

Universidade de Évora

Instituto de Investigação e Formação Avançada

Sistemas dinâmicos de dimensão infinita associados a
aplicações do intervalo

Maria de Fátima Barbosa Amado Correia
(Mestre)

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Orientador: Professor Doutor Carlos Correia Ramos
Co-Orientadora: Professora Doutora Sandra Maria Vinagre

Évora
2011

Universidade de Évora

Instituto de Investigação e Formação Avançada

Sistemas dinâmicos de dimensão infinita associados a
aplicações do intervalo

Maria de Fátima Barbosa Amado Correia
(Mestre)

Tese para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Orientador: Professor Doutor Carlos Correia Ramos
Co-Orientadora: Professora Doutora Sandra Maria Vinagre

Évora
2011

RESUMO

Neste trabalho consideramos o sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T) , onde \mathcal{A} é uma classe de funções diferenciáveis reais definidas num intervalo real e $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é um operador do tipo $T\phi := f \circ \phi$, caracterizado por uma aplicação real f definida num certo intervalo real I . Usando técnicas da dinâmica simbólica estudamos a localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} , por T , para o caso em que T é caracterizado por uma aplicação m -modal f . Além disso, introduzimos e desenvolvemos algumas técnicas da dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) , que têm por base a dinâmica simbólica do sistema dinâmico (I, f) . Estudamos a taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} , por T , nomeadamente no caso em que T é caracterizado por uma aplicação f topologicamente exacta e analisamos a evolução e a distribuição dos seus valores críticos. Finalmente, associamos um sistema de substituição ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) considerando as aplicações f cujas sequências de amassamento são periódicas e as funções em \mathcal{A} cujos valores críticos são pontos periódicos de f , e analisamos algumas propriedades dinâmicas para este sistema de substituição.

PALAVRAS-CHAVE: Aplicação m -modal, dinâmica simbólica, invariante de amassamento, sistemas dinâmicos discretos, sistemas de substituição, teoria de iteração.

Infinite dimensional dynamical systems associated to interval maps

ABSTRACT

In this work, we consider the discrete dynamical system (\mathcal{A}, T) , where \mathcal{A} is a class of differentiable real functions defined in some real interval and $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is an operator of the type $T\phi := f \circ \phi$ characterized by a real map f defined in a certain real interval I . Using techniques of symbolic dynamics we study the localization of the critical points and critical values of the iterated functions of the class \mathcal{A} , by T , for the case in which T is characterized by a m -modal map f . Moreover, we introduce and develop some techniques of symbolic dynamics for the dynamical system (\mathcal{A}, T) , based on the symbolic dynamics of the dynamical system (I, f) . We study the growth rate of the critical points of the iterated functions of the class \mathcal{A} , by T , namely in the case that T is characterized by a topological exact map, and we analyse the evolution and the the distribution of their critical values. Finally, we associate a substitution system to the dynamical system (\mathcal{A}, T) considering the maps f whose kneading sequences are periodic and the functions in \mathcal{A} whose critical values are periodic points of f , and we analyse some dynamical properties for this substitution system.

KEYWORDS: m -modal map, symbolic dynamics, kneading invariant, discrete dynamical systems, substitution systems, iteration theory.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer o apoio institucional do Departamento de Matemática da Universidade de Évora, do Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora e da Fundação Calouste Gulbenkian.

Aos meus orientadores, o Professor Doutor Carlos Correia Ramos e a Professora Doutora Sandra Maria Vinagre, quero exprimir um especial agradecimento e a minha gratidão, pela paciência, pela competência científica e pelas críticas, correcções e sugestões relevantes feitas durante a orientação.

Quero também usar esta oportunidade para recordar o Professor Doutor José Sousa Ramos, que me aceitou como sua aluna de doutoramento e por quem eu tinha muita admiração e respeito pelas suas qualidades humanas e pelo seu conhecimento científico.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática gostaria de agradecer pela disponibilidade, compreensão e carinho demonstrados.

Finalmente, um agradecimento aos meus pais, à minha avó, aos meus irmãos, à minha família e aos meus amigos, por toda paciência e carinho que me dispensaram ao longo de todos estes anos de trabalho, em que pouca atenção lhes pude prestar.

Conteúdo

1	Introdução e preliminares	1
1.1	Generalidades	6
1.2	Dinâmica simbólica para aplicações m -modais	8
1.3	Sistemas de substituição	25
2	Iteração de funções diferenciáveis por aplicações unimodais	29
2.1	Introdução do sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T)	30
2.2	Localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas . .	31
2.3	Dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) associado a aplicações unimodais	38
2.4	Evolução e decomposição espectral das funções iteradas	45
3	Iteração de funções diferenciáveis por aplicações m-modais	51
3.1	Localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas . .	52
3.2	Dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) associado a aplicações m -modais	59
3.3	Taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas	68
3.4	Evolução e distribuição dos valores críticos das funções iteradas	79

3.4.1	Algoritmo e resultados numéricos	87
4	Sistemas de substituição associados ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T)	105
4.1	Sistemas de substituição associados a \mathcal{A}_{per}	107
4.2	Subsistemas de substituição associados a $\mathcal{A}_{per}(\phi)$	127
A	Problemas de valores na fronteira e equações às diferenças	133
	Bibliografia	135
	Índice Remissivo	142

Lista de Figuras

- 2.1 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{RLR} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um mínimo e um máximo na região I_{LR} , respectivamente. 34
- 2.2 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{LLR} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{LR} , respectivamente. 35
- 2.3 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com zeros em alguns pontos x_1 e x_2 e um máximo e um mínimo na região I_{RRL} e I_{LRL} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de uma aplicação $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com novos valores maximais em x_1 e x_2 e um mínimo na região I_{RL} . Notamos que em (b) a escala vertical é diferente. 35
- 2.4 (a) Gráfico de $\phi_0(x) = -0.5 + 0.05 \cos(3\pi x)$, tal que $\phi_5 = f^5 \circ \phi_0$ tem três novos pontos críticos. (b) Gráficos das k -iterações por f de $\phi_0(x) = -0.5 + 0.05 \cos(3\pi x)$, com $f(x) = 1 - 2x^2$ 37
- 2.5 Gráficos das funções ϕ , $\tilde{\phi}$, ψ e das iteradas $T\phi$, $T\tilde{\phi}$, $T\psi$, $T^2\phi$, $T^2\tilde{\phi}$, $T^2\psi$ com $f(x) = 1 - 1.97041x^2$. Notamos a diferença na escala na primeira linha. 41

2.6 Gráficos de ϕ , $T\phi$, $T^2\phi$ e $T^3\phi$, com $\phi(x) = 0.1 \cos(\pi x) - 0.2 \cos(2\pi x) + 0.3 \cos(3\pi x) + 0.2 \cos(4\pi x) - 0.1 \cos(5\pi x) + 0.1 \cos(6\pi x)$ e f dada pela expressão analítica $f(x) = 1 - 2x^2$ 45

2.7 Gráficos da variação com o parâmetro $\mu \in (0, 2]$ da decomposição espectral de $\phi_4 = f_\mu^4 \circ \phi_0$, $|c_{2j}(4)|$, $j = 0, 1, \dots, 8$, com $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ e $\phi_0(x) = \cos(\pi x)$ 49

3.1 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{31} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_1 , respectivamente. 56

3.2 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo nas regiões I_{22} e I_{23} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um mínimo e um máximo nas regiões I_2 e I_3 , respectivamente. 56

3.3 (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , que intersecta a linha horizontal correspondendo a um ponto crítico de f em alguns pontos $x_1, x'_1 \in J_1$, $x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo e um mínimo nas regiões I_{31} e I_{21} . (b) Gráfico da restrição da aplicação $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com os novos valores mínimos nos pontos $x_1, x'_1 \in J_1$, $x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo na região I_1 . Notamos que em (b) a escala vertical é diferente. 57

3.4 (a) Gráfico de $\phi_0(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x)$, com $a_0 = -0.2$ e $a_1 = 0.06$, tal que $\phi_2 = f^2 \circ \phi_0$ tem dois novos pontos críticos. A linha indicada é a primeira pré-imagem de c_2 pertencente a I_2 . (b) Gráficos das k -iterações por f de $\phi_0(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x)$, com $a_0 = -0.2$ e $a_1 = 0.06$ 58

- 3.5 Gráficos das funções ϕ , $\tilde{\phi}$, ψ , $T\phi$, $T\tilde{\phi}$, $T\psi$, $T^2\phi$, $T^2\tilde{\phi}$ e $T^2\psi$, onde ϕ , $\tilde{\phi}$ e ψ são dadas aproximadamente por $\phi(x) = 0.261 \cos(\pi x) + 0.711$, $\tilde{\phi}(x) = 0.2885 \cos(0.8\pi x) + 0.6834$ e $\psi(x) = 0.261 \cos(3\pi x) + 0.711$, respectivamente, e $f(x) = -2.15x^3 + 1.15x$ 61
- 3.6 Gráfico da aplicação bimodal f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = 3.9818x^3 - 2.9818x$. As linhas horizontais representam os pontos críticos simbolicamente dados por C_1 e C_2 64
- 3.7 Gráficos de $T^k\phi$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, com ϕ dada por $\phi(x) = 0.05 \cos(2\pi x) - 0.92$ e f dada aproximadamente pela expressão analítica $f(x) = 3.9818x^3 - 2.9818x$ 66
- 3.8 Gráfico da aplicação 4-modal f caracterizada pelo invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty)$ 67
- 3.9 Gráfico da aplicação f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$ e simbolicamente designados por C_1 e C_2 , respectivamente. 72
- 3.10 Gráficos das funções $\psi_k = T^k\psi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ψ_0 dada por $\psi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) - 0.7000$, tal que $Im(\psi_0) \subset J_1$ e $Im(\psi_0) \not\subset \Lambda$, e onde f é dada por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$ 74

- 3.11 Gráficos das funções $\phi_k = T^k \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) + 0.5038$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_2$ e $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, e onde f é dada por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091 \dots$ e $c_2 = 0.504301 \dots$. Notamos que não se consegue visualizar as iteradas de ϕ_0 , por T , das referidas linhas horizontais. 74
- 3.12 Gráficos das funções $\phi_k = T^k \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) + 0.5038$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_2$ e $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, e onde f é dada aproximadamente por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091 \dots$ e $c_2 = 0.504301 \dots$. Notamos reescalamto nos gráficos da Figura 3.11. 75
- 3.13 Gráfico da aplicação f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345 \dots$ e $c_2 = 0.62577 \dots$ e simbolicamente designados por C_1 e C_2 76
- 3.14 Gráficos das funções $\phi_k = T^k \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com $\phi_0(x) = -0.048 \cos(5\pi x) - 0.74$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_1$, e f dada por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345 \dots$ e $c_2 = 0.62577 \dots$ 78
- 3.15 Gráficos das funções $\psi_k = T^k \psi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com $\psi_0(x) = 0.048 \cos(5\pi x) + 0.75$, tal que $Im(\psi_0) \subset J_2$, e f dada aproximadamente por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345 \dots$ e $c_2 = 0.62577 \dots$ 78

- 3.16 Gráfico de f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -7.97544x^4 + 7.97544x^2 - 1$. As linhas horizontais representam os pontos críticos $c_1 = -0.707107\dots$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0.707107\dots$, simbolicamente dados por C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente. Os símbolos do alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3, C_3, 4\}$ estão representados no eixo horizontal do gráfico. . . . 82
- 3.17 Gráficos das funções $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.075 \cos(2\pi x) + 0.75$ e f dada aproximadamente por $f(x) = -7.97544x^4 + 7.97544x^2 - 1$. Os itinerários dos novos pontos críticos de ϕ_k são dados por $(412C_1)^\infty$, $(2C_142)^\infty$, $(C_1412)^\infty$, $(12C_14)^\infty$ e 1^∞ e estão representadas pelas linhas horizontais por ordem decrescente respectivamente (de cima para baixo). 83
- 3.18 Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{15} = f^{15} \circ \phi_0$ cujos itinerários são $\sigma^q((333C_1)^\infty)$, $\sigma^q((122C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{15} 92
- 3.19 Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{15} = f^{15} \circ \phi_0$ dados por $\sigma^q((332C_1)^\infty)$, $\sigma^q((112C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{15} 98
- 3.20 Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{17} = f^{17} \circ \phi_0$ dados por $\sigma^q((32C_1)^\infty)$, $\sigma^q((112C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{17} 102

- 4.1 O gráfico apresenta as primeiras quatro etapas de acordo com as regras para sistema de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda. 114
- 4.2 O gráfico apresenta as primeiras 200 etapas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto de substituição $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda ao lado do gráfico. Notamos uma truncatura vertical no gráfico. 115
- 4.3 O gráfico apresenta as primeiras 200 etapas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto de substituição $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda ao lado do gráfico. Notamos uma truncatura vertical no gráfico. 119
- 4.4 A variação de $\log(N_k(\psi_0))$ com $k = 1, 2, \dots, 12$. A regressão linear com o declive aproximadamente igual a 1.018... ajusta os valores da última coluna da Tabela 4.1. 125

Capítulo 1

Introdução e preliminares

A iteração de funções diferenciáveis é um assunto que pode ser estudado pelo seu próprio interesse, generalizando a teoria de iteração no âmbito das aplicações do intervalo. Geralmente o termo iteração de funções diferenciáveis significa que temos uma aplicação diferenciável f e que envolve o estudo do comportamento das órbitas dos pontos, por iteração da aplicação f . Não obstante, neste trabalho, o termo iteração de funções diferenciáveis significa que o espaço subjacente ao sistema dinâmico é um espaço de funções diferenciáveis, pelo que as órbitas ou as trajectórias, por iteração da aplicação f , não são constituídas por pontos num intervalo mas por funções diferenciáveis. Sendo assim, podemos afirmar que trabalhamos com sistemas dinâmicos discretos de dimensão infinita. A iteração de funções diferenciáveis aparece em diferentes contextos, nomeadamente no estudo de problemas de valores na fronteira e de problemas de equações às diferenças, ver por exemplo [RS 99, SMR 93, Sha 03, SSRV 04, SSRV 06, VSR 05]. Entre os problemas de valores na fronteira para equações às derivadas parciais, existem algumas classes de problemas redutíveis a equações às diferenças e a outras equações relevantes. Estas classes consistem principalmente em problemas para os quais a solução geral para equações às derivadas parciais é conhecida. A redução a equações às diferenças com argu-

mento contínuo, seguido do uso das propriedades da aplicação unidimensional associada às equações às diferenças, permite a compreensão de algumas propriedades das soluções caóticas para o problema original. Este trabalho é motivado pelos trabalhos desenvolvidos sobre este assunto em [RS 99, SMR 93, Sha 03]

As aplicações unidimensionais do intervalo têm desempenhado um papel importante na compreensão de muitas propriedades e fenômenos encontrados em sistemas dinâmicos não lineares e complexos. Parte do seu sucesso deve-se à dinâmica simbólica, que permitiu a simplificação da descrição dinâmica das suas características indispensáveis, no que concerne às dinâmicas topológicas. Alguns subconjuntos do espaço de fases são identificados, representados simbolicamente e tratados como equivalentes. Portanto, em vez de órbitas, trabalhamos com sequências de símbolos. Resultados importantes na classificação e no cálculo de invariantes, tais como a entropia topológica, são obtidos no estudo da iteração por aplicações unidimensionais, usando a dinâmica simbólica. Muitos esforços têm sido feitos para estender as técnicas e resultados obtidos em iteração de aplicações do intervalo para sistemas dinâmicos de dimensão superior, no entanto as dificuldades aparecem imediatamente na dimensão dois.

Neste trabalho, que tem como objectivo principal o estudo de funções diferenciáveis de uma certa classe de funções por iteração de aplicações do intervalo, começamos por introduzir uma classe de funções diferenciáveis reais, \mathcal{A}_I , definidas num intervalo (eventualmente podem ser definidas em \mathbb{R}), onde $\phi \in \mathcal{A}_I$ significa que $\phi \in C^1([0, 1], I)$ (para um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ dado) e satisfaz as condições na fronteira $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ e ϕ tem número finito de pontos críticos. O uso do intervalo $[0, 1]$ é apenas uma conveniência, podendo ser utilizado qualquer outro intervalo, sendo que o aspecto importante é que ϕ tenha

derivada igual a zero nos pontos da fronteira do intervalo do domínio. A caracterização desta classe \mathcal{A}_I em termos de fecho topológico, métrico ou algébrico não é discutida uma vez que estudamos principalmente os aspectos combinatórios da dinâmica. A evolução temporal, de modo a obter um sistema dinâmico discreto, é implementada pelo operador $T : \mathcal{A}_I \rightarrow \mathcal{A}_I$ definido pela regra $\phi \mapsto f \circ \phi$, onde $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação diferenciável em $C^1(I, I)$. Portanto, obtemos o sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}_I, T) , no sentido em que temos um conjunto \mathcal{A}_I (com eventual estrutura adicional, uma topologia ou uma métrica) e uma aplicação própria T que dá a evolução em tempo discreto. Este sistema dinâmico tem dimensão infinita, embora induzido por um sistema dinâmico discreto unidimensional (I, f) . Do ponto de vista topológico, o sistema dinâmico unidimensional (I, f) está formalmente contido em (\mathcal{A}_I, T) , uma vez que as funções constantes, $\phi \equiv c$, pertencem à classe \mathcal{A}_I e $T(c) = f(c)$. Além disso, uma função monótona $\phi \in \mathcal{A}_I$ (não trivial) determina um intervalo (com sinal) $([\phi(0), \phi(1)], +)$ se ϕ é uma função crescente e $([\phi(1), \phi(0)], -)$ se ϕ é uma função decrescente. Então, a dinâmica de intervalos por iteração de uma aplicação do intervalo f está também formalmente contida no estudo da dinâmica de (\mathcal{A}_I, T) . Mais, uma vez que uma função diferenciável tem muitos atributos diferentes, como oscilação $([\min(\phi), \max(\phi)])$, valores críticos, pontos críticos, decomposição espectral, energia, momentos, etc ..., podemos analisar o comportamento de todo estes atributos pela iteração por T , havendo um potencial de estudo enorme (para trabalhos futuros). Neste trabalho, para uma simplificação de notação usamos a notação \mathcal{A} em vez de \mathcal{A}_I .

Esta tese está estruturada em quatro capítulos.

No presente capítulo, são introduzidas as definições e os resultados mais importantes que são necessários no desenvolvimento do trabalho. Sendo assim, os resultados referem-se

a diversos assuntos e são apresentados sem demonstração. No entanto, é sempre indicada uma referência onde essa mesma demonstração pode ser encontrada. Na Secção 1.1, são apresentados alguns conceitos e alguns resultados gerais relacionados com os sistemas dinâmicos discretos e com a iteração de aplicações contínuas. Por exemplo, introduzimos o conceito de uma aplicação topologicamente exacta que é utilizado na Secção 3.3 e o conceito de uma aplicação topologicamente transitiva que é utilizado no Capítulo 4. Na Secção 1.2, começamos por apresentar alguns conceitos e alguns resultados da dinâmica simbólica para aplicações m -modais e fazemos referência a aspectos específicos relativos às aplicações unimodais e bimodais. A seguir, introduzimos o conceito de entropia topológica que é uma medida da complexidade dinâmica das aplicações, uma relação de ordem lexicográfica no espaço das sequências simbólicas e, com base nessa relação de ordem, são estabelecidas as condições de admissibilidade para as sequências simbólicas. Finalmente, na Secção 1.3, apresentamos algumas notações e alguns conceitos usados no estudo de sistemas de substituição que são objecto de estudo no Capítulo 4.

No Capítulo 2, começamos por introduzir um sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T) , onde \mathcal{A} é uma classe de funções diferenciáveis, com número finito de pontos críticos e que satisfazem condições de fronteira introduzidas atrás, e T é o operador obtido como a composição de uma família aplicações unimodais f com uma função ϕ da classe \mathcal{A} . Introduzimos e desenvolvemos algumas técnicas da dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) que têm por base a dinâmica simbólica do sistema dinâmico unidimensional (I, f) onde $I \subset \mathbb{R}$ é um subintervalo. Por último, analisamos o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) para o caso particular de f ser uma família de aplicações quadráticas a um parâmetro $\mu \in (0, 2]$, e que notamos por f_μ , e analisamos a dependência no parâmetro μ da decomposição espectral

por iteração de funções ϕ da classe \mathcal{A} por f_μ .

No Capítulo 3, consideramos o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) onde \mathcal{A} é a classe de funções diferenciáveis introduzida no Capítulo 2 e T caracterizado por uma aplicação m -modal f . Começamos por generalizar, para o caso em que T é obtido de aplicações m -modais f , os resultados obtidos no Capítulo 2 sobre a localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f e sobre as técnicas da dinâmica simbólica introduzidas para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) . Neste caso, obtemos a descrição combinatória das órbitas do sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) que depende da descrição combinatória das órbitas de um sistema dinâmico (I, f) . Considerando as técnicas da dinâmica simbólica introduzidas e desenvolvidas para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) e analisando o caso particular em que a aplicação f é topologicamente exacta, estudamos a taxa de crescimento do número de pontos críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f , estabelecendo uma relação entre esta taxa de crescimento e o número de crescimento de f . Por outro lado, considerando as sequências de amassamento de f periódicas, estudamos a evolução e a distribuição desses valores críticos por iteração de f , dito de outro modo, quais os valores críticos e com que frequência aparecem repetidos. Para isso, tendo por base a definição da aplicação deslocamento generalizado e usando o invariante de amassamento de f , desenvolvemos um algoritmo iterativo para determinar os itinerários de todos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por uma aplicação bimodal f . Com esses itinerários calculamos as frequências relativas desses valores críticos que são apresentadas em histogramas. Por último, apresentamos um resultado numérico que relaciona as frequências relativas dos valores críticos cujos itinerários são obtidos a partir de uma mesma sequência de amassamento de f .

Finalmente no Capítulo 4, o objectivo a que nos propomos é o estudo de um sistema de substituição associado ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) considerado no Capítulo 3. Para isso, começamos por introduzir uma subclasse \mathcal{A}_{per} que é constituída por funções ϕ da classe \mathcal{A} cujos valores críticos são pontos periódicos de f . Posteriormente, usando as sequências de amassamento periódicas como novos elementos num alfabeto, definimos o sistema de substituição com base neste novo alfabeto e cuja regra de substituição é induzida pela aplicação deslocamento em \mathcal{A}_{per} . Para estes sistemas de substituição consideramos um novo alfabeto, que também é finito e cujos elementos são símbolos obtidos a partir das sequências de amassamento de f . Finalmente, analisamos algumas propriedades dinâmicas desses sistemas de substituição e a relação entre a taxa de crescimento de símbolos do alfabeto com a entropia topológica da aplicação f .

1.1 Generalidades

Antes de introduzirmos os conceitos da dinâmica simbólica para aplicações m -modais do intervalo, vamos apresentar algumas definições e alguns resultados gerais comuns na literatura da especialidade que são utilizados ao longo deste trabalho.

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um espaço métrico compacto e (X, f) o sistema dinâmico discreto definido pelas iteradas de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$. Dado um ponto $x \in X$ denotamos por $f^n(x)$ a n -ésima iterada de f de x , isto é,

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x).$$

Definição 1.1 *Sejam $x \in X$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Definimos a órbita do ponto x por f por*

$$\text{orb}_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Definição 1.2 *Sejam $x \in X$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que x é um ponto periódico de período (mínimo) n se $f^n(x) = x$ e $f^j(x) \neq x$ para qualquer $1 \leq j < n$.*

Definição 1.3 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $f : I \rightarrow I$ uma aplicação contínua. Dizemos que $\text{orb}_f(x)$ é uma órbita periódica se $x \in I$ é um ponto periódico.*

Em seguida apresentamos alguns conceitos relacionados com iteração de aplicações contínuas.

Definição 1.4 *Seja X um espaço métrico compacto. Dizemos que uma aplicação contínua $\tau : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se, para quaisquer conjuntos abertos não vazios $U, V \subset X$ existe, um inteiro $n \geq 0$ tal que $\tau^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Proposição 1.5 *Seja X um espaço métrico compacto. Uma aplicação contínua $\tau : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se, e somente se, existe um ponto $x \in X$ tal que a sua órbita é densa em X .*

Demonstração. Ver [PU 10]. ■

Definição 1.6 *Seja X um espaço métrico compacto. Dizemos que uma aplicação contínua $\tau : X \rightarrow X$ é topologicamente exacta se, para qualquer conjunto aberto $U \subset X$, existe um número inteiro $n > 0$ tal que $\tau^n(U) = X$.*

Em seguida, introduzimos um invariante topológico importante no estudo dos sistemas dinâmicos, a entropia topológica, que é uma medida quantitativa da complexidade dinâmica das aplicações. As propriedades da entropia foram estudadas primeiramente em 1965 por Adler, Konheim e McAndrew [AKM 65]. O conceito de entropia topológica veio posteriormente a revelar-se extremamente útil no estudo da dinâmica topológica, pois, por ser um invariante topológico, é independente da estrutura métrica.

Definição 1.7 *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto, com a métrica d e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dados $n \in \mathbb{N}$, $\xi > 0$, dizemos que um subconjunto $S \subset X$ é (n, ξ) -separado se, para quaisquer $x, y \in S$, $x \neq y$, existe um inteiro $0 \leq k < n$ tal que $d(f^k(x), f^k(y)) > \xi$.*

Definição 1.8 *Sejam f uma aplicação contínua num espaço métrico qualquer (X, d) e $H(f, n, \xi)$ a cardinalidade¹ máxima de todos os subconjuntos (n, ξ) -separados de X . Chamamos entropia topológica de f ao limite*

$$h_{top}(f) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log H(f, n, \xi).$$

1.2 Dinâmica simbólica para aplicações m -modais

Grosso modo, a ideia de dinâmica simbólica pode resumir-se a efectuar uma partição do espaço de fases de um sistema dinâmico discreto e a cada elemento dessa partição associar um símbolo. A cada órbita $x, f(x), f^2(x), \dots$ associamos uma sequência simbólica X_0, X_1, X_2, \dots , onde X_i é o símbolo correspondente ao elemento da partição ao qual

¹Designamos por cardinalidade de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ o número de elementos do X .

pertence $f^i(x)$. A origem desta ideia não é facilmente atribuível, mas parece ser consensual que quem reconheceu o valor deste tipo de estudo e o divulgou como tal foi o matemático Marston Morse. Um dos trabalhos mais importantes sobre dinâmica simbólica de aplicações no intervalo é, sem dúvida, [MT 88]. Neste trabalho, Milnor e Thurston introduziram o conceito de invariante de amassamento, o qual é extremamente eficaz na caracterização das classes de equivalência topológica da família das aplicações unidimensionais no intervalo.

A dinâmica simbólica é um método muito útil no estudo das propriedades qualitativas e quantitativas dos sistemas dinâmicos em tempo discreto com um espaço de estados contínuo. Um dos aspectos principais da descrição qualitativa das dinâmicas das aplicações m -modais do intervalo passa precisamente pela codificação simbólica dos intervalos de monotonia e pelo subsequente estudo das sequências simbólicas associadas às órbitas dos pontos do intervalo.

Neste trabalho vamos considerar as aplicações m -modais de um intervalo de \mathbb{R} em si próprio e faremos referência a aspectos específicos das aplicações unimodais e bimodais. Assim, no que se segue apresentamos alguns preliminares da dinâmica simbólica para aplicações m -modais num intervalo fechado da recta real, I , e alguns elementos da teoria de amassamento de Milnor e Thurston e, em particular, para o caso em que a aplicação é unimodal ou bimodal, ver [MT 88].

Começamos por apresentar o conceito de uma aplicação m -modal utilizado neste trabalho.

Definição 1.9 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado. Dizemos que $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação m -modal se é de classe $C^1(I, I)$ e tem m pontos críticos.*

Sejam c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, os m pontos críticos da aplicação m -modal f tais que

$$c_0 < c_1 < \dots < c_m < c_{m+1},$$

onde c_0 e c_{m+1} representam os pontos fronteiros ao intervalo I . Nestas condições, consideramos a partição do intervalo I em $m + 1$ subintervalos disjuntos, I_1, I_2, \dots, I_{m+1} , tais que

$$I = I_1 \cup I_{C_1} \cup I_2 \cup I_{C_2} \cup \dots \cup I_{C_m} \cup I_{m+1},$$

onde I_{C_i} é o conjunto $\{c_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, e I_i , $i = 1, 2, \dots, m + 1$, são dados por

$$I_1 = [c_0, c_1), I_2 = (c_1, c_2), \dots, I_{m+1} = (c_m, c_{m+1}].$$

Definição 1.10 *A um intervalo maximal no qual a aplicação f é estritamente monótona chamamos volta (lap em inglês) de f . O número de voltas de f é denotado por $l = l(f)$.*

Uma descrição quantitativa da complexidade dinâmica de f é obtida pela taxa de crescimento do número de voltas das iteradas $f, f^2, f^3, \dots, f^n, \dots$ da aplicação f . No lema seguinte é apresentado um invariante topológico que é dado por uma sequência numérica.

Lema 1.11 *Seja f uma aplicação m -modal do intervalo. Então, a sequência*

$$\text{laps}(f) = (1, l(f), l(f^2), \dots, l(f^n), \dots),$$

do número de voltas das diferentes iteradas de f , é um invariante topológico.

Demonstração. Ver [MT 88]. ■

A partir deste invariante é possível definir um outro invariante topológico e que é apresentado em seguida.

Definição 1.12 *Seja f uma aplicação m -modal do intervalo chamamos número de crescimento de f*

$$s(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(f^n)^{1/n}.$$

A existência deste limite para as as aplicações m -modais do intervalo está demonstrada em [MS 80] e [MT 88].

Lema 1.13 *Seja f uma aplicação m -modal do intervalo. O limite*

$$s(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(f^n)^{1/n}$$

existe e é um número real pertencente ao intervalo $[1, l(f)]$.

Demonstração. Ver [MT 88]. ■

Este invariante, o número de crescimento de uma aplicação do intervalo, está relacionado com um outro invariante topológico muito importante, a entropia topológica. A relação entre o número de crescimento e a entropia topológica de uma qualquer aplicação do intervalo, contínua e m -modal, é dada pela relação que é apresentada no resultado que se segue, ver [Rot 71] e [MS 80].

Proposição 1.14 *Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação m -modal do intervalo e $s(f)$ o número de crescimento de f . Então, a entropia topológica de f , $h_{top}(f)$, é dada por*

$$h_{top}(f) = \log(s(f)).$$

Demonstração. Ver [MS 80]. ■

Este resultado, permite-nos averiguar se uma aplicação m -modal f possui ou não caos-considerando a definição de aplicação caótica como toda aquela que tenha entropia positiva - através do estudo da sequência $\text{laps}(f)$.

Como os subintervalos de monotonia e os pontos críticos de uma aplicação m -modal são elementos importantes no estudo da dinâmica da aplicação, o interior desses intervalos de monotonia e pontos críticos são utilizados na codificação simbólica do intervalo, que apresentamos a seguir.

Para o estudo de qualquer aplicação m -modal do intervalo, consideramos o conjunto de símbolos

$$\mathfrak{A} := \{1, C_1, 2, \dots, C_m, I_{m+1}\},$$

denominado por *alfabeto*, e o conjunto de todas as sequências simbólicas

$$\mathfrak{A}^{\mathbb{N}} := \{(i_k)_{k \in \mathbb{N}} : i_k \in \mathfrak{A} \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}\}.$$

Em seguida, apresentamos a correspondência entre os pontos do intervalo I e os símbolos do alfabeto.

Definição 1.15 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \rightarrow I$ uma aplicação m -modal do intervalo e c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, os pontos críticos de f . Sejam I_i , $i = 1, 2, \dots, m + 1$, os subintervalos máximos nos quais a aplicação f é estritamente monótona e \mathfrak{A} o alfabeto. Chamamos aplicação endereço, denotada por $\text{ad}(x)$, a*

$$ad : I \rightarrow \mathfrak{A}$$

$$x \mapsto ad(x) = \begin{cases} i & \text{se } x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \\ C_i & \text{se } x \in I_{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Utilizando o conceito de endereço de um ponto qualquer x do intervalo I , obtemos a correspondência entre a órbita do ponto $x \in I$ por f , $orb_f(x)$, e uma sequência simbólica infinita do alfabeto \mathfrak{A} .

Definição 1.16 *Sejam f uma aplicação m -modal do intervalo e \mathfrak{A} o alfabeto. Chamamos aplicação itinerário por f a*

$$it : I \rightarrow \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$$

$$x \mapsto it(x) = ad(x) ad(f(x)) ad(f^2(x)) \dots$$

Um outro conceito que não poderíamos deixar de apresentar é o da admissibilidade de sequências simbólicas. Dito de outro modo, quais as sequências de $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ que são obtidas como itinerário de algum ponto de $x \in I$ por f .

Definição 1.17 *Uma sequência simbólica $\gamma = (\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ é admissível relativamente a f , se ocorre como itinerário de algum ponto x em I , isto é, $\gamma = it(x)$. O conjunto de todas as sequências admissíveis em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ é denotado por Σ .*

Definição 1.18 *Uma palavra admissível é uma subsequência finita ocorrendo numa sequência admissível. O conjunto das palavras admissíveis de tamanho k ocorrendo em alguma sequência de Σ é denotado por $\mathcal{W}_k = \mathcal{W}_k(f)$ e a cardinalidade do conjunto \mathcal{W}_k é denotada por $|\mathcal{W}_k|$.*

Nota 1.19 Neste trabalho, para o caso de uma aplicação m -modal (com $m \geq 2$), designamos um conjunto por uma letra maiúscula e uma palavra por uma letra minúscula. Sempre que não há confusão, usamos a notação $|\cdot|$ para o tamanho (ou comprimento) de uma palavra $\gamma \in \mathcal{W}_k$, isto é, $|\gamma|$. Por exemplo, para $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k$ temos $|\gamma| = k$.

Como a restrição da aplicação f a um subintervalo I_i é estritamente monótona então f é invertível se restringida ao intervalo $f(I_i)$, $i = 1, \dots, m+1$. Denotamos por f_i^{-1} a aplicação inversa $f_{|f(I_i)}^{-1} : f(I_i) \rightarrow I_i$ de $f_{|I_i} : I_i \rightarrow f(I_i)$.

Em seguida apresentamos a definição de bacia de atracção de f utilizada no Capítulo 3, ver [Guc 79].

Definição 1.20 Sejam c_i , $i = 1, \dots, m$, os pontos críticos de f e $U_i \subset I$ o intervalo maximal contendo c_i , consistindo de pontos cujas órbitas tendem para a órbita estável periódica de c_i . Sejam $i_1i_2 \dots i_p \in \mathcal{W}_p$, $p \in \mathbb{N}$ e $\Lambda_{i_1 \dots i_p C_i} \subset I$ um intervalo dado por

$$\Lambda_{i_1 \dots i_p C_i} := f_{i_1}^{-1} \circ f_{i_2}^{-1} \circ \dots \circ f_{i_p}^{-1}(U_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

A bacia de atracção de f , $\Lambda \subset I$, é dada por

$$\Lambda = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{i \in \mathcal{W}_p} \Lambda_{i_1 \dots i_p C_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Definição 1.21 Seja $i_0i_1 \dots i_k \in \mathcal{W}_{k+1}$ $k \in \mathbb{N}$. Ao intervalo $I_{i_0i_1 \dots i_k} \subset I$ chamamos intervalo cilindro e definimos por

$$\begin{aligned} I_{i_0i_1 \dots i_k} &:= \{x \in I : x \in I_{i_0}, f(x) \in I_{i_1}, \dots, f^k(x) \in I_{i_k}\} = \\ &= I_{i_0} \cap f^{-1}(I_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-k}(I_{i_k}). \end{aligned}$$

Por outras palavras, $x \in I_{i_0i_1 \dots i_k}$ significa que

$$ad(x) = i_0, ad(f(x)) = i_1, \dots, ad(f^k(x)) = i_k.$$

Nesta secção introduzimos uma relação de ordem no espaço das seqüências admissíveis, relativamente à qual a aplicação itinerário é obtida como uma aplicação que preserva a ordem (em sistemas dinâmicos unidimensionais).

Definição 1.22 *Seja $i_1 \dots i_k \in \mathcal{W}_k$, $k \in \mathbb{N}$. A função sinal é definida por*

$$\begin{aligned} \varepsilon : \cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_k &\rightarrow \{-1, 0, +1\} \\ i_1 \dots i_k &\mapsto \varepsilon(i_1 \dots i_k) = \prod_{j=1}^k \varepsilon(j), \end{aligned}$$

com $\varepsilon(C_j) = 0$ e $\varepsilon(j) = +1$ ou $\varepsilon(j) = -1$, consoante a restrição de f ao intervalo I_j é uma função crescente ou decrescente, respectivamente.

Definição 1.23 *A paridade, relativamente a f , de uma palavra admissível $i_1 \dots i_k \in \mathcal{W}_k$ diz-se par se $\varepsilon(i_1 \dots i_k) = +1$ e ímpar se $\varepsilon(i_1 \dots i_k) = -1$.*

A ordem dos intervalos da partição do intervalo I induz a relação de ordem entre os símbolos de \mathfrak{A} seguinte

$$1 \prec C_1 \prec 2 \prec \dots \prec C_m \prec m + 1.$$

Desta relação de ordem nos símbolos, introduzimos a relação de ordem lexicográfica, dependente da paridade ε , entre as seqüências simbólicas no espaço $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ como se segue:

Definição 1.24 *Dadas duas seqüências distintas $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ do espaço $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$, admitindo que têm uma subsequência inicial comum, isto é, existe um inteiro $r \geq 0$ natural tal que $i_1 \dots i_r = j_1 \dots j_r$ e $i_{r+1} \neq j_{r+1}$, dizemos que $(i_k)_{k \in \mathbb{N}} \prec (j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se e só se $i_{r+1} \prec j_{r+1}$ e $\varepsilon(i_1 \dots i_r) = +1$ ou $j_{r+1} \prec i_{r+1}$ e $\varepsilon(i_1 \dots i_r) = -1$.*

Segundo Milnor e Thurston, o seguinte resultado estabelece a compatibilidade desta relação de ordem entre sequências simbólicas e a ordem natural do intervalo.

Proposição 1.25 *Seja \preceq a relação de ordem lexicográfica correspondente a uma aplicação m -modal f no intervalo I . Então, para quaisquer x e y , pertencentes ao intervalo I , temos que:*

1. *Se $x < y$, então $it(x) \preceq it(y)$.*
2. *Se $it(x) \prec it(y)$, então $x < y$.*

Demonstração. Ver [MT 88, MeS 93]. ■

Definição 1.26 *A aplicação deslocamento é definida por*

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \Sigma &\quad \rightarrow \quad \Sigma \\ (j_k)_{k \in \mathbb{N}_0} &\quad \mapsto \quad \sigma((j_k)_{k \in \mathbb{N}_0}) = (j_{k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

A aplicação deslocamento relaciona-se com a aplicação itinerário da seguinte forma

$$\sigma(it(x)) = it(f(x)), \quad \forall x \in I. \tag{1.1}$$

Deste modo, obtemos o sistema dinâmico simbólico (Σ, σ) que é o par constituído por um espaço de sequências do alfabeto e a aplicação deslocamento, σ , associado ao sistema dinâmico discreto (I, f) . O sistema simbólico (Σ, σ) é também chamado de *shift*. Os *shifts* de tipo finito são habitualmente apresentados como um pequeno subconjunto de uma muito grande família de sistemas dinâmicos, os sistemas dinâmicos simbólicos. Dizemos que (Σ, σ) é um *shift de tipo finito* no caso em que as sequências de $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ que não pertencem

a Σ são construídas partindo de um conjunto finito de palavras designadas por palavras proibidas (em inglês *forbidden words*).

De seguida vemos que a entropia topológica de um *shift de tipo finito* relaciona-se com a taxa de crescimento das palavras admissíveis, ver [Kit 97, LM 95].

Definição 1.27 *Um sequência simbólica $\gamma = (\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ no espaço Σ é uma sequência periódica para σ se $\sigma^p(\gamma) = \gamma$ para algum $p \in \mathbb{N}$, e o menor inteiro positivo p para o qual $\sigma^p(\gamma) = \gamma$ é o período de γ .*

Definição 1.28 *Sejam (Σ, σ) o shift de tipo finito e \mathcal{W}_k o conjunto das palavras de tamanho k do espaço Σ . A taxa de crescimento do número das palavras admissíveis diferentes de comprimento k é dada pelo limite*

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{W}_k|^{1/k}.$$

Definição 1.29 *Sejam (Σ, σ) o shift de tipo finito e \mathcal{W}_k o conjunto das palavras de tamanho k do espaço Σ . A entropia topológica de Σ é definida por*

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log |\mathcal{W}_k|.$$

A dinâmica simbólica para a aplicação m -modal f é caracterizada de acordo com as órbitas dos pontos críticos de f , isto é, pelos itinerários dos pontos críticos de f , c_i , $i = 1, \dots, m$. A importância dos itinerários desses pontos críticos de uma aplicação f , no estudo da dinâmica, deve-se ao facto de eles determinarem os itinerários de pontos do intervalo. Assim, atribuímos uma designação própria aos itinerários dos pontos críticos de f a que designamos por sequência de amassamento. A sequência de amassamento

procura descrever a dinâmica gerada por iteração das aplicações f nas condições referidas anteriormente, através da construção de invariantes topológicos baseados unicamente na dinâmica simbólica associada às voltas, ver [MT 88]. Em seguida, apresentamos a definição da sequência de amassamento.

Definição 1.30 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado, $f : I \rightarrow I$ uma aplicação m -modal do intervalo e c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, os pontos críticos de f . Chamamos sequências de amassamento da aplicação f , aos itinerários das imagens por f dos pontos críticos, c_i , e representamos por \mathcal{K}_i , isto é,*

$$\mathcal{K}_i := it(f(c_i)), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

e invariante de amassamento de f à coleção das sequências de amassamento

$$\mathcal{K}_f := (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m).$$

Se a órbita do ponto crítico c_i de f , $orb_f(c_i)$, para algum $i = 1, \dots, m$, é periódica de período p , obtemos uma sequência de símbolos que se pode representar na forma

$$it(c_i) = (C_i K_1 K_2 \dots K_{p-1})^\infty.$$

A relação de ordem simbólica contribui para a caracterização dos itinerários possíveis para uma determinada dinâmica através do conhecimento do invariante de amassamento da aplicação m -modal. Tal como foi referido, o invariante de amassamento de uma aplicação determina todos os comportamentos possíveis para os diferentes pontos do intervalo. Usando o invariante de amassamento, consideramos as seguintes *condições de admissibilidade* para sequências simbólicas, ver [MeS 93, Sev 00].

Proposição 1.31 *Sejam f uma aplicação m -modal com invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$, $\mathcal{K}_0 = it(c_0)$, $\mathcal{K}_{m+1} = it(c_{m+1})$ e $\gamma = (\gamma_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ uma qualquer seqüência de símbolos do alfabeto \mathfrak{A} tal que para algum $p = 0, 1, \dots, m+1$ temos que*

$$\begin{aligned} \gamma_n = C_p &\implies \sigma^{n+1}(\gamma) = \mathcal{K}_p; \\ \gamma_n = I_{p+1} &\implies \begin{cases} \mathcal{K}_p \prec \sigma^{n+1}(\gamma) \prec \mathcal{K}_{p+1}, & \text{se } \varepsilon(p+1) = +1; \\ \mathcal{K}_{p+1} \prec \sigma^{n+1}(\gamma) \prec \mathcal{K}_p, & \text{se } \varepsilon(p+1) = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Então, existe um ponto $x \in I$ cujo itinerário é igual a γ , isto é, tal que $\gamma = it(x)$.

Demonstração. Ver [Sev 00]. ■

Ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f de uma aplicação m -modal f é possível associar uma matriz A de elementos $a_{ij} \in \{0, 1\}$, a que chamamos *matriz de transição* $n \times n$, e que, como vamos ver, nos permite determinar a entropia topológica da aplicação f .

Seja f uma aplicação m -modal no intervalo I com invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$, cujas órbitas dos pontos críticos são todas periódicas com períodos p_1, \dots, p_m , respectivamente, isto é,

$$(\mathcal{K}_i)_{p_i} = C_i, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ o conjunto de itinerários dado pela união dos conjuntos

$$\{\sigma^i(\mathcal{K}_1)\}_{i=1}^{p_1}, \dots, \{\sigma^i(\mathcal{K}_m)\}_{i=1}^{p_m},$$

onde σ denota o deslocamento usual $\sigma(i_1 i_2 i_3 \dots) = i_2 i_3 \dots$ e $\{x_i\}_{i=1}^n$, $i = 1, \dots, n$, o conjunto dos pontos do intervalo tais que o itinerário $it(x_i) = X_i$, $i = 1, \dots, n$, $n = p_1 + \dots + p_m$. Denotamos por ρ a permutação em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$x_{\rho(1)} < x_{\rho(2)} < \dots < x_{\rho(n)}.$$

Fazendo $z_i = x_{\rho(i)}$ e $J_i = [z_i, z_{i+1}]$ para $i = 1, \dots, n$ obtemos uma partição do intervalo I (também designada por partição de Markov) que é deste modo determinada pelas órbitas dos m pontos críticos da aplicação f . Em seguida, apresentamos a matriz de transição associada ao invariante de amassamento da aplicação f .

Definição 1.32 *Sejam f uma aplicação m -modal e J_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, nas condições enunciadas atrás. Chamamos matriz de transição associada ao invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ à matriz quadrada de dimensão $n-1$, denotada por A , cujos elementos a_{ij} são dados por*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(J_i) \supset J_j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 1.33 *Sejam f uma aplicação m -modal no intervalo com invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ e A a matriz de transição associada a \mathcal{K}_f . Então,*

$$h_{\text{top}}(f) = \log(\lambda_{\max}(A)),$$

onde $\lambda_{\max}(A)$ é o raio espectral da matriz A .

Demonstração. Ver [LRSSR 84]. ■

Para finalizar esta secção, vamos ilustrar alguns conceitos introduzidos anteriormente sobre a dinâmica simbólica para os casos de aplicações unimodais e bimodais.

Nota 1.34 *Para aplicações unimodais consideramos o alfabeto $\mathfrak{A} = \{L, C, R\}$ em vez de $\{1, C, 2\}$. Denotamos por letras maiúsculas as sequências simbólicas de símbolos de $\mathfrak{A} = \{L, C, R\}$. Por exemplo, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ou $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Para aplicações bimodais consideramos o alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3\}$ que corresponde ao caso particular do alfabeto para*

aplicações m -modais, quando $m = 2$, em vez de $\{L, A, M, B, R\}$ que normalmente é usado por vários autores e em vários trabalhos sobre aplicações bimodais. Denotamos por letras minúsculas as sequências simbólicas com símbolos do $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$. Por exemplo, $(i_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ e $(j_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Dinâmica simbólica para aplicações unimodais do intervalo

Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Consideramos uma aplicação unimodal do intervalo $f : I \rightarrow I$ com único ponto crítico x_c . Sejam $I_L = [a, x_c)$, $I_C = \{x_c\}$ e $I_R = (x_c, b]$, os subintervalos da partição do intervalo I . Associamos os símbolos L (*left*) e R (*right*) a cada ponto x dos subintervalos de monotonia I_L e I_R (respectivamente) e o símbolo C a cada ponto x igual ao ponto crítico x_c . Neste caso, a *aplicação endereço*, com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{L, C, R\}$, é dada por

$$ad(x) = \begin{cases} L, & \text{se } x < x_c, \\ C, & \text{se } x = x_c, \\ R, & \text{se } x > x_c, \end{cases}$$

e a correspondência entre a órbita do ponto x pertencente ao intervalo I por f e uma sequência simbólica infinita de elementos do alfabeto $\mathfrak{A} = \{L, C, R\}$ é dada pela *aplicação itinerário*

$$it(x) := ad(x) ad(f(x)) ad(f^2(x)) \dots$$

A *sequência de amassamento de uma aplicação unimodal* f^2 é o itinerário da imagem por f do ponto crítico x_c ,

$$\mathcal{K}_f := it(f(x_c)).$$

²Para aplicações unimodais usaremos muitas vezes a designação sequência de amassamento em vez de invariante de amassamento.

Uma *sequência admissível* é uma sequência em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ que é itinerário de algum ponto $x \in [a, b]$ e uma *palavra admissível* é alguma palavra ocorrendo numa sequência admissível. O *espaço das sequências* é o conjunto das sequências infinitas admissíveis em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ e é denotado por Σ .

Em seguida apresentamos um exemplo para ilustrar a construção de uma matriz de transição associada a uma sequência de amassamento de uma aplicação unimodal.

Exemplo 1.35 Consideramos a aplicação unimodal f com a sequência de amassamento $\mathcal{K}_f = (RLLRC)^\infty$. As sequências obtidas pela aplicação deslocamento são

$$\begin{aligned} x_1 &= \sigma(RLLRC) = LLRCR, & x_2 &= \sigma^2(RLLRC) = LRCRL, & x_3 &= \sigma^3(RLLRC) = RCRL, \\ x_4 &= \sigma^4(RLLRC) = CRLLR, & x_5 &= \sigma^5(RLLRC) = RLLRC. \end{aligned}$$

Colocadas por ordem crescente, obtemos as desigualdades

$$x_1 < x_2 < x_4 < x_3 < x_5,$$

donde resultam os subintervalos

$$I_1 = [x_1, x_2], \quad I_2 = [x_2, x_4], \quad I_3 = [x_4, x_3], \quad I_4 = [x_3, x_5].$$

Agora, procurando a imagem de cada uma das sequências pela aplicação deslocamento, obtemos as igualdades

$$f(I_1) = I_2 \cup I_3, \quad f(I_2) = I_4, \quad f(I_3) = I_3 \cup I_4, \quad f(I_4) = I_1 \cup I_2.$$

A matriz de transição A associada à sequência de amassamento unimodal \mathcal{K}_f é assim dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O raio espectral da matriz A é igual a $\lambda_{max} = 1.722\dots$ e, portanto, a entropia topológica da aplicação f é igual a $h_{top}(f) = \log(1.722\dots) = 0.5435\dots$

Dinâmica simbólica para aplicações bimodais

Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Consideramos uma aplicação bimodal do intervalo $f : I \rightarrow I$ com os pontos críticos c_1 e c_2 . Sejam $I_1 = [a, c_1)$, $I_{C_1} = \{c_1\}$, $I_2 = (c_1, c_2)$, $I_{C_2} = \{c_2\}$ e $I_3 = (c_2, b]$, os subintervalos da partição do intervalo I . Neste caso, a aplicação endereço, com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$, é dada por

$$ad(x) = \begin{cases} i & \text{se } x \in I_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ C_i & \text{se } x \in I_{C_i}, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

e a correspondência entre a órbita do ponto x pertencente ao intervalo I por f e uma sequência simbólica infinita de elementos do alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$ é dada pela aplicação itinerário

$$it(x) := ad(x) ad(f(x)) ad(f^2(x)) \dots$$

O invariante de amassamento de uma aplicação bimodal f é dado por

$$\mathcal{K}_f := (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2),$$

onde $\mathcal{K}_i = it(f(c_i))$, $i = 1, 2$, são as sequências de amassamento de f .

Uma *sequência admissível* é uma sequência em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ que é itinerário de algum ponto $x \in [a, b]$ e uma *palavra admissível* é alguma palavra ocorrendo numa sequência admissível. O *espaço das sequências* é o conjunto das sequências infinitas admissíveis em $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ e é denotado por Σ .

Em seguida apresentamos um exemplo para ilustrar a construção de uma matriz de transição associada a um invariante de amassamento de uma aplicação bimodal.

Exemplo 1.36 *Consideramos a aplicação bimodal f com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((32C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$. As sequências obtidas pela aplicação deslocamento são*

$$\begin{aligned} x_{11} &= \sigma(32C_1) = 2C_13, & x_{12} &= \sigma^2(32C_1) = C_132, & x_{13} &= \sigma^3(32C_1) = 32C_1, \\ x_{21} &= \sigma(112C_2) = 12C_21, & x_{22} &= \sigma^2(112C_2) = 2C_211, & x_{23} &= \sigma^3(112C_2) = C_2112, \\ x_{24} &= \sigma^4(112C_2) = 112C_2. \end{aligned}$$

Colocadas por ordem crescente, obtemos as desigualdades

$$112C_2 \prec 12C_21 \prec C_132 \prec 2C_211 \prec 2C_13 \prec C_2112 \prec 32C_1$$

ou seja,

$$x_{24} \prec x_{21} \prec x_{12} \prec x_{22} \prec x_{11} \prec x_{23} \prec x_{13},$$

donde resultam os subintervalos

$$\begin{aligned} I_1 &= [x_{24}, x_{21}], & I_2 &= [x_{21}, x_{12}], & I_3 &= [x_{12}, x_{22}], \\ I_4 &= [x_{22}, x_{11}], & I_5 &= [x_{11}, x_{23}], & I_6 &= [x_{23}, x_{13}]. \end{aligned}$$

Agora, procurando a imagem de cada uma das seqüências pela aplicação deslocamento, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} f(I_1) &= I_2 \cup I_3, & f(I_2) &= I_4 \cup I_5 \cup I_6, & f(I_3) &= I_6, \\ f(I_4) &= I_3 \cup I_4 \cup I_5, & f(I_5) &= I_1 \cup I_2, & f(I_6) &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4. \end{aligned}$$

A matriz de transição A associada ao invariante de amassamento bimodal \mathcal{K}_f é assim dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O raio espectral da matriz A é igual a $\lambda_{max} = 2.4830\dots$ e, portanto, a entropia topológica da aplicação f é igual a $h_{top}(f) = \log(2.4830\dots) = 0.9094\dots$

1.3 Sistemas de substituição

Um sistema de substituição consiste no par constituído por um alfabeto finito e uma aplicação caracterizada por um conjunto de regras de substituição que em cada etapa transformam elementos (um símbolo ou uma seqüência finita de símbolos do alfabeto) num novo símbolo ou numa nova seqüência. Estes sistemas considerados simples revelam-se úteis em vários campos da matemática (como por exemplos na teoria dos números, análise harmónica, combinatória, teoria ergódica), assim como na ciência da computação teórica e na física. Substituições são objectos combinatórios muito simples, por outras

palavras, substituições são regras que em cada etapa substituem um símbolo do alfabeto por uma sequência finita de símbolos. Portanto, de uma forma simples, podemos dizer que um sistema de substituição consiste no par constituído por um alfabeto e uma aplicação caracterizada por um conjunto de regras que transformam elementos de uma sequência numa nova sequência.

Nesta secção, apresentamos alguns resultados elementares e terminologias sobre sistemas de substituição que são utilizados ao longo do Capítulo 4, ver [DHS 99, Fog 02, Que 87, Wol 02]. Notamos a existência de algumas semelhanças com os conceitos já introduzidos na dinâmica simbólica para aplicações m -modais e algumas diferenças nas designações e notações. Por exemplo, usamos a notação \mathcal{S} para o alfabeto em vez de \mathfrak{A} , a designação *factor de uma palavra* em vez de *palavras admissíveis*, a notação \mathcal{L} para o conjunto de todos os factores de palavras em vez de Σ e a notação (\mathcal{L}, ζ) para o sistema de substituição em vez de $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$ para o sistema dinâmico.

Definição 1.37 *Um alfabeto é um conjunto (não vazio) finito de símbolos e é denotado por \mathcal{S} .*

Definição 1.38 *A uma sequência finita (não vazia) de símbolos no alfabeto \mathcal{S} chamamos palavra ou bloco e denotamos por \mathcal{S}^+ o conjunto de todas as palavras em \mathcal{S} . Chamamos uma sequência (infinita) de símbolos de \mathcal{S} ao elemento $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$.*

Definição 1.39 *Seja $u = u_1 u_2 \dots u_n \in \mathcal{S}^+$. Dizemos que n é o comprimento da palavra u e é denotado por $|u|$. Se a palavra tiver comprimento 0 dizemos que a palavra é vazia e é denotada por ϵ .*

Nota 1.40 Denotamos por \mathcal{S}^* o conjunto $\mathcal{S}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}^k \cup \{\epsilon\}$.

Definição 1.41 Sejam $u = u_1u_2 \dots u_n \in \mathcal{S}^+$ e $v = v_1v_2 \dots v_n \in \mathcal{S}^+$. Dizemos que palavra $uv = u_1u_2 \dots u_nv_1v_2 \dots v_n$ é a concatenação das palavras u e v .

Nota 1.42 A concatenação de palavras é uma operação associativa que tem como elemento neutro a palavra vazia ϵ .

Definição 1.43 Uma aplicação substituição no alfabeto \mathcal{S} é a aplicação $\zeta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^*$.

Nota 1.44 O A aplicação substituição ζ é estendida a aplicações (também denotada por ζ) $\zeta : \mathcal{S}^* \rightarrow \mathcal{S}^*$, $\zeta : \mathcal{S}^+ \rightarrow \mathcal{S}^+$ e $\zeta : \mathcal{S}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ por concatenação. Além disso, usando a extensão a palavras por concatenação, ζ pode ser iterada e $\zeta^n : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^*$ é ainda uma substituição.

Definição 1.45 Sejam $u, v \in \mathcal{S}^+$. Dizemos que a palavra u é um factor de uma palavra v se $u = v_m v_{m+1} \dots v_n$, com $v_j \in \mathcal{S}$ para algum $j = m, m+1, \dots, n$ e $0 \leq m \leq n < |v|$.

Definição 1.46 Seja $u \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ uma sequência. Ao conjunto de todas palavras finitas que ocorrem em u chamamos linguagem de uma sequência u e é denotada por $\mathcal{L}(u)$.

Definição 1.47 Ao conjunto de todos os factores das palavras $\zeta^n(i)$, com $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathcal{S}$, chamamos linguagem de uma substituição ζ e é denotada por $\mathcal{L}(\zeta)$ ou simplesmente por \mathcal{L} . Ao par (\mathcal{L}, ζ) chamamos sistema de substituição.

Definição 1.48 Seja $u \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que u é sequência periódica de ζ se para algum $k \in \mathbb{N}$ temos $\zeta^k(u) = u$.

Capítulo 2

Iteração de funções diferenciáveis por aplicações unimodais

Neste capítulo, começamos por introduzir um sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T) , onde \mathcal{A} é uma classe de funções diferenciáveis, com número finito de pontos críticos e que satisfazem certas condições de fronteira, e T é um operador caracterizado por aplicações unimodais f . Estudamos a localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por T e também desenvolvemos algumas técnicas da dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) , que têm por base a dinâmica simbólica do sistema dinâmico (I, f) para um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Por fim, analisamos o comportamento topológico do sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) no caso em que T é caracterizado por uma família de aplicações quadráticas a um parâmetro μ definidas no intervalo I com valores no mesmo intervalo I por $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$, $\mu \in (0, 2]$. Considerando uma subclasse \mathcal{B} das funções da classe \mathcal{A} que podem ser escritas como uma combinação linear finita de $\cos(k\pi x)$ (a expansão de Fourier em cossenos), analisamos a evolução e a dependência no parâmetro μ da decomposição espectral por iteração das funções da classe \mathcal{B} por f .

Os resultados sobre iteração de funções da classe \mathcal{A} pela aplicação f , que são apresen-

tados neste capítulo, encontram-se em [CRV 09, CRV 10].

2.1 Introdução do sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T)

Neste trabalho, consideramos a classe de funções diferenciáveis reais definidas num intervalo (eventualmente podem ser definidas em \mathbb{R})

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in C^1([0, 1], I) : \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ e } |cp(\varphi)| < \infty\},$$

onde $|cp(\varphi)|$ designa o número de pontos críticos de φ e $I \subset \mathbb{R}$ é um certo intervalo. O uso do intervalo $[0, 1]$ é apenas uma conveniência, podendo ser utilizando qualquer outro intervalo, sendo que o aspecto importante é que ϕ tenha derivada igual a zero nos pontos da fronteira do intervalo do domínio. A caracterização desta classe \mathcal{A} em termos de fecho topológico, métrico ou algébrico não é discutida pois o que estudamos em detalhe são as propriedades combinatórias da dinâmica.

Nesta classe \mathcal{A} , de modo a obter um sistema dinâmico discreto, definimos o operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi, \end{aligned}$$

onde f , neste capítulo, é uma aplicação unimodal de classe $C^1(I, I)$ e atinge o valor máximo no único ponto crítico $x_c = 0$. Notamos que este operador está bem definido pois $(f \circ \varphi)'(0) = (f \circ \varphi)'(1) = 0$, pelo que temos $f \circ \varphi \in \mathcal{A}$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{A}$. Além disso, se $\phi \in \mathcal{A}$ temos $Im(\phi) \subset I$, pelo que $Im(T^k \phi) \subset I$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Portanto, obtemos um sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T) no sentido em que temos um conjunto \mathcal{A} e uma aplicação própria T que dá a evolução em tempo discreto. Este sistema dinâmico

tem dimensão infinita, embora induzido por um sistema dinâmico discreto unidimensional (I, f) .

2.2 Localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas

Um dos principais objectivos deste trabalho é estudar o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) . Tal como no caso unidimensional, os pontos críticos obtidos pela iteração por aplicações do intervalo desempenham um papel decisivo em todo o comportamento dinâmico. No que se segue, apresentamos um estudo, em termos da dinâmica simbólica, sobre a localização e o aparecimento dos novos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} pela família de aplicações unimodais f , ver [CRV 09].

Sejam f uma aplicação unimodal de classe $C^1(I, I)$ com o valor máximo no único ponto crítico $x_c = 0$ onde $I = [-1, 1]$, e $I_{S_0 S_1 \dots S_k} \subset I$ o intervalo cilindro definido por

$$\begin{aligned} I_{S_0 S_1 \dots S_k} &:= \{x \in I : x \in I_{S_0}, f(x) \in I_{S_1}, \dots, f^k(x) \in I_{S_k}\} \\ &= I_{S_0} \cap f^{-1}(I_{S_1}) \cap \dots \cap f^{-k}(I_{S_k}), \end{aligned}$$

onde $S_j = ad(f^j(x))$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Proposição 2.1 *Sejam f uma aplicação unimodal com o valor máximo no ponto crítico, $\phi \in \mathcal{A}$ e $J \subset [0, 1]$ um intervalo. Se $\phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{RS_1 \dots S_k}$, então $f \circ \phi|_J(x)$ é um valor minimal (resp. maximal) em $I_{S_1 \dots S_k}$. Se $\phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{LS_1 \dots S_k}$, então $f \circ \phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{S_1 \dots S_k}$.*

Demonstração. Primeiro, pela definição de $I_{S_0 \dots S_k}$, temos que $f(I_{S_0 \dots S_k}) = I_{S_1 \dots S_k}$ para qualquer palavra admissível $S_0 \dots S_k$. Em seguida, como $f|_{I_R}$ é decrescente e inverte a ordem, temos que pontos maximais (*resp.* minimais) para $\phi|_J$ em algum J , subintervalo de $[0, 1]$, correspondem a pontos minimais (*resp.* maximais) para $f \circ \phi|_J$. Do mesmo modo, como $f|_{I_L}$ é crescente e mantém a ordem, obtemos o resultado pretendido. ■

Sejam $c(\phi)$ o conjunto dos pontos críticos de $\phi \in \mathcal{A}$, $cv(\phi)$ o conjunto dos valores críticos de $\phi \in \mathcal{A}$ e $z(\phi)$ o conjunto de zeros de ϕ . Notamos que $cv(\phi) = \phi(c(\phi))$.

Proposição 2.2 *Sejam f uma aplicação unimodal com o ponto crítico em zero e $\phi \in \mathcal{A}$. Então,*

$$c(f \circ \phi) = z(\phi) \cup c(\phi)$$

e

$$cv(f \circ \phi) = f(\phi(z(\phi))) \cup f(cv(\phi)).$$

Demonstração. Pela regra da cadeia temos $(f \circ \phi)'(x) = f'(\phi(x))\phi'(x) = 0$, pelo que ou $\phi'(x) = 0$ ou $f'(\phi(x)) = 0$, donde se obtém a primeira afirmação. Por outro lado, os valores críticos de $f \circ \phi$ são as imagens por $f \circ \phi$ dos pontos críticos de $f \circ \phi$. Além disso, $f(cv(\phi)) = f \circ \phi(c(\phi))$ e obtemos o resultado. ■

Uma consequência deste resultado é o seguinte:

Corolário 2.3 *Sejam f uma aplicação unimodal com o ponto crítico em zero, $\phi_0 \in \mathcal{A}$ e $\phi_{k+1} = f \circ \phi_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Então,*

$$c(\phi_{k+1}) = \bigcup_{j=0}^k z(f^j(\phi_0)) \cup c(\phi_0)$$

e

$$\text{cv}(\phi_{k+1}) = \bigcup_{j=0}^k f^{k+1-j}(\phi_j(z(\phi_j))) \cup f^{k+1}(\text{cv}(\phi_0)).$$

Este último resultado significa que os máximos e os mínimos de ϕ_k de alguma função inicial $\phi_0 \in \mathcal{A}$ são obtidos a partir das órbitas dos máximos e dos mínimos de ϕ_0 e o aparecimento de novos pontos críticos corresponde ao aparecimento de novos zeros de $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$. Um fenómeno semelhante é apresentado em [SSRV 04].

Nota 2.4 *Se a aplicação unimodal f tiver como ponto crítico valor diferente de $x_c = 0$, os resultados anteriores são ainda válidos desde que se substitua o conjunto $z(\phi)$ por $sp(\phi)$, onde $sp(\phi)$ é o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ cuja imagem por ϕ é o ponto crítico de f , isto é, $\phi(x) = x_c$.*

Em seguida, apresentamos um exemplo para ilustrar as definições e os resultados anteriores.

Exemplo 2.5 *Consideramos a aplicação unimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com a sequência de amassamento $\mathcal{K}_f = RL^\infty$ (com o alfabeto $\{L, C, R\}$), cuja expressão analítica é dada por $f(x) = 1 - 2x^2$, com um único ponto crítico $x_c = 0$. Sejam $J_1, J_2 \subset [0, 1]$ os subintervalos e função $\phi \in \mathcal{A}$. Na Figura 2.1(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{RLR} , respectivamente. Na Figura 2.1(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , mas com um mínimo e um máximo na região I_{LR} , respectivamente. Na Figura 2.2(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{LLR} , respectivamente. Na Figura 2.2(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo*

e um mínimo na região I_{LR} , respectivamente. Na Figura 2.3(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com zeros em alguns pontos x_1 e x_2 e um máximo e um mínimo nas regiões I_{RRL} e I_{LRL} , respectivamente. E na Figura 2.3(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com novos valores máximos em x_1 e x_2 e um mínimo na região I_{RL} .

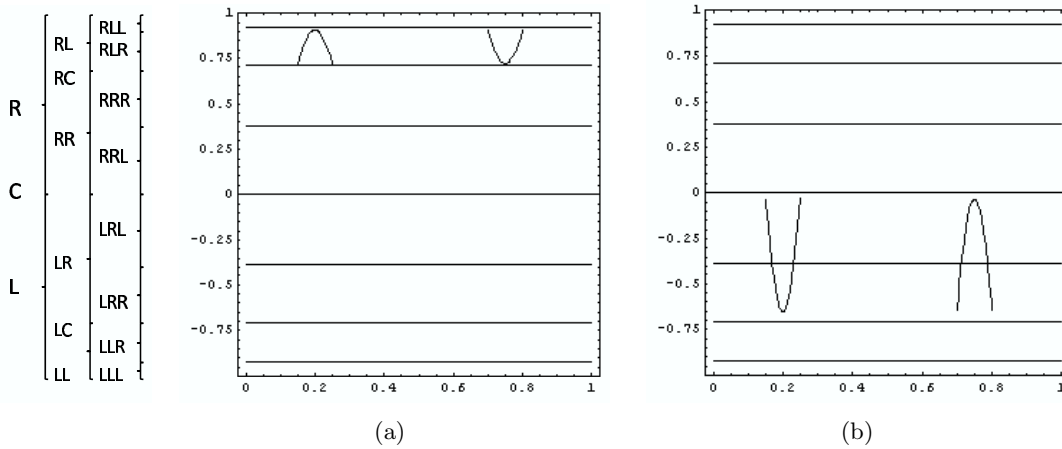


Figura 2.1: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{RRL} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um mínimo e um máximo na região I_{LR} , respectivamente.

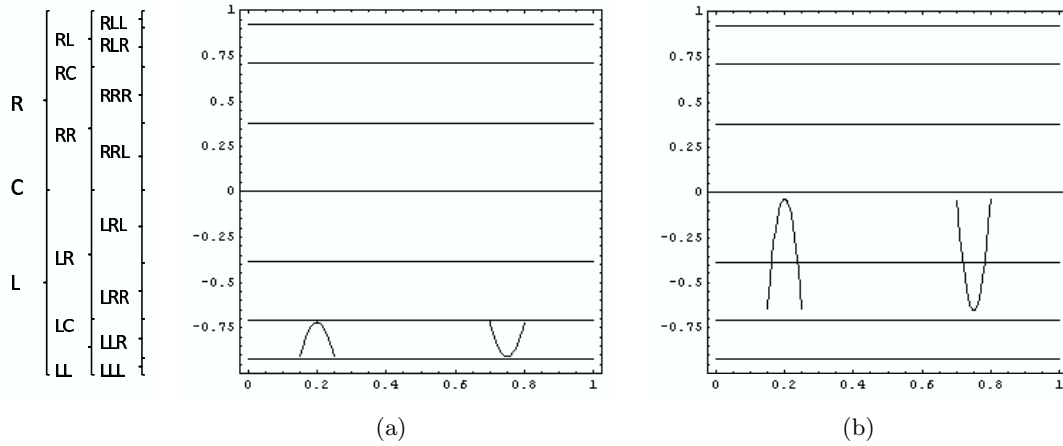


Figura 2.2: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{LLR} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{LR} , respectivamente.

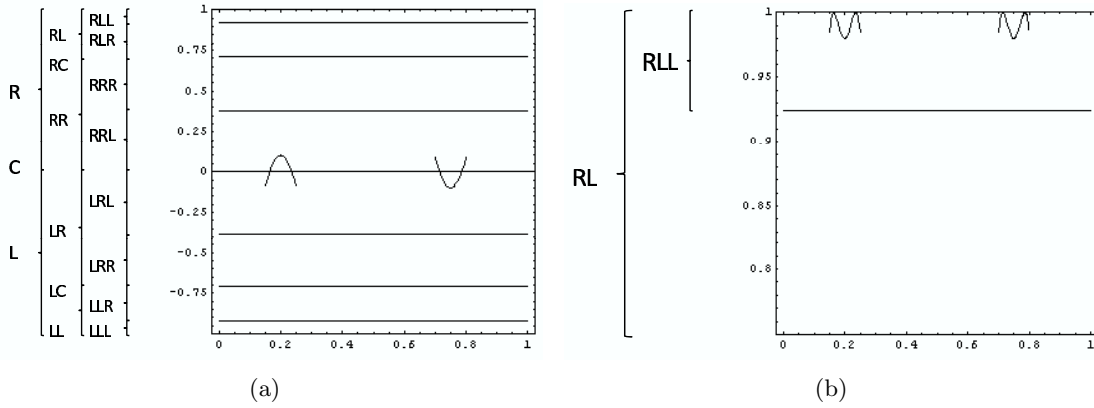


Figura 2.3: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com zeros em alguns pontos x_1 e x_2 e um máximo e um mínimo na região I_{RRL} e I_{LRL} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de uma aplicação $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com novos valores maximais em x_1 e x_2 e um mínimo na região I_{RL} . Notamos que em (b) a escala vertical é diferente.

Pelos resultados anteriores, os pontos críticos de uma função $\phi \in \mathcal{A}$ são também pontos críticos de $f \circ \phi$, isto é, $c(\phi) \subset c(f \circ \phi)$. Além disso, se ϕ tem um zero então ele é também um ponto crítico de $f \circ \phi$. Agora, seja y uma j -ésima pré-imagem de 0 pela iteração por f . O itinerário de y é da forma $S_1 \dots S_{j-1}CK_1K_2 \dots$, para alguma palavra admissível

$S_1 \dots S_j \in \{L, R\}^j$ (recordemos que $\mathcal{K} = it(f(0)) = (K_j)_{j \in \mathbb{N}}$). Portanto, se $k \in \mathbb{N}$ está fixo e se representamos as linhas horizontais, ordenadas pelas sequências simbólicas, correspondendo a qualquer j -ésima pré-imagem de 0 por f , com $0 < j \leq k$, obtemos um procedimento para identificar todos os novos pontos críticos e valores críticos até à iteração de ordem k de qualquer $\phi \in \mathcal{A}$. Estes novos pontos críticos e valores críticos são obtidos da intersecção de ϕ com as linhas horizontais referidas atrás.

Exemplo 2.6 Consideramos a aplicação unimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = 1 - 2x^2$ com o único ponto crítico $x_c = 0$, e a condição inicial $\phi_0 \in \mathcal{A}$ definida por $\phi_0(x) = -0.5 + 0.05 \cos(3\pi x)$. Na Figura 2.4(a), cada linha horizontal é uma k -ésima pré-imagem do ponto crítico de f , $x_c = 0$, por f , em particular, a linha indicada é a quinta pré-imagem de 0 com itinerário $LRRRC \dots$. Portanto, para qualquer função inicial que intersecta a linha indicada num ponto, obtemos um novo ponto crítico na quinta iteração. Na Figura 2.4(b), iteramos a condição inicial ϕ_0 por f e aparecem três novos pontos críticos na quinta iteração.

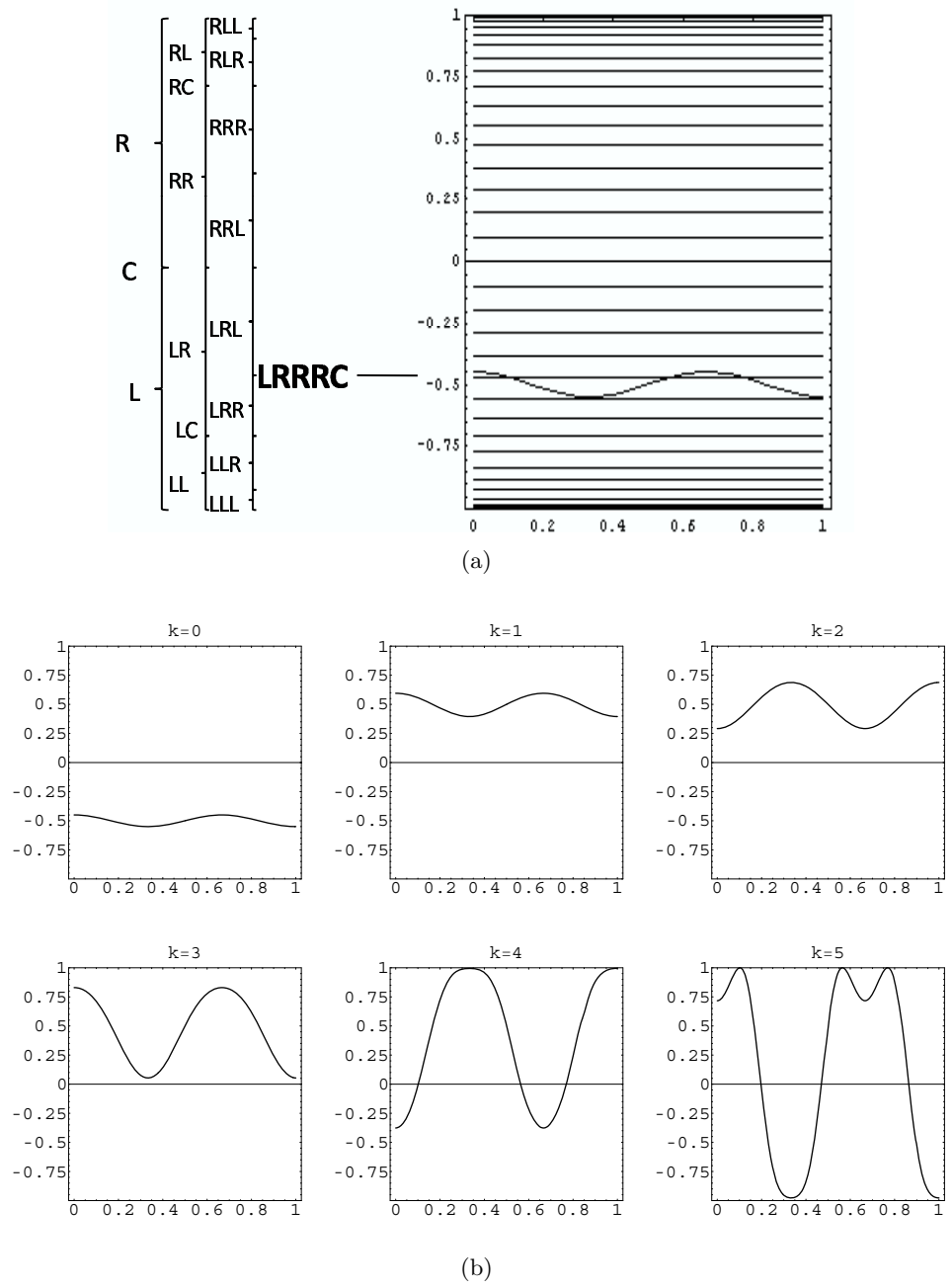


Figura 2.4: (a) Gráfico de $\phi_0(x) = -0.5 + 0.05 \cos(3\pi x)$, tal que $\phi_5 = f^5 \circ \phi_0$ tem três novos pontos críticos. (b) Gráficos das k -iterações por f de $\phi_0(x) = -0.5 + 0.05 \cos(3\pi x)$, com $f(x) = 1 - 2x^2$.

2.3 Dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) associado a aplicações unimodais

Na Secção 1.2, apresentámos alguns conceitos e algumas técnicas da dinâmica simbólica específicas para o sistema dinâmico do tipo (I, f) , onde $I \subset \mathbb{R}$ e f uma aplicação unimodal. Nesta secção, desenvolvemos algumas técnicas da dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) e que têm por base a dinâmica simbólica do sistema dinâmico (I, f) . O trabalho aqui apresentado foi publicado em [CRV 09].

Recordamos a nossa classe de funções diferenciáveis

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in C^1([0, 1], I) : \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ e } |cp(\varphi)| < \infty\},$$

onde $|cp(\varphi)|$ designa o número de pontos críticos de φ . Com o intuito de introduzir uma descrição simbólica associada a (\mathcal{A}, T) , consideramos a decomposição de \mathcal{A} nas seguintes classes:

$$\mathcal{A}_c = \{\phi \in \mathcal{A} : \phi(x) \text{ é constante em } [0, 1]\},$$

$$\mathcal{A}_0 = \{\phi \in \mathcal{A} : \phi \text{ não tem pontos críticos em }]0, 1[\}$$

e

$$\mathcal{A}_j = \{\phi \in \mathcal{A} : \phi \text{ tem } j \text{ pontos críticos em }]0, 1[\},$$

com $j = 1, 2, \dots$

Consideramos as aplicações definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &\rightarrow \Sigma \\ \phi &\mapsto it(\phi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &\rightarrow \Sigma^{j+2} \\ \phi &\mapsto (it(\phi(a_0)), it(\phi(a_1)), \dots, it(\phi(a_{j+1}))), \end{aligned}$$

onde $\phi(a_0), \phi(a_1), \dots, \phi(a_{j+1})$ são os valores críticos de ϕ no intervalo $[0, 1]$.

Sejam $\phi \in \mathcal{A}$ e $\eta(\phi)$ o número de pontos críticos não triviais de ϕ no intervalo $(0, 1)$. Neste caso, se $\phi \in \mathcal{A}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, então $\eta(\phi) = j$ e o número total dos pontos críticos é $\eta(\phi) + 2 = j + 2$. O nosso objectivo é a descrição simbólica da evolução dinâmica das funções pela iteração de uma função ϕ por uma aplicação f . Além disso, estamos interessados que esta descrição simbólica tenha essencialmente um significado topológico, pelo que é importante distinguir e codificar os pontos e os valores críticos de ϕ . Dadas $\phi \in \mathcal{A}$, identificamos os seus pontos críticos e consideramos os endereços e os itinerários dos valores críticos correspondentes. O espaço simbólico generalizado é $\underline{\Sigma} := \cup_{j \in \mathbb{N}_0} \Sigma^{j+1}$, onde $\Sigma^{j+1} = \Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma$ ($j + 1$ vezes). Definimos a *aplicação endereço generalizado* para a classe \mathcal{A} por

$$\begin{aligned} \underline{ad}: \mathcal{A} &\rightarrow \{L, C, R\}^{\eta(\phi)+2} \\ \phi &\mapsto \underline{ad}(\phi) := (ad(d_0), ad(d_1), \dots, ad(d_{\eta(\phi)}), ad(d_{\eta(\phi)+1})) \end{aligned}$$

e a *aplicação itinerário generalizado* para a classe \mathcal{A} por

$$\begin{aligned} \underline{it}: \mathcal{A} &\rightarrow \underline{\Sigma} \\ \phi &\mapsto \underline{it}(\phi) = (it(d_0), it(d_1), \dots, it(d_{\eta(\phi)}), it(d_{\eta(\phi)+1})), \end{aligned}$$

com $d_j = \phi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, \eta(\phi)$, onde a_j , $j = 1, 2, \dots, \eta(\phi)$, são pontos críticos não triviais de ϕ no intervalo $(0, 1)$ (com $d_0 = \phi(0)$ e $d_{\eta(\phi)+1} = \phi(1)$).

No exemplo que se segue, ilustramos as definições anteriores e mostramos que funções diferentes podem ter o mesmo itinerário.

Exemplo 2.7 *Consideramos a aplicação unimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = 1 - 1.97041x^2$. Sejam ϕ e $\tilde{\phi}$ as funções da classe \mathcal{A} cujas expressões analíticas são dadas aproximadamente por $\phi(x) = 0.01877 \cos(\pi x) + 0.9287$ e $\tilde{\phi}(x) = 0.01877 \cos(\pi x^2) + 0.9287$, respectivamente, ver a Figura 2.5, e para as quais se tem*

$$\underline{it}(\phi) = ((RLL)^\infty, (RLR)^\infty) = \underline{it}(\tilde{\phi}).$$

As funções ϕ e $\tilde{\phi}$ são diferentes, no entanto em termos da dinâmica simbólica representam a mesma classe.

Consideramos também a função ψ cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $\psi(x) = 0.01867 \cos(3\pi x) + 0.9286$, ver a Figura 2.5. Os valores críticos não são suficientes para distinguir, por exemplo, a função ψ das funções ϕ e $\tilde{\phi}$ pois apesar de terem os mesmos valores críticos, o itinerário de ψ é dado por

$$\underline{it}(\psi) = ((RLL)^\infty, (RLR)^\infty, (RLL)^\infty, (RLR)^\infty),$$

pelo que a função ψ pertence a uma classe diferente da de ϕ e de $\tilde{\phi}$.

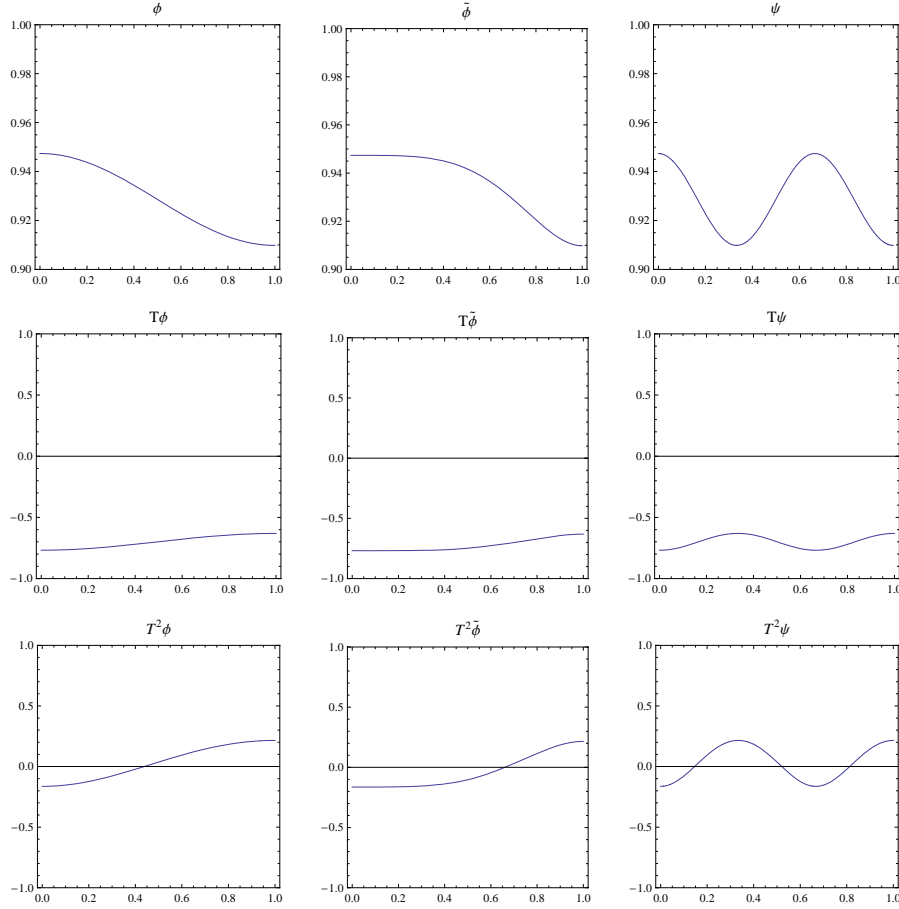


Figura 2.5: Gráficos das funções ϕ , $\tilde{\phi}$, ψ e das iteradas $T\phi$, $T\tilde{\phi}$, $T\psi$, $T^2\phi$, $T^2\tilde{\phi}$, $T^2\psi$ com $f(x) = 1 - 1.97041x^2$. Notamos a diferença na escala na primeira linha.

De seguida generalizamos de forma natural a aplicação deslocamento para o espaço simbólico generalizado $\underline{\Sigma}$.

Seja $S^{(i)} = S_1^{(i)} S_2^{(i)} \dots$, $i = 0, 1, 2, \dots, \eta(\phi) + 1$, tal que $S^{(j)} = it(d_j)$, onde d_j , $j = 0, 1, 2, \dots, \eta(\phi) + 1$, são os valores críticos de ϕ . A aplicação deslocamento generalizado é definida por

$$\underline{\sigma} : \underline{\Sigma} \rightarrow \underline{\Sigma}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\sigma}(S^{(0)}, \dots, S^{(i)}, S^{(i+1)}, \dots, S^{(\eta(\phi)+1)}) := \\ & := \begin{cases} (\sigma(S^{(0)}), \dots, \sigma(S^{(i)}), \sigma(S^{(i+1)}), \dots, \sigma(S^{(\eta(\phi)+1)})), & \text{se } S_1^{(i)} = S_1^{(i+1)}, \\ (\sigma(S^{(0)}), \dots, \sigma(S^{(i)}), \mathcal{K}_f, \sigma(S^{(i+1)}), \dots, \sigma(S^{(\eta(\phi))})), & \text{se } S_1^{(i)} \neq S_1^{(i+1)}, \end{cases} \end{aligned}$$

onde \mathcal{K}_f é a sequência de amassamento da aplicação unimodal f . Portanto, definimos o sistema simbólico $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$ associado ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) . Analogamente aos sistemas dinâmicos discretos de dimensão finita obtemos o seguinte resultado, ver [CRV 09]:

Teorema 2.8 *Sejam $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{A}$, com $\phi \neq \tilde{\phi}$ e tais que $\underline{it}(\phi) = \underline{it}(\tilde{\phi})$. Então,*

$$\underline{it}(T^k \phi) = \underline{it}(T^k \tilde{\phi}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Além disso,

$$\underline{\sigma} \circ \underline{it} = \underline{it} \circ T.$$

Demonstração. Começamos por provar a última afirmação. Sejam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\eta(\phi)+1}$, os pontos críticos de ϕ .

Se $S_1^{(i)} = S_1^{(i+1)}$, para qualquer $i \in \{0, 1, \dots, \eta(\phi)\}$, e por (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \circ \underline{it}(\phi) &= \underline{\sigma} \circ (it(\phi(a_0)), \dots, it(\phi(a_j)), it(\phi(a_{j+1})), \dots, it(\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= (\sigma \circ it(\phi(a_0)), \dots, \sigma \circ it(\phi(a_j)), \sigma \circ it(\phi(a_{j+1})), \dots, \sigma \circ it(\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= (it(T\phi(a_0)), \dots, it(T\phi(a_j)), it(T\phi(a_{j+1})), \dots, it(T\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= \underline{it} \circ T\phi, \end{aligned}$$

e se $S_1^{(i)} \neq S_1^{(i+1)}$, para algum $i \in \{0, 1, \dots, \eta(\phi)\}$, e por (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} \circ \underline{it}(\phi) &= \underline{\sigma} \circ (it(\phi(a_0)), \dots, it(\phi(a_j)), it(\phi(a_{j+1})), \dots, it(\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= (\sigma \circ it(\phi(a_0)), \dots, \sigma \circ it(\phi(a_j)), \mathcal{K}_f, \sigma \circ it(\phi(a_{j+1})), \dots, \sigma \circ it(\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= (it(T\phi(a_0)), \dots, it(T\phi(a_j)), \mathcal{K}_f, it(T\phi(a_{j+1})), \dots, it(T\phi(a_{\eta(\phi)+1}))) \\ &= \underline{it} \circ T\phi. \end{aligned}$$

Provamos agora a primeira afirmação (utilizando o último resultado). Para $k = 0$, obtemos $\underline{it}(\phi) = \underline{it}(\tilde{\phi})$ (por hipótese). Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $k = n$, isto é, assumimos

$$\underline{it}(T^n \phi) = \underline{it}(T^n \tilde{\phi}).$$

Para $k = n + 1$,

$$\underline{it}(T^{n+1} \phi) = \underline{it}(T(T^n \phi)) = \underline{\sigma} \circ \underline{it}(T^n \phi) = \underline{\sigma} \circ \underline{it}(T^n \tilde{\phi}) = \underline{it}(T^{n+1} \tilde{\phi}),$$

que é o resultado desejado para $k = n + 1$. ■

Em seguida, apresentamos um exemplo para ilustrar as definições e os resultados anteriores.

Exemplo 2.9 Consideramos a função em \mathcal{A} dada por

$$\begin{aligned} \phi(x) = & 0.1 \cos(\pi x) - 0.2 \cos(2\pi x) + 0.3 \cos(3\pi x) + 0.2 \cos(4\pi x) - 0.1 \cos(5\pi x) + \\ & + 0.1 \cos(6\pi x), \end{aligned}$$

e a aplicação unimodal $f(x) = 1 - 2x^2$. A sequência de amassamento associada a aplicação

f é $\mathcal{K}_f = RL^\infty$ e verificamos que

$$\underline{it}(\phi) = (RRRRL\dots, LRLRR\dots, RRRLR\dots, LRRRR\dots, LRLRR\dots) \in \Sigma^5.$$

Então,

$$\underline{\sigma}(\underline{it}(\phi)) = (RRRL\dots, \mathcal{K}_f, RLRR\dots, \mathcal{K}_f, RRLR\dots, \mathcal{K}_f, RRRR\dots, RLRR\dots) \in \Sigma^8,$$

$$\underline{\sigma}^2(\underline{it}(\phi)) = (RRL\dots, L^\infty, LRR\dots, L^\infty, RLR\dots, L^\infty, RRR\dots, LRR\dots) \in \Sigma^8,$$

$$\underline{\sigma}^3(\underline{it}(\phi)) = (RL\dots, \mathcal{K}_f, L^\infty, RR\dots, L^\infty, \mathcal{K}_f, LR\dots, \mathcal{K}_f, L^\infty, \mathcal{K}_f, RR\dots, \mathcal{K}_f, RR\dots) \in \Sigma^{13},$$

e, portanto,

$$\underline{it}(T\phi) = (RRRL\dots, \mathcal{K}_f, RLRR\dots, \mathcal{K}_f, RRLR\dots, \mathcal{K}_f, RRRR\dots, RLRR\dots),$$

$$\underline{it}(T^2\phi) = (RRL\dots, L^\infty, LRR\dots, L^\infty, RLR\dots, L^\infty, RRR\dots, LRR\dots),$$

$$\underline{it}(T^3\phi) = (RL\dots, \mathcal{K}_f, L^\infty, RR\dots, L^\infty, \mathcal{K}_f, LR\dots, \mathcal{K}_f, L^\infty, \mathcal{K}_f, RR\dots, \mathcal{K}_f, RR\dots).$$

Na Figura 2.6, mostramos os gráficos de ϕ , $T\phi$, $T^2\phi$ e $T^3\phi$. Os seus itinerários podem ser calculados directamente ou pelas igualdades

$$\underline{\sigma}^k(\underline{it}(\phi)) = \underline{it}(T^k\phi), \quad k = 1, 2, \dots$$

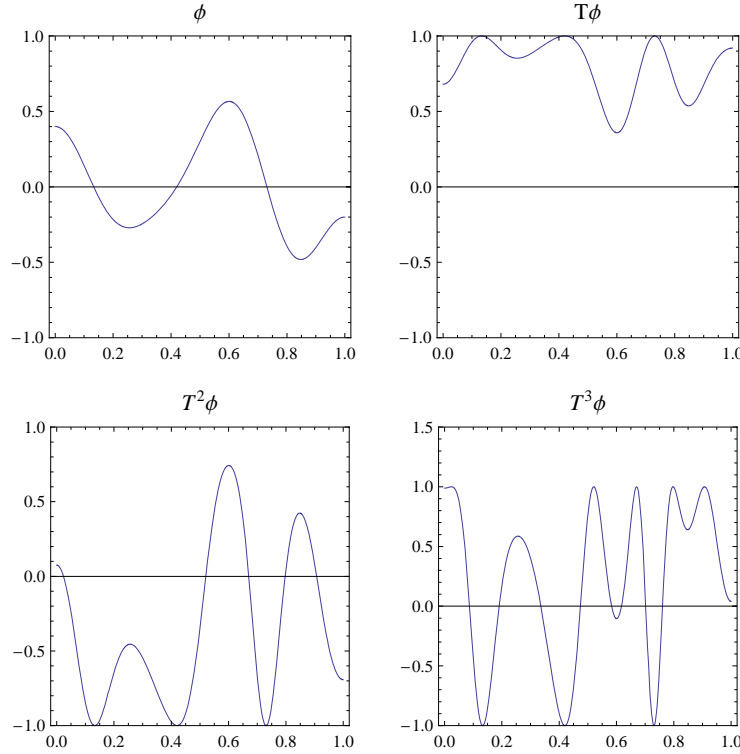


Figura 2.6: Gráficos de ϕ , $T\phi$, $T^2\phi$ e $T^3\phi$, com $\phi(x) = 0.1 \cos(\pi x) - 0.2 \cos(2\pi x) + 0.3 \cos(3\pi x) + 0.2 \cos(4\pi x) - 0.1 \cos(5\pi x) + 0.1 \cos(6\pi x)$ e f dada pela expressão analítica $f(x) = 1 - 2x^2$.

2.4 Evolução e decomposição espectral das funções iteradas

Nesta secção, analisamos o comportamento topológico do sistema dinâmico (\mathcal{A}, T_μ) para o caso particular em que o operador T_μ é obtido por uma família de aplicações quadráticas f_μ a um parâmetro $\mu \in (0, 2]$. Analisamos o comportamento assintótico de $T_\mu^k \phi_0$, $\phi_0 \in \mathcal{A}$, e alguns atributos particulares, como a evolução e a decomposição espectral das iteradas e a sua dependência na condição inicial e no parâmetro μ .

Recordamos que neste trabalho consideramos a classe de funções diferenciáveis

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in C^1([0, 1], I) : \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ e } |c_p(\varphi)| < \infty\},$$

onde $|cp(\varphi)|$ designa o número de pontos críticos de φ e $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

Nesta secção, consideramos a família de aplicações quadráticas f_μ de classe $C^1(I, I)$, dependente do parâmetro $\mu \in (0, 2]$, dada por

$$\begin{aligned} f_\mu : I &\rightarrow I \\ x &\mapsto 1 - \mu x^2, \end{aligned}$$

com único ponto crítico $x_c = 0$, onde f_μ atinge o valor máximo, isto é, $f'_\mu(x) \neq 0$ em $x \neq 0$ e $f''_\mu(0) < 0$. Notamos que $[-1, 1]$ é um intervalo invariante pois $f_\mu([-1, 1]) = [-1, 1]$.

Para esta família de aplicações quadráticas, o operador

$$\begin{aligned} T_\mu : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \varphi &\mapsto f_\mu \circ \varphi, \end{aligned}$$

está bem definido pois $(f_\mu \circ \varphi)'(0) = (f_\mu \circ \varphi)'(1) = 0$, pelo que temos $f_\mu \circ \varphi \in \mathcal{A}$, para qualquer $\varphi \in \mathcal{A}$. Além disso, se $\phi \in \mathcal{A}$ e $Im(\phi) \subset [-1, 1]$, então $Im(T_\mu^k \phi) \subset [-1, 1]$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Assumimos, caso não seja afirmado o contrário, que $Im(\phi) \subset [-1, 1]$.

Qualquer função em \mathcal{A} pode ser escrita como uma combinação linear de $\cos(k\pi x)$ (a expansão de Fourier em cossenos). Consideramos ainda a classe

$$\mathcal{B} = \left\{ \varphi \in \mathcal{A} : \varphi(x) = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\pi x), n \in \mathbb{N} \right\},$$

a classe de funções em \mathcal{A} que são combinações lineares de $\cos(k\pi x)$. Como f_μ é uma aplicação polinomial, temos $T_\mu(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ e obtemos o sistema dinâmico (\mathcal{B}, T_μ) , onde T_μ significa $T|_{\mathcal{B}}$.

No teorema que se segue apresentamos uma fórmula definida por recorrência para o cálculo dos coeficientes d_j da decomposição espectral de $f_\mu \circ \varphi_0(x) = \sum_{j=0}^{n_2} d_j \cos(j\pi x) \in \mathcal{B}$, para algum $n_2 \in \mathbb{N}$, em função do parâmetro $0 < \mu \leq 2$ e dos coeficientes c_j da decomposição espectral de uma dada função inicial $\varphi_0(x) = \sum_{j=0}^{n_1} c_j \cos(j\pi x) \in \mathcal{B}$, para algum $n_1 \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.10 *Seja f_μ a família de aplicações quadráticas definida atrás com $\mu \in (0, 2]$,*

$\phi_0(x) = \sum_{j=0}^{m_0} c_j(0) \cos(j\pi x) \in \mathcal{B}$, com $m_0 \in \mathbb{N}$, e $c_j(0) \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, m_0$. Seja

$\phi_k(x) = f_\mu^k \circ \phi_0(x) = \sum_{j=0}^{m_k} c_j(k) \cos(j\pi x)$. Então,

$$c_0(k+1) = 1 - \mu c_0(k)^2 - \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{m_k} c_n(k)^2$$

e

$$c_r(k+1) = -\frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^r c_{r-j}(k) c_j(k) - \mu \sum_{j=r}^{m_k} c_{j-r}(k) c_j(k),$$

com $m_k = 2^k m_0$ e $r = 1, 2, \dots, 2m_k$.

Demonstração. Seja $\phi_k(x) = \sum_{j=0}^{m_k} c_j(k) \cos(j\pi x) = f_\mu^k \circ \phi_0(x)$. Temos que

$$\phi_{k+1}(x) = 1 - \mu \phi_k^2(x) = \sum_{j=0}^{m_{k+1}} c_j(k+1) \cos(j\pi x),$$

isto é,

$$1 - \mu [c_0(k) + c_1(k) \cos(\pi x) + \dots + c_{m_k}(k) \cos(m_k \pi x)]^2 = \sum_{r=0}^{m_{k+1}} c_r(k+1) \cos(r\pi x).$$

Como $\cos(i\pi x) \cos(j\pi x) = \frac{1}{2} [\cos((i+j)\pi x) + \cos((i-j)\pi x)]$, temos, para $r = 0$,

$$\begin{aligned} c_0(k+1) &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m_k: \\ i+j=0}} c_i(k) c_j(k) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m_k: \\ |i-j|=0}} c_i(k) c_j(k) = \\ &= 1 - \mu c_0(k)^2 - \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^{m_k} c_n(k)^2 \end{aligned}$$

e, para $r = 1, 2, \dots, 2m_k$,

$$\begin{aligned} c_r(k+1) &= -\frac{\mu}{2} \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m_k: \\ i+j=r}} c_i(k) c_j(k) - \frac{\mu}{2} \sum_{\substack{i,j=1,\dots,m_k: \\ |i-j|=r}} c_i(k) c_j(k) = \\ &= -\frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^r c_{r-j}(k) c_j(k) - \frac{\mu}{2} \sum_{j=0}^r c_{r+j}(k) c_j(k) - \frac{\mu}{2} \sum_{j=r}^{m_k} c_{j-r}(k) c_j(k). \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^r c_{r+j}(k)c_j(k) = \sum_{j=r}^{m_k} c_{j-r}(k)c_j(k)$ obtemos a afirmação. ■

Consideramos o seguinte exemplo cuja Figura 2.7 ilustra a dependência espectral no parâmetro μ .

Exemplo 2.11 Consideramos a família quadrática f_μ dependendo do parâmetro $\mu \in (0, 2]$,

$$\begin{aligned} f_\mu : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - \mu x^2. \end{aligned}$$

Os gráficos da Figura 2.7 ilustram a variação com o parâmetro $\mu \in (0, 2]$ da decomposição espectral de $\phi_4 = f_\mu^4 \circ \phi_0$, $|c_{2j}(4)|$, $j = 0, 1, \dots, 8$, e a condição inicial $\phi_0(x) = \cos(\pi x)$.

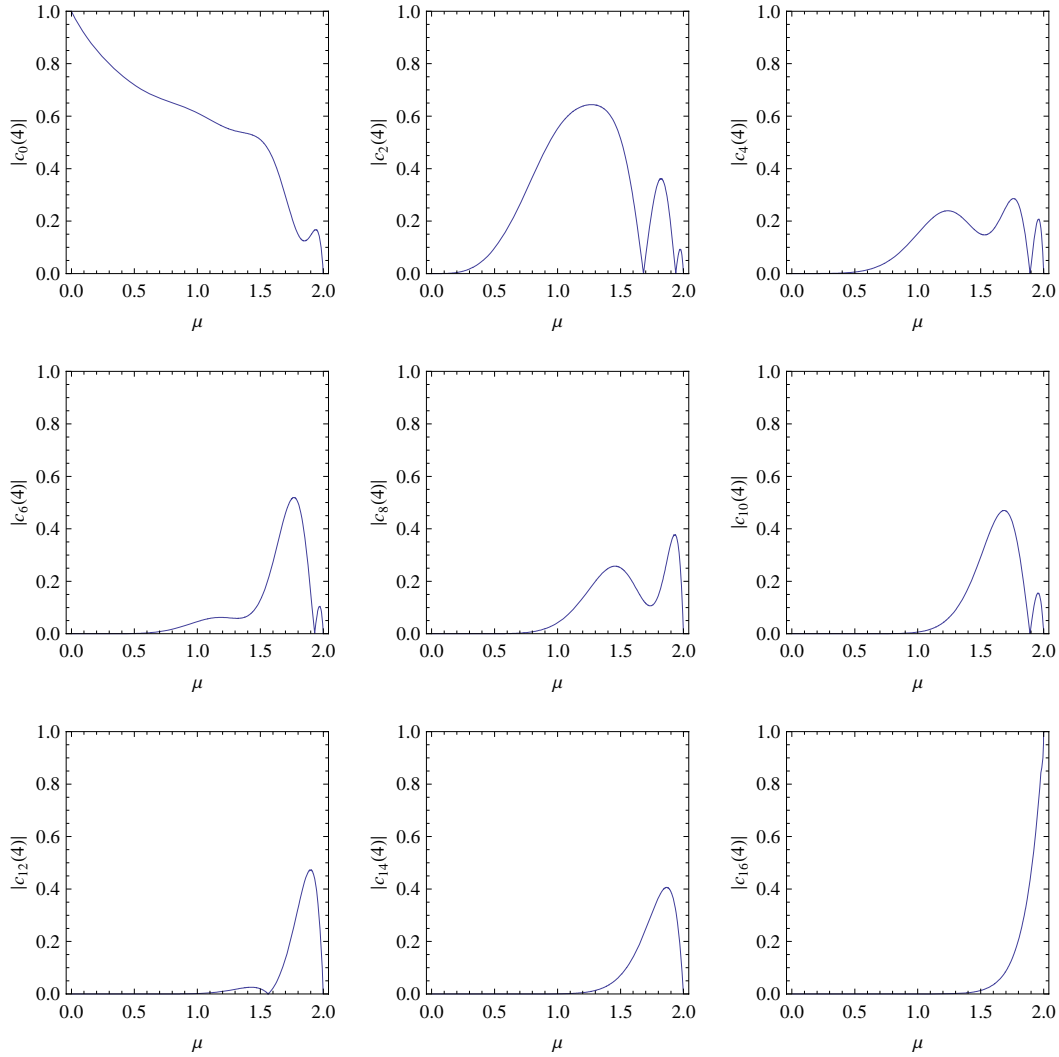


Figura 2.7: Gráficos da variação com o parâmetro $\mu \in (0, 2]$ da decomposição espectral de $\phi_4 = f_\mu^4 \circ \phi_0$, $|c_{2j}(4)|$, $j = 0, 1, \dots, 8$, com $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ e $\phi_0(x) = \cos(\pi x)$.

Se $\phi \in \mathcal{B}$ faz sentido falar no *harmónico maximal* de ϕ , denotado por $m(\phi)$ (correspondendo à frequência maximal), o qual é o número natural maximal m , que corresponde ao último coeficiente não nulo de $\cos(m\pi x)$ no desenvolvimento da expansão em série de cossenos de ϕ . Definimos $\nu(\phi)$ como o valor absoluto deste coeficiente. Em seguida, obtemos uma dependência explícita de $\nu(\phi_k)$ no parâmetro μ , pelo que $\nu(\phi_k)$ é uma função de

$$\mu \text{ e } \nu(\phi_k) = \nu(\phi_k, \mu).$$

Proposição 2.12 *Sejam f_μ a família quadrática dependendo do parâmetro $\mu \in (0, 2]$, $\phi_0 \in \mathcal{B}$ e $\phi_k = f_\mu^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$. Então, $\nu(\phi_k, \mu)$ é uma função crescente em μ , para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para qualquer condição inicial ϕ_0 . Como consequência, $\nu(\phi_k, \mu)$ depende monotonamente da entropia topológica, em particular $\nu(\phi_k, \mu) = a\mu^N$, para algum $a \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração. Sejam $\phi \in \mathcal{B}$ e $\phi_k = f_\mu^k \circ \phi$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 2.10 temos que $m_k = m(\phi_k) = 2^k m(\phi)$ e $\nu(\phi_k, \mu) = |c_{m_k}(k)|$. Um cálculo simples mostra que $c_{m_{k+1}}(k+1) = -\frac{\mu}{2} c_{m_k}(k)^2$ e $\nu(\phi_k, \mu) = a\mu^N$, para algum número real a e algum inteiro N . Portanto, no intervalo considerado $\mu \in (0, 2]$, a função $\nu(\phi_k, \mu)$ é monótona. Como a entropia topológica de f_μ depende monotonamente de μ , obtemos o resultado. ■

Capítulo 3

Iteração de funções diferenciáveis por aplicações m -modais

Neste capítulo, começamos por generalizar a aplicações m -modais f os resultados obtidos no Capítulo 2, que têm por base uma família de aplicações unimodais. Mais precisamente, estudamos a localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas e desenvolvemos algumas técnicas da dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) , no caso em que T é obtido como a composição de uma aplicação m -modal do intervalo f com uma função da classe \mathcal{A} . Neste caso, obtemos a descrição combinatória das órbitas de (\mathcal{A}, T) que depende da descrição combinatória das órbitas do sistema dinâmico (I, f) . No caso particular de f ser uma aplicação topologicamente exacta estudamos a taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f relacionando-a com o número de crescimento de f . Considerando as técnicas da dinâmica simbólica introduzidas e desenvolvidas para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) e as funções em \mathcal{A} cujos valores críticos são pontos periódicos de f , analisamos a evolução e a distribuição dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f . Para isso, construímos e analisamos histogramas com as frequências relativas dos valores críticos distintos correspondentes aos

novos pontos críticos de ϕ_k . Vamos, no presente capítulo, apresentar resultados que foram obtidos em [CRV 11a, CRV 11b].

Neste capítulo, utilizamos a classe de funções diferenciáveis

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in C^1([0, 1], I) : \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \text{ e } |cp(\varphi)| < \infty\},$$

onde $|cp(\varphi)|$ designa o número de pontos críticos de φ e o operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi, \end{aligned}$$

onde $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação do intervalo m -modal para certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

3.1 Localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas

Nesta secção, apresentamos um estudo em termos de dinâmica simbólica sobre a localização dos pontos críticos e dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} pela aplicação m -modal f . Os resultados apresentados nesta secção são generalizações a aplicações m -modais, dos resultados obtidos na Secção 2.2, que tiveram por base uma família de aplicações unimodais.

Seja $i_0 i_1 \dots i_k \in \mathcal{W}_{k+1}$ e o intervalo cilindro $I_{i_0 i_1 \dots i_k} \subset I$ definido por

$$\begin{aligned} I_{i_0 i_1 \dots i_k} &:= \{x \in I : x \in I_{i_0}, f(x) \in I_{i_1}, \dots, f^k(x) \in I_{i_k}\} = \\ &= I_{i_0} \cap f^{-1}(I_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-k}(I_{i_k}), \end{aligned}$$

onde $i_j = ad(f^j(x))$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Proposição 3.1 *Sejam f uma aplicação m -modal, $\phi \in \mathcal{A}$, $J \subset [0, 1]$ um intervalo e $x \in J$. Se $\phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{i_0 i_1 \dots i_k}$, tal que $\varepsilon(i_0) = -1$,*

então $f \circ \phi|_J(x)$ é um valor minimal (resp. maximal) em $I_{i_1 \dots i_k}$. Se $\phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{j_0 j_1 \dots j_k}$, tal que $\varepsilon(j_0) = +1$, então $f \circ \phi|_J(x)$ é um valor maximal (resp. minimal) em $I_{j_1 \dots j_k}$.

Demonstração. Primeiro, pela definição de $I_{i_0 i_1 \dots i_k}$, temos que $f(I_{i_0 i_1 \dots i_k}) = I_{i_1 \dots i_k}$ para qualquer palavra admissível $i_0 \dots i_k$. Em seguida, como $f|_{I_{i_0}}$ é decrescente e inverte a ordem, temos que pontos maximais (resp. minimais) para $\phi|_J$ em algum J , subintervalo de $[0, 1]$, correspondem a pontos minimais (resp. maximais) para $f \circ \phi|_J$. Pela mesma razão, como $f|_{I_{j_0}}$ é crescente e preserva a ordem, obtemos o resultado pretendido. ■

Sejam $cp(\phi)$ o conjunto dos pontos críticos de $\phi \in \mathcal{A}$, $cv(\phi)$ o conjunto dos valores críticos de $\phi \in \mathcal{A}$ e $sp(\phi)$ o conjunto dos pontos $x \in [0, 1]$ cuja imagem por ϕ é um ponto crítico de f , isto é, $\phi(x) \in cp(f)$. Notamos que $cv(\phi) = \phi(cp(\phi))$.

Proposição 3.2 *Sejam f uma aplicação m -modal e $\phi \in \mathcal{A}$. Então,*

$$cp(f \circ \phi) = sp(\phi) \cup cp(\phi)$$

e

$$cv(f \circ \phi) = f(\phi(sp(\phi))) \cup f(cv(\phi)).$$

Demonstração. Pela regra da cadeia temos que $(f \circ \phi)'(x) = f'(\phi(x))\phi'(x) = 0$, pelo que, $\phi'(x) = 0$ ou $f'(\phi(x)) = 0$. Donde se obtém o primeiro resultado. Por outro lado, os valores críticos de $f \circ \phi$ são as imagens por $f \circ \phi$ dos pontos críticos de $f \circ \phi$. Além disso, $f(cv(\phi)) = f \circ \phi(cp(\phi))$ e obtemos o resultado. ■

Uma consequência deste resultado é o seguinte:

Corolário 3.3 *Sejam f uma aplicação m -modal, $\phi_0 \in \mathcal{A}$ e $\phi_{k+1} = f \circ \phi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Então,*

$$cp(\phi_{k+1}) = \bigcup_{j=0}^k sp(f^j(\phi_0)) \cup cp(\phi_0)$$

e

$$cv(\phi_{k+1}) = \bigcup_{j=0}^k f^{k+1-j}(\phi_j(sp(\phi_j))) \cup f^{k+1}(cv(\phi_0)).$$

Este último resultado significa que os máximos e os mínimos de $\phi_{k+1} = f^{k+1}(\phi_0)$, de alguma função inicial $\phi_0 \in \mathcal{A}$, são obtidos das órbitas dos máximos e dos mínimos de ϕ_0 e também do aparecimento de pontos críticos onde $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$ atingem os pontos críticos de f . As pré-imagens, por f , dos pontos críticos c_j , $j = 1, 2, \dots, m$, isto é, pontos $y \in I$ tais que $f^k(y) = c_j$, para algum natural k e algum $j = 1, 2, \dots, m$, podem ser representados pelas palavras admissíveis em \mathcal{W}_k . Por exemplo, a palavra admissível $i_1 i_2 \dots i_k$ juntamente com o símbolo C_j (para um $j = 1, \dots, m$ fixo), $i_1 i_2 \dots i_k C_j$, representa a k -ésima pré-imagem de c_j , por f , isto é, $ad(x) = i_1$, $ad(f(x)) = i_2, \dots, ad(f^{k-1}(x)) = i_k$ e $f^k(x) = c_j$. Uma palavra admissível indica o prefixo do itinerário de uma pré-imagem y por f . Se considerarmos os gráficos das funções constantes iguais às pré-imagens dos pontos críticos de f obtemos uma grelha em que cada linha horizontal é designada por uma palavra admissível. Se uma das linhas horizontais, designada por uma certa palavra admissível $i_1 i_2 \dots i_k C_j$, intersecta ϕ num ponto $x \in [0, 1]$, então $T^k(\phi)$ terá um novo ponto crítico em x com o valor crítico localizado no intervalo cilindro $I_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Notamos que x não é necessariamente um ponto crítico para $T^{k-1}(\phi)$.

Os Exemplos 3.4 e 3.5 ilustram os resultados anteriores. Em particular, as Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 ilustram as Proposições 3.1 e 3.2.

Exemplo 3.4 Consideramos a aplicação bimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ cuja expressão analítica é dada por $f(x) = 4x^3 - 3x$. Sejam $J_1, J_2 \subset [0, 1]$ os intervalos e $\phi \in \mathcal{A}$. Na Figura 3.1(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ , nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{31} . Na Figura 3.1(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_1 . Na Figura 3.2(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo nas regiões I_{22} e I_{23} , respectivamente. Na Figura 3.2(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um mínimo e um máximo nas regiões I_2 e I_3 . Na Figura 3.3(a), apresentamos o gráfico da restrição da função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , que intersecta a linha horizontal correspondendo a um ponto crítico de f em alguns pontos $x_1, x'_1 \in J_1, x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo e um mínimo nas regiões I_{31} e I_{21} . E, finalmente, na Figura 3.3(b), apresentamos o gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com os novos valores mínimos nos pontos $x_1, x'_1 \in J_1, x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo na região I_1 .

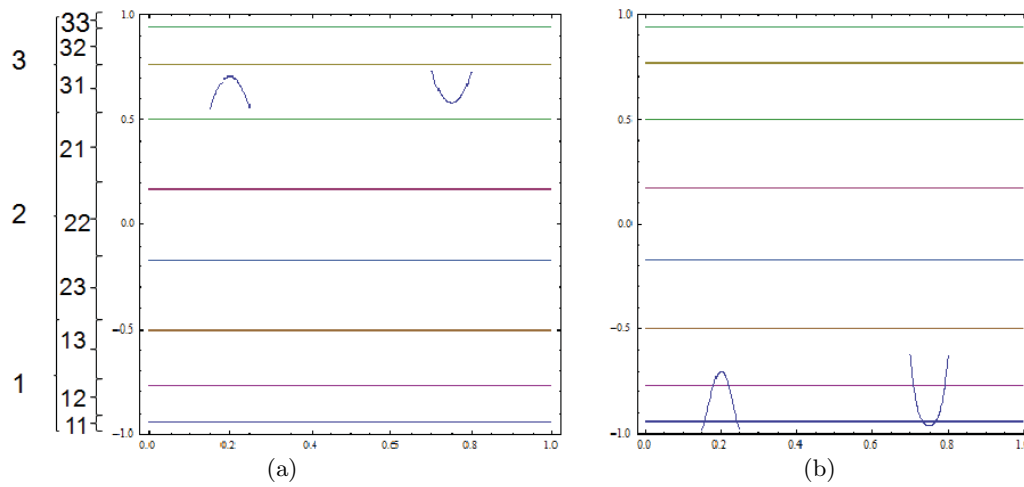


Figura 3.1: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_{31} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo na região I_1 , respectivamente.

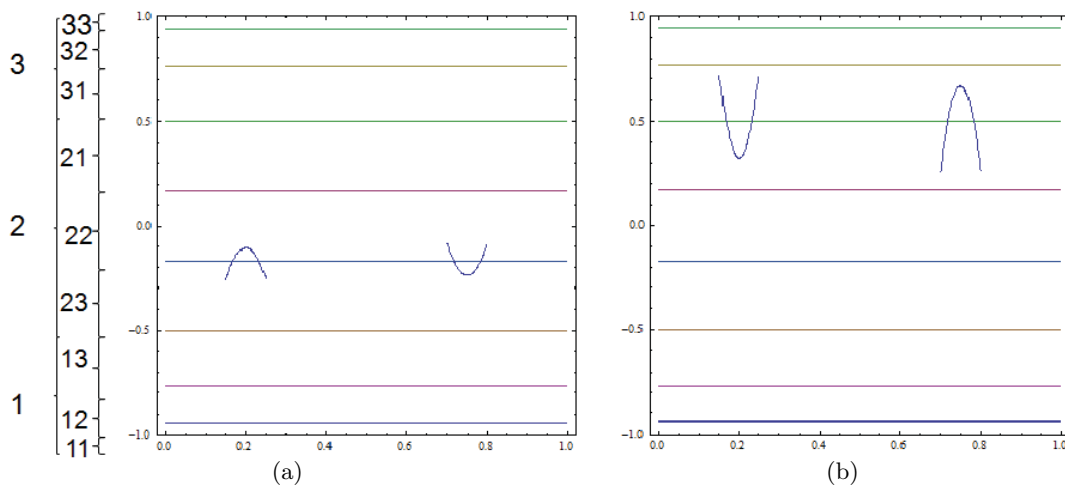


Figura 3.2: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , com um máximo e um mínimo nas regiões I_{22} e I_{23} , respectivamente. (b) Gráfico da restrição de $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com um mínimo e um máximo nas regiões I_2 e I_3 , respectivamente.

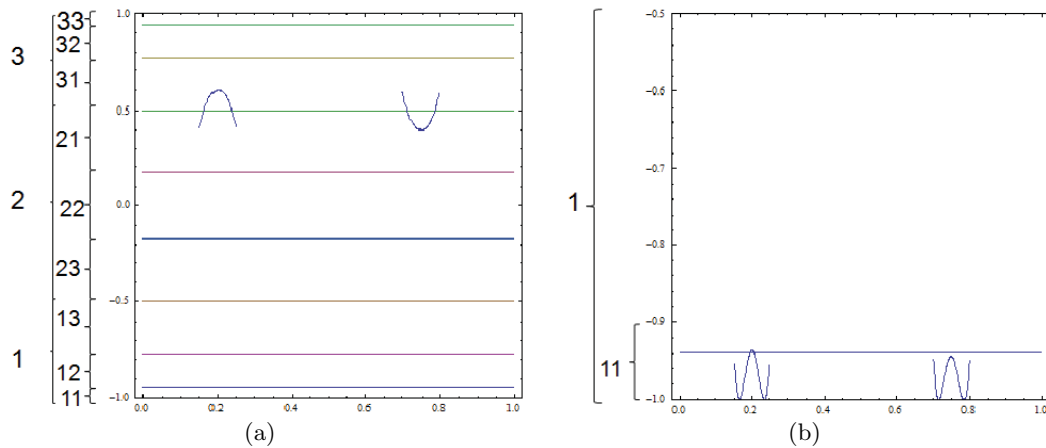


Figura 3.3: (a) Gráfico da restrição de uma função ϕ nos subintervalos J_1 e J_2 , que intersecta a linha horizontal correspondendo a um ponto crítico de f em alguns pontos $x_1, x'_1 \in J_1, x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo e um mínimo nas regiões I_{31} e I_{21} . (b) Gráfico da restrição da aplicação $f \circ \phi$ nos mesmos subintervalos J_1 e J_2 , com os novos valores mínimos nos pontos $x_1, x'_1 \in J_1, x_2, x'_2 \in J_2$ e com um máximo na região I_1 . Notamos que em (b) a escala vertical é diferente.

Exemplo 3.5 Consideramos a aplicação bimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = 4x^3 - 3x$, com os pontos críticos $c_1 = -1/2$ e $c_2 = 1/2$. A partição do intervalo I é dada por $I = I_1 \cup I_{C_1} \cup I_2 \cup I_{C_2} \cup I_3$, com $I_1 = [-1, -1/2)$, $I_{C_1} = \{-1/2\}$, $I_2 = (-1/2, 1/2)$, $I_{C_2} = \{1/2\}$ e $I_3 = (1/2, 1]$ (com o alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Na Figura 3.4(a), cada linha horizontal é uma k -ésima pré-imagem por f de cada ponto crítico de f , c_1 e c_2 . Em particular, a linha indicada é a primeira pré-imagem de c_2 pertencendo a I_2 . Portanto, para qualquer função inicial que intersecta a linha indicada num ponto, obtemos um novo ponto crítico numa segunda iteração e não antes. Na Figura 3.4(b), consideramos $\phi_0(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x)$, com $a_0 = -0.2$ e $a_1 = 0.06$. Ambos ϕ_0 e $\phi_1 = T\phi_0$ têm um ponto crítico no interior do intervalo $[0, 1]$. No entanto, a segunda iteração $\phi_2 = T^2\phi_0$ tem dois novos pontos críticos, precisamente nos pontos onde ϕ_0 intersecta a linha denotada por $2C_2$.

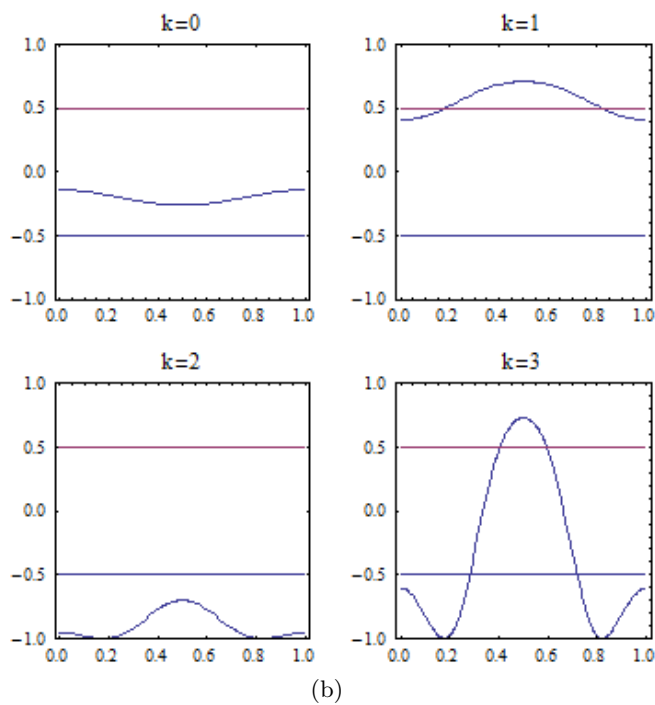
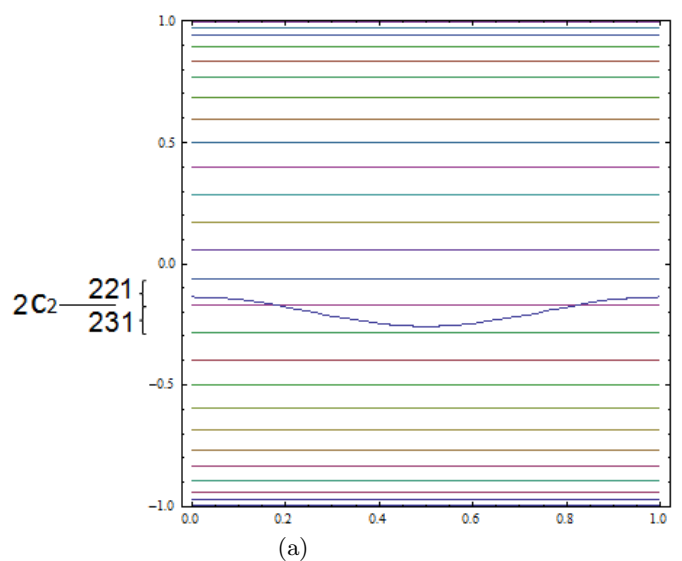


Figura 3.4: (a) Gráfico de $\phi_0(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x)$, com $a_0 = -0.2$ e $a_1 = 0.06$, tal que $\phi_2 = f^2 \circ \phi_0$ tem dois novos pontos críticos. A linha indicada é a primeira pré-imagem de c_2 pertencente a I_2 . (b) Gráficos das k -iterações por f de $\phi_0(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x)$, com $a_0 = -0.2$ e $a_1 = 0.06$.

3.2 Dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) associado a aplicações m -modais

Nesta secção generalizamos a aplicações m -modais f as técnicas introduzidas e desenvolvidas na Secção 2.3 sobre a dinâmica simbólica para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) , que têm por base uma família de aplicações unimodais. De modo análogo, consideramos o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, \dots, C_m, m + 1\}$ e o espaço simbólico generalizado é $\underline{\Sigma} := \cup_{j \in \mathbb{N}_0} \Sigma^{j+1}$, onde $\Sigma^{j+1} = \Sigma \times \Sigma \times \dots \times \Sigma$ ($j + 1$ vezes). Definimos a *aplicação endereço generalizado* para a classe \mathcal{A} por

$$\begin{aligned} \underline{ad}: \mathcal{A} &\rightarrow \mathfrak{A}^{\eta(\phi)+2} \\ \phi &\mapsto \underline{ad}(\phi) := (ad(d_0), ad(d_1), \dots, ad(d_{\eta(\phi)}), ad(d_{\eta(\phi)+1})) \end{aligned}$$

e a *aplicação itinerário generalizado* para a classe \mathcal{A} por

$$\begin{aligned} \underline{it}: \mathcal{A} &\rightarrow \underline{\Sigma} \\ \phi &\mapsto \underline{it}(\phi) := (it(d_0), it(d_1), \dots, it(d_{\eta(\phi)}), it(d_{\eta(\phi)+1})), \end{aligned}$$

com $d_j = \phi(a_j)$, $i = 1, 2, \dots, \eta(\phi)$, onde a_j , $i = 1, 2, \dots, \eta(\phi)$, são pontos críticos não triviais de ϕ no intervalo $]0, 1[$ (com $d_0 = \phi(0)$ e $d_{\eta(\phi)+1} = \phi(1)$) e $\eta(\phi)$ o número de pontos críticos não triviais de ϕ em $]0, 1[$.

Em seguida, apresentamos um exemplo para ilustrar as definições de uma aplicação endereço generalizado e de uma aplicação itinerário generalizado. Neste exemplo, mostramos também que funções diferentes podem ter o mesmo itinerário.

Exemplo 3.6 Consideramos a aplicação bimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -2.15x^3 + 1.15x$ e as funções $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{A}$ cujas expressões analíticas são dadas aproximadamente por $\phi(x) = 0.261 \cos(\pi x) + 0.711$ e $\tilde{\phi}(x) = 0.2885 \cos(0.8\pi x) + 0.6834$, respectivamente. Neste caso,

$$\underline{ad}(\phi) = (ad(\phi(0)), ad(\phi(1))) = (3, 3) = \underline{ad}(\tilde{\phi})$$

e

$$\underline{it}(\phi) = (312^\infty, 32^\infty) = \underline{it}(\tilde{\phi})$$

(com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Como podemos observar, as funções ϕ e $\tilde{\phi}$ são diferentes mas têm o mesmo itinerário, pelo que em termos de dinâmica simbólica representam a mesma classe. Consideramos também a função $\psi \in \mathcal{A}$ com expressão analítica dada aproximadamente por $\psi(x) = 0.261 \cos(3\pi x) + 0.711$ e que tem os mesmos valores críticos que ϕ e $\tilde{\phi}$. Todavia, o seu itinerário é

$$\underline{it}(\psi) = (312^\infty, 32^\infty, 312^\infty, 32^\infty)$$

e a função ψ pertence a uma classe diferente ϕ e $\tilde{\phi}$, ver a Figura 3.5.

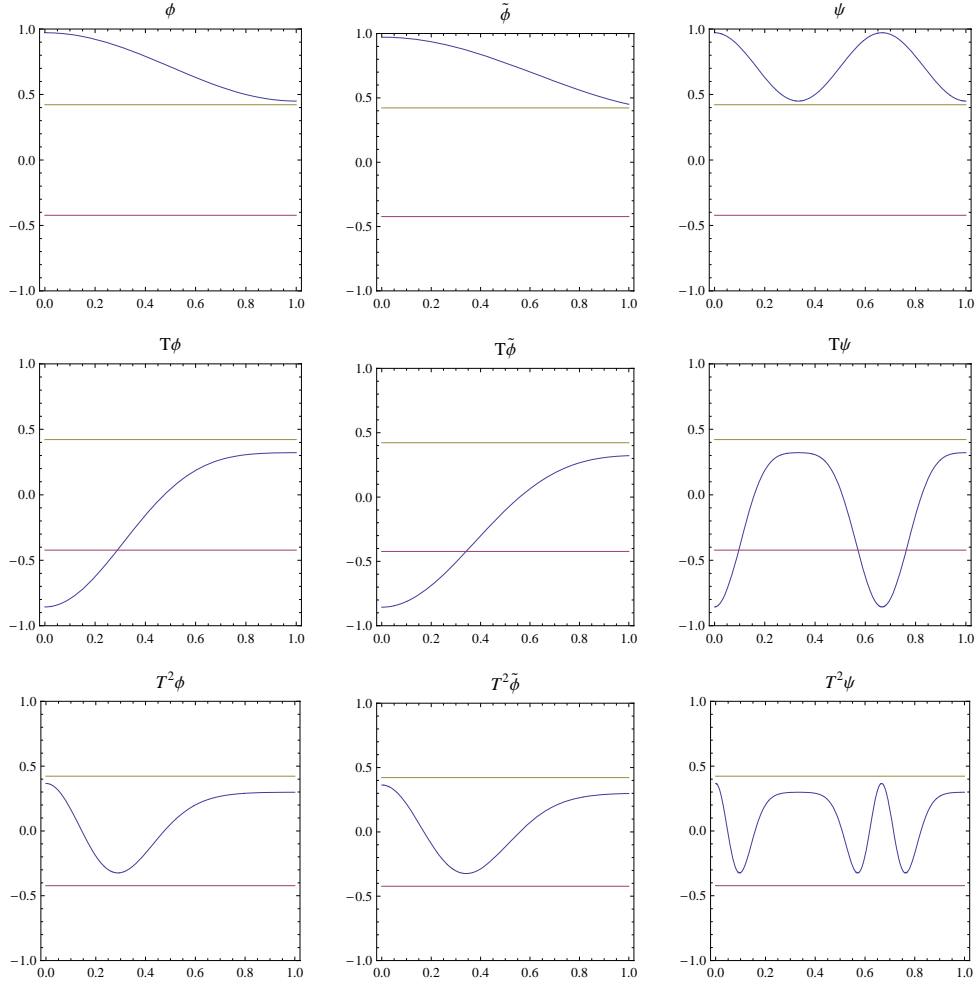


Figura 3.5: Gráficos das funções ϕ , $\tilde{\phi}$, ψ , $T\phi$, $T\tilde{\phi}$, $T\psi$, $T^2\phi$, $T^2\tilde{\phi}$ e $T^2\psi$, onde ϕ , $\tilde{\phi}$ e ψ são dadas aproximadamente por $\phi(x) = 0.261 \cos(\pi x) + 0.711$, $\tilde{\phi}(x) = 0.2885 \cos(0.8\pi x) + 0.6834$ e $\psi(x) = 0.261 \cos(3\pi x) + 0.711$, respectivamente, e $f(x) = -2.15x^3 + 1.15x$.

Em seguida definimos a aplicação deslocamento para o espaço $\underline{\Sigma}$.

Seja $i^{(j)} = i_1^{(j)} i_2^{(j)} \dots$, tal que $i^{(j)} = it(d_j)$, onde d_j , $j = 0, 1, 2, \dots, \eta(\phi) + 1$, são os valores críticos de ϕ . Definimos a *aplicação deslocamento generalizado* para o espaço $\underline{\Sigma}$ por

$$\underline{\sigma} : \underline{\Sigma} \rightarrow \underline{\Sigma}$$

$$\underline{\sigma}(i^{(0)}, \dots, i^{(j)}, i^{(j+1)}, \dots, i^{(\eta(\phi)+1)}) := \begin{cases} (\sigma(i^{(0)}), \dots, \sigma(i^{(j)}), \sigma(i^{(j+1)}), \dots, \sigma(i^{(\eta(\phi)+1)})) & \text{se } i_1^{(j)} = i_1^{(j+1)}, \\ (\sigma(i^{(0)}), \dots, \sigma(i^{(j)}), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}}, \dots, \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}-1}, \sigma(i^{(j+1)}), \dots, \sigma(i^{(\eta(\phi)+1)})) & \text{se } i_1^{(j)} \neq i_1^{(j+1)} \text{ e } i_1^{(j)} \prec i_1^{(j+1)}, \\ (\sigma(i^{(0)}), \dots, \sigma(i^{(j)}), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}-1}, \dots, \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}}, \sigma(i^{(j+1)}), \dots, \sigma(i^{(\eta(\phi)+1)})) & \text{se } i_1^{(j)} \neq i_1^{(j+1)} \text{ e } i_1^{(j+1)} \prec i_1^{(j)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{K}_{i_1^{(j)}}$, com $i_1^{(j)} \in \{1, \dots, m\}$, é a sequência de amassamento correspondente ao ponto crítico de f , localizado entre os valores críticos d_j e d_{j+1} , $j = 0, 1, 2, \dots, \eta(\phi)$.

Portanto, obtemos um sistema simbólico $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$ associado ao sistema dinâmico discreto (\mathcal{A}, T) . Analogamente aos sistemas dinâmicos discretos de dimensão finita obtemos os seguintes resultados, ver [CRV 11a]:

Teorema 3.7 *Sejam $\phi, \tilde{\phi} \in \mathcal{A}$, com $\phi \neq \tilde{\phi}$ e tal que $\underline{it}(\phi) = \underline{it}(\tilde{\phi})$. Então,*

$$\underline{it}(T^k \phi) = \underline{it}(T^k \tilde{\phi}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Além disso,

$$\underline{\sigma} \circ \underline{it} = \underline{it} \circ T.$$

Demonstração. Começamos por provar a última afirmação. Seja d_j , $j = 1, \dots, \eta(\phi)$, valor crítico de ϕ no intervalo $]0, 1[$ (com $d_0 = \phi(0)$ e $d_{\eta(\phi)+1} = \phi(1)$).

Se $i_1^{(j)} = i_1^{(j+1)}$, para qualquer $j \in \{0, 1, \dots, \eta(\phi)\}$, e por (1.1) temos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{it}(\phi)) &= \underline{\sigma}(it(d_0), \dots, it(d_j), it(d_{j+1}), \dots, it(d_{\eta(\phi)+1})) = \\ &= (\sigma(it(d_0)), \dots, \sigma(it(d_j)), \sigma(it(d_{j+1})), \dots, \sigma(it(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= (it(T(d_0)), \dots, it(T(d_j)), it(T(d_{j+1})), \dots, it(T(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= \underline{it}(T\phi), \end{aligned}$$

se $i_1^{(j)} \neq i_1^{(j+1)}$ e $i_1^{(j)} \prec i_1^{(j+1)}$, para algum $j \in \{0, 1, \dots, \eta(\phi)\}$, e por (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{it}(\phi)) &= \underline{\sigma}(it(d_0), \dots, it(d_j), it(d_{j+1}), \dots, it(d_{\eta(\phi)+1})) = \\ &= (\sigma(it(d_0)), \dots, \sigma(it(d_j)), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}} \dots \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}-1}, \sigma(it(d_{j+1})), \dots, \sigma(it(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= (\sigma(T(d_0)), \dots, it(T(d_j)), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}} \dots \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}-1}, it(T(d_{j+1})), \dots, \sigma(T(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= \underline{it}(T\phi), \end{aligned}$$

e, no último caso, se $i_1^{(j)} \neq i_1^{(j+1)}$ e $i_1^{(j+1)} \prec i_1^{(j)}$, para algum $j \in \{0, 1, \dots, \eta(\phi)\}$, e por (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\underline{it}(\phi)) &= \underline{\sigma}(it(d_0), \dots, it(d_j), it(d_{j+1}), \dots, it(d_{\eta(\phi)+1})) = \\ &= (\sigma(it(d_0)), \dots, \sigma(it(d_j)), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}-1} \dots \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}}, \sigma(it(d_{j+1})), \dots, \sigma(it(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= (\sigma(T(d_0)), \dots, it(T(d_j)), \mathcal{K}_{i_1^{(j)}-1} \dots \mathcal{K}_{i_1^{(j+1)}}, it(T(d_{j+1})), \dots, \sigma(T(d_{\eta(\phi)+1}))) = \\ &= \underline{it}(T\phi). \end{aligned}$$

Provamos agora a primeira afirmação. Para $k = 0$, obtemos $\underline{it}(\phi) = \underline{it}(\tilde{\phi})$ (por hipótese). Assumindo que o resultado é verdadeiro para $k = n$, isto é, assumindo que

$$\underline{it}(T^n \phi) = \underline{it}(T^n \tilde{\phi}).$$

Para $k = n + 1$,

$$\underline{it}(T^{n+1} \phi) = \underline{it}(T(T^n \phi)) = \underline{\sigma}(\underline{it}(T^n \phi)) = \underline{\sigma}(\underline{it}(T^n \tilde{\phi})) = \underline{it}(T^{n+1} \tilde{\phi}),$$

que é o resultado pretendido para $k = n + 1$. ■

No exemplo que se segue ilustramos a definição de uma aplicação deslocamento generalizado e o resultado anterior.

Exemplo 3.8 Consideramos uma aplicação bimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ com as sequências de amassamento $\mathcal{K}_1 = it(f(c_1)) = (33C_211C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = it(f(c_2)) = (11C_133C_2)^\infty$ (com o alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3\}$), cuja expressão analítica de f é dada aproximadamente por $f(x) = 3.9818x^3 - 2.9818x$, ver a Figura 3.6.

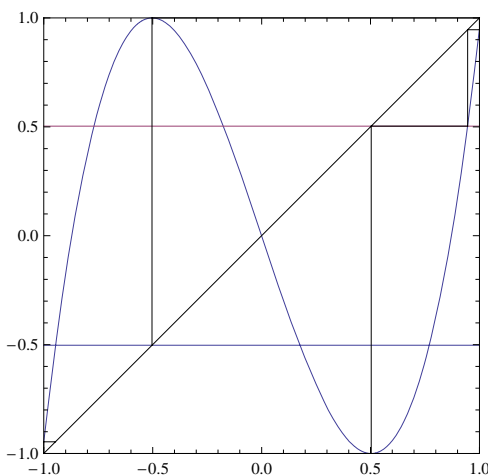


Figura 3.6: Gráfico da aplicação bimodal f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = 3.9818x^3 - 2.9818x$. As linhas horizontais representam os pontos críticos simbolicamente dados por C_1 e C_2 .

Agora, consideramos, em \mathcal{A} , a função ϕ dada por

$$\phi(x) = 0.05 \cos(2\pi x) - 0.92.$$

Temos

$$it(\phi) = (122223 \dots, 113133 \dots, 122223 \dots) \in \Sigma^3,$$

então

$$\underline{\sigma}(\underline{it}(\phi)) = (22223 \dots, 13133 \dots, 22223 \dots) \in \Sigma^3,$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^2(\underline{it}(\phi)) &= (2223 \dots, \mathcal{K}_1, 3133 \dots, \mathcal{K}_1, 2223 \dots) = \\ &= (2223 \dots, (33C_211C_1)^\infty, 3133 \dots, (33C_211C_1)^\infty, 2223 \dots) \in \Sigma^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^3(\underline{it}(\phi)) &= (223 \dots, \mathcal{K}_2, (3C_211C_13)^\infty, 133 \dots, (3C_211C_13)^\infty, \mathcal{K}_2, 223 \dots) = \\ &= (223 \dots, (11C_133C_2)^\infty, (3C_211C_13)^\infty, 133 \dots, (3C_211C_13)^\infty, \\ &\quad (11C_133C_2)^\infty, 223 \dots) \in \Sigma^7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^4(\underline{it}(\phi)) &= (23 \dots, \mathcal{K}_1, (1C_133C_21)^\infty, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, (C_211C_133)^\infty, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, 33 \dots, \\ &\quad \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, (C_211C_133)^\infty, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, (1C_133C_21)^\infty, \mathcal{K}_1, 23 \dots) = \\ &= (23 \dots, (33C_211C_1)^\infty, (1C_133C_21)^\infty, (33C_211C_1)^\infty, (11C_133C_2)^\infty, (C_211C_133)^\infty, \\ &\quad (11C_133C_2)^\infty, (33C_211C_1)^\infty, 33 \dots, (33C_211C_1)^\infty, (11C_133C_2)^\infty, (C_211C_133)^\infty, \\ &\quad (11C_133C_2)^\infty, (33C_211C_1)^\infty, (1C_133C_21)^\infty, (33C_211C_1)^\infty, 23 \dots) \in \Sigma^{17}, \end{aligned}$$

e

$$\underline{it}(T\phi) = (22223 \dots, 13133 \dots, 22223 \dots),$$

$$\underline{it}(T^2\phi) = (2223 \dots, \mathcal{K}_1, 3133 \dots, \mathcal{K}_1, 2223 \dots),$$

$$\underline{it}(T^3\phi) = (223 \dots, \mathcal{K}_2, (3C_211C_13)^\infty, 133 \dots, (3C_211C_13)^\infty, \mathcal{K}_2, 223 \dots),$$

$$\begin{aligned} \underline{it}(T^4\phi) &= (23 \dots, \mathcal{K}_1, (1C_133C_21)^\infty, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, (C_211C_133)^\infty, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, 33 \dots, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, (C_211C_133)^\infty, \\ &\quad \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, (1C_133C_21)^\infty, \mathcal{K}_1, 23 \dots). \end{aligned}$$

Na Figura 3.7, apresentamos os gráficos de ϕ , $T\phi$, $T^2\phi$, $T^3\phi$, $T^4\phi$ e $T^5\phi$ e determinamos os itinerários pela igualdade

$$\underline{\sigma}^k(\underline{it}(\phi)) = \underline{it}(T^k\phi), \quad k = 1, 2, \dots$$

É claramente visível a acumulação dos novos pontos críticos no último gráfico.

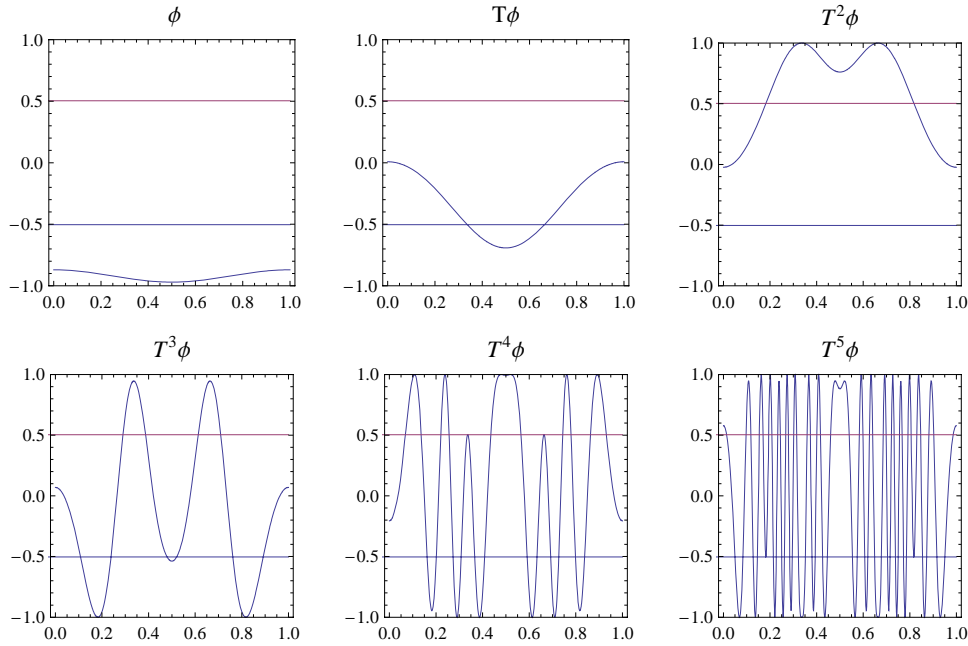


Figura 3.7: Gráficos de $T^k\phi$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, com ϕ dada por $\phi(x) = 0.05 \cos(2\pi x) - 0.92$ e f dada aproximadamente pela expressão analítica $f(x) = 3.9818x^3 - 2.9818x$.

Podemos fazer a análise simbólica sem uma expressão analítica explícita da função $\phi \in \mathcal{A}$, em particular se os itinerários forem seqüências periódicas, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 3.9 Consideramos uma aplicação 4-modal f caracterizada pelo invariante de amassamento

$$\mathcal{K}_f = ((555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty),$$

(com o alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3, C_3, 4, C_4, 5\}$), ver a Figura 3.8.

Agora, consideramos o itinerário generalizado de uma função inicial ϕ da classe \mathcal{A} com $\underline{it}(\phi) = ((15)^\infty, (253)^\infty, (413)^\infty)$. As seqüências são admissíveis para o invariante de amassamento \mathcal{K}_f , pelo que este itinerário representa uma classe de funções pertencendo

à classe \mathcal{A} , que têm três pontos críticos dois dos quais são necessariamente $a_0 = 0$ e $a_2 = 1$ (os pontos da fronteira de $[0, 1]$) e o outro ponto crítico a_1 é um ponto do intervalo $]0, 1[$, e os valores críticos correspondentes têm itinerários dados por $it(\phi(0)) = (15)^\infty$, $it(\phi(a_1)) = (253)^\infty$ e $it(\phi(1)) = (413)^\infty$ (pontos periódicos relativamente a f).

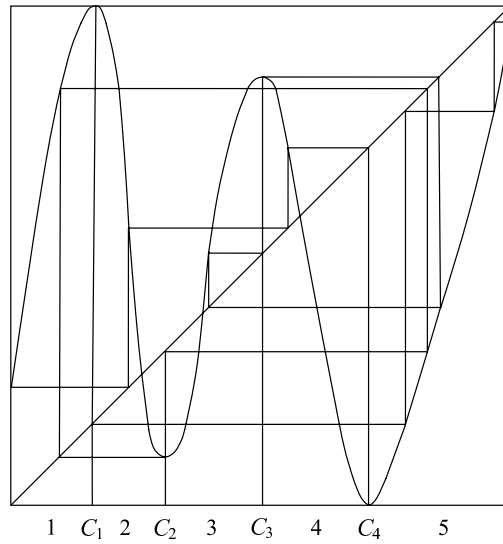


Figura 3.8: Gráfico da aplicação 4-modal f caracterizada pelo invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty)$.

Usando o Teorema 3.7, verificamos que a evolução temporal por T de qualquer função $\phi \in \mathcal{A}$ com o itinerário $((15)^\infty, (253)^\infty, (413)^\infty)$ é dada por

$$\begin{aligned}
& ((15)^\infty, (253)^\infty, (413)^\infty) \\
& \quad \downarrow \\
& ((51)^\infty, \mathcal{K}_1, (532)^\infty, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, (134)^\infty) = \\
& = ((51)^\infty, (555C_1)^\infty, (532)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_1)^\infty, (134)^\infty) \\
& \quad \downarrow \\
& ((15)^\infty, (55C_15)^\infty, (325)^\infty, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, (5C_21)^\infty, (3C_15)^\infty, (341)^\infty) = \\
& = ((15)^\infty, (55C_15)^\infty, (325)^\infty, (124C_4)^\infty, (53C_3)^\infty, (15C_2)^\infty, (555C_1)^\infty, (5C_21)^\infty, (3C_15)^\infty, (341)^\infty) \\
& \quad \downarrow \\
& ((51)^\infty, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, (5C_155)^\infty, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_3, (253)^\infty, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, (24C_41)^\infty, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, (3C_35)^\infty, \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_3, \\
& \quad \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1, (5C_21)^\infty, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4, (55C_15)^\infty, (C_215)^\infty, (C_353)^\infty, (413)^\infty) = \\
& = ((51)^\infty, (555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty, (5C_155)^\infty, (124C_4)^\infty, (53C_3)^\infty, (253)^\infty, (15C_2)^\infty, \\
& (24C_41)^\infty, (555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty, (3C_35)^\infty, (124C_4)^\infty, (53C_3)^\infty, (15C_2)^\infty, (555C_1)^\infty, \\
& (555C_1)^\infty, (5C_21)^\infty, (555C_1)^\infty, (15C_2)^\infty, (53C_3)^\infty, (124C_4)^\infty, (55C_15)^\infty, (C_215)^\infty, (C_353)^\infty, (413)^\infty) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \vdots
\end{aligned}$$

3.3 Taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas

Nesta secção, considerando o caso particular em que a aplicação f é topologicamente exacta, damos início ao estudo da taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f , estabelecendo uma relação entre a taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas e o número de crescimento da aplicação f . Para além de exigirmos que f seja topologicamente exacta exigimos algumas condições para a função inicial ϕ_0 da classe \mathcal{A} , ver [CRV 11b].

Nos seguintes resultados estabelecemos uma relação entre a taxa de crescimento dos pontos críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f e o número de crescimento de f .

Lema 3.10 *Sejam f uma aplicação m -modal, $\phi_0 \in \mathcal{A}$ e $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$. Se $Im(\phi_0) = I$, então a taxa de crescimento da sucessão $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao número de crescimento de f .*

Demonstração. Sejam c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, os pontos críticos de f e Γ_k o número das k -pré-imagens por f dos pontos críticos de f . Se $Im(\phi_0) = I$ então todas as pré-imagens por f , de c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, pertencem ao intervalo $Im(\phi_0)$. O número dos novos pontos críticos de ϕ_k é igual ao número de k -pré-imagens (no intervalo $Im(\phi_0)$) por f de c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, isto é,

$$\eta(\phi_k) - \eta(\phi_{k-1}) = \Gamma_{k-1},$$

pelo que

$$\eta(\phi_k) = \eta(\phi_0) + \sum_{t=1}^k \Gamma_{t-1}. \quad (3.2)$$

Seja $|\mathcal{W}_k|$ o número de palavras admissíveis de comprimento k . Como cada k -ésima pré-imagem por f do ponto crítico c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, é da forma γC_i com $\gamma \in \mathcal{W}_k$, então

$$|\mathcal{W}_k| = \sum_{t=1}^k \Gamma_{t-1} + 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

De modo a simplificar, e como ϕ_0 é independente de k , consideramos $\eta(\phi_0) = 0$. Neste caso, por (3.2) e (3.3), obtemos

$$|\mathcal{W}_k| = \eta(\phi_k) + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.4)$$

Portanto, a taxa de crescimento da sucessão $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, usando (3.4), é dada por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta(\phi_k)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (|\mathcal{W}_k| - 1)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{W}_k|^{1/k} = s(f),$$

e obtemos o resultado. ■

Teorema 3.11 *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação m -modal, $\Lambda \subset I$ a bacia de atracção de f , $\phi_0 \in \mathcal{A}$, tal que ϕ_0 é uma função não constante e $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$. Então, verificamos uma das seguintes afirmações:*

1. *Se $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, então a taxa de crescimento da sucessão $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, é igual a 1.*
2. *Se $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ e f é topologicamente exacta, então a taxa de crescimento da sucessão $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao número de crescimento de f .*

Demonstração. Seja $i^{(j)} = i_1^{(j)} i_2^{(j)} \dots$, $j = 0, 1, \dots, \eta(\phi_0) + 1$, o itinerário do j -ésimo valor crítico de ϕ_0 . Neste caso, temos

$$\underline{it}(\phi_0) = (i^{(0)}, \dots, i^{(j)}, i^{(j+1)}, \dots, i^{(\eta(\phi_0)+1)}).$$

Começamos por provar a afirmação (1). Se $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, como ϕ_0 é uma função contínua, então todos os valores críticos de ϕ_0 pertencem a $\Lambda_{\gamma C_i}$ para algum $\gamma \in \mathcal{W}_p$, $p \in \mathbb{N}$, e para algum $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Portanto, temos $i^{(j)} = \gamma C_i \mathcal{K}_i$ para qualquer $j = 0, 1, \dots, \eta(\phi_0) + 1$. Pelo Teorema 3.7 e pela definição da aplicação deslocamento generalizado $\underline{\sigma}$, temos

$$\underline{it}(\phi_k) = (\sigma^k(\gamma C_i \mathcal{K}_i), \dots, \sigma^k(\gamma C_i \mathcal{K}_i), \sigma^k(\gamma C_i \mathcal{K}_i), \dots, \sigma^k(\gamma C_i \mathcal{K}_i)) \in \Sigma^{\eta(\phi_0)+2}.$$

Neste caso, $\eta(\phi_k)$ é constante para qualquer $k \in \mathbb{N}$, pelo que a taxa de crescimento de $\eta(\phi_k)$ é igual 1, independentemente do número de crescimento de f .

Provamos agora a afirmação (2). Se $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ então $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda_{\gamma C_i}$ para qualquer $\gamma \in \mathcal{W}_p$, $p \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Se J um subintervalo aberto não vazio de I tal que

$J = \text{Im}(\phi_0)$, então $J \not\subset \Lambda$. Neste caso, se f é topologicamente exacta, então existe um número inteiro $n \geq 0$ tal que $f^n(J) = I$. Pelo Lema 3.10, concluímos que a taxa de crescimento da sucessão $\eta(\phi_{n+k})$, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao número de crescimento da aplicação f . ■

Em seguida, apresentamos um exemplo para ilustrar o resultado anterior. Neste exemplo, considerando uma aplicação bimodal f topologicamente exacta e as funções iniciais ψ_0 e ϕ_0 da classe \mathcal{A} tais que $\text{Im}(\psi_0) \not\subset \Lambda$ e $\text{Im}(\phi_0) \subset \Lambda$, analisamos a taxa de crescimento das sucessões $\eta(\psi_k)$ e $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 3.12 *Consideramos a aplicação bimodal $f : I \rightarrow I$ topologicamente exacta caracterizada pelo invariante de amassamento*

$$\mathcal{K}_f = ((131C_1)^\infty, (31C_2)^\infty)$$

cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$ e os subintervalos $J_1, J_2 \subset I = [-1, 1]$ tais que $J_1, J_2 \not\subset \Lambda$, ver a Figura 3.9. Seja $\psi_0 \in \mathcal{A}$ a função tal que $\text{Im}(\psi_0) \subset J_1$ e $\text{Im}(\psi_0) \not\subset \Lambda$, dada pela expressão analítica $\psi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) - 0.7000$ e cujo itinerário é

$$\underline{it}(\psi_0) = (11112233123\dots, 11112232323\dots, 11112233123\dots)$$

e seja $\phi_0 \in \mathcal{A}$ a função tal que $\text{Im}(\phi_0) \subset J_2$ e $\text{Im}(\phi_0) \subset \Lambda$, dada pela expressão analítica $\phi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) + 0.5038$ e cujo itinerário é

$$\underline{it}(\phi_0) = (231231231C_1(31C_2)^\infty, 231231C_1(31C_2)^\infty, 231231231C_1(31C_2)^\infty).$$

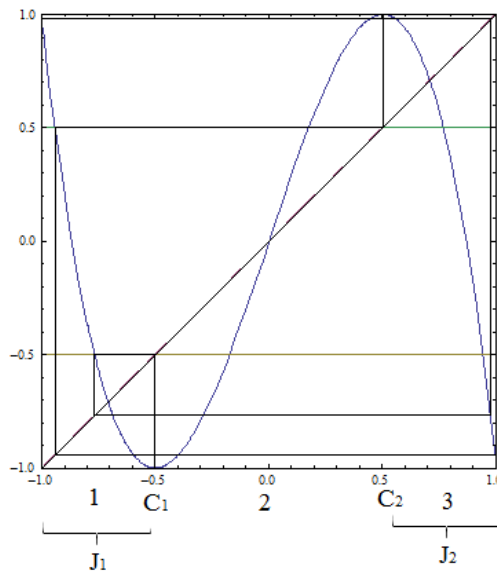


Figura 3.9: Gráfico da aplicação f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$ e simbolicamente designados por C_1 e C_2 , respectivamente.

A matriz de transição A associada ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos raio espectral é igual a $\lambda_{max} = 2.86181\dots$ e, portanto, o número de crescimento de f é $s(f) = 2.86181\dots$

A matriz A é irredutível e aperiódica logo temos que f é topologicamente exacta, ver por exemplo [Wal 81].

Calculamos os itinerários de ψ_k , $k \in \mathbb{N}$, e obtemos a taxa de crescimento de $\eta(\psi_k)$ igual ao número de crescimento de f , 2.86181. No último gráfico da Figura 3.10, é claramente visível a densidade da órbita dos pontos críticos de ψ_{50} em todo o intervalo I . Analogamente, calculamos os itinerários dos valores críticos de ϕ_k , $k \in \mathbb{N}$, e como $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, obtemos a taxa de crescimento de $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, igual a 1 que é diferente do número de crescimento de f . No último gráfico da Figura 3.11, temos que a órbita dos pontos críticos de ϕ_{50} tende para o ponto crítico c_2 de f , e portanto, não temos crescimento de pontos críticos de ϕ_k . De modo a poder visualizar melhor as iteradas de ϕ_0 , por T , apresentamos na Figura 3.12 um reescalamiento dos gráficos da Figura 3.11.

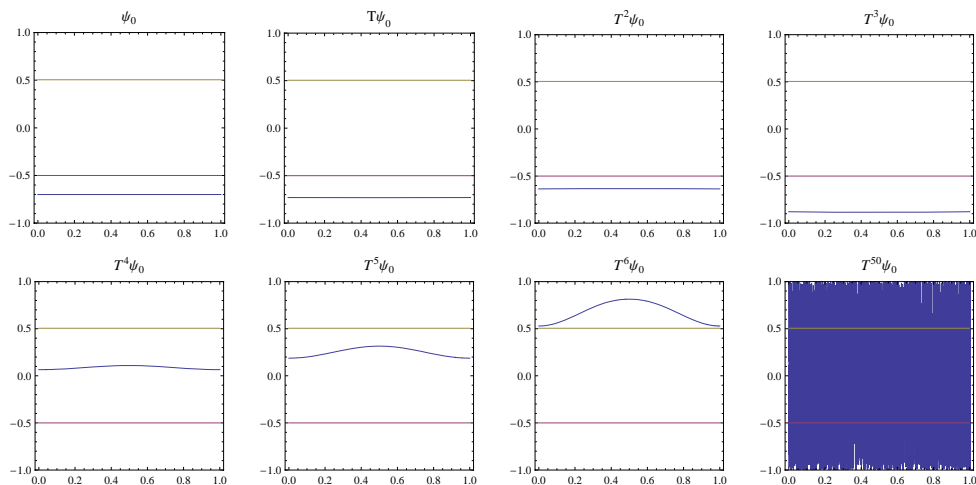


Figura 3.10: Gráficos das funções $\psi_k = T^k \psi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ψ_0 dada por $\psi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) - 0.7000$, tal que $Im(\psi_0) \subset J_1$ e $Im(\psi_0) \not\subset \Lambda$, e onde f é dada por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$.

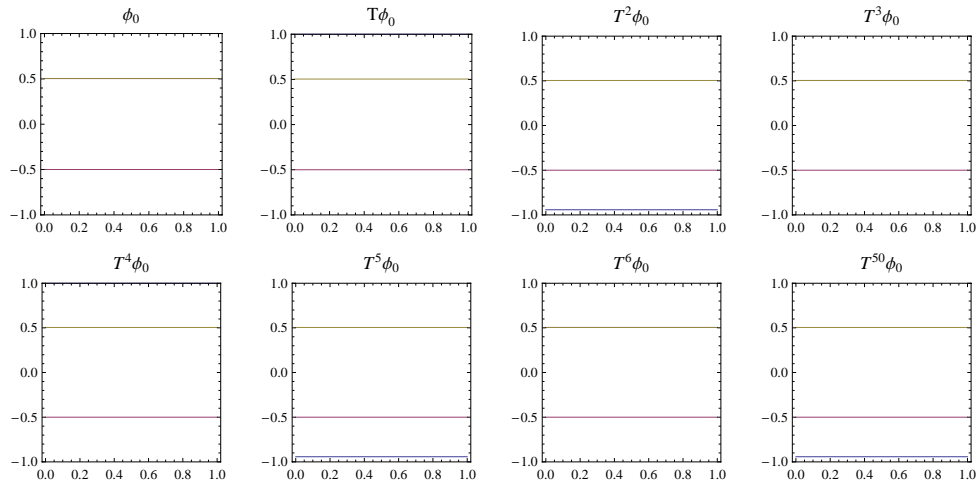


Figura 3.11: Gráficos das funções $\phi_k = T^k \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) + 0.5038$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_2$ e $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, e onde f é dada por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$. Notamos que não se consegue visualizar as iteradas de ϕ_0 , por T , das referidas linhas horizontais.

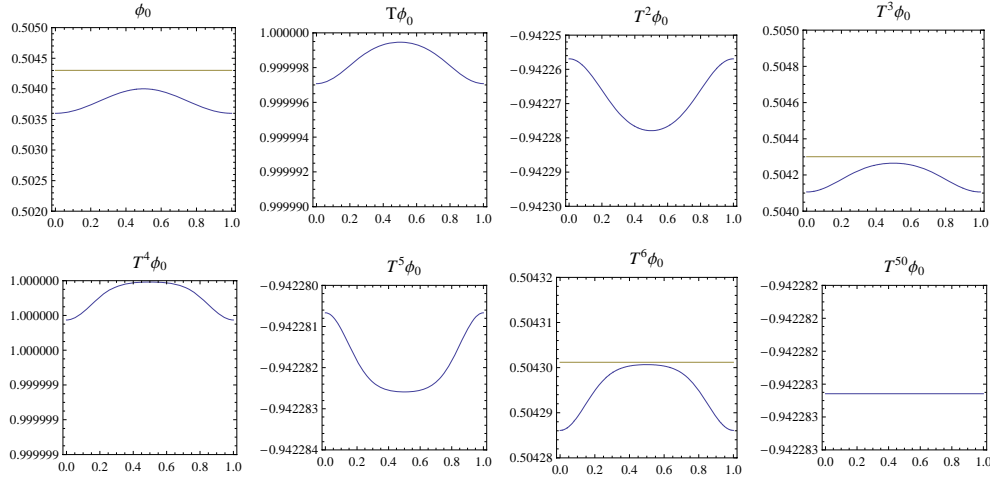


Figura 3.12: Gráficos das funções $\phi_k = T^k \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.0002 \cos(2\pi x) + 0.5038$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_2$ e $Im(\phi_0) \subset \Lambda$, e onde f é dada aproximadamente por $f(x) = -3.94776x^3 + 0.0249327x^2 + 2.98683x - 0.00628802$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.500091\dots$ e $c_2 = 0.504301\dots$. Notamos reescalamto nos gráficos da Figura 3.11.

Em seguida, apresentamos um exemplo em que considerando uma aplicação bimodal f não topologicamente exacta e as funções iniciais ϕ_0 e ψ_0 da classe \mathcal{A} tais que $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ e $Im(\psi_0) \not\subset \Lambda$, relacionamos a taxa de crescimento das sucessões $\eta(\phi_k)$ e $\eta(\psi_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, com o número de crescimento de f .

Exemplo 3.13 Consideramos a aplicação bimodal $f : I \rightarrow I$ não topologicamente exacta caracterizada pelo invariante de amassamento

$$\mathcal{K}_f = ((122C_1)^\infty, (32C_2)^\infty)$$

cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$ e os subintervalos $J_1, J_2 \subset I = [-1, 1]$ tais que $J_1, J_2 \not\subset \Lambda$, ver a Figura 3.13. Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}$ a função tal que $Im(\phi_0) \subset J_1$ cuja expressão analítica é dada

pela expressão analítica $\phi_0(x) = -0.038 \cos(2\pi x) - 0.821$, e itinerário é

$$\underline{it}(\phi_0) = (1112211112212\dots, 111111111121\dots, 1112211112212\dots)$$

e seja $\psi_0 \in \mathcal{A}$ a função tal que $Im(\psi_0) \subset J_2$ cuja expressão analítica é dada pela expressão analítica $\psi_0(x) = -0.034 \cos(2\pi x) + 0.54$, e itinerário é

$$\underline{it}(\psi_0) = (2323232323233\dots, 2323323333323\dots, 2323232323233\dots).$$

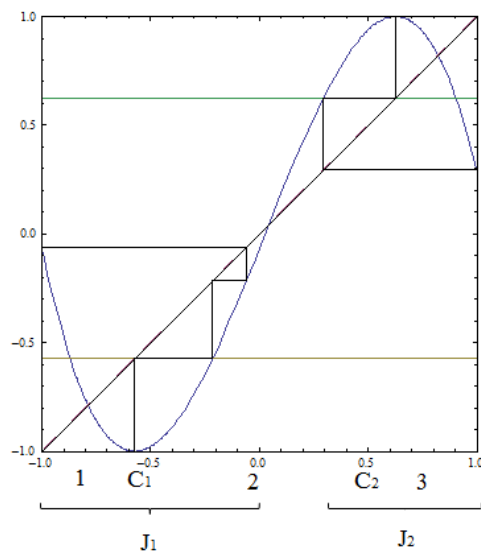


Figura 3.13: Gráfico da aplicação f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345\dots$ e $c_2 = 0.62577\dots$ e simbolicamente designados por C_1 e C_2 .

Temos que f não é topologicamente exacta pois, por exemplo, $f^n(J_2) \neq I$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

A matriz de transição A associada ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O raio espectral da matriz A é dado por $\lambda_{max} = 1.83929\dots$ e, portanto, o número de crescimento de f é $s(f) = 1.83929\dots$.

Calculando a taxa de crescimento de $\eta(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}$ obtemos o valor $1.83929\dots$ que é igual ao número de crescimento de f . No último gráfico da Figura 3.14, podemos observar a densidade da órbita dos pontos críticos de ψ_{50} na região J_1 (J_1 está representada na Figura 3.13). Analogamente, obtemos para a taxa de crescimento de $\eta(\psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$ o valor $1.61806\dots$ que é diferente do número de crescimento de f . No último gráfico da Figura 3.15, é também visível a densidade da órbita dos pontos críticos de ψ_{50} mas na região J_2 (J_2 está representada na Figura 3.13).

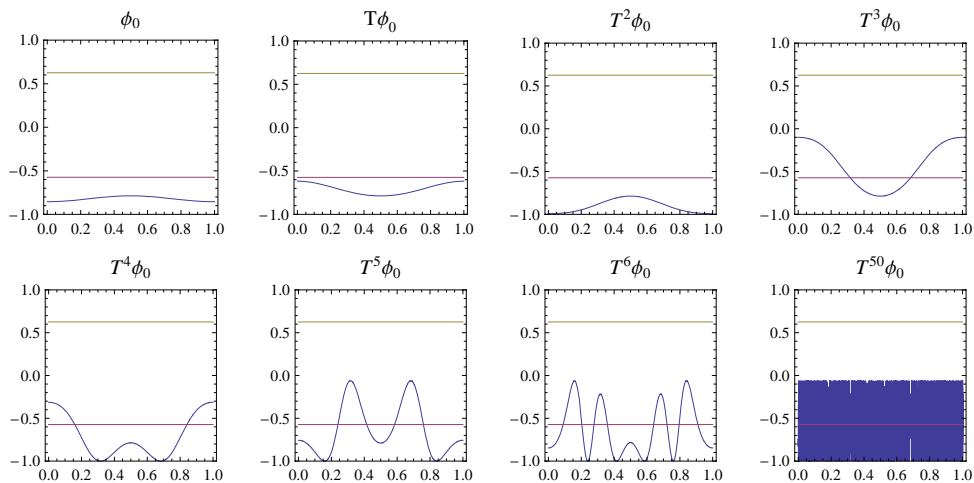


Figura 3.14: Gráficos das funções $\phi_k = T^k\phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com $\phi_0(x) = -0.048 \cos(5\pi x) - 0.74$, tal que $Im(\phi_0) \subset J_1$, e f dada por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345\dots$ e $c_2 = 0.62577\dots$.

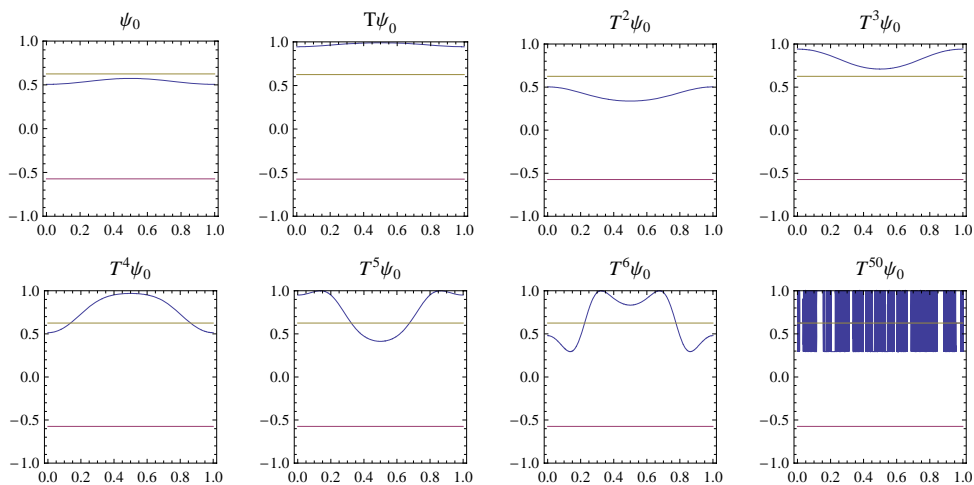


Figura 3.15: Gráficos das funções $\psi_k = T^k\psi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 50$, com $\psi_0(x) = 0.048 \cos(5\pi x) + 0.75$, tal que $Im(\psi_0) \subset J_2$, e f dada aproximadamente por $f(x) = -2.31934x^3 + 0.182021x^2 + 2.49686x - 0.0654008$. As linhas horizontais representam os pontos críticos de f dados por $c_1 = -0.57345\dots$ e $c_2 = 0.62577\dots$.

3.4 Evolução e distribuição dos valores críticos das funções iteradas

Nesta secção, consideramos aplicações m -modais f com sequências de amassamento periódicas de tipo crítico $\mathcal{K}_i = (K_1 K_2 \dots K_{p_i-1} C_i)^\infty$, com $p_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$, e funções ϕ da classe \mathcal{A} . Considerando as técnicas da dinâmica simbólica introduzidas e desenvolvidas na Secção 3.2 para o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) , analisamos a evolução e a distribuição dos valores críticos das funções iteradas $\phi_k = T^k \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. O número de valores críticos distintos de ϕ_k que podem aparecer ao longo da iteração depende do tipo de sequências de amassamento de f . Se as sequências de amassamento de f forem todas periódicas o número de valores críticos distintos de ϕ_k estabiliza embora o mesmo não suceda à sua repetição. No caso particular, em que os itinerários dos valores críticos de ϕ_0 são periódicos existe um inteiro positivo n tal que para qualquer $k \geq n$ conhecemos o conjunto dos itinerários de todos os valores críticos distintos de ϕ_k que é finito e não varia com k . Um outro caso que podemos analisar, e que não está abordado neste trabalho, é o caso em que uma sequência de amassamento de f não é periódica, sendo assim, o número de valores críticos distintos de ϕ_k vai crescer sempre com iteração k e seria interessante analisar o tipo de crescimento.

No resultado que se segue, considerando as sequências de amassamento de f periódicas, mostramos o conjunto dos itinerários dos valores críticos das funções iteradas $\phi_k = T^k \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Como foi referido, $\eta(\phi_0)$ denota o número de pontos críticos não-triviais de ϕ_0 e d_j , $j = 0, 1, \dots, \eta(\phi_0) + 1$, os valores críticos de $\phi_0 \in \mathcal{A}$. Seja $v(\phi_0)$ o número de valores críticos distintos de $\phi_0 \in \mathcal{A}$.

Proposição 3.14 *Sejam f uma aplicação m -modal, $\Lambda \subset I$ a bacia de atracção de f ,*

$\phi_0 \in \mathcal{A}$ tal que $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ e $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Se as sequências de amassamento de f , \mathcal{K}_i , são periódicas de período p_i , $i = 1, \dots, m$, então os itinerários dos valores críticos de ϕ_k , $k \in \mathbb{N}_0$, pertencem ao conjunto

$$\bigcup_{i=1}^m \{\sigma^{q_i}(\mathcal{K}_i), q_i = 0, 1, \dots, p_i - 1\} \cup \bigcup_{j=0}^{\eta(\phi_0)+1} \{\sigma^l(it(d_j)), l = 0, 1, \dots, k\}, \quad (3.5)$$

onde d_j , $j = 0, 1, \dots, \eta(\phi_0) + 1$, são os valores críticos de ϕ_0 . Além disso, existe $N \in \mathbb{N}$ para cada k tal que $v(\phi_k) = v(\phi_{k+j})$ com $k > N$, $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam c_i , $i = 1, 2, \dots, m$, os pontos críticos da aplicação f . No Corolário 3.3, provamos que todos os pontos críticos de $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, são obtidos de duas maneiras:

- (i) um ponto crítico de ϕ_{k-1} é um ponto crítico de ϕ_k .
- (ii) qualquer ponto crítico de ϕ_k que não é um ponto crítico de ϕ_{k-1} é um ponto y tal que $\phi_{k-1}(y) = c_i$ para algum $i = 1, \dots, m$.

Portanto, da alínea (i) os valores críticos de ϕ_k correspondem à imagem por f dos valores críticos de ϕ_{k-1} .

Da alínea (ii), os novos valores críticos de ϕ_k são sempre $f(c_i)$, $i = 1, \dots, m$. Portanto, os valores críticos de ϕ_k são pontos no conjunto

$$\bigcup_{j=0}^{\eta(\phi_0)+1} \{f^l(d_j), l = 0, 1, \dots, k\}$$

ou pontos no conjunto

$$\bigcup_{i=1}^m \{f^k(c_i), k \in \mathbb{N}\}.$$

Em termos de itinerários, e recordamos que $it(f^k(x)) = \sigma^k(it(x))$, para qualquer $x \in I$, os itinerários dos valores críticos de ϕ_k estão no conjunto

$$\bigcup_{i=1}^m \{\sigma^{q_i}(\mathcal{K}_i), q_i = 0, 1, \dots, p_i - 1\} \cup \bigcup_{j=0}^{\eta(\phi_0)+1} \{\sigma^l(it(d_j)), l = 0, 1, \dots, k\}.$$

Como consideramos os pontos periódicos c_i , $i = 1, \dots, m$, temos que o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^m \{f^k(c_i), k \in \mathbb{N}_0\}$$

é finito. Em particular, o conjunto

$$\bigcup_{i=1}^m \{f^k(c_i), k = 0, 1, \dots, p_i - 1\}$$

é finito. Para um $k \in \mathbb{N}_0$ fixo, temos que o número de valores críticos distintos de uma certa função ϕ_k é $v(\phi_k) \leq p_1 + \dots + p_m + v(\phi_0)$ e $v(\phi_k) \leq v(\phi_{k+1})$. Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(\phi_k) = p_1 + \dots + p_m + v(\phi_0).$$

■

Em seguida apresentamos um exemplo para ilustrar o resultado anterior.

Exemplo 3.15 Consideramos a aplicação trimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((412C_1)^\infty, 1^\infty, (412C_1)^\infty)$ (com o alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3, C_3, 4\}$), que é dada aproximadamente pela expressão analítica $f(x) = -7.97544x^4 + 7.97544x^2 - 1$, ver a Figura 3.16. Consideramos a função inicial $\phi_0 \in \mathcal{A}$ dada pela expressão analítica $\phi_0(x) = -0.075 \cos(2\pi x) + 0.75$, cujo itinerário é dado aproximadamente por $\underline{it}(\phi_0) = (342424\dots, 444141\dots, 342424\dots)$. De acordo com a Proposição 3.14, os itinerários dos valores críticos de ϕ_k , $k \in \mathbb{N}_0$ pertencem ao conjunto

$$\begin{aligned} & \{\sigma^q((412C_1)^\infty), q = 0, 1, 2, 3\} \cup \{1^\infty\} \cup \{\sigma^l(342424\dots), \sigma^l(444141\dots), l = 0, 1, \dots, k\} = \\ & = \{(412C_1)^\infty, (12C_14)^\infty, (2C_141)^\infty, (C_1412)^\infty, 1^\infty, \sigma^l(342424\dots), \sigma^l(444141\dots), l = 0, 1, \dots, k\}, \end{aligned}$$

ver a Figura 3.17.

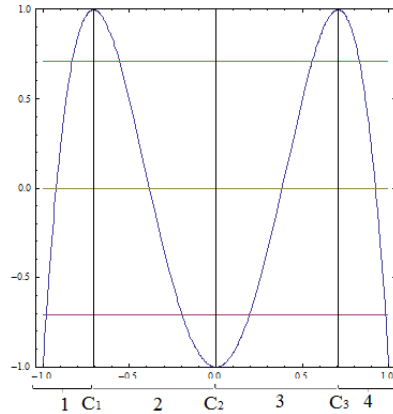


Figura 3.16: Gráfico de f cuja expressão analítica é dada aproximadamente por $f(x) = -7.97544x^4 + 7.97544x^2 - 1$. As linhas horizontais representam os pontos críticos $c_1 = -0.707107\dots$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0.707107\dots$, simbolicamente dados por C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente. Os símbolos do alfabeto $\{1, C_1, 2, C_2, 3, C_3, 4\}$ estão representados no eixo horizontal do gráfico.

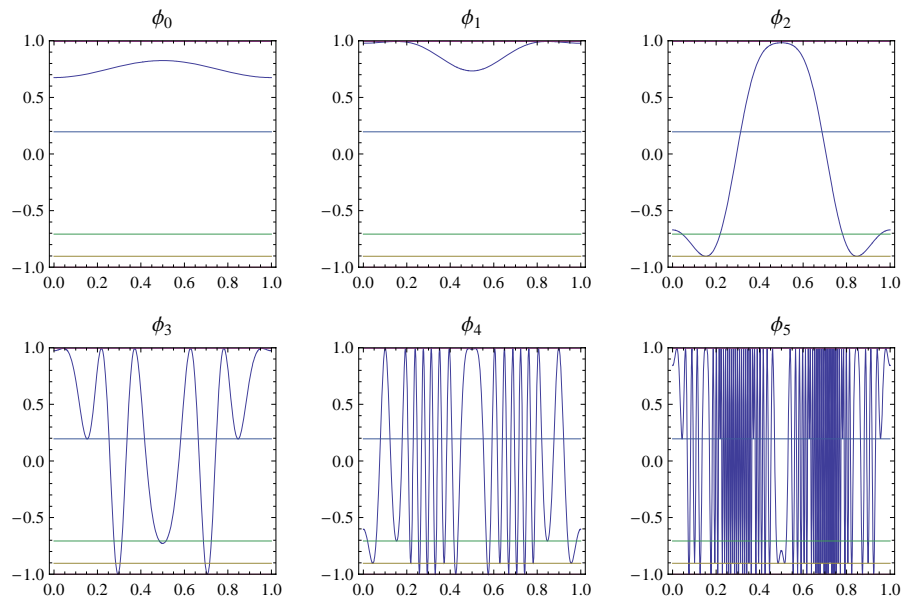


Figura 3.17: Gráficos das funções $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, com ϕ_0 dada por $\phi_0(x) = -0.075 \cos(2\pi x) + 0.75$ e f dada aproximadamente por $f(x) = -7.97544x^4 + 7.97544x^2 - 1$. Os itinerários dos novos pontos críticos de ϕ_k são dados por $(412C_1)^\infty$, $(2C_142)^\infty$, $(C_1412)^\infty$, $(12C_14)^\infty$ e 1^∞ e estão representadas pelas linhas horizontais por ordem decrescente respectivamente (de cima para baixo).

Em seguida apresentamos um resultado que relaciona o número de itinerários dos valores críticos distintos das funções iteradas ϕ_k obtidos por aplicação sucessiva de σ à sequência \mathcal{K}_i , para algum $i \in \{1, \dots, m\}$. Analogamente à Proposição 3.14 e pelas mesmas razões apresentadas anteriormente consideramos o caso em que as sequências de amassamento de f são periódicas.

No caso em que as sequências de amassamento de f não são todas periódicas não há acumulação dos itinerários dos valores críticos das iterações anteriores, apenas são considerados os valores críticos correspondentes aos novos pontos críticos de uma das iteradas anteriores. E como os novos pontos críticos aumentam com a iteração k obtemos o conjunto em (3.5).

Sejam $(i_1 \dots i_p)^\infty$ uma sequência periódica de período p em Σ e $N_{(i_1 \dots i_p)^\infty}(\phi)$ o número de vezes que $(i_1 \dots i_p)^\infty$ ocorre como itinerário de um valor crítico de $\phi \in \mathcal{A}$.

Proposição 3.16 *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação m -modal, $\Lambda \subset I$ a bacia de atracção de f e $\phi_0 \in \mathcal{A}$ tal que $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ (com $\phi_0 \notin \mathcal{A}_c$) e $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Se as sequências de amassamento de f , \mathcal{K}_i , são periódicas de período p_i , então para cada $k \in \mathbb{N}_0$, temos*

$$N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k) \leq N_{\sigma^r(\mathcal{K}_i)}(\phi_k),$$

para $q > r$, com $r, q = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Demonstração. Como definido anteriormente, $N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)$ é o número de vezes que $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$ ocorre como o itinerário de um valor crítico de $\phi_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}_0$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e algum $q \in \{0, 1, \dots, p_i - 1\}$. Se o itinerário de alguns valores críticos de ϕ_k é $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$ então o itinerário destes valores críticos de ϕ_{k-q} é \mathcal{K}_i .

Como \mathcal{K}_i , são sequências periódicas de período p_i , temos

$$\sigma^q(\mathcal{K}_i) = \sigma^{q+np_i}(\mathcal{K}_i), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Neste caso, os valores críticos de ϕ_k cujo itinerário é $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$ correspondem aos novos pontos críticos que aparecem na iteração de ordem $k - (q + np_i)$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$, cujos itinerários são \mathcal{K}_i . Estes valores críticos correspondem às pré-imagens admissíveis por f (do ponto crítico c_i) de ordem $k - 1 - (q + np_i)$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$. E como $q > r$, então

$$k - 1 - (q + np_i) < k - 1 - (r + np_i).$$

Sendo assim, o número de pré-imagens admissíveis de ordem $k - 1 - (q + np_i)$ é inferior ou igual ao número de pré-imagens de ordem $k - 1 - (r + np_i)$ quando o número de voltas de $f^{k-(q+np_i)}$ é inferior ou igual ao número de voltas $f^{k-(r+np_i)}$. Portanto,

$$N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k) \leq N_{\sigma^r(\mathcal{K}_i)}(\phi_k), \quad q > r,$$

com $r, q = 0, 1, 2, \dots, p_i - 1, i = 1, 2, \dots, m$. ■

No exemplo que se ilustramos o resultado anterior.

Exemplo 3.17 Consideramos a aplicação bimodal $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((333C_1)^\infty, (111C_2)^\infty)$, que é dada aproximadamente pela expressão analítica $f(x) = 3.99193x^3 - 2.99193x$. Consideramos ϕ_0 da classe \mathcal{A} cujo itinerário é $\underline{it}(\phi_0) = ((3222)^\infty, (23)^\infty)$. De acordo com a Proposição 3.14, para qualquer $\phi_k \in \mathcal{A}$, $k \in$

\mathbb{N}_0 , temos que os itinerários dos valores críticos de ϕ_k pertencem ao conjunto

$$\begin{aligned} & \{\sigma^l((333C_1)^\infty), l = 0, 1, 2, 3\} \cup \{\sigma^l((111C_2)^\infty), l = 0, 1, 2, 3\} \cup \{\sigma^k((3222)^\infty), \sigma^k((23)^\infty)\} = \\ & = \{(111C_2)^\infty, (11C_21)^\infty, (1C_211)^\infty, (C_1333)^\infty, (23)^\infty, (2322)^\infty, (2223)^\infty, (2232)^\infty, (C_2111)^\infty, \\ & (3C_133)^\infty, (32)^\infty, (3222)^\infty, (33C_13)^\infty, (333C_1)^\infty\}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.16, podemos afirmar que

$$N_{(C_1333)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(3C_133)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(33C_13)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(333C_1)^\infty}(\phi_k)$$

e

$$N_{(C_2111)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(1C_211)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(11C_21)^\infty}(\phi_k) \leq N_{(111C_2)^\infty}(\phi_k).$$

De facto, temos

$N_{(C_1333)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(3C_133)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(33C_13)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(333C_1)^\infty}(\phi_k)$
3459	9996	28891	83500

Tabela 3.1: A tabela apresenta o número de vezes que $\sigma^q((333C_1)^\infty)$ ocorre como o itinerário de um valor crítico de ϕ_{14} , $N_{\sigma^q((333C_1)^\infty)}(\phi_{14})$, $q = 0, 1, 2, 3$.

$N_{(C_2111)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(1C_211)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(11C_21)^\infty}(\phi_k)$	$N_{(111C_2)^\infty}(\phi_k)$
3459	9999	28891	83497

Tabela 3.2: A tabela apresenta o número de vezes que $\sigma^q((111C_2)^\infty)$ ocorre como o itinerário de um valor crítico de ϕ_{14} , $N_{\sigma^q((111C_2)^\infty)}(\phi_{14})$, $q = 0, 1, 2, 3$.

3.4.1 Algoritmo e resultados numéricos

No âmbito do nosso estudo sobre a evolução e a distribuição dos valores críticos das funções iteradas $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ construímos e analisamos histogramas com apresentação gráfica da distribuição das frequências relativas dos valores críticos distintos correspondentes aos novos pontos críticos de ϕ_k . Com o intuito de determinar os itinerários de todos os valores críticos de uma função iterada ϕ_n (para algum n inteiro positivo fixo) cujas frequências relativas são apresentadas em histogramas, desenvolvemos um algoritmo que é apresentado em seguida. Este algoritmo é desenvolvido tomando em conta a definição da aplicação deslocamento generalizado \underline{g} e apenas com conhecimento do invariante de amassamento de uma aplicação bimodal f e dos itinerários dos valores críticos de uma dada função inicial ϕ_0 da classe \mathcal{A} .

Consideramos as seguintes designações:

1, C_1 , 2, C_2 e 3: símbolos do alfabeto da aplicação bimodal f

K_1 e K_2 : sequências finitas de símbolos do alfabeto de f que designam as sequências de amassamento periódicas da aplicação bimodal f

X_0 : vector contendo sequências finitas de símbolos do alfabeto que designam os itinerários dos valores críticos de ϕ_0

n : número inteiro positivo que designa o número máximo de iterações da função ϕ_0 por f

Y : vector contendo os itinerários dos valores críticos de ϕ_k , $1 \leq k \leq n$

L : conjunto contendo a acumulação dos vectores Y até à ordem $k = n$

i : ordem de iteração, $1 \leq i \leq n$

Z : vector contendo os itinerários dos valores críticos obtidos até à ordem i

$|Z|$: comprimento do vector Z

j : posição do elemento no vector Z

$Z[j]$: j -ésimo elemento do vector Z

h : comprimento do vector Z em cada iteração i

σ : aplicação deslocamento usual σ

Algoritmo 3.18 (*Cálculo dos itinerários dos valores críticos da função ϕ_n*)

Sejam K_1, K_2, X_0 e n as entradas, L e Y as saídas.

Passo 0 Faz $L = \{\}$, $Z = X_0$ e $i = 1$.

Passo 1. Faz $Y = \{\}$, calcula $|Z|$ e acrescenta a sequência $\sigma(Z[1])$ ao vector Y . Faz $j = 1$ e passa para o **Passo 2**.

Passo 2. Se $j \leq |Z| - 1$ então designa por y o primeiro símbolo de $Z[j]$ e por z o primeiro símbolo de $Z[j + 1]$, e passa ao **Passo 3**. Caso contrário, passa ao **Passo 9**.

Passo 3. Se $y = 1$ e $z = C_2$ (ou $z = 2$) então acrescenta K_1 ao vector Y e o $\sigma(Z[j + 1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**. Caso contrário, passa ao **Passo 4**.

Passo 4. Se $y = 3$ e $z = C_1$ (ou $z = 2$) então acrescenta K_2 ao vector Y e o $\sigma(Z[j + 1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**. Caso contrário, passa ao **Passo 5**.

Passo 5. Se $y = C_1$ (ou $y = 2$) e $z = 3$ então acrescenta K_2 ao vector Y e o $\sigma(Z[j + 1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**. Caso contrário, passa ao **Passo 6**.

Passo 6. Se $y = C_2$ (ou $y = 2$) e $z = 1$ então acrescenta K_1 ao vector Y e o $\sigma(Z[j + 1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**. Caso contrário, passa ao **Passo 7**.

Passo 7. Se $y = 1$ e $z = 3$ então acrescenta K_1 e K_2 ao vector Y e o $\sigma(Z[j+1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**. Caso contrário, passa ao **Passo 8**.

Passo 8. Se $y = 3$ e $z = 1$ então acrescenta K_2 e a K_1 ao vector Y e o $\sigma(Z[j+1])$, faz $j = j + 1$ e volta ao **Passo 2**.

Passo 9. Acrescenta o vector Y ao conjunto L e faz $Z = Y$. Se $i = n$ o algoritmo termina senão faz $i = i + 1$ e volta ao **Passo 1**.

Utilizando o Algoritmo 3.18, calculamos os itinerários de ϕ_k , para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Posteriormente ordenamos os itinerários dos valores críticos distintos de ϕ_k , de acordo com a ordenação simbólica apresentada na Secção 1.2. Em seguida, calculamos numericamente a frequência relativa dos itinerários de cada valor crítico distinto de ϕ_k . Com estas frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos, construímos um histograma.

Este algoritmo, que foi desenvolvido para aplicações bimodais, pode ser generalizado para qualquer aplicação m -modal, desde que se considere os símbolos do alfabeto da aplicação m -modal e se adapte os casos entre o **Passo 3** e o **Passo 8** que correspondem à definição da aplicação deslocamento generalizado $\underline{\sigma}$.

Com o objectivo de obter um número finito de valores críticos distintos de ϕ_k , para algum $k \in \mathbb{N}$, vamos considerar exemplos com sequências de amassamento de f periódicas e os itinerários dos valores críticos de ϕ_0 periódicos. Notamos que as entradas K_1 , K_2 e X_0 são constituídas por sequências finitas de símbolos do alfabeto de f , pois correspondem à parte periódica dos itinerários que se repete. Para o caso em que sequências de amassamento de f não são todas periódicas ou o caso em que os valores críticos de ϕ_0 não são todos periódicos apenas temos conhecimento dos itinerários dos valores críticos das funções iteradas da classe \mathcal{A} por f até ordem de iteração k e temos que explicitar todos

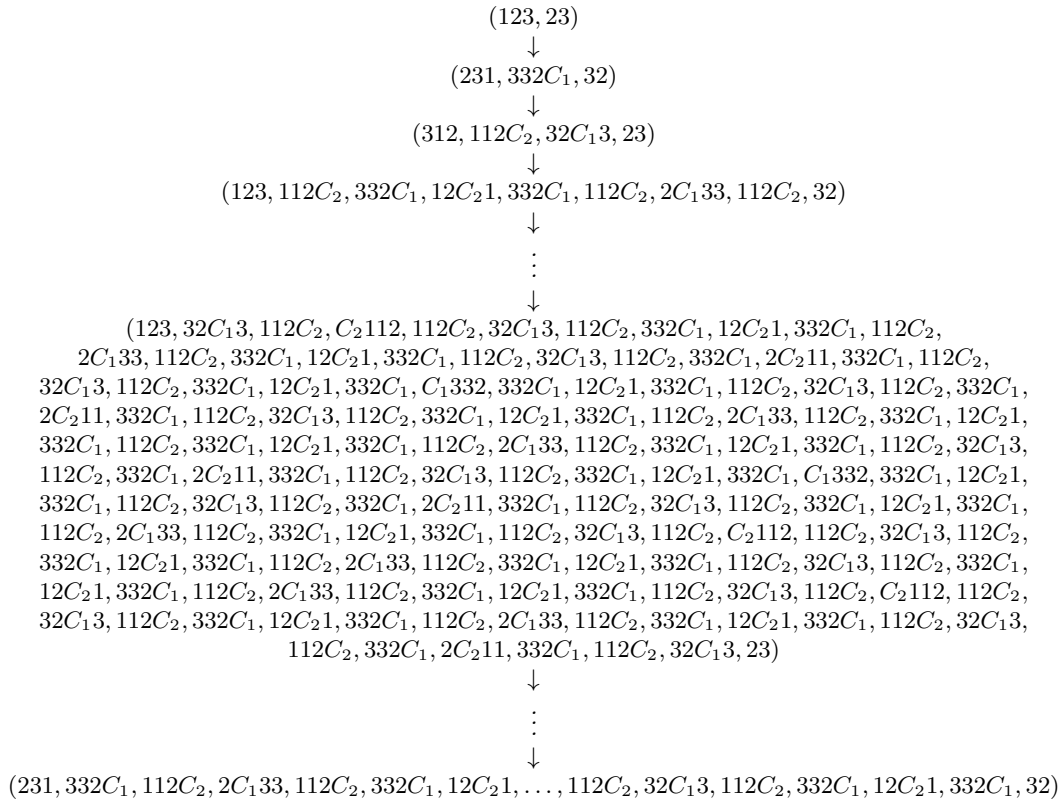
os k primeiros símbolos da sequência de amassamento não periódica ou do itinerário do valor crítico de ϕ_0 não periódico consoante o caso.

No exemplo seguinte ilustramos uma implementação do Algoritmo 3.18 no programa *Mathematica 6.0*.

Exemplo 3.19 Consideramos uma aplicação bimodal f com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((332C_1)^\infty, (112C_1)^\infty)$ e uma função $\phi_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\underline{it}(\phi_0) = ((312)^\infty, (32)^\infty)$. Considerando

$$K_1 = 332C_1, K_2 = 112C_2, X_0 = \{312, 32\} \text{ e } n = 14,$$

obtemos 181369 valores críticos da função $\phi_{14} = f^{14} \circ \phi_0$ e os seguintes itinerários $\underline{it}(\phi_k)$, para $k = 1, 2, 3, \dots, 7, \dots, 14$, dados por



Recordamos que $N_{i^{(j)}}(\phi)$ é o número de vezes que $i^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, v(\phi_k)$, ocorre como itinerário de valores críticos de $\phi \in \mathcal{A}$. Definimos a frequência relativa por

$$H_{i^{(j)}}(\phi_k) := \frac{N_{i^{(j)}}(\phi_k)}{\eta(\phi_k) + 2}, \quad j = 0, 1, \dots, v(\phi_k),$$

onde $i^{(j)}$ é o itinerário do j -ésimo valor crítico de ϕ_k . Estes valores $H_{i^{(j)}}$ variam entre 0 e 1, e verificam a seguinte igualdade

$$H_{i^{(0)}} + H_{i^{(1)}} + \dots + H_{i^{(v(\phi_k))}} = 1.$$

Denotamos por H o conjunto dos valores $H_{i^{(j)}}(\phi_k)$, $j = 0, 1, \dots, v(\phi_k)$ e construímos histogramas usando os valores $H_{i^{(j)}}(\phi_k)$, $j = 0, 1, \dots, v(\phi_k)$.

Em seguida apresentamos um exemplo que ilustra a construção de um histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos correspondentes aos novos pontos críticos de uma função iterada ϕ_k .

Exemplo 3.20 Consideramos a aplicação bimodal $f : I \rightarrow I$ com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((333C_1)^\infty, (122C_2)^\infty)$. Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}$ a função tal que $\underline{it}(\phi_0) = ((313)^\infty, (23)^\infty)$.

Os itinerários dos valores críticos correspondentes aos novos pontos críticos de $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$, com ordenação simbólica são dados por $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$, $q = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, isto é,

$$\{(122C_2)^\infty, (C_1333)^\infty, (22C_21)^\infty, (2C_212)^\infty, (C_2122)^\infty, (3C_133)^\infty, (33C_13)^\infty, (333C_1)^\infty\}$$

e os respectivos valores de $N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15})$, $q = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, são dados no conjunto

$$\{122469, 6699, 20531, 50100, 8389, 16323, 39934, 97471\}.$$

Os valores das frequências relativas

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15}) = \frac{N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15})}{\eta(\phi_{15}) + 2},$$

com $\eta(\phi_{15}) = 361918$, $q = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, de acordo com ordenação simbólica, são

dados no conjunto

$$H = \{0.338391 \dots, 0.0185098 \dots, 0.0567286 \dots, 0.13843 \dots, 0.0231794 \dots, 0.0451016 \dots, \\ 0.110341 \dots, 0.269319 \dots \}$$

e são representados no histograma da Figura 3.18.

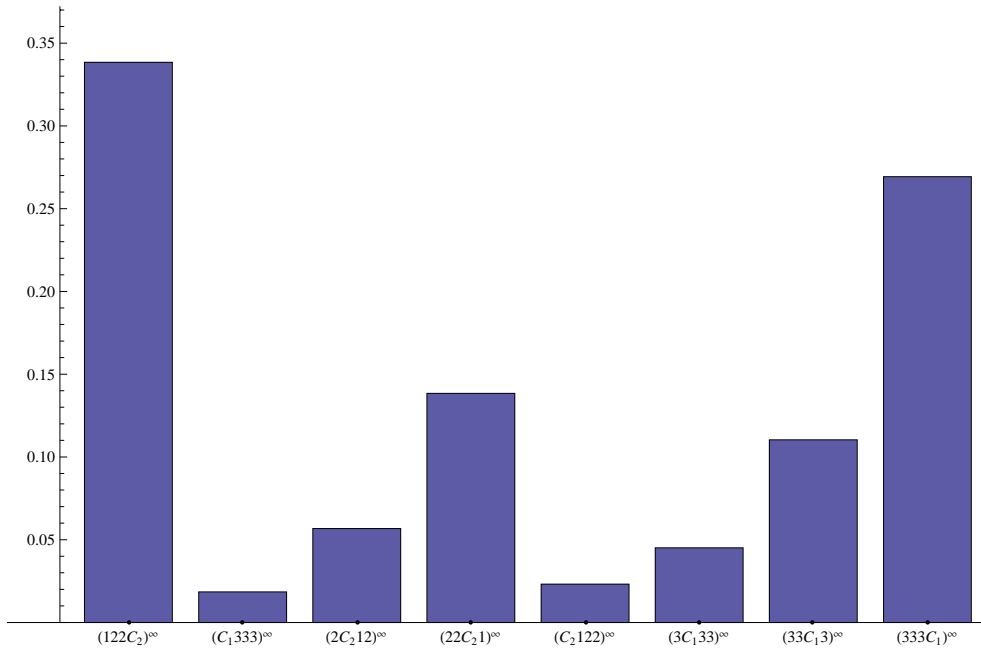


Figura 3.18: Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{15} = f^{15} \circ \phi_0$ cujos itinerários são $\sigma^q((333C_1)^\infty)$, $\sigma^q((122C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{15} .

Em seguida apresentamos um resultado numérico que relaciona as frequências relativas $H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)$ dos itinerários dos valores críticos de ϕ_k dados por $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 2$, $i = 1, \dots, m$.

Consideramos uma aplicação bimodal f com número de crescimento $s(f)$, $\Lambda \subset I$ a bacia de atracção de f e $\phi_0 \in \mathcal{A}$ tal que $Im(\phi_0) \not\subset \Lambda$ e $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Se as sequências de amassamento de f são periódicas de tipo crítico $\mathcal{K}_i = (K_1 K_2 \dots K_{p_i-1} C_i)^\infty$, então

$$\frac{H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)}{H_{\sigma^{q+n}(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)} \rightarrow s^n(f), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

$q = 0, 1, \dots, p_i - 2$, $n = 1, 2, \dots, p_i - 1$, $i = 1, \dots, m$.

De forma sucinta, podemos explicar o resultado numérico em (3.6), relacionando-o com a taxa de crescimento dos pontos críticos. No Teorema 3.11, estabelecemos uma relação entre a taxa de crescimento do número de pontos críticos de ϕ_k e o número de crescimento de f , $s(f)$. Como o crescimento do número dos pontos críticos está relacionado com o crescimento de pré-imagens por f dos pontos críticos de f , c_i , $i = 1, \dots, m$, tem-se que o crescimento do número de cada valor crítico distinto que resulta da sequência de amassamento \mathcal{K}_i está relacionado com o crescimento do número dos pontos críticos correspondentes às pré-imagens por f do ponto crítico de f , c_i , para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

No Exemplo 3.21 e no Exemplo 3.22 ilustramos o resultado em (3.6) considerando o mesmo itinerário para ϕ_0 e os invariantes de amassamento $\mathcal{K}_f = ((332C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$ e $\mathcal{K}_f = ((32C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$, respectivamente. Pretendemos com a escolha destes invariantes de amassamento de f , com número de crescimento $s(f)$ diferentes, analisar as

frequências relativas dos novos valores críticos distintos quando alteramos um símbolo (por exemplo, o símbolo 3) na sequência de amassamento \mathcal{K}_1 . Nestes exemplos, estamos interessados em analisar apenas os itinerários dos valores críticos correspondentes aos novos pontos críticos das funções iteradas até ordem k que resultam das sequências de amassamento de f , pois apenas estes valores críticos crescem em número com iterações. Notamos que as frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos de ϕ_k obtidas no Exemplo 3.21 (com $s(f) = 2.76929\dots$) e no Exemplo 3.22 (com $s(f) = 2.4830\dots$) correspondem às iterações de ordem $k = 15$ e $k = 17$, respectivamente. Este valores de k são suficientes para ilustrar o resultado (3.6) pois para valores superiores a k obtemos as mesmas frequências relativas dos itinerários dos valores críticos.

Exemplo 3.21 Consideramos a aplicação bimodal $f : I \rightarrow I$ com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((332C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$. Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}$ uma função inicial tal que

$$\underline{it}(\phi_0) = ((3132)^\infty, (32)^\infty).$$

As sequências da partição do intervalo I são

$$\begin{aligned} x_{11} &= 32C_13, & x_{12} &= 2C_133, & x_{13} &= C_1332, & x_{14} &= 332C_1, \\ x_{21} &= 12C_21, & x_{22} &= 2C_211, & x_{23} &= C_2112, & x_{24} &= 112C_2. \end{aligned}$$

Colocadas por ordem crescente, de acordo com a ordenação simbólica, obtemos as desigualdades

$$x_{24} \prec x_{21} \prec x_{13} \prec x_{22} \prec x_{12} \prec x_{23} \prec x_{11} \prec x_{14},$$

donde resultam os subintervalos

$$I_1 = [x_{24}, x_{21}], \quad I_2 = [x_{21}, x_{13}], \quad I_3 = [x_{13}, x_{22}], \quad I_4 = [x_{22}, x_{12}],$$

$$I_5 = [x_{12}, x_{23}], \quad I_6 = [x_{23}, x_{11}], \quad I_7 = [x_{11}, x_{14}].$$

Agora, procurando a imagem de cada uma das sequências pela aplicação deslocamento, obtemos as igualdades

$$f(I_1) = I_2 \cup I_3, \quad f(I_2) = I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7, \quad f(I_3) = I_6 \cup I_7, \quad f(I_4) = I_3 \cup I_4 \cup I_5,$$

$$f(I_5) = I_1 \cup I_2, \quad f(I_6) = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4, \quad f(I_7) = I_5 \cup I_6.$$

Donde, obtemos a matriz de transição 7×7 associada ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O raio espectral da matriz A é dado por $\lambda_{max} = 2.76929\dots$ e, portanto, o número de crescimento de f é igual a $s(f) = 2.76929\dots$

Os itinerários dos valores críticos correspondentes aos novos pontos críticos da função $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$ são dados por $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, isto é, com ordenação simbólica pertencem ao conjunto

$$\{(112C_2)^\infty, (12C_21)^\infty, (C_1332)^\infty, (2C_211)^\infty, (2C_133)^\infty, (C_2112)^\infty, (32C_13)^\infty, (332C_1)^\infty\}$$

e os respectivos valores de $N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15})$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, são

$$\{76264, 27512, 3584, 9948, 9936, 3596, 27552, 76224\}.$$

Os valores das frequências relativas

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15}) = \frac{N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15})}{\eta(\phi_{15}) + 2},$$

com $\eta(\phi_{15}) = 234618$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, de acordo com a ordenação simbólica, são dados no seguinte conjunto

$$H = \{0.325059 \dots, 0.117264 \dots, 0.0155276 \dots, 0.0424012 \dots, 0.0423501 \dots, 0.0153272 \dots, \\ 0.117434 \dots, 0.324888 \dots \}$$

e são apresentados no histograma da Figura 3.19. Além disso, temos

$$\frac{H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)}{H_{\sigma^{q+n}(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)} \rightarrow s^n(f), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

$q = 0, 1, \dots, p_i - 2$, $n = 1, 2, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$.

Para $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$, temos

$$\frac{H_{\mathcal{K}_1}(\phi_{15})}{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 2.76655 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 2.7696 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 2.77232 \dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_1}(\phi_{15})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 7.6715 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 7.6875 \dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_1}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_1)}(\phi_{15})} = 21.2679 \dots,$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{15})}{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 2.77203 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 2.76558 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 2.76641 \dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{15})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 7.66626 \dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 7.65072 \dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{15})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_2)}(\phi_{15})} = 21.208 \dots,$$

com $s(f) = 2.76929 \dots$, $s^2(f) = 7.66898 \dots$ e $s^3(f) = 21.2376 \dots$

Notamos que devido à simetria das sequências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$, isto é, o símbolo 3 numa sequência de amassamento corresponde ao símbolo 1 noutra sequência de amassamento e o símbolo 2 numa sequência de amassamento corresponde ainda ao símbolo 2 noutra sequência de amassamento, obtemos

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_1)}(\phi_k) = H_{\sigma^q(\mathcal{K}_2)}(\phi_k), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

$q = 0, 1, 2, 3$. Podemos observar que o resultado obtido em (3.7) relaciona as frequências relativas dos itinerários dos valores críticos obtidos por aplicação sucessiva de σ para mesma sequência de amassamento \mathcal{K}_i , para cada $i = 1, 2$, enquanto que o resultado numérico obtido em (3.8) relaciona as frequências relativas dos itinerários dos valores críticos obtidos por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento diferentes, neste caso relacionamos $\sigma^q(\mathcal{K}_1)$ com $\sigma^q(\mathcal{K}_2)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Na Figura 3.19, apresentamos um histograma com as frequências relativas $H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{15})$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$. Podemos observar que no histograma temos que a distribuição dos valores críticos é simétrica e com dois picos nas sequências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$.

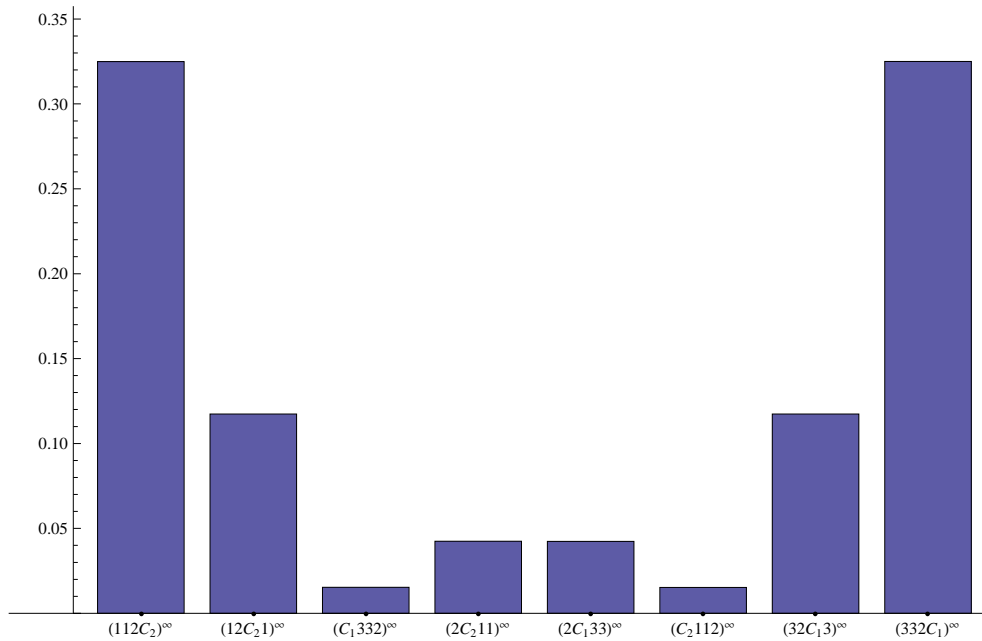


Figura 3.19: Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{15} = f^{15} \circ \phi_0$ dados por $\sigma^q((332C_1)^\infty)$, $\sigma^q((112C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{15} .

No exemplo seguinte analisamos o que acontece com as frequências relativas dos itinerários dos valores críticos das funções iteradas ϕ_k quando alteramos por exemplo a sequência de amassamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ para $\mathcal{K}_1 = (32C_1)^\infty$, removendo apenas o símbolo 3 da sequência de amassamento \mathcal{K}_1 do Exemplo 3.21, considerando o mesmo itinerário generalizado para a função inicial ϕ_0 e a mesma sequência de amassamento $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ do Exemplo 3.21.

Exemplo 3.22 Consideramos a aplicação bimodal $f : I \rightarrow I$ com o invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = ((32C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$. Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}$ uma função inicial tal que

$$\underline{it}(\phi_0) = ((3132)^\infty, (32)^\infty).$$

As seqüências da partição do intervalo I são

$$\begin{aligned} x_{11} &= 2C_13, & x_{12} &= C_132, & x_{13} &= 32C_1, \\ x_{21} &= 12C_21, & x_{22} &= 2C_211, & x_{23} &= C_2112, & x_{24} &= 112C_2. \end{aligned}$$

Colocadas por ordem crescente, de acordo com a ordenação simbólica, obtemos as desigualdades

$$x_{24} \prec x_{21} \prec x_{12} \prec x_{22} \prec x_{11} \prec x_{23} \prec x_{13},$$

donde resultam os subintervalos

$$\begin{aligned} I_1 &= [x_{24}, x_{21}], & I_2 &= [x_{21}, x_{12}], & I_3 &= [x_{12}, x_{22}], \\ I_4 &= [x_{22}, x_{11}], & I_5 &= [x_{11}, x_{23}], & I_6 &= [x_{23}, x_{13}]. \end{aligned}$$

Agora, procurando a imagem de cada uma das seqüências pela aplicação deslocamento, obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} f(I_1) &= I_2 \cup I_3, & f(I_2) &= I_4 \cup I_5 \cup I_6, & f(I_3) &= I_7, \\ f(I_4) &= I_3 \cup I_4 \cup I_5, & f(I_5) &= I_1 \cup I_2, & f(I_6) &= I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4. \end{aligned}$$

Obtemos a matriz de transição 6×6 associada ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f , dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O raio espectral da matriz A é dado por $\lambda_{max} = 2.4830\dots$ e, portanto, o número de crescimento de f é igual a $s(f) = 2.4830\dots$

Os itinerários dos valores críticos correspondentes aos novos pontos críticos da função $\phi_k = f^k \circ \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$ são dados por $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, isto é, com ordenação simbólica pertencem ao conjunto

$$\{(112C_2)^\infty, (12C_21)^\infty, (C_132)^\infty, (2C_211)^\infty, (2C_13)^\infty, (C_2112)^\infty, (32C_1)^\infty\}$$

e os respectivos valores de $N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{17})$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, são

$$\{54494, 21936, 10679, 8846, 26529, 3554, 65872\}.$$

Os valores das frequências relativas

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{17}) = \frac{N_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{17})}{\eta(\phi_{17}) + 2},$$

com $\eta(\phi_{17}) = 191910$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$, de acordo com ordenação simbólica, são dados no seguinte conjunto

$$H = \{0.283956\dots, 0.114304\dots, 0.0556459\dots, 0.0460945\dots, 0.138237\dots, 0.0185191\dots, \\ 0.343244\dots\}$$

e são apresentados no histograma da Figura 3.20. Além disso, temos

$$\frac{H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)}{H_{\sigma^{q+n}(\mathcal{K}_i)}(\phi_k)} \rightarrow s^n(f), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

$$q = 0, 1, \dots, p_i - 2, \quad n = 1, 2, \dots, p_i - 1, \quad i = 1, 2.$$

Para $\mathcal{K}_1 = (32C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ temos

$$\frac{H_{\mathcal{K}_1}(\phi_{17})}{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_1)}(\phi_{17})} = 2.48302\dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_1)}(\phi_{17})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_1)}(\phi_{17})} = 2.48422\dots,$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_1}(\phi_{17})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_1)}(\phi_{17})} = 6.16837\dots,$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{17})}{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 2.48423\dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 2.48610\dots, \quad \frac{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 2.48903\dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{17})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 6.1603\dots, \quad \frac{H_{\sigma^1(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})}{H_{\sigma^2(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 6.1722\dots$$

$$\frac{H_{\mathcal{K}_2}(\phi_{17})}{H_{\sigma^3(\mathcal{K}_2)}(\phi_{17})} = 15.3331\dots,$$

com $s(f) = 2.4830\dots$, $s^2(f) = 6.1653\dots$ e $s^3(f) = 15.3084\dots$

Neste exemplo, ao contrário do Exemplo 3.21, não temos simetria das seqüências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (32C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ e obtemos

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_2)}(\phi_k) < H_{\sigma^q(\mathcal{K}_1)}(\phi_k), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

$$q = 0, 1, \dots, \min\{p_1 - 1, p_2 - 1\}.$$

Em geral, se

$$H_{\mathcal{K}_2}(\phi_k) < H_{\mathcal{K}_1}(\phi_k),$$

então

$$H_{\sigma^q(\mathcal{K}_2)}(\phi_k) < H_{\sigma^q(\mathcal{K}_1)}(\phi_k), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

pois os itinerários $\sigma^q(\mathcal{K}_i)$ correspondem aos valores críticos obtidos nas iterações anteriores à iteração k . Na Figura 3.20, apresentamos um histograma com as frequências

relativas $H_{\sigma^q(\mathcal{K}_i)}(\phi_{17})$, $q = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, 2$. Observamos que no histograma temos que a distribuição dos valores críticos não é simétrica e temos dois picos nas sequências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (32C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$.

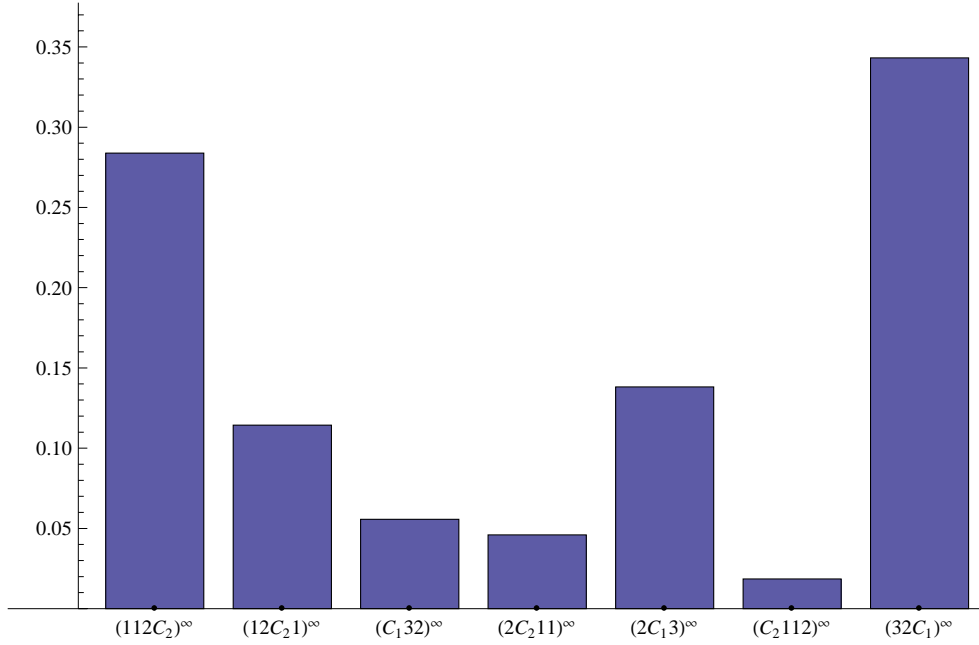


Figura 3.20: Histograma das frequências relativas dos itinerários dos valores críticos distintos da função $\phi_{17} = f^{17} \circ \phi_0$ dados por $\sigma^q((32C_1)^\infty)$, $\sigma^q((112C_2)^\infty)$, $q = 0, 1, 2, 3$. Notamos a ordenação simbólica dos itinerários dos valores críticos de ϕ_{17} .

Nota 3.23 Considerando um outro exemplo análogo ao Exemplo 3.22, analisamos as frequências relativas dos valores críticos das funções iteradas $\phi_k = f^k \circ \phi_0$ para o caso em que o invariante de amassamento de f é dado por $\mathcal{K}_f = ((332C_1)^\infty, (12C_2)^\infty)$ em vez de $\mathcal{K}_f = ((32C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$. Neste caso, temos o mesmo número de crescimento $s(f) = 2.4830\dots$ que o do Exemplo 3.22. Obtemos que as frequências relativas dos valores críticos de ϕ_k obtidos por aplicação sucessiva de σ à sequência de amassamento \mathcal{K}_2 são iguais às frequências relativas dos valores críticos de ϕ_k por aplicação sucessiva de σ

à sequência de amassamento \mathcal{K}_1 do Exemplo 3.22 e as frequências relativas dos valores críticos obtidos de \mathcal{K}_1 são iguais às frequências relativas dos valores críticos obtidos de \mathcal{K}_2 do Exemplo 3.22.

No trabalho futuro já iniciado, pretendemos estudar a relação entre as frequências relativas $H_{\sigma^q(\mathcal{K}_1)}(\phi_k)$ e $H_{\sigma^q(\mathcal{K}_2)}(\phi_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $q = 0, 1, \dots$, no caso geral em que \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 são sequências de amassamento periódicas não simétricas de uma aplicação bimodal. Também, achamos que seria interessante analisar a possível relação dessas frequências relativas com uma medida invariante de f que existe quando as sequências de amassamento de f são periódicas. Ainda, pretendemos analisar a evolução dos valores críticos das funções iteradas para o caso em que uma sequência de amassamento de f não é periódica. Neste caso, o número de valores críticos de ϕ_k vai crescer sempre com iteração k e pretendemos analisar o tipo de crescimento (exponencial ou não).

Capítulo 4

Sistemas de substituição associados ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T)

No Capítulo 3, consideramos o sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) para o caso em que o operador T é caracterizado por aplicações m -modais f e a este sistema dinâmico associamos o sistema dinâmico simbólico $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$ com o alfabeto finito cujos elementos são símbolos associados aos intervalos de monotonia e aos pontos críticos de f . Neste capítulo, apresentamos uma relação entre o sistema dinâmico $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$ e um novo tipo de sistema chamado sistema de substituição que será introduzido mais adiante. Este capítulo, pela sua natureza, é diferente dos capítulos anteriores no sentido em que para estes sistemas de substituição consideramos um novo alfabeto também finito cujos elementos são caracterizados pelas sequências de amassamento de f e por uma nova aplicação chamada aplicação de substituição que é induzida pela aplicação deslocamento generalizado $\underline{\sigma}$. Uma das vantagens em trabalhar com estes sistemas de substituição é que conseguimos um número de iterações muito superior ao conseguido com os métodos utilizados nos capítulos anteriores além do potencial de análise gráfica de todo o sistema.

Para a caracterização do nosso sistema de substituição consideramos apenas as aplicações m -modais f com sequências de amassamento periódicas e introduzimos uma subclasse \mathcal{A}_{per} que é constituída por funções ϕ da classe \mathcal{A} cujos valores críticos são pontos periódicos de f . Sendo as sequências de amassamento de f periódicas e ϕ_0 uma função da subclasse \mathcal{A}_{per} , todos os valores críticos de $\phi_k = T^k \phi_0$, $k \in \mathbb{N}$, são periódicos por f e existe um número finito de valores críticos distintos de ϕ_k para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e, ainda, a partir de uma certa ordem de iteração n este número finito é fixo e os valores críticos distintos de ϕ_k , $k \geq n$, são sempre os mesmos. A cada um dos itinerários destes valores críticos distintos de ϕ_k , $k \geq n$ fazemos corresponder um símbolo. Portanto, o conjunto destes símbolos é também finito e será considerado como o novo alfabeto denotado por \mathcal{S} sobre o qual definimos a aplicação substituição e caracterizamos um sistema de substituição induzido pelo sistema dinâmico simbólico $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$. Para estes sistemas de substituição utilizamos algumas notações e designações diferentes, por exemplo, usamos para o alfabeto a notação \mathcal{S} em vez de \mathcal{A} , para aplicação substituição a notação ζ em vez de $\underline{\sigma}$ para aplicação deslocamento generalizado, a designação *factor de uma sequência* em vez de *palavras admissíveis*, a designação *etapa* em vez de *iteração*, para o conjunto de todos os factores de sequências finitas a notação \mathcal{L} em vez de $\underline{\Sigma}$ e para o sistema de substituição a notação (\mathcal{L}, ζ) em vez de $(\underline{\Sigma}, \underline{\sigma})$. Nesta primeira secção deste capítulo, analisamos graficamente dois exemplos de sistemas de substituição com o mesmo alfabeto mas com algumas regras de substituição diferentes e apresentamos alguns exemplos que ilustram uma relação entre a taxa de crescimento dos símbolos do alfabeto nas etapas de substituição com a entropia topológica de f . Os resultados que são apresentados neste capítulo, encontram-se em [CRV 11c].

4.1 Sistemas de substituição associados a \mathcal{A}_{per}

Nesta secção, consideramos as aplicações m -modais f com sequências de amassamento periódicas e a subclasse \mathcal{A}_{per} das funções ϕ da classe \mathcal{A} cujos valores críticos são periódicos por f . Notamos que se f é topologicamente transitiva, então os pontos periódicos de f são densos no intervalo I e dada uma função $\tilde{\phi} \in \mathcal{A}$ podemos escolher $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ arbitrariamente próxima de $\tilde{\phi}$ (para uma métrica dada). Sendo assim, não se perde muito quando se considera a subclasse \mathcal{A}_{per} .

Considerando as funções dessa subclasse caracterizamos um sistema de substituição associado ao sistema dinâmico (\mathcal{A}_{per}, T) usando as sequências de amassamento periódicas como novos elementos num alfabeto finito.

Seja f uma aplicação m -modal do intervalo caracterizada pelo invariante de amassamento $\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$, onde \mathcal{K}_i são sequências de amassamento periódicas de período p_i , $i = 1, \dots, m$, e

$$\bigcup_{i=1}^m \left\{ \sigma^l(\mathcal{K}_i), l = 0, 1, \dots, p_i - 1 \right\}$$

o conjunto das sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento \mathcal{K}_i , $i = 1, \dots, m$. Consideramos as seguintes correspondências entre cada sequência simbólica $\sigma^l(\mathcal{K}_i)$, $l = 0, 1, \dots, p_i - 1$, $i = 1, \dots, m$, e um símbolo dadas por

$$\begin{aligned} \sigma^l(\mathcal{K}_1) &\rightarrow \boxed{l+1}, & l = 0, 1, \dots, p_1 - 1, \\ \sigma^l(\mathcal{K}_i) &\rightarrow \boxed{p_1 + \dots + p_{i-1} + l + 1}, & l = 0, 1, \dots, p_i - 1, i = 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

e o novo alfabeto dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{p_1}, \boxed{p_1 + 1}, \dots, \boxed{p_1 + p_2}, \dots, \boxed{p_1 + \dots + p_{m-1} + 1}, \dots, \boxed{p} \right\},$$

onde $p = p_1 + \dots + p_m$. Para simplificação da escrita vamos escrever o alfabeto \mathcal{S} da seguinte forma

$$\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \dots, \boxed{p}\}.$$

Denotamos por $\boxed{0}$ a palavra vazia ϵ e sejam

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\boxed{1}, \dots, \boxed{p}\}^k \cup \{\boxed{0}\}$$

o conjunto das palavras finitas de símbolos (ou blocos) do alfabeto \mathcal{S} e

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \{\boxed{1}, \boxed{p_1 + 1}, \boxed{p_1 + p_2 + 1}, \dots, \boxed{p_1 + \dots + p_{m-1} + 1}\},$$

o alfabeto contendo os símbolos do alfabeto \mathcal{S} associados às sequências simbólicas em (4.1) quando $l = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Seja $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ uma função com os valores críticos periódicos distintos d_j de período t_j , $j = 0, 1, \dots, \eta(\phi) + 1$. Consideramos as seguintes correspondências

$$\begin{aligned} \sigma^k(it(d_0)) &\rightarrow \boxed{V_{k+1}}, & k = 0, 1, \dots, t_0 - 1, \\ \sigma^k(it(d_j)) &\rightarrow \boxed{V_{t_0 + \dots + t_{j-1} + k + 1}}, & k = 0, 1, \dots, t_j - 1, \\ & & j = 1, \dots, \eta(\phi) + 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

e o seguinte alfabeto

$$\mathcal{S}(\phi) = \{\boxed{V_1}, \dots, \boxed{V_{t_0}}, \boxed{V_{t_0+1}}, \dots, \boxed{V_{t_0+t_1}}, \dots, \boxed{V_t}\},$$

onde $t = t_0 + \dots + t_{\eta(\phi)+1}$.

E obtemos o alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi)$ para o nosso sistema de substituição que é caracterizado em seguida.

Designamos por $\underline{\Sigma}_{per}$ o espaço das sequências simbólicas correspondentes aos itinerários dos valores críticos de $\phi \in \mathcal{A}_{per}$. Então, a restrição da aplicação deslocamento generalizado $\underline{\sigma}$ definida em (3.1) no espaço $\underline{\Sigma}_{per}$, $\underline{\sigma} : \underline{\Sigma}_{per} \rightarrow \underline{\Sigma}_{per}$ induz uma aplicação de substituição ζ dada por

$$\boxed{r} \boxed{s} \xrightarrow{\zeta} \chi(\boxed{r}) \boxed{u_1} \dots \boxed{u_j} \chi(\boxed{s}), \quad (4.3)$$

onde χ representa as seguintes regras de substituição

$$\begin{aligned} \boxed{1} &\xrightarrow{\chi} \boxed{2}, \boxed{2} \xrightarrow{\chi} \boxed{3}, \dots, \boxed{p_1} \xrightarrow{\chi} \boxed{1}, \\ \boxed{p_1 + 1} &\xrightarrow{\chi} \boxed{p_1 + 2}, \boxed{p_1 + 2} \xrightarrow{\chi} \boxed{p_1 + 3}, \dots, \boxed{p_1 + p_2} \xrightarrow{\chi} \boxed{p_1 + 1}, \\ &\vdots \\ \boxed{p_1 + \dots + p_{m-1} + 1} &\xrightarrow{\chi} \boxed{p_1 + \dots + p_{m-1} + 2}, \dots, \boxed{p_1 + \dots + p_m} \xrightarrow{\chi} \boxed{p_1 + \dots + p_{m-1} + 1}, \\ &\vdots \\ \boxed{V_1} &\xrightarrow{\chi} \boxed{V_2}, \boxed{V_2} \xrightarrow{\chi} \boxed{V_3}, \dots, \boxed{V_{t_0}} \xrightarrow{\chi} \boxed{V_1}, \\ \boxed{V_{t_0+1}} &\xrightarrow{\chi} \boxed{V_{t_0+2}}, \boxed{V_{t_0+2}} \xrightarrow{\chi} \boxed{V_{t_0+3}}, \dots, \boxed{V_{t_1}} \xrightarrow{\chi} \boxed{V_{t_0+1}}, \\ &\vdots \\ \boxed{V_{t_{\eta(\phi)+1}}} &\xrightarrow{\chi} \boxed{V_{t_{\eta(\phi)+2}}}, \dots, \boxed{V_t} \xrightarrow{\chi} \boxed{V_{t_{\eta(\phi)+1}}} \end{aligned}$$

para qualquer $\boxed{r}, \boxed{s} \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi))$, com $\boxed{r} \neq \boxed{s}$ e onde o bloco $\boxed{u_1} \dots \boxed{u_j}$ representa a palavra vazia $\boxed{0}$ ou representa um bloco formado pelos símbolos $\boxed{u_j}$, para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, pertencentes ao alfabeto $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$. De acordo com a definição da aplicação deslocamento generalizado $\underline{\sigma}$ definida em (3.1), o aparecimento desses símbolos $\boxed{u_j}$ dependem do primeiro elemento das sequências simbólicas (com o alfabeto \mathfrak{A}) que em (4.1) ou em (4.2) estão associadas aos símbolos \boxed{r} e \boxed{s} .

Seja \mathcal{L} a linguagem da substituição ζ e consideramos como sistema de substituição o par (\mathcal{L}, ζ) .

Nota 4.1 Por construção todos os símbolos do alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi)$ são periódicos por ζ , isto é, para cada $\boxed{j} \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi))$, existe um $k_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\zeta^{k_j}(\boxed{j}) = \boxed{j}.$$

Proposição 4.2 Seja $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ a substituição definida em (4.3), com o conjunto alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi)$. Então, os blocos da forma

$$\boxed{r \ r},$$

não podem ocorrer como factor de alguma seqüência em \mathcal{L} , para qualquer $\boxed{r} \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Suponhamos que o bloco $\boxed{r \ r}$ ocorre como um factor de alguma seqüência em \mathcal{L} , isto é, existe um bloco em \mathcal{S}^* tal que tal que $\zeta(\boxed{q \ s}) = \boxed{r \ r}$ que implica $\zeta(\boxed{q}) = \boxed{r}$ e $\zeta(\boxed{s}) = \boxed{r}$ e, portanto, $\boxed{q} = \boxed{s}$. Como $\boxed{q \ q}$ não pode ser associada a aplicação endereço generalizado de qualquer $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ uma vez que não pode haver dois valores críticos consecutivos (de ϕ) iguais, obtemos assim a afirmação. ■

Para o estudo e análise gráfica do nosso sistema de substituição, desenvolvemos um algoritmo que usando as regras de substituição em (4.3) determina o número total de cada símbolo do alfabeto deste sistema obtido em cada etapa de substituição a partir de um bloco inicial dado. Implementando este algoritmo no *Mathematica 6.0*, além de determinarmos o número total de símbolo do alfabeto do sistema obtido em cada etapa de substituição associamos, uma cor diferente a cada símbolo do alfabeto e analisamos graficamente o comportamento dinâmico de todo o sistema obtido para um número suficientemente grande de etapas.

Em seguida apresentamos um exemplo de modo a ilustrar um sistema de substituição. Neste exemplo, com o intuito de captar a essência deste sistema vamos considerar uma função inicial ϕ_0 da classe \mathcal{A}_{per} cujos valores críticos pertencem às órbitas dos pontos críticos de f , isto é, o itinerário generalizado $\underline{it}(\phi_0)$ é constituído por sequências simbólicas obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento de f . Deste modo, ao evitar os símbolos de tipo $\boxed{V_j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, reduzimos o número de símbolos envolvidos no sistema de substituição que em número não vão crescer com as etapas de substituição e obtemos então $\mathcal{S}(\phi_0) \subset \mathcal{S}$.

Exemplo 4.3 Consideramos a aplicação bimodal f caracterizada pelas sequências de amassamento periódicas $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (12C_2)^\infty$ (com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}_{per}$ a função inicial tal que

$$\underline{it}(\phi_0) = ((332C_1)^\infty, (32C_13)^\infty, (2C_133)^\infty, (332C_1)^\infty).$$

Considerando as correspondências em (4.1), as sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento são substituídas da seguinte forma

$$(332C_1)^\infty \rightarrow \boxed{1}, (32C_13)^\infty \rightarrow \boxed{2}, (2C_133)^\infty \rightarrow \boxed{3}, (C_1332)^\infty \rightarrow \boxed{4}, \quad (4.4)$$

$$(12C_2)^\infty \rightarrow \boxed{5}, (2C_21)^\infty \rightarrow \boxed{6}, (C_212)^\infty \rightarrow \boxed{7}$$

e temos

$$\begin{aligned} \boxed{1} &\rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{1}, \\ \boxed{5} &\rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{5}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Considerando as correspondências em (4.2), as sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ aos itinerários dos valores críticos de ϕ_0 são substituídas da seguinte forma

$$(332C_1)^\infty \rightarrow \boxed{V_1}, (32C_13)^\infty \rightarrow \boxed{V_2}, (2C_133)^\infty \rightarrow \boxed{V_3}, (C_1332)^\infty \rightarrow \boxed{V_4} \quad (4.6)$$

e temos

$$\boxed{V_1} \rightarrow \boxed{V_2} \rightarrow \boxed{V_3} \rightarrow \boxed{V_4} \rightarrow \boxed{V_1}. \quad (4.7)$$

Comparando (4.6) com (4.7) podemos concluir que neste caso temos $\boxed{V_1} = \boxed{1}$, $\boxed{V_2} = \boxed{2}$, $\boxed{V_3} = \boxed{3}$ e $\boxed{V_4} = \boxed{1}$. Neste caso, obtemos

$$\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}, \quad \mathcal{S}_K = \{\boxed{1}, \boxed{5}\} \text{ e } \mathcal{S}(\phi_0) = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}\},$$

donde temos $\mathcal{S}(\phi_0) \subset \mathcal{S}$.

De acordo com substituição definida em (4.3) a aplicação substituição $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é

definida do seguinte modo

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} \xrightarrow{\zeta} \boxed{2}, & \boxed{2} \xrightarrow{\zeta} \boxed{3}, & \boxed{3} \xrightarrow{\zeta} \boxed{4}, & \boxed{4} \xrightarrow{\zeta} \boxed{1}, \\ \boxed{5} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6}, & \boxed{6} \xrightarrow{\zeta} \boxed{7}, & \boxed{7} \xrightarrow{\zeta} \boxed{5}, & \\ \\ \boxed{01} \xrightarrow{\zeta} \boxed{02}, & \boxed{02} \xrightarrow{\zeta} \boxed{03}, & \boxed{03} \xrightarrow{\zeta} \boxed{04}, & \boxed{04} \xrightarrow{\zeta} \boxed{01}, \\ \boxed{05} \xrightarrow{\zeta} \boxed{06}, & \boxed{06} \xrightarrow{\zeta} \boxed{07}, & \boxed{07} \xrightarrow{\zeta} \boxed{05}, & \\ \\ \boxed{12} \xrightarrow{\zeta} \boxed{23}, & \boxed{31} \xrightarrow{\zeta} \boxed{452}, & \boxed{51} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6152}, & \boxed{71} \xrightarrow{\zeta} \boxed{52}, \\ \boxed{13} \xrightarrow{\zeta} \boxed{254}, & \boxed{32} \xrightarrow{\zeta} \boxed{453}, & \boxed{52} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6153}, & \boxed{72} \xrightarrow{\zeta} \boxed{53}, \\ \boxed{14} \xrightarrow{\zeta} \boxed{251}, & & \boxed{53} \xrightarrow{\zeta} \boxed{614}, & \boxed{73} \xrightarrow{\zeta} \boxed{54}, \\ \boxed{15} \xrightarrow{\zeta} \boxed{2516}, & \boxed{34} \xrightarrow{\zeta} \boxed{41}, & \boxed{54} \xrightarrow{\zeta} \boxed{61}, & \boxed{74} \xrightarrow{\zeta} \boxed{51}, \\ \boxed{16} \xrightarrow{\zeta} \boxed{257}, & \boxed{35} \xrightarrow{\zeta} \boxed{416}, & & \boxed{75} \xrightarrow{\zeta} \boxed{516}, \\ \boxed{17} \xrightarrow{\zeta} \boxed{25}, & \boxed{36} \xrightarrow{\zeta} \boxed{47}, & \boxed{56} \xrightarrow{\zeta} \boxed{617}, & \boxed{76} \xrightarrow{\zeta} \boxed{57}, \\ \boxed{21} \xrightarrow{\zeta} \boxed{32}, & \boxed{37} \xrightarrow{\zeta} \boxed{45}, & \boxed{57} \xrightarrow{\zeta} \boxed{61}, & \\ & \boxed{41} \xrightarrow{\zeta} \boxed{152}, & \boxed{61} \xrightarrow{\zeta} \boxed{752}, & \\ & \boxed{42} \xrightarrow{\zeta} \boxed{13}, & \boxed{62} \xrightarrow{\zeta} \boxed{753}, & \\ & \boxed{43} \xrightarrow{\zeta} \boxed{154}, & \boxed{63} \xrightarrow{\zeta} \boxed{74}, & \\ & & \boxed{64} \xrightarrow{\zeta} \boxed{75}, & \\ & & \boxed{65} \xrightarrow{\zeta} \boxed{716}, & \\ & \boxed{45} \xrightarrow{\zeta} \boxed{16}, & & \\ & \boxed{46} \xrightarrow{\zeta} \boxed{17}, & & \\ & \boxed{47} \xrightarrow{\zeta} \boxed{15}, & \boxed{67} \xrightarrow{\zeta} \boxed{75}. & \end{array} \quad (4.8)$$

Neste caso, os blocos que não podem ocorrer como factores de alguma sequência em \mathcal{L} são da forma $\boxed{1\ 1}$, $\boxed{2\ 2}$, $\boxed{3\ 3}$, $\boxed{4\ 4}$, $\boxed{5\ 5}$, $\boxed{6\ 6}$ e $\boxed{7\ 7}$. Ainda, os símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ são os novos símbolos não derivados dos símbolos anteriores que surgem nos novos blocos da nova etapa de substituição. Notamos que de acordo com as regras de substituição em (4.8) cada bloco $\boxed{r\ s}$ (com \boxed{r} , $\boxed{s} \in \mathcal{S}$ tal que $\boxed{r} \neq \boxed{s}$) é substituído na etapa seguinte por um novo bloco em que \boxed{r} e \boxed{s} são substituídos respectivamente por um novo símbolo em \mathcal{S} de acordo com (4.5). No entanto, quando temos um bloco constituído pelo menos três por símbolos, por exemplo o bloco $\boxed{2\ 4\ 7}$, aplicamos as regras de substituição em (4.8) considerando separadamente cada par de símbolos deste bloco, neste caso consideramos os pares $\boxed{2\ 4}$ e $\boxed{4\ 7}$, seguindo a ordem de esquerda para a direita e obtemos

$$\boxed{2\ 4} \rightarrow \boxed{3\ 5\ 1} \quad \text{e} \quad \boxed{4\ 7} \rightarrow \boxed{1\ 5}.$$

Como o símbolo $\boxed{4}$ é comum nos pares $\boxed{2\ 4}$ e $\boxed{4\ 7}$ e para que não haja repetição ao substituir em ambos os pares o símbolo $\boxed{4}$ por $\boxed{1}$ eliminamos o símbolo mais à direita no novo bloco $\boxed{3\ 5\ 1}$

$$\boxed{2\ 4} \rightarrow \boxed{3\ 5} \quad \text{e} \quad \boxed{4\ 7} \rightarrow \boxed{1\ 5}.$$

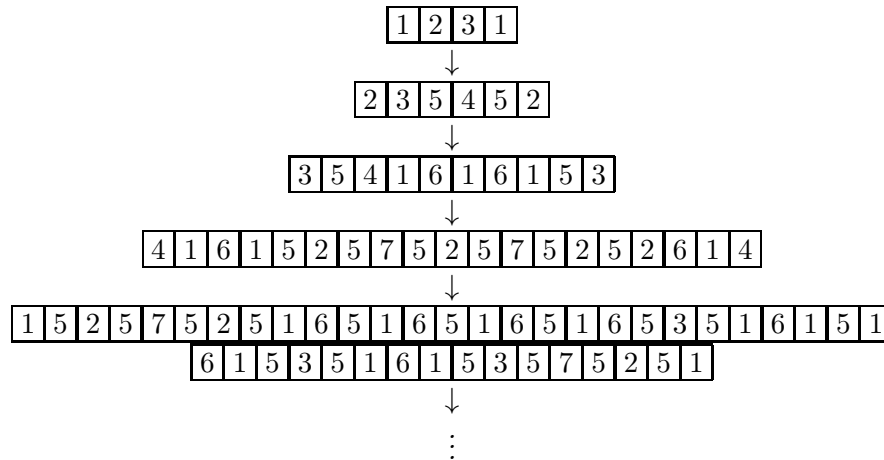
E assim obtemos

$$\boxed{2\ 4\ 7} \rightarrow \boxed{3\ 5\ 1\ 5}.$$

O procedimento é análogo para o caso em que os blocos são constituídos por quatro ou mais símbolos em \mathcal{S} .

De acordo com as regras de substituição em (4.8) a partir do bloco inicial $\boxed{1\ 2\ 3\ 1}$

obtemos as seguintes etapas de substituição



Na Figura 4.1, apresentamos um gráfico que foi construído utilizando o algoritmo referido nesta secção. Este gráfico ilustra as substituições acima em que podemos ver claramente a substituição de cada símbolo do alfabeto $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ por uma cor de acordo com a legenda ao lado do gráfico e também que em cada etapa de substituição um par de símbolos é substituído por um novo bloco independentemente das cores da vizinhança deste par.

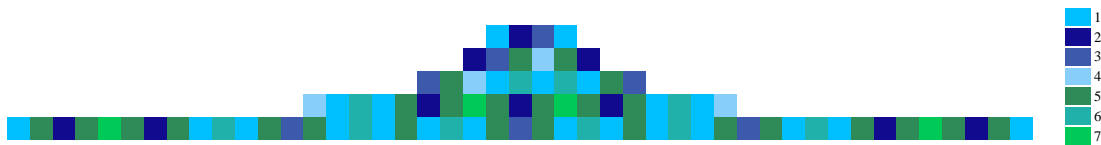


Figura 4.1: O gráfico apresenta as primeiras quatro etapas de acordo com as regras para sistema de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda.

Na Figura 4.2 ilustramos as 200 primeiras etapas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$. As primeiras quatro etapas de substituição neste gráfico são as apresentadas no gráfico da Figura 4.1.

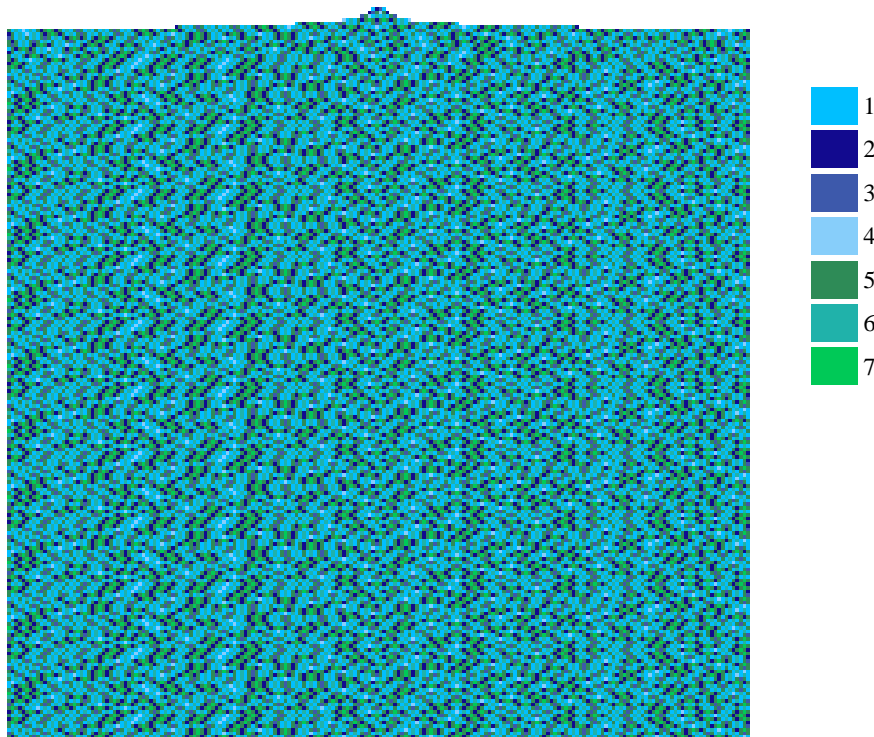


Figura 4.2: O gráfico apresenta as primeiras 200 etapas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto de substituição $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda ao lado do gráfico. Notamos uma trancatura vertical no gráfico.

Analizando o gráfico da Figura 4.2 podemos observar algumas bandas de cores diferentes que se repetem verticalmente e obtemos um padrão com uma forma repetitiva.

Em seguida apresentamos um outro exemplo de sistema de substituição que está relacionado com o sistema de substituição do Exemplo 4.3, uma vez que consideramos o mesmo

bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$ e o invariante de amassamento de f é obtido das sequências de amassamento de f daquele exemplo. Pretendemos com este exemplo comparar dois sistemas de substituição que têm o mesmo alfabeto e algumas regras de substituição diferentes.

Exemplo 4.4 Consideramos a aplicação bimodal f caracterizada pelas sequências de amassamento periódicas $\mathcal{K}_1 = (332C_212C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (12C_1332C_2)^\infty$ (com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Seja $\phi_0 \in \mathcal{A}_{per}$ a função inicial tal que

$$\underline{it}(\phi_0) = ((332C_212C_1)^\infty, (32C_212C_13)^\infty, (2C_212C_133)^\infty, (332C_212C_1)^\infty).$$

Considerando as correspondências em (4.1), as sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento são substituídas da seguinte forma

$$\begin{aligned} (332C_212C_1)^\infty &\rightarrow \boxed{1}, (32C_212C_13)^\infty \rightarrow \boxed{2}, (2C_212C_133)^\infty \rightarrow \boxed{3}, (C_212C_1332)^\infty \rightarrow \boxed{4}, \\ (12C_1332C_2)^\infty &\rightarrow \boxed{5}, (2C_1332C_21)^\infty \rightarrow \boxed{6}, (C_1332C_212)^\infty \rightarrow \boxed{7} \end{aligned} \quad (4.9)$$

e temos

$$\boxed{1} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{5} \rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{1}. \quad (4.10)$$

Considerando as correspondências em (4.2), e como os itinerários dos valores críticos de ϕ_0 coincidem com algumas das sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento, vamos utilizar os mesmos símbolos associadas às sequências obtidas por aplicação sucessiva de σ às sequências de amassamento. Neste caso, obtemos o alfabeto

$$\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$$

e consideramos

$$\mathcal{S}_{\mathcal{K}} = \{\boxed{1}, \boxed{5}\} \quad e \quad \mathcal{S}(\phi_0) = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}\}.$$

De acordo com substituição definida em (4.3) a aplicação substituição $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é definida

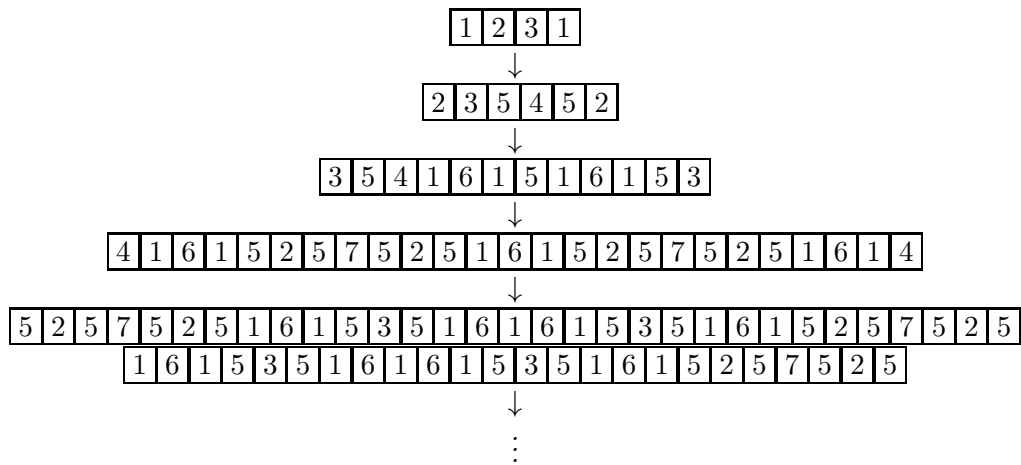
do seguinte modo

$$\begin{array}{cccc}
\boxed{1} \xrightarrow{\zeta} \boxed{2}, & \boxed{2} \xrightarrow{\zeta} \boxed{3}, & \boxed{3} \xrightarrow{\zeta} \boxed{4}, & \boxed{4} \xrightarrow{\zeta} \boxed{5}, \\
\boxed{5} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6}, & \boxed{6} \xrightarrow{\zeta} \boxed{7}, & \boxed{7} \xrightarrow{\zeta} \boxed{1}, & \\
\boxed{01} \xrightarrow{\zeta} \boxed{02}, & \boxed{02} \xrightarrow{\zeta} \boxed{03}, & \boxed{03} \xrightarrow{\zeta} \boxed{04}, & \boxed{04} \xrightarrow{\zeta} \boxed{05}, \\
\boxed{05} \xrightarrow{\zeta} \boxed{06}, & \boxed{06} \xrightarrow{\zeta} \boxed{07}, & \boxed{07} \xrightarrow{\zeta} \boxed{01}, & \\
\boxed{12} \xrightarrow{\zeta} \boxed{23}, & \boxed{31} \xrightarrow{\zeta} \boxed{452}, & \boxed{51} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6152}, & \boxed{71} \xrightarrow{\zeta} \boxed{12}, \\
\boxed{13} \xrightarrow{\zeta} \boxed{254}, & \boxed{32} \xrightarrow{\zeta} \boxed{453}, & \boxed{52} \xrightarrow{\zeta} \boxed{6153}, & \boxed{72} \xrightarrow{\zeta} \boxed{13}, \\
\boxed{14} \xrightarrow{\zeta} \boxed{25}, & \boxed{34} \xrightarrow{\zeta} \boxed{41}, & \boxed{53} \xrightarrow{\zeta} \boxed{614}, & \boxed{73} \xrightarrow{\zeta} \boxed{14}, \\
\boxed{15} \xrightarrow{\zeta} \boxed{2516}, & \boxed{35} \xrightarrow{\zeta} \boxed{416}, & \boxed{54} \xrightarrow{\zeta} \boxed{615}, & \boxed{74} \xrightarrow{\zeta} \boxed{15}, \\
\boxed{16} \xrightarrow{\zeta} \boxed{257}, & \boxed{36} \xrightarrow{\zeta} \boxed{47}, & \boxed{56} \xrightarrow{\zeta} \boxed{617}, & \boxed{75} \xrightarrow{\zeta} \boxed{116}, \\
\boxed{17} \xrightarrow{\zeta} \boxed{251}, & \boxed{37} \xrightarrow{\zeta} \boxed{45}, & \boxed{57} \xrightarrow{\zeta} \boxed{615}, & \boxed{76} \xrightarrow{\zeta} \boxed{17}, \\
\boxed{21} \xrightarrow{\zeta} \boxed{32}, & \boxed{41} \xrightarrow{\zeta} \boxed{552}, & \boxed{61} \xrightarrow{\zeta} \boxed{752}, & \\
& \boxed{42} \xrightarrow{\zeta} \boxed{53}, & \boxed{62} \xrightarrow{\zeta} \boxed{753}, & \\
& \boxed{43} \xrightarrow{\zeta} \boxed{554}, & \boxed{63} \xrightarrow{\zeta} \boxed{74}, & \\
\boxed{23} \xrightarrow{\zeta} \boxed{354}, & & \boxed{64} \xrightarrow{\zeta} \boxed{71}, & \\
\boxed{24} \xrightarrow{\zeta} \boxed{35}, & & \boxed{65} \xrightarrow{\zeta} \boxed{716}, & \\
\boxed{25} \xrightarrow{\zeta} \boxed{3516}, & \boxed{45} \xrightarrow{\zeta} \boxed{56}, & & \\
\boxed{26} \xrightarrow{\zeta} \boxed{357}, & \boxed{46} \xrightarrow{\zeta} \boxed{57}, & & \\
\boxed{27} \xrightarrow{\zeta} \boxed{351}, & \boxed{47} \xrightarrow{\zeta} \boxed{55}, & \boxed{67} \xrightarrow{\zeta} \boxed{75}. &
\end{array} \tag{4.11}$$

Neste caso, os blocos que não podem ocorrer como factores de alguma sequência em \mathcal{L} são da forma $\boxed{11}$, $\boxed{22}$, $\boxed{33}$, $\boxed{44}$, $\boxed{55}$, $\boxed{66}$ e $\boxed{77}$. Notamos que os símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ são os novos símbolos não derivados dos símbolos anteriores que surgem nos novos blocos. Comparando as substituições em (4.11) com as substituições em (4.8) podemos ver que diferem apenas nos pares \boxed{rs} em que pelo menos um dos símbolos $\boxed{r}, \boxed{s} \in \{\boxed{4}, \boxed{7}\}$ pois em (4.5) temos que $\boxed{4} \rightarrow \boxed{1}$ e $\boxed{7} \rightarrow \boxed{5}$ e enquanto que em (4.10) temos $\boxed{4} \rightarrow \boxed{5}$ e $\boxed{7} \rightarrow \boxed{1}$. Ainda, comparando as correspondências (4.4) e (4.9) podemos ver que os

primeiros elementos das seqüências simbólicas correspondentes aos símbolos $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ e $\boxed{6}$ em (4.8) e em (4.11) são iguais.

De acordo com as regras de substituição em (4.11), considerando também o bloco inicial $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}$, em cada etapa da substituição um par de símbolos é substituído por um novo bloco e obtemos



Na Figura 4.3 ilustramos as 200 primeiras etapas a partir do bloco inicial $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{1}$.

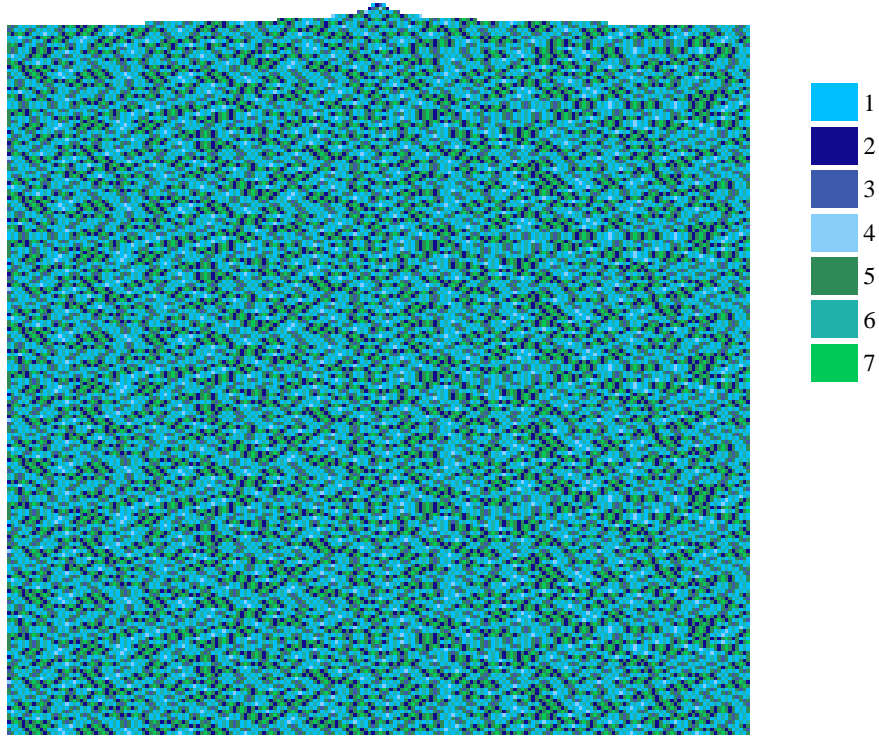


Figura 4.3: O gráfico apresenta as primeiras 200 etapas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{1}$. Cada cor no gráfico representa um símbolo do alfabeto de substituição $\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}\}$ de acordo com a legenda ao lado do gráfico. Notamos uma truncatura vertical no gráfico.

Analisando o gráfico da Figura 4.3 podemos verificar que não temos as bandas de cores verticais tão evidentes como as da Figura 4.2. No Exemplo 4.3, de acordo com (4.5) temos dois ciclos que se repetem de quatro em quatro etapas de substituição e neste exemplo de acordo com (4.10) temos um ciclo que se repete de sete em sete etapas de substituição. Deste modo, no Exemplo 4.3 é natural que as repetições de bandas verticais sejam mais frequentes do que neste exemplo.

Tanto no Exemplo 4.3 como no Exemplo 4.4 consideramos sistemas de substituição a partir do bloco inicial $\boxed{1|2|3|1}$. Ao utilizarmos sistemas de substituição conseguimos mais de 3000 etapas em poucos segundos, enquanto que no Capítulo 3, com os mesmos itinerários dos valores críticos da função inicial ϕ_0 e com o mesmo invariante de amassamento da aplicação bimodal f , conseguimos no máximo 15 iterações no mesmo intervalo de tempo utilizando o Algoritmo 3.18 implementado no *Mathematica 6.0*.

Para finalizar esta secção analisamos algumas propriedades dinâmicas de um sistema de substituição associado ao sistema dinâmico (\mathcal{A}, T) . Em particular, analisamos alguns exemplos para ilustrar a variação do crescimento dos símbolos por etapas de substituição com a entropia topológica de f .

Em seguida apresentamos um exemplo em que consideramos algumas funções iniciais da classe \mathcal{A}_{per} e uma função bimodal f fixa. Neste exemplo, pretendemos relacionar o crescimento dos novos símbolos obtidos nas etapas de substituições com a entropia topológica de f .

Neste capítulo denotamos por $N_k(\phi)$ o número de novos símbolos não derivados dos símbolos anteriores que surgem nos novos blocos da nova etapa de substituição sobre o alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi)$. Quando não houver perigo de confusão, optamos pela notação mais simplificada N_k em vez de $N_k(\phi)$.

Exemplo 4.5 *Consideramos uma aplicação bimodal f caracterizada pelas sequências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ e as funções iniciais ϕ_0 , φ_0 e ψ_0 em \mathcal{A}_{per} cujos itinerários são respectivamente dados por*

$$\underline{it}(\phi_0) = ((312)^\infty, (32)^\infty), \quad \underline{it}(\varphi_0) = ((312)^\infty, (121)^\infty, (32)^\infty) \text{ e}$$

$$\underline{it}(\psi_0) = ((123)^\infty, (331)^\infty).$$

Considerando as correspondências em (4.1), as seqüências simbólicas obtidas pela aplicação deslocamento das seqüências de amassamento são substituídas da seguinte forma

$$\begin{aligned} (332C_1)^\infty &\rightarrow \boxed{1}, (32C_13)^\infty \rightarrow \boxed{2}, (2C_133)^\infty \rightarrow \boxed{3}, (C_1332)^\infty \rightarrow \boxed{4}, \\ (112C_2)^\infty &\rightarrow \boxed{5}, (12C_21)^\infty \rightarrow \boxed{6}, (2C_211)^\infty \rightarrow \boxed{7}, (C_2112)^\infty \rightarrow \boxed{8} \end{aligned} \quad (4.12)$$

e temos

$$\begin{aligned} \boxed{1} &\rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow \boxed{1} \\ \boxed{5} &\rightarrow \boxed{6} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{5} \end{aligned}$$

e obtemos

$$\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}\} \quad e \quad \mathcal{S}_K = \{\boxed{1}, \boxed{5}\}.$$

De acordo com as correspondências em (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} (312)^\infty &\rightarrow \boxed{V_1}, (123)^\infty \rightarrow \boxed{V_2}, (231)^\infty \rightarrow \boxed{V_3}, \\ (32)^\infty &\rightarrow \boxed{V_4}, (23)^\infty \rightarrow \boxed{V_5}, \\ (331)^\infty &\rightarrow \boxed{V_6}, (313)^\infty \rightarrow \boxed{V_7}, (133)^\infty \rightarrow \boxed{V_8}, \\ (121)^\infty &\rightarrow \boxed{V_9}, (211)^\infty \rightarrow \boxed{V_{10}}, (112)^\infty \rightarrow \boxed{V_{11}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

e temos

$$\begin{aligned} \boxed{V_1} &\rightarrow \boxed{V_2} \rightarrow \boxed{V_3} \rightarrow \boxed{V_1} \\ \boxed{V_4} &\rightarrow \boxed{V_5} \rightarrow \boxed{V_4} \\ \boxed{V_6} &\rightarrow \boxed{V_7} \rightarrow \boxed{V_8} \rightarrow \boxed{V_6} \\ \boxed{V_9} &\rightarrow \boxed{V_{10}} \rightarrow \boxed{V_{11}} \rightarrow \boxed{V_9}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Neste caso, obtemos os alfabetos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\phi_0) &= \{\boxed{V_1}, \boxed{V_2}, \boxed{V_3}, \boxed{V_4}, \boxed{V_5}\}, \quad \mathcal{S}(\varphi_0) = \{\boxed{V_1}, \boxed{V_2}, \boxed{V_3}, \boxed{V_4}, \boxed{V_5}, \boxed{V_9}, \boxed{V_{10}}, \boxed{V_{11}}\} \quad e \\ \mathcal{S}(\psi_0) &= \{\boxed{V_1}, \boxed{V_2}, \boxed{V_3}, \boxed{V_6}, \boxed{V_7}, \boxed{V_8}\}. \end{aligned}$$

Para cada alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi_0)$, $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi_0)$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\psi_0)$ obtemos um sistema de substituição, pelo que obtemos três sistemas de substituição. De acordo com a substituição definida em (4.3) incluímos aqui as seguintes regras de substituição para os três sistemas de substituição

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{1\ 2} \rightsquigarrow \boxed{2\ 3}, \\
\boxed{1\ 3} \rightsquigarrow \boxed{2\ 5\ 4}, \\
\boxed{1\ 4} \rightsquigarrow \boxed{2\ 1}, \\
\boxed{1\ 5} \rightsquigarrow \boxed{2\ 5\ 1\ 6}, \\
\boxed{1\ 6} \rightsquigarrow \boxed{2\ 5\ 1\ 7}, \\
\boxed{1\ 7} \rightsquigarrow \boxed{2\ 5\ 8}, \\
\boxed{1\ 8} \rightsquigarrow \boxed{2\ 5}, \\
\boxed{2\ 1} \rightsquigarrow \boxed{3\ 2}, \\
\\
\boxed{2\ 3} \rightsquigarrow \boxed{3\ 5\ 4}, \\
\boxed{2\ 4} \rightsquigarrow \boxed{3\ 1}, \\
\boxed{2\ 5} \rightsquigarrow \boxed{3\ 5\ 1\ 6}, \\
\boxed{2\ 6} \rightsquigarrow \boxed{3\ 5\ 1\ 7}, \\
\boxed{2\ 7} \rightsquigarrow \boxed{3\ 5\ 8}, \\
\boxed{2\ 8} \rightsquigarrow \boxed{3\ 5},
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{3\ 1} \rightsquigarrow \boxed{4\ 5\ 2}, \\
\boxed{3\ 2} \rightsquigarrow \boxed{4\ 5\ 3}, \\
\\
\boxed{3\ 4} \rightsquigarrow \boxed{4\ 1}, \\
\boxed{3\ 5} \rightsquigarrow \boxed{4\ 1\ 6}, \\
\boxed{3\ 6} \rightsquigarrow \boxed{4\ 1\ 7}, \\
\boxed{3\ 7} \rightsquigarrow \boxed{4\ 8}, \\
\boxed{3\ 8} \rightsquigarrow \boxed{4\ 5}, \\
\boxed{4\ 1} \rightsquigarrow \boxed{1\ 2}, \\
\boxed{4\ 2} \rightsquigarrow \boxed{1\ 3}, \\
\boxed{4\ 3} \rightsquigarrow \boxed{1\ 4}, \\
\\
\boxed{4\ 5} \rightsquigarrow \boxed{1\ 6}, \\
\boxed{4\ 6} \rightsquigarrow \boxed{1\ 7}, \\
\boxed{4\ 7} \rightsquigarrow \boxed{1\ 8}, \\
\boxed{4\ 8} \rightsquigarrow \boxed{1\ 5},
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{5\ 1} \rightsquigarrow \boxed{6\ 1\ 5\ 2}, \\
\boxed{5\ 2} \rightsquigarrow \boxed{6\ 1\ 5\ 3}, \\
\boxed{5\ 3} \rightsquigarrow \boxed{6\ 1\ 4}, \\
\boxed{5\ 4} \rightsquigarrow \boxed{6\ 1}, \\
\\
\boxed{5\ 6} \rightsquigarrow \boxed{6\ 7}, \\
\boxed{5\ 7} \rightsquigarrow \boxed{6\ 1\ 8}, \\
\boxed{5\ 8} \rightsquigarrow \boxed{6\ 5}, \\
\boxed{6\ 1} \rightsquigarrow \boxed{7\ 1\ 5\ 2}, \\
\boxed{6\ 2} \rightsquigarrow \boxed{7\ 1\ 5\ 3}, \\
\boxed{6\ 3} \rightsquigarrow \boxed{7\ 1\ 4}, \\
\boxed{6\ 4} \rightsquigarrow \boxed{7\ 1}, \\
\boxed{6\ 5} \rightsquigarrow \boxed{7\ 6}, \\
\\
\boxed{6\ 7} \rightsquigarrow \boxed{7\ 1\ 8}, \\
\boxed{6\ 8} \rightsquigarrow \boxed{7\ 5},
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{7\ 1} \rightsquigarrow \boxed{8\ 5\ 2}, \\
\boxed{7\ 2} \rightsquigarrow \boxed{8\ 5\ 3}, \\
\boxed{7\ 3} \rightsquigarrow \boxed{8\ 4}, \\
\boxed{7\ 4} \rightsquigarrow \boxed{8\ 1}, \\
\boxed{7\ 5} \rightsquigarrow \boxed{8\ 1\ 6}, \\
\boxed{7\ 6} \rightsquigarrow \boxed{8\ 1\ 7}, \\
\\
\boxed{7\ 8} \rightsquigarrow \boxed{8\ 5}, \\
\boxed{8\ 1} \rightsquigarrow \boxed{5\ 2}, \\
\boxed{8\ 2} \rightsquigarrow \boxed{5\ 3}, \\
\boxed{8\ 3} \rightsquigarrow \boxed{5\ 4}, \\
\boxed{8\ 4} \rightsquigarrow \boxed{5\ 1}, \\
\boxed{8\ 5} \rightsquigarrow \boxed{5\ 6}, \\
\boxed{8\ 6} \rightsquigarrow \boxed{5\ 7}, \\
\boxed{8\ 7} \rightsquigarrow \boxed{5\ 8},
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{V_3\ 1} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ 2}, \\
\boxed{V_3\ 2} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ 3}, \\
\\
\boxed{V_3\ 4} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 1}, \\
\boxed{V_3\ 5} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 1\ 6}, \\
\boxed{V_3\ 6} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 1\ 7}, \\
\boxed{V_3\ 7} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 8}, \\
\boxed{V_3\ 8} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5}, \\
\boxed{V_3\ V_1} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ V_2}, \\
\boxed{V_3\ V_2} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ V_3}, \\
\boxed{V_3\ V_4} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ V_5}, \\
\boxed{V_3\ V_6} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ V_7}, \\
\boxed{V_3\ V_7} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ 5\ V_8}, \\
\boxed{V_3\ V_8} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ V_6}, \\
\boxed{V_3\ V_9} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ V_{10}}, \\
\boxed{V_3\ V_{11}} \rightsquigarrow \boxed{V_4\ V_9},
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
\boxed{V_8\ 1} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ 5\ 2}, \\
\boxed{V_8\ 2} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ 5\ 3}, \\
\boxed{V_8\ 3} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ 4}, \\
\boxed{V_8\ 4} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1}, \\
\\
\boxed{V_8\ 6} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 7}, \\
\boxed{V_8\ 7} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ 8}, \\
\boxed{V_8\ 8} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 5}, \\
\boxed{V_8\ V_1} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 5\ V_2}, \\
\boxed{V_8\ V_3} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ V_1}, \\
\boxed{V_8\ V_4} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 5\ V_5}, \\
\boxed{V_8\ V_5} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ V_4}, \\
\boxed{V_8\ V_6} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 6\ V_7}, \\
\boxed{V_8\ V_7} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 5\ V_8}, \\
\boxed{V_8\ V_9} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 1\ 8}, \\
\boxed{V_8\ V_{10}} \rightsquigarrow \boxed{V_5\ 5\ V_{11}},
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\tag{4.15}$$

De acordo com as correspondências em (4.13) temos que as regras de substituição para o bloco constituído por um dos símbolos $\boxed{V_4}$, $\boxed{V_6}$, $\boxed{V_7}$ ou $\boxed{V_9}$ e um outro símbolo do alfabeto do nosso sistema de substituição são as mesmas para o bloco constituído por um dos símbolos $\boxed{V_1}$ e um outro símbolo do alfabeto apresentado em (4.14), basta substituir o primeiro símbolo $\boxed{V_2}$ no novo bloco obtido por um outro símbolo de acordo com (4.14). Analogamente, as regras de substituição para o bloco constituído por um dos símbolos $\boxed{V_5}$ ou $\boxed{V_{10}}$ e um outro símbolo do alfabeto são as mesmas para o bloco constituído por $\boxed{V_3}$ e um outro símbolo apresentadas em (4.15). Ainda, as regras de substituição para o bloco constituído por um dos símbolos $\boxed{V_2}$, $\boxed{V_9}$ ou $\boxed{V_{11}}$ e um outro símbolo do alfabeto são as mesmas para o bloco constituído por $\boxed{V_8}$ e um outro símbolo do alfabeto apresentadas em (4.15).

Neste exemplo, $N_k(\phi_0)$ ($N_k(\varphi_0)$ e $N_k(\psi_0)$) é o número total dos símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ nos novos blocos obtidos em cada etapa de substituição sobre o alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi_0)$ ($\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi_0)$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\psi_0)$, respectivamente). Utilizando o algoritmo referido nesta secção determinamos o número total de cada símbolos do alfabeto obtido nos blocos nas etapas $k = 1, 2, \dots, 14$. Os valores de $\log(N_k)$ e $\log\left(\frac{N_{k+1}}{N_k}\right)$ para $k = 1, 2, \dots, 14$, são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2.

k	$\log(N_k(\phi_0))$	$\log(N_k(\varphi_0))$	$\log(N_k(\psi_0))$
2	0	2.48491	1.94591
3	0.693147	3.43399	3.04452
4	1.94591	4.38203	4.07754
5	2.94444	5.3845	5.09987
6	3.97029	6.40026	6.11368
7	4.97673	7.42058	7.13409
8	5.99645	8.43923	8.15277
9	7.01481	9.45767	9.1715
10	8.03398	10.4761	10.1901
11	9.05252	11.4946	11.2087
12	10.0711	12.5132	12.2273
13	11.0897		
14	12.1083		

Tabela 4.1: A tabela apresenta os valores de $\log(N_k(\phi_0))$, $\log(N_k(\varphi_0))$ e $\log(N_k(\psi_0))$ para sistemas de substituição sobre os alfabetos $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi_0)$, $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi_0)$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\psi_0)$, respectivamente para $k = 2, \dots, 14$. Notamos que a etapa começa com $k = 2$ e é incrementada por 1 até 14.

k	ϕ_k	φ_k	ψ_k
2	0.693147	0.85745	1.09861
3	1.25276	0.910212	1.03302
4	0.998529	0.986908	1.02233
5	1.02585	1.00995	1.01382
6	1.00644	1.0182	1.02041
7	1.01972	1.01789	1.01868
8	1.01836	1.01816	1.01872
9	1.01917	1.01831	1.01864
10	1.01853	1.01852	1.0186
11	1.0186	1.01857	1.01858
12	1.01856		
13	1.01859		

Tabela 4.2: A tabela apresenta os valores de $\log\left(\frac{N_{k+1}}{N_k}\right)$ para sistemas de substituição sobre os alfabetos $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi_0)$, $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi_0)$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\psi_0)$, respectivamente para $k = 2, \dots, 14$. Notamos que a iteração começa com $k = 2$ e é incrementada por 1 até 13.

Portanto, temos em todos os casos

$$\log\left(\frac{N_{k+1}}{N_k}\right) = 1.018\dots, \quad k = 10, 11, \dots$$

Na Figura 4.4, apresentamos a variação $\log(N_k(\psi_0))$, com $k = 2, \dots, 12$.

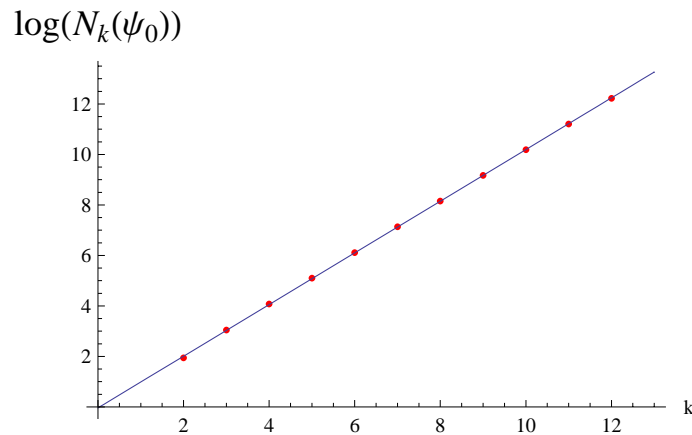


Figura 4.4: A variação de $\log(N_k(\psi_0))$ com $k = 1, 2, \dots, 12$. A regressão linear com o declive aproximadamente igual a $1.018\dots$ ajusta os valores da última coluna da Tabela 4.1.

No exemplo que se segue consideramos algumas funções iniciais quaisquer da classe \mathcal{A}_{per} e, ao contrário do exemplo anterior em que fixamos a aplicação f , aqui variamos os invariantes de amassamento das funções bimodais f e, portanto, consideramos diferentes valores da entropia topológica de f . Neste exemplo, pretendemos analisar como varia o crescimento dos novos símbolos em cada etapa para cada sistema de substituição referente a cada uma das funções iniciais dadas com a entropia topológica de f .

Exemplo 4.6 Consideramos os invariantes de amassamento \mathcal{K}_f de uma aplicação bimodal f cujas sequências de amassamento são apresentadas na Tabela 4.3. Sejam ϕ_0, φ_0

e ψ_0 em \mathcal{A}_{per} as funções iniciais cujos itinerários são respectivamente dados por

$$\underline{it}(\phi_0) = ((3222)^\infty, (23)^\infty), \quad \underline{it}(\varphi_0) = ((133)^\infty, (223)^\infty) \quad e$$

$$\underline{it}(\psi_0) = ((1323)^\infty, (322)^\infty).$$

Como as sequências de amassamento de f apresentadas na Tabela 4.3 são periódicas com o mesmo período (período 4) e considerando as correspondências em (4.1) e (4.2) tem-se, analogamente ao Exemplo 4.5, que N_k é o número dos símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ relativamente às funções ϕ_0 , φ_0 e ψ_0 . Na Tabela 4.3, apresentamos os valores para $\log(N_{19}/N_{18})$, relativamente às funções ϕ_0 , φ_0 e ψ_0 da classe \mathcal{A}_{per} para cada aplicação f caracterizada pelo invariante de amassamento \mathcal{K}_f . A tabela relaciona os valores de $\log(N_{19}/N_{18})$ com a entropia topológica de f , $h_{top}(f)$. A entropia topológica de f , $h_{top}(f)$, apresentada na primeira coluna da Tabela 4.3 foi calculada através da matriz de transição associada ao invariante de amassamento \mathcal{K}_f (ver o Exemplo 3.21 e [LR 97]).

\mathcal{K}_f	$h_{top}(f)$	ϕ_0	φ_0	ψ_0
$((333C_1)^\infty, (111C_2)^\infty)$	1.061260	1.06126	1.06136	1.06126
$((332C_1)^\infty, (112C_2)^\infty)$	1.018490	1.01859	1.0186	1.01857
$((332C_1)^\infty, (132C_2)^\infty)$	0.745265	0.744997	0.745628	0.745442
$((333C_1)^\infty, (133C_2)^\infty)$	0.609222	0.609371	0.609504	0.609504

Tabela 4.3: Na primeira coluna são apresentados os invariantes de amassamento de f , na segunda coluna os valores da entropia topológica de f , $h_{top}(f)$ e nas três últimas colunas são apresentados os valores de $\log(N_{19}/N_{18})$ relativamente a ϕ_0 , φ_0 e ψ_0 .

De acordo com a Tabela 4.3, podemos observar que, para cada f com entropia topológica positiva, $h_{top}(f)$, a taxa de crescimento dos símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ é independente das funções

iniciais ϕ_0 , φ_0 e ψ_0 , respectivamente. Além disso, a taxa de crescimento dos símbolos $\boxed{1}$ e $\boxed{5}$ é aproximadamente igual à entropia topológica da aplicação bimodal f .

4.2 Subsistemas de substituição associados a $\mathcal{A}_{per}(\phi)$

Do que apresentamos na secção anterior, temos uma dependência das regras de substituição com respeito à condição inicial dependência, que ocorre em $\mathcal{S}(\phi)$ uma vez que diferentes condições iniciais podem conduzir a diferentes alfabetos. Para torneiar esta questão consideramos uma nova subclasse de funções onde fica definida uma regra independente das condições iniciais. Sendo assim, nesta secção consideramos uma classe de equivalência de funções da classe \mathcal{A}_{per} cujos valores críticos pertencem ao conjunto dos valores críticos de uma dada função ϕ de \mathcal{A}_{per} . Para estas funções estabelecemos uma correspondência entre os itinerários dos seus valores críticos e os símbolos do alfabeto $\mathcal{S}(\phi)$. Na Secção 3.2 vimos que funções diferentes da classe \mathcal{A} , em particular da classe \mathcal{A}_{per} , podem ter o mesmo itinerário, isto é, funções diferentes da classe \mathcal{A} podem representar a mesma classe em termos de dinâmica simbólica.

Seja $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ uma função. Consideramos a subclasse $\mathcal{A}_{per}(\phi)$ das funções da classe \mathcal{A}_{per} cujos valores críticos estão contidos no conjunto dos valores críticos de ϕ , $cv(\phi)$, isto é,

$$\mathcal{A}_{per}(\phi) = \{\varphi \in \mathcal{A}_{per} : cv(\varphi) \subset cv(\phi)\}. \quad (4.16)$$

Em termos de dinâmica simbólica, se $cv(\varphi) \subset cv(\phi)$ podemos afirmar que o conjunto dos itinerários dos valores críticos da função φ está contido no conjunto dos itinerários dos valores críticos da função ϕ .

Em seguida apresentamos um exemplo para ilustrar uma função da subclasse $\mathcal{A}_{per}(\phi)$ para um dada função ϕ da classe \mathcal{A}_{per} .

Exemplo 4.7 Consideramos a aplicação bimodal f caracterizada pelas seqüências de amasamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ (com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Seja $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ uma função cujos valores críticos são pontos periódicos, com respeito a f , tal que

$$\underline{it}(\phi) = ((123)^\infty, (331)^\infty, (112)^\infty).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{A}_{per}$ uma função cujo itinerário, com respeito a f , é dado por

$$\underline{it}(\varphi) = ((123)^\infty, (331)^\infty).$$

Temos que $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$, pois o conjunto dos itinerários dos valores críticos de φ está contido no conjunto dos itinerários dos valores críticos de ϕ .

Sejam $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ uma função fixa e \mathcal{L} a linguagem da substituição ζ sobre o alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\phi)$. Designamos por $\mathcal{L}(\phi)$ a linguagem da substituição ζ sobre o alfabeto $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi)$ com $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$. Denotamos esta substituição por ζ_ϕ .

Proposição 4.8 *Sejam $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$. A substituição $\zeta_\phi : \mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi)$ é uma substituição da substituição $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, isto é, $\zeta_\phi = \zeta|_{\mathcal{L}(\phi)}$.*

Demonstração. Se $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$, então $cv(\varphi) \subset cv(\phi)$. Pelas correspondências em (4.1) e (4.2) temos então que $\mathcal{S}(\varphi) \subset \mathcal{S}(\phi)$. Pelas correspondências em (4.3) podemos concluir que $\zeta_\phi = \zeta|_{\mathcal{L}(\phi)}$. ■

Em seguida apresentamos um exemplo para ilustrar o resultado anterior.

Exemplo 4.9 Consideramos a aplicação bimodal f caracterizada pelas seqüências de amassamento $\mathcal{K}_1 = (332C_1)^\infty$ e $\mathcal{K}_2 = (112C_2)^\infty$ (com o alfabeto $\mathfrak{A} = \{1, C_1, 2, C_2, 3\}$). Sejam $\phi \in \mathcal{A}_{per}$ e $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$ as funções cujos itinerários, com respeito a f , são dados por

$$\underline{it}(\varphi) = ((312)^\infty, (32)^\infty) \quad e \quad \underline{it}(\phi) = ((312)^\infty, (121)^\infty, (32)^\infty).$$

Considerando as correspondências em (4.1), as seqüências simbólicas obtidas pela aplicação deslocamento das seqüências de amassamento são substituídas da seguinte forma

$$\begin{aligned} (332C_1)^\infty &\rightarrow \boxed{1}, (32C_13)^\infty \rightarrow \boxed{2}, (2C_133)^\infty \rightarrow \boxed{3}, (C_1332)^\infty \rightarrow \boxed{4}, \\ (112C_2)^\infty &\rightarrow \boxed{5}, (12C_21)^\infty \rightarrow \boxed{6}, (2C_211)^\infty \rightarrow \boxed{7}, (C_2112)^\infty \rightarrow \boxed{8} \end{aligned} \quad (4.17)$$

e obtemos os alfabetos

$$\mathcal{S} = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}\} \quad e \quad \mathcal{S}_\mathcal{K} = \{\boxed{1}, \boxed{5}\}.$$

De acordo com as correspondências em (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} (312)^\infty &\rightarrow \boxed{V_1}, (123)^\infty \rightarrow \boxed{V_2}, (231)^\infty \rightarrow \boxed{V_3}, \\ (32)^\infty &\rightarrow \boxed{V_4}, (23)^\infty \rightarrow \boxed{V_5}, \\ (121)^\infty &\rightarrow \boxed{V_6}, (211)^\infty \rightarrow \boxed{V_7}, (112)^\infty \rightarrow \boxed{V_8}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Neste caso, obtemos os alfabetos

$$\mathcal{S}(\varphi) = \{\boxed{V_1}, \boxed{V_2}, \boxed{V_3}, \boxed{V_4}, \boxed{V_5}\} \quad e \quad \mathcal{S}(\phi) = \{\boxed{V_1}, \boxed{V_2}, \boxed{V_3}, \boxed{V_4}, \boxed{V_5}, \boxed{V_6}, \boxed{V_7}, \boxed{V_8}\}.$$

De acordo com substituição definida em (4.18) para a função φ temos

$$\begin{aligned} \boxed{V_1} &\rightarrow \boxed{V_2} \rightarrow \boxed{V_3} \rightarrow \boxed{V_1}, \\ \boxed{V_4} &\rightarrow \boxed{V_5} \rightarrow \boxed{V_4}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

e para a função ϕ temos

$$\begin{aligned} \boxed{V_1} &\rightarrow \boxed{V_2} \rightarrow \boxed{V_3} \rightarrow \boxed{V_1}, \\ \boxed{V_4} &\rightarrow \boxed{V_5} \rightarrow \boxed{V_4}, \\ \boxed{V_6} &\rightarrow \boxed{V_7} \rightarrow \boxed{V_8} \rightarrow \boxed{V_6}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

e as restantes regras de substituição iguais. Comparando as substituições definidas em (4.19) e (4.20), podemos concluir que

$$\zeta_\phi = \zeta|_{\mathcal{L}(\phi)}.$$

Proposição 4.10 *Sejam f uma aplicação m -modal e $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$, com $\phi \in \mathcal{A}_{per}$. Se $orb_f(cv(\varphi)) = orb_f(cv(\phi))$, então as substituições $\zeta_\phi : \mathcal{L}(\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi)$ e $\zeta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ são iguais.*

Demonstração. Seja d_j valor crítico periódico de φ de período t_j , $j = 0, 1, \dots, \eta(\varphi) + 1$. Como $\varphi \in \mathcal{A}_{per}(\phi)$, então os d_j , $j = 0, 1, \dots, \eta(\varphi) + 1$, também são valores críticos da função ϕ . Além disso, como

$$orb_f(cv(\varphi)) = \bigcup_{j=0}^{\eta(\varphi)+1} \{f^n(d_j) : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{j=0}^{\eta(\varphi)+1} \{f^n(d_j) : n = 0, 1, \dots, t_j - 1\}$$

e como $orb_f(cv(\varphi)) = orb_f(cv(\phi))$, então as funções φ e ϕ têm os mesmos valores críticos e $\eta(\varphi) = \eta(\phi)$. Pelas correspondências em (4.2) temos que $\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\phi)$. Recordamos que

$$it(f^k(d_j)) = \sigma^k(it(d_j)), \quad k = 0, 1, \dots, t_j - 1, \quad j = 0, 1, \dots, \eta(\varphi) + 1.$$

Utilizando a correspondência em (4.3), temos que $\zeta_\phi(\boxed{V_j}) = \zeta(\boxed{V_j})$ qualquer que seja $\boxed{V_j} \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}(\varphi)$, $j = 1, \dots, t$. Portanto, as aplicações substituições ζ_ϕ e ζ são iguais. ■

Apêndice A

Problemas de valores na fronteira e equações às diferenças

Neste apêndice apresentamos um modo de 'identificar' equações às diferenças com argumento contínuo com sistemas dinâmicos, ver [Vin 04]. Seguindo Sharkovsky em [Sha 03] ou [SR 04], se queremos estudar o comportamento assintótico das soluções de problemas de evolução é, normalmente, conveniente a transferência para o correspondente sistema dinâmico (quando isto é possível) e aplicar a teoria dos sistemas dinâmicos.

Consideramos o comportamento assintótico das soluções das equações às diferenças não-lineares da forma

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t > 0, \quad (\text{A.1})$$

onde $f \in C^0(I, I)$ e I é um intervalo limitado e fechado (ver, por exemplo, [SMR 93, Sha 06] e [RS 99]).

As soluções da equação (A.1) com condição inicial

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, 1], \quad (\text{A.2})$$

são dadas por

$$x(t) = f^n(\varphi(t)), \quad n \leq t \leq n+1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

onde $\varphi : [0, 1] \rightarrow I$ e f^n é a n -ésima iteração de f . De modo a obter uma solução contínua é necessário e suficiente que

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)).$$

Em geral, uma solução é C^k -suave, com $k \geq 0$, se e só se satisfaz as condições

(i) $f \in C^k(I, I)$,

(ii) $\varphi \in C^k([0, 1], I)$,

(iii) $\frac{d^s}{dt^s} \varphi(1) = \frac{d^s}{dt^s} f(\varphi(0))$, $s = 0, 1, \dots, k$.

A equação (A.1) induz o sistema dinâmico seguinte, no espaço das funções iniciais,

$$\{C^0([0, 1], I), \mathbb{Z}^+, S^i\}, \quad (\text{A.3})$$

onde $S[\varphi] = f \circ \varphi$. As trajectórias deste sistema dinâmico são descritas pela fórmula

$$S^i[\varphi] = f^i \circ \varphi, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad \varphi \in C^0([0, 1], I),$$

e, portanto, o seu comportamento é determinado pela aplicação unidimensional $f : I \rightarrow I$.

Entre os problemas de valores na fronteira para equações às derivadas parciais, existem certas classes de problemas redutíveis a equações às diferenças e outras equações relevantes. Estas classes consistem principalmente em problemas para os quais a representação de solução geral de equações diferenciais parciais é conhecida. A redução a uma equação às diferenças permite dar uma percepção das propriedades das soluções caóticas.

De seguida, apresentamos um exemplo de problema de valores na fronteira que pode ser reduzido a equações às diferenças com argumento contínuo, ver [Sha 03, Sha 06] e [SR 04].

Exemplo A.1 Consideramos $u(x, t)$ que satisfaz a equação às derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0, \quad (\text{A.4})$$

com a condição de fronteira

$$u|_{x=1} = f(u)|_{x=0}, \quad (\text{A.5})$$

onde f é uma C^1 -aplicação diferenciável, e com a condição inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (\text{A.6})$$

com φ uma C^1 -função diferenciável. A solução geral da equação (A.4) é dada por

$$u(x, t) = w(x + t), \quad (\text{A.7})$$

onde w é uma C^1 -função diferenciável arbitrária. Substituindo (A.7) na condição de fronteira (A.5), obtemos a equações às diferenças com argumento contínuo

$$w(\tau + 1) = f(w(\tau)), \quad \tau > 0. \quad (\text{A.8})$$

A condição inicial (A.5), do problema (A.4)-(A.5), implica, para a equações às diferenças (A.8), a seguinte condição inicial

$$w(\tau) = \varphi(\tau), \quad \text{para } \tau \in [0, 1]. \quad (\text{A.9})$$

Neste caso a equação (A.8) com a condição inicial (A.9) tem uma única C^1 -solução diferenciável se e só se

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)) \quad e \quad \varphi'(1) = f'(\varphi(0))\varphi'(0). \quad (\text{A.10})$$

Bibliografia

- [AKM 65] Adler, R. L., Konheim, A. G. e McAndrew, M. H., *Topological Entropy*, Transactions of the American Mathematical Society, 114, (1965), n2, 309–319 .
- [CRV 09] Correia, M. F., Ramos, C. C. e Vinagre S., *Symbolic dynamics for iterated smooth functions*, Grazer Math. Berichte, 354, (2009), 26–36.
- [CRV 10] Correia, M. F. , Ramos, C. C. e Vinagre, S., *On the iteration of smooth maps*, Discrete Dynamics and Difference Equations - Proceedings of the Twelfth International Conference on Difference Equations and Applications, World Scientific Publishing, (2010), 223–230.
- [CRV 11a] Correia, M. F., Ramos, C. C. e Vinagre S., *Iteration of differentiable functions under m -modal maps*, Int. J. of Pure and Applied Math., 70, (2011), n2, 151–166.
- [CRV 11b] Correia, M. F., Ramos, C. C. e Vinagre S., *Evolution and distribution of the periodic critical values of iterated differentiable functions*, (2011), (submetido).
- [CRV 11c] Correia, M. F., Ramos, C. C. e Vinagre S., *Substitution systems associated with the dynamical system (\mathcal{A}, T)* , (2011), (submetido).

- [DHS 99] Durand, F., Host, F. e Skau, C., *Substitution dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups*, Ergod. Th. & Dynam. Sys., 19, (1999), 953–993.
- [Fog 02] Fogg, N. P., *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Math., 1794, Springer-Verlag, 2002.
- [Guc 79] Guckenheimer, J., *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys, 70, (1979), n2, 133–160.
- [Kit 97] Kitchens, B., *Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts*, Springer, 1997.
- [LRSSR 84] Lampreia, J. P., Rica da Silva, A. e Sousa Ramos, J., *Tree of Markov topological chains*, CFMC-EA/84, (1984).
- [LRS 85] Lampreia, J. P., Rica da Silva, A. e Sousa Ramos, J., *Construction of 0-1 matrices associated to period-doubling processes*, Stochastica, 9, (1985), n2, 165–178.
- [LR 97] Lampreia, J. P. e Sousa Ramos, J., *Symbolic dynamics of bimodal maps*, Port. Math. (N.S.), 54, (1997), n1, 1–18.
- [LM 95] Lind, D. e Marcus, B., *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, 1995.
- [MeS 93] de Melo, W. e van Strien, S., *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [MS 80] Misiurewicz, M. e Szlenk, W., *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math., 67, (1980), 45–63.

- [MT 88] Milnor, J. e Thurston, W., *On the iterated maps of the interval*, in: J. C. Alexander (ed) Proceedings Univ. Maryland 1986-1987, Lect. Notes in Math., 1342, Springer Verlag, Berlin, New York, (1988), 465–563.
- [MiT 00] Milnor, J. e Tresser, C., *On entropy and monotonicity for real cubic maps*, Comm. Math. Phys., 209, (2000), 123–178.
- [Que 87] Queffélec, M., *Substitution dynamical systems - Spectral analysis*, Lecture Notes in Math., 1294, Springer-Verlag, 1987.
- [PU 10] Przytycki, F. e Urbaski, M., *Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods*, Cambridge University Press, 2010.
- [Ram 06] Ramos, C. C., *Representações, álgebras C^* e transformações do intervalo*, Tese de Doutorado, IST, 2006.
- [RS 99] Romanenko, E. Yu. e Sharkovsky, A. N., *From boundary value problems to difference equations: a method of investigation of chaotic vibrations*, Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 9, (1999), n7, 1285–1306.
- [Rot 71] Rothschild, J., *On the Computation of Topological Entropy*, Thesis, CUNY, 1971.
- [Sha 03] Sharkovsky, A. N., *Difference equations and boundary value problems*, in "New Progress in Difference Equations, Proceedings of the ICDEA'2001, Taylor & Francis, (2003), 3–22.
- [Sha 06] Sharkovsky, A. N., *Ideal turbulence*, Nonlinear Dynam., 44, (2006), 15–27.

- [SMR 93] Sharkovsky, A. N., Maistrenko, Yu. S. e Romanenko, E. Yu., *Difference equations and their applications*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [Sev 00] Severino, R., *Invariantes Topológicos e Algébricos em Sistemas Dinâmicos Discretos*, Tese de Doutorado, IST, 2000.
- [SR 04] Sharkovsky, A. N. e Romanenko, E. Yu., *Difference equations and dynamical systems generated by a certain classes of boundary value problems*, Proceedings of the Steklov Inst. Math., 244, (2004), 281–296.
- [SSRV 04] Severino, R., Sharkovsky, A. N., Sousa Ramos, J. e Vinagre, S., *Symbolic Dynamics in Boundary Value Problems*, Grazer Math. Ber, 346, (2004), 393–402.
- [SSRV 06] Severino, R., Sharkovsky, A. N., Sousa Ramos, J. e Vinagre, S., *Topological invariants in a model of a time-delayed Chua's circuit*, Nonlinear Dynamics, 44, (2006), 81–90.
- [Vin 04] Vinagre, S., *Soluções Caóticas em Equações às Derivadas Parciais*, Tese de Doutorado, IST, 2004.
- [VSSR 04] Vinagre, S., Severino, R. e Sousa Ramos, J., *Symbolic dynamics in chaotic wave vibration*, Int. J. of Pure and Applied Math., 16, (2004), 267–283.
- [VSR 05] Vinagre, S., Severino, R. e Sousa Ramos, J., *Topological invariants in nonlinear boundary value problems*, Chaos Solitons Fractals, 25, (2005), 65–78.
- [Wal 81] Walters, P., *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Math., 79, New York: Springer-Verlag, 1981.

[Wol 02] Wolfram, S., *A New Kind of Science*, Wolfram Media Inc., 2002.

Índice Remissivo

Admissível

sequência, 13

Alfabeto

de uma aplicação

m -modal, 12

bimodal, 23

unimodal, 21

de uma substituição, 26

Amassamento

invariante de, 18

sequência de, 18, 21

Aplicação

deslocamento, 16

generalizado, 41, 61

endereço, 12, 21, 23

generalizado, 39, 59

itinerário, 13, 21, 23

generalizado, 39, 59

m -modal, 9

substituição, 27

topologicamente

exacta, 7

transitiva, 7, 107

unimodal, 21

Bacia de atracção, 14

Bloco, 26

Cilindro, 14

Comprimento de uma palavra, 26

Concatenação de palavras, 27

Conjunto

das palavras admissíveis, 13

dos pontos

singulares, 33, 53

críticos, 53

dos valores críticos, 53

dos zeros, 32

separado, 8

- Crescimento
- número de, 11
 - taxa de, 17
- Deslocamento
- generalizado, 41, 61
- Endereço
- generalizado, 39, 59
- Entropia topológica, 8, 17, 50
- Espaço
- de sequências admissíveis, 13
 - simbólico generalizado, 39, 59
- Função sinal, 15
- Intervalo cilindro, 14
- Invariante
- de amassamento, 18, 23
 - topológico, 10
- Itinerário
- de um ponto, 13
 - generalizado, 39, 59
- Linguagem
- de uma sequência, 27
 - de uma substituição, 27
- Matriz
- de transição, 20
- Maximal
- frequência, 49
 - harmônico, 49
 - valor, 31, 52
- Minimal
- valor, 31, 52
- Número
- de crescimento, 11
 - de volta, 10
- Palavra, 26
- admissível, 13, 22, 24
 - vazia, 26
- Paridade
- par, 15
 - ímpar, 15
- Período
- de um ponto, 7
 - de uma sequência, 17
- Ponto

- periódico, 7
 - de uma substituição, 27
- Relação de ordem, 15
- Sequência
 - admissível, 13, 22, 24
 - de amassamento, 18, 21
 - espaço de, 24
 - finita, 13
 - infinita, 22, 24
 - linguagem de uma, 27
 - periódica, 17
 - simbólica, 21, 23, 26
- Shift de tipo finito, 17
- Sistema
 - de substituição, 27
 - dinâmico
 - discreto, 16
 - simbólico, 16
- Substituição
 - alfabeto de uma, 27
 - linguagem de uma, 27
 - sistema de, 27
- Taxa
 - de crescimento, 17
- Topologicamente
 - exacta, 7
 - transitiva, 7
- Topológica
 - entropia, 8, 50
 - transitividade, 107
- Volta
 - intervalo, 10
 - número de, 10