resolução alertando que este par, tal como a maioria dos colegas, conjeturou que o preço voltava ao inicial. Em seguida, sem salientar a importância do significado de percentagem, avança para o teste da conjetura com um valor pouco “razoável”, embora sem chamar a atenção dos alunos para esse facto. Na fase do cálculo da percentagem questiona o aluno de modo a clarificar a intenção do cálculo e rediz os passos já realizados de modo a apoiar a transição para a fase seguinte. Para acelerar o processo, uma vez que já tinha explorado a realização dos cálculos, reforça a ideia do aluno e chama a atenção para o erro que alguns alunos cometeram na sua resolução, fazendo uma orquestração de diferentes resoluções e fechando com a resposta correta. Depois deste momento, outros se seguiram e, no final, a professora faz uma síntese na qual recorre a uma representação com cartolina da tarefa, tal como viu no vídeo, e cumpre a antecipação que tinha preparado.

Reflexão sobre a prática

Berta considerou que a aula foi proveitosa, cumprindo os objetivos a que se tinha proposto. Assim, considera que "os alunos desenvolveram os seus conhecimentos, principalmente, no que se refere ao sentido de número racional e das relações entre as diversas representações . . . Compreenderam a noção de percentagem, para além que terem a necessidade de usar e calcular percentagens" (RF). Durante a aula considera que teve um papel "de orientador, questionando os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre a tarefa" (RE). Considera, também, que conseguiu explorar o significado de percentagem e consolidar os procedimentos de cálculo com percentagens (envolvendo apenas a representação decimal).

Relativamente à tarefa selecionada, entende que foi uma boa escolha porque faz parte do "nosso dia-a-dia, nós também os utilizamos" (EDA). Considera, ainda, que a tarefa vai ao encontro da ideia de "compreensão por parte dos alunos" (EDA). Podemos dizer que confirmou a sua ideia inicial de que a tarefa é motivante para os alunos e faz emergir o seu conhecimento do quotidiano, tendo alguns deles mostrado conhecimento empírico sobre a razoabilidade dos preços da gasolina.

Comparando a aula que tinha visto no vídeo com a sua, Berta refere que as resoluções dos seus alunos foram diferentes. No entanto, também diz que durante a aula nem se lembrou do vídeo: "socorri-me ao vídeo e das planificações e tudo isso... Porque mentalmente já o conheço, e consigo-me recordar disso, mas não [no momento da ação]" (EDA). Deste modo, indica que o trabalho feito em torno do caso multimédia foi significativo, permitindo que se sentisse segura relativamente às potencialidades da tarefa e ao trabalho a fazer mas no momento da ação não recorreu a este conhecimento para agir.

No final Berta mostrou-se muito animada com o desempenho dos seus alunos:

> Acabou por se fazer um trabalho a pares mas, realmente, o que eu queria ter feito era um trabalho de grupo. Estava muito empolgada porque eu queria perceber se eles chegavam… se eles arranjavam um valor para começarem a desenvolver a tarefa ou se era preciso ajudar. E realmente tive situações em que foi preciso dizer "e se nós experimentarmos um valor?" mas também tive outras em que disseram "ah! Isto na percentagem não é bem assim! Se calhar podemos arranjar um valor…" E, portanto, ter ficado empolgada deve-se, principalmente, ao facto de achar que eles iam pensar de maneiras muito diferentes. E foi isso que aconteceu! (EDA)

Relativamente às resoluções dos alunos, Berta ficou satisfeita ao verificar que a sua hipótese de trabalho foi bem antecipada e sublinha a importância das ações do professor (apoiar e sugerir) no desenvolvimento do trabalho. Ainda quanto aos seus alunos, refere que estes não são muito organizados nos registos escritos, ao contrário dos alunos do vídeo. Refere, por isso, que teve de orientar os seus alunos e tira ilações para o seu trabalho futuro: "Por isso é que eu fui pedindo que . . . Deixassem a primeira resposta… e que não apagassem, mesmo para ver a evolução . . . [Tenho que desenvolver] a comunicação matemática…" (EDA).

Quando reflete sobre organização escrita e oral das resoluções, Berta perspetiva várias estratégias para solucionar esta dificuldade dos seus alunos. Em vez de utilizar a estratégia da professora do vídeo, tentou solucionar a questão definido com os alunos a ordem de apresentação dos diversos passos:

> Queria que eles registassem… De outra forma... [A resolução] do Miguel, não estava [organizada], tanto que quando fiz a correção registei os passos, por ordem e coloquei a indicação dos números e depois pedi que ele no quadro o fizesse [pela ordem] que ele realmente tinha pensado . . . Principalmente para que os colegas o percebessem. (EDA)

Mais tarde, volta a identificar fragilidades na comunicação matemática escrita e remete para ações tomadas no sentido de incentivar a discussão entre os pares: "É notório que os alunos ainda apresentam alguma dificuldade na comunicação matemática, daí a minha preocupação em fazer com que cada par discutisse ideias e registasse o processo" (RF).

Fazendo um balanço final de todo o processo e comparando a sua capacidade de análise relativamente a outras aulas, refere que consegue ter mais espírito critico relativamente ao conseguido e às aprendizagens dos seus alunos:

> Planifiquei um bocadinho em relação ao que eu tinha visto, por ter tido acesso à planificação da professora. Claro que fiz a minha própria planificação! Sinto que me prendi um bocadinho à planificação da professora! . . . [No entanto, na aula] tive resoluções completamente diferentes… Elas são iguais, no sentido em que eles dão um valor mas os valores são diferentes, a comunicação matemática também é diferente. Fizeram-me questões que não tinham feito à professora e fiz questões que a professora não tinha feito. Outras que fiz como a professora mas não me prendi… acabei por não pensar muito no que a professora tinha feito. Fui um bocadinho pela minha aula e pelos meus alunos… [Relativamente à minha capacidade de reflexão] permite comparar as duas aulas e perceber o que é que eu poderia ter feito melhor… e, por outro lado, o que é que eu também fiz de melhor na minha aula. (EDA)

Berta tenta solucionar as dificuldades que identifica e reconhece estratégias para tornar as discussões mais rápidas, interessantes e organizadas. Na sua reflexão pós-aula, fazendo um balanço do trabalho realizado remete, por vezes, para os aspetos observados no "caso multimédia". O vídeo parece constituir uma referência tanto para si, como para o que os alunos do 2.º ciclo devem fazer. Este aspeto remete-nos para o conhecimento do professor sobre as dificuldades dos alunos e sobre aquilo que é expectável que façam.

Conclusão

Berta planificou, realizou a aula e refletiu sobre uma tarefa que conhecia muito bem da sua formação inicial recorrendo à memória do vivido no início do semestre no âmbito de uma experiência formativa com um "caso multimédia". Neste processo mobilizou *conhecimento didático*, sendo capaz de transformar o seu conhecimento em conhecimento para os alunos quando *antecipou* possíveis resoluções e erros nas respostas dos alunos. Revelou, ainda, ser capaz de apoiar os seus alunos colocando questões que os ajudassem a compreender a tarefa e a constituir novo conhecimento. Evidenciou *conhecimento sobre o que os alunos* devem aprender e as suas dificuldades, quando deixou claro o seu propósito e antecipou algumas dificuldades. Relativamente à tarefa, foi capaz de *prever* resoluções dos alunos, esteve consciente do que os alunos podem considerar desafiante e interessante e soube aproveitar as estratégias dos alunos estabelecendo uma sequência de ensino. No entanto, nem sempre conseguiu incorporar novas questões sugeridas pela supervisora relacionadas com resoluções que não previu. Sublinha a importância do estabelecimento de relações entre várias representações dos números racionais mas acabou por considerar apenas uma única representação.

Berta está consciente da importância das ações dos professores e que estas influenciam as oportunidades de aprendizagem. Na sua prática, de modo a concretizar os propósitos da aula, desenvolveu *ações de convidar, apoiar, sugerir e desafiar*. Convidou os alunos a resolver a tarefa e a dar início à discussão. Apoiou os alunos, conduziu-os na resolução da tarefa através de diferentes tipos de questões, sugeriu informação e validou as ideias dos alunos. Procurou ao longo da aula desafiar e incentivar os alunos a uma participação ativa na interpretação das situações, na sua resolução e a explicar as suas ideias. Na sua prática letiva, propôs um problema e estabeleceu um *discurso dialógico* incentivando os alunos a discutirem as suas ideias e a conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios. Recorreu a diversos tipos de questões (*inquirição, focalização e confirmação*), tanto na sua planificação como na exploração da tarefa.

Este caso torna clara a importância de promover oportunidades que permitam aos futuros professores a compreensão da complexidade da sua prática profissional e os ajudem a integrar conhecimento sobre o conteúdo e processo, sobre as questões relativas aos seus alunos e às orientações curriculares. Mostra também o potencial que a utilização de vídeos pode ter na formação inicial dos futuros professores (Norton et al., 2011), em especial se inseridos numa abordagem geral que envolve os futuros professores em ciclos de preparação, experiência/exploração e reflexão, construindo conhecimento (Ponte & Chapman, 2008).

Referências

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Branco, N., & Ponte, J. P. (2014). Um estudo de integração de recursos multimédia na formação inicial de professores do 2.º ciclo do ensino básico. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 387-413). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Erickson, F. (1986). *Qualitative methods in research on teaching*. In M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Norton, A., Mccloskey, A., & Hudson, R.(2011).Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 305–325.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2.ª ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 1, 67- 88.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55-81.

Scherrer, J., & Stein, M. K. (2012). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 105–124.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Harvard Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

PRÁTICAS DE ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS COM CARACTERÍSTICAS INVESTIGATIVAS

Luciano Veia
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve
lveia@ualg.pt

Joana Brocardo
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
joana.brocardo@ese.ips.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. Esta comunicação tem como objetivo discutir a preparação de uma tarefa de organização e tratamento de dados de características investigativas. Presta-se particular atenção aos aspetos valorizados pelos professores e os desafios com que se confrontam quando se envolvem neste tipo de trabalho. Trata-se de um estudo desenvolvido num contexto de trabalho de natureza colaborativa que segue uma metodologia de investigação interpretativa e qualitativa na modalidade de estudo de caso. Os resultados mostram que os professores valorizam tarefas de cunho investigativo, realizadas em contextos do quotidiano dos alunos, com recurso a dados reais recolhidos pelos próprios alunos, revelando a sua preocupação em construir tarefas com significado. Na preparação da tarefa, procuram antecipar possíveis resoluções dos alunos e prever modos de atuação para a sua condução, valorizando a apresentação de propostas por iniciativa dos alunos. Como principal desafio apontam o grau de incerteza com que são confrontados quando realizam este tipo de tarefas.

Palavras-chave: Professores; práticas profissionais; construção de tarefas; organização e tratamento de dados; investigações estatísticas.

Introdução

As tarefas são pontos de partida para a atividade matemática dos alunos, constituindo um aspeto central na definição das práticas dos professores (Ponte, 2005). Chapman (2013) salienta que, embora as tarefas estejam no centro da aprendizagem da matemática, elas não têm valor por si só, sendo os professores e os alunos que lhes dão sentido e valor a partir da forma como as exploram e trabalham. Stein, Smith, Henningsen e Silver (2000) privilegiam a exploração de tarefas cognitivamente desafiantes que tenham a potencialidade de envolver os alunos em formas complexas de raciocínio promovendo a sua capacidade em resolver problemas, raciocinar e pensar. A realização de investigações estatísticas, que proporcionam um ambiente propício e motivador da aprendizagem, e o trabalho em torno de aspetos específicos do raciocínio e pensamento estatístico, constituem tarefas desafiadoras e interessantes de elevada exigência cognitiva. De facto, na resolução de tarefas de características investigativas, os alunos seguem uma metodologia de trabalho de certa complexidade, envolvendo a formulação de questões de pesquisa, a recolha e organização de dados e, através da sua análise, apresentam e justificam conclusões (Franklin & Garfield, 2006; NCTM, 2000).

Esta comunicação tem por base uma investigação em curso desenvolvida num contexto de trabalho colaborativo em que participam o primeiro autor e três professores que lecionam o 3.º e 4.º anos tendo em vista analisar as práticas profissionais relativamente ao ensino da organização e tratamento de dados (OTD). Discutimos a preparação de uma tarefa de características investigativas com particular incidência nos aspetos valorizados pelos professores e os desafios com que se confrontam quando se envolvem neste tipo de trabalho.

Seleção e construção de tarefas

A seleção e construção de tarefas é um dos aspetos que integra o conhecimento matemático das tarefas para ensinar (*mathematical-task knowledge for teaching*, no original) e que inclui a análise, por parte do professor, das suas potencialidades ao nível da compreensão conceptual da matemática, do modo como podem apoiar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e do interesse e curiosidade que lhes podem despertar (Chapman, 2013). A escolha de tarefas matemáticas é um dos elementos que integra a prática do professor, aumentando a sua capacidade em tomar decisões, nomeadamente acerca da matemática que os seus alunos aprendem e como é que essa aprendizagem pode ser realizada. A importância do estudo das práticas profissionais dos professores tem sido apontada por vários autores, tendo em consideração que constituem "um dos fatores que mais influenciam a qualidade do ensino e a aprendizagem dos alunos" (Ponte & Serrazina, 2004, p. 51).

São várias as recomendações para que os professores selecionem ou construam tarefas matematicamente relevantes, criando oportunidades para que os alunos participem e partilhem o seu pensamento e compreensão acerca das tarefas. A importância que lhes é atribuída reside, nomeadamente na possibilidade dos alunos se envolverem em atividades matematicamente ricas e produtivas (Ponte, 2005). O tipo de tarefas propostas pode influenciar fortemente a perspetiva que os alunos constroem acerca da matemática e o modo como aprendem a pensar matematicamente. As tarefas rotineiras, que apelam à memorização de procedimentos, requerem um tipo de pensamento dos alunos diferente daquelas tarefas que os levam a pensar sobre os conceitos e permitem o estabelecimento de conexões (Stein et al., 2000). O desenvolvimento da capacidade de pensar, raciocinar e de resolver problemas, requer a exploração de tarefas de nível cognitivo elevado.

Stein et al. (2000) defendem o desenvolvimento de competências e melhoria das práticas dos professores centrados na seleção e condução de tarefas, de modo a garantir o seu nível de exigência cognitivo. Para estes autores, a análise deste aspeto pode ajuda-los a aperfeiçoar a sua capacidade para pensar acerca do tipo e do nível de pensamento que uma tarefa pode exigir aos alunos. Para além de considerar as características dos alunos e da turma na seleção de tarefas, o professor deve igualmente considerar outros aspetos tais como as condições de trabalho da escola, a escolha de tarefas adequadas tendo em conta o desafio matemático, o contexto associado à tarefa, a estrutura das tarefas, a organização da sala de aula e o tempo necessário (Ponte, Mata-Pereira, Henriques & Quaresma, 2013). Na preparação da tarefa, é importante que o professor pense em possíveis estratégias dos seus alunos na exploração da tarefa e em como proceder para as relacionar com a aprendizagem pretendida. Ao antecipar, o professor procura prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa, listando uma diversidade de estratégias e relacionando essas estratégias com os conceitos, representações ou procedimentos que quer que os seus alunos aprendam/desenvolvam (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Para Aizikovitsh-Udi, Clarke e Kuntze (2013) a descrição completa de uma tarefa matemática exige especificação das intenções, ações e interpretações quer do professor quer dos alunos, juntamente com informações sobre o contexto da aula em que a tarefa foi realizada e por quem. Estes autores defendem que a construção de tarefas deve ter como características (i) a utilização de situações da vida real; (ii) informação necessária e relevante tendo em conta o contexto; (iii) proporcionar a abordagem de vários tipos de raciocínio; (iv) definição com simplicidade e (v) integrar alguma forma de avaliação. Prevendo que durante a resolução de uma tarefa os alunos podem fazer perguntas ou comentários, a que o professor deverá responder, Watson et al. (2013) consideram que faz parte da construção da tarefa antecipar as questões dos alunos e ter uma visão geral das possíveis respostas.

Na construção de tarefas Ainley, Pratt e Hansen (2006) introduzem os constructos de propósito (*purpose*) e utilidade (*utility*) visando a criação de oportunidades para que os alunos atribuam significado e se apercebam da utilidade das ideias matemáticas. O propósito reflete a preocupação em criar tarefas que sejam significativas para os alunos. Uma tarefa construída com propósito "tem um resultado significativo para o aluno, em termos de um produto real ou virtual, ou a solução de um problema interessante" (p. 29). A utilidade de uma ideia matemática engloba o saber como, quando e porquê essa ideia é útil. Uma tarefa construída com propósito pode criar a necessidade de usar uma determinada ideia matemática para resolver a tarefa, aplicando-a no contexto da tarefa e apreciando a sua utilidade.

Investigações estatísticas nos primeiros anos de escolaridade

As mudanças curriculares ocorridas no ensino da Estatística valorizam metodologias de trabalho através da realização de investigações estatísticas que vão além do conhecimento matemático e da compreensão dos conceitos e procedimentos e que permitam desenvolver o pensamento estatístico dos alunos (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Para Brocardo e Mendes (2001) "o estudo da Estatística realça a importância de questionar, conjeturar e procurar relações, quando se formulam e resolvem problemas do mundo real" (p. 33).

As tarefas de caráter investigativo têm a vantagem dos alunos participarem na produção dos dados, possibilitando o acesso a um conjunto de dados, criado por si, o que poderá constituir um importante fator de motivação para a sua análise por terem de interpretar os seus próprios dados e explicitar os seus próprios resultados (Pfannkuch & Wild, 2004). Numa investigação estatística, os alunos devem seguir diversas etapas que envolvem "aspetos específicos de raciocínio ou pensamento em cada uma delas" (Martins & Ponte, 2010, p. 9). Na primeira etapa, define-se o problema a resolver e formulam-se questões que possam ser respondidas através da recolha e interpretação de dados. Trata-se de uma etapa essencial em que a questão de investigação funciona como ponto de referência inicial e orienta toda a investigação. As questões devem ser interessantes, desafiadoras e relevantes, com um nível de exigência cognitiva desafiador mas que possa estar ao alcance dos alunos (Makar & Fielding-Wells, 2011). A segunda etapa envolve a recolha dos dados, incluindo a elaboração de um plano apropriado, a seleção de técnicas de recolha e a utilização desse plano para os recolher. Esta etapa envolve decisões importantes sobre os dados a recolher e como fazer essa recolha, aspetos que são fundamentais numa investigação estatística (Pfannkuch & Wild, 2004). A terceira etapa consiste na representação e análise dos dados recolhidos, através de tabelas, gráficos e algumas medidas. Esta etapa começa pela escolha da representação mais adequada tendo em conta a natureza dos dados e as questões a que se pretende responder. Finalmente, na última etapa, interpreta-se a análise, sendo importante considerar se a questão proposta foi de facto respondida. Nesta fase, a formulação de conclusões através da discussão em grande grupo, "fomenta a partilha e o debate de ideias, a sistematização dos conceitos e a institucionalização de conhecimentos" (Martins & Ponte, 2010, p. 16).

As investigações estatísticas constituem uma importante forma de trabalho dos alunos, envolvendo-os ativamente no processo de aprendizagem e permitindo apreciar a importância do trabalho em Estatística e o interesse deste tema na resolução de problemas da vida real. A realização de experiências que contemplem todo o ciclo investigativo e que incidem sobre problemas do quotidiano dos alunos, surge como uma metodologia de trabalho alternativa em que a OTD, nos primeiros anos, pode ir mais além da análise e interpretação de dados "prontos a utilizar" e fornecidos pelo professor (Veia, Brocardo & Ponte, 2014).

Metodologia

Para concretização do estudo foi constituído um grupo de trabalho de natureza colaborativa formado pelo investigador (primeiro autor deste trabalho) e por três professores do 1.º ciclo, Adriana, Ana Maria e João (nomes fictícios), a lecionar o 3.º ano em 2012/13 e 4.º ano em 2013/14. No início do estudo, João e Ana Maria tinham 33 anos de serviço enquanto Adriana tinha 20. Os três professores tinham experiência de trabalho anterior com o investigador em contextos de formação contínua.

As questões orientadoras do estudo estão relacionadas com o processo de preparação, condução e reflexão sobre as práticas. O estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa de natureza interpretativa, seguindo a modalidade de estudo de caso (Stake, 2007). A recolha de dados recorre a entrevistas semiestruturadas, observação de aulas e sessões de trabalho conjunto, gravadas em suporte áudio e vídeo, a registos e notas de campo e recolha documental.

As 13 sessões de trabalho conjunto realizadas contemplaram a preparação de 6 tarefas de OTD para serem exploradas com os alunos e a discussão e reflexão sobre o modo como decorreu essa exploração a partir de episódios de sala de aula. A preparação das tarefas incluiu a sua seleção e/ou construção, a antecipação de possíveis resoluções dos alunos, a elaboração dos materiais necessários e a discussão sobre a sequência dos vários momentos da aula e o modo como as tarefas iriam ser exploradas. O investigador assume o papel de parceiro, dinamizando as sessões de trabalho, colaborando na preparação das tarefas e na reflexão sobre a sua realização.

Tendo por base a análise dos dados recolhidos através da observação da sessão de trabalho em que foi preparada a tarefa "Gostos musicais", neste texto discutem-se as práticas de construção desta tarefa, procurando perceber os aspetos valorizados pelos professores e os desafios com que se confrontam quando se envolvem neste tipo de trabalho.

A tarefa "Gostos musicais"

A escolha da tarefa vem no seguimento da exploração de uma tarefa sobre preferências televisivas realizada no início do projeto. Nessa altura os alunos escolheram o seu programa preferido indicando apenas uma preferência e o programa mais escolhido foi considerado o preferido pela turma. Na resolução dessa tarefa alguns alunos manifestaram o seu descontentamento por apenas indicarem um programa, impossibilitando a escolha de outros programas de que também gostavam muito.

Numa das últimas sessões de trabalho levantou-se a hipótese de construir uma tarefa tendo como objetivo estudar os gostos musicais dos alunos a partir da apreciação de músicas de 4 artistas. Na sua resolução os alunos deveriam ordenar os quatro artistas segundo as suas preferências e tomar uma decisão sobre o processo de escolha do artista preferido. A ideia subjacente era possibilitar a escolha de mais do que um artista e de procurar um critério "justo" para essa escolha.

A construção da tarefa (Anexo 1) tem como referência uma proposta de Haller (2008), que explora a apreciação de 4 barras de chocolate e posterior tomada de decisão sobre o critério a seguir para encontrar o chocolate preferido da turma. A exploração da tarefa "Gostos musicais" pretende que os alunos, seguindo as fases do ciclo investigativo estatístico, desenvolvam a capacidade de participar na produção dos dados, tomar decisões sobre o processo de recolha e apresentação dos seus próprios dados e interpretar os resultados em função dos critérios definidos para encontrar o artista preferido.

<u>Construção da tarefa</u>. Na sessão em que se preparou a tarefa "Gostos musicais" o grupo discute uma proposta apresentada pelo investigador acompanhada de uma simulação (Anexo 2) com dados hipotéticos para uma turma. Numa fase inicial da discussão, procura compreender e apropriar-se da tarefa:

Luciano (investigador): Isto que está aqui é a simulação para a turma da Ana Maria. Temos aqui, os [artistas] que são escolhidos em primeiro lugar (num gráfico) e os que são escolhidos em último lugar (noutro gráfico). Cada aluno tinha que ordenar os quatro [artistas].

Adriana: Este é o mais preferido?

Luciano: Neste caso o mais preferido é o *Justin Bieber*, mas também é o mais detestado.

João: Pois, mas agora acontece uma coisa. Um dos critérios poderia ser os que estiveram em primeiro lugar mais vezes. Mas atenção, imaginem que há um que fica sempre em segundo lugar. Esse ganha

	de certeza. Não se pode usar o critério do que é o mais vezes escolhido [em 1.º lugar].
Luciano:	Em vez de ser o primeiro vamos fazer para o último. Não sabemos o que vai acontecer. Neste caso, este, *Justin Bieber*, aparecia como mais escolhido [em 1.º lugar] mas também aparecia como mais detestado [em 4.º lugar].
Adriana:	Quer dizer, houve uma distribuição quase equitativa entre os que gostavam dele e os que não gostavam nada dele.
Luciano:	E agora, se nós atendermos às 4 posições que eles ocuparam pode acontecer outra coisa. É a ideia de atribuir pontos a cada um.
João:	Isso será mais justo.
Luciano:	Eu acho que esta [ideia] de atribuir pontos é a mais certa. É a tal história do festival da canção.
Ana Maria:	Como é que os moços vão chegar lá?
Luciano:	Isto que está aqui [na simulação] parte do princípio de que o primeiro tem 1 [ponto], o segundo tem 2, o terceiro tem 3 e o quarto tem 4.
João:	O que tiver mais pontos é o que fica em último. É o inverso, é ao contrário. Mas pode-se levar os moços a chegar lá.
Adriana:	É ao contrário. Quem está em quarto lugar ficou em último. O quarto lugar é como se somasse 4 pontos e esses 4 pontos são o quarto lugar. Isto está feito com base no total da pontuação. É uma pontuação invertida.

Nesta fase discute-se qual o critério a considerar para escolher o artista de que a turma gosta mais. Uma primeira hipótese poderá ser o artista mais vezes escolhido em primeiro lugar. No entanto, este artista também pode ter recebido várias escolhas em quarto lugar, o que pode representar alguma injustiça na adoção deste critério. Surge, então, a hipótese de se considerar todas as posições em que o artista é escolhido. Este critério recolhe consenso no grupo que o considera como mais justo. Apesar das dúvidas de Ana Maria, o seu colega João, concordando com este processo de escolha, manifesta igualmente a opinião de que os alunos podem resolver a tarefa e chegar a uma decisão.

O grupo colaborativo considera que a tarefa tem características diferentes de outras trabalhadas anteriormente, salientando o carácter de desafio com que podem ser confrontados e a incerteza face ao desempenho dos alunos:

João:	Vai ser uma aula louca. Vamos lá (risos).
Luciano:	(…) pois isto aqui dá muita "pica"!
João:	Dá, dá. Não, isto é giro, vá.
Ana Maria:	Pessoalmente, eles depois vão-nos trocar as voltas.
João:	Pode-se fazer a atividade. Isto é engraçado.
Luciano:	Agora estamos a colocar a nossa ênfase na interpretação.
Ana Maria:	Exato.
Luciano:	Enquanto na outra [tarefa], das algibeiras, estivemos muito mais preocupados com o processo de recolha dos dados, na forma como

	eles recolhiam os dados, aqui estamos a deslocar a nossa atenção, para a fase de interpretação.
João:	É isso mesmo. Os moços hão-de chegar lá, não são parvos.

Embora revelando um tom "descontraído", os professores reconhecem o carácter de desafio envolvido na tarefa, considerando, igualmente, que os seus alunos têm capacidade para a resolver. O foco na interpretação de resultados, introduzindo alguma diferenciação relativamente a tarefas realizadas anteriormente, constitui um dos principais contributos para a aprendizagem dos alunos.

Na preparação de tarefas anteriores esteve sempre presente a preocupação em adequar a tarefa às características dos alunos, às suas "vivências". A estratégia seguida passou por escolher situações dentro do "quotidiano dos alunos", trabalhando com dados "reais" recolhidos pelos próprios alunos. Nesta tarefa coloca-se a questão dos artistas serem do conhecimento dos alunos. Decide-se fazer uma auscultação prévia em cada turma para que, posteriormente, se tome uma decisão que seja consensual para as 3 turmas. Ouvidos os alunos, opta-se por substituir a artista *Miley Cyrus* por *Wiz Khalifa*.

Existindo consenso em trabalhar a tarefa introduzem-se algumas alterações nos diálogos da ficha de trabalho no sentido de a melhorar e de a tornar mais acessível aos alunos. Sobre a questão de estudo a propor acorda-se que poderá ser "Qual é o artista de que a turma gosta mais?"

<u>**Organização da fase de recolha de dados e de antecipação das respostas dos alunos**</u>. O grupo decide que abaixo da imagem de cada artista, os alunos colocarão a sua preferência. Procede-se depois à recolha dos dados de cada aluno fazendo o respetivo registo numa tabela onde constam os nomes dos alunos e o nome dos 4 artistas. Esta tabela será construída pelos professores que a distribuirão pelos alunos. Ana Maria e Adriana decidem projetar a tabela no quadro interativo enquanto João tem que a disponibilizar no quadro branco por não dispor de quadro interativo na sala. Todos decidem que os alunos receberão folhas de papel quadriculado para a construção de gráficos. Em seguida, o grupo procura antecipar possíveis estratégias dos alunos e equaciona algumas ideias sobre o tipo de atuação mais adequado na exploração da tarefa:

João:	Imaginem que eles chegam ao consenso de como vamos ver qual é o mais preferido. Que é o que tem mais escolhas em primeiro lugar. Deixamos avançar?
Luciano:	Eu acho que é de deixar avançar.
João:	Deixar avançar. E depois, a seguir lançar a questão?
Luciano:	Depois poderemos contrapor: "Então se forem os que ficaram em último lugar como terá sido?" Por exemplo: "Mas escutem lá, ele foi escolhido por toda a gente? Mas afinal como é que vamos decidir?"
Ana Maria:	Agora vamos ver o menos votado.
Luciano:	Será que o artista que ficou mais vezes em mais votado, também não ficou em menos votado? Não recebeu votos como menos votado?

João:	E aí é que se passa para ordenar pela pontuação, primeiro lugar, segundo lugar …
Ana Maria:	Se fizerem essa proposta. Até pode ser que façam outra.
João:	Não, não, os moços de certeza, que não vão para essa parte da pontuação.
Luciano:	Quase de certeza que vão para aqui [escolhidos em 1.º lugar].
João:	Mas a minha questão é se os deixamos avançar ou …
Luciano:	O que eu acho, que é mais natural, é que vão para aquilo que sempre fizeram e vão para esta de quem ficou em primeiro lugar. Acho que é de avançar.

Como primeira antecipação de resolução dos alunos surge a possibilidade do artista preferido ser aquele que foi mais vezes escolhido em primeiro lugar. Esta hipótese apoia-se em situações trabalhadas anteriormente em que as preferências recaíam no que era mais vezes escolhido. Nesta fase, o grupo considera que os alunos dificilmente avançarão para a atribuição de pontos às posições em que os artistas são votados. Face a esta primeira proposta parece existir consenso no sentido de aceitar a opinião dos alunos. No entanto, devem ser confrontados com argumentos que os levem a questionar a justiça do critério (1.º lugar) adotado.

Noutro momento, antecipa-se a possibilidade dos alunos considerarem as pontuações obtidas pelos artistas. Discute-se a estratégia a seguir para os ajudar a explorar esta hipótese:

Adriana:	Mas se calhar eles fazem logo isto. Chegam aqui (fim da tabela), põem total e depois somam. Eles somam e dizem que dá 44 pontos.
João:	Mas têm que dizer uma razão plausível para somar isto.
Adriana:	Mas é que isto são posições. Não são pontos, são posições.
Luciano:	Sim, exato, mas podem ser pontos se o primeiro valer 1 ponto.
João:	Sim mas têm que chegar lá.
Ana Maria:	Têm que chegar lá.
João:	Não podem somar só por somar.
Adriana:	Então porque é que nós não lhes dizemos que àquele de que eles gostam mais atribuem 1 ponto?
João:	Mas assim já não dá “pica”!
Ana Maria:	Tens que deixar eles …
João:	Pois, mas essa fase aí quando chegarem ao somatório disto, já atribuíram um ponto ao primeiro lugar, 4 pontos ao quarto lugar.

As várias intervenções apontam para que as decisões sejam propostas pelos alunos evitando que os professores “imponham” as suas opiniões. Antecipando a possibilidade dos alunos somarem os valores constantes na coluna de cada artista, João considera que deve ser clarificado o significado dessa soma. Dado que os registos indicam, em cada coluna, 2, 3, 1, 4, etc., os alunos devem reconhecer que esses valores correspondem às posições em que os artistas foram escolhidos, podendo, no entanto, ser convertidos em pontos.

Seguindo o critério da pontuação antecipam-se algumas dificuldades dos alunos na interpretação da informação, nomeadamente no significado dos pontos obtidos por cada artista. O grupo preocupa-se com a estratégia a definir no sentido de os ajudar a perceber que o artista de que a turma gosta mais é aquele que obteve menos pontos:

Ana Maria: Mas eles dizem quem tem mais valores é quem tem mais pontos.
Adriana: Vão interpretar isto como tendo sido este [*One Direction*], que é o que tem mais.
Ana Maria: Os meus alunos têm estado a discutir a história da votação de 1 a 5. O mais lógico é eles me dizerem o que fica melhor é o que tem 5. É o contrário do que está aí.
João: É o contrário disto.
Adriana: Mas aqui na escola quem tem 5 é quem tem mais (melhores) notas.
Ana Maria: É o melhor.
Adriana: Aqui é o contrário. Quem tem 5 é o pior.
João: Por isso, nesta altura haverá aqui um problema, haverá aqui um impasse qualquer. Tem que se arranjar maneira de dar a volta.

Estando os alunos habituados a trabalhar situações em que a uma maior pontuação corresponde um melhor resultado, os professores deparam-se com um problema para o qual devem prever uma solução. Nesta fase, o grupo manifesta novamente preocupação em não dirigir as opções dos alunos, procurando colocar questões que lancem dúvidas sobre o processo de decisão e, através da discussão, chegar a consenso:

Ana Maria: Eles é que vão decidir. Se eles vão decidir, a minha questão era, se avançarem com o de maior pontuação é de deixar avançar? Ou forçamos ao contrário?
Luciano: Agora vamos analisar se é verdade. Por exemplo, este que está aqui com 53 pontos, quantos primeiros lugares é que tem? Quantos segundos (lugares) é que tem?
Ana Maria: É só 1 (1.º lugar).
Luciano: Mas em princípio o que tem mais pontos é o que tem mais últimos lugares do que primeiros.

Surge novamente a preocupação de aceitar as propostas dos alunos, procurando não "forçar" a sua decisão. A estratégia a seguir aponta para a colocação de questões que ajudem a clarificar o seu pensamento tendo o cuidado de não baixar o nível de exigência cognitiva da tarefa.

Seguidamente o grupo pondera a possibilidade de surgir uma proposta em que se atribuem mais pontos ao artista votado em primeiro lugar:

João: Bem, mas eles podem sugerir que os pontos sejam atribuídos ao contrário. Nesse caso avança-se?
Luciano: Tens que refazer esta tabela toda.
João: Imaginem que eles vão para o caso de atribuir pontos: 4 pontos aqui, 3 pontos aqui …
Luciano: 4, 3, 2, 1

João:	Aí é muito difícil converter, os moços perdem-se a fazer contas. Vai ser complicado, porque aqui têm que dar 4 pontos. Isto exige uma atenção espetacular. Um ponto, depois o segundo lugar vale 3 pontos, o terceiro lugar vale 2 pontos.
Luciano:	Pois, o mais fácil é ser 1, 2, 3 e 4.
João:	Pois, o mais fácil é fazerem assim.
Ana Maria:	Se eles quiserem atribuir pontos [ao contrário], eu faço ao lado outra tabela e cada um vai lá fazer as suas continhas.
João:	A não ser que ponham aqui ao lado. Exige uma atenção espetacular.
Adriana:	É uma conversão espetacular. Levas a manhã toda e os moços não percebem nada.
João:	Terá que ser em grupo.
Adriana:	Teremos que arranjar uma coisa mais simples para eles.
João:	Não, o mais simples é este aqui (de 1 a 4). Isto dá.

Embora reconheça a adequação desta proposta, o grupo considera que ela poderá acarretar alguns inconvenientes. Por um lado, a conversão das posições em pontos, em sentido contrário, atribuindo mais pontos ao primeiro lugar, requer uma atenção redobrada por parte dos alunos de modo a evitar enganos. Por outro lado, o acréscimo de trabalho pode desviar os alunos do objetivo principal. Forma-se, por fim, um consenso em manter a ideia inicial.

Por sugestão de João, fica acordado que, após resolução da tarefa, se questionem os alunos sobre as escolhas dos vários critérios, procurando conhecer as suas opiniões sobre o trabalho realizado e sobre a justiça dos processos seguidos.

Considerações finais

A preparação da tarefa revela a preocupação do grupo colaborativo em continuar a explorar tarefas que seguem o ciclo investigativo, possibilitando ir mais além da análise e interpretação de dados "prontos a utilizar" e fornecidos pelo professor (Veia et al., 2014). A preparação desta tarefa contempla a definição da questão de estudo, o processo de recolha e organização de dados e coloca particular incidência na análise e interpretação de resultados. Trata-se de uma tarefa desafiante e de nível cognitivo elevado (Stein et al., 2000).

Durante a preparação da tarefa está subjacente a importância que os professores dão à possibilidade de recorrer a situações da "vida real" que permitem a criação dum contexto de trabalho ligado às "vivências dos alunos". Esta preocupação evidencia-se particularmente quando os professores procuram saber se os alunos conhecem todos os artistas.

A opção por uma tarefa em que os alunos têm que tomar decisões sobre o processo de escolha do artista preferido a partir da ordenação dos seus gostos, reflete a preocupação dos professores em construir tarefas com propósito, ou seja, com significado para os alunos. Na sua resolução, o recurso à construção de tabelas e gráficos cria oportunidades para que os alunos utilizem ideias matemáticas importantes, apreciem a sua utilidade neste contexto e tomem decisões significativas sobre a forma de a resolver. A tarefa permite que os alunos experimentem a utilidade de tabelas e gráficos como ferramentas para interpretação de dados em vez da sua utilização mais comum para comunicação e apresentação de resultados, aspetos que Ainley et al. (2006) igualmente referem.

Na preparação da tarefa os professores procuram antecipar possíveis resoluções dos alunos, equacionando algumas das suas estratégias e levantando possíveis dificuldades. Consideram, igualmente, algumas ações que podem realizar de modo a apoiar os alunos na fase de exploração da tarefa. Destaca-se a sua decisão em procurar não fornecer muitas pistas sobre a resolução da tarefa, focando a sua atuação na colocação de perguntas que levem os alunos a questionar os argumentos apresentados e a procurar processos alternativos. As intervenções previstas para atuação dos professores vão no sentido de não reduzir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein et al., 2000). A consideração de um conjunto variado de aspetos, quer no que se refere ao professor, quer no que se refere aos alunos, revela uma perspetiva global sobre a prática de seleção e construção de tarefas tal como referem Aizikovitsh-Udi et al. (2013), Ponte et al. (2013) e Watson et al. (2013).

Um dos principais desafios com que os professores se confrontaram ao realizar esta tarefa resulta da sua novidade relativamente a situações trabalhadas anteriormente, nomeadamente "o tratamento de dados por ordenação de preferências". Os professores referem, igualmente, as situações de incerteza que consideram poder surgir durante a sua exploração, implicando uma saída da sua "zona de conforto". Estão, neste caso, o recurso a dados dos próprios alunos, o que não lhes permite prever situações que possam surgir e assim poder antecipar (controlar) estratégias de atuação e possíveis decisões resultantes da adoção de diferentes critérios na escolha do artista preferido. No entanto, todos eles encaram esta possibilidade muito positivamente, sentindo-se confiantes e não receando ter de tomar decisões durante a exploração da tarefa. O contexto colaborativo em que se realizou este trabalho poderá ter funcionado como elemento facilitador na formação deste sentimento.

Referências

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, *32*(1), 23-38.

Aizikovitsh-Udi, E., Clarke, D., & Kuntze, S. (2013). Hybrid tasks: Promoting statistical thinking and critical thinking through the same mathematical activities. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 453-461), Oxford.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3 -15). Dordrecht: Kluwer.

Brocardo, J., & Mendes, F. (2001). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante, 10*(1), 33-58.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6.

Franklin, C. & Garfield, J. (2006) The GAISE Project: Developing statistics education guidelines for grades Pre-K-12 and college courses. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 345-375). Reston, VA: NCTM.

Haller, S. (2008). Candy judging. *Online Resources for K-12 Statistics Teachers*. STatistics Education Web (STEW). On line: http://www.amstat.org/education/stew/pdfs/CandyJudging.pdf

Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: ME/DGIDC.

Makar, K. & Fielding-Wells, J. (2011). Teaching teachers to teach statistical investigations. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education, A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 347-358). New York, NY: Springer.

NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17 - 46). Dordrecht: Kluwer.

Ponte, J. P. (2005) Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. Mata-Pereira, J. Henriques, A. & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 493-501), Oxford.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, *13*(2), 51-74.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Stein, M. k., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* New York, NY: Teachers College.

Veia, L., Brocardo, J. & Ponte, J. P. (2014). Uma tarefa de investigação em organização e tratamento de dados no 1.º ciclo: Realização da tarefa e reflexão da professora. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. Boavida, & L. Menezes (Orgs.) (2014). *Atas do XXV SIEM* (pp. 229-242). Braga: APM.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 9-15), Oxford.

Anexo 1. Ficha de trabalho.

Gostos musicais

Numa aula do 4.º ano os alunos estavam muito entusiasmados a discutir os seus gostos musicais.

			
Selena Gomez	**One Direction**	**Justin Bieber**	**Wiz Khalifa**

Maria: Eu gosto muito do Justin Bieber e do One Diretion.

Ricardo: Eu gosto do One Direction mas também gosto da Selena Gomez.

Sofia: Eu por mim vou pelo Wiz Khalifa.

Vanda. Pois eu gosto dos quatro.

Vanessa: Eu também gosto dos quatro mas do que gosto mais é do Justin Bieber.

Bernardo: Podíamos fazer uma votação para saber qual o artista de que a turma gosta mais.

Beatriz: Mas se votarmos só num estamos a dizer que não gostamos dos outros.

Diniz: Poderíamos arranjar outro processo de votação.

Tânia: Já sei. Colocamos os artistas por ordem dos nossos gostos.

Afonso: Então e depois como é que decidimos quem é o artista de que a turma gosta mais?

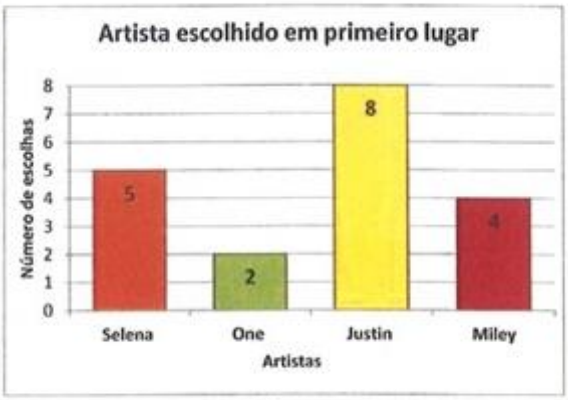
Se a vossa turma fizesse esta votação como chegavam à conclusão sobre o artista de que gostam mais?
Juntamente com os teus colegas pensa numa forma de tomar uma decisão.

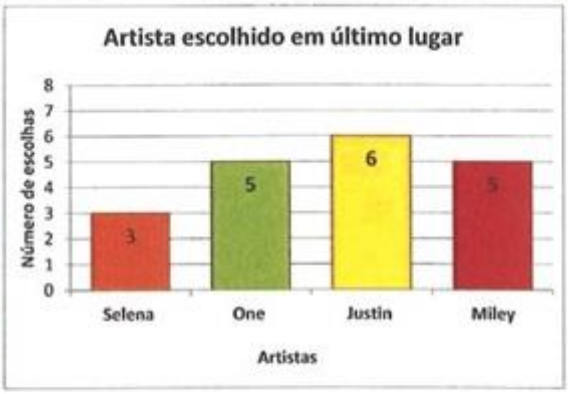
Anexo 2. Simulação de dados para uma turma.

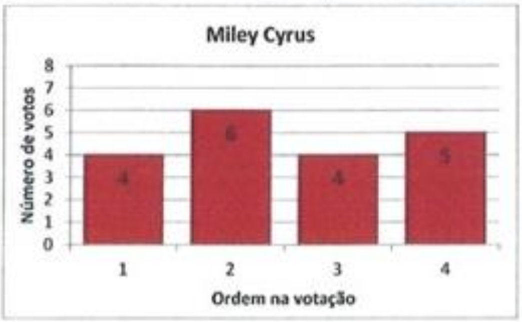
	Selena Gomez	One Direction	Justin Bieber	Miley Cyrus
Álvaro	1	2	3	4
António	4	3	1	2
Bento	2	3	1	4
Duarte	2	4	3	1
David	3	4	1	2
Duarte	1	2	4	3
Emílio	2	3	1	4
Francisca	1	2	3	4
Ester	3	4	1	2
Ilda	3	2	1	4
Jorge	2	3	4	1
Luís	4	1	2	3
Mário	2	3	4	1
Manuel	3	4	1	2
Paulo	4	3	2	1
Patrícia	1	2	4	3
Rute	2	1	4	3
Sandra	3	4	1	2
Vítor	1	3	4	2

Selena Gomez	One Direction	Justin Bieber	Miley Cyrus
44	53	45	48

	Selena	One	Justin	Miley
1	5	2	8	4
2	6	5	2	6
3	5	7	3	4
4	3	5	6	5







PROMOVER O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: PERSPETIVAS DE PROFESSORAS NUM ESTUDO DE AULA

João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Mónica Baptista, Joana Mata-Pereira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt; mq@campus.ul.pt; mbaptista@ie.ul.pt; joanamatapereira@campus.ul.pt

Resumo. Analisamos as perspetivas de um grupo de cinco professoras do 2.º ciclo que participam num estudo de aula sobre as tarefas a propor e o trabalho a realizar na sala de aula para promover a aprendizagem dos alunos. Salientamos os momentos de discussão sobre caraterísticas das tarefas e as possibilidades de trabalho exploratório dos alunos, dando especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático. A recolha de dados foi feita por observação participante e recolha documental, através da elaboração de um diário de bordo, gravação áudio das sessões de trabalho e gravação vídeo da aula observada. Os resultados mostram que as professoras tornam mais precisas as suas perspetivas sobre a distinção entre exercício e problema e valorizam a realização de atividades de natureza exploratória. Verifica-se também que as professoras passam a valorizar a realização de generalizações e justificações por parte dos alunos, reconhecendo que estes são por vezes capazes de surpreender o professor pela originalidade das suas estratégias de resolução dos problemas.

Palavras-chave: Tarefa, Raciocínio matemático, Abordagem exploratória, Estudo de aula

Introdução

A abordagem exploratória tem vindo a merecer amplo destaque nas orientações curriculares internacionais para a educação matemática (NCTM, 2000). Esta abordagem representa uma mudança significativa em relação ao ensino em que o professor começa por demonstrar previamente o método de resolução e depois apresenta exercícios para o aluno resolver. Pelo contrário, na abordagem exploratória, os alunos são chamados a lidar com tarefas para as quais não têm um método de resolução imediato e para as resolver têm de construir os seus próprios métodos, usando os seus conhecimentos prévios (Ponte, 2005).

O trabalho exploratório na aula de Matemática cria oportunidades para que os alunos construam ou aprofundem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são, portanto, chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução, que devem ser capazes de apresentar e justificar aos seus colegas e ao professor. Este, em lugar de ensinar diretamente procedimentos e algoritmos, mostrando exemplos e propondo exercícios para praticar, propõe aos alunos um trabalho de descoberta, ao mesmo tempo que promove momentos de negociação de significados, argumentação e discussão coletiva. Procura, deste modo, levar os alunos a desenvolver o seu raciocínio, mas também a compreensão da Matemática bem como a capacidade de a usar nas mais diversas situações. No entanto, a realização deste tipo de ensino é um desafio para os professores, exigindo conhecimentos específicos, competência e investimento. Nesta comunicação analisamos as perspetivas de um grupo de professoras do 2.º ciclo que participam num estudo de aula, sobre as tarefas a propor e o trabalho a realizar na sala de aula para promover a aprendizagem dos alunos, dando especial atenção ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Tarefas e raciocínio na aula de matemática

Num ensino da Matemática que se baseia principalmente na transmissão de conhecimentos pelo professor, o conceito de tarefa é de pouca utilidade. Pelo contrário, num ensino da Matemática que valoriza o papel ativo dos alunos, este conceito é essencial, uma vez que as tarefas são um elemento organizador fundamental da atividade dos alunos. Sendo essenciais para apoiar a aprendizagem, as tarefas podem ser usadas com outros propósitos, por exemplo, para avaliação (isto é, para verificar a aprendizagem realizada) ou para investigação (por exemplo, para compreender em profundidade as capacidades, processos de raciocínio e dificuldades dos alunos).

Nas tarefas para apoiar a aprendizagem, devemos ter em atenção a distinção de Pólya (1945) entre exercício e problema, conforme exista ou não um método de resolução imediato. Naturalmente, para uma certa pessoa, uma tarefa será um exercício ou um problema dependendo do seu conhecimento prévio. Ampliando essa distinção, Stein e Smith (1998) contrastam as tarefas de baixo e elevado nível cognitivo, considerando nas tarefas de baixo nível cognitivo as que envolvem "memorização" e os "procedimentos sem conexões" e nas de elevado nível cognitivo os "procedimentos com conexões" e "fazer Matemática".

Ponte (2005) sugere que as tarefas têm duas dimensões fundamentais: desafio matemático e estrutura. O grau de desafio matemático (reduzido/elevado) depende da perceção da dificuldade para uma determinada pessoa enquanto o grau de estrutura (aberto/fechado) refere-se à natureza da informação dada, objetivos e condições, que podem ser detalhados e precisos ou abertos, requerendo um trabalho adicional de interpretação dos alunos. Cruzando as duas dimensões, obtêm-se quatro tipos de tarefa: (i) exercícios, tarefas fechadas com reduzido desafio matemático; (ii) problemas, também tarefas fechadas, mas com um elevado desafio matemático; (iii) investigações, tarefas abertas que apresentam elevado desafio matemático; e (iv) explorações, tarefas relativamente abertas e acessíveis à maioria dos alunos.

Ao planear as suas aulas os professores podem considerar vários tipos de tarefa. Ponte (2005) sugere que é necessária a diversificação porque cada tipo de tarefa desempenha um papel específico na aprendizagem. Tarefas fechadas são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático que se baseia numa relação muito precisa entre a informação dada e o resultado obtido. Tarefas com um grau de desafio mais reduzido criam condições favoráveis ao sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança. Tarefas mais desafiadoras proporcionam experiências matemáticas mais profundas. Finalmente, tarefas abertas são essenciais para ajudar os alunos a desenvolver a autonomia e a capacidade de lidar com situações complexas. Este autor indica também que, no seu trabalho em

Matemática, os alunos mobilizam conhecimentos construídos fora do contexto escolar. Além disso, valoriza a (re)descoberta de um método de resolução, salientando que esta é, muitas vezes, a melhor maneira de aprender. Finalmente, considera que as tarefas devem fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que alargue o conhecimento de representações relevantes e de conexões entre a Matemática e outras áreas.

Como indicam Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), raciocinar consiste em realizar inferências, de forma fundamentada. Raciocinar não é dizer ideias aleatoriamente, mas sim usar informação dada para obter nova informação válida no respetivo domínio de conhecimento. De acordo com NCTM (2000), é necessário valorizar o raciocínio matemático na sala de aula de modo a que os alunos vão além da mera memorização de factos, regras e procedimentos. O foco no raciocínio pode ajudá-los a ver que a Matemática é lógica e pode ser compreendida. Lannin, Ellis e Elliott (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve essencialmente fazer generalizações e justificações matemáticas. Para os autores, a "grande ideia" sobre o raciocínio matemático é que este é um processo dinâmico de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos. Deste modo, o raciocínio matemático envolve processos dedutivos, indutivos e abdutivos. Para promoverem o desenvolvimento do raciocínio os professores têm de tomar decisões, definir percursos educativos e selecionar tarefas de forma cuidadosa, considerando os aspetos do raciocínio a dar atenção. Para isso, mais do que tarefas isoladas, precisam de organizar sequências de tarefas de diferentes níveis de desafio e estrutura.

Estudos de aula

O estudo de aula é um processo de desenvolvimento profissional dos professores que tem vindo a ser cada vez mais utilizado em diferentes níveis de ensino. Uma característica muito importante dos estudos de aula é que decorrem dentro do ambiente escolar e neles os professores desempenham um papel central. Normalmente, um estudo de aula começa com a identificação de um problema relevante relacionado com a aprendizagem dos alunos. Depois, os participantes planeiam uma aula, considerando as orientações curriculares. Preveem dificuldades dos alunos, antecipam possíveis questões que possam surgir na aula, definem estratégias de ensino e preparam instrumentos para a observação. A aula é lecionada por um dos professores enquanto os restantes observam e tiram notas com especial atenção à aprendizagem dos alunos. Em seguida, os professores reúnem-se para analisar e refletir sobre o que observaram. A análise pode levar à reformulação do plano de aula, com alterações nas estratégias e materiais utilizados, nas tarefas propostas, nas perguntas feitas aos alunos, etc… Muitas vezes, a aula reformulada é lecionada novamente por outro professor a outra turma, em ciclos que podem ser repetidos várias vezes (Lewis, Perry, & Hurd, 2009; Murata, 2011).

Um aspeto central dos estudos de aula é que eles centram-se nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores. Isto distingue-os de outros processos que envolvem observação de aulas mas que se centram, principalmente, na atuação dos professores. Ao participar em estudos de aula, os professores podem aprender questões importantes em relação aos conteúdos que ensinam, às orientações curriculares, aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos e à dinâmica da sala de aula. Os estudos de aula são desenvolvidos em ambientes colaborativos, permitindo aos professores participantes criar um relacionamento próximo, partilhar ideias uns com os outros e apoiar-se mutuamente. Desta forma, constituem um contexto não só para refletir, mas também para promover o sentimento de confiança, fundamental para o seu desenvolvimento profissional.

Um estudo de aula constitui assim um processo formativo fortemente ligado à prática, que possibilita aprofundamentos teóricos em múltiplos domínios – matemático, didático, curricular, educacional e organizacional. Além disso, proporciona múltiplas oportunidades para um trabalho de cunho exploratório para os próprios professores envolvidos. Trata-se, por consequência, de um processo formativo promissor, que deverá, naturalmente, ter em atenção os interesses e necessidades dos professores envolvidos.

Metodologia

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Erickson, 1986), resulta da realização de um estudo de aula no ano letivo de 2013-14 num agrupamento de escolas de Lisboa. O agrupamento tinha concebido um projeto para a melhoria do ensino da Matemática e da Língua Portuguesa, e solicitou a colaboração do Instituto de Educação (IE) da Universidade de Lisboa para concretizar a formação dos professores. Propusemos a realização de diversos estudos de aula, sendo um deles com professoras do 2.º ciclo (Inês, Francisca, Luísa, Maria e Tânia, nomes fictícios). Estas professoras foram selecionadas pela direção do agrupamento, que também designou Maria como coordenadora do grupo. Numa reunião prévia onde Maria participou em conjunto com professores de outros anos de escolaridade e de elementos da direção, decidiu-se que o estudo de aula incidiria sobre um tópico do 5.º ano, em que estava a ser aplicado um novo programa. Assim, o estudo de aula envolve cinco professoras sendo que Francisca, Maria e Luísa lecionam turmas de 5.º ano enquanto Inês e Tânia lecionam turmas de 6.º ano. A equipa do IE que conduziu este trabalho é formada por quatro membros, tendo Marisa e Joana dinamizado as sessões de trabalho, João Pedro coordenado a formação e participado em algumas sessões e Mónica assumido o papel de observadora, coadjuvada por uma bolseira.

As sessões decorreram com periodicidade quinzenal a mensal. Analisamos episódios das oito sessões, tendo em vista ilustrar as perspetivas das professoras sobre tarefas e sobre o trabalho a realizar na sala de aula decorrentes desta atividade formativa. A sessão 1 teve por objetivo apresentar o estudo de aula a todas as professoras, as sessões 2 a 6 pretenderam aprofundar o conhecimento sobre comparação e ordenação de números racionais e preparar uma aula sobre esse tópico, a sessão 7 consistiu na observação de uma aula e a sessão 8 foi dedicada a refletir sobre a aula observada e sobre todo o estudo de aula. Os dados aqui analisados foram recolhidos por observação participante e recolha documental através da elaboração de um diário de bordo (realizado por um membro da equipa), gravação áudio das sessões e gravação vídeo da aula observada. As tarefas analisadas nas sessões do estudo de aula foram propostas pela equipa do IE e a tarefa proposta na aula observada foi selecionada e adaptada pelas professoras envolvidas.

A análise dos dados começou por identificar momentos significativos nas diversas sessões, olhando para as transcrições das sessões e, quando pertinente, para a gravação vídeo. Em seguida, identificaram-se os episódios respeitantes (i) à natureza das tarefas e (ii) a tarefas para promover o raciocínio e classificaram-se estes episódios de acordo com características que considerámos de interesse sobre o trabalho das professoras na resolução, seleção, elaboração de tarefas e reflexão sobre a sua aplicação. Nesse conjunto de episódios selecionámos e analisámos aqueles que nos pareceram mais reveladores sobre as aprendizagens dos professores relacionadas com tarefas.

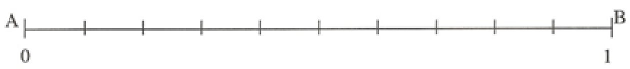
A natureza das tarefas

Distinguir diferentes tipos de tarefa. A resolução de tarefas e a discussão das possíveis dificuldades dos alunos constituiu um importante momento de trabalho da sessão 2. Durante a resolução das tarefas (Figura 1), Maria começou a sentir que estas eram demasiado difíceis para apresentar aos seus alunos:

---

1. A turma do João organizou um percurso pedestre do Parque Natural da Serra d' Aire e Candeeiros, representado na figura por [AB].

1.1. A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.
Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



1.2. Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

2. Podemos representar os números decimais numa linha numérica, assim como fazemos com os números inteiros.

Na linha seguinte estão representados alguns números.

Representa tu agora nessa mesma linha os seguintes números:

0,25 $\qquad \frac{3}{4} \qquad$ 0,6 $\qquad \frac{4}{10}$

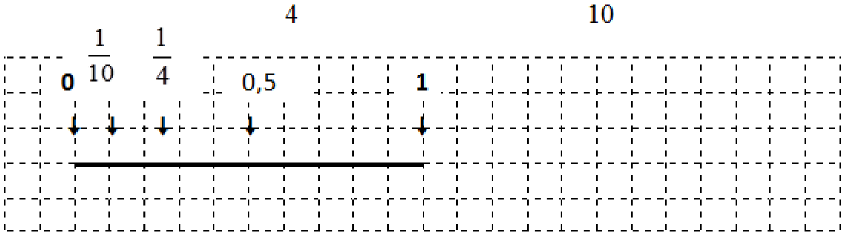


Figura 1 – Exemplo de tarefas (Monteiro & Pinto, 2007) analisadas pelas professoras na sessão 2.

Maria:	Isto é suposto – se eu apresentar isto aos meus alunos – eles saberem fazer? Não percebi? Isto é suposto eles saberem fazer ou…
Luísa:	Não, eu acho que a ideia não é essa…
Maria:	Eles [ainda] não sabem nada acerca da reta numérica.
Marisa:	Não, não é essa a questão. Isto são tarefas que podemos…
Maria:	Que podem ser propostas aos alunos no 5.º ano…
Marisa:	Não necessariamente para introduzir o tema.

Este diálogo levou-nos a clarificar que se tratavam de tarefas para promover a aprendizagem dos alunos e a apresentar a classificação das tarefas como exercícios, problemas, explorações e investigações. Assim salientámos que, para um aluno, uma tarefa pode ser um problema ou um exercício conforme aquilo que ele já sabe anteriormente. Deste modo, tanto um problema como um exercício podem remeter para um contexto ou uma "história", distinguindo-se pelo facto do aluno já dispor ou não de um método de resolução. De imediato, Maria intervém, mostrando compreender a definição sobre a natureza das tarefas:

Maria:	Quando eles têm os dados todos significa que é um exercício…
Marisa:	Quando eles já adquiriram as ferramentas para resolver…
Maria:	Sim, sim…
Marisa:	Exatamente.
Maria:	É uma aplicação, é uma aplicação do conhecimento em vez de…
Marisa:	Por exemplo…
Maria:	Enquanto problemas é um bocadinho mais do que isso, eles têm de descobrir qualquer coisa… Não têm de aplicar só o que já sabem.

Deste modo, na sessão 1, as professoras mostraram ser capazes de distinguir entre diversos tipos de tarefa. Na sessão 4 esta distinção foi de novo retomada e percebeu-se que as professoras valorizavam a realização de explorações:

Francisca:	Eles agora com o triângulo, não é? Com a soma [da amplitude] dos ângulos internos.
Marisa:	Pois, dobram as pontinhas [vértices].
Luísa:	(...) cortaram e colaram no caderno e depois começaram a dizer: Ah! Professora, isto dá um ângulo raso.
. . .	
Francisca:	E não se esquecem! Isso é muito engraçado, fica lá.
Luísa:	Pois foi, pois foi.

Nesta discussão sobre as características das tarefas de exploração, Francisca e Luísa recordaram uma experiência da sua própria prática, de anos anteriores, e partilharam com as colegas que fizeram uma tarefa para abordar a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo. A sua reflexão sugere que se tratava de uma experiência relativamente pontual, mas o facto é que ambas valorizaram bastante a exploração que os alunos fizeram usando materiais concretos e no final salientaram ainda que essa manipulação e a descoberta foram marcantes para os alunos, conduzindo a uma aprendizagem mais consistente e duradoira.

Uma tarefa da reconstrução da unidade. A tarefa indicada na Figura 2, apresentada na sessão 2, causou estranheza às professoras e suscitou uma discussão muito participada:

A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa agora, $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa tira.

Explica o teu raciocínio.

Figura 2 – Tarefa (Menezes et al., 2008) analisada pelas professoras na sessão 2.

Maria: Como é que abordavam isto? Isto é $\frac{3}{4}$ e agora como que lhes pediam $\frac{1}{2}$? Como é que eles vão…?

Esta questão, colocada por Maria ao grupo, gerou uma animada discussão, primeiro sobre a resolução da tarefa:

Tânia: Primeiro tentar acrescentar…
Inês: Divide-se esta parte…
Marisa: Primeiro eles perceberem o que é que é então a…
Professoras: [ao mesmo tempo] A unidade!
Tânia: Que isto não é uma unidade.

Neste segmento, as professoras em grupo procuraram, elas próprias, perceber como se poderia resolver a tarefa. Reconheceram que a tarefa era difícil requerendo, para estes alunos, uma resolução com vários passos, o primeiro dos quais é a reconstrução da unidade.

Depois de resolverem a tarefa, as professoras discutiram as possíveis dificuldades que os alunos poderiam ter na resolução desta tarefa, indicando que o erro mais comum seria dividirem a tira em quatro partes em vez de dividirem em três partes e acrescentarem uma parte. Salientaram ainda que esta dificuldade se prende com a falta de compreensão do significado parte-todo.

A estranheza das professoras relativamente a uma tarefa envolvendo a reconstrução da unidade, que é essencial para a compreensão da noção de número racional, é algo que deve fazer pensar. A reflexão em grupo permitiu perceber as dificuldades prováveis dos alunos e identificar uma estratégia de resolução acessível à generalidade dos alunos. É de notar a observação feita por uma professora sobre o facto dos alunos poderem ter ainda de desenvolver melhor a noção de fração no significado parte-todo e, por isso, ter grande dificuldade em reconstruir a unidade.

Uma tarefa de justificação por contraexemplo. A tarefa seguinte (Figura 3), que apela a uma estratégia de resolução baseada numa justificação por contraexemplo, também se revelou pouco conhecida das professoras e foi por elas muito discutida:

$\frac{2}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$ é maior do que $\frac{3}{4}$. Será que podemos fazer a seguinte afirmação: "Se quisermos comparar duas frações e verificarmos que uma delas tem o numerador e o denominador maiores do que a outra, podemos logo concluir que essa é a fração maior"? Justifica a tua resposta.

Figura 3 – Tarefa (adaptada de Lin, 2012) analisada pelas professoras na sessão 2.

Apesar de considerarem a tarefa demasiado difícil, as professoras começaram por tentar perceber como é que os alunos a podiam resolver. Inicialmente, pensaram em modos de comparar as frações dadas no enunciado, no entanto, isso não conduz à resolução da tarefa. A dificuldade que previam na realização desta tarefa não era tanto na escolha da representação a usar mas sim na interpretação do enunciado e sobretudo na estratégia para refutar a afirmação dada:

Maria: Não sei. Então como é que eles justificam? . . . Se os miúdos olharem só para isto, se o 2 é maior que o 1, 4 é maior que 3, então, $\frac{2}{4}$ é maior que $\frac{1}{3}$, é isso que queremos provar que não é verdade. Como é que eles vão provar que não é verdade?

Luísa: Com um contraposto, ou seja, um que seja… Que aconteça o contrário!

Depois de alguma indecisão, Luísa sugeriu que a estratégia seria encontrar uma situação onde a afirmação não se verificasse ("contraposto"). As professoras ficaram confundidas e acharam que seria demasiado complicado para os alunos e reafirmaram que eles não conseguiriam resolver a tarefa. Contudo, as formadoras apresentaram exemplos de resoluções de alunos do 2.º ciclo que conseguiam resolver a tarefa e inclusivamente, apresentaram um exemplo em que estes usaram as frações $\frac{5}{5}$ e $\frac{4}{4}$ (5 é maior do que 4 mas as frações são iguais) para refutar a afirmação.

As professoras não tinham pensado no caso de usar frações com numerador e denominador iguais e Maria ficou entusiasmada com esta hipótese:

Maria: Ah! Mas essa é melhor porque essa são iguais . . . Essa foi boa, sim senhor . . . Apesar do 5 ser maior que o 4 e… O resultado é igual. E portanto é um contraexemplo, sim senhor. E é muito mais fácil do que andar à procura de outras. Os alunos são muito inteligentes!

Este episódio evidencia a falta de familiaridade das professoras com tarefas envolvendo processos de raciocínio um pouco mais elaborados e, talvez por isso, associaram estas tarefas a algo muito difícil que os alunos não conseguiriam fazer. Contudo, o confronto com casos em que os alunos conseguiram resolver com sucesso essas tarefas, acabou por entusiasmar e envolver as professoras.

Tarefas para promover o raciocínio

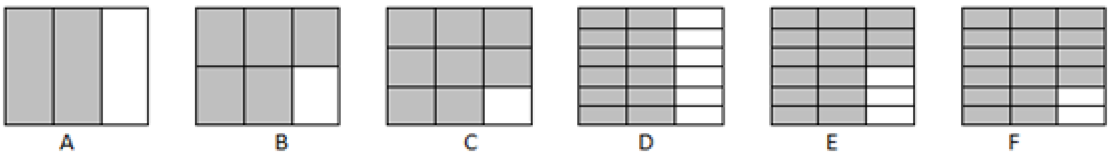
Oportunidades para generalizar. Durante uma discussão sobre os processos de raciocínio dos alunos, na sessão 5, Marisa desafiou as professoras a refletirem sobre generalizações que se podem esperar na comparação e ordenação de números racionais. Teve lugar o seguinte diálogo:

Luísa:	Por acaso houve uma tarefa que eu encontrei num livro que tinha uma generalização. Eles ao longo das várias questões que iam fazendo depois encontravam a generalização da comparação.
Marisa:	A generalização da…?
Luísa:	Por exemplo, entre frações com o mesmo denominador em que aquela que representa o número maior é aquela que tem maior numerador. Portanto era uma questão em que eles começavam por ter várias frações...
. . .	
Tânia:	Para comparar frações com denominadores iguais e com numeradores iguais já são logo duas das que eles têm, e depois as frações unitárias eles também [dão].
. . .	
Luísa:	Em que eles vão observando uma situação que se vai passando sempre e eles começam a perceber que aquilo é assim para todos os casos, não é?

Perante este desafio, as professoras identificaram possibilidades de generalização recordando tarefas que já tinham visto. Luísa reconheceu que se tratava de uma generalização de caráter indutivo uma vez que os alunos observam vários casos particulares para fazer a generalização.

Tarefas e raciocínio. A sessão 6 do estudo de aula foi dedicada ao planeamento da aula a observar onde: (i) se resolveu a tarefa em conjunto; (ii) se discutiram as alterações a fazer à tarefa; e (iii) se definiram os objetivos para cada questão. Num segundo momento definiu-se a forma como a tarefa ia ser aplicada em sala de aula. Tendo em conta as discussões das sessões anteriores sobre raciocínio, e por sua própria iniciativa, as professoras elaboraram uma tarefa para a aula a observar (Figuras 4 e 5). Como muitas tarefas de cunho exploratório, esta tarefa inicia-se com questões simples (1.1. e 1.2), que servem de ponto de partida para questões mais desafiantes (2.2. e 2.3 e 3.). É de notar, também, que esta tarefa revela uma preocupação com o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

1- Observa as figuras.



1.1. Escreve frações que representem a parte pintada de cada figura.

A ___ B ___ C ___ D ___ E ___ F___

1.2. Observa as figuras D, E e F.

1.2.1. Ordena as frações representadas por essas figuras (D, E e F) pela ordem decrescente.

a) Repara nos denominadores das frações que ordenaste e completa.

São______________.

b) Repara agora nos numeradores dessas frações e completa.

A fração maior é a que tem ______________________ numerador.

2. O Simão e o Vítor tê jardins iguais. O Simão já limpou $\frac{3}{5}$ do seu jardim e o Vítor $\frac{3}{8}$ do seu.

2.1. Indica qual dos irmãos vai mais adiantado na tarefa, justificando a tua resposta. (podes utilizar palavras, cálculos ou esquemas).

2.2. Que conclusão podes tirar? (Completa)

Dadas duas frações com o mesmo numerador ____

Figura 4 – Tarefa proposta na aula observada – questões 1 e 2.

Com as questões 1.2.1 a) e b) as professoras pretendiam que os alunos generalizassem a regra para comparar frações com e mesmo denominador. Na questão 2 pretendiam que os alunos generalizassem a regra para comparar frações com o mesmo numerador.

Luísa considerou que os alunos não conseguiriam chegar à generalização sozinhos e, por isso, julgava ser necessário encaminhá-los nesse sentido na questão 1.2.1:

Luísa: Acho que aqui é mais facilitar. Numa primeira análise eles conseguirem ordenar frações com o mesmo denominador e perceberem porquê. E depois na segunda questão, que já tem a ver com outro género de ordenação, se calhar aqui deixamos isto um bocadinho em aberto, na segunda questão. E aí eles vão ter mesmo de…

. . .

Maria: É que a "a. 1" e "a. 2", ali do "1.2", era suposto encaminhar para esta conclusão, como é óbvio, ou seja, ali comparámos os denominadores, depois a fração que é maior é a que tem maior numerador e depois era suposto, aqui no "2", fazerem isto já sem

> qualquer rede, não é? Serem eles a procurarem esta resposta depois de terem feito o que está anteriormente já sem serem dirigidos.

Como os alunos não estavam habituados a fazer generalizações, as professoras optaram por deixar a questão 1 mais fechada e dirigida, pensando que isso permitiria depois deixar a questão 2 um pouco mais aberta.

Com as questões 1 e 2, as professoras pretendiam promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos levando-os a generalizar as regras para comparar frações com o mesmo denominador e com o mesmo numerador. Já a questão 3 (Figura 5) tinha como objetivo promover o desenvolvimento do uso de justificações:

3. O Bruno encheu um copo com água. Desse copo, bebeu $\frac{1}{2}$ e pensou:

"Bebi um $\frac{1}{2}$ da água que estava no copo e sobrou $\frac{1}{2}$. Se do copo cheio eu bebesse $\frac{1}{3}$ também sobraria $\frac{1}{3}$?

Como responderias ao Bruno?

Apresenta uma justificação para tua resposta utilizando palavras, cálculos ou esquemas.

Figura 5 – Tarefa proposta na aula observada – questão 3.

Na perspetiva das professoras esta era a questão mais "divertida" da tarefa proposta. A este respeito Maria diz:

> A Luísa é que conhece a turma, mas este problema está no fim por uma razão. Isto é assim, quem conseguir fazer, quem for um bocadinho melhor e chegar lá, vai ter gozo em fazer este, os que ficarem — coitadinhos — aqui nesta parte, pronto, irão ter gozo dadas as frações. Agora, este é o mais giro, para mim é, é o que os obriga a pensar, é o que os obriga a raciocinar, é o que os obriga a comparar os tais $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$ e não sei o quê. Este é um bocadinho para aqueles que são um bocadinho melhores, nós também costumamos fazer os testes e as fichas assim, fica sempre ali um para aqueles que têm mais capacidades.

Maria expressou assim uma conceção amplamente enraizada entre as professoras de que as tarefas mais difíceis e que "obrigam a pensar" são sobretudo para os alunos "que têm mais capacidades".

Na escolha da tarefa e no planeamento da aula verifica-se como as professoras procuram ter em atenção os conceitos discutidos nas sessões anteriores. Assim, ao longo da preparação da aula a observar a tarefa foi-se tornando mais aberta com o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Reflexão pós-aula. Na reflexão sobre a aula observada, realizada na sessão 8, Marisa pediu às professoras que apresentassem os aspetos que consideravam positivos e as dificuldades dos alunos na tarefa. As professoras salientaram com facilidade as principais dificuldades que os alunos que observaram apresentaram na resolução da tarefa. Conseguiram também salientar aspetos interessantes das resoluções dos alunos. Por exemplo, Luísa salientou o facto de ter discutido com os alunos conceitos que não estavam planeados, como a noção de fração equivalente:

> Uma das coisas (mais interessantes) foi mesmo eles terem dado conta das frações equivalentes, pegarem nas representações e conseguirem encontrar frações equivalentes sem ainda saberem o nome, não é? . . . Foi positivo.

Na continuidade, Marisa referiu que a aluna que observou (Berta) foi quem introduziu na discussão a noção de frações equivalentes, apesar de não o ter feito na resolução individual. Assim, para além da representação $\frac{2}{3}$ (a figura estava dividida em 3 partes, estando assinaladas 2) que a generalidade dos alunos registou, esta aluna indicou $\frac{4}{6}$. Fez-se então o visionamento do seguinte diálogo registado no vídeo da aula:

Berta:	No a) eu sei outra.
Professora:	Sabes? Diz lá.
Berta:	Quatro sextos.
Professora:	Quatro sextos… Ora portanto, o a) tínhamos dividido em… A unidade dividida em três partes e temos duas dessas partes pintadas. A Berta diz que esta figura pode ser representada por quatro sextos. Explica lá porquê quatro sextos?
Berta:	Porque se dividirmos a figura ao meio…
Professora:	Ao meio como?
Berta:	Na horizontal… [figura 6]

Figura 6. Justificação de Berta para a representação 4/6.

Professora:	Assim? É isto?
Berta:	Sim. Ficamos com quatro partes pintadas que é o numerador e seis partes onde a figura está dividida.

Comentando a participação de Berta sobre frações equivalentes, Inês aproveitou para salientar a forma como a aluna justificou, de modo muito interessante, o que tinha feito para chegar à fração equivalente:

> Aquela garota… A Berta representou os tais $\frac{4}{6}$, de $\frac{2}{3}$ passou para $\frac{4}{6}$, eu acho que ela explicou realmente de uma maneira muito simples, pondo um traço ao meio e os outros viram que realmente… Muito bem… E fez com que os outros entendessem.

Apesar de achar muito positiva a forma como Luísa aproveitou as intervenções dos alunos para abordar a equivalência de frações e o conceito de unidade, Tânia considerou que o objetivo da aula, a aprendizagem da comparação de frações, não tinha sido verdadeiramente alcançado com a tarefa:

> E a Luísa arranjou ali uma forma de apresentar a fração que é igual à unidade, pedindo também exemplos aos alunos. Apesar de não ter sido o nosso objetivo acho que a aula… Surgiu o conceito e ela soube aproveitar. Acho que aquilo que acabámos por pensar para a . . . Comparação de frações . . . Esta [tarefa] não dá . . . Agora que deu para explorar . . . Quando nós tínhamos esta ficha, tinha uma questão a ver com frações equivalentes e eu e a Francisca a falar, dissemos: "mas eles ainda não deram frações equivalentes, se calhar não faz…" Lembram-se? Não faz muito sentido esta questão e então tirámos isto e andámos aqui às voltas, agora estamos a ver que eles acabaram por ir . . . Portanto, temos de fazer outra ficha ou outro trabalho completamente diferente para a comparação de frações. Para as frações equivalentes acho que há aqui muito trabalho que foi feito e para as frações que são iguais à unidade há muitos conceitos que já foram mexidos.

Nesta reflexão as professoras mostram ter desenvolvido a sua capacidade de apreciar tanto as dificuldades como os desempenhos positivos dos alunos. Mostram, também, valorizar o modo como foi possível tirar partido de oportunidades de aprendizagem que surgiram no decorrer da aula. É de notar que as generalizações pretendidas não surgiram do modo previsto, podendo ter sido compreendidas por alguns alunos mas não por outros, o que levou as professoras a criticar a tarefa usada, assumindo a necessidade da sua reformulação. No entanto, é de assinalar a sua atenção aos processos de raciocínio (generalização e justificação), que proporcionaram interessantes momentos de discussão coletiva na aula observada.

Conclusão

Os episódios analisados mostram momentos de reflexão das professoras sobre a natureza das tarefas e os processos de raciocínio dos alunos, cruzando conhecimento da investigação com o conhecimento proveniente da sua própria prática letiva. Através da análise de tarefas, as professoras puderam concluir que o que está escrito no enunciado da tarefa não determina a sua natureza, sendo muito importante saber qual o conhecimento prévio dos alunos. Nota-se que, apesar de não usarem tarefas de exploração com frequência, as professoras valorizam as aprendizagens que os alunos fazem quando realizam este tipo de tarefa, considerando que são mais significativas e duradouras. Nota-se também alguma reserva em relação a tarefas com elevado nível de desafio ou envolvendo processos de raciocínio complexos, como justificação por contraexemplo, considerando que são desajustadas para os seus alunos. Contudo, quando planificam a aula a observar, identificam generalizações que os seus alunos podem fazer envolvendo comparação e ordenação de números racionais. Assim, a tarefa adaptada pelas professoras para a aula observada pretende ser de natureza exploratória e prevê a generalização das regras para comparar frações com o mesmo denominador e com o mesmo numerador.

Este estudo de aula evidencia a importância da reflexão sobre tarefas matemáticas e raciocínio. As professoras tiveram oportunidade para se envolver na realização de tarefas matemáticas e de discutir as características das tarefas que as podem tornar simples exercícios, problemas ou explorações (Ponte, 2005; Skovsmose, 2001), bem como aspetos fundamentais dos processos de raciocínio, como justificação e generalização (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). Antecipar possíveis dificuldades dos alunos na realização de diferentes tipos de tarefa e olhar para o que eles realmente fazem em sala de aula (como aconteceu na aula observada) são aspetos essenciais do estudo de aula (Alston, Pedrick, Morris, & Basu, 2011). Estes aspetos levaram as professoras a envolver-se fortemente nesta formação e conduziram-nas a refletir e considerar elementos da abordagem exploratória na sua prática letiva como o uso de tarefas mais desafiantes, a realização de momentos de discussão coletiva e a criação de oportunidades para promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos através de generalizações e justificações. Verificamos, assim, que o estudo de aula, combinando momentos de trabalho estruturado e de trabalho exploratório dos professores e conjugando o conhecimento proveniente da investigação com o conhecimento experiencial dos professores, representa um interessante contexto para o seu desenvolvimento profissional sobre questões relacionadas com tarefas e processos de raciocínio no ensino-aprendizagem da Matemática.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de bolsas atribuídas a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013) e a Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências

Alston, A. S., Pedrick, L., Morris, K. P., & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers' close attention to students' mathematical thinking. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 135-151). Dordrecht: Springer.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lewis, C. C., Perry, R. R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 263-283.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano (Materiais de apoio ao professor). Lisboa: DGIDC.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Lin, P.-J., & Tsai, W.-H. (2012). Fifth graders mathematics proofs in classroom contexts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of PME 36* (Vol. 3, pp. 139-146). Taipe: PME.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM*, *33*(4), 123-132.

TAREFAS MATEMÁTICAS NO ENSINO DA ÁLGEBRA

Cátia Rodrigues
Agrupamento de Escolas de São João da Pesqueira
catiamat@gmail.com

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. As tarefas matemáticas desempenham um papel importante na aprendizagem dos alunos, ao contribuírem para o desenvolvimento do seu pensamento matemático. Nesta comunicação procuramos compreender de que forma o conhecimento mobilizado por uma professora na seleção e exploração de tarefas contribui para essa aprendizagem dos alunos, nomeadamente ao nível da justificação e generalização de raciocínios algébricos. A metodologia envolve a observação de aulas e de sessões de trabalho colaborativo com a professora, que são complementadas pela elaboração de notas de campo. Os resultados mostram que a professora mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático na seleção das tarefas e na forma de as explorar em sala de aula, tanto no momento de planificação como na ação em aula. Em particular, na aula, acompanha os alunos e favorece os momentos de apresentação e discussão de ideias matemáticas, desafiando-os a justificarem e generalizarem ideias, aspetos importante do conhecimento da prática letiva.

Palavras-chave: Tarefas matemáticas; Conhecimento didático; Aprendizagem; Álgebra.

Introdução

As tarefas são centrais na aprendizagem da Matemática, na medida em que podem oferecer oportunidade aos alunos de pensarem sobre determinados conceitos e procedimentos, explorarem diversas estratégias de resolução, relacionarem ideias e justificarem raciocínios (NCTM, 1991; Chapman, 2013). Os ambientes de aprendizagem em que os alunos trabalham com tarefas matemáticas, de modo autónomo, apresentam e discutem as suas estratégias de resolução, em grande grupo, são cada vez mais comuns no nosso país, em consequência da introdução do Programa de Matemática de 2007.

O professor, quando propõe uma tarefa aos seus alunos, tem como objetivo levá-los a envolverem-se na sua resolução e a partir dela promover aprendizagens no âmbito dos tópicos matemáticos e das capacidades transversais. Assim, é fundamental uma escolha criteriosa das tarefas a apresentar aos alunos e uma exploração eficaz em sala de aula, que inclui a definição do modo de trabalho dos alunos, os materiais a disponibilizar e a criação de oportunidades de apresentação, discussão e sistematização de ideias (Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). As tarefas são, assim, ferramentas mediadoras do ensino e aprendizagem da Matemática (Watson et al., 2013). O conhecimento do professor é determinante na escolha e forma de acompanhamento da tarefa em sala de aula, já que pode propor uma tarefa muito interessante aos seus alunos, mas se esta não for bem explorada em sala de aula, as suas potencialidades podem ser diminuídas e traduzir-se em experiências matemáticas pouco ricas para os alunos.

Nesta comunicação apresentamos três tarefas matemáticas, relacionadas com o tema da Álgebra, realizadas numa turma de 7.º ano, procurando compreender de que forma o conhecimento mobilizado pela professora na forma como seleciona e explora as tarefas contribui para aprendizagem dos seus alunos, nomeadamente ao nível da justificação e generalização de raciocínios algébricos. Este estudo faz parte de um trabalho de investigação mais amplo que procura compreender como é que um conjunto de três professores de Matemática do 3.º ciclo mobiliza e desenvolve o seu conhecimento didático na preparação, condução e reflexão de discussões matemáticas no ensino da Álgebra.

Tarefas matemáticas e conhecimento didático do professor

Na aprendizagem da Matemática, em que os alunos têm um papel fundamental na construção do seu conhecimento, as tarefas matemáticas são um elemento central, já que podem favorecer a atividade do aluno e servir de base à promoção de momentos de apresentação e discussão de ideias matemáticas. O ensino que promove esta forma de aprendizagem rompe com a visão tradicional caracterizada pela apresentação da matéria pelo professor seguida da resolução de exercícios pelos alunos, habitualmente de um modo individual, e, posteriormente, por correção no quadro. Atualmente, no nosso país, são cada vez mais os professores que propõem tarefas aos seus alunos para resolverem em pares ou em pequenos grupos. Durante o trabalho autónomo dos alunos, o professor vai observando os diversos grupos, apoiando, esclarecendo dúvidas e lançando questões que levem os alunos a estabelecerem conexões entre diversas ideias. De seguida, o professor incentiva os alunos a apresentarem os seus trabalhos, a justificarem as suas ideias e a argumentarem sobre as dos colegas bem como a sistematizarem as ideias em jogo (Oliveira, et al., 2013; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Em linha com Watson et al. (2013), que entendem as tarefas matemáticas como um conjunto de “coisas a fazer” pelos alunos, neste artigo referimos tarefas matemáticas como tudo que é proposto pelo professor e que tem como objetivo desencadear uma certa atividade por parte do aluno. A atividade do aluno diz respeito ao que ele faz num certo contexto, incluindo, portanto, a realização de diversas ações. Assim, a tarefa é precisamente o objetivo da atividade (Ponte & Serrazina, 2000).

As tarefas matemáticas podem ser analisadas tendo em conta diversos aspetos, nomeadamente o grau de dificuldade (elevado ou reduzido), a natureza (aberta ou fechada) (Ponte, 2005) e o nível cognitivo (baixo ou alto) (Stein & Smith, 1998). Conjugando o grau de dificuldade e a natureza obtêm-se quatro tipos principais de tarefas: exercícios (tarefas fechadas de dificuldade reduzida); problemas (tarefas fechadas de dificuldade elevada); explorações (tarefas abertas de dificuldade reduzida) e investigações (tarefas abertas de dificuldade elevada) (Ponte, 2005). Quanto ao nível cognitivo, as tarefas de baixo nível podem ser de memorização e de procedimentos sem conexão, e as tarefas de alto nível podem ser procedimentos com conexão e fazer matemática. Qualquer tipo de tarefa tem o seu lugar nas aulas de Matemática, já que representam oportunidades diferentes para os alunos pensarem. As tarefas devem ser doseadas pelo professor em função dos objetivos que procura cumprir. Naturalmente, um exercício oferece um tipo de oportunidade diferente de uma investigação, por exemplo.

O professor desempenha um papel importante na escolha das tarefas que vai apresentar aos seus alunos, na medida em que estas devem ser suficientemente interessantes, de forma a envolver os alunos na sua resolução, e devem ser matematicamente válidas, de modo a apelarem à inteligência do aluno, ao desenvolvimento do raciocínio, da comunicação matemática e da resolução de problemas (NCTM, 1991). O professor deve também ter em atenção que tarefas de natureza aberta podem levar os alunos a perderem-se no momento de trabalho autónomo, tarefas muito estruturadas não permitem explorar diversas estratégias de resolução, tarefas de grau de dificuldade reduzido podem levar os alunos a não investirem muito no seu trabalho e tarefas de grau de dificuldade muito elevado podem causar desmotivação. Nesse trabalho de seleção das tarefas a apresentar aos alunos, o professor deve ainda procurar conjugar contextos puramente matemáticos com contextos não matemáticos.

Durante a fase de seleção, Stein e Smith (1998) referem que as tarefas podem passar por três fases: como surgem nos materiais curriculares, como o professor as apresenta aos seus alunos e como são trabalhadas pelos alunos. Todas essas fases influenciam a aprendizagem do aluno, em particular a última. As autoras alertam para uma eventual alteração da natureza da tarefa na passagem de uma fase para as outras.

A forma como o professor planifica e explora as tarefas em sala de aula é, também, decisivo para a aprendizagem do aluno. Assim, é importante que o professor escolha a forma de trabalho dos alunos adequada à tarefa proposta e aos objetivos que pretende atingir; estipule o tempo necessário à resolução da tarefa; esteja atento à fase de trabalho autónomo; e promova uma discussão produtiva em torno da tarefa proposta. Se o professor verificar que os alunos têm dificuldade em iniciar o seu trabalho autónomo, devido à fraca compreensão do enunciado da tarefa ou mesmo à sua complexidade, pode começar por analisar com eles o contexto da situação fazendo, por exemplo, perguntas de interpretação, discutir as ideias matemáticas mais relevantes, desenvolver uma linguagem partilhada para descrever as principais características da situação apresentada, levando os alunos a explicarem determinados termos mas mantendo sempre o nível cognitivo da tarefa (Jackson, Shahan, Gibbons, & Cobb, 2012; Oliveira, et al., 2013). Para manter as tarefas num nível cognitivo elevado, o professor deve, segundo Stein e Smith (1998), dar tempo suficiente aos alunos para as resolverem; apoiar o seu pensamento pedindo justificações, incentivando-os a fazerem conexões; e ter em conta os conhecimentos prévios dos alunos.

Todo o trabalho do professor de seleção e exploração de uma tarefa matemática é apoiado pelo seu conhecimento didático (Ponte, 2011), onde o conhecimento da prática letiva é central, mas que influencia e é influenciado pelo conhecimento do currículo, da Matemática e dos alunos e da aprendizagem. O conhecimento da prática letiva inclui aspetos da gestão curricular como a planificação, as tarefas, o modo de trabalho dos alunos, a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens. O conhecimento da Matemática é entendido como o conhecimento que o professor tem da Matemática enquanto disciplina escolar, incluindo o conhecimento de representações, de conexões, de conceitos e procedimentos. O conhecimento do currículo e dos alunos e da aprendizagem são também importantes na seleção e exploração das tarefas matemáticas, já que é fundamental conhecer bem os documentos curriculares, assim como os seus alunos e as suas formas de pensar para promover uma aprendizagem significativa.

O conhecimento didático do professor influencia todo o processo de seleção e exploração de uma tarefa, na medida em que o professor quando seleciona uma tarefa procura conjugar diversos aspetos, como os objetivos matemáticos que pretende atingir com a mesma, com as experiências que procura propor aos seus alunos e com a natureza da tarefa que melhor se ajusta a esses fins. Depois de selecionada a tarefa, o professor resolve a tarefa e antecipa possíveis respostas dos alunos, pensa na forma de trabalho dos alunos mais adequada à tarefa e no modo como vai organizar a aula, isto é, no tempo que vai dar aos alunos para trabalho autónomo, e no momento de apresentação, discussão de sistematização das ideias dos alunos. Nesse trabalho prévio de resolução e antecipação de estratégias é fundamental o conhecimento que o professor tem da Matemática. Na forma como estrutura a aula, o conhecimento dos alunos e da sua forma de aprendizagem é também importante, articulado com as outras vertentes do conhecimento.

Metodologia

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), na medida em que procuramos compreender de que forma as tarefas selecionadas pela professora e a forma com as explorou com os seus alunos contribuíram para a aprendizagem de ideias algébricas, nomeadamente ao nível da justificação e generalização. A modalidade é o estudo de caso de uma professora, sendo o instrumento de recolha de dados privilegiado a observação participante de aulas e sessões de trabalho colaborativo, apoiada em notas de campo (Bogdan & Biklen, 1994). A análise de dados é baseada na análise de conteúdo, sustentada no quadro teórico de Ponte (2005, 2011) e Stein e Smith (1998).

O estudo apresentado nesta comunicação faz parte de um trabalho de investigação mais amplo em que o dispositivo do estudo envolveu um trabalho colaborativo entre a primeira autora e três professores, que lecionavam os 7.º e 8.º anos de escolaridade e manifestaram disponibilidade para participar no estudo. Essa forma de trabalho revelou-se adequada, na medida em que favoreceu a compreensão das realidades dos professores (Boavida & Ponte, 2002), nesse caso a preparação e condução de discussões matemáticas coletivas para promover a aprendizagem dos alunos. Para a constituição do grupo colaborativo, foi contatado o coordenador do departamento de Matemática do agrupamento de escolas onde decorreu o estudo. Depois de ter sido informado da intenção de realizar um trabalho colaborativo com 3 professores, relacionado com a temática das discussões matemáticas, o coordenador considerou que seria pertinente apresentar a proposta aos professores enquadrada num modelo de ação de formação que envolvesse todos os professores do departamento. Respondendo afirmativamente ao desafio lançado, a investigadora propôs uma ação de formação relacionada com a temática das discussões matemáticas, organizada em 10 sessões de trabalho presencial (com a duração aproximada de 3 horas), com o objetivo de criar dinâmicas de trabalho colaborativo e desenvolver práticas de discussão matemática. A ação de formação decorreu com a participação de 15 professores (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2014). O trabalho realizado nas diversas sessões de formação envolveu, a partir das experiências dos professores, a reflexão sobre textos e episódios de sala de aula relacionados com as discussões matemáticas e com o tema da Álgebra. Contemplou, ainda, a preparação de tarefas matemáticas nesse tema para exploração em sala de aula.

As tarefas selecionadas para esta comunicação emergem do trabalho realizado nas sessões de trabalho colaborativo a partir de propostas da investigadora e tiveram em atenção os seguintes aspetos: adequação ao currículo, promoção do envolvimento dos alunos, possibilidade de recurso a diversas representações para o conceito e distintas estratégias de resolução.

Nesta comunicação analisamos três aulas de uma professora, com ênfase no momento da discussão. Os dados são apoiados nas notas de campo tiradas nas diversas sessões de trabalho colaborativo, ao nível da preparação das tarefas, e a nas aulas da professora, depois de feitas as respetivas transcrições. A professora tem 22 anos de serviço, 21 dos quais na escola onde leciona atualmente. Apesar de a sua escola fazer parte de um grande agrupamento, tem por hábito trabalhar em conjunto com os seus colegas de departamento, sobretudo os que lecionam os mesmos anos de escolaridade, para elaborar planificações (geral e pormenorizada) e preparar materiais como fichas de trabalho, tarefas e testes de avaliação. A professora procura refletir com os seus colegas sobre experiências de sala de aula, nomeadamente, ao nível da exploração de tarefas com os seus alunos.

Resultados

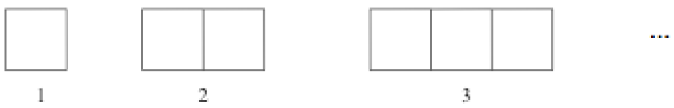
Nesta secção apresentamos três tarefas matemáticas relacionadas com o tema da Álgebra e refletimos sobre o conhecimento didático mobilizado pela professora na escolha das tarefas e na forma como as explora com os seus alunos, de forma a contribuir para a sua aprendizagem. As tarefas são resolvidas pela professora nas sessões de trabalho colaborativo, em conjunto com os seus colegas. Nesse trabalho de preparação, a professora enquadra curricularmente as tarefas, antecipa estratégias de resolução e dificuldades que os alunos podem sentir, pensa em possíveis formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades e define o modo de trabalho mais adequado a cada uma das tarefas.

Tarefa 1: “Palitos”

A tarefa “*Palitos*” (Figura 1), adaptada de Rivera e Becker (2008), é usada pela professora como apresentada pela investigadora, primeira autora deste texto, na sessão de trabalho colaborativo. Depois de analisar e resolver a tarefa, a professora considera que ela se ajusta bem às características dos seus alunos, já que surge numa linguagem compreensível, é de um grau de dificuldade não muito elevado e se enquadra bem no trabalho que faz em sala de aula com os alunos, e é suficientemente interessante para os envolver na sua resolução, sendo relacionada com o tópico das Sequências e Sucessões. Esta tarefa surge num momento em que os alunos já tinham explorada outras tarefas relacionados com esse tópico. Assim, a professora recorre ao conhecimento que tem dos seus alunos e da aprendizagem, da Matemática e do currículo para selecionar a tarefa a apresentar aos seus alunos, de um conjunto de tarefas propostas pela investigadora para o tópico das Sequências e Sucessões.

Tarefa: Palitos

Considera a seguinte sequência de figuras construídas com palitos que continua da forma que a imagem sugere:



1. Quantos palitos terá a 5.ª figura? E a 15.ª?

2. Será possível construir uma figura desta sequência com 76 palitos? Explica como pensaste.

3. Escreve uma regra que te permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica como a obtiveste.

4. A Aurora, que também resolveu esta tarefa, diz que o número de palitos de qualquer figura, T, desta sequência pode ser obtido a partir da seguinte regra:

$$\boldsymbol{T = 4 \times n - (n - 1)}$$

Explica como poderá ter pensado.

Como se relaciona esta regra com a que escreveste na questão número 3?

Figura 15: Tarefa Palitos.

Esta investigação, apresentada num contexto não puramente matemático, tem a particularidade de proporcionar aos alunos oportunidades diferentes de resolução, já que favorece a escrita de diversas expressões para a mesma situação, facto potenciado pelo apoio visual que oferece, muito importante no trabalho com sequências. A primeira e a segunda questão, com um grau de dificuldade menor que as restantes, permitem aos alunos determinar termos (próximo e distante) da sequência de figuras dada e verificar se determinado elemento é ou não termo da sequência. A terceira questão desafia os alunos a escreverem o termo geral e a justificarem a sua escrita, podendo surgir diferentes expressões, dependendo da forma como cada aluno "olha" para a figura. A última questão incentiva os alunos a interpretarem uma possível expressão para o termo geral da sequência dada, relacionando com a expressão que encontraram para a definição do termo geral da sequência. Esta tarefa favorece, também, o uso de diversas estratégias de resolução, nomeadamente a estratégia de tentativa e erro e outras estratégias que recorrem a procedimentos algébricos. Os alunos trabalham nesta tarefa em grupos de quatro elementos.

Apresentamos um pequeno segmento do momento de discussão em grande grupo, onde os alunos tentam atribuir significado à expressão que surge na questão 4, explicando o seu raciocínio, e onde a professora desenvolve um conjunto de ações que têm como objetivo levar os alunos a desenvolverem uma compreensão mais aprofundada das ideias partilhadas.

Vera:	Podia ser. O 4 vezes n é como se fosse o 3 vezes n e depois tiramos 1. É como se fosse 3.
P:	Ela está a tentar um paralelo disto. Isto é parecido com isto. Mas nós ali não tiramos 1.
Aluna:	Somamos. Exato, porque aquilo é 4.
P:	Mas ali tiramos mais coisas.
Aluna:	Tiramos o número da figura menos 1.
P:	Tiramos o número da figura menos 1. Sim. É o que tenta dizer a Vera, que tira o número da figura menos 1 aos múltiplos de 4, não é? (...) Ó pessoal, eu queria que vocês ajudassem e tentássemos pensar nisto olhando para as figuras ao mesmo tempo. É que vocês estão a tentar explicar uma expressão matemática sem olhar para a figura. Será que não conseguimos pensar na figura e ver o que é que aquelas coisas têm a ver com os palitos, com os palitos que lá estão, com as figuras que lá estão? (...) Eu queria ouvir a Clara.
Clara:	Nós quando juntamos os quadrados temos que tirar 1 do meio se não ficam lá dois. (...) o n menos 1 é o número de palitos que se tira do meio.
Sara:	Ela multiplicou os 4 lados de um quadrado.
P:	Os lados do quadrado? (...)
João:	Ela multiplicou a quantidade de palitos que existe num quadrado vezes o número.
Sara:	Exato. O 4 é o número de lados de um quadrado.
P:	Multiplica por quê? Por estes dois. (...) O que é que vamos escrever? Como é que ela pensou?
Sara:	Ela multiplicou o número de lados de um quadrado.
P:	Pelo número da figura. E depois?
Sara:	Tirou os palitos que servem para unir os dois. (...) Multiplicou o número de lados de um quadrado pelo número da figura e tirou-se os palitos que estão sobrepostos.

As primeiras intervenções da professora, embora apoiando o pensamento da aluna, vão no sentido de alertar os alunos para a importância de recorrerem ao apoio visual da sequência apresentada, de modo a interpretarem uma informação apresentada em linguagem simbólica. Simultaneamente, a professora sintetiza as ideias apresentadas, usando os conceitos específicos subjacentes ao raciocínio da aluna. Num segundo momento, a professora procura integrar outras ideias na discussão, incentivando os alunos a ouvir as ideias dos colegas. Deixa que os alunos troquem livremente ideias entre si intervindo, pontualmente, para pedir justificações, sublinhar ideias não corretas do ponto de vista matemático na situação apresentada e incentivar os alunos a sistematizarem ideias. O trabalho nesta tarefa permite aos alunos negociarem ideias e procurarem uma explicação para um raciocínio apresentado por outro, usando linguagem matemática válida. Os alunos compreendem, ainda, a importância de relacionar representações, nomeadamente a simbólica com a gráfica.

A atuação da professora é apoiada no seu conhecimento didático, em particular da prática letiva, já que esta define o modo de trabalho adequado à resolução da tarefa e acompanha as ideias dos alunos, pedindo justificações e levando-os a estabelecerem conexões entre a informação apresentada visualmente e em linguagem matemática. Nesse trabalho, os alunos são incentivados a usarem linguagem correta e clara.

Tarefa 2: "Inscrição no ginásio"

A tarefa de exploração "*Inscrição no ginásio*" (Figura 2), que parte de um contexto familiar a alguns alunos, tem como objetivo explorar situações que envolvem relações de proporcionalidade direta, incentivando-os à escrita de uma expressão que traduza essa relação. É apresentada aos alunos, depois de feitas algumas adaptações à proposta inicial da investigadora. Nessa adequação à turma, a professora procura que as questões fossem apresentadas de um modo mais estruturado e sequencial (do que a proposta inicial) em termos de nível de exigência, para que os alunos estabelecessem mais facilmente as conclusões pretendidas, já que a proposta inicial era mais desafiante e começava com uma questão mais aberta (Explica que ginásio deve escolher o Santiago), seguida de questões mais fechadas. A professora procura que esta tarefa não se afaste muito do tipo de tarefas com que os alunos trabalham habitualmente, procurando assim que os pedidos feitos aos alunos sejam direcionados para as conclusões que se pretendem tirar. No momento em que esta tarefa é apresentada aos alunos eles já tinham explorado outras relacionadas com o mesmo objetivo.

O Santiago pretende inscrever-se num dos dois ginásios ***100 calorias*** ou ***Em forma*** que existem na sua cidade. Os preços praticados são os seguintes:

100 Calorias — Inscrição: 50 € — Mensalidade: 40 €

Em Forma — Inscrição: Gratuita — Mensalidade: 45 €

1. Completa a tabela, tendo em conta o número de meses e os dois tipos de preços referentes a cada ginásio.

	meses	1	3		8		11	12
Total (em euros)	***100 calorias***			210				
	Em forma					450		

2. Representa, no mesmo referencial, os gráficos correspondentes à evolução do preço a pagar em cada um dos ginásios, nos primeiros 6 meses.

3. Durante quanto tempo será vantajosa a inscrição no ginásio *Em forma*? Justifica.

4. Escreve uma expressão analítica que te dê o preço a pagar em cada um dos ginásios, de acordo com o tempo de frequência.

Figura 16: Tarefa Inscrição no ginásio.

O nível cognitivo da tarefa muda da fase como é apresentada pela investigadora para a fase como a tarefa é apresentada aos alunos. Essa mudança é motivada pelo conhecimento didático da professora, em particular do conhecimento que tem dos seus alunos e da aprendizagem, na medida em que propõe uma tarefa aos alunos com um grau de dificuldade crescente, favorável ao envolvimento dos alunos na tarefa e ao estabelecimento das conclusões a tirar. A tarefa apresentada aos alunos apela ao trabalho com diversas representações, nomeadamente, tabela, gráfico e expressão algébrica. Tem, também, a particularidade de levar os alunos a analisar propostas de dois ginásios, escolhendo a mais vantajosa.

Apresentamos, de seguida, um episódio do momento de discussão em grande grupo (relativo às questões 1 e 2), depois da tarefa ter sido resolvida pelos alunos em grupos de quatro elementos.

P: Alguém do grupo do Diego quer explicar como é que pensou para fazer o preenchimento da tabela?

Íris: Ali é. No *100 Calorias* no primeiro mês foi a inscrição mais a mensalidade e no *Em Forma* foi só a mensalidade, porque a inscrição é gratuita.

P: Hã, hã.

Íris: Nos 3 meses foi acrescentar 80 euros aos 90, porque são as duas mensalidades e no *Em Forma* foi acrescentar 2 mensalidades. Depois para descobrirmos que eram 4 meses tínhamos que ver de 170 para 210 quanto é que ia e ia uma mensalidade, então é porque era o mês a seguir.

P: Hã, hã.

Íris: E fizemos o mesmo em baixo. E depois nos 8 fomos acrescentando até chegar lá.

P: (...) Alguém dos outros grupos pensou de maneira diferente?(...)

Tomás: Nós até aos 4 meses fizemos tal e qual como a Íris disse, nos *100 Calorias* aos 8 meses também. No *Em Forma*, dos 4 meses para os 8, como a mensalidade era gratuita fizemos vezes 2. Pronto.

P: Duplicaram apenas?

Tomás: Foi mais rápido assim.

P: (...) O Tomás está aqui a dizer que para passar dos 4 meses para os 8 pode duplicar no ginásio *Em Forma*, mas não pode fazer o dobro no *100 Calorias*, mas tenho ideia que o grupo ali da frente duplicou.

Vicente: Duplicámos. (...) Mas depois subtraímos os 50.

P: Será que pensou bem? (...)

I: Vocês disseram que no décimo mês as bolinhas e as cruzinhas, ou quem usou cores diferentes, iam ficar sobrepostas e a partir do décimo mês o que iria acontecer?

Íris: O do *Em Forma* passava o preço do *100 Calorias*.

I: Porquê? Até lá o que é que aconteceu?

Íris: Era sempre mais barato, porque não tínhamos pago a inscrição.

I: (...) E a partir do décimo mês?

Íris:	Porque como as mensalidades, o *Em Forma* tem uma mensalidade maior do que o *100 Calorias*, aos 10 meses ficavam iguais, então contávamos só as mensalidades e como o *Em Forma* tem uma mensalidade mais cara, ficava mais caro. (...) Porque a diferença entre as duas mensalidades são 5 euros e com 10 meses a diferença passa a 50 que é a inscrição. (...)
I:	Se eu tivesse que me inscrever num ginásio, por qual dos ginásio devia optar?
Vários:	Depende.
Íris:	Depende do tempo que lá ia estar.
Íris:	Se fosse muito tempo era o *100 Calorias*, se for até 10 meses é o *Em Forma*.

Esta tarefa de exploração proporciona um momento rico de partilha e justificação de ideias entre os alunos. As intervenções da professora evidenciam que estava a acompanhar as ideias dos alunos, com manifestações de concordância, a pedir a introdução de novas ideias na discussão e a solicitar justificações. Os alunos acompanham as ideias dos colegas e introduzem ideias novas na discussão.

Na questão 1 é notório o envolvimento dos alunos na apresentação e justificação dos seus processos de resolução para preenchimento da tabela. Os alunos justificam as suas ideias de uma forma clara e coerente, sem necessidade da professora solicitar essas justificações. Ao convite da professora para apresentação de outro processo de resolução, os alunos mostram estar a acompanhar a partilha de ideias, mostrando ideias novas e comparando com as anteriormente apresentadas. O raciocínio do Tomás traduz o uso intuitivo de uma relação de proporcionalidade direta, enquanto o raciocínio da Íris se apoia num processo recursivo de ir adicionando uma certa quantidade (valor da mensalidade). Em consequência da apresentação do raciocínio do Tomás, e por provocação da professora, o Vicente consegue apresentar a alteração que tinha que ser feita a essa ideia para aplicação em situações que não traduzem relações de proporcionalidade direta (caso do ginásio *100 Calorias*).

A apresentação e discussão da questão 2 permite aos alunos evoluir nas suas ideias iniciais, comparando as duas situações e procurando uma justificação válida para a diferença dos valores pagos nos dois ginásios, relacionando o valor pago a mais na mensalidade mais cara com o valor da inscrição do ginásio que apresenta a mensalidade mais barata. Essa discussão favorece a tomada de decisões argumentadas e a conclusão que a escolha do ginásio depende do tempo de permanência, quando os alunos são desafiados a decidir pelo melhor ginásio em termos de gastos.

A natureza da tarefa e a forma como é explorada parece ter contribuído para o envolvimento dos alunos e para o estabelecimento de diversas conclusões, através da análise de diversas representações matemáticas.

Tarefa 3: “A cantina da escola”

O problema “*A cantina da escola*” (Figura 3) é apresentado aos alunos, com o objetivo de trabalhar a resolução de equações. A situação proposta aos alunos envolve um contexto não puramente matemático e desafia os alunos a traduzirem a informação apresentada de linguagem natural para linguagem matemática.

A tarefa apresentada aos alunos é adaptada de uma proposta da investigadora numa sessão de formação. Essa opção da professora tem em conta, mais uma vez, as características dos seus alunos e da sua aprendizagem, já que a turma tem alunos com ritmos de aprendizagem diferentes e estavam a iniciar o estudo deste conteúdo. Ao procurar tornar a informação mais acessível aos alunos, pretende que eles se envolvam na sua resolução, fazendo surgir diversas estratégias de resolução, em particular a estratégia de tentativa e erro e a tradução por meio de uma equação. Ao nível da resolução algébrica, a tarefa proposta potencia o aparecimento de diversas designações para a incógnita. Nesse processo de adaptação da tarefa, a professora apoia-se no seu conhecimento didático, nomeadamente da Matemática, dos alunos e da aprendizagem, já que procura que seja uma tarefa que possa ser resolvida por todos os alunos, mesmo os que têm mais dificuldade já que admite a possibilidade de recurso a diversas estratégias de resolução, em particular a estratégia de tentativa e erro ou de recurso a uma tabela para alunos com mais dificuldades, e de tradução por meio de uma equação para alunos que se sentem mais confiantes no trabalho em Matemática.

No final de cada semana, e de forma a preparar a próxima, a responsável pela cantina dá indicação aos serviços da *Escola Azul* do número de alunos que almoçaram na cantina, durante essa semana. Na informação enviada aos serviços pode ler-se:

Na terça-feira a cantina serviu mais 100 almoços do que na segunda, na quarta-feira metade dos almoços servidos na terça, na quinta-feira o dobro dos almoços servidos na segunda e na sexta serviu 156 almoços.

Quantos almoços serviu a cantina da escola em cada um dos dias, durante essa semana? Explica como pensaste.

Figura 17: A cantina da escola.

Apresentamos, de seguida, uma parte da discussão em grande grupo, depois dos alunos terem resolvido o problema em grupos de quatro alunos. Durante a monitorização do trabalho autónomo dos alunos a professora não dá demasiadas pistas, de forma a manter o nível cognitivo da tarefa.

Íris: Nós ao contrário daquele grupo, nós pensámos em vez de pôr a segunda como o x, nós pusemos a terça. Porque nós primeiro vimos que na quarta-feira íamos precisar dos da terça (..). Então ficou: x menos 100, porque a terça-feira vai ter mais 100, logo a segunda tem menos 100 do que a terça; mais x.

P:	Ela já está a escrever a equação. Não queres organizar como eles? Para quem está a ver era mais fácil. (...) Olha a Maria.
Maria:	Eu não percebo por que é que na segunda é x menos 100.
P:	Então explica lá outra vez Íris.
Íris:	Isto é uma questão de tu leres: tanto pode ter a terça-feira mais 100 almoços que a segunda, do que a segunda ter menos 100 almoços do que a terça. Não é? É a mesma coisa.
P:	Vocês há bocado puseram x na segunda, portanto a terça é x mais 100.
Íris:	Olha vou-te só explicar isto: tanto isto tem mais 100 do que isto, como isto tem menos 100 do que isto.
P:	Sim? Está? Portanto, ela aqui tirou. Se esta aqui é a base dela, aquele tem que ter menos 100. Está bem? Agora fez tudo a partir deste. Metade da terça, o dobro da segunda e o 156. Pronto e agora constrói a equação e depois resolve uma equação idêntica à outra, está bem? É parecido.
Guilherme:	Idêntica, mas diferente.
P:	Hã? Idêntica, mas diferente. Reparem, o que é que está diferente? Tem um denominador e tem parêntesis, que a outra não tinha.
I:	Achas que o x vai dar o mesmo resultado? Sem resolvermos.
Guilherme:	Não.
I:	Porquê?
Guilherme:	Porque ali o x é da terça-feira e ali é da segunda.
I:	E a resposta ao problema vai ser a mesma?
Guilherme:	Vai.
P:	É? Então o que é que tu achas, de acordo com o resultado que ali está, o que é que vai ter que dar o nosso x?
Guilherme:	180.
P:	Pronto. Foi isso que aconteceu. Foi isso que aconteceu. Muito bem. Pronto, vêm que a Íris está a fazer exatamente o que foi feito no outro grupo. Está agora a juntar a segunda, com a terça, com a quarta, com a quinta e com a sexta. Pronto, e depois de tudo feito.
Tiago:	Vai dar 180.

De forma a manter os alunos envolvidos na discussão, na sua primeira intervenção, a professora sugere à aluna que organize a informação que está a partilhar com os colegas, de modo a que todos acompanhem o seu raciocínio. A professora favorece a troca de ideias entre a aluna que está a apresentar a sua estratégia de resolução e a turma, dando-lhe oportunidade para esclarecer a dúvida de uma colega. Por fim, sintetiza a informação, para que fique claro para todos e para acompanharem as ideias seguintes, sem se alhearem do trabalho.

Com esta tarefa, os alunos apercebem-se que a mesma situação pode ser traduzida de formas diferentes, dependendo do que designa a incógnita. Nesses casos, a solução da equação também é diferente, mas a solução do problema é a mesma. Os alunos, sem resolverem a equação, conseguem antecipar o conjunto-solução para a equação escrita, atendendo à conclusão que já tinham tirado. A tarefa apresentada permite aos alunos ampliar o seu pensamento, relacionando ideias e concluindo que o mesmo problema pode ser traduzido por diferentes equações, que originam, consequentemente, soluções diferentes, mas a mesma resposta ao problema.

Durante a exploração da tarefa, os alunos são incentivados a justificarem os seus raciocínios e a desenvolverem uma melhor compreensão das ideias que estão em jogo. A forma como a professora acompanha as ideias dos alunos é apoiada pelo seu conhecimento da prática letiva e dos alunos e da aprendizagem, já que vai procurando incentivar os alunos a avançarem nas suas ideias iniciais, a justificá-las e a generalizarem.

Considerações finais

As tarefas apresentadas aos alunos contribuíram para o desenvolvimento do seu pensamento matemático, ao favorecerem a partilha e a justificação de ideias, depois de uma fase de envolvimento na resolução, em grupos de quatro elementos, à semelhança do estudo de Ponte, Mata-Pereira, Henriques e Quaresma (2013). Com o trabalho nas tarefas, os alunos tiveram oportunidade de relacionar diversas representações matemáticas, tomar decisões (*Tarefa 2*), compreender que uma mesma situação pode ser traduzida por equações diferentes e antecipar respostas (*Tarefa 3*). A tarefa *"Palitos"*, ao proporcionar aos alunos o trabalho com sequências pictóricas, potencia a escrita, com compreensão, de diversas expressões algébricas para a sequência dada.

Estas tarefas, que envolvem contextos não puramente matemáticos, contemplam questões de diversos tipos proporcionando diferentes oportunidades de aprendizagem aos alunos, como a análise e escrita de expressões, a interpretação e tradução de informação de diversas formas, e a possibilidade de admitir diferentes estratégias de resolução e de lidar com várias representações. Desta forma, as tarefas contribuíram para ajudar os alunos a atingir diversos objetivos de aprendizagem relativos a ideias algébricas, em particular no tópico das Sequências e Sucessões, Funções e Equações e a interagirem entre si, com a professora a desempenhar o papel de mediadora das interações, promovendo o pensamento dos alunos. A natureza das tarefas também foi diversificada, oferecendo oportunidades diferentes aos alunos. De facto, com a tarefa *1* (investigação) os alunos tiveram oportunidade de escrever expressões para o termo geral de uma dada sequência e analisar expressões dadas, envolvendo-se num trabalho com um grau de dificuldade superior ao da tarefa 2. Com a tarefa *2* (exploração), os alunos trabalham com diversas representações – tabela, gráfico e expressão analítica. Com o problema da tarefa *3*, os alunos traduzem informação dada de linguagem natural para linguagem matemática e resolvem um problema que admite diversas estratégias de resolução. A escolha destas tarefas é apoiada no conhecimento didático da professora, já que tem o cuidado de proporcionar aprendizagens diversificadas aos seus alunos.

As tarefas, desde que são propostas pela investigadora até chegarem aos alunos, passam por diferentes fases, com exceção da tarefa *1*. As tarefas *2* e *3* são adaptadas pela professora às características dos seus alunos e à sua forma de aprendizagem, proporcionando um trabalho mais orientado e com um grau de desafio crescente, de forma a envolver todos os alunos na sua resolução, através de informação acessível à maior parte da turma. As tarefas *2* e *3* passam assim por duas fases do quadro teórico proposto por Stein e Smith (1998), enquanto a tarefa 1 é apresentada aos alunos como sugerida pela investigadora.

Na seleção das tarefas e na forma como as explora em sala de aula com os seus alunos, a professora mobiliza diversos aspetos do seu conhecimento didático, já que resolve as tarefas antes de as apresentar aos seus alunos, apoiando-se no seu conhecimento matemático, enquadra-as curricularmente e define a forma de trabalho mais adequada à respetiva resolução. Em sala de aula, acompanha o trabalho dos alunos e proporciona momentos de apresentação e discussão de ideias, levando-os a justificarem e generalizarem ideias, aspetos importante do conhecimento da prática letiva. As tarefas são adaptadas pela professora tendo em conta o trabalho que desenvolve com os seus alunos, nomeadamente com as tarefas que habitualmente lhes propõe, com o conhecimento que possui dos seus alunos, relativamente às suas dificuldades e ritmos diferentes de aprendizagem e com os objetivos que pretende atingir com aquela aula. A professora seleciona tarefas que oferecem oportunidades diferentes de aprendizagem aos alunos, na medida em que favorecem o trabalho com diversas representações, apelam ao raciocínio e à justificação de ideias. A partilha e justificação de ideias são aspetos muito valorizados pela professora durante o momento de apresentação e discussão das estratégias de resolução.

É importante continuar a estudar as implicações das tarefas apresentadas aos alunos na sua aprendizagem, tendo em conta a forma como são selecionadas e exploradas pelo professor. Na verdade, o professor pode selecionar tarefas matematicamente válidas para os seus alunos, mas se não forem bem conduzidas em sala de aula, de forma a contemplar o envolvimento dos alunos e a implicá-los na apresentação e discussão de ideias, traduzem-se em aprendizagens pouco significativas para eles.

Referências

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 1-6.

Jackson, K. J., Shahan, E. C., Gibbons, L. K., & Cobb, P. A. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18 (1), 24-29.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante*, 2, 29-54.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2011). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matematica: Teoría, critica y prática*. Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Henriques, A. C., & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study* 22 (pp 9-15). (Vol. 1). Oxford.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65–82.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Práticas de discussão matemática no ensino da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.), Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática (pp 65–78). Braga: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268-275.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., et al. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study* 22 (pp 9-15). (Vol. 1). Oxford.

Pósteres

EXPLORANDO O USO DO TINKERPLOTS ENTRE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS[17]

Maria Niedja Martins
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
marianiedjamartins@campus.ul.pt

Jessica Melo
Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco
jessica.albuquerque60@gmail.com

Carlos Monteiro
Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco
carlos.monteiro@campus.ul.pt

Carolina Carvalho
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
cfcarvalho@ie.ulisboa.pt

Resumo: Esta pesquisa explorou uma situação de formação continuada de professores sobre o ensino de Estatística utilizando diferentes recursos. Analisamos a compreensão dos professores sobre o conteúdo estatístico das tarefas e identificamos suas reflexões sobre tarefas que utilizam o *TinkerPlots*. Os participantes foram quatro professores de uma escola pública de Pernambuco, Brasil. Realizamos entrevistas e duas tarefas com e sem o uso do *software*. Os resultados apontam para reflexões sobre o tempo decorrido, a quantidade de dados manipulados e realização de cálculos.

Palavras-chave: Educação Matemática, Educação Estatística, *Software TinkerPlots*, Formação de professores.

Introdução

Um importante desafio para os professores que ensinam Matemática e Estatística na atualidade, é a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), sobretudo o uso de computadores e *software* voltados para o ensino da Estatística. Ainley (1995) sugere que o foco principal de tarefas com uso de computador deve estar nos processos de interpretação.

Martins, Monteiro e Queiroz (2013) discutem as mudanças na compreensão de uma professora sobre o tamanho e a representatividade de amostras, ao manipular e interpretar dados no *TinkerPlots*. As análises indicaram que a manipulação de amostras crescentes

[17]Pesquisa financiada pelo CNPq e CAPES do governo federal brasileiro.

permitiu a identificação de tamanhos e vieses em amostras, por meio de simulações e visualização de gráficos.

Nesta comunicação em cartaz, nós discutimos a exploração de situações potencialmente interessantes para a formação de professores, nas quais os docentes pudessem refletir sobre seus conhecimentos de Estatística, sobre análise de dados e situações de ensino de Estatística.

Metodologia

A pesquisa seguiu uma metodologia qualitativa e interpretativa de caráter exploratório e ocorreu numa escola da Rede Estadual escolhida com base num levantamento realizado previamente (Carvalho & Monteiro, 2012). Participaram quatro professores: Jane, Maria, Ricardo e Sílvia. A recolha dos dados aconteceu em três sessões: 1ª) entrevista semi-estruturada; 2ª) tarefa 1 registrada em vídeo; 3ª) familiarização e tarefa 2 registrada pelo *Camtasia 7.1*.

A tarefa 1 e 2 relacionavam-se com a história de um piscicultor que comprou peixes *geneticamente modificados* com a promessa de que eles alcançariam tamanhos maiores do que os peixes *normais*. O piscicultor teria colocado em um tanque 625 peixes dos dois tipos. Depois dos peixes crescerem, selecionou aleatoriamente alguns dos peixes e os mediu. A questão a ser respondida na tarefa era: *quais os peixes que assumiram um comprimento maior, os normais ou os geneticamente modificados?*

Na 2ª sessão os professores resolveram a tarefa 1 utilizando peixes de papel e uma representação no quadro. Na 3ª sessão eles trabalharam em duplas: Ricardo/Maria e Jane/Sílvia para resolver o mesmo problema com o *TinkerPlots*.

Resultados da tarefa 2

Na primeira amostra retirada pela dupla Maria/Ricardo, eles conseguiram determinar que grupo apresentava comprimento maior observando a tendência e os pontos na escala do gráfico, conforme revela o diálogo e a Figura 1:

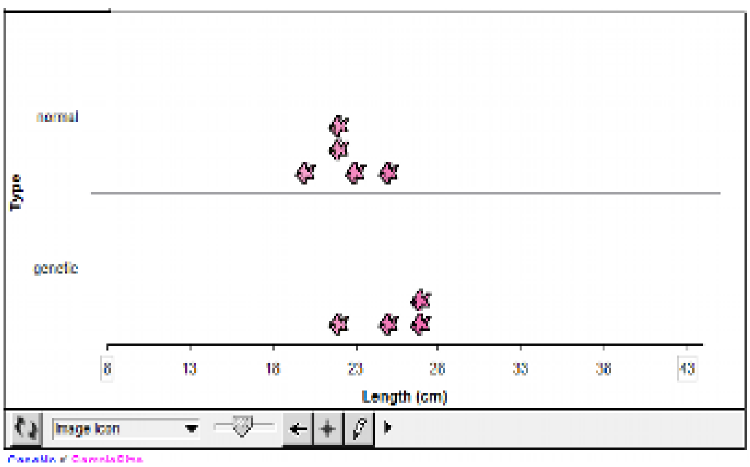


Figura 1: Representação de uma amostra com 9 peixes oferecida pela dupla Maria/Ricardo no *TinkerPlots*.

Investigadora: No total ele tinha 625 peixes, mas se olharmos para esse gráfico, vocês poderiam me dizer se são os peixes geneticamente modificados ou são os normais que são maiores em comprimento?

Ricardo: São os genéticos [geneticamente modificados].

Maria: É!

I: Porque são os genéticos?

R: Porque eles chegam mais ou menos a 28 centímetros, enquanto os normais não. A média é entre 19 e 24.

I: Por quê? Como é que tu estás vendo a média?

R: A média não é onde está os maiores? No caso... Ah! Sei não!

M: Sei não!

I: Mas eu num mostrei onde está a média! Pegue a média que ela vai dizer [Eles seguem o comando]. Aí ele indicou o local, né? Pronto! [...] Quais seriam os maiores?

R: Os genéticos.

Os docentes fizeram uso da ferramenta *Average* apenas quando orientados pela pesquisadora. Notamos, nesse fragmento que o conceito de média não era muito claro para os participantes. Apesar disso, eles conseguiram realizar inferências por meio da interpretação dos dados. Os participantes fizeram referência a disposições das ferramentas do *software* que lhes ajudaram a organizar os dados e averiguar suas hipóteses.

Considerações finais

Os professores conseguiram realizar leituras dos dados, manipular amostras crescentes e realizar inferências baseadas nas análises de diferentes amostras de uma mesma população. O engajamento dos professores em situações de manipulação de dados com e sem um *software* favoreceu reflexões sobre tarefas estatísticas nos contextos escolares.

Referências

Ainley, J. (1995). Re-viewing graphing: Traditional and intuitive. *For the Learning of Mathematics, 15*(2), 10-16.

Carvalho, L. & Monteiro, C. (2012). Reflexões sobre implementação e uso de laboratório de informática na escola pública. *Roteiro (UNOESC)*, 37, p.343- 360.

Martins, M. N. P., Monteiro, C. E. F., Queiroz, T. N. (2013). Compreensões sobre amostra ao manipular dados no software TinkerPlots: um caso de uma professora polivalente *Revista Eletrônica de Educação,* 7(2), 317-342.

DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA OS NÚMEROS DECIMAIS: UM ESTUDO COM ALUNOS BRASILEIROS

Flávia Cheroni da Silva Brita
Rede Pública de Ensino do Paraná-Brasil
flavia_cheroni@hotmail.com

Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá-Brasil
vsfranco@uem.br

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná-Brasil
rezendeveridiana@gmail.com

Resumo: Esta pesquisa tem o objetivo de investigar a compreensão dos números decimais de uma turma de 20 alunos brasileiros do 6º ano (11 anos) de uma escola pública, no contexto da implementação de uma sequência de tarefas especialmente elaboradas. Constatou-se que a atividade desenvolvida pelos alunos a partir dessas tarefas favoreceu a coordenação de diferentes registros de representação semiótica, auxiliando a aprendizagem do conceito de número decimal, no sentido de Duval.

Palavras:chave: Educação Matemática; Números Decimais; Representações.

Desenvolvimento da pesquisa

O objetivo desta pesquisa é investigar a compreensão do conceito de número decimal por alunos brasileiros do 6º ano do Ensino Fundamental (11 anos), no contexto da implementação de tarefas que favorecem a articulação entre diferentes registros de representação semiótica, segundo Duval (2009).

Os registros de representação semiótica é o termo utilizado por Duval, que indica diferentes tipos de representação como, por exemplo, a língua natural, escrita algébrica, figuras, tabelas ou gráficos. Um registro é denominado semiótico quando permite: a) a formação de uma representação identificável; b) o tratamento das representações, que consiste em transformar uma representação inicial em outra, obedecendo as regras existentes dentro do próprio registro, e c) a conversão de representações, que significa transformar uma representação de um registro em outro registro, conservando os mesmos objetos denotados. Segundo Duval (2009, p. 15), "a compreensão em matemática supõe a coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas", daí a importância de os alunos poderem trabalhar com representações diversas.

Esta pesquisa assume a metodologia de estudo de caso exploratório de uma turma de 6.º ano, constituída por 20 alunos, em que a professora, também pesquisadora (primeira autora), propõe aos alunos uma sequência de cinco tarefas, uma por semana. As tarefas tinham o propósito de favorecer a coordenação entre diferentes registros dos números decimais, nos registros fracionários, decimais, figural (contínuo ou discreto), com materiais manipuláveis, bem como a língua natural.

As tarefas foram construídas para atender os seguintes objetivos:

- Interpretar problemas do cotidiano envolvendo números decimais;
- Identificar um número decimal por meio de diferentes representações;
- Realizar operação de subtração com números decimais por meio de diferentes registros.

As noções matemáticas que foram exploradas nas cinco tarefas foram: números racionais, números decimais, comparação entre números na representação decimal, retas numéricas, porcentagem, o sistema monetário e operações com números na representação decimal e com fração decimal.

As tarefas foram elaboradas segundo uma sequência tal que o aluno necessitasse dos conhecimentos da tarefa anterior para realização da que estava a fazer, o que favoreceu: diagnosticar a aprendizagem dos participantes da pesquisa; analisar a articulação pelos alunos dos diferentes registros relacionados com os números decimais e identificar as dificuldades dos alunos em relação a esse conteúdo.

Dessa forma, foi possível concluir que as tarefas favoreceram à coordenação entre diferentes registros de representação dos números decimais e, portanto, de acordo com o referencial teórico, favoreceram a aprendizagem desse conceito por parte dos alunos.

Referências

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (L. F. Levy e M. R. A. Silveira, Trad.). São Paulo: Editora Livraria da Física.

A COMPLEXIDADE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO E A QUALIDADE DAS APRENDIZAGENS: A ESCRITA COMO TAREFA MATEMÁTICA[18]

Fernando Luís Santos e
Escola Superior de Educação Jean Piaget, Instituto Piaget, Almada
fernando.santos@almada.ipiaget.pt

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Unidade de Investigação em Educação e Desenvolvimento (UIED), Portugal
amdd@fct.unl.pt

Resumo: Propomos um modelo de análise para as respostas dos alunos, sustentado nas teorizações de Tall sobre o pensamento matemático, na taxonomia SOLO e no modelo da teoria da atividade de Engeström que conduz à conjetura que o pensamento matemático pode ser visto de duas formas diferentes: de forma processual, como um processo memorizado e/ou um procedimento, e de forma proceptual. Neste poster o modelo de análise é utilizado para analisar respostas a uma tarefa de simplificação de expressões numéricas.

Palavras chave: Teoria da atividade, qualidade das aprendizagens, pensamento matemático, Taxonomia SOLO.

Enquadramento

A integração da escrita nas tarefas matemáticas permite que a comunicação matemática seja útil não só para os alunos, potenciando a sua compreensão sobre o tópico abordado, mas também para o professor, que analisa mais do que somente o algoritmo de resolução, permitindo clarificar o pensamento matemático envolvido na resposta. Um dos objetivos das tarefas de integração da escrita na aula de matemática prende-se com a necessidade de os alunos de formação inicial de professores conseguirem orquestrar o seu conhecimento matemático para além do pensamento processual, aferindo desta forma a sua capacidade de efetuar ligações de alto nível.

Nas dualidades existentes entre *processo* (visto como atividade, processo de resolução) e *procedimento* (visto como a aplicação de um algoritmo para a implementação de um processo), existe ainda outra relação entre o *procedimento* e o *conceito* (visto como o que saber) sustentado numa rede de conhecimentos e suas ligações. De forma a evitar ambiguidades existentes nestas dualidades, Gray e Tall (1994) utilizam a ideia de *proceito*

18 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Promover o Sucesso em Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

como um conjunto de três componentes (processo, objeto e símbolo), "...um *processo* que produz um *objeto* matemático, e um *símbolo* que é utilizado para representar quer o processo quer o objeto" (Gray & Tall, 1994, p. 6).

Este modelo de análise evidencia as relações entre o *sujeito* e o *objeto* da atividade, mediado pela utilização de *artefactos*, a *comunidade* que partilha o objeto, a *divisão do trabalho* e as *regras* enquanto mediador das relações entre o sujeito e a comunidade recorrendo às teorizações de Tall (2002) e aos cinco níveis da taxonomia SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcomes*) de Biggs e Collis (1982) como lentes pelas quais as respostas dos alunos são analisadas e com a utilização das estruturas da terceira geração da teoria da atividade de Engeström (2001), reconhecendo a dificuldade de transferir uma conceptualização teórica para a prática. Esta última foi escolhida como suporte teórico da metodologia, uma vez que junta os aspetos significativos das experiências concretas no desenvolvimento de intervenções didáticas.

Conteúdos

Neste poster descrevemos, com algum detalhe, as relações existentes no modelo de análise mostrando como são congruentes com as teorizações utilizadas. Por fim, mostraremos como este modelo pode ser utilizado para analisar duas respostas a uma tarefa de simplificação, e sua descrição, de expressões numéricas, com alunos de licenciatura de formação inicial de professores de 1.º e 2.º ciclos e educadores de infância.

Referências

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work 14 (1), (133-156)*: DOI: 10.1080/13639080020028747

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2),* 115-141.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced mathematical thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

PARTICIPANTES

Ana Barbosa

Ana Caseiro

Ana Cristina de Abreu Silva de Sousa Tudella

Ana Henriques

Ana Maria Dias Roque de Lemos Boavida

Ana Paula Canavarro

António Borralho

António Manuel Dias Domingos

Belmira Florinda Ribeiro da Mota

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro

Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Cátia Sofia Nunes Rodrigues

Cecília Costa

Célia Maria Martins Vitorino Mestre

Cília Cardoso Rodrigues da Silva

Cláudia Oliveira

Cristina Cirino de Jesus

Cristina Loureiro

Cristina Maria Rebelo de Almeida Maia

Cristina Martins

Elsa Isabelinho D. Barbosa

Elvira Santos

Ema Mamede

Fátima Mendes

Fernando Luís Santos

Graça Cebola

Graciosa Veloso

Helena Cristina Rocha

Helena Gil Monteiro Guerreiro

Hélia Oliveira

Isabel Cabrita

Isabel Vale

Isabel Velez

Jean-Marie Kraemer

Joana Brocardo

João Pedro da Ponte

José António Duarte

Kanoknapa Erawun

Laura Margarida Salgueiro Bandarra Pinto

Leonor Santos

Lina Brunheira

Luciano Veia

Lucinda Manuela Machado Alves

Luís Menezes

Manuel Vara Pires

Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues

Maria Augusta Raposo de Barros Brito

Maria de Lurdes Serrazina

Maria do Rosário Contente Monteiro

Maria Luísa de Sousa Vale

Maria Niedja Pereira Martins

Mário Baía

Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Marli Duffles Donato Moreira

Miguel Ângelo Almeida Esteves Figueiredo

Nadia Diogo Ferreira

Nélida Filipe

Paula Manuela Vieira da Silva

Pedro da Cruz Almeida

Renata Carvalho

Rosa Antónia de Oliveira Figueiredo Tomás Ferreira

Teresa Pimentel

Valdeni Soliani Franco

Vladimiro Sérgio de Sousa Machado

Apoios