



**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

**ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Equações Diferenciais Ordinárias e o Pêndulo  
Magnético**

**José João Sardinha Cabaceira**

Orientação: Professor Doutor Luís Miguel Zorro  
Bandeira e Professor Doutor Carlos Correia Ramos

**Mestrado em Matemática para o Ensino**

Dissertação

Évora, 2014



# Equações Diferenciais Ordinárias e o Pêndulo Magnético

José João Sardinha Cabaceira

Dissertação apresentada na Universidade de Évora  
para a obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino  
sob orientação do Prof. Doutor Luís Miguel Zorro Bandeira e  
co-orientação do Prof. Doutor Carlos Correia Ramos

Departamento de Matemática

Universidade de Évora

2014

30 de setembro de 2014



# Ordinary Differential Equations and the Magnetic Pendulum

Master Thesis

José João Sardinha Cabaceira

Master thesis presented at the University of Évora  
for the degree of Master of Mathematics for Teaching  
under the guidance of Prof. Dr. Luís Miguel Zorro Bandeira  
and co - supervision of Prof. Dr. Carlos Correia Ramos

Department of Mathematics  
University of Évora

Departamento de Matemática  
Universidade de Évora  
2014



## **Agradecimentos**

Há quem diga que uma tese de mestrado é um processo solitário a que qualquer investigador está destinado. Eu não posso concordar com tal afirmação.

Desde o início do mestrado tive o privilégio de contar com a confiança e o apoio de inúmeras pessoas e instituições. Sem esses contributos, esta investigação não teria sido possível.

Ao Professor Doutor Luís Bandeira, orientador da dissertação, agradeço todo o apoio, a partilha do saber e as valiosas contribuições para o trabalho. Sou-lhe grato também pelo seu exemplo de profissionalismo e por ser sempre um orientador presente. Acima de tudo, obrigado por continuar a acompanhar-me nesta jornada e por estimular o meu interesse pelo conhecimento.

Um agradecimento especial ao co-orientador, Professor Doutor Carlos Ramos, pela dedicação e disponibilidade. A sua larga experiência e profunda capacidade de análise foram particularmente úteis na elaboração desta tese. Estou muito grato aos meus familiares pelo incentivo recebido ao longo destes anos. Aos meus irmãos, aos meus Pais, aos meus Sogros e ao meu cunhado, obrigado pelo amor, alegria e atenção sem reservas...

À minha esposa, Helena, agradeço a paciência, a motivação e o sorriso intemporal que nela sempre floresceu.

Para ti, minha Princesa. Espero que um dia percebas o porquê de, por vezes, queres brincar mais com o pai e ele não poder. É a ti que dedico esta tese. Foi nos momentos difíceis, que bastava olhar para o teu sorriso, inocente e lindo, que ia encontrar forças. És a minha fonte de inspiração, o meu sentido de vida.

A todos, familiares e amigos, obrigado por acreditarem sempre em mim e naquilo que faço. Obrigado por todos os ensinamentos de vida.

Espero que esta etapa que agora termino possa, de alguma forma, retribuir e compensar todo o carinho, apoio e dedicação que, constantemente, me oferecem.





# Conteúdo

Agradecimentos . . . . .	5
Lista de figuras . . . . .	10
Resumo . . . . .	13
Abstract . . . . .	15
<b>1 Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2 Abordagem Histórica</b>	<b>23</b>
2.1 História das EDO . . . . .	23
2.2 História do Pêndulo . . . . .	28
<b>3 Preliminares</b>	<b>39</b>
3.1 Alguns conceitos importantes da Álgebra . . . . .	39
3.2 Alguns resultados importantes da Análise . . . . .	42
<b>4 Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>55</b>
4.1 Equações Diferenciais Ordinária de 1ª Ordem . . . . .	55
4.1.1 Método de Separação de Variáveis . . . . .	60
4.1.2 Equações Exatas . . . . .	61
4.2 Equações Diferenciais de 2ª Ordem . . . . .	65
4.2.1 Equações Diferenciais Lineares . . . . .	65
4.2.2 Equações Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes . . . . .	68
4.3 Teorema da Existência e Unicidade de Solução . . . . .	73
4.4 Dependência das condições iniciais . . . . .	79

<b>5</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>81</b>
5.1	Classificação de Sistemas . . . . .	82
5.2	Sistemas Dinâmicos Discretos . . . . .	84
5.3	Pontos periódicos . . . . .	91
5.4	Modelo Linear e Modelo Logístico . . . . .	92
5.5	Diagrama das Bifurcações para a função quadrática . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Métodos Numéricos</b>	<b>101</b>
6.1	Método das Aproximações sucessivas de Piccard . . . . .	101
6.2	Fórmula de Taylor . . . . .	103
6.3	Método de Euler . . . . .	106
6.4	Método de Runge-Kutta RK2 . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Teoria Qualitativa de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>111</b>
7.1	Retrato Fase de Sistemas Lineares . . . . .	116
7.2	Linearização e Estabilidade de Pontos de Equilíbrio . . . . .	125
<b>8</b>	<b>O Pêndulo Magnético</b>	<b>137</b>
8.1	Dedução das equações e algumas considerações . . . . .	137
8.2	Programação . . . . .	145
8.2.1	Método de Euler para as equações do pêndulo magnético	147
8.2.2	Método <i>RK2</i> para as equações do pêndulo magnético	152
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>161</b>

# Lista de Figuras

2.1	Família Bernoulli . . . . .	28
2.2	Princípio do funcionamento do relógio mecânico . . . . .	31
2.3	Huygens . . . . .	34
2.4	Gravura do Pêndulo Cicloidal . . . . .	35
2.5	Provavelmente o primeiro relógio com espiral feito por Thuret para Huygens . . . . .	36
3.1	Teorema do Valor Médio . . . . .	44
5.1	Evolução de $y_{n+1} = \cos(y_n)$ com $y_0 = 2$ . . . . .	86
5.2	Staircase para $x_{n+1} = \cos(x_n)$ com $x_0 = 2$ . . . . .	86
5.3	Solução do sistema $y_{n+1} = y_n^2 - 0,2$ com valor inicial 1,1 . . .	87
5.4	Solução do sistema $y_{n+1} = y_n^2 - 0,2$ com valor inicial 1,5 . . .	88
5.5	Soluções do modelo logístico com valor inicial 0.1. Para $c = 2$ (esquerda) a sucessão converge, mas para $c = 4$ (direita) o comportamento é caótico. . . . .	89
5.6	Modelo Linear . . . . .	94
5.7	Modelo não Linear . . . . .	94
5.8	Modelo Linear vs Modelo não Linear . . . . .	95
5.9	Diagrama de Bifurcação . . . . .	98
5.10	(a) Ampliação de parte do diagrama de bifurcações do mapa logístico. (b) Esquema de uma cascata de bifurcações de duplicação de período no mapa logístico (não está em escala)	99
7.1	Gráfico para o valor qualitativo de $x$ . . . . .	113

7.2	Gráfico para o valor qualitativo de $y$ .	114
7.3	Comportamento de duas espécies	115
7.4	Retrato de Fase para $DX = AX$ , $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	119
7.5	Retrato de Fase para $DX = AX$ , $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$	123
7.6	$a < 0$ as soluções convergem para a origem	125
7.7	$a > 0$ crescimento exponencial	126
7.8	Retratos de Fase	128
7.9	Retrato de fase para dois valores reais distintos	135
8.1	Força de um dos ímãs aplicado ao pêndulo	139
8.2	Modelo de Construção do Pêndulo Magnético	139
8.3	Movimento do pêndulo com posição inicial $(0, 1.1)$	143
8.4	Movimento do pêndulo com posição inicial $(0, 1.11)$	143
8.5	Movimento do pêndulo com posição inicial $(0, 1.12)$	144
8.6	Bacia de atração do pêndulo magnético	144
8.7	TI-NSPIRE	147
8.8	Gráfico da posição e velocidade com $(x, y) = (1, 1)$ e $(x', y') = (0, 0)$	149
8.9	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(1, 1)$ e passo $h = 0.1$	149
8.10	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(1, 1)$ e passo $h = 0.01$	150
8.11	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(0, 1)$ e passo $h = 0.1$	151
8.12	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(0, 1)$ e passo $h = 0.01$	151
8.13	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(0.6, 1.5)$ e passo $h = 0.01$	152
8.14	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(-1, -1.4)$ e $(x', y') = (0, 0)$	154
8.15	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(1.4, 1)$	155
8.16	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(1, -\sqrt{3})$	155
8.17	Gráfico do pêndulo com posição inicial $(0, -1)$	156





# Equações Diferenciais Ordinárias e o Pêndulo Magnético

## Resumo

As equações diferenciais desempenham um papel muito importante na engenharia e nas ciências exatas. Muitos problemas conduzem a uma ou várias equações diferenciais que deverão ser resolvidas.

O tipo de problemas que podem ser analisados com maior facilidade são os sistemas que conduzem a equações lineares. A partir da segunda parte do século XX, com o rápido desenvolvimento dos computadores, tem sido possível resolver problemas não-lineares usando métodos numéricos. Os sistemas não lineares permitem estudar muitos fenômenos interessantes que não aparecem em sistemas lineares.

Com o estudo dos sistemas não lineares têm ganho popularidade uma nova abordagem das equações diferenciais, que dá mais importância à análise geométrica e menos importância às técnicas analíticas de resolução. Muitos dos conceitos utilizados, como o espaço de fase, são uma generalização dos métodos utilizados na dinâmica para estudar o movimento de um sistema.





# Ordinary Differential Equations and the Magnetic Pendulum

## **Abstract**

Differential equations play a very important role in engineering and the hard sciences. Many problems lead to one or more differential equations to be solved.

The type of problems that can be analyzed more easily are the systems that lead to linear equations. From the second part of the twentieth century, with the rapid development of computers, it has been possible to solve nonlinear problems using numerical methods. Nonlinear systems allow to study many interesting phenomena that do not appear in linear systems.

With the study of nonlinear systems a new approach to differential equations has gained popularity, which gives more importance to geometric analysis and less importance to the resolution of analytical techniques. Many of the concepts used, as the phase space, are a generalization of methods used to study the dynamic motion of a system.



Educai as crianças e  
não será preciso castigar os homens.  
(Pitágoras).



# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho nasceu da preocupação com as dificuldades em inserir temas atuais na vida profissional.

Estava interessado em identificar uma forma de introduzir conceitos contemporâneos na formação de professores de Matemática, porém, precisava de encontrar uma forma de contemplar também os alunos e motivá-los para a beleza que só a matemática consegue explicar.

As palavras diferenciais e equações sugerem naturalmente que as equações diferenciais são equações que envolvem derivadas. Tais equações podem envolver derivadas ordinárias ou derivadas parciais, mas aqui trabalharei com as equações diferenciais ordinárias, ou seja, que envolvem apenas derivadas em ordem a uma única variável.

As equações diferenciais ordinárias são equações que relacionam uma função real de variável real e uma ou mais das suas derivadas.

Encontrar uma solução de uma equação diferencial é procurar uma função que satisfaça a equação dada.

As equações diferenciais podem surgir na forma explícita ou na forma implícita. Se tais equações forem lineares, há soluções gerais que nos permitem determinar o comportamento futuro do sistema descrito de forma explícita, em função do estado atual do sistema. Já se as equações forem não-lineares, essas soluções explícitas, em geral, não existem.

Uma série de comportamentos, alguns deles bastante complicados,

podem aparecer quando se estuda a evolução temporal de sistemas descritos por equações não-lineares, a título de exemplo, o estudo de órbitas periódicas e do caos. A dinâmica não-linear concentra-se nos comportamentos do sistema que está a ser estudado. O comportamento futuro a pequenos tempos, normalmente, pode ser facilmente obtido por solução numérica (computacional) das equações de evolução. O estudo das equações diferenciais ordinárias começou com os próprios criadores do cálculo, Newton<sup>1</sup> e Leibniz<sup>2</sup>, no final do século *XVII*, motivados por problemas físicos. Atualmente, além dos problemas físicos conseguimos modelar muitos fenómenos biológicos, económicos, ecológicos, químicos, entre outros. No início era natural tentar expressar as soluções de uma equação diferencial explicitamente, entretanto, verificou-se que o número de equações que podiam ser resolvidas desta forma era muito pequeno, até mesmo quando introduzidas, à posteriori, novas funções. Mediante as dificuldades em obter soluções por métodos fiáveis, surgiram os teoremas de existência e unicidade, tornando-se justificável a procura de soluções através de processos informais, uma vez que obtida, podia ser verificada posteriormente. A partir daí, iniciou-se no século *XIX*, com Henri Poincaré<sup>3</sup>, a fase moderna que é marcada pelo interesse nas questões qualitativas, ou seja, é marcada pela atitude de retirar das equações diferenciais informações sobre o comportamento das suas soluções, sem a preocupação de escrevê-las explicitamente. Por exemplo, numa solução explícita que é da forma

$$y = f(x),$$

pode-se analisar qualitativamente o comportamento oscilatório do sistema massa-mola que é dado por um bloco de massa  $m$ , sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a uma das extremidades de uma certa mola, enquanto a outra extremidade está ligada a um ponto fixo. Observa-se que

---

<sup>1</sup>Isaac Newton (1643 – 1727) (em inglês). BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>2</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) (em inglês). ver [14].

<sup>3</sup>Jules Henri Poincaré (1854; 1912) (em inglês). history.mcs.st. Página visitada em 4 de junho de 2014.

o seu estado inicial é estável, pois à medida que afastamos o bloco do seu estado inicial (chamado de ponto de equilíbrio) e o soltamos, inicia-se um movimento contínuo e oscilatório em torno do seu ponto de equilíbrio. O movimento da mola pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y,$$

em que  $m$  e  $k$  são constantes adequadas,  $y$  é a variável dependente, ou seja, a função que pretendemos determinar, e  $t$  é a variável independente.

Numa solução implícita que é da forma

$$G(t, y) = 0$$

podemos analisar quantitativamente o comportamento do sistema. Vejamos um exemplo em que a Lei de Torricelli fornece um modelo para o problema do esvaziamento de um tanque.

Suponhamos que um tanque cilíndrico contendo um líquido tem um orifício no fundo através do qual o líquido sai. Designemos por  $h$  a altura do líquido no tanque no instante  $t$  e por  $r$  o raio da base. A lei de Torricelli diz-nos que se num dado instante ( $t = 0$ ) for aberto o orifício, então o caudal é proporcional à raiz quadrada da altura do líquido no tanque.

Num problema deste tipo é usual conhecer os dados iniciais do sistema. Por exemplo podemos supor que no instante inicial a altura do líquido é conhecida e tem o valor  $h_0$ . Temos agora um problema modelado por uma equação diferencial e para o qual conhecemos o valor inicial.

A equação da Lei de Torricelli pode escrever-se da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\Pi r^2} \sqrt{h(t)} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

No presente trabalho proponho-me a estudar as equações diferenciais ordinárias de modo qualitativo e quantitativo, retirando informações que permitam concluir algo sobre o comportamento das suas soluções ao longo do tempo.





## Capítulo 2

# Abordagem Histórica

### 2.1 História das EDO

Este capítulo resume as diversas pesquisas efetuadas, dando mais ênfase ao livro "*A history of mathematics, 3<sup>th</sup> edition*" cujos autores são Carl Boyer e Uta Merzbach.

Ao longo dos tempos a matemática revelou-se uma das essências do pensamento humano.

A sua história distingue-se das outras ciências pelo facto de que o que procuramos atualmente não serem erros do passado, mas sim extensões do mesmo. As equações diferenciais são um bom exemplo desses avanços.

*"Apreciar a história das equações diferenciais sem ter alguns conhecimentos científicos e métodos para resolvê-las poder-se-á tornar numa tarefa árdua para o leitor comum."*<sup>1</sup>

O desenvolvimento das equações diferenciais começou com o estudo do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, no século *XVII*. Newton deu o seu contributo aquando do desenvolvimento do cálculo. A elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceu uma das bases para a aplicação das equações diferenciais no século *XVIII*, desenvolvida especialmente por Euler<sup>2</sup>. Newton descreveu um método para resolver a equação diferencial de

---

<sup>1</sup>Ver [2], Pag. 26-31

<sup>2</sup>Leonhard Paul Euler (1707–1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã que

primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

no caso em que  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$  usando séries infinitas.

Leibniz foi um autodidata em matemática, já que o seu interesse no assunto se desenvolveu quando tinha pouco mais de vinte anos. Leibniz compreendia a vantagem de usar uma boa notação matemática, nomeadamente a notação que usamos hoje para derivada  $dy/dx$  e o sinal de integral. Desenvolveu o método de separação de variáveis para as equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(y)}{Q(x)}.$$

Mais tarde, por volta de 1691, conseguiu reduzir equações homogêneas a equações separáveis e indicou o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Durante a parte final do século *XVII*, como embaixador e conselheiro de diversas famílias, Leibniz viajou muito por toda a Europa e manteve uma extensa correspondência com os irmãos Bernoulli. No decorrer dessa correspondência foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais.

Os irmãos Jakob (1654 – 1705) e Johann (1667 – 1748) Bernoulli<sup>3</sup> contribuíram muito para o desenvolvimento das equações diferenciais e das suas aplicações. Ambos eram muito conflituosos e estavam frequentemente envolvidos em disputas matemáticas. Apesar disso, conseguiram dar contribuições significativas para diversas áreas da Matemática. Por exemplo,

---

passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler deu muitos contributos para a análise matemática. (em inglês). BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>3</sup>A família Bernoulli constitui um caso intrigante e raramente visto na História da Humanidade, em particular na História da Matemática. Foram oito matemáticos que, durante um século, manifestaram especial vocação para a matemática. Jacob *I* (1654 – 1705), Johann *I* (1667 – 1748), Nicolau *I* (1687 – 1759), Nicolau *II* (1695 – 1726), Daniel (1700 – 1782), Johann *II* (1710 – 1790), Johann *III* (1744 – 1807), e Jacob *II* (1759 – 1789)

Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial

$$y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2y - a^3}}$$

Usou pela primeira vez a palavra "integral" no sentido moderno e o seu irmão resolveu de forma brilhante o problema da catenária, que é a forma que os cabos suspensos adquirem sob o seu próprio peso. A catenária satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

onde  $H, \rho, g$  são constantes adequadas.

O problema de determinar a forma de uma curva ligando dois pontos distintos sobre um plano vertical, conhecido por problema da braquistócrona<sup>4</sup>, foi resolvido pelos irmãos Bernoulli e também por Leibniz e Newton.

Um dos maiores matemáticos do século *XVIII*, Leonhard Euler, identificou a condição para que equações de primeira ordem sejam exatas. Num artigo publicado em 1734 desenvolveu a teoria dos fatores integrantes e encontrou a solução geral para equações de coeficientes constantes,

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Em 1750, Euler usou séries de potências para resolver equações diferenciais. Propôs também um procedimento numérico para resolver equações do tipo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Além disso, deu contribuições importantes para equações diferenciais

---

<sup>4</sup>Denomina-se braquistócrona a trajetória de uma partícula que sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, desloca-se entre dois pontos no menor intervalo de tempo, (em português), <http://pt.wikipedia.org/wiki/Braquistocrona>, página visitada a 4 de junho de 2014

parciais, estudando a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

que atualmente é conhecida por equação de Laplace. Feito este anos antes de Pierre Simon de Laplace<sup>5</sup>. Apresentou o primeiro tratamento sistemático ao Cálculo das Variações.

Outra personagem desta história é Joseph Louis Lagrange<sup>6</sup> que, entre os anos de 1762 e 1765, mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de grau  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções linearmente independentes. Mais tarde, em 1774 – 1775, desenvolveu o seu método da variação dos parâmetros. Lagrange também é conhecido pelo seu trabalho fundamental em Equações Diferenciais Parciais e Cálculo das Variações.

No final do século *XVIII* muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos.

No início do século *XIX*, Joseph Fourier resolve a equação diferencial parcial que descreve a distribuição do calor numa barra de ferro através de séries trigonométricas. As séries de Fourier mostraram-se muito eficazes para resolver outros tipos de equações diferenciais parciais lineares.

Outras equações diferenciais parciais foram estudadas à medida que se tornou claro a sua importância em Física-Matemática. Com base nesse estudo, começaram a surgir novas funções que eram soluções de certas equações diferenciais ordinárias, às quais foram dadas o nome de

---

<sup>5</sup>Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827) nasceu em França em Beaumont-en-Auge. Destacou-se nas áreas da Física, da Astronomia e da Matemática. Organizou a astronomia matemática, sumariando e ampliando o trabalho dos seus predecessores nos cinco volumes do seu "Mécanique Céleste". (em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>6</sup>Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) foi um matemático italiano. Organizou as pesquisas desenvolvidas pelos associados da Academia de Ciências de Turim. Aos vinte e três anos aplicou o cálculo diferencial à teoria da probabilidade, indo além de Isaac Newton com um novo começo na teoria matemática do som. Entre os grandes problemas que Lagrange resolveu encontra-se aquele da oscilação da Lua. (em português), <http://pt.wikipedia.org/wiki/lagrange>, página visitada a 4 de junho de 2014

vários matemáticos, tais como Bessel<sup>7</sup>, Legendre<sup>8</sup>, Hermite<sup>9</sup>, Chebyshev<sup>10</sup> e Hankel<sup>11</sup>. Por volta de 1870, iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como, o desenvolvimento de métodos menos elementares como a expansão em séries de potências no plano complexo.

Em meados de 1900, já tinham sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas a sua implementação estava prejudicada pela necessidade de se executarem os cálculos à mão ou com equipamentos computacionais muito primitivos.

Nos últimos 50 anos o desenvolvimento dos computadores aumentou muito a diversidade de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos e facilmente disponíveis.

No século *XX*, também foram desenvolvidos métodos geométricos e topológicos para o estudo das equações parciais não-lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como, compreender o seu comportamento analítico. Caso sejam necessários maiores detalhes em certas regiões, faz-se o uso de métodos numéricos.

Nos últimos anos essas duas tendências juntaram-se e foram descobertos,

---

<sup>7</sup>Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) foi um matemático e astrónomo alemão. Sistematizou as funções de Bessel (que foram descobertas por Daniel Bernoulli). Foi contemporâneo de Carl Friedrich Gauss, também matemático e astrónomo. A Função de Bessel é a solução da equação diferencial para um número qualquer, real ou complexo. Quando se utiliza um número inteiro, este é referido como a ordem da função de Bessel. (em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>8</sup>Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) foi um matemático francês. Deu importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. A cratera lunar Legendre é em sua homenagem. (em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>9</sup>Charles Hermite (1822 – 1901) foi um matemático francês. Hermite trabalhou com Jacobi Bernoulli em funções de Abel e a teoria dos números, (em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>10</sup>Pafnuti Lvovitch Tchebychev (1821 – 1894) foi um matemático russo. É conhecido pelo seu trabalho no domínio da probabilidade e estatística.(em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

<sup>11</sup>Hermann Hankel (1839 – 1873) foi um matemático alemão. Ficou conhecido pelos seus estudos sobre sistemas numéricos reais, complexos e hipercomplexos.(em inglês), BBC Historic Figures. Página visitada em 4 de junho de 2014.

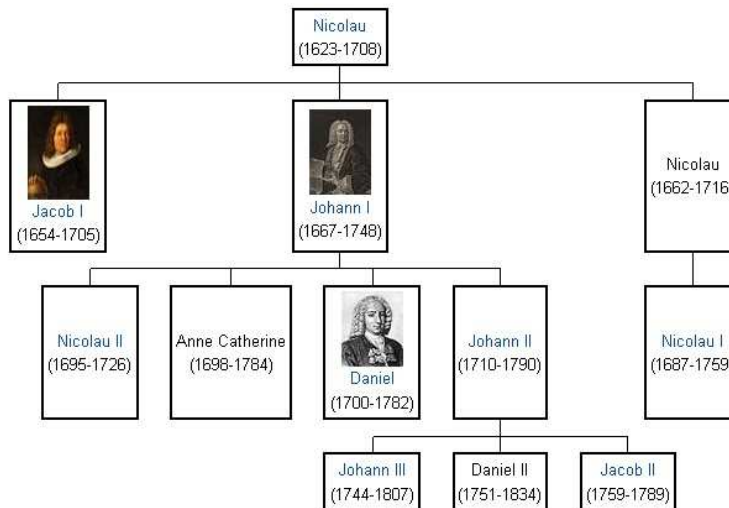


Figura 2.1: Família Bernoulli

através da computação gráfica, fenômenos inesperados conhecidos como atratores estranhos, caos e fractais que estão a ser estudados a a gerar novas e importantes ideias em diferentes aplicações.

Em pleno século *XXI*, temos vários problemas na área de equações diferenciais que estão por resolver ou a ser resolvidos, como por exemplo, achar a solução das equações de Navier-Stokes<sup>12</sup>.

## 2.2 História do Pêndulo

O mais antigo instrumento para medir a duração do dia, de que há registo, é o relógio solar<sup>13</sup>, datado de 3500 a 3000 a.C.. Consiste num mastro vertical, a que se dá o nome de gnomon<sup>14</sup>, assente sobre uma base. O tempo é medido

<sup>12</sup>As equações de Navier Stokes são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos. São equações de derivadas parciais que permitem determinar os campos de velocidade e de pressão num escoamento, (em inglês), <http://mathworld.wolfram.com/Navier-StokesEquations.html>, página visitada a 4 de junho de 2014

<sup>13</sup>Relógio de sol, Enciclopédia Escolar Britannica, 2014. <http://escola.britannica.com.br/article/482602/relogio-de-sol>. Página visitada em 8 de junho de 2014.

<sup>14</sup>Parte do relógio solar que possibilita a projecção da sombra

de acordo com a sombra projetada pelo mastro.

Por volta do século *VIII* a.C., os relógios de sol tornaram-se um pouco mais precisos, à medida que as marcas passaram a ser inscritas na base onde se projetava a sombra.

Os gregos integraram os relógios solares em sistemas de considerável complexidade, nos quais se mediam os momentos do Sol, da Lua e das estrelas. Nasceu assim o relógio astronómico.

Os progressos em Astronomia ajudaram a aprimorar a medição do tempo. Com a invenção do astrolábio por Ptolomeu, no século *II* d.C., tornou-se possível calcular, de acordo com a posição do Sol, a duração do dia, assim como, prever o "levantar" e o "cair" de um astro no firmamento<sup>15</sup> e a hora do crepúsculo<sup>16</sup> e da aurora<sup>17</sup>.

A precisão deste relógio era notável para a época, mas colocava-se um problema, como medir com alguma exatidão, o tempo quando não há sol?

A resposta a esta questão não demorou muitos anos a surgir, media-se o tempo pelo escoamento de um líquido. Os relógios de água eram usados pelos egípcios para marcar o tempo à noite, ou quando não havia sol.

Era um recipiente cheio de água, com um pequeno furo no fundo, que deixava escorrer o líquido para outro recipiente, marcado com escalas. De acordo com o nível da água, podia-se saber a hora. Note-se que a precisão não era a ideal, pois o relógio de água estava dependente de fatores ambientais, tais como a pressão, a temperatura e as próprias impurezas existentes na água que faziam com que se adiantasse ou atrasasse.

A clepsidra<sup>18</sup> foi aperfeiçoada por mecanismos que tornavam constante a pressão da água que saía, mas os fatores ambientais não podiam ser controlados, pois se estivesse muito frio, a água acabaria por congelar.

Um dos mais bem elaborados sistemas da Antiguidade foi a Torre dos Ventos, construída em 75 a.C. aos pés do *Partenon*, ([13]) em Atenas, uma torre de 20 metros de altura, com nove quadrantes solares, um catavento,

---

<sup>15</sup>Espaço visível da abóbada celeste na qual aparecem as estrelas, céu

<sup>16</sup>É o instante em que o céu próximo ao horizonte no poente ou nascente fica com uma cor gradiente, entre o azul do dia e o escuro da noite

<sup>17</sup>Nascer do dia

<sup>18</sup>Nome dado ao relógio de água

uma clepsidra, além de outros instrumentos. Também os chineses apreciavam esse tipo de relógio. O que foi feito, já no ano de 1090, para o imperador Su-Sung, indicava as doze horas do dia, tinha um sino que soava a cada quarto de hora.<sup>19</sup>

Foi só no primeiro século da era cristã que surgiu o mais conhecido dos medidores de tempo anteriores ao relógio mecânico, a ampulheta. Esta mede o tempo de acordo com a passagem da areia por um canal que liga dois recipientes de vidro. Nos séculos *XVI* e *XVII*, foram feitas ampulhetas para funcionar durante períodos de quinze e trinta minutos.

No século *XIV* dá-se o aparecimento do relógio mecânico<sup>20</sup>. Poucas invenções moldaram tanto o mundo moderno como este relógio.

O relógio mecânico tornou possível a civilização industrial e fixou a ideia de desempenho na atividade humana.

Até à Idade Média, o tempo era percebido como uma coisa natural. Ao inverno seguia-se a primavera, o verão. A manhã vinha depois da madrugada que, por sua vez, sucedia à noite. A contagem do tempo fazia-se por longos períodos, meses e anos, materializados nos calendários. Nos conventos, nem hora existia. O dia era dividido de acordo com o ritual dos ofícios. Como não havia uma medida universal, cada convento tinha sua hora, assim como cada cidade vivia segundo o seu ritmo.

O relógio mecânico figura entre as mais importantes invenções da humanidade. Foi o relógio que tornou possível uma civilização atenta ao tempo, portanto, à produtividade e ao desempenho.

E o que diferenciou tecnicamente o relógio mecânico dos que o antecederam? Antes de mais nada, o relógio mecânico é movido por um peso. A energia da queda desse peso é transmitida através de um sistema de engrenagens, formado por rodas dentadas que se encaixam umas nas outras e movimentam as agulhas do mostrador. O problema é que uma força aplicada continuamente produz uma aceleração. Logo, se nada se opusesse à descida

---

<sup>19</sup>Veríssimo, Suzana, Máquinas do Tempo, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1996.

<sup>20</sup>A Revolução no Tempo. Os relógios e Nascimento do Mundo Moderno. David S. Landes, 2009, coleção trajetos



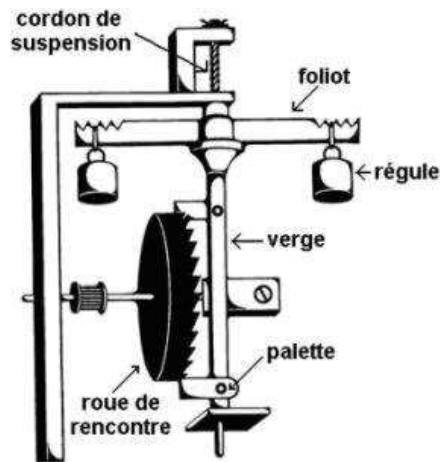


Figura 2.2: Princípio do funcionamento do relógio mecânico

do peso, ele imprimiria um movimento cada vez mais rápido à engrenagem. O que os sábios da Idade Média descobriram foi justamente um dispositivo de retardamento capaz de bloquear o peso e abrandar o movimento das rodas e agulhas, de modo a criar um movimento de oscilação com um batimento regular, o vaivém contínuo característico dos relógios.

Isso foi possível graças a uma peça composta por duas palhetas, presa a um eixo horizontal móvel, que se engrenam alternadamente sobre uma roda dentada (chamada roda de encontro), localizada verticalmente sobre um eixo que se move sob o efeito do peso, como se pode observar na figura 2.2. Os impulsos alternados provocados pela roda dentada fazem a peça oscilar sobre o seu eixo de maneira regular. Este movimento é então transmitido ao eixo de engrenagem que movimenta as agulhas.

O aparecimento dos primeiros relógios mecânicos causou uma febre nas cidades europeias que começavam a sacudir a modorra medieval. Cada burgo queria ter o seu relógio, não apenas por uma questão de prestígio, mas também porque a atração trazia viajantes, portanto, dinheiro para a localidade.

Já para os operários das cidades mais desenvolvidas, principalmente em Itália e nomeadamente em Flandres, onde já existia uma florescente indústria

têxtil, um movimentado comércio, a novidade não era assim tão boa. O relógio passou a encarnar a autoridade que impunha as horas de trabalho e mais importante ainda, exigia uma determinada produtividade ao longo do dia. Nalgumas cidades, os operários chegaram a manifestar-se contra isso. Por exemplo, em Pádua, em 1390, a torre que abrigava o relógio de Dondi<sup>21</sup> foi atacada.

No século *XVI* a conceção da Física que vigorava na altura era a de Aristóteles que afirmava que os corpos mais pesados caíam mais rapidamente que os mais leves.

Na mesma altura, Galileu supunha que a diferença das suas velocidades de queda se devesse à diferença de densidade entre os corpos. O problema do movimento de corpos suspensos foi-lhe naturalmente aliciante. Reza a história que o seu interesse por pêndulos surgiu quando assistia a uma missa na Catedral de Pisa, na época em que frequentava a Universidade local, em 1588. Galileu observou a forma como os candelabros pendurados na Catedral oscilavam, e ficou surpreendido pelo facto de candelabros com uma amplitude de oscilação maior parecerem levar o mesmo tempo a percorrer uma determinada distância do que candelabros com menor amplitude.<sup>22</sup>

Só em 1602 é que Galileu apresentou a um amigo seu, pela primeira vez, a ideia do isocronismo de pêndulos, isto é, que o período de oscilação de um pêndulo é independente da sua amplitude (para pequenas oscilações apenas). Foi o início do estudo do movimento harmónico simples. No ano seguinte, um outro amigo com quem partilhou a descoberta, começou a usar pêndulos para medir a pulsação dos seus pacientes, com um instrumento a que chamou *pulsilogium*.

Galileu investigou as características dos pêndulos e chegou à conclusão de que não só eram isocrónicos, característica que se repete e só é válida em regime de pequenas oscilações, como também voltavam praticamente à

---

<sup>21</sup>Relógio construído por Giovanni di Dondi (1318 – 1389). Construiu em 1364 um relógio complexo contendo sete mostradores. Cada um desses mostradores simbolizava um planeta e apresentava também um outro mostrador extra para marcar o tempo. Esse relógio foi instalado na Biblioteca do Castelo Visconti. Este relógio era muito semelhante ao construído para o imperador Su-Sung, na China, em 1090

<sup>22</sup>Tom Philbin, *As 100 Maiores Invenções da História* DIFEL, 2006

altura a que tinham sido largados, o que hoje se admite como manifestação da conservação de energia, um conceito ainda não introduzido na época. Além disso, observou que pêndulos mais leves terminavam a sua oscilação mais rapidamente do que os que possuíam pesos maiores. Também observou que o quadrado do período de oscilação é proporcional ao comprimento do pêndulo.

Os relógios que estavam ao dispor no tempo de Galileu eram francamente pouco precisos. Tratavam-se de relógios mecânicos que tinham vindo substituir os relógios de água e que foram sendo aperfeiçoados, tornando-se mais pequenos e ganhando mais precisão, mas que se adiantavam ou atrasavam devido a fatores intrínsecos à mecânica praticada na altura, o que os fazia inadequados até para observações astronómicas. Galileu efetuava todas as medições do período dos pêndulos usando como cronómetro a sua pulsação cardíaca. Em 1641, quando já estava completamente cego, ocorreu-lhe que talvez fosse possível adaptar o pêndulo a relógios, utilizando pesos ou molas. Ele acreditava que os defeitos dos relógios convencionais pudessem ser corrigidos pelo movimento periódico intrínseco aos pêndulos.

Numa ocasião em que Vicenzio, filho de Galileu, o visitou o seu pai, deu-lhe conta das suas intenções e pediu-lhe para desenhar esboços da máquina. Decidiram construí-la para verificar a existência de erros inesperados teoricamente.

Foi a descoberta de Galileu que permitiu o florescer de novos relógios mais precisos, porque o período do pêndulo depende do seu comprimento, uma variável fácil de controlar, ao invés da sua amplitude, como se julgava. A aplicação deste princípio encontra-se patente tanto nos antigos relógios de pêndulo como nos relógios em que oscila uma mola ou nos que possuem um cristal de quartzo a oscilar.

Quinze anos depois da morte de Galileu, em 1657, Christiaan Huygens, autor que também demonstrou que o isocronismo do pêndulo é apenas aproximado, ou seja, o intervalo de tempo entre duas oscilações é melhor, em sentido periódico, quanto menor for a amplitude, publicou um livro em que descrevia o relógio de pêndulo, marcando efetivamente o início do desenvolvimento destes aparelhos.



Figura 2.3: Huygens

Huygens foi um físico e matemático holandês que nutria uma profunda fascinação por uma variedade de temas e ciências, desde o estudo de bactérias e lentes ópticas até à cinemática da oscilação, não esquecendo a astronomia para a qual contribuiu de forma significativa, por exemplo, a descoberta dos anéis de Saturno.

Dentro do mundo da relojoaria, *"Huygens tornou-se o criador do primeiro relógio de pêndulo da história"*<sup>23</sup>.

Juntamente com o seu irmão, Huygens tinha ganho a reputação de ter melhorado a capacidade de ampliação dos telescópios, e contribuiu para a compreensão de questões de índole astronómica, que foram muito importantes no âmbito da navegação naval da época. Mas observar as estrelas requeria a medição do tempo com precisão matemática e foi esta necessidade que o levou à criação do Relógio de pêndulo em 1656, cujos desenhos patenteou.

Foi um desafio lançado por Blaise Pascal que o levou a trabalhar no relógio de pêndulo. Huygens acreditava que o balanço do pêndulo num arco alargado seria mais útil em mar alto, pelo que inventou o pêndulo cicloidal, através da introdução de batentes laterais. Nesse sentido construiu diversos relógios de pêndulo com o intuito de determinar a longitude no mar. Este novo sistema veio substituir os relógios com sistema de balanço, habituais na época, permitindo um erro de menos de um minuto por dia. Este facto, por

---

<sup>23</sup>Merzbach, Uta C., Boyer, Carl B., A History of Mathematics, 3<sup>rd</sup> Edition, Wiley, 2010, Pag. 342-472

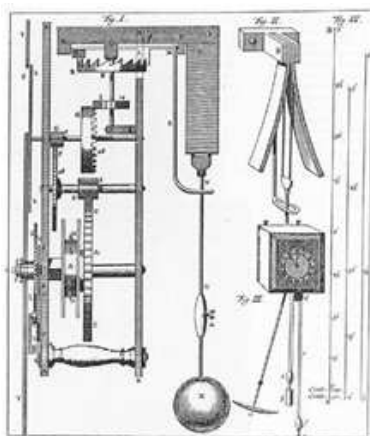


Figura 2.4: Gravura do Pêndulo Cicloidal

si só, já era bastante assinalável para a época, mas Huygens elevaria ainda mais a fasquia ao atingir um nível de precisão inferior a 10 segundos por dia. Em 1658 publica a sua primeira obra sobre relojoaria a que dá o nome de *Horologium*.

Em 1673, Huygens atinge o topo da sua fama ao publicar o *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*, uma obra que dedicava o primeiro capítulo ao relógio de pêndulo e que explicava a lei da força centrífuga no movimento circular uniforme. A fascinação de Huygens pelos medidores do tempo levou-o a desenvolver a roda de balanço associada a uma mola. Em 1675 chegou a patentear um relógio de bolso que indicava o tempo com um erro de cerca de 10 minutos por dia. Estes relógios de bolso, ou portáteis, como então eram designados, foram inventados no início do século XV. No final do século já estes se tinham tornado comuns, embora ainda não fossem muito precisos.

Sob a direção de Huygens, o primeiro relógio regulado por um balanço com mola foi construído em Paris e oferecido ao rei Luís XIV.

Na época dos descobrimentos marítimos, Cristóvão Colombo navegou para Ocidente convicto de que era possível chegar à Índia desse modo. Quando desembarcou na América, pensou estar na Índia porque o sistema de navegação da altura era incapaz de fornecer uma medida precisa da



Figura 2.5: Provavelmente o primeiro relógio com espiral feito por Thuret para Huygens

longitude. Para a latitude bastava medir a altitude em graus da estrela Polar acima do horizonte, mas a longitude requeria medidas precisas de tempo<sup>24</sup>, que um relógio de uma caravela, após meses de viagem, não conseguia estimar, uma vez que ele atrasava alguns minutos por dia e as viagens eram demoradas. Só mais de um século depois da descoberta de Galileu foi possível construir um relógio adequado à navegação marítima.

*"A Revolução Industrial do século XVIII, na Inglaterra, deu uma nova importância à hora"*<sup>25</sup>.

As relações de produção passaram a fazer-se de maneira mais sistematizada, com a reunião dos operários dentro de fábricas. Habitados

---

<sup>24</sup>A medição da longitude é importante tanto para a cartografia como para uma navegação segura no oceano. Ao longo da história navegantes e exploradores lutaram para encontrar um método de determinar a longitude exata, o que levou séculos, envolvendo o esforço de grandes mentes científicas como Américo Vespúcio e Galileu. Determinar a latitude é simples no hemisfério norte: basta medir o ângulo entre o horizonte e a Estrela Polar com ajuda de um quadrante, astrolábio ou sextante. Mas o cálculo da longitude sempre apresentou sérios problemas, principalmente no alto mar. O cálculo da longitude, em teoria, reduz-se a medir a diferença de tempo entre um ponto de referência e a posição atual do navio. A posição do Sol indica a hora local, mas a referência de tempo não poderia ser conhecida sem relógios suficientemente precisos, que só seriam construídas a partir dos séculos XVIII e XIX, in <http://pt.wikipedia.org/wiki/Longitude>, página visitada a 5 de junho de 2014.

<sup>25</sup>A Revolução no Tempo. Os relógios e Nascimento do Mundo Moderno. David S. Landes, 2009, coleção trajetos

ainda a trabalhar segundo o seu próprio ritmo, de acordo com a tradição herdada das corporações de ofício dos artesãos medievais, os operários revoltaram-se contra as implacáveis "máquinas do tempo". Com a desconfiança de que os patrões roubavam nas horas, adiantando ou atrasando os relógios, os operários começaram a adquirir os seus próprios relógios. A indústria de relógios cresceu e estes tornaram-se mais baratos a medida que sua produção se tornou maior.

Nada, porém, popularizaria tanto o relógio como uma descoberta de 1880. Os irmãos Pierre e Jacques Curie, cientistas franceses, descobriram que um pedaço de cristal de quartzo, cortado na forma de uma lâmina ou de um anel e colocado a vácuo num circuito elétrico e em baixa temperatura, vibra 32758 vezes por segundo, como um pêndulo ultra-rápido.

Em 1925, pesquisadores dos Laboratórios Bell, nos Estados Unidos, construíram o primeiro oscilador a quartzo. Estes relógios eram demasiado grandes e assim permaneceriam por muito tempo, o que os tornava pouco práticos.

Pode-se considerar o nono Congresso Internacional de Cronometria, em Paris, em setembro de 1969, como a verdadeira data de nascimento da indústria do relógio a quartzo. Foi ali que a empresa japonesa Seiko apresentou seu primeiro modelo eletrônico. O relógio a quartzo tinha dado um golpe mortal na indústria da relojoaria clássica assim como o relógio atômico a césio tiraria do observatório de Greenwich, em Inglaterra, o privilégio de fornecer a hora oficial ao mundo.





## Capítulo 3

# Preliminares

### 3.1 Alguns conceitos importantes da Álgebra

**Axioma 1 (Espaços vetoriais)** *Seja  $V$  um conjunto com duas operações definidas  $+$  e  $\cdot$ .  $V$  munido das operações  $+$  e  $\cdot$  diz-se um espaço vetorial real se, para quaisquer  $X, Y, Z \in V$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$*

1.  $X + Y \in V$
2.  $X + Y = Y + X$
3.  $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
4. existe  $s \in V$  tal que  $s + X = X$ ,  $\forall X \in V$ , (representa-se  $s$  por  $0$ )
5. existe  $u \in V$ , tal que  $u + X = 0$ , (representa-se  $u$  por  $-X$ )
6.  $a.X \in V$
7.  $1.X = X$
8.  $(ab).X = a.(b.X)$
9.  $a.(X + Y) = a.X + a.Y$
10.  $(a + b).X = a.X + b.X$

**Definição 1** *Seja  $V$  um espaço vetorial real. Dizemos que  $W \subset V$  é um subespaço vetorial real de  $V$  se forem satisfeitas as seguintes condições*

1.  $0 \in W$ ;
2. Se  $u, v \in W$  então  $u + v \in W$ ;
3. Se  $u \in W$  então  $\lambda u \in W$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2** *Seja  $u_1, \dots, u_n$  uma sequência de vetores de um espaço vetorial real  $V$ . Dizemos que  $u$  é combinação linear de  $u_1, \dots, u_n$  se existirem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ :*

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

**Definição 3** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real de  $\mathbb{R}^n$  e  $W = \{u_1, \dots, u_n\}$  um subconjunto de  $V$ . Então, chama-se espaço gerado pelo conjunto  $S$ , que se representa por  $L(W)$  ou por  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , ao conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de  $W$ .*

**Definição 4** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real de  $\mathbb{R}^n$  e  $W = \{u_1, \dots, u_n\}$  um subconjunto de  $V$ . Então, diz-se que  $W$  é um conjunto gerador de  $V$  se  $V = L(W)$ , isto é, se*

$$\forall u \in V, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

**Definição 5** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $W = \{u_1, \dots, u_n\}$  um subconjunto de  $V$ . Então:*

1. Diz-se que  $W$  é um conjunto linearmente independente se

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_V \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{R}}$$

2. Se  $W$  é um conjunto linearmente independente, os elementos de  $W$  dizem-se vetores linearmente independentes.
3. Se  $W$  não é um conjunto linearmente independente, diz-se que  $W$  é um conjunto linearmente dependente.

4. Se  $W$  é um conjunto linearmente dependente, os elementos de  $W$  dizem-se vetores linearmente dependentes.

**Definição 6** Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $W = \{u_1, \dots, u_n\}$  um subconjunto de  $V$ . Então diz-se que  $W$  é uma base de  $V$  se  $W$  é um conjunto gerador de  $V$  e é linearmente independente.

**Proposição 1** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$ . Então todas as bases de  $V$  têm  $n$  vetores.

**Demonstração.** Esta demonstração pode ser consultada em [12]. ■

**Definição 7** Sejam  $V$  um espaço vetorial real de  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $V$ . Então, chama-se dimensão do espaço vetorial  $V$  ao número de elementos que constituem a base, escrevendo-se

$$\dim(V) = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diz-se ainda que  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita.

**Observação 1** A Dimensão de um espaço vetorial real é o número de vetores de uma base qualquer. Base é um conjunto de vetores linearmente independente que geram todo o espaço. Se não existir um conjunto finito de vetores que geram o espaço, dizemos que o espaço tem dimensão infinita.

**Definição 8** Seja  $V$  um espaço vetorial real. Um produto interno sobre  $V$  é uma aplicação que a cada par  $(u; v) \in V \times V$  associa um número real denotado por  $\langle u; v \rangle$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V;$
2.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \forall u, v \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R};$
3.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V;$
4.  $\langle u, u \rangle > 0$  se  $u \neq 0, \forall u \in V.$

**Definição 9** Uma norma num espaço vetorial real  $X$  é uma função de  $X$  em  $\mathbb{R}$

$$x \rightarrow \mathbb{R}$$

a qual satisfaz as propriedades abaixo indicadas. Para tal, considere-se  $x, y \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Observação 2** Para simplificar, denotaremos  $\|x\|$  apenas por  $|x|$ .

**Definição 10** (Conjunto Convexo) Um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial real é convexo se todos os segmentos de reta cujas extremidades são pontos de  $X$  estão contidos em  $X$ , ou seja:

$$\forall x, y \in X \forall t \in [0, 1] (1 - t)x + ty \in X$$

### 3.2 Alguns resultados importantes da Análise

**Teorema 1** (Teorema de Weierstrass) Seja  $f$  uma função real de variável real, contínua em  $[a, b]$ . Então  $f$  atinge o seu máximo e mínimo em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Então  $f$  é limitada superiormente e inferiormente. Seja  $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . Em virtude da definição de supremo, existe uma sucessão  $(x_n)$  em  $[a, b]$  tal que  $f(x_n) \rightarrow M$ . Logo, podemos encontrar uma subsucessão  $x_{n_j}$  de  $(x_n)$  que converge para um certo  $y \in [a, b]$ . Como  $f$  é uma função contínua, temos que  $x_{n_j} \rightarrow y$  então  $f(x_{n_j}) \rightarrow f(y)$ . Como  $f(x_n) \rightarrow M$ , vem que  $f(x_{n_j}) \rightarrow M$ . Pela unicidade do limite, conclui-se que

$f(y) = M$ , ou seja, a função  $f$  atinge o seu máximo no intervalo  $[a, b]$ . De forma análoga se mostra que  $f$  atinge o seu mínimo em  $[a, b]$ .

■

**Teorema 2 (Teorema de Rolle)** *Seja  $f$  uma função real de variável real, contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b) = 0$  então existe pelo menos um valor  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

**Demonstração.** Se  $f$  é uma função constante em  $[a, b]$  isto é, se  $f(x) = f(a) = f(b) = 0$  para todo o  $x$  em  $[a, b]$ , então  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , neste caso,  $c$  pode ser qualquer valor do intervalo  $(a, b)$ . Se  $f$  não é constante em  $[a, b]$  então existe  $x$  em  $(a, b)$  tal que  $f(x) < f(a) = f(b) = 0$  ou  $f(x) > f(a) = f(b) = 0$ . Sendo  $f$  contínua em  $[a, b]$  pelo teorema de Weierstrass,  $f$  tem valores mínimo e máximo absolutos em  $[a, b]$ . Se  $f(x) < f(a) = f(b) = 0$ , então  $f$  tem o valor mínimo absoluto nalgum  $c \in (a, b)$ , esse valor será também mínimo local. Se  $f(x) > f(a) = f(b) = 0$ , então  $f$  tem o valor máximo absoluto nalgum  $c \in (a, b)$ , logo esse valor será também máximo local. Como  $f$  é derivável no intervalo  $(a, b)$  e tem pelo menos um valor que é extremo local, tem-se que  $f'(c) = 0$ , o que conclui a demonstração. ■

**Teorema 3 (Teorema de Lagrange)** *Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , então existe pelo menos um valor  $c \in (a, b)$  tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Demonstração.** A demonstração é efetuada aplicando o teorema de Rolle a uma função  $g$  em  $[a, b]$  onde  $g$  é definida como a seguir se indica. Seja  $C$  a inclinação da reta secante ao gráfico de  $f$  contendo  $P(a, f(a))$ , e  $Q(b, f(b))$ .

Então  $C = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  e a equação da reta secante pode ser escrita na forma  $y = f(b) + C(x - b)$ . Considere-se  $g$  a função que dá a distância vertical orientada do ponto  $(x, f(x))$  ao ponto  $(x, y)$  na reta secante, então  $g(x) = y - f(x) = f(b) - f(x) - C(b - x)$ . A função  $g$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , além disso,  $g(a) = g(b) = 0$ . Logo pelo teorema de Rolle, existe pelo menos um valor  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = -f'(c) + C = 0$ , donde  $C = f'(c)$ , ou seja,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . ■

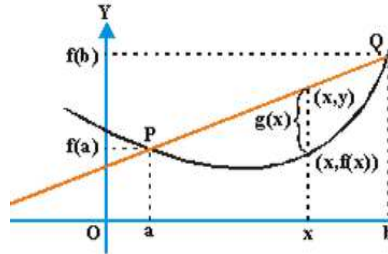


Figura 3.1: Teorema do Valor Médio

**Definição 11** Uma sucessão de funções reais de variável real  $(y_n)$  diz-se que converge uniformemente para uma função  $y$  no intervalo  $[a, b]$  se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |y_n(x) - y(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

**Teorema 4** Se uma sucessão de funções contínuas  $y_n$  numa parte  $X$  não vazia de  $\mathbb{R}$ , converge uniformemente em  $X$ , então a função limite uniforme é contínua em  $X$

**Demonstração.** Seja  $x_0 \in X$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $y_n \rightarrow y$  uniformemente em  $X$ , então existe uma ordem  $p$  independente de  $x$  tal que:

$$|y_n(x) - y(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

para qualquer  $m \geq p$  e qualquer  $x \in X$ . Em particular, para  $x_0 \in X$  temos

$$|y_n(x_0) - y(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como  $y_n(x)$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|y_n(x) - y_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{se } |x - x_0| < \delta.$$

Então

$$\begin{aligned} |y(x) - y(x_0)| &= |y(x) - y_n(x) + y_n(x) - y_n(x_0) + y_n(x_0) - y(x_0)| \leq \\ &\leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_n(x_0)| + |y_n(x_0) - y(x_0)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

para  $|x - x_0| < \delta$ , o que mostra que  $y$  é contínua em  $x_0$ . Como  $x_0$  é arbitrário, a demonstração está concluída. ■

**Teorema 5 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Seja  $f$  uma função real de variável real, integrável em  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Então a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*é contínua em  $[a, b]$ . Também se  $f$  for contínua em  $x_0 \in [a, b]$ ,  $F$  é diferenciável em  $x_0$  e tem-se*

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

**Demonstração.** Em primeiro lugar vamos provar que  $F$  é contínua no ponto  $x_0 \in [a, b]$ , isto é,

$$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0 : |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \delta.$$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \\ &= \left| \int_x^{x_0} f \right| \end{aligned}$$

Independentemente da análise dos casos em que  $x_0 < x$  e  $x_0 \geq x$

$$\left| \int_x^{x_0} f \right| \leq M|x - x_0|,$$

uma vez que  $f$  é limitada em  $[a, b]$  e portanto  $|f| \leq M$  em  $[a, b]$  (para um certo  $M > 0$ .) Deste modo,

$$= |F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| < M\epsilon.$$

Seja  $\delta > 0$  qualquer, mas fixo, e considerando  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon = \frac{\delta}{M}$ , tem-se

que

$$|F(x) - F(x_0)| < M \frac{\delta}{M} = \delta$$

o que prova a continuidade de  $F$  em  $[a, b]$ . Vamos então agora provar que para  $x_0 \in [a, b]$ , a derivada à direita de  $F$  em  $x_0$  é igual a  $f(x_0)$ , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Temos portanto que mostrar que  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0, \forall x \in [a, b]$

$$x_0 < x < x_0 + \epsilon \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \delta$$

Assim

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| = \\ & = \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| = \\ & = \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \end{aligned}$$

e como  $f$  é contínua em  $x_0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$|f(t) - f(x_0)| < \delta$$

para  $x_0 < t < x < x_0 + \epsilon$ . Assim,

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \delta dt = \delta$$



o que mostra que a derivada à direita de  $F$  em  $x_0$  é  $f(x_0)$ . A demonstração para a derivada à esquerda é análoga. ■

**Teorema 6** *Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções reais de variável real, integráveis, que convergem uniformemente para  $f$  em  $[a, b]$ . Então  $f$  é integrável e tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

**Demonstração.** Esta demonstração pode ser consultada em [6] ■

**Definição 12** *Um conjunto  $S$  de funções reais de variável real diz-se equicontínuo num intervalo  $[a, b]$  se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x_1, x_2 \in [a, b], e |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |y(x_1) - y(x_2)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in S.$$

**Definição 13** *Um conjunto  $S$  de funções reais de variável real diz-se uniformemente limitado num intervalo  $[a, b]$ , se existe um número  $M$  tal que  $|y(x)| \leq M$  para qualquer  $x \in [a, b]$  e para qualquer  $y \in S$ .*

Um importante conceito em análise é o de conjuntos compactos. Em espaços de dimensão finita, estes conjuntos são na verdade conjuntos fechados e limitados. Mas em espaços de dimensão infinita, nem todos os conjuntos fechados e limitados são compactos.

**Definição 14 (Noção de cobertura aberta)** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $G = \cup_{\alpha} G_{\alpha}$  é uma cobertura aberta de  $A$  se para todo o  $\alpha$  temos  $G_{\alpha}$  conjunto aberto, e  $A \subset \cup_{\alpha} G_{\alpha}$ .*

**Definição 15 (Conjunto Compacto)** *Dizemos que um conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  é compacto se para toda cobertura aberta de  $K$  existir uma subcobertura finita. Por outras palavras, se existe uma cobertura aberta  $G = \cup_{\alpha} G_{\alpha}$  de  $K$  tal que  $K \subset \cup_{\alpha} G_{\alpha}$ , então existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tais que  $K \subset \cup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$ .*

**Definição 16 (Condição de Lipschitz)** Diz-se que a função  $f$  verifica a condição de Lipschitz (ou é lipschitziana) no domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$  se existe uma constante  $L > 0$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in D$$

$L$  designa-se por constante de Lipschitz.

Dizemos que  $f$  é localmente lipschitziana se em cada ponto  $x \in D$  existe uma vizinhança  $D' \subset D$  tal que a restrição de  $f$  a  $D'$  é lipschitziana.

**Definição 17** Defina-se a matriz jacobiana<sup>1</sup> de  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(DF_X)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad n \in \mathbb{N}$$

em que cada derivada é calculada no ponto  $(x_1, \dots, x_n)$ . Esta derivada pode ser vista como uma função que associa diferentes aplicações lineares ou matrizes a cada ponto de  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $DF : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ .

**Definição 18** A norma  $|DF_X|$  da matriz jacobiana  $DF_X$  é dada por

$$|DF_X| = \sup_{|U|=1} |DF_X(U)|$$

onde  $U \in \mathbb{R}^n$ . Note-se que  $|DF_X|$  não é necessariamente o maior valor próprio da matriz jacobiana de  $X$ .

**Exemplo 1** Suponhamos que

$$DF_X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ao calcularmos o maior valor próprio desta matriz, rapidamente se observa que é 2, e temos  $|DF_X| = 2 \times 1 - 0 \times 0 = 2$ . Neste caso o maior valor próprio

---

<sup>1</sup>A matriz jacobiana deve o seu nome ao matemático alemão Carl Gustav Jakob Jacobi. É a matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial. Se uma função é diferenciável num ponto, a sua derivada é dada em coordenadas pela jacobiana, mas uma função não precisa ser diferenciável para a existência da jacobiana, basta que as derivadas parciais existam.

é igual  $|DF_x|$ , mas se:

$$DF_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Facilmente se observa que a norma é 1. Considere-se

$$U = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Então podemos afirmar que  $|U| = 1$ , pois

$$\left| \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

Logo

$$\begin{aligned} DF_X &= \sup_{|U|=1} |DF_X(U)| = \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right| = \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| \begin{pmatrix} \cos \theta + \sin \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right| = \\ &= \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \sqrt{(\cos \theta + \sin \theta)^2 + \sin^2 \theta} \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

pois, por exemplo, para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  é igual a  $\sqrt{2}$ .

Mas o maior valor próprio é 1, vejamos:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 = 0 & \\ \Leftrightarrow \lambda = 1 & \end{aligned}$$

logo 1 é o maior valor próprio.

Contudo temos que para  $V \in \mathbb{R}^n$

$$|DF_X(V)| \leq |DF_X||V|.$$

De facto podemos observar que se considerarmos  $V = \frac{V}{|V|}|V|$ , assim temos que

$$\begin{aligned} |DF_X(V)| &= \left| \left( DF_X \frac{V}{|V|} |V| \right) \right| = \\ &= \left| \left( DF_X \frac{V}{|V|} \right) \right| |V| \end{aligned}$$

considerando agora que  $U = \frac{V}{|V|}$

$$\leq \sup_{|U|=1} |DF_X(U)||V| = |DF_X||V|$$

**Definição 19** Dizemos que  $F$  é de classe  $C^1$  se as suas derivadas parciais existem e são contínuas.

**Lema 1 (Função Localmente Lipschitziana)** Suponhamos que  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ , onde  $O \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto aberto. Então  $F$  é localmente Lipschitziana.

**Demonstração.** Suponhamos que  $O \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$  e seja  $x_0 \in O$ . Consideremos  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que a bola fechada de raio  $\epsilon$  em torno de  $X_0$ ,  $O_\epsilon$ , está contida em  $O$ , ou seja,  $O_\epsilon \subset O$ . Seja  $k$  uma cota superior da norma  $|DF_X|$  em  $O_\epsilon$ . Este  $k$  existe porque  $DF_X$  é contínua, pois  $F$  é de classe  $C^1$ , e  $O_\epsilon$  é compacto. O conjunto  $O_\epsilon$  é convexo ou seja, se  $y, z \in O_\epsilon$ , então o segmento que une  $z$  a  $y$  está contido em  $O_\epsilon$ . Este segmento é dado por  $Y + sU$ , com  $U = Z - Y$  e  $0 \leq s \leq 1$ . Seja  $\Psi(s) = F(Y + sU)$ ,  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $O_\epsilon \subset O$ ,  $Y + sU : O_\epsilon \subset O \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então pode aplicar-se a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} \Psi'(s) &= DF_{Y+sU}(sU)' = \\ &= DF_{Y+sU}U \end{aligned}$$

$$\Psi(0) = F(Y)$$

$$\Psi(1) = F(Y + U) = F(Z),$$

pois  $U = Z - Y$ , é o mesmo que ter  $Z = U + Y$

$$\begin{aligned} F(Z) - F(Y) &= \Psi(1) - \Psi(0) = \int_0^1 \Psi'(s) ds = \\ &= \int_0^1 (DF_{Y+sU}(U)) ds \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} |F(Z) - F(Y)| &\leq \int_0^1 k|U| ds = \\ &= \int_0^1 k|Z - Y| ds = \\ &= [sk|Z - Y|]_0^1 = \\ &= k|Z - Y|. \end{aligned}$$

■

**Observação 3** A observação seguinte está implícita na demonstração do lema: se  $O$  é convexo e se  $|DF_X| \leq k \quad \forall X \in O$ , então  $k$  é uma constante de lipschitz para  $F|_O$ . Suponhamos que  $J$  é um intervalo aberto e que contém o zero e

$$X : J \longrightarrow O$$

satisfaz a seguinte igualdade

$$X'(t) = F(x(t))$$

com  $X(0) = X_0$ . Integrando temos que

$$\int_0^t X'(s) ds = \int_0^t F(X(s)) ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(t) - X(0) = \int_0^t F(X(s))ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(t) = X(0) + \int_0^t F(X(s))ds$$

Mais à frente veremos que é a forma integral da equação diferencial  $X' = F(X)$ .

**Lema 2** Suponhamos que  $U_k : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$  é uma sucessão de funções contínuas definidas num intervalo fechado  $J$  que satisfaz

$$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : \forall p, q > N \quad \max_{t \in J} |U_p(t) - U_q(t)| < \epsilon$$

Então existe uma função contínua  $U : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\max_{t \in J} |U_k(t) - U(t)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

Mais geralmente, podemos dizer que para  $t$  com  $|t| \leq a$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t U_k(s)ds = \int_0^t U(s)ds$$

**Demonstração.** Esta demonstração pode ser consultada no livro [10](pp. 151 - 153) ■

**Lema 3** (Desigualdade de Gronwall)

Seja  $u : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e não negativa. Suponhamos que  $C \geq 0$  e  $K \geq 0$  são tais que

$$u(t) \leq C + \int_0^t Ku(s)ds \quad \forall t \in [0, \alpha].$$

Então

$$u(t) \leq Ce^{Kt}, \quad \forall t \in [0, \alpha]$$

**Demonstração.** Suponhamos em primeiro lugar que  $C > 0$ . Seja

$$U(t) = C + \int_0^t Ku(s)ds > 0$$

logo  $u(t) \leq U(t)$ .

$$U'(t) = Ku(t)$$

Dividindo tudo por  $U(t)$  temos que

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \leq K,$$

pois

$$U(t) \geq u(t)$$

daqui resulta que

$$\frac{U'(t)}{U(t)} \leq K \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\log(U(t))) \leq K \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(\log(U(t))) \leq \int_0^t K dt$$

Então, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\log(U(t)) - \log(U(0)) \leq Kt$$

Sendo  $U(0) = C$  vem que

$$\log(U(t)) - \log(C) \leq Kt$$

$$\log \frac{U(t)}{C} \leq Kt$$

$$\frac{U(t)}{C} \leq e^{Kt}$$

$$U(t) \leq Ce^{Kt}$$

Mas sabemos que  $u(t) \leq U(t)$  então temos que

$$u(t) \leq Ce^{Kt}$$

Consideremos agora o caso em que  $C = 0$ .

Seja  $c_1, c_2, \dots$  uma sucessão de elementos positivos  $c_i$  que converge para 0, quando  $i \rightarrow \infty$ .

Sabemos por hipótese que  $K \geq 0$  e  $t \geq 0$ ,

$$0 \leq u(t) \leq c_i + \underbrace{\int_0^t Ku(s)ds}_{U(t)}$$

$$0 \leq u(t) \leq U(t) \leq \underbrace{c_i}_{i \rightarrow \infty} \underbrace{e^{Kt}}_{\geq 0},$$

então vem

$$0 \leq u(t) \leq 0$$

■



## Capítulo 4

# Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que contém uma variável independente,  $t$  e uma variável dependente  $x$ , e algumas das suas derivadas,  $x'$ ,  $x''$ , ...,  $x^{(n)}$ . A ordem de uma EDO, é a maior ordem da sua derivada. De uma forma geral, uma EDO de ordem  $n$ , pode ser escrita:

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

sendo  $F$  uma função conhecida.

### 4.1 Equações Diferenciais Ordinária de 1ª Ordem

Uma EDO de 1ª ordem é da forma

$$x' = f(t, x) \tag{4.1}$$

O problema que se coloca é encontrar todas as funções  $x$  que são solução desta equação. Vejamos primeiro um caso mais simples. Suponhamos que o membro direito da equação depende apenas de  $t$ , isto é,

$$x' = g(t) \tag{4.2}$$

onde  $g$  é uma função integrável em ordem ao tempo. Para se encontrar uma possível solução, integramos ambos os membros da equação,

$$\int x'(t) dt = \int g(t) dt,$$

donde

$$x(t) = \int g(t) dt + c, c \in \mathbb{R}.$$

**Definição 20** *Uma EDO linear de 1ª ordem é da forma*

$$x' + a(t)x = b(t) \tag{4.3}$$

com  $a(t)$  e  $b(t)$  funções contínuas.

- Se  $b(t) = 0$  a equação (4.3) é uma EDO linear de 1ª ordem homogénea.
- se  $b(t) \neq 0$  a equação (4.3) é uma EDO linear de 1ª ordem não homogénea.

Vejamos a solução geral de uma EDO linear de 1ª ordem homogénea:

$$x' + a(t)x = 0$$

dividindo tudo por  $x \neq 0$ ,

$$\frac{x'}{x} + \frac{a(t)x}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'}{x} = -a(t) \Leftrightarrow$$

integrando ambos os membros da igualdade,

$$\int \frac{x'}{x} dt = \int -a(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| = - \int a(t) dt + c_1, c_1 \text{ arbitrário}$$

Aplicando a função exponencial a ambos os membros da equação, vem que:

$$e^{\ln|x|} = e^{-\int a(t)dt+c_1},$$

donde a solução geral é:

$$x(t) = ce^{-\int a(t)dt} \quad (4.4)$$

O estudo deste tipo de equações torna-se interessante com o estudo de problemas de valor inicial.

**Definição 21** *Uma solução (particular) da equação diferencial (4.1) definida num intervalo  $I$  é uma função  $x(t)$  definida também no intervalo  $I$  tal que a sua derivada  $x'(t)$  está definida no intervalo  $I$  e satisfaz a equação (4.1) nesse intervalo. Ao problema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

dá-se o nome de problema de valor inicial ou (PVI).

**Exemplo 2** *Consideremos o seguinte problema de valor inicial:*

$$x' + a(t)x = 0 \text{ e } x(t_0) = x_0$$

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x} + a(t)\frac{x}{x} &\Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{x'}{x} dt = - \int_{t_0}^t a(t) dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln|x(t)| - \ln|x(t_0)| &= - \int_{t_0}^t a(t) dt \Leftrightarrow \ln \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| = - \int_{t_0}^t a(t) dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{x(t)}{x_0} \right| = e^{-\int_{t_0}^t a(t) dt} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t a(t) dt}$$

Analisando agora uma EDO de 1ª ordem não homogénea, (4.3),  $b(t) \neq 0$  Considere-se uma função  $x$  contínua, tal que:

$$p_1(t)x' + p_0(t)x = b(t) \quad (4.6)$$

Com  $p_0$ ,  $p_1$  e  $b$  funções contínuas e  $p_1 \neq 0$  num certo intervalo  $I$ . Neste caso a equação (4.6) pode escrever-se na forma

$$x' + p(t)x = q(t) \quad (4.7)$$

com  $p(t) = \frac{p_1(t)}{p_0(t)}$  e  $q(t) = \frac{b(t)}{p_0(t)}$  funções contínuas em  $I$ . A equação homogênea correspondente

$$x' + p(t)x = 0 \quad (4.8)$$

pode ser resolvida por uma separação de variáveis

$$\frac{1}{x}x' = -p(t)$$

e com a correspondente primitivação de acordo com a solução geral encontrada em (4.4)

$$x(t) = ce^{-\int p(t)dt} \quad (4.9)$$

Ao dividir-se (4.8) por  $x$ , não se tem em consideração a solução dita trivial  $x \equiv 0$ , já que (4.8) admite sempre esta solução nula. Contudo, apesar disso, esta solução já está incluída em (4.9), para tal basta fazer  $c = 0$ . Para um problema de valor inicial formado por (4.8) e  $x(t_0) = x_0$ , com  $t_0 \in I$ , então a solução será

$$x(t) = x_0 e^{-\int_{t_0}^t p(y)dy}$$

A resolução da equação completa (4.7) também pode ser reduzida a um caso de primitivação, para isso basta multiplicá-la por

$$e^{\int p(t)dt} \quad (4.10)$$

e obtém-se

$$e^{\int p(t)dt}[x' + p(t)x] = e^{\int p(t)dt}q(t)$$

$$\left(xe^{\int p(t)dt}\right)' = e^{\int p(t)dt}q(t)$$

$$xe^{\int p(t)dt} = c + \int e^{\int p(t)dt}q(y)dy$$

sendo a solução geral dada por

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt} \left( c + \int e^{\int p(t)dt} q(y)dy \right) \quad (4.11)$$

**Observação 4** Esta solução  $x(t)$  é da forma  $cu(t) + v(t)$ , pelo que a solução geral da equação linear completa (4.7) se pode obter pela adição entre a solução geral da equação homogénea (4.8) e uma solução particular de (4.7).

Para obter a solução do problema de valor inicial correspondente, basta apenas encontrar o elemento da família de soluções (4.11) que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ , ou seja,

$$x(t) = e^{-\int_{x_0}^t p(s)ds} \left( y_0 + \int_{x_0}^t e^{\int_{x_0}^y p(s)ds} q(y)dy \right)$$

Observa-se que se  $p(t)$  e  $q(t)$  forem funções constantes, por exemplo,  $p(t) = p$  e  $q(t) = q$ , a solução será:

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{q}{p} \right) e^{p(x_0-t)} + \frac{q}{p}$$

**Exemplo 3** Considere-se a EDO de 1ª ordem

$$x' - 2tx = 0 \quad (4.12)$$

Pretende-se encontrar a solução geral da equação. Sabemos que  $x' + a(t)x = b(t)$  com  $b(t) = 0$  é uma EDO homogénea. Então  $x(t) = e^{-\int a(t)dt}$ , como  $a(t) = -2t$ , vem que  $x(t) = e^{-\int -2tdt}$ , donde se conclui que  $x(t) = e^{t^2}$ .

**Exemplo 4** Considere-se a equação diferencial ordinária não homogénea

$$x'(t) + \frac{2}{t}x = t \quad (4.13)$$

esta equação é da forma (4.7), logo podemos reduzi-la a um caso de primitivação, para tal basta multiplicá-la por (4.10). Consideremos então

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} =$$

$$e^{2 \ln |t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

Multiplicando a equação (4.13) por  $\mu(t)$ , obtemos:

$$t^2 x'(t) + 2tx = t^3$$

O primeiro membro da equação é igual à derivada do produto de  $t^2 x(t)$ , assim,

$$\frac{d}{dt} (t^2 x(t)) = t^3$$

integrando ambos os termos obtemos que:

$$t^2 x(t) = \frac{t^4}{4} + c$$

então a solução geral da equação diferencial é dada por

$$x(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{c}{t^2} \tag{4.14}$$

### 4.1.1 Método de Separação de Variáveis

Considerem-se as equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{f(x)}$$

em que  $f$  e  $g$  são funções contínuas de  $x$  e  $t$ , respetivamente. Assim,

$$x' = \frac{g(t)}{f(x)}$$

pode ser escrita na forma

$$f(x)x' = g(t).$$

Seja  $F$  a função primitiva de  $f$ , então

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = g(t),$$

usando a derivada da função composta,

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = x'F'(x(t)) = x'f(x),$$

Integrando ambos os membros da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}F(x(t))dt &= \int g(t)dt + c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(x(t)) &= \int g(t)dt + c, c \text{ arbitrário} \end{aligned}$$

### 4.1.2 Equações Exatas

As equações diferenciais da forma

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, x) = 0,$$

resolvem-se facilmente, para tal basta integrar os lados da igualdade e obtemos

$$\Psi(t, x) = \textit{constante}$$

Esta equação é a equação diferencial de primeira ordem mais geral que conseguimos, de momento, resolver. É necessário reconhecer quando é que uma EDO pode ser transformada nesta forma, o que nem sempre é obvio, por exemplo:

#### Exemplo 5

$$2t + x - \sin t + (3x^2 + \cos x + t)\frac{dx}{dt} = 0$$

*pode ser escrita na forma*

$$\frac{d}{dt}(x^3 + t^2 + tx + \sin x + \cos t) = 0.$$

Para encontrarmos todas as equações diferenciais que podem ser escritas na forma  $\frac{d}{dt}\Psi(t, x) = 0$ , temos de observar a partir da regra da cadeia que:

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, x) = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

Também a equação diferencial

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\Psi(t, x) = 0$$

onde  $M$  e  $N$  são funções contínuas,  $N \neq 0$ , com as derivadas parciais  $M'_x$  e  $N'_t$  contínuas no retângulo

$$S = \{(t, x) : |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+. \quad (4.16)$$

Se existir uma função  $F(t, x)$  tal que

$$F'_t(t, x) = M(t, x) \text{ e } F'_x(t, x) = N(t, x), \quad (4.17)$$

a equação (4.15) diz-se exata. Esta designação vem do fato de

$$M + Nx' = F'_t + F'_x x'$$

ser exatamente a derivada de  $F$  em relação à variável independente  $t$ . Assim,

$$F(t, x) = c$$

é solução de (4.15). Mas para que se possa escrever nesta forma, tem de existir  $\Psi(t, x)$  de tal forma que

$$M(t, x) = \frac{\partial\Psi}{\partial t} \text{ e } N(t, x) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

**Teorema 7** *Sejam  $M(t, x)$  e  $N(t, x)$  duas funções contínuas com derivadas*



parciais  $M'_x(t, x)$  e  $N'_t(t, x)$  contínuas no retângulo  $S$  dado por (4.16). Então a equação diferencial

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0$$

é exata se, e só se,

$$M'_x(t, x) = N'_t(t, x)$$

**Demonstração.** Por hipótese, suponhamos que

$$M(t, x) + N(t, x) \frac{dx}{dt} = 0$$

é exata e sabendo que

$$F'_t(t, x) = M(t, x) \text{ e } F'_x(t, x) = N(t, x)$$

então passamos a ter

$$F''_{tx} = M'_x \text{ e } F''_{xt} = N'_t.$$

Como  $M'_x$  e  $N'_t$  são contínuas, logo por Cauchy-Schwarz vem

$$F''_{tx} = F''_{xt},$$

donde  $M'_x = N'_t$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $M$  e  $N$  verificam a equação

$$M'_x(t, x) = N'_t(t, x)$$

Queremos mostrar que existe uma função  $F$  que satisfaça as igualdades

$$F'_t(t, x) = M(t, x) \text{ e } F'_x(t, x) = N(t, x)$$

para provarmos que

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

é exata.

Integrando ambos os membros da equação

$$F'_t = M(t, x)$$

em ordem à primeira variável (entre  $t_0$  e  $t$ ), temos então que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t F'_s(s, x) ds &= \int_{t_0}^t M(s, x) ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(t, x) - F(t_0, x) &= \int_{t_0}^t M(s, x) ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(t, x) &= \int_{t_0}^t M(s, x) ds + F(t_0, x) \end{aligned}$$

Seja  $g(x) = F(t_0, x)$  uma função arbitrária que só depende de  $x$ , que vai ter o papel de constante de integração, e que pode ser obtida através da relação  $F'_x(t, x) = N(t, x)$ , assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^t M(s, x) ds + g'(x) = \\ &= \int_{t_0}^t M'_x(s, x) ds + g'(x) = \\ &= N(t, x), \end{aligned}$$

donde se pode concluir que

$$g'(x) = N(t, x) - \int_{t_0}^t M'_x(s, x) ds \quad (4.18)$$

Integrando esta equação entre  $x_0$  e  $x$ , a função  $g$  é dada explicitamente por

$$g(x) = \int_{x_0}^x N(t, s) ds - \int_{t_0}^t M(s, x) ds + \int_{t_0}^t M(s, x_0) ds + g(x_0)$$

Substituindo esta equação na equação  $F(t, x) = \int_{t_0}^t M(s, x)ds + g(x)$  obtém-se a solução da equação diferencial (4.15)

$$F(t, x) = \int_{x_0}^x N(t, s)ds + \int_{t_0}^t M(s, x_0)ds + c.$$

A escolha de  $t_0$  e  $x_0$  é arbitrária, sendo apenas necessário garantir que os integrais não são impróprios. Derivando agora a nossa equação (4.18) em ordem a  $t$ , tem-se que

$$\begin{aligned} N'_t(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t M'_x(s, x)ds &= \\ &= N'_t(t, x) - M'_x(t, x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, garantimos que a expressão (4.18) depende apenas de  $x$  e fica garantida a existência da função  $g$ . Consequentemente garante-se que  $F$  verifica (4.17) e é obtida por

$$F(t, x) = \int_{t_0}^t M(s, x)ds + g(x).$$

■

## 4.2 Equações Diferenciais de 2ª Ordem

### 4.2.1 Equações Diferenciais Lineares

Uma equaçãodiferencial linear de 2ª ordem é uma equação da forma

$$x'' = f(t, x, x').$$

A equação de 2ª ordem mais famosa é a equação da 2ª lei de Newton

$$\begin{aligned} F &= ma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F(t, x, x') &= mx''. \end{aligned}$$

A expressão geral de uma EDO linear de 2ª ordem é da forma

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t) \quad (4.19)$$

Se  $g(t) = 0$  obtemos uma EDO de 2ª ordem homogénea.

**Teorema 8** *Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são duas soluções da equação*

$$x'' + p_0(t)x' + p_1(t)x = 0 \quad (4.20)$$

*e  $c_1, c_2$  são constantes arbitrárias, então*

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

*é também uma solução da equação.*

**Demonstração.** Por hipótese  $x_1$  e  $x_2$  são soluções da equação (4.20). Então qualquer combinação linear de  $x_1$  e  $x_2$  também é solução. Seja  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , logo queremos mostrar que

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

também é solução. Assim temos que,

$$x_1'' + p_0(t)x_1' + p_1(t)x_1 = 0$$

$$x_2'' + p_0(t)x_2' + p_1(t)x_2 = 0$$

donde podemos dizer que

$$\begin{aligned} & (c_1x_1 + c_2x_2)'' + p_0(t)(c_1x_1 + c_2x_2)' + p_1(t)(c_1x_1 + c_2x_2) = \\ & = c_1x_1'' + c_2x_2'' + p_0(t)c_1x_1' + p_0(t)c_2x_2' + p_1(t)c_1x_1 + p_1(t)c_2x_2 = \\ & = c_1 \underbrace{(x_1''p_0(t)x_1' + p_0x_1)}_0 + c_2 \underbrace{(x_2''p_1(t)x_2' + p_1x_2)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Logo  $(c_1x_1 + c_2x_2)$  é solução de (4.20).

■

Suponhamos que  $x_1(t)$  é solução de

$$p_2(t)x'' + p_1(t)x' + p_0(t)x = 0$$

então podemos arranjar uma segunda solução que seja da forma

$$x_2(t) = u(t)x_1(t)$$

substituindo na equação temos que:

$$p_2(ux_1)'' + p_1(ux_1)' + p_0(ux_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_2u''x_1 + 2p_2u'x_1' + p_2ux_1'' + p_1u'x_1 + p_1ux_1' + p_0ux_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_2u''x_1 + (2p_2x_1' + p_1x_1)u' + (p_2x_1'' + p_1x_1' + p_0x_1)u = 0$$

como se sabe,  $x_1(t)$  é solução da equação, então:

$$(p_2x_1'' + p_1x_1' + p_0x_1) = 0$$

Falta então encontrar a segunda solução, logo

$$p_2u''x_1 + (2p_2x_1' + p_1x_1)u' = 0$$

Considerando a seguinte mudança de variável,  $\begin{cases} u' = V \\ V' = u'' \end{cases}$ , obtemos

$$p_2V'x_1 + (2p_2x_1' + p_1x_1)V = 0$$

Se multiplicarmos agora a EDO de 1ª ordem por  $\frac{x_1}{p_2}$ , temos que

$$x_1^2V' + 2x_1'x_1V + \frac{p_1}{p_2}x_1^2V = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2V)' + \frac{p_1}{p_2}x_1^2V = 0$$

Desta equação já sabemos determinar a equação,

$$x_1^2 V = ce^{-\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{c}{x_1^2} e^{-\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt}$$

Atendendo a que  $u' = V$ , podemos então concluir que

$$u' = \frac{c}{x_1^2} e^{-\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt}$$

Então a segunda solução é dada por

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{c}{x_1^2} e^{-\int \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt} dt$$

#### 4.2.2 Equações Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Uma EDO linear de segunda ordem pode ser escrita na forma

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = f(t).$$

Suponhamos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  constantes, com  $a \neq 0$ . Então, recorrendo à mudança de variável  $x' = y$ , temos que:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ ay' + by + cx = f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y + \frac{f(t)}{a} \end{cases}$$

Se  $f(t) = 0$ , a equação diz-se homogénea.

Consideremos o seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

O sistema linear pode ser escrito na forma  $X' = AX$ ,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a matriz dos coeficientes e  $X \in \mathbb{R}^2$ . A origem é sempre um ponto de equilíbrio de um sistema linear. Para encontrarmos outros pontos de equilíbrio temos de resolver o sistema linear das seguintes equações algébricas:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

se

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = 0,$$

o sistema tem uma solução diferente da solução trivial (solução nula), conseqüentemente temos infinitas soluções neste caso. Mas se o  $\det A \neq 0$  o sistema só tem a solução trivial.

**Proposição 2** *O sistema linear  $X' = AX$  tem:*

1. *Um único ponto de equilíbrio se  $\det A \neq 0$*
2. *Uma linha reta de pontos de equilíbrio se  $\det A = 0$  e  $A \neq 0$*

**Demonstração.**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Se  $ad = bc$ , podemos ter ou não solução, mas se existir, existem infinitas soluções. Se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , então temos sempre infinitas soluções. Vejamos

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{b}{a}y \\ -c\left(\frac{b}{a}y\right) + dy = 0. \end{cases}$$

Desde que  $a \neq 0$  temos que  $(ad - bc)y = 0$ , Então as soluções da equação são sempre da forma

$$\left(-\frac{b}{a}y, y\right)$$

Como o  $y$  é arbitrário, temos infinitas soluções, todas combinações lineares umas das outras. Então o sistema tem uma linha reta de pontos de equilíbrio quando  $\det A = 0$  e  $A \neq 0$ . No caso em que  $\det A \neq 0$ , a única solução possível é a trivial,

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

**Teorema 9** *Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  duas soluções  $X' = AX$ , em que*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

*Então:*

1.  $cX(t)$  é solução para qualquer  $c \in \mathbb{R}$
2.  $X(t) + Y(t)$  também é solução.

**Demonstração.** Começemos por demonstrar a primeira condição. Sabemos que se  $X(t)$  é solução de  $X' = AX$  então temos que:

$$\frac{d}{dt}(cX(t)) = c \frac{dX(t)}{dt} = cAX(t) = A(cX(t))$$



Assim, também  $cX(t)$  é solução.

Provemos agora a segunda condição: Se  $X(t)$  e  $Y(t)$  são soluções de  $\dot{X} = AX$ , então:

$$\frac{d}{dt}(X(t) + Y(t)) = \frac{dX(t)}{dt} + \frac{dY(t)}{dt} = AX(t) + AY(t) = A(X(t) + Y(t))$$

Então  $X(t) + Y(t)$  são soluções de  $\dot{X} = AX$ . ■

Coloca-se agora o problema de como encontrar soluções que não são pontos de equilíbrio do sistema

$$X' = AX. \tag{4.21}$$

Definamos primeiro vetor e valor próprio de uma matriz quadrada  $A$ .

**Definição 22** Um vetor não nulo  $V_0$  é um vetor próprio da matriz  $A$  se  $AV_0 = \lambda V_0$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A constante  $\lambda$  diz-se um valor próprio de  $A$ .

Observa-se que há uma relação importante entre os valores próprios, vetores próprios e soluções dos sistemas de equações diferenciais.

**Teorema 10** Suponhamos que  $V_0$  é um vetor próprio da matriz  $A$  associado ao valor próprio  $\lambda$ , isto é,  $AV_0 = \lambda V_0$ . Então a função  $X(t) = e^{\lambda t}V_0$  é solução do sistema  $\dot{X} = AX$ .

**Demonstração.**  $V_0 \neq 0$ ,  $X' = AX$  então temos que

$$\begin{aligned} X'(t) &= \lambda e^{\lambda t}V_0 = e^{\lambda t}(\lambda V_0) = \\ &= e^{\lambda t}(AV_0) = A(e^{\lambda t}V_0) = AX(t) \end{aligned}$$

■

**Teorema 11** Suponhamos que a matriz  $A$  tem um par de valores próprios reais  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e vetores próprios associados  $V_1$  e  $V_2$ , respetivamente. Então a solução geral do sistema linear  $X' = AX$  é:

$$X(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}V_1 + \beta e^{\lambda_2 t}V_2.$$

**Demonstração.** Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  são dois valores próprios com vetores próprios associados  $V_1$  e  $V_2$ , respetivamente, então  $V_1$  e  $V_2$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}^2$ . Consequentemente, para qualquer  $X_0 \in \mathbb{R}^2$  existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$X_0 = \alpha V_1 + \beta V_2.$$

Consideremos uma função  $X(t)$  definida por:

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t),$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são soluções previamente determinadas. Então podemos afirmar que  $X$  é solução de  $X' = AX$ , ou seja:

$$\begin{aligned} X'(t) &= \alpha X_1'(t) + \beta X_2'(t) = \\ &= \alpha AX_1(t) + \beta AX_2(t) = \\ &= A(\alpha X_1(t) + \beta X_2(t)) = \\ &= AX(t). \end{aligned}$$

Assim concluímos que  $X' = AX$ . Então podemos afirmar que  $X(t)$  é solução de  $X' = AX$ , e satisfaz  $X(0) = X_0$ .

Vejamos que é a única solução. Suponhamos  $Y(t)$  é outra solução de  $X' = AX$  com  $Y(0) = X_0$ . Então podemos escrever

$$Y(t) = \mu_1(t)V_1 + \mu_2(t)V_2$$

com  $\mu_1(0) = \alpha_1$  e  $\mu_2(0) = \alpha_2$ . Consequentemente

$$AY(t) = Y'(t) = \mu_1'(t)V_1 + \mu_2'(t)V_2.$$

Mas sabemos que

$$\begin{aligned} AY(t) &= \mu_1(t)AV_1 + \mu_2(t)AV_2 = \\ &= \lambda_1\mu_1(t)V_1 + \lambda_2\mu_2(t)V_2. \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\mu_1'(t) = \lambda_1 \mu_1(t)$$

$$\mu_2'(t) = \lambda_2 \mu_2(t)$$

Como  $\mu_1(0) = \alpha_1$  e  $\mu_2(0) = \alpha_2$  e como já foi visto anteriormente, segue que

$$\mu_1(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}, \mu_2(t) = \beta e^{\lambda_2 t}$$

donde inferimos que  $Y(t)$  é de facto  $X(t)$ . ■

### 4.3 Teorema da Existência e Unicidade de Solução

O teorema que se enuncia em seguida é considerado por muitos como o teorema fundamental das Equações Diferenciais Ordinárias.

Consideremos o sistema de equações diferenciais

$$X' = F(X),$$

onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Uma solução é, como já vimos, uma função  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida num certo intervalo  $J \subset \mathbb{R}$  tal que, para qualquer  $t \in J$ ,

$$X'(t) = F(X(t)).$$

Recordemos também que uma condição inicial é da forma

$$X(t_0) = X_0,$$

onde  $t_0 \in J$  e  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Infelizmente, as equações diferenciais não lineares podem não ter soluções satisfazendo certas condições iniciais. Além disso, no caso não linear poderão existir também várias soluções para o mesmo problema de valor inicial.

**Teorema 12** *Considere-se o problema de valor inicial*

$$X' = F(X), \quad X(0) = X_0$$

onde  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é de classe  $C^1$ . Então existe solução única do problema de valor inicial. Mais precisamente existe  $a > 0$  e uma solução única.

$$X : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

da equação diferencial que satisfaz a condição inicial

$$X(0) = X_0.$$

**Demonstração.** Pelo facto que  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ , implica que a função

$$X \rightarrow DF_X$$

é uma função contínua. A forma integral da equação diferencial

$$X' = F(X),$$

já visto na Observação 3

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(X(s))ds$$

Para se conseguir provar a existência de solução, vamos usar a forma integral da equação diferencial.

Vamos assumir que:

1.  $O_\rho$  é uma bola fechada de centro  $X_0$  e raio  $\rho > 0$
2.  $F$  é lipschitziana de constante  $K$  em  $O_\rho$
3.  $|F(X)| \leq M$  em  $O_\rho$ , para algum  $M > 0$
4. Escolhe-se  $a < \min \left\{ \frac{\rho}{M}, \frac{1}{K} \right\}$  e seja  $J = [-a, a]$ .

Para provarmos a unicidade de solução, começamos por definir uma sucessão de funções  $U_0, U_1, \dots : J \rightarrow O_\rho$ . Assim provaremos que estas funções convergem uniformemente para uma função que satisfaz a equação diferencial. Posteriormente, mostraremos a unicidade de solução.

A sucessão de funções é definida recursivamente usando o método das aproximações sucessivas, que pode ser consultado no Capítulo 6.1. Consideremos  $U_0(t) \equiv X_0$ . Para  $t \in J$  definimos

$$\begin{aligned} U_1(t) &= X_0 + \int_0^t F(U_0(s))ds = X_0 + \int_0^t F(X_0)ds = \\ &= X_0 + tF(X_0) \end{aligned}$$

Como  $J = [-a, a]$  e  $t \in J$ ,  $|t| \leq a$  e pela condição 3 ( $|F(X_0)| \leq M$ ) segue que

$$\begin{aligned} |U_1(t) - X_0| &= \\ &= |X_0 + tF(X_0) - X_0| = \\ &= |tF(X_0)| = \\ &= \underbrace{|t|}_{\leq a} \underbrace{|F(X_0)|}_{\leq M} \leq aM \leq \rho, \end{aligned}$$

pois  $a < \frac{\rho}{M}$ , por hipótese. Então  $U_1(t) \in O_\rho(X_0)$ ,  $\forall t \in J$ .

Suponhamos que

$$U_k(t) = X_0 + \int_0^t F(U_{k-1}(s))ds, \quad U_0(t) = X_0$$

verifica

$$|U_k(t) - X_0| \leq \rho, \quad \forall t \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Queremos então mostrar que

$$U_{k+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(U_k(s))ds$$

verifica  $|U_{k+1}(t) - X_0| \leq \rho$ :

$$\begin{aligned} |U_{k+1} - X_0| &= \\ &= \left| X_0 + \int_0^t F(U_k(s))ds - X_0 \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t F(U_k(s)) ds \right| &\leq \int_0^t \underbrace{|F(U_k(s))|}_{\leq M} ds \leq \\ &\left| \int_0^t M ds \right| = \\ &M|t| \leq Ma \leq \rho \end{aligned}$$

De seguida vamos provar que

$$\exists L > 0 \forall k \geq 0 : |U_{k+1}(t) - U_k(t)| \leq (aK)^k L$$

Seja  $L = \max |U_1(t) - U_0(t)|$ ,  $|t| \leq a$ . Este máximo existe, pelo Teorema de Weierstrass. Observa-se também que  $L \leq Ma$ . Temos que

$$\begin{aligned} |U_2(t) - U_1(t)| &= \\ \left| X_0 + \int_0^t F(U_1(s)) ds - X_0 - \int_0^t F(U_0(s)) ds \right| &= \\ \left| \int_0^t (F(U_1(s)) - F(U_0(s))) ds \right| &\leq \\ \int_0^t |F(U_1(s)) - F(U_0(s))| ds &\leq \end{aligned}$$

como  $F$  é localmente lipschitziana de constante  $K$ ,

$$\int_0^t K|U_1(s) - U_0(s)| ds \leq aKL$$

Por indução, suponhamos que para  $k \geq 2$  já está provado que

$$|U_k(t) - U_{k-1}(t)| \leq (aK)^{k-1} L, \quad |t| \leq a$$

Então, vem agora que

$$|U_{k+1}(t) - U_k(t)| = \left| X_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds - X_0 - \int_0^t F(U_{k-1}(s)) ds \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t F(U_k(s)) ds - \int_0^t F(U_{k-1}(s)) ds \right| \\
& \left| \int_0^t F(U_k(s)) - F(U_{k-1}(s)) ds \right| \leq \\
& \int_0^t |F(U_k(s)) - F(U_{k-1}(s))| ds \leq \\
& \int_0^t k |U_k(s) - U_{k-1}(s)| ds \leq \\
& k \int_0^t |U_k(s) - U_{k-1}(s)| ds \leq \\
& (ak)^1 (ak)^{k-1} L = (ak)^k L
\end{aligned}$$

Considerando  $\alpha = aK$ , vem  $\alpha < 1$  por hipótese e dado  $\epsilon > 0$ , podemos escolher um  $N$  suficientemente grande tal que para quaisquer  $r > s > N$ , temos que

$$\begin{aligned}
|U_r(t) - U_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |U_{k+1}(t) - U_k(t)| \leq \\
&\sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \leq \epsilon
\end{aligned}$$

uma vez que o resto da série geométrica pode ser tão pequeno quanto se queira. Pelo Lema 2, a sucessão de funções  $U_0, U_1, \dots$  converge uniformemente para uma função contínua  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então através da identidade:

$$U_{k+1}(t) = X_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds$$

temos, passando ao limite ambos os membros da igualdade

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} U_{k+1}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (X_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds) \Leftrightarrow \\
X(t) &= X_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_0^t F(U_k(s)) ds \right) =
\end{aligned}$$

$$X_0 + \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} F(U_k(s)) ds = \\ X_0 + \int_0^t F(X(s)) ds$$

A demonstração do teorema da existência e unicidade de solução compreende-se em dois grandes passos. O primeiro está concluído, pois já provámos a existência de solução, falta então provar a unicidade de solução.

Suponhamos que  $X, Y : J \rightarrow O$  são duas soluções da equação diferencial satisfazendo

$$X(0) = Y(0) = X_0.$$

Seja

$$Q = \max_{t \in J} |X(t) - Y(t)|$$

Este máximo é atingido para algum  $t_1 \in J$ .

Então

$$Q = |X(t_1) - Y(t_1)| = \left| \int_0^{t_1} X'(s) - Y'(s) ds \right| \leq \\ \int_0^{t_1} |F(X(s)) - F(Y(s))| ds \leq \\ \int_0^{t_1} \underbrace{K |X(s) - Y(s)|}_{\leq a} ds \leq akQ$$

Então, desta inequação,

- se  $Q \neq 0$ , como  $ak < 1$ , a desigualdade é impossível
- Para que a igualdade seja válida, concluímos então que  $Q = 0$ .

Assim vem  $X(t) = Y(t)$ , e conseqüentemente a solução é única. ■

Em termos finais, mostrou-se que dada qualquer bola  $O_\rho \subset O$  de raio  $\rho$  em torno de  $X_0$ , tal que:

- $|F(X)| \leq M$ ;
- $F$  lipschitziana de constante  $K$ ;



- $0 < a < \min\{\frac{\rho}{M}; \frac{1}{K}\}$ ;

existe uma única solução  $X : [-a; a] \rightarrow O$  da equação diferencial, tal que  $X(0) = X_0$ . Em particular, este resultado verifica-se se  $F$  é uma função de classe  $C^1$  em  $O$ .

#### 4.4 Dependência das condições iniciais

Para que o teorema da existência e unicidade de solução possa ser ainda mais valorizado física e matematicamente, é necessário completá-lo com uma propriedade que nos garanta que a solução  $X(t)$  depende continuamente da solução inicial.

**Definição 23** *O fluxo associado a uma equação diferencial é uma aplicação  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$t \rightarrow \Phi(t, x_0)$$

*que também se pode denotar por  $\Phi_t(x_0)$  e é a solução de  $X' = f(X)$  que para  $t = 0$ , passa por  $x_0$ .*

Na verdade, o fluxo é uma família de curvas que são as soluções da equação diferencial  $X' = f(X)$  para as diversas condições iniciais. O fluxo satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\Phi_0(x_0) = x_0$
2.  $\Phi_t(\Phi_s(x_0)) = \Phi_{t+s}(x_0)$

**Teorema 13** *Seja  $O \subset \mathbb{R}^n$  aberto e suponhamos que  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipshitziana de constante  $K$ . Sejam  $Y(t)$  e  $Z(t)$  soluções de  $X' = F(X)$  que permanecem em  $O$  e estão definidas no intervalo  $[t_0, t_1]$ . Então  $\forall t \in [t_0, t_1]$  temos que*

$$|Y(t) - Z(t)| \leq |Y(t_0) - Z(t_0)|e^{K(t-t_0)}$$

**Demonstração.** Defina-se:

$$v(t) = |Y(t) - Z(t)|.$$

Como

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t F(Y(s))ds$$

e

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^t F(Z(s))ds,$$

então:

$$\begin{aligned} Y(t) - Z(t) &= Y(t_0) + \int_{t_0}^t F(Y(s))ds - Z(t_0) - \int_{t_0}^t F(Z(s))ds = \\ &= Y(t_0) - Z(t_0) + \int_{t_0}^t (F(Y(s)) - F(Z(s)))ds, \end{aligned}$$

Donde

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t K v(s)ds$$

e aplicando agora a desigualdade de Gronwall à função

$$u(t) = v(t + t_0),$$

obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= v(t + t_0) \leq \\ &\leq v(t_0) + \int_{t_0}^{t+t_0} K v(s)ds \leq v(t_0)e^{Kt} \end{aligned}$$

donde vem

$$v(t) \leq v(t_0)e^{K(t-t_0)}$$

que é a conclusão do teorema. ■

Em particular temos o seguinte corolário:

**Corolário 1** (*Dependência Contínua das Condições Iniciais*)

Seja  $\Phi(t, x)$  o fluxo do sistema  $X' = F(X)$  onde  $F$  é de classe  $C^1$ . Então  $\Phi$  é uma função contínua de  $X$ .

## Capítulo 5

# Sistemas Dinâmicos

Quando Isaac Newton elaborou a sua teoria sobre gravitação, fez com que a humanidade desse um salto em relação à ciência do passado. Até então, a geometria dominava o mundo. A lei de Newton sobre a dinâmica dos corpos, introduziu a noção de diferenciabilidade, de derivada e de integral. A noção de como as taxas variam no tempo, fez com que conceitos antigos tivessem que ser revistos. A noção da derivada passou a envolver outro conceito sobre limites, o que fez com que muitos matemáticos se dedicassem exclusivamente a tentar alcançar o infinito através de séries e sucessões. A fórmula

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

diz que uma taxa (taxa de crescimento, taxa de inflação, entre outras) varia no tempo e recebe o nome de derivada, quando para um intervalo de tempo muito, mas muito pequeno, a diferença entre uma função no passado e seu valor "delta" no futuro é ponderado pelo tempo e torna-se o declive de uma reta tangente à trajetória dos dados. Assim, a derivada de uma função apresenta o declive de uma reta que é tangente à sua trajetória, o que é bem diferente do simples cálculo da taxa média

$$\frac{\Delta f(t)}{dt} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Segundo Robert Devaney, um sistema dinâmico é um modelo matemático de um processo cuja evolução passada e futura depende unicamente do estado presente.

O principal objetivo dos sistemas dinâmicos é compreender o comportamento assintótico de sistemas, para os quais existe uma regra determinística para a evolução dos estados. Os sistemas podem envolver várias variáveis e normalmente são não lineares. É frequente a ocorrência de comportamentos dinâmicos muito complicados, gerados mesmo por equações com uma forma algébrica simples. Outro aspeto da natureza caótica dos sistemas é a sensibilidade às condições iniciais, ou seja, a possibilidade de estados tão próximos quanto se queira, sofrerem evoluções muito diferentes. Nestes casos, não podemos utilizar soluções numéricas com total confiança, pois existem erros de cálculo pelo meio, os quais podem produzir soluções bastante diferentes. Interessa-nos, então, saber como é que uma solução aproximada está relacionada com a solução exata das equações.

Em certos sistemas caóticos, é possível compreender a evolução de alguns conjuntos de valores iniciais e demonstrar que as soluções aproximadas dadas por um dado esquema numérico, são traçadas pela evolução através da solução verdadeira, ou seja, de um conjunto próximo de valores iniciais.

Se o sistema modelar o clima, por exemplo, não é muito interessante conhecer todo o espetro de possibilidades de clima que podem ocorrer a partir de certas condições iniciais. Contudo, é interessante saber quais os fatores que provocam instabilidades na evolução do sistema.

## 5.1 Classificação de Sistemas

A classificação de sistemas dinâmicos não se revela linear, pois cada autor apresenta a sua própria classificação.

Assim, a presente classificação de sistemas dinâmicos segue o que o autor Robert Devaney expressa no seu livro, ver [5]

- Sistemas em tempo contínuo e em tempo discreto

Os sistemas em tempo contínuo (ou sistemas dinâmicos contínuos) são

os sistemas para os quais o tempo sucede de forma contínua, ou seja, o tempo tem valores reais. Por exemplo, num tanque de água, o nível varia continuamente ao longo do tempo. O estado é então uma função do tempo,  $x(t) \in \mathbb{R}$  com  $t \in \mathbb{R}$ .

Os sistemas em tempo discreto (ou sistemas dinâmicos discretos) são sistemas em que o tempo tem valores inteiros. O estado evolui como uma sucessão.

- Sistemas de parâmetros distribuídos ou concentrados

Um sistema diz-se que é de parâmetros concentrados quando tem um número finito de variáveis de estado. Por exemplo, o volume de água no interior de um tanque é apenas uma variável, portanto o tanque é um sistema de parâmetros concentrados. Um circuito elétrico é também um sistema de parâmetros concentrados, pois tem um número finito de condensadores e bobines.

Um sistema de parâmetros distribuídos é um sistema em que o estado não pode ser descrito por um número finito de variáveis de estado. Por exemplo, a temperatura no interior dum forno, não sendo homogénea, não pode ser descrita por uma única variável nem por um conjunto de variáveis. O estado, neste caso, vai ser uma função do espaço e do tempo dada por  $T(x, y, z, t)$ , em que  $(x, y, z)$  são as coordenadas de um ponto no interior do forno e  $t$  é o tempo.

- Sistemas determinísticos e estocásticos

Um sistema determinístico é um sistema em que o estado toma valores reais. Num sistema estocástico, o estado é uma variável aleatória e é descrita por uma função de densidade de probabilidade.

- Sistemas autónomos e não autónomos

Um sistema não autónomo (ou variante no tempo) é um sistema cuja descrição varia ao longo do tempo. Um painel solar é um sistema variante no tempo, pois a acumulação de pó diminui o seu rendimento. Um automóvel

também é um sistema variante no tempo, pois a massa total do veículo varia (com o consumo do combustível).

Um sistema autónomo (ou invariante no tempo) é um sistema cuja descrição não varia ao longo do tempo. Um sistema de controlo implementado num computador digital pode ser invariante no tempo.

- Sistemas lineares e não lineares

Um sistema linear é um sistema que verifica o chamado princípio da sobreposição, ou seja, a resposta do sistema à soma de dois sinais é igual à soma das respostas do sistema a cada sinal individualmente.

Um sistema não linear é um sistema que não verifica o princípio da sobreposição. Na natureza não existem sistemas lineares, no entanto é usual considerar determinados sistemas como sendo lineares, uma vez que existe uma teoria bem estabelecida para este tipo de sistemas. Por exemplo, é comum considerar um sistema massa-mola com atrito como sendo linear. De facto o sistema é não linear, pois existem limites ao alongamento da mola, além dos quais, esta pode partir-se ou fica deformada. No entanto, se se fizer alongamentos reduzidos e a baixa velocidade, então o comportamento do sistema aproxima-se ao de um sistema linear.

Na presente tese, vai-se estudar os sistemas dinâmicos discretos, determinísticos, contínuos de parâmetros concentrados e variantes no tempo.

## 5.2 Sistemas Dinâmicos Discretos

Um sistema dinâmico discreto é um sistema em que o seu estado só muda durante os instantes  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ . No intervalo de tempo entre dois desses instantes, o estado permanece constante. O estado de um sistema discreto a uma dimensão é determinado completamente por uma variável,  $y$ . O valor da variável de estado nos instantes  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$  será uma sucessão  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ . O intervalo de tempo entre diferentes pares de instantes sucessivos  $t_n$  e  $t_{n+1}$  não tem que ser o mesmo. A equação de evolução permite calcular o estado  $y_{n+1}$ , num instante  $t_{n+1}$ , a partir do estado  $y_n$ , no

instante anterior  $t_n$  :

$$y_{n+1} = F(y_n) \quad (5.1)$$

onde  $F(y)$  é uma função conhecida. A equação anterior é uma equação de diferenças de primeira ordem. Dado um estado inicial  $y_0$ , sucessivas aplicações da função  $F$  permitem obter a sucessão de estados  $y_n$ . Nalguns casos pode ser possível obter uma expressão geral para  $y_n$  em função de  $n$ . A evolução de um sistema discreto de primeira ordem:

$$y_{n+1} = F(y_n)$$

é obtida aplicando sucessivamente a função  $F$ , ao estado inicial  $y_0 = c$  :

$$c, F(c), F(F(c)), F(F(F(c))), \dots$$

ou, de forma mais compacta:

$$c, F(c), F^2(c), F^3(c), \dots, y_n = F^n(c)$$

Uma forma gráfica de representar a evolução do sistema consiste em desenhar um ponto para cada passo na sucessão, com abcissa igual ao índice  $n$  e ordenada igual a  $y_n$ . Recorrendo ao programa "Maxima", usando o comando "evolution" que já vem incluído no pacote adicional "dynamics", é possível desenhar este tipo de diagrama.

Outro tipo de diagrama que é muito útil para analisar os sistemas dinâmicos discretos a uma dimensão é o diagrama de degraus<sup>1</sup> que consiste em representar as funções  $y = F(x)$  e  $y = x$ , e uma série alternada de segmentos verticais e horizontais que unem os pontos  $(y_0, y_0)$ ,  $(y_0, y_1)$ ,  $(y_1, y_1)$ ,  $(y_1, y_2)$ , etc. Por exemplo, a figura (5.2) mostra o diagrama de degraus para o caso da sucessão representada na figura (5.1).

Deverão ser dados três argumentos ao programa "Máxima". O primeiro argumento deverá ser uma expressão que dependa unicamente da variável  $y$ , essa expressão especifica a função  $F(y)$  no lado direito da equação . O

---

<sup>1</sup>Em inglês staircase diagram ou cobweb diagram.

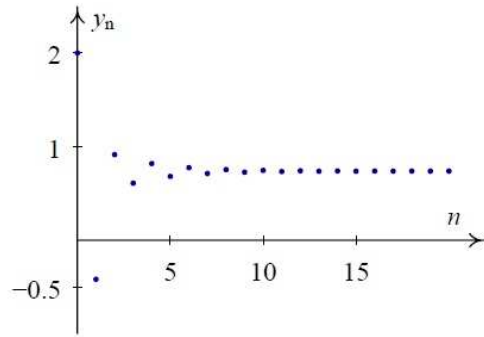


Figura 5.1: Evolução de  $y_{n+1} = \cos(y_n)$  com  $y_0 = 2$ .

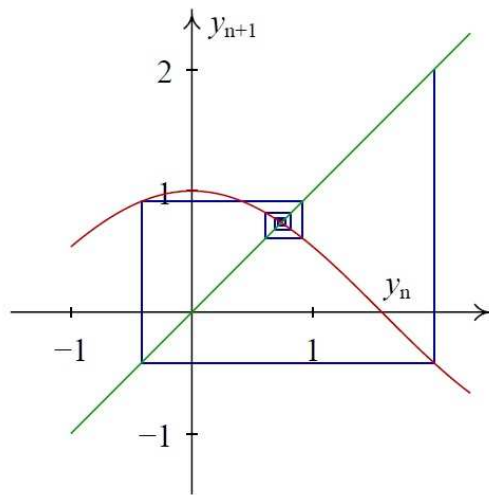


Figura 5.2: Staircase para  $x_{n+1} = \cos(x_n)$  com  $x_0 = 2$ .



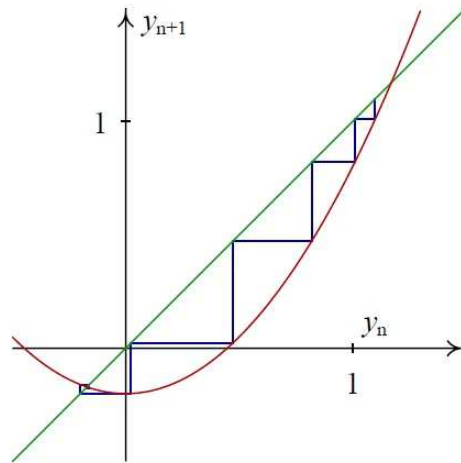


Figura 5.3: Solução do sistema  $y_{n+1} = y_n^2 - 0,2$  com valor inicial 1.1

segundo argumento deverá ser o valor inicial  $y_0$  e o terceiro argumento será o número de elementos na sucessão, que serão desenhados. Por exemplo, na figura (5.2), usando a variável  $y$ , temos  $F(y) = \cos(y)$ , com valor inicial  $y_0 = 2$ . Para obter o gráfico de evolução dos primeiros 20 termos, usamos os comandos: `load("dynamics"); evolution(cos(y), 2, 20)`; O mesmo acontece para a função "staircase", basta usar o comando `staircase(cos(y),2,8)`

**Exemplo 6** Consideremos o sistema  $y_{n+1} = y_n^2 - 0,2$ . Se começarmos com um valor  $y_0 = 1,1$  obtém-se o gráfico (5.3).

Observa-se que a sucessão converge para um valor  $y$  negativo que é o ponto de interseção das funções  $F(y) = y^2 - 0,2$  e  $G(y) = y$ , nomeadamente,  $y = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ .

As duas funções interceptam-se num outro ponto positivo  $y = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ .

No gráfico podemos observar que apesar do valor inicial estar muito perto do segundo ponto de interseção, a sucessão afasta-se para o primeiro ponto, devido à função  $y^2 - 0,2$  se encontrar abaixo de  $G(y) = y$ , na região entre os dois pontos de interseção.

Se usarmos um valor inicial à direita do segundo ponto de interseção, por exemplo,  $y_0 = 1.5$ , a sucessão cresce rapidamente afastando-se para infinito

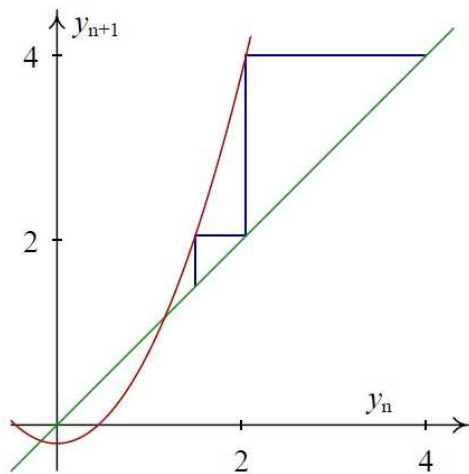


Figura 5.4: Solução do sistema  $y_{n+1} = y_n^2 - 0,2$  com valor inicial 1,5

(figura 5.3). Para que as sucessões convergissem para o segundo ponto de interseção, seria necessário que entre os dois pontos  $F(y) > G(y)$  isto é, que o declive de  $F(y)$  fosse menor que 1, em vez de maior que 1, no segundo ponto de interseção.

**Exemplo 7** Analisemos as soluções do modelo logístico que consiste em considerar uma população  $P$  com uma taxa de natalidade constante,  $a$ , e uma taxa de mortalidade diretamente proporcional à população,  $bP$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes adequadas.

A população em questão pode ser por exemplo um grupo duma espécie animal, onde a sucessão  $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$  representa o número de espécime durante vários anos sucessivos. Seja  $P_n$  o número de espécimes no início do período  $n$ . Durante esse período nascem, em média,  $aP_n$  espécimes e morrem  $bP_n^2$ . Assim, no início do próximo período,  $n + 1$ , a população será

$$P_{n+1} = (a + 1)P_n \left(1 - \frac{b}{a + 1}P_n\right)$$

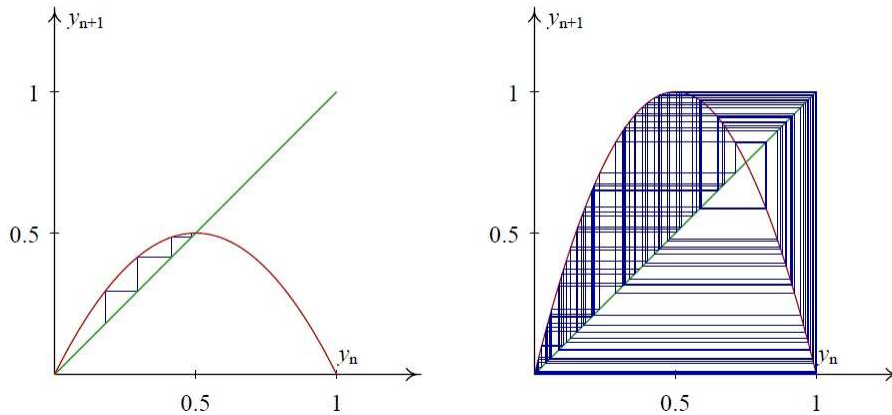


Figura 5.5: Soluções do modelo logístico com valor inicial 0.1. Para  $c = 2$  (esquerda) a sucessão converge, mas para  $c = 4$  (direita) o comportamento é caótico.

Seja  $y_n = b \frac{P_n}{a+1}$ , assim obtemos uma equação com um único parâmetro

$$c = a + 1$$

$$y_{n+1} = cy_n(1 - y_n)$$

A figura (5.5) mostra as soluções obtidas com um valor inicial  $y_0 = 0.1$ , nos casos em que  $c = 2$  e  $c = 4$ . Para  $c = 2$  a solução converge rapidamente para o ponto fixo  $y = 0.5$ . Para  $c = 4$ , o estado do sistema passa por muitos valores diferentes, entre 0 e 1, sem parecer obedecer a nenhuma regra. Esse tipo de comportamento é designado de caótico. O estado num instante qualquer está perfeitamente determinado pelo estado no instante anterior, mas uma pequena modificação do estado no instante inicial conduz a uma evolução completamente diferente nos instantes seguintes.

**Definição 24** Um ponto fixo dum sistema é um ponto  $y_0$  onde o estado do sistema permanece constante. Para isso acontecer será necessário e suficiente que

$$F(y_0) = y_0$$

*isto é, sucessivas aplicações da função  $F$  não modificam o valor inicial. A solução do sistema, com valor inicial  $y_0$ , é uma sucessão constante  $\{y_0, y_0, y_0, \dots\}$*

Consideremos um ponto fixo, onde a função  $F(x)$  intersecta a recta  $y = x$ , e com a derivada da função,  $F'(x)$ , maior que 1 nesse ponto, nomeadamente, no ponto de interseção da curva  $F(x)$  e a recta  $y = x$ . Assim, ao desenharmos o diagrama de degraus a partir de um ponto perto do ponto fixo, a sucessão afastar-se-à do ponto fixo, formando uma escada. Esse tipo de ponto fixo designa-se de nó repulsivo.

Se a derivada for negativa e menor que  $-1$ , as sucessões também se afastam do ponto fixo mas, neste caso, alternando de um lado para o outro, formando uma "teia de aranha" no diagrama de degraus. Dizemos que o ponto fixo é um foco repulsivo.

Se a derivada da função  $F$  tiver um valor compreendido entre 0 e 1, as sucessões que começarem perto do ponto fixo aproximam-se dele, descrevendo uma escada no diagrama de degraus. Esse tipo de ponto fixo designa-se de nó atrativo.

Se a derivada da função  $F$  tiver um valor compreendido entre 0 e  $-1$ , as sucessões que começarem perto do ponto fixo aproximam-se dele, alternando de um lado para o outro, e descrevendo uma teia de aranha no diagrama de degraus. O ponto designa-se de foco atractivo. Em suma, temos os seguintes tipos de pontos fixos  $y_0$  :

1. Nó atrativo, se  $0 \leq F'(y_0) < 1$
2. Nó repulsivo, se  $F'(y_0) > 1$
3. Foco atrativo, se  $-1 < F'(y_0) < 0$
4. Foco repulsivo, se  $F'(y_0) < -1$ .

Se  $F'(y_0)$  for igual a 1 ou  $-1$ , a situação é mais complexa, o ponto fixo poderá ser atrativo ou repulsivo, ou atrativo num lado e repulsivo no outro.

### 5.3 Pontos periódicos

Se a sucessão  $y_0, y_1, y_2, \dots$  for uma solução do sistema dinâmico

$$y_{n+1} = F(y_n)$$

um elemento qualquer na sucessão pode ser obtido diretamente a partir de  $y_0$ , através da função composta  $F^n$

$$y_n = F^n(y_0) = F(F(\dots(F(y_0))))$$

Uma solução será um ciclo de período 2 se for uma sucessão de dois valores alternados  $y_0, y_1, y_0, y_1, \dots$ , com  $y_0 \neq y_1$ . Os dois pontos  $y_0, y_1$  são pontos periódicos com período igual a 2. Como  $y_2 = F^2(y_0) = y_0$ , é necessário que  $F^2(y_0) = y_0$ . E como  $y_3 = F^2(y_1) = y_1$  temos também que  $F^2(y_1) = y_1$ . Também como  $F(y_0) = y_1 \neq y_0$ , é preciso que  $F(y_0) \neq y_0$ , e como  $F(y_1) = y_0 \neq y_1$ , também é preciso que  $F(y_1) \neq y_1$ .

Todas as condições anteriores podem ser resumidas dizendo que dois pontos  $y_0$  e  $y_1$  formam um ciclo de período 2, se ambos forem pontos fixos da função  $F^2(y)$ , mas sem serem pontos fixos da função  $F(y)$ . Dito de outra forma, quando calcularmos os pontos fixos da função  $F^2$ , deverão aparecer todos os pontos fixos da função  $F$ , mais os pontos periódicos, de período 2, da função  $F$ .

O ciclo será atrativo ou repulsivo segundo o valor que a derivada de  $F^2$  tiver em cada ponto do ciclo. Para calcular a derivada de  $F^2$  em  $y_0$  usa-se a regra da cadeia

$$(F^2(y_0))' = (F(F(y_0)))' = F'(F(y_0))F'(y_0) = F'(y_1)F'(y_0).$$

Grosso modo, a derivada de  $F^2$  é igual nos dois pontos  $y_0, y_1$  que fazem parte do ciclo, e é igual ao produto da derivada de  $F$  nos dois pontos.

Generalizando, um ponto  $y_0$  faz parte dum ciclo de período  $m$ , se  $F^m(y_0) = y_0$  mas  $F^j(y_0) \neq y_0$ , para  $j < m$ . Os  $m$  pontos que formam o

ciclo completo são

$$\begin{aligned} & y_0 \\ & y_1 = F(y_0) \\ & y_2 = F^2(y_0) \\ & \dots \\ & y_{m-1} = F^{m-1}(y_0). \end{aligned}$$

Todos esses pontos são pontos fixos de  $F^m$  mas não podem ser pontos fixos de  $F^j$ , com  $j < m$ . Se o valor absoluto do produto da derivada nos  $m$  pontos do ciclo:

$$\prod_{j=0}^{m-1} F'(y_j)$$

for maior que 1, o ciclo será repulsivo; se o produto for menor que 1, o ciclo será atrativo, e se o produto for igual a 1, o ciclo poderá ser atrativo ou repulsivo, em diferentes regiões.

## 5.4 Modelo Linear e Modelo Logístico

Os sistemas deterministas têm em qualquer instante as equações que regem o sistema (contrariamente a modelos estocásticos), partindo de certas condições iniciais. O que não significa que o problema seja solúvel. Tipicamente (em sistemas não lineares) uma ínfima alteração das condições iniciais provoca um comportamento totalmente distinto.

Os sistemas dinâmicos deterministas têm em comum duas características:

1. Sensibilidade às condições iniciais.
2. Têm feedback (cada valor obtido é o próximo valor de partida).

Para que se possa entender melhor o que isto significa vamos considerar a dinâmica de um sistema que evolui em intervalos de tempo discretos. Isto é, em vez da evolução no tempo contínuo, como a de um planeta em órbita,

ou de um pêndulo, tornamos tudo mais simples e vamos pensar em sistemas nos quais o tempo é contado à unidade.

Um exemplo é a evolução da população de uma determinada espécie ao longo de sucessivas gerações. Neste sistema, um intervalo de tempo corresponde a uma geração.

Suponhamos que uma primeira geração da população tem  $x_1$  indivíduos. Qual a população  $x_2$  da geração seguinte?

É intuitivo que a nova geração dependa da primeira, embora não deva ser necessariamente igual, uma vez que fatores como a taxa de natalidade, mortalidade, competição por alimento, etc., devam pesar no evoluir da população de uma geração para a seguinte. Portanto, pretendemos arranjar uma regra  $f$  que englobe estes fatores e que ao introduzirmos  $x_1$  nos devolva o valor  $x_2$ , da população da geração seguinte. Prosseguindo desta maneira, a lógica será a mesma para, a partir da 2ª geração. Calculamos a população da 3ª, e assim sucessivamente.

Na dinâmica de populações que estamos a definir, a iteração da mesma regra permite calcular a população  $x_n$  de uma geração arbitrária  $n$ .

Uma única regra de transformação  $f$  constitui um modelo determinista para a evolução da população, através do mecanismo de "feedback" que estabelece cada novo valor da população como o valor de partida para o cálculo da geração seguinte.

Juntamente com feedback, a não linearidade é uma característica essencial nestes sistemas. A dinâmica definida por  $f$  diz-se linear quando a representação gráfica de  $f$  for uma reta, o que significa que a regra atua de uma maneira uniforme de ponto para ponto.

Introduzimos já os dois ingredientes essenciais do caos e propusemos também um sistema simples que os possui. O passo seguinte será encontrar uma boa maneira de observar a evolução da dinâmica do sistema, ou seja o conjunto dos valores  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  que representam o estado do sistema ao longo do tempo. Estes conjuntos de valores chamam-se órbitas do sistema e a melhor maneira de estudarmos o comportamento qualitativo das órbitas é recorrendo à iteração gráfica da regra  $f$ . A figura (5.8) é um exemplo de iteração gráfica num sistema linear e não linear respetivamente.

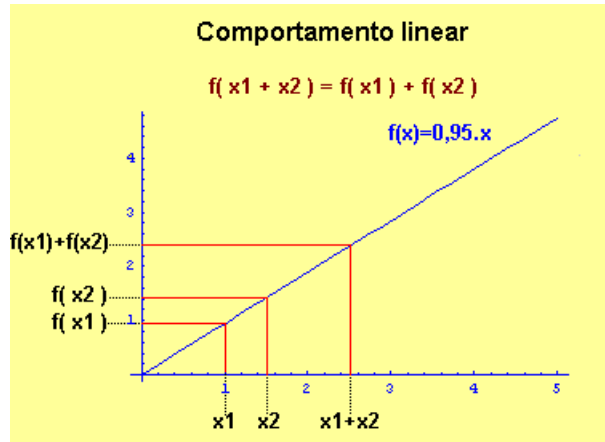


Figura 5.6: Modelo Linear

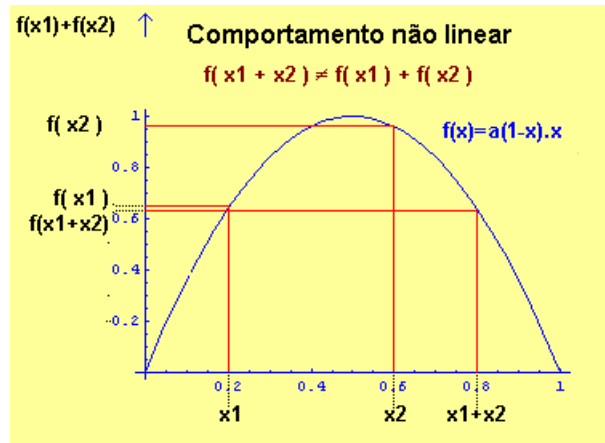


Figura 5.7: Modelo não Linear



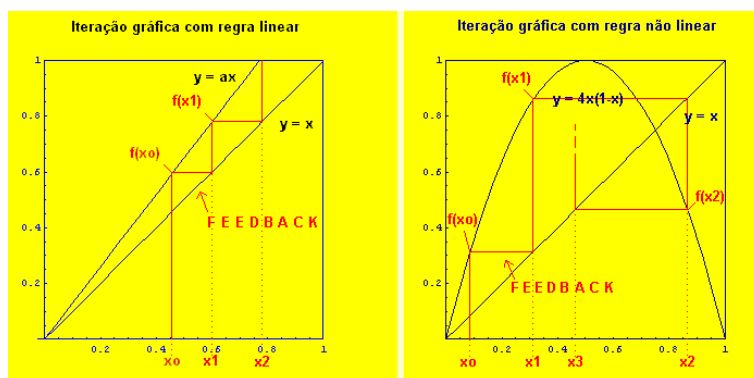


Figura 5.8: Modelo Linear vs Modelo não Linear

Ao tentarmos perceber como a dinâmica evolui, observamos que:

1. Uma condição inicial  $x_0$  (a população da 1<sup>a</sup> geração) entra na regra  $f$  de forma a obtermos o valor da geração seguinte. Graficamente significa traçarmos uma linha vertical que vai de  $x_0$  a  $f(x_0)$ .
2.  $f(x_0) = x_1$ , e portanto  $x_1$  será o novo ponto a introduzir na regra para acharmos a população da geração seguinte. Se traçarmos uma linha horizontal a passar por  $f(x_0) = x_1$ , este ponto encontra-se naturalmente sobre a vertical que passa pela intersecção da linha horizontal, em que  $y = x_1$ , com a reta auxiliar  $y = x$ , também traçada no gráfico.
3. Procedendo desta maneira para  $n$  arbitrário podemos encontrar a posição no gráfico dos sucessivos pontos que constituem uma órbita.

Apesar de as órbitas se poderem construir desta maneira simples, veremos que, no caso não linear, o sistema pode exibir uma variedade de comportamentos complexos, incluindo caos.

Procurando melhorar no modelo logístico com uma regra de transformação mais realista:

$$f(x) = ax(1 - x)$$

onde agora o fator de crescimento

$$\frac{f(x)}{x}$$

pode variar desde um valor máximo,  $a$ , até 0, quando a população atinge o valor 1 (estamos deste modo a introduzir unidades normalizadas, em que  $x = 1$  corresponde à população máxima que faz sentido considerar). Isto traduz a ideia de que a abundância de recursos por indivíduo se reflete no balanço entre nascimentos e mortes.

Este modelo chama-se função logística e corresponde a uma regra de iteração que é não linear: o gráfico do modelo logístico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

Partindo agora de uma condição inicial  $x_0$ , podemos calcular a população de qualquer geração iterando a regra de transformação  $f$ . Tal como no modelo linear, o valor do parâmetro  $a$  determina o comportamento qualitativo das órbitas do sistema, mas neste caso esse comportamento é muito mais variado e complexo.

Por exemplo, se o parâmetro  $a$  estiver entre 3 e 3,44, temos uma órbita de período 2, mas se o parâmetro  $a$  for de 3,5, passamos de imediato a uma órbita de período 4, independentemente das condições iniciais. Deste forma, à medida que aumentamos o valor do parâmetro da aplicação logística, o comportamento qualitativo do sistema muda.

Uma descrição global do sistema envolve o conhecimento de todos os comportamentos possíveis para os vários valores do parâmetro, e essa descrição resume-se recorrendo a um diagrama de bifurcação.

## 5.5 Diagrama das Bifurcações para a função quadrática

O diagrama de bifurcações é um gráfico dos valores assintóticos da variável de estado  $x$  versus o parâmetro de controlo. No exemplo da aplicação logística, no eixo das abcissas, representamos os valores do parâmetro  $a$ , e no eixo das ordenadas os valores assintóticos de  $x_t$ .

Para  $0 < a < 1$ , só existe o ponto fixo estável na origem  $x_b^* = 0$ , logo neste intervalo os valores assintóticos de  $x_a^* = 0$  são iguais a zero, formando um segmento de linha reta.

Para o intervalo  $1 < a < 2$ , a origem torna-se instável, daí que o segmento de reta seja a tracejado; quando aparece o segundo ponto fixo  $x_b^* = 1 - \frac{1}{a}$ , que é estável e menor que  $1/2$ , é representado por um ramo de parábola cheia em função de  $a$  variando dentro do intervalo  $]1, 2[$ .

Para o intervalo  $2 < a < 3$  os mesmos factos são verificados, exceto o segundo ponto fixo, que é agora maior que  $1/2$ .

O ponto fixo estável em  $a = 2$  corresponde à interseção entre este ramo de parábola e uma reta horizontal em  $x = \frac{1}{2}$ . Se traçarmos uma reta vertical neste intervalo veremos que a tendência das iterações é atrativa em relação a  $x_b^*$ , e repulsiva em relação à origem.

Finalmente, no intervalo  $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ , o segundo ponto fixo perde estabilidade, sendo representado por um ramo tracejado de parábola, surgindo uma órbita de período 2 estável. Esta órbita é representada por dois ramos cheios de parábola, que correspondem aos dois sinais da expressão dada por  $x_h(a) = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$  e  $x_h(a) = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$ . Este é o estado assintótico da maioria das órbitas. Na verdade, as únicas exceções seriam órbitas cujas condições iniciais fossem colocadas exatamente sobre os pontos fixos instáveis ou nas pré imagens e que neles permaneceriam por toda a eternidade.

Entretanto, nós jamais conseguimos especificar com precisão infinita um número qualquer na prática. Por exemplo, se usarmos três casas decimais (após a vírgula) para uma condição inicial, como  $x_0 = 0,004$ , a quarta casa decimal já é completamente incerta, no sentido que arredondamos o seu conteúdo usando a regra conhecida. Os números 0,0039; 0,0041; 0,0037; etc... seriam todos arredondados para 0,004, de modo que há uma infinidade de valores próximos porém diferentes de 0,004. É impossível colocar uma condição inicial exatamente num ponto fixo ou órbita periódica instável, pois qualquer pequeno desvio (como aquele provocado pelos erros de arredondamento) já é suficiente para afastar as iterações subsequentes do ponto fixo ou órbita instável.

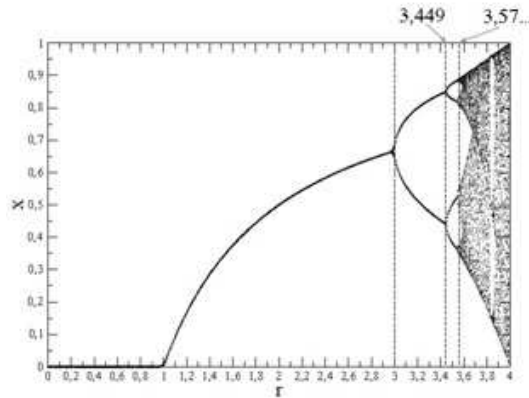


Figura 5.9: Diagrama de Bifurcação

As duas soluções encontradas para a função quadrática, supondo que a função quadrática é da forma  $f_a(x) = ax(1 - x)$ , duplicando o período, obtém-se

$$f_a(f_a(x)) = x,$$

que é uma equação de grau 4, da forma

$$-a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^2 + a^3)x^2 + (a^2 - 1)x = 0.$$

Parece uma equação complicada, mas já conhecemos duas soluções. Uma delas é zero e a outra é  $1 - \frac{1}{a}$ , então já podemos fazer dois abaixamentos de grau, transformando a equação de  $4^{\circ}$  grau numa do segundo grau. Depois disto obtemos as soluções vistas anteriormente.

Outra característica importante dos diagramas obtidos numericamente é a ausência de órbitas periódicas instáveis. Basicamente é a impossibilidade prática de um número com precisão finita ser colocado exatamente numa órbita instável.

O diagrama de bifurcações mostra que há uma sequência de bifurcações de duplicação de período, começando em  $a = 3.0$  e continuando até  $a \approx 3.57$ .

Para  $a > 3.57$  as iterações do modelo não parecem mais parar numa órbita de período bem definido, muito embora a simples observação da

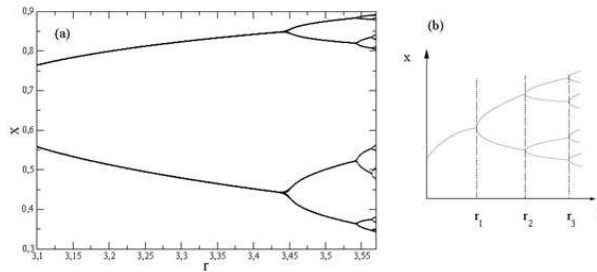


Figura 5.10: (a) Ampliação de parte do diagrama de bifurcações do mapa logístico. (b) Esquema de uma cascata de bifurcações de duplicação de período no mapa logístico (não está em escala)

figura não nos permita, de facto, discernir entre uma órbita de período muito alto, como 5000, e algo qualitativamente diferente. Na verdade, este comportamento é o que chamaremos de caos.

Feigenbaum determinou os valores do parâmetro  $a$  para os quais a aplicação logística sofre bifurcação de duplicação de período. Denomine-se  $a_n$  o valor do parâmetro  $a$  para o qual há uma bifurcação de período  $2^n$  para o período  $2^{n+1}$ . Por exemplo,  $a_1 = 3$  marca a bifurcação de um ponto fixo (período 1) para um 2-ciclo (período 2). Demonstra-se analiticamente que a bifurcação seguinte ocorre para  $a_2 = 1 + \sqrt{6}$ .

Esses resultados estão na Tabela abaixo, que ainda contém as bifurcações até período 128. Várias conclusões interessantes emergem da análise dos resultados da tabela. Inicialmente, observamos que a razão das distâncias entre bifurcações sucessivas  $\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_n-a_{n-1}}$  parecem convergir para um valor

constante, à medida que cresce o período da órbita.

$n$	período= $2^n$	$a_n$	$a_n - a_{n-1}$	$\frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}}$
1	2	3.0000000	-	-
2	4	3.4494896	0.4494896	-
3	8	3.5440903	0.0946007	4.7514
4	16	3.5644073	0.0203170	4.6562
5	32	3.5687594	0.0043521	4.6683
6	64	3.5696916	0.0009322	4.6686
7	128	3.5698013	0.0001997	4.6692

Se este valor fosse constante para todas as bifurcações, poderíamos classificar a sucessão de intervalos inter bifurcações,  $a_n - a_{n-1}$ , como uma progressão aritmética decrescente e infinita.

No entanto, a razão acima não é propriamente constante, mas sim tende a um valor constante, aproximando-se dele à medida que  $n$  tende a infinito. Este valor corresponde formalmente ao seguinte limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = \delta = 4,669201609\dots,$$

que se deve a Feigenbaum.

Outra observação importante é que a cascata de bifurcações de duplicação de período acumula-se no ponto onde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_\infty = 3,5699456\dots$$

Mais precisamente, podemos realizar em computador, com base nos dados da Tabela, as distâncias entre os vários pontos de bifurcação e o valor onde elas se acumulam

$$a_\infty - a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} = \frac{c}{\delta^n}$$

onde  $c = 2.637$  e  $\delta$  é a constante de Feigenbaum.

## Capítulo 6

# Métodos Numéricos

Os métodos numéricos são métodos que podem ser usados para a obtenção de soluções numéricas para problemas, quando por uma qualquer razão não podemos ou não desejamos usar métodos analíticos exatos. A maior parte dos problemas concretos são, em geral, complexos e envolvem fenómenos não lineares, tendo-se assim de recorrer a métodos numéricos para obter soluções aproximadas. Existem inúmeros métodos, mas neste trabalho apenas vamos ver alguns.

### 6.1 Método das Aproximações sucessivas de Piccard

Suponhamos que pretendemos resolver a equação do tipo

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Uma maneira de resolvermos este tipo de equações é através do método das aproximações sucessivas, introduzido por Charles Piccard. Considere-se como ponto de partida uma função contínua  $x_0(t)$  ou  $x_0(t) \equiv x_0$ , como

aproximação inicial. No passo seguinte, define-se

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0(s)) ds.$$

A terceira aproximação como:

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_1(s)) ds,$$

e assim sucessivamente até obtermos a  $(n + 2)$ -ésima aproximação,

$$x_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A função  $x_n(t)$  converge uniformemente para uma função contínua  $x(t)$  em  $I$ , que contenha  $t_0$  e  $(t, x_n(t)) \in D$ . Então pelo teorema 6, podemos passar ao limite em ambos os membros,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}(t) = \\ &= x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds = \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \end{aligned}$$

logo,  $x(t)$  é a solução pretendida. A solução pretendida existe e é única, mas para se poder fazer esta afirmação, são precisos dois importantes resultados.

**Teorema 14 (Existência Local)** *Se se verificarem as seguintes condições para  $a$  e  $b$ , números reais positivos fixos:*

1.  $f(t, x)$  é contínua num retângulo fechado

$$\bar{S} = (t, x) : |t - t_0| \leq a, \quad |x - x_0| \leq b,$$

*pelo que existe  $M > 0 : |f(t, x)| \leq M, \quad \forall t, x \in \bar{S}$*

2.  $f(t, x)$  satisfaz a condição de Lipshitz com constante  $L$  em  $\bar{S}$



3.  $x_0(t)$  é contínua em  $|t - t_0| \leq a$  e  $|x_0(t) - x_0| \leq b$

Então a sucessão gerada pela iteração de Picard converge para a única solução  $x(t)$  do problema de valor inicial, definida no intervalo

$$I_h = \{t : |t - t_0| \leq h\},$$

com  $h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ . Além disso, para  $t \in I_h$  é válida a seguinte estimativa para o erro:

$$|x(t) - x_n(t)| \leq N e^{Lh} \min \left\{ 1, \frac{(Lh)^n}{n!} \right\}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

com  $\max_{t \in I_h} |x_1(t) - x_0(t)| \leq N$

**Demonstração.** Esta demonstração poderá ser consultada em [8] ■

**Teorema 15 (Existência Global)** Se se verificarem as seguintes condições para  $a > 0$  fixo:

1.  $f(t, x)$  é contínua no retângulo fechado

$$T = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x| < +\infty\}$$

2.  $f(t, x)$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $T$

3.  $x_0(t)$  é contínua em  $|t - t_0| \leq a$

Então a sucessão  $x_n(t)$ , gerada pela iteração de Picard, existe no intervalo  $|t - t_0| \leq a$  e converge para a única solução  $x(t)$  do problema de valor inicial.

**Demonstração.** Esta demonstração poderá ser consultada em [8] ■

## 6.2 Fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor ou polinómio de Taylor permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial.

Suponhamos que  $f$  é uma função derivável num intervalo aberto contendo um ponto  $t_0$  temos que:

$$T(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Esta é uma função que descreve a equação de uma reta. O gráfico de  $T$  é uma reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(t_0, f(t_0))$ . Ao fazer a aproximação de  $f$  no ponto  $t$  por  $T$  no ponto  $t$  comete-se um erro:

$$E(t) = f(t) - T(t)$$

$$E(t) = f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)$$

$$\frac{E(t)}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(t)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(t)}{t - t_0} = f'(t_0) - f'(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(t)}{t - t_0} = 0$$

A última expressão significa que o erro cometido tende a zero mais rápido que a diferença  $(t - t_0)$ . A função  $T$  é um polinómio de 1º grau que é denominado por polinómio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $t_0$  e pode ser escrito como:

$$P_1(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Antes de se pensar em resolver uma determinada equação diferencial há que garantir que essa equação tem solução e que é única. Note-se que a solução da equação

$$x'(t) = f(t, x) \quad t \in (a, b)$$

se existir, não é única pois, ao integrarmos, introduzimos sempre uma constante de integração. Uma das condições para obter a unicidade da solução é especificar  $x(t)$  num ponto  $t_0$  do intervalo  $[a, b]$ , usualmente  $t_0 = a$ .

Ficamos assim com o problema de valor inicial.

$$x'(t) = f(t, x) \quad x(t_0) = a ,$$

Considerando o problema anterior com  $f$  uma função suficientemente diferenciável nas variáveis  $t$  e  $y$ , então a fórmula de Taylor pode ser descrita da seguinte forma:

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}x''(t_0) + \dots,$$

com  $t_0 = a$ . As derivadas desta expressão não são conhecidas explicitamente visto que a solução também não é conhecida. No entanto, podemos escrever

$$x'(t) = f(t, x),$$

$$x''(t) = \frac{df}{dt}(t, x),$$

usando a regra da cadeia temos que

$$x''(t) = \frac{df}{dt}(t, x) = (f_t + f_x x')(t, x) = (f_t + f_x f)(t, x), \quad (6.1)$$

$$x'''(t) = \frac{df^2}{dt^2}(t, x) = (f_{tt} + 2f_{tx}f' + f_{xx}f'^2 + f_t f_x + f_x^2 f)(t, x), \quad (6.2)$$

⋮

onde

$$f_t(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \quad f_x(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$$

Por razões práticas temos que limitar o número de termos na expansão em série de  $x(t)$  a um número razoável, o que nos conduz a restrições nos valores de  $t$  para os quais a expansão nos dá uma boa aproximação. Se tomarmos a fórmula de Taylor truncada no termo de ordem  $k$  temos, para  $t = t_1$ ,

$$x(t_1) \approx x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2!}f'(t_0, x_0) + \dots + \frac{h^k}{k!}f^{k-1}(t_0, x_0)$$

onde

$$f^j(t_0, x_0) = \frac{d^j f}{dt^j}(t_0, x_0).$$

Podemos definir assim, para cada  $k = 1, 2, \dots$ , um método de passo único explícito que permite obter soluções aproximadas  $x_i \approx x(t_i)$  da forma

$$x_{i+1} = x_i + h\Phi(t_i, x_i; h)$$

em que

$$\Phi(t, x; h) = f(t, x) + \frac{h^2}{2!} f''(t, x) + \dots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t, x).$$

Os métodos assim definidos são conhecidos por métodos de Taylor. O método desta classe mais simples é quando  $k = 1$  :

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = a,$$

designado por método de Euler (explícito).

### 6.3 Método de Euler

O método de Euler é um dos mais antigos e simples, desenvolvido por Euler, que também pode ser denominado por método da tangente. É um método atraente pela sua simplicidade, mas em cálculos mais complexos não é muito utilizado, pois para se conseguirem boas aproximações tem de se recorrer a um maior número de cálculos. O Método de Euler corresponde ao Método de Taylor, parando-se na primeira derivada. No desenvolvimento através do método de Taylor, tem-se:

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0).h + x''(t_0).\frac{h^2}{2!} + x'''(t_0).\frac{h^3}{3!} + \dots$$

No Método de Euler, toma-se:

$$x(t_0 + h) \approx x(t_0) + x'(t_0).h$$

Como  $x'(t) = f(t, x)$ , tem-se:

$$x_1 = x(t_1) = x(t_0 + h) \approx x(t_0) + f(t_0, x_0).h$$

O método de Euler é um procedimento numérico para aproximar a solução da equação diferencial <sup>1</sup>

$$x' = f(t, x)$$

que satisfaz a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ . Sabemos que o gráfico da solução passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$  com inclinação igual a  $x'(t_0)$  (ou seja, com inclinação igual  $f(t_0, x_0)$ ). Isto serve de ponto de partida para achar uma aproximação da solução. Começando pelo ponto  $(t_0, x_0)$ , podemos seguir na direção dada pela inclinação. Usando um pequeno passo  $h$ , seguimos ao longo da reta tangente até chegar ao ponto  $(t_1, x_1)$ . Considerando  $(t_1, x_1)$  como novo ponto de partida, pode-se repetir o processo e obter um segundo ponto  $(t_2, x_2)$ , onde

$$t_2 = t_1 + h \text{ e } x_2 = x_1 + hf(t_1, x_1).$$

O método de Euler consiste na repetição deste processo e gera a sucessão de pontos

$$t_{n+1} = t_n + h \text{ e } x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.3)$$

$x_{n+1}$  é o valor aproximado da solução original, no instante  $t = t_{n+1}$ .

Para determinar o valor aproximado da solução que satisfaz  $x(t_0) = x_0$ , num determinado instante  $\xi$ , temos de dividir o intervalo  $[t_0, \xi]$  num número finito de intervalos de amplitude  $h$ . O passo  $h$  determina quantas vezes vamos ter de iterar o processo definido em (6.3) para seguir a solução desde  $t_0$  até  $\xi$ . Se  $\hat{x}(\xi)$  é o valor aproximado de  $x(\xi)$  então o erro absoluto do método de Euler é dado por

$$|\hat{x}(\xi) - x_\xi|.$$

---

<sup>1</sup>Estamos a admitir que a equação é suficientemente bem comportada, de forma a garantir a existência de uma única solução num intervalo que contenha o ponto  $t_0$  e os pontos  $t_i$  usados na construção seguinte.

Este tipo de erro diminui com o tamanho do passo. Uma das vantagens deste método é que é de fácil programação.

## 6.4 Método de Runge-Kutta RK2

Em análise numérica, os métodos de Runge-Kutta formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias. Estas técnicas foram desenvolvidas por volta de 1900 pelos matemáticos C. Runge e M.W. Kutta. Este método pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função, calculando-a em mais de um ponto. No método de Euler a estimativa do valor de  $x_{n+1}$  é realizado com o valor de  $x_n$  e com a derivada no ponto  $t_n$ . No método de Runge-Kutta, encontra-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Um método de Runge-Kutta de ordem  $n$  possui um erro da ordem de  $O(h^{n+1})$ . Vamos utilizar o método de Runge-Kutta de 2<sup>a</sup> ordem (RK2), que calcula a derivada em dois pontos, cuja a fórmula é dada por

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

É fácil perceber que o método de RK2 fornece uma melhor aproximação do que o método de Euler. Grosso modo  $x_n$  calculado por RK2 é um tipo de média aritmética de  $x_n$  e  $x_{n+1}$  de Euler.

Para compreendermos qual a razão analítica pela qual o método de RK2 nos dá melhores aproximações do que o método de Euler, tomemos agora o fórmula de Taylor de segunda ordem, em torno do ponto  $t$

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3) \quad (6.4)$$

Como  $x'(t) = f(t, x)$ , temos que

$$x'' = (x'(t))' = (f(t, x))' =$$

$$= f_t + f_x f,$$

por (6.1). A equação (6.4) é então equivalente

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x) + \frac{h^2}{2}(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)) + O(h^3). \quad (6.5)$$

Considerando  $f(t+h, x+hf(t, x))$  como função de  $h$  e escrevendo a sua fórmula de Taylor em torno de  $t(x)$  vem

$$f(t+h, x+hf(t, x)) = f(t, x) + h(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x)) + O(h^2) \Leftrightarrow$$

$$f(t+h, x+hf(t, x)) - f(t, x) + O(h^2) = h(f_t(t, x) + f_x(t, x)f(t, x))$$

donde a equação (6.5) é então equivalente a

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} [2f(t, x) + (f(t+h, x+hf(t, x)) - f(t, x)) + O(h^2)] + O(h^3)$$

ou seja,

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} [f(t, x) + f(t+h, x+hf(t, x))] + O(h^3).$$





## Capítulo 7

# Teoria Qualitativa de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

A teoria qualitativa das equações diferenciais foi desenvolvida por Henry Poincaré. Uma grande parte destas equações não pode ser resolvidas por métodos analíticos, sendo necessário estudá-las qualitativamente.

Os métodos numéricos estudados no capítulo anterior dão-nos a informação necessária de como podemos abordar o estudo deste tipo de equações diferenciais. Mas uma outra maneira complementar de as estudarmos é qualitativamente. Este método permite que se estude também o comportamento das soluções das equações diferenciais e não apenas a sua informação quantitativa.

Consideremos o crescimento de duas populações,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

suponhamos que temos duas espécies a competir, cujos tamanhos são  $x(t)$  e  $y(t)$ . O crescimento destas espécies pode ser dado pelas equações:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2.$$

Assumimos que a competição pode ser dada subtraindo o produto do tamanho das duas populações. Assim,

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 - c_1xy$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2 - c_2xy$$

onde  $c_i$  é positivo, pois se  $x(t)$  e  $y(t)$  são populações, a solução se existir estará no primeiro quadrante do plano  $xOy$ . Como

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y)$$

temos que  $\frac{dx}{dt}$  anula-se no eixo  $Oy$ , isto é

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

se

$$x = 0 \vee a_1 - b_1x - c_1y = 0$$

$$x = 0 \vee y = -\frac{b_1}{c_1}x + \frac{a_1}{c_1}.$$

Na figura podemos observar a formação de um triângulo no primeiro quadrante, formado pela reta  $y = -\frac{b_1}{c_1}x + \frac{a_1}{c_1}$ , a reta  $x = 0$  e a reta  $y = 0$ , onde  $\frac{dx}{dt}$  é positiva no interior, pois é o produto de dois fatores positivos. Em qualquer ponto fora do triângulo e no quadrante em causa, temos que  $x$  decresce, pois  $\frac{dx}{dt}$  é negativa quando um dos fatores é negativo. Vejamos

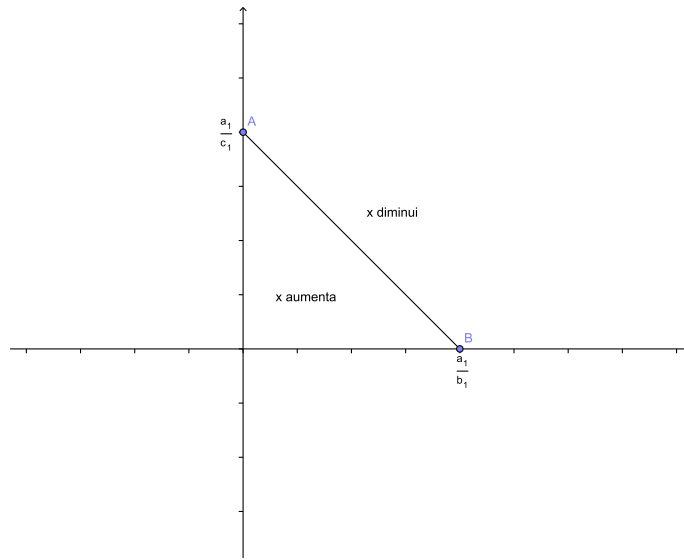


Figura 7.1: Gráfico para o valor qualitativo de  $x$ .

agora o que acontece para a expressão  $\frac{dy}{dt}$ .

$$\frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2y - c_2x)$$

donde se conclui que  $\frac{dy}{dt} = 0$  quando

$$y = 0 \vee x = -\frac{b_2}{c_2}y + \frac{a_2}{c_2}.$$

Nesta figura podemos também observar um triângulo no primeiro quadrante, onde  $\frac{dy}{dt}$  é positivo no interior, pois é o produto de dois fatores positivos. Nos pontos do primeiro quadrante que estão fora do triângulo e que não estejam nos eixos coordenados,  $\frac{dy}{dt}$  é negativa. Então  $y$  decresce nesses pontos. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 8** *Vamos usar os sinais da derivada para observar o que acontece com o comportamento de duas espécies modeladas pelas seguintes equações:*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 2x^2 - 5xy$$

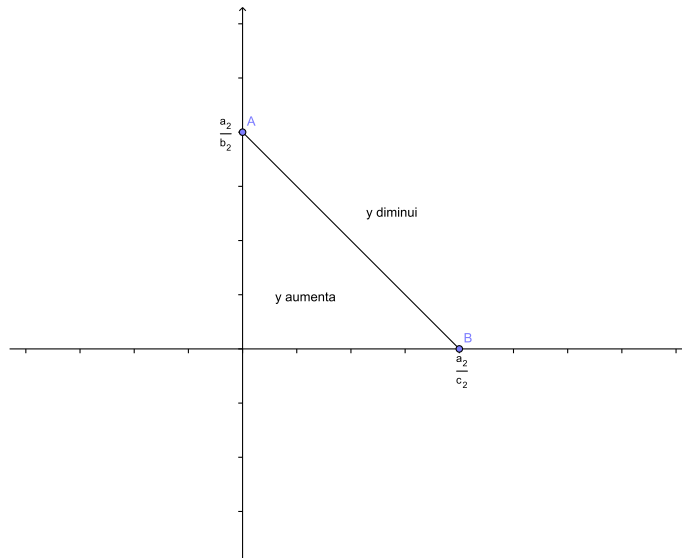


Figura 7.2: Gráfico para o valor qualitativo de  $y$ .

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - 2xy.$$

Analisando os pontos críticos

$$\begin{cases} 2x - 2x^2 - 5xy = 0 \\ y - y^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2 - 2x - 5y) = 0 \\ y(1 - y - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee 2 - 2x - 5y = 0 \\ y = 0 \vee 1 - y - 2x = 0 \end{cases}$$

Então  $\frac{dx}{dt}$  anula-se para  $x = 0$  ou  $y = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}x$  e  $\frac{dy}{dt}$  anula-se para  $y = 0$  ou  $y = 1 - 2x$ .

Consequentemente, anulam-se simultaneamente em

- $x = 0$

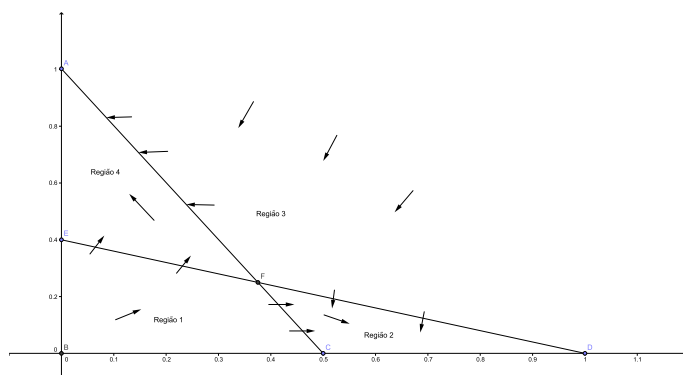


Figura 7.3: Comportamento de duas espécies

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \vee y = 1 \end{cases}$$

Desta forma ficamos com os pontos  $(0,0)$  e  $(0,1)$ .

- $y = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Desta equação ficamos com os pontos  $(0,0)$  e  $(1,0)$ . Falta-nos ver ainda um ponto:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2 - 2x - 5y = 0 \\ 1 - y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x - 5 + 10x = 0 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo o ponto que ainda temos de considerar é  $(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$ .

Nestes quatro pontos, qualquer solução que parta deles será estacionária. Utilizando a informação obtida no caso genérico, podemos então obter o

campo de vetores da figura 7.3. Ao seguirmos as direções indicadas pelas setas, observamos que todas as outras soluções tendem para os pontos de equilíbrio indicados anteriormente, à medida que  $t$  tende para infinito. A maioria das soluções parece tender para  $(0, 1)$  ou  $(1, 0)$  o que leva então à extinção de uma das espécies enquanto a outra se aproxima de 1.

## 7.1 Retrato Fase de Sistemas Lineares

Nesta secção iremos obter soluções geométricas de um sistema de equações lineares, homogênea, de coeficientes constantes, dado por

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y$$

Na forma matricial temos que:

$$Dx = Ax$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

A nossa discussão centra-se em observar que o valor da função é o vetor

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

que pode ser pensado como a parametrização de uma curva. Se  $X(t)$  é solução do sistema, então podemos dizer que a curva é a curva integral do sistema. O primeiro passo para a representação geométrica das soluções de um sistema dado, será o de esboçar as suas curvas integrais. É claro que

uma curva integral dá-nos menos informação do que a fórmula explícita da solução. Através da fórmula podemos determinar não só os pontos da curva integral mas também o tempo em que cada ponto é alcançado. Começamos então por notar que se  $X(t)$  é solução de  $DX = AX$  e  $t_0$  é um valor fixado de  $t$  então  $X(t + t_0)$  é solução. Contudo, estas soluções determinam a mesma curva integral. Se  $X(t)$  chega ao ponto  $t = t_1$  então  $X(t + t_0)$  chega ao mesmo ponto quando  $t = t_1 - t_0$ . Por outro lado, se  $X_1$  e  $X_2$  são soluções de  $DX = AX$  então chegam ao mesmo ponto mas em tempos diferentes, donde  $X_2(t) = X_1(t + t_0)$ , para um determinado  $t_0$ . Assim  $X_1$  e  $X_2$  determinam a mesma curva integral. Um facto que deveremos ter em conta é que curvas integrais distintas do sistema  $DX = AX$  nunca se intersectam.

Também podemos observar que  $X = 0$  é sempre solução do sistema  $DX = AX$ . A curva integral determinada por esta solução consiste num ponto na origem do referencial e deve ser incluída no retrato fase de  $DX = AX$ .

Vejamos o exemplo seguinte.

**Exemplo 9** Consideremos  $DX = AX$  com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda I| &= 0 \\
 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= \\
 (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 &= \\
 &= (\lambda^2 - 4)
 \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que os valores próprios são  $\lambda = 2 \vee \lambda = -2$   
 Passemos então ao cálculo dos vetores próprios:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

- se  $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = y, \end{aligned}$$

donde

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então  $V$  é o vetor próprio associado a valor próprio  $\lambda = 2$

- se  $\lambda = -2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow y = -3x, \end{aligned}$$

logo o vetor próprio associado ao valor próprio  $\lambda = -2$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Assim temos dois vetores próprios associados aos seus valores próprios reais distintos e as soluções são então do tipo

$$X_1 = e^{\lambda_1 t} V_1 \quad X_2 = e^{\lambda_2 t} V_2$$

Donde se tem que:

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \\ X_2 &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então a solução geral  $X(t)$  é da forma

$$x(t) = aX_1 + bX_2$$



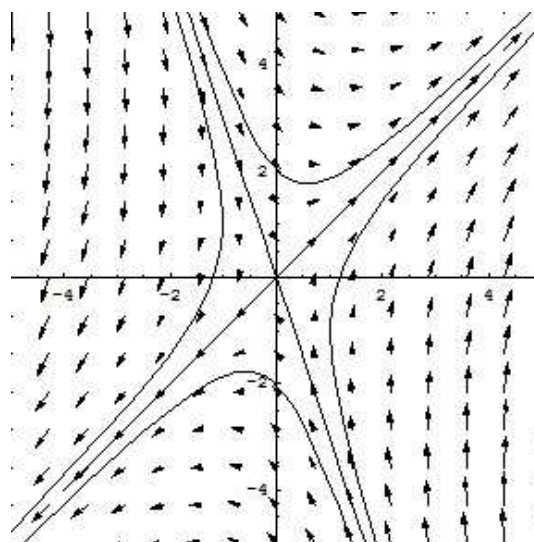


Figura 7.4: Retrato de Fase para  $DX = AX$ ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$\begin{aligned} X(t) &= ae^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + be^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= (ae^{-2t} + be^{2t}, -3ae^{-2t} + be^{2t}). \end{aligned}$$

Após a análise do exemplo, passamos então ao desenho do retrato de fase. Podemos observar através da equação geral  $X(t)$  que à medida que  $t$  varia, o valor do vetor da função vai cobrir todos os múltiplos positivos de  $V_1$  e  $V_2$ . As curvas integrais correspondentes a estas soluções são as semiretas que passam pela origem e determinadas pelos vetores próprios. As partes negativas destas funções também são soluções. Como a origem por si só é uma curva integral, o retrato de fase também inclui este ponto. A direção ao longo destas linhas é determinada pelos sinais dos valores próprios. Se  $\lambda_1 = -2$  então  $X_1(t)$  e  $-X_1(t)$  aproximam-se da origem à medida que  $t$  aumenta. Quando  $\lambda_2 = 2$  então  $X_2(t)$  e  $-X_2(t)$  afastam-se da origem à medida que  $t$  aumenta. De acordo com o gráfico (7.4) a figura representa um retrato de fase típico de um sistema linear de segunda ordem com valores próprios de sinais opostos. Daqui podemos retirar algumas conclusões:

1. Se  $V$  é um vetor próprio de  $A$  correspondente ao valor próprio  $\lambda \neq 0$

então o retrato de fase do sistema  $DX = AX$  inclui as linhas que passam pela origem determinadas por  $V$ . O resultado de três integrais de curva são: a origem e duas semiretas.

2. Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com valores reais de sinais opostos  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , então o retrato de fase de  $DX = AX$  inclui duas linhas que passam pela origem determinadas pelos vetores próprios  $V_1$  e  $V_2$  correspondentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respetivamente. Qualquer outra curva integral é assintótica quando  $t \rightarrow -\infty$  à linha determinada por  $V_1$ , e quando  $t \rightarrow +\infty$  à linha determinada por  $V_2$ .

Vejamos então o seguinte exemplo:

**Exemplo 10** *Consideremos a matriz  $A$  definida por*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

*Passamos então a determinar os valores próprios*

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 & \end{aligned}$$

*Donde podemos concluir que*

$$(4 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 5$$

*Assim podemos considerar que  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 5$ . Vamos agora encontrar os vetores próprios associados aos valores próprios encontrados anteriormente.*

$$(A - \lambda I)X = 0$$

Então para  $\lambda_1 = 1$  temos que

$$\left( \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}.$$

Assim,  $y = -3x$ , logo

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que para

$$\lambda_1 = 1$$

temos

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Para o caso em que  $\lambda_2 = 5$

$$\left( \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de onde obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}.$$

Assim,  $y = x$ , então

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que para

$$\lambda_2 = 5$$

temos

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim os vetores próprios

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos dois valores próprios reais distintos. Temos de ter em conta que como ambos os valores próprios são positivos, afastamo-nos da origem do referencial. A solução é da forma

$$X(t) = ae^{\lambda_1 t}V_1 + be^{\lambda_2 t}V_2 \quad a, b \neq 0$$

Assim, podemos observar que ambos os termos aumentam quando  $t \rightarrow +\infty$  e ambos tendem para zero quando  $t \rightarrow -\infty$ . Pondo  $e^{5t}$  em evidência na equação acima,

$$X(t) = e^{5t}(ae^{-4t}V_1 + bV_2).$$

Verifica-se então que

- $t \rightarrow +\infty$

O primeiro fator tende para zero e o segundo fica constante,

$$X(t) = e^{5t}(ae^{-4t}V_1 + bV_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{X(t)}{e^{5t}} = ae^{-4t}V_1 + bV_2$$

ou seja,  $\frac{X(t)}{e^{5t}}$  aproxima-se de  $bV_2$ .  $\frac{X(t)}{e^{5t}}$  é sempre paralelo a  $X(t)$  e  $bV_2$  é paralelo a  $V_2$ , então quando  $t \rightarrow +\infty$ , a inclinação de  $X(t)$  aproxima-se da inclinação da linha determinada por  $V_2$

- $t \rightarrow -\infty$  O raciocínio é análogo.

As curvas integrais estão esboçadas na figura 7.5. Como todas as curvas integrais (excepto a origem) se afastam da origem é natural chamarmos-lhe fonte.

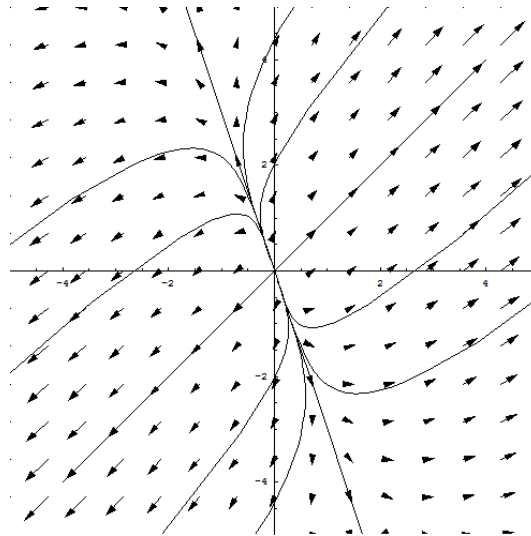
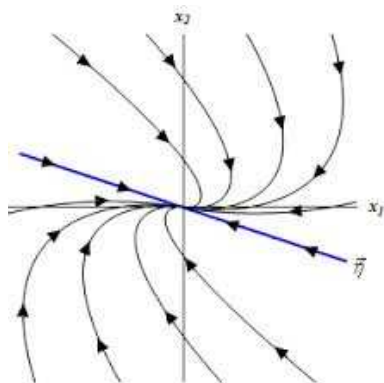
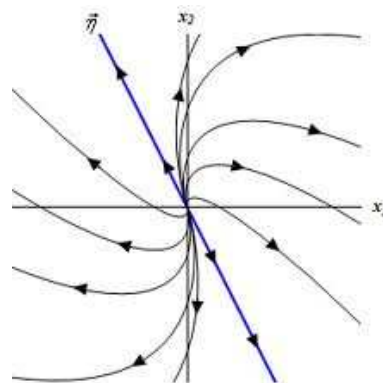


Figura 7.5: Retrato de Fase para  $DX = AX$ ,  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Outros casos poderão ser estudados como, por exemplo, o caso em que temos valores próprios reais iguais e apenas um vetor próprio linearmente independente. Neste caso observamos uma convergência para a origem do referencial. Se o valor próprio é negativo, chamamos neste caso escoadouro à origem. Se for positivo, termos um afastamento da origem vetores próprios também forem iguais, essa convergência mantém-se mas por caminhos diferentes.



nó escoadouro



nó fonte

No caso de termos um dos valores próprios igual a zero, dá-se um afastamento generalizado da origem do referencial paralelo à bissetriz dos quadrantes pares ou ímpares, dependendo se o outro valor próprio é positivo ou negativo.

Vejamos agora o que acontece quando  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com valores próprios complexos conjugados ( $a \pm ib$ ). Para tal, começamos por analisar o seguinte exemplo:

**Exemplo 11** *Considere-se a matriz  $A = \begin{bmatrix} -0,5 & -1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}$*

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0$$

*Donde se conclui que os valores próprios são  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$ . Assim, obtemos um par de valores próprios complexos conjugados com  $a = -\frac{1}{2}$  e  $b = 1$ . Se os valores próprios são complexos então todas as curvas integrais andam em torno da origem do referencial, dado que se  $A$  não tem valores próprios reais, então  $DX$  não pode ser paralelo (ou perpendicular) a  $X$ . No plano isto pode acontecer, essencialmente, de três formas: em espiral para dentro, em espiral para fora ou em curvas (elíticas ou circulares). Como os valores próprios são complexos, então as soluções envolvem termos da forma  $e^{at} \cos(bt)$  e  $e^{at} \sin(bt)$ . Analisando  $e^{at}$  observa-se que se  $a < 0$  e  $t \rightarrow +\infty$  então  $e^{at} \rightarrow 0$ , logo todas as soluções convergem para a origem. Mas se  $a > 0$  e  $t \rightarrow +\infty$  o fator  $e^{at}$  cresce exponencialmente. Então:*

- 1.  $a < 0$  temos uma espiral convergente*
- 2.  $a > 0$  temos uma espiral divergente*

Para encontrarmos o retrato de fase correto para o nosso exemplo vamos encontrar a direção do ponto ao longo do eixo dos  $yy$ , dado que já sabemos que a espiral é convergente para a origem, mas não sabemos o sentido do

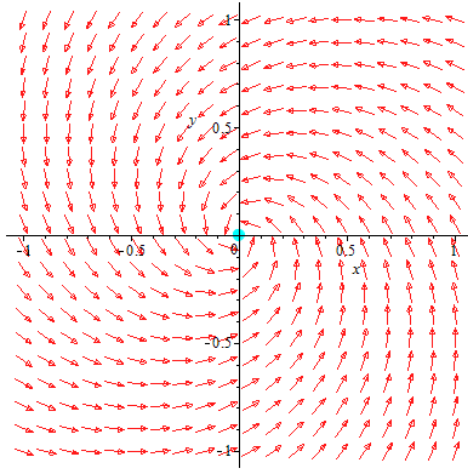


Figura 7.6:  $a < 0$  as soluções convergem para a origem

movimento. Assim,

$$\begin{bmatrix} -0,5 & -1 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

Então  $\frac{dx}{dt} = -1 < 0$ , logo para o nosso exemplo vamos ter direção no sentido contrário ao dos pontos do relógio. O retrato de fase será de acordo com a figura 7.6.

No caso em que temos valores próprios imaginários puros, ou seja,  $a = 0$ , então obtemos curvas fechadas à volta da origem, sendo o movimento periódico.

## 7.2 Linearização e Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Nesta secção continuaremos a trabalhar com sistemas de equações para os quais as curvas integrais não se intersejam. Para garantirmos esta propriedade é necessário que o nosso sistema seja autónomo, é o mesmo que dizer que a derivada de cada variável é uma função dos valores das variáveis,

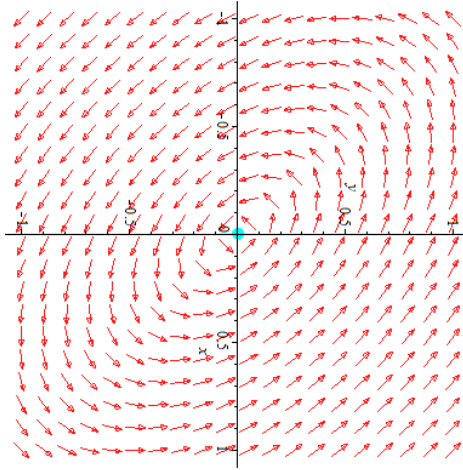


Figura 7.7:  $a > 0$  crescimento exponencial

mas não depende explicitamente do tempo. Um sistema de segunda ordem autónomo pode ser escrito na forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (7.1)$$

Assumimos que as funções  $f$  e  $g$  são suficientemente regulares tal que cada problema de valor inicial tem uma única solução. Como usualmente temos feito, usamos a notação vetorial

$$X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

para solução. A análise do comportamento das soluções do sistema começa com a determinação das soluções constantes do sistema. Sempre que uma solução é da forma  $X(t) = c$ , dizemos que é um ponto de equilíbrio do sistema. São pontos de coordenadas cuja derivada é simultaneamente zero. Assim, o equilíbrio do sistema ocorre nos pontos do plano onde

$$f(x, y) = g(x, y) = 0$$



Suponhamos que  $X = c$  é um ponto de equilíbrio do sistema 7.2, onde

$$c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Dizemos que  $X = c$  é atrator se existe um círculo com centro  $(a, b)$ , tal que qualquer solução  $X(t)$  que começa no círculo, aproxima-se de  $c$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

Um atrator  $X = c$  é estável no sentido em que todas as soluções que começam perto de  $c$  mantêm-se perto de  $X = c$ . Por outro lado, se existe um círculo centrado em  $(a, b)$  com a propriedade de que algumas soluções começam perto de  $c$  e algumas soluções afastam-se e outras não, então  $X = c$  é instável.

Em particular, se todas as soluções que começam perto de  $c$  saem e mantêm-se fora do círculo, dizemos que  $X = c$  é repelente. Assim podemos considerar três aspetos:

1. se todos os valores próprios têm parte real negativa,  $X = c$  é atrator;
2. se todos os valores próprios têm parte real positiva,  $X = c$  é repulsor;
3. se existem valores próprios com parte real de sinais opostos, ou parte real nula, significa que  $X = c$  não é atrator nem repulsor.

Para analisarmos o equilíbrio de um sistema não linear, iremos recorrer à sua linearização, ou seja, aproximar o sistema dado por um sistema linear perto do ponto de equilíbrio.

Para escrevermos o sistema aproximado, usamos  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $g_x$ ,  $g_y$  que representam as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y},$$

respetivamente, e supondo que são funções contínuas, podemos escrever

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \Phi_1(x, y)$$

$$g(x, y) = g(a, b) + g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) + \Phi_2(x, y)$$

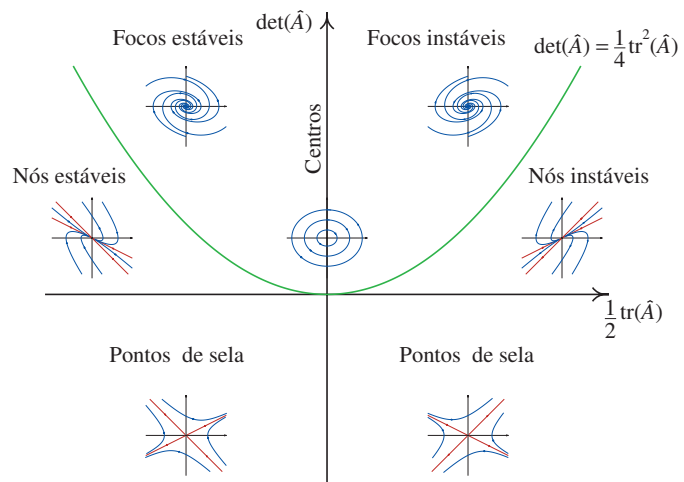


Figura 7.8: Retratos de Fase

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são funções que satisfazem:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\Phi_i(x,y)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Uma consequência imediata é que se

$$c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

é ponto de equilíbrio do sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

(tal que  $f(a,b) = g(a,b) = 0$ ) então o sistema linear

$$\frac{dx}{dt} = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$$\frac{dy}{dt} = g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b)$$

é uma boa aproximação de

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

numa vizinhança de  $c$ .

Se  $y = x - c$  e

$$A = \begin{bmatrix} f_x(a,b) & f_y(a,b) \\ g_x(a,b) & g_y(a,b) \end{bmatrix}$$

então  $Dy = Dx$ , tal que o sistema linear que aproxima a solução pode ser escrito na forma  $Dy = Ay$  em que  $A$  é a matriz linearizada de

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

numa vizinhança de  $c$ .

**Teorema 16 (Hartman-Grobman)** *Se a linearização da matriz  $A$  não*

tem valores próprios nulos ou imaginários puros, o retrato de fase para

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

perto do ponto de equilíbrio  $c$ , pode ser obtido pelo retrato de fase do sistema linear  $Dy = Ay$ , através de uma mudança de coordenadas contínua.

### **Demonstração.**

A demonstração poderá ser consultada em [11]

■ D.M. Grobman, em 1959 e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema linear de dimensão- $n$  apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente.

Entenda-se por ponto de equilíbrio hiperbólico quando os valores próprios, calculados a partir da versão linearizada das equações originais, têm parte real não nula. Assim este teorema garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema, em torno desse ponto.

O retrato de fase é topologicamente equivalente<sup>1</sup> ao retrato de fase do sistema linear associado, em torno do ponto de equilíbrio.

Se o ponto de equilíbrio é não hiperbólico, então a linearização não permite retirar conclusões sobre a sua estabilidade. Nesses casos é necessário utilizar outras estratégias.

Vejamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 12** *Considere-se o sistema*

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 2x^2 - 5xy$$

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 - 2xy$$

*Assim,*

$$f(x, y) = 2x - 2x^2 - 5xy$$

---

<sup>1</sup>Dizemos que dois retratos fase são topologicamente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro.

$$g(x, y) = y - y^2 - 2xy$$

Os pontos de equilíbrio ocorrem quando

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x(2 - 2x - 5y) = 0 \\ y(1 - y - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee 2 - 2x - 5y = 0 \\ y = 0 \vee 1 - y - 2x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Se  $x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Se  $x = 1 - \frac{5}{2}y$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, os pontos de equilíbrio são:

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

Para calcularmos a linearização do sistema temos de calcular as derivadas parciais de

$$f(x, y) = 2x - 2x^2 - 5xy$$

$$g(x, y) = y - y^2 - 2xy$$

$$f_x = 2 - 4x - 5y, \quad f_y = -5x$$

$$g_x = -2y, \quad g_y = 1 - 2y - 2x$$

Então obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 - 4x - 5y & -5x \\ -2y & 1 - 2y - 2x \end{bmatrix}$$

Para cada ponto de equilíbrio calculamos a matriz linearizada e o respectivo valor próprio.

✓ Para o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$

$$A_{(0,0)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vem

$$\lambda = 1 \vee \lambda = 2.$$

São dois valores próprios reais positivos, logo  $(0, 0)$  é repulsor. Vejamos então os vetores próprios:

$$(A - \lambda I) \vec{X} = \vec{0}$$

•  $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

•  $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

✓ Para o ponto de equilíbrio  $(0, 1)$

$$A_{(0,1)} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

vem

$$\lambda = -3 \vee \lambda = -1.$$

São dois valores próprios reais negativos, logo  $(0, 1)$  é atrator. Vejamos então os vetores próprios:

$$(A - \lambda I) \vec{X} = \vec{0}$$

•  $\lambda_1 = -3$

$$\left( \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

•  $\lambda_2 = -1$

$$\left( \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓ Para o ponto de equilíbrio  $(1, 0)$

$$A_{(1,0)} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

vem

$$\lambda = -2 \vee \lambda = -1.$$

São dois valores próprios reais negativos, logo  $(0, 1)$  é atrator. Vejamos então os vetores próprios:

$$(A - \lambda I) \vec{X} = \vec{0}$$

•  $\lambda_1 = -2$

$$\left( \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = -1$

$$\left( \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

✓ Para o ponto de equilíbrio  $(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$

$$A_{(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{15}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & -\frac{15}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \vee \lambda = \frac{1}{2}$$

São dois valores próprios reais de sinais opostos, logo  $(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$  é instável mas não repelente. Os vetores próprios calculam-se como anteriormente:

$$(A - \lambda I) \vec{X} = \vec{0},$$

e obtemos

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

associados respetivamente a  $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ .

Como nenhum dos valores próprios é zero ou imaginários puros, o teorema de Hartman-Grobman diz-nos que o retrato de fase perto de cada ponto de equilíbrio  $(a, b)$  é semelhante ao retrato de fase do sistema linearizado  $Dy = A_{(a,b)}y$ . A seguinte imagem dá-nos uma noção do retrato de fase do sistema.

Como já foi falado, o teorema de Hartman-Grobman tem duas limitações

1. Nada nos diz da linearização de sistemas com valores próprios zero ou



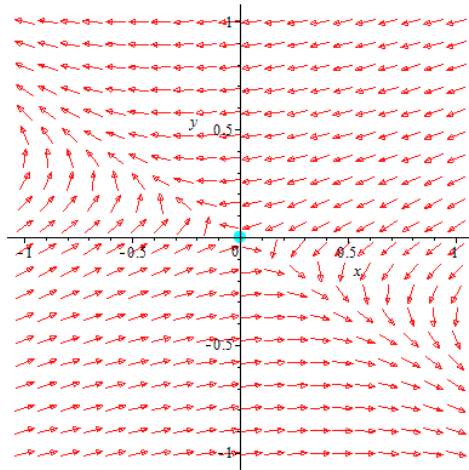


Figura 7.9: Retrato de fase para dois valores reais distintos

imaginários puros.

2. Quando o teorema se aplica, apenas nos dá informação em torno do ponto de equilíbrio.



## Capítulo 8

# O Pêndulo Magnético

A presente tese intitula-se "Equações Diferenciais Ordinárias e o Pêndulo Magnético". Até ao momento debruçámo-nos sobre a primeira parte do título, falta então analisar a segunda parte.

### 8.1 Dedução das equações e algumas considerações

A experiência com o pêndulo magnético consiste em ter suspensa por um fio uma esfera.

No plano  $xoy$  teremos três ímanes à mesma distância, de tal forma que a esfera suspensa fica em equilíbrio no centro de gravidade ou baricentro do triângulo formado pelos três ímanes. Ao colocarmos manualmente a esfera numa posição inicial, esta irá descrever uma trajetória, sempre atraída pelos ímanes. Para cada posição inicial, a trajetória do pêndulo estabilizará em torno de um dos ímanes. No entanto, o movimento do pêndulo é caótico, com bacias de atração para diferentes ímanes separados por curvas fratais no plano.

A intenção desta experiência é investigar a dinâmica oscilante do pêndulo magnético ao passar pelos vários ímanes.

Em primeiro lugar vamos encontrar as equações do pêndulo. Posteriormente iremos construir um modelo do pêndulo magnético a fim de analisar visualmente o seu movimento e o comportamento do sistema.

Quando o pêndulo é largado de uma certa posição  $(x, y)$ , ele tende a oscilar em torno dos ímanes, sendo sempre atraído para um deles, sem que se consiga prever qual, pois cada íman "captura" algumas "bolas" lançadas na sua vizinhança, mas também captura algumas a determinada distância. A situação é complexa.

Para tais sistemas físicos, muitas vezes é útil empregar simulação de computador para modelar o sistema e explorar os seus possíveis comportamentos. Para a realização da simulação, temos de ter em consideração o seguinte:

O comprimento da corda do pêndulo tem de ser muito maior em comparação com a distância que separa os ímanes.

O movimento da esfera está restringida ao plano  $xoy$  (como uma área na superfície de uma esfera com um raio grande). Isto permite que as oscilações sejam realizadas em ângulos muito pequenos. A força aplicada por cada íman à esfera é modelada de acordo com uma lei do inverso do quadrado. Cada íman tem de ser atrativo e o polo da esfera tem de ser contrário aos ímanes.

A força de atração é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o íman e a esfera.

Os ímanes são modelados como pontos que estão posicionados a uma distância  $d$  abaixo do plano no qual o pêndulo se move. Eles estão posicionados em torno da origem de acordo com os pontos de um triângulo equilátero em  $(1, 0)$ ,  $\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$ , e  $\frac{1}{2}(-1, -\sqrt{3})$ .

A imagem (8.1) mostra-nos a força de um dos ímanes aplicada ao pêndulo. O movimento ocorre apenas no plano  $xoy$ .

Após o pêndulo ser largado da sua posição inicial  $(x_0, y_0)$ , o mesmo vai experimentar forças devido à gravidade, amortecimento e campos magnéticos, então podemos formular a equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo. Para chegarmos à equação pretendida, recorreremos à segunda lei de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Consideremos então:

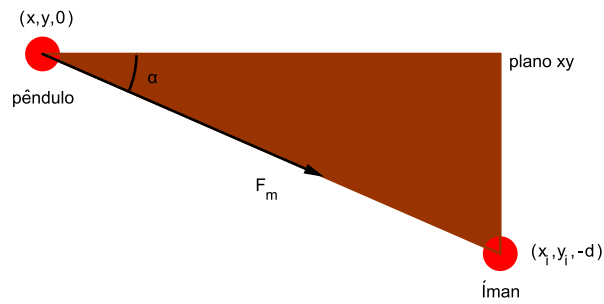


Figura 8.1: Força de um dos ímanes aplicado ao pêndulo

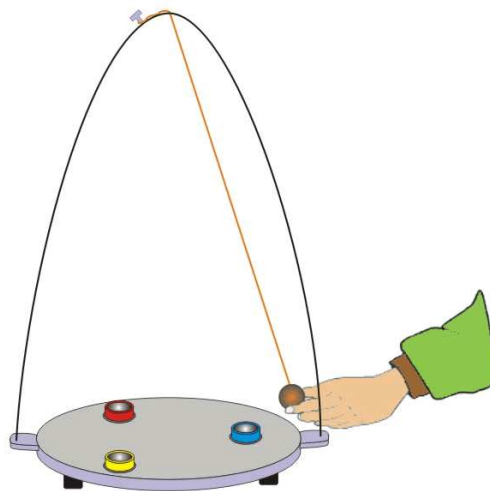


Figura 8.2: Modelo de Construção do Pêndulo Magnético

- $(x, y)$  coordenadas cartesianas da massa do pêndulo.
- $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , coordenadas cartesianas dos ímanes.
- $d$  a distância vertical do pêndulo ao plano.
- $R$ , coeficiente de fricção da massa do pêndulo.
- $C$ , coeficiente de força gravítica.
- $m$ , massa do pêndulo, para simplificarmos os cálculos, e sem perda de generalidade, consideramos sempre que  $m = 1$ .

Definimos também que a origem do sistema de coordenadas cartesianas,  $(0, 0)$ , é o ponto de equilíbrio da força gravítica associada ao pêndulo. Os ímanes encontram-se todos à mesma distância da origem do referencial e à mesma distância entre si.

Então a distância  $r$  entre o pêndulo e cada íman é dada por:

$$r = |(x, y, 0) - (x_i, y_i, -d)| \Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2} \quad (8.1)$$

A força magnética é proporcional ao inverso do quadrado da distância, assim

$$\frac{1}{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2} \quad (8.2)$$

Seja  $M$  uma constante que define o campo magnético de cada um dos pêndulos. A força magnética é dada por

$$M = F_m \times r^2 \Leftrightarrow F_m = \frac{M}{r^2}.$$

Considerando que o pêndulo se encontra na posição

$$(x, y, 0)$$

e cada íman encontra-se na posição

$$(x_i, y_i, -d)$$

Então a distância de cada íman à esfera no eixo dos  $xx$  é dada por

$$dx = (x_i - x)$$

e no eixo dos  $yy$  é dada por

$$dy = (y_i - y).$$

Através da trigonometria também podemos observar que as distâncias a cada um dos ímanes em  $x$  e em  $y$  podem ser dadas por

$$dx = r \cos \alpha$$

$$dy = r \sin \alpha$$

assim, as forças magnéticas das componentes  $x$  e  $y$  são

$$f_x = F \cos \alpha = \left( \frac{M}{r^2} \right) \left( \frac{dx}{r} \right) = \frac{M dx}{r^3}$$

$$f_y = F \sin \alpha = \left( \frac{M}{r^2} \right) \left( \frac{dy}{r} \right) = \frac{M dy}{r^3}$$

Assim, podemos concluir que

$$f_x = \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (8.3)$$

$$f_y = \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (8.4)$$

A força gravitacional é proporcional à distância e atua no sentido de aproximar o pêndulo da origem, enquanto que a força de fricção atua no sentido contrário à direção do movimento e é proporcional à velocidade  $(\dot{x}, \dot{y})$ .

Então, pela segunda lei de Newton temos que

$$\ddot{x} = -R\dot{x} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx \quad (8.5)$$

$$\ddot{y} = -R\dot{y} + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy \quad (8.6)$$

Estas são as equações que vamos testar através de métodos numéricos. Para tal, utilizaremos alguns recursos da calculadora Texas Instruments "TI-NSPIRE".

Assim começamos por testar as equações 8.5, e 8.6, utilizando o método de Euler, e posteriormente utilizaremos o método de Runge-Kutta RK2.

Para se poder ter uma noção do comportamento do pêndulo, realizou-se uma simulação no programa "MAPLE v18.0". Rapidamente se pode concluir que com pequenas mudanças na posição inicial do pêndulo, obtêm-se resultados completamente diferentes. Ver figuras 8.3, 8.4 e 8.5.

Pois como já tínhamos visto nos sistemas dinâmicos discretos, a sensibilidade às condições iniciais produz resultados que à partida não seriam expectáveis.

Com base nesta pequena mudança das condições iniciais, temos de nos perguntar como serão as bacias de atração. Pois o pêndulo está sujeito à força magnética dos três ímanes. Assim, simularam-se as bacias de atração, ou seja, as forças magnéticas a que o pêndulo está sujeito.

Para se reproduzir a (8.6), usou-se o "Mathematica", em que o código utilizado foi o seguinte:

```
"Código no Mathematica"
(* execução: 25 segundos*)
n = 40; h = 0.1; g = 0.2; mu = 0.5;
zlist = {Sqrt[3] + I, -Sqrt[3] + I, -2I};
image = Table[z2 = z[25] /.
NDSolve[{z''[t] == Plus @@ ((zlist - z[t])/(h^2 +
Abs[zlist - z[t]]^2)^1.5) - g z[t] - mu z'[t],
z[0] == x + I y, z'[0] == 0}, z, {t, 0, 25},
```



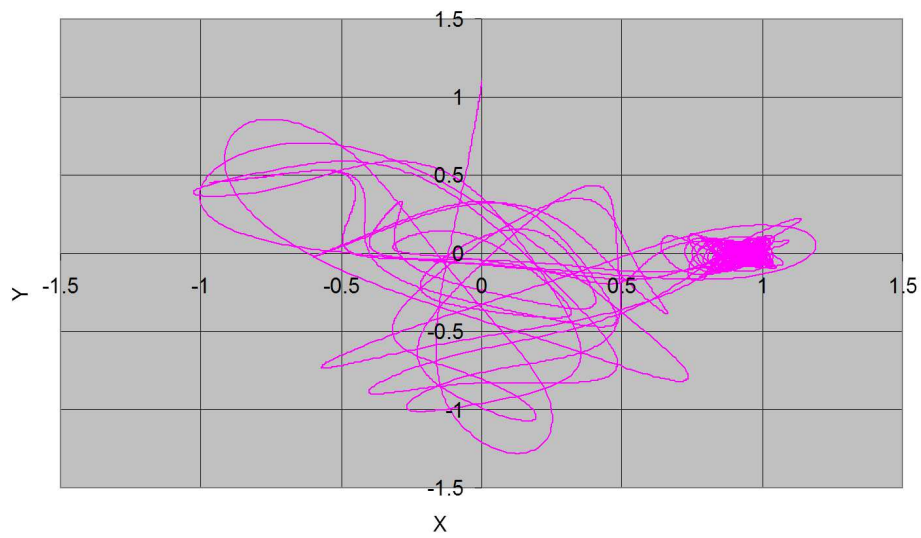


Figura 8.3: Movimento do pêndulo com posição inicial  $(0, 1.1)$

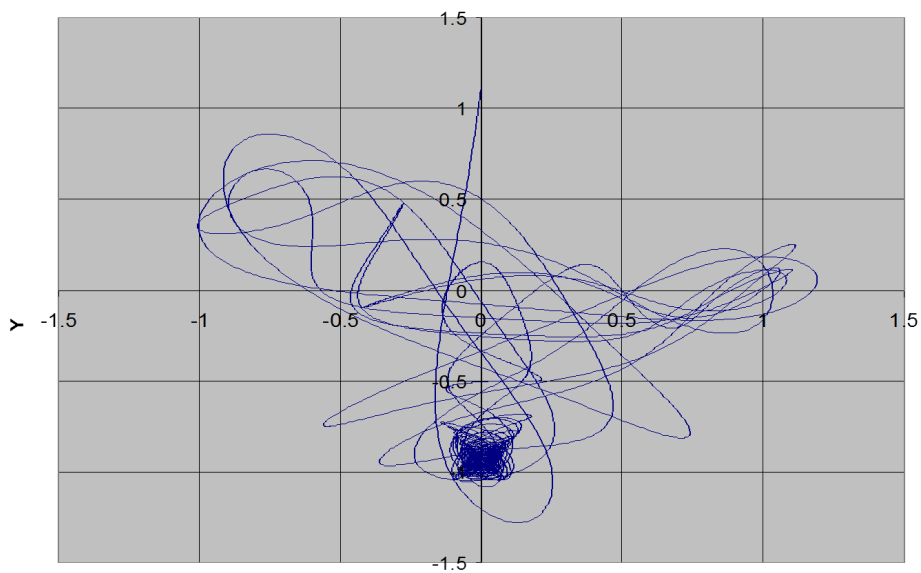


Figura 8.4: Movimento do pêndulo com posição inicial  $(0, 1.11)$

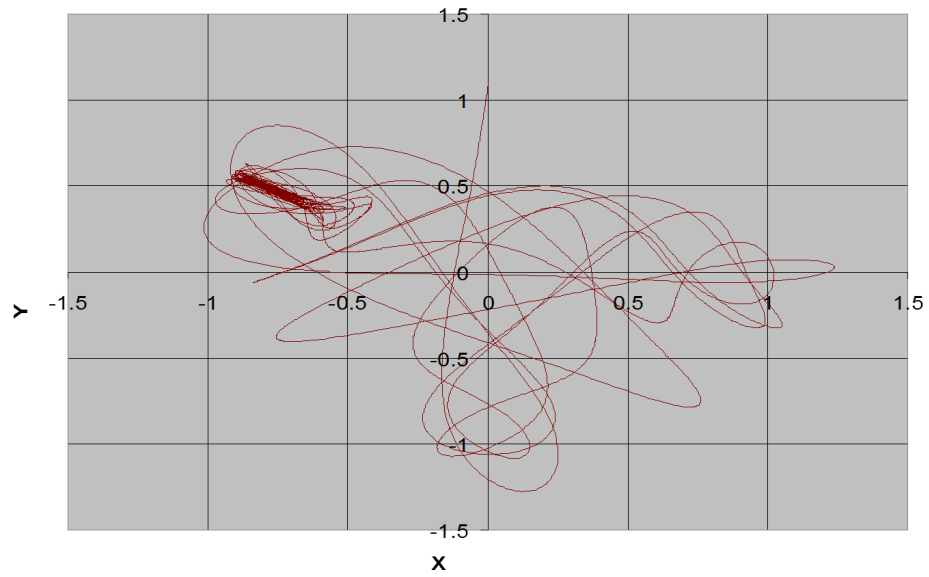


Figura 8.5: Movimento do pêndulo com posição inicial  $(0, 1.12)$

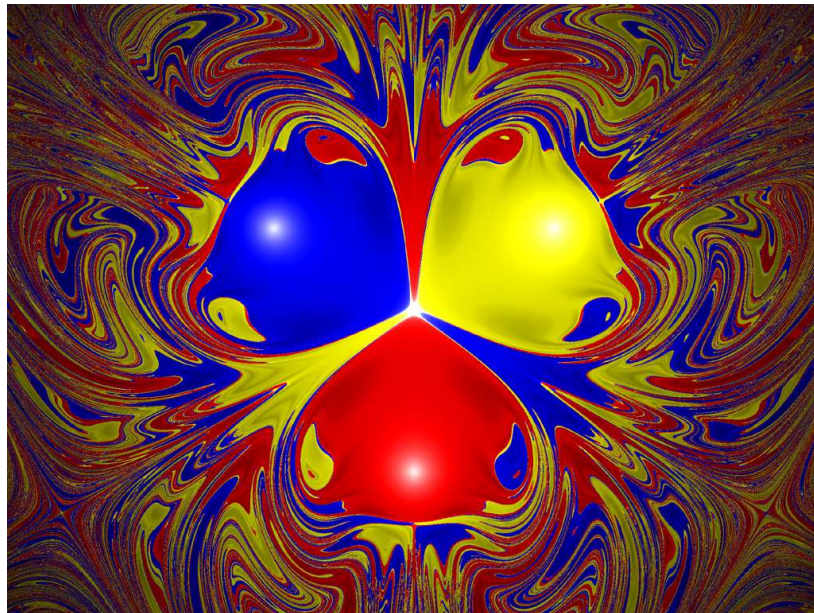


Figura 8.6: Bacia de atração do pêndulo magnético

```

MaxSteps -> 200000][[1]]; r = Abs[z2 - zlist];
i = Position[r, Min[r]][[1, 1]]; Hue[i/3],
{y, -5.0, 5.0, 10.0/n}, {x, -5.0, 5.0, 10.0/n}];
Show[Graphics[RasterArray[image]], AspectRatio -> 1]

```

Após as simulações efetuadas, passamos então à parte da calculadora.

## 8.2 Programação

A tecnologia gráfica portátil pode ser um fator importante para ajudar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, terem melhores desempenhos e a atingirem um nível superior de competências na resolução de problemas.

Uma revisão interpretativa da investigação sobre calculadoras gráficas concluiu que estas se tornaram numa das tecnologias mais adotadas na educação porque são uma unidade portátil eficaz e acessível com ligações diretas às matérias escolares. As calculadoras gráficas podem suportar eficazmente a aprendizagem e democratizar o acesso a conceitos matemáticos complexos.

A tecnologia "TI-NSPIRE" permite que o aluno construa o seu próprio algoritmo para resolver alguns problemas, permitindo uma constante permuta de janelas, podendo assim construir gráficos e, se necessário emendar o que de menos correto tenha construído.

Para implementarmos as equações do pêndulo magnético na calculadora, temos primeiro de as transformar num sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = u \\ u' = x'' \\ y' = v \\ v' = y'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = u \\ u' = -Ru + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx \\ y' = v \\ v' = -Rv + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ u' \\ y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -Ru + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx \\ v \\ -Rv + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy \end{pmatrix}$$

Sendo que  $(x_i, y_i)$  são as posições dos dos ímanes,  $R$  é o coeficiente de fricção,  $C$  o coeficiente da força gravítica e  $(x, y)$  é a posição do pêndulo. Assim consideremos que:

$$U' = \begin{pmatrix} x' \\ u' \\ y' \\ v' \end{pmatrix}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} u \\ -Ru + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx \\ v \\ -Rv + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \\ v \end{pmatrix}$$

Para implementarmos os métodos de Euler e Runge-Kutta, associamos cada linha de  $F(U)$  a uma sucessão na calculadora. Vejamos então os métodos numéricos nas secções seguintes. Para tal, sejam:

- $d = 0.1$
- $R = 0.5$
- $C = 0.2$
- $(x_1, y_1) = (1, 0)$
- $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



Figura 8.7: TI-NSPIRE

- $(x_3, y_3) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ .

A velocidade inicial será sempre nula, pois quando largamos o pêndulo magnético, nesse instante inicial a velocidade é nula.

As constantes  $d$ ,  $R$  e  $C$ , são as aconselhadas por Robert Dikcau em [16]. O modelo de construção é o sugerido em [17].

### 8.2.1 Método de Euler para as equações do pêndulo magnético

A aplicação do método de Euler que se apresenta a seguir foi implementada na calculadora "TI-NSPIRE".

$$U' = F(U)$$

$$\vec{U}_{k+1} = \vec{U}_k + hF(\vec{U}_k)$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ y_k \\ v_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -Ru_k + \sum_{i=1}^3 \frac{u_k}{[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx_k \\ -Rv_k + \sum_{i=1}^3 \frac{v_k}{[(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy_k \end{pmatrix}$$

Após a análise das equações, passamos a escrevê-las no modo sucessão na calculadora. Usaram-se 500 iterações. O código realizado figura de seguida:

```

u1(n)=u1(n-1)+0.1*u2(n-1),
Termos iniciais:=0,1=n=500 nstep=1)
u2(n)=u2(n-1)+0.1*(-0.5*u2(n-1)+((1-u1(n-1))/
/(((1-u1(n-1))^(2)+(0-u3(n-1))^(2)+(0.1)^(2))^(((3)
/(2)))))+((-0.5-u1(n-1))/(((0.5-u1(n-1))^(2)+
(((v(3))/(2))-u3(n-1))^(2)+(0.1)^(2))^(((3)/(2))))))
+(((((-1)/(2))-u1(n-1))/(((0.5-u1(n-1))^(2)+
(((v(3))/(2))-u3(n-1))^(2)+(0.1)^(2))^(((3)/(2))))))-
0.2*u1(n-1)),
Termos iniciais:=1,1=n=500 nstep=1)
u3(n)=u3(n-1)+0.1*u4(n-1),
Termos iniciais:=0,1=n=500 nstep=1)
u4(n)=u4(n-1)+0.1*(-0.5*u4(n-1)+((0-u3(n-1))/
(((1-u1(n-1))^(2)+(0-u3(n-1))^(2)+
(0.1)^(2))^(((3)/(2)))))+
((((v(3))/(2))-u3(n-1))/(((0.5-u1(n-1))^(2)+
(((v(3))/(2))-u3(n-1))^(2)+(0.1)^(2))^(((3)/(2)
))))+(((((-v(3))/(2))-u3(n-1))/(((0.5-
u1(n-1))^(2)+((-v(3))/(2))-
u3(n-1))^(2)+(0.1)^(2))^(((3)/(2))))
)-0.2*u3(n-1)),
Termos iniciais:=1,1=n=500 nstep=1)

```

Posteriormente passamos à análise dos gráficos 8.8, 8.9 e 8.10.

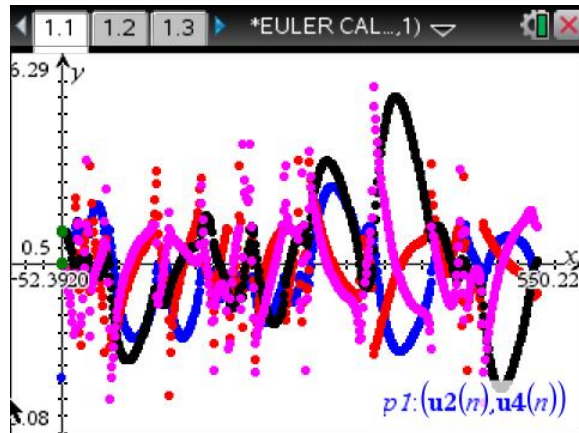


Figura 8.8: Gráfico da posição e velocidade com  $(x, y) = (1, 1)$  e  $(x', y') = (0, 0)$

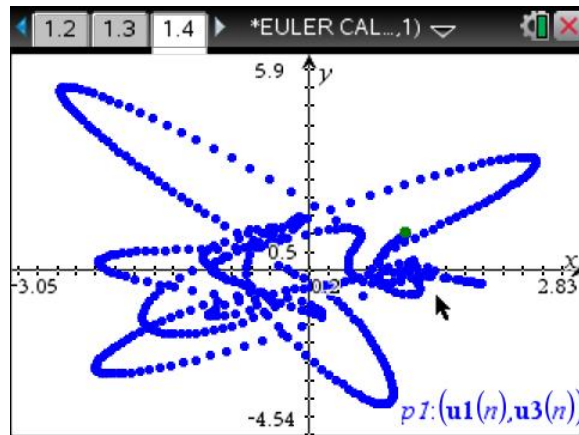


Figura 8.9: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(1, 1)$  e passo  $h = 0.1$

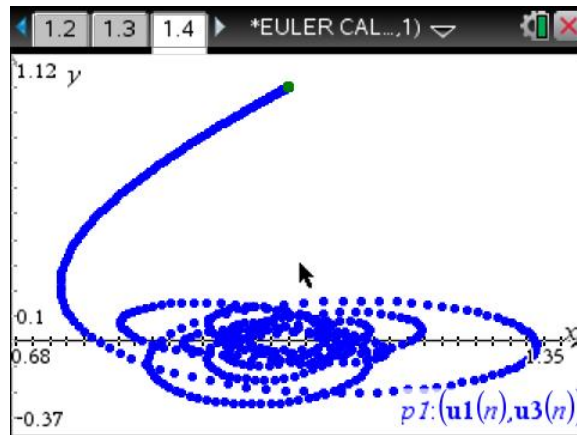


Figura 8.10: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(1, 1)$  e passo  $h = 0.01$

Um dos primeiros problemas que detetámos é que a calculadora apresenta-se muito limitada na escrita em código. Facilmente se cometem erros na transcrição da fórmula. O método de Euler para o passo  $h = 0.1$  velocidade inicial nula e posição inicial  $(1, 1)$  apresenta ser esclarecedor sobre a posição final do pêndulo. Se colocarmos a posição e a velocidade inicial nulas, verifica-se que o pêndulo não sai da origem. O que já nos dá uma boa indicação que o método escrito na calculadora, apresenta poder estar correto.

Para o passo  $h = 0.01$ , para a mesma posição e velocidade inicial do pêndulo, podemos observar quer com mais certeza de que o pêndulo vai parar na posição do íman  $(1, 0)$ , como se pode observar na imagem (8.11).

Para o passo  $h = 0.1$  e velocidade inicial do pêndulo, partindo da posição inicial  $(0, 1)$  podemos observar que já não é possível verificar se o pêndulo vai parar na posição do íman que se encontra no terceiro quadrante, como se pode observar na imagem (8.12).

Mantendo agora os dados relativos à imagem (8.11), mas de passo  $h = 0.01$ , imagem(8.12), observamos que já se pode aferir com precisão a posição final do pêndulo.

Também podemos observar que pequenas mudanças na posição inicial, faz com que o resultado final seja completamente diferente, como podemos



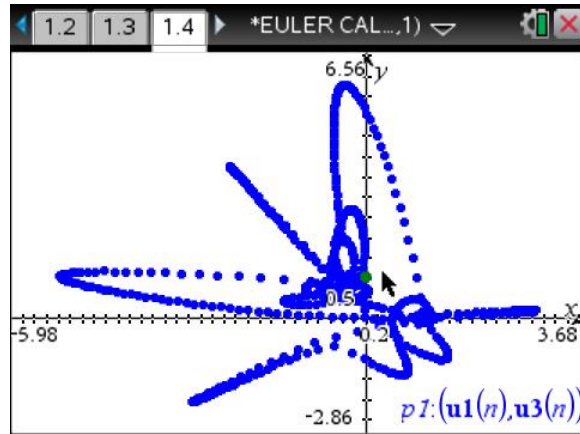


Figura 8.11: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(0, 1)$  e passo  $h = 0.1$ ,

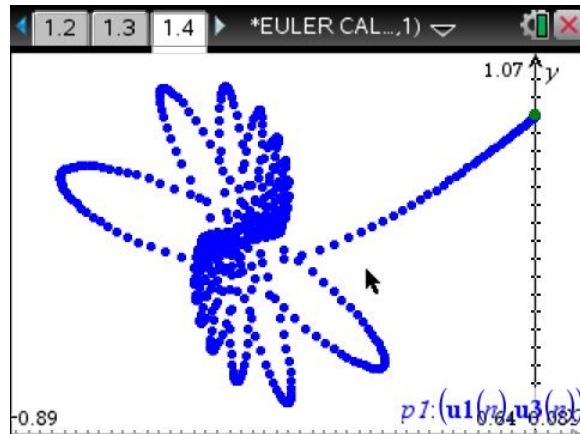


Figura 8.12: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(0, 1)$  e passo  $h = 0.01$

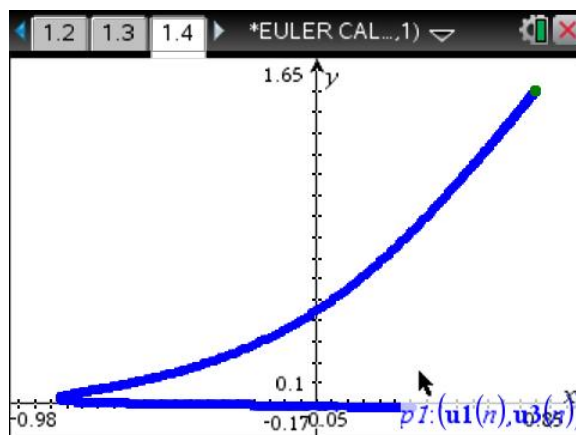


Figura 8.13: Gráfico do pêndulo com posição inicial (0.6, 1.5) e passo  $h = 0.01$

verificar na imagem (8.13).

O método de euler é um método de primeira ordem. A ordem mede o quão rapidamente este converge para a solução analítica quando se diminui os passos na integração numérica. Infelizmente devido a limitações computacionais, os erros de arredondamento crescem quando se diminui o tamanho dos passos, ocorrendo até mesmo divergência ou mesmo valores errados. Uma forma de resolver este problema é aumentar a ordem do método numérico. Por exemplo o método de Runge-Kutta.

## 8.2.2 Método RK2 para as equações do pêndulo magnético

O algoritmo que se apresenta a seguir também era para ser construído na calculadora "TI-NSPIRE", mas atendendo à complexidade do mesmo, não foi possível escrevê-lo.

O método RK2 é dado por:

$$\vec{U}_{k+1} = \vec{U}_k + \frac{h}{2} \left( F(\vec{U}_k) + F(\vec{U}_k + hF(\vec{U}_k)) \right).$$

Pondo

$$U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ y_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

vem

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}$$

e

$$F(U_k) = \begin{pmatrix} u_k \\ -Ru_k + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x_k}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx_k \\ v_k \\ -Rv_k + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y_k}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy_k \end{pmatrix},$$

donde se obtém

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ y_k \\ v_k \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left( \begin{pmatrix} -Ru_k + \sum_{i=1}^3 \frac{u_k (x_i - x_k)}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx_k \\ -Rv_k + \sum_{i=1}^3 \frac{v_k (y_i - y_k)}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_k + hu_k \\ u_k + h \left( -Ru_k + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x_k}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cx_k \right) \\ y_k + hv_k \\ v_k + h \left( -Rv_k + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y_k}{[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} - Cy_k \right) \end{pmatrix} \right)$$

Assim, como podemos observar, a implementação deste método na calculadora é semelhante ao do método de Euler, mas muito mais extenso. Atendendo ao grau de complexidade do método e aos poucos recursos gráficos que a calculadora apresenta, torna-se praticamente impossível introduzi-lo. As limitações da calculadora estão bem presentes neste método. A sua pequena dimensão da janela faz com que não tenhamos noção do cálculo escrito, pois a fórmula é extensa. Uma vez que já existem muitos programas que tornam este código mais simples de introduzir e perceptível ao erro humano na introdução das fórmulas (como por exemplo o "Maxima",

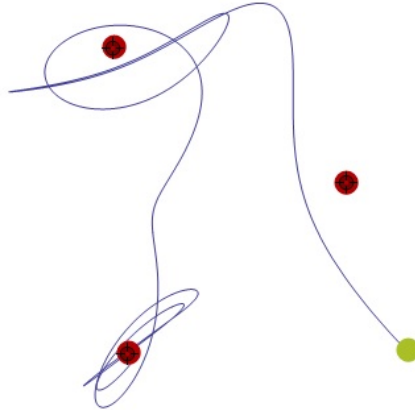


Figura 8.14: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(-1, -1.4)$  e  $(x', y') = (0, 0)$

o "Wolfram", o "Matlab", o "Mathematica", ou o "Maple"), optou-se por programar no programa "Máxima".

O método de RK2 é um método de convergência mais rápido, foram apenas necessárias 50 iterações para obtermos os mesmos resultados do que no método de Euler, mas ao mesmo tempo é um método extremamente complicado de se introduzir numa calculadora.

Para uma sala de aula é um método que se pode usar, desde que as equações a estudar sejam simples de calcular, pois, caso contrário, poderá não existir tempo útil para se poder aplicar e retirar as respetivas conclusões.

Este código é o da aplicação do método de RK2, no programa "Máxima"

```
rk(edo, estado, inicial, dominio) :=
block
([f:edo, var:[estado], xv:inicial, t0:dominio[2], h:dominio[4],
t, n, d1, d2, dados, numer:true],
n: entier((dominio[3] - dominio[2])/h),
t: t0,
dados: [[t,xv]],
for i thru n do (
d1: ev(f, dominio[1] = t, var[1] = xv),
d2: ev(f, dominio[1] = t + h/2, var[1] = xv + h*d1/2),
xv: xv + h*(d1 + d2)/2,
```

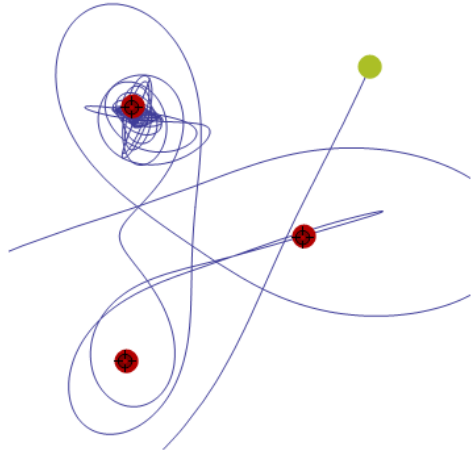


Figura 8.15: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(1.4, 1)$

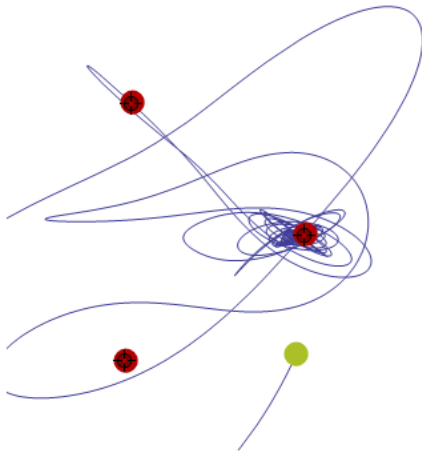


Figura 8.16: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(1, -\sqrt{3})$

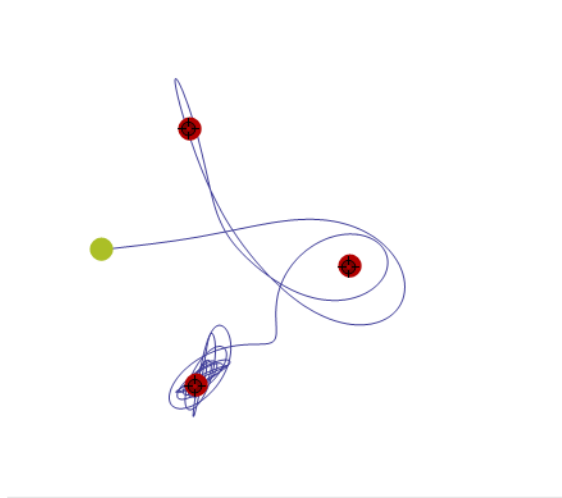


Figura 8.17: Gráfico do pêndulo com posição inicial  $(0, -1)$

```

t: t0 + i*h,
dados: cons([t, xv], dados)),
reverse(dados))$
load("dynamics")$
sol: rk([u,
-0.5*u+((1-x)/((1-x)^2+(0-y)^2+0.01)^3/2)+
((-0.5-x)/((-0.5-x)^2+(sqrt(3)/2-y)^2+0.01)^3/2)+
((-0.5-x)/((-0.5-x)^2+(-sqrt(3)/2-y)^2+0.01)^3/2)-0.2*x,
v,
-0.5*v+
((0-y)/((1-x)^2+(0-y)^2+0.01)^3/2)+
((sqrt(3)/2-y)/((-0.5-x)^2+(sqrt(3)/2-y)^2+0.01)^3/2)+
((-sqrt(3)/2-y)/((-0.5-x)^2+(-sqrt(3)/2-y)^2+0.01)^3/2)-0.2*x
], [x, u, y, v], [0, 0, 1, 0], [x, -2, 2, 0.1])$
last(sol);

```

Rapidamente nos apercebemos que se tratam de códigos simples de implementar em comparação com o que estava previsto na calculadora. Desta forma, e sem colocar os resultados em causa, conclui-se que a utilização de programas atuais e gratuitos, são mais vantajosos do que recorrer ao uso da calculadora. Os discentes do ensino básico e secundário já começam a ter contacto com esta forma de pensar. A utilização deste tipo de software já é

prática usual nalguns estabelecimentos de ensino.





## Capítulo 9

# Conclusão

O tema apresentado na tese deveu-se fundamentalmente às lacunas que sentia em relação às equações diferenciais e métodos numéricos, pois durante a licenciatura não tive a oportunidade de os poder estudar. Também durante a minha prática letiva sentia que determinados cálculos só poderiam ser realizados através de métodos computacionais. As dúvidas dos alunos em quererem sempre saber mais, levou-me a ingressar por este tema. Assim, penso que colmatei muitas das dificuldades que sentia, e já lhes posso explicar como "pensa" uma calculadora. Quando me perguntavam como é que este cálculo se poderia fazer sem recorrer à calculadora, era algo para o qual não tinha uma resposta fácil. Agora já lhes posso explicar, pois os métodos numéricos deram-me outra visão. As Equações Diferenciais estão muito presentes no nosso dia a dia e, em particular, as Equações Diferenciais Ordinárias. Com o auxílio das leis da Física descobriu-se uma infinidade de aplicações para essas equações. Evidentemente que nem todas as EDO têm uma solução dada explicitamente, mas isso fez com que surgissem técnicas que nos dessem informações sobre as soluções sem que necessariamente tivéssemos as suas expressões algébricas. Essas técnicas estão inseridas no que chamo de Teoria Qualitativa das EDO. Da presente tese pode concluir-se que dado um problema de valor inicial podem ocorrer várias soluções que satisfaçam esse problema contudo, existem ferramentas que nos ajudam a decidir se alguns PVI tem solução única. Uma vez que

tenhamos a certeza que tal solução existe numa dada região, podemos usar técnicas computacionais, como a calculadora gráfica, mesmo que os métodos analíticos não as resolvam. Foi também possível verificar que os sistemas de equações, sejam eles lineares ou não, estão presentes em problemas reais e muitos deles, de grande importância científica. Foi com estas descobertas que me senti cada vez mais motivado para a continuidade deste estudo. Embora tenha bem presente que o Mestrado em Ensino de Matemática não tenha continuidade, espero com muita convicção que um dia possa continuar os estudos superiores. A realização de um outro mestrado em matemática e aplicações ou mesmo economia está nos meus planos. O Pêndulo magnético e o seu movimento de forma caótica, fazem lembrar as oscilações dos mercados financeiros, dado que estes usam muito rácios de fibonacci e expansões de fibonacci, seria de todo útil verificar até que ponto as oscilações do pêndulo magnético se comportam no mundo fractal dos mercados. Outro estudo que penso que seria interessante, era o de aplicar as equações do pêndulo às fugas de gás e despressurização das tubagens, de forma a evitar que as mesmas sejam roubadas. O pêndulo magnético, em repouso, serviria como o ponto de equilíbrio óptimo, enquanto que cada um dos ímanes serviria de despiste ou certeza de fuga. São dois temas que certamente terei muito prazer em poder estudar. Espero, sinceramente, que num futuro próximo me possa dedicar a um deles.

# Bibliografia

- [1] Bandeira, Luís, Apontamentos de Modelação Matemática, Universidade de Évora, 2013.
- [2] Boyce, William E., DiPrima, Richard C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9<sup>th</sup> Edition, Wiley, 2009.
- [3] Boyer C.B., Merzbach U.C. "A history of mathematics", Wiley, 2011.
- [4] C. Robinson, Introduction to Dynamical Systems: Discrete and Continuous, Prentice Hall, New York, 2004.
- [5] Devaney, Robert L., An introduction to chaotic dynamical systems, Westview Press 2003.
- [6] Lima, Elton Lages, Curso de análise Vol.1 e 2, 8<sup>a</sup> edição, LTC Editora, Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.
- [7] Hirsh, Morris W., Smale, Stephen, Devaney, Robert L., Differential Equations, Dynamical Systems, and an introduction to chaos, second edition, Elsevier (USA), 2004.
- [8] Minhós, Feliz, Equações diferenciais ordinárias, relatório sobre a unidade curricular, Universidade de Évora, julho 2009.
- [9] Peitgen H.O, Jürgens H. and Saupe D. "Chaos and Fractals", Springer-Verlag, 1992.
- [10] Rudin, Walter, Principles of Mathematical Analysis, 3<sup>rd</sup> edition, Mcgraw-Hill, Inc., 1976.

- [11] Teschl Gerald, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, 1<sup>th</sup> Edition, Textbook, 2012, University of Vienna, Austria.
- [12] Strang, Gilbert, Linear Algebra and Its Application, 4<sup>th</sup> edition, Brooks/Cole (Cengage Learning), 2006.
- [13] Verissimo, Suzana, Máquinas do Tempo, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1996.
- [14] history.mcs.st. Página visitada em 4 de junho de 2014
- [15] <http://galileo.rice.edu/lib/student-work/experiment95/galileo-pendulum.html>, página visitada a 10 de junho de 2014
- [16] <http://mathforum.org/advanced/robertd/magneticpendulum.html>, página visitada a 15 de junho de 2014
- [17] <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/obra.htm>, página visitada a 16 de junho de 2014