UNIVERSIDADE DE ÉVORA
1994

SOBRE TESTES DE DETECÇÃO DE "OUTLIERS" EM POPULAÇÕES EXPONENCIAIS

Maria Manuela São Pedro Abreu Braumann

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

1994

SOBRE TESTES DE DETECÇÃO DE "OUTLIERS" EM POPULAÇÕES EXPONENCIAIS

Maria Manuela São Pedro Abreu Braumann

UNIVERSIDADE DE ÉVORA
1994

SOBRE TESTES DE DETECÇÃO DE "OUTLIERS" EM POPULAÇÕES EXPONENCIAIS

DISSERTAÇÃO ELABORADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS, NA ESPECIALIDADE DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA.

Maria Manuela São Pedro Abreu Braumann

Aos meus Pais

Ao Carlos

AGRADECIMENTOS

Agradeço todo o apoio prestado pelo meu orientador, Professor Doutor Fernando M. Fialho Rosado, que me apresentou ao mundo dos "outliers" e cuja disponibilidade para trocas de impressões, sugestões e comentários e constante encorajamento tornaram possível este trabalho.

ÍNDICE

Capítulo I

Introdução

1.1 INTRODUÇÃO

É óbvio o interesse da detecção de "outliers" em amostras, uma vez que estas podem ser contaminadas por essa observações "surpreendentes", isto é, a informação dada pelas amostras poderá ser distorcida.

Torna-se portanto fundamental procurar meios de interpretar ou reconhecer "outliers". No entanto, até agora, a detecção de "outliers" não tem sido feita por métodos rigorosos e objectivos, uma vez que na selecção das observações a testar se têm utilizado apenas processos intuitivos (os candidatos a "outliers" são escolhidos empiricamente, *a priori*).

Com o método GAN (generativo de alternativa natural), Rosado, na sua tese de doutoramento (1984), trata o problema de uma forma objectiva, sendo a observação rejeitada como "outlier" escolhida *a posteriori*, uma vez rejeitada a homogeneidade nas observações.

A detecção e tratamento de "outliers" têm importância em todas as áreas científicas e aplicações que recorrem a estudos estatísticos. As técnicas de detecção e identificação de "outliers" são também importantes para a eliminação de elementos estranhos em amostras de populações e para o ajustamento de modelos regressionais ou outros (através do estudo de existência de "outliers" nos resíduos).

A distribuição exponencial tem um papel relevante em muitas aplicações, principalmente quando se pretende estudar tempos de vida de sistemas (mecânicos, electrónicos, biológicos ou outros) ou suas componentes.

A "performance" dos testes desenvolvidos para detecção e identificação de "outliers" em populações exponenciais, quer os clássicos quer os novos testes obtidos por Rosado, não era conhecida, não obstante a existência de critérios de medição de "performance" para testes desta natureza propostos na literatura e aceites como relevantes.

Um dos objectivos deste trabalho é a obtenção de novas estatísticas de teste obtidas pelo método GAN, de forma a cobrir todas as hipóteses possíveis (para um "outlier") no que respeita à distribuição exponencial. Um outro objectivo é a elaboração de tabelas de valores críticos e, por fim, a determinação das medidas de "performance" dos testes já existentes e dos novos obtidos neste trabalho. Será feito um estudo comparativo da "performance" dos vários testes, estudo esse que trará consequências sobre a sua aplicação prática.

Posto isto, vejamos sucintamente no que consta o trabalho.

No capítulo I começaremos por ver o que é um "outlier", como aparece, como o detectar e por fim como o tratar (o que fazer com ele). Nesta parte do trabalho seguiremos de perto Braumann (1989). A seguir vamos ver o que são testes de discordância para "outliers"; serão apresentados os testes tradicionais e abordado um novo teste de Rosado (1984). No ponto 1.5 abordaremos as medidas de "performance" dos testes.

Já no capítulo II será desenvolvido o novo método de Rosado (1984), o método generativo de alternativa natural (método GAN) e com base nele obteremos novas estatísticas de teste para o caso da distribuição exponencial. Para além da obtenção destas novas estatísticas serão também apresentadas as estatísticas já anteriormente obtidas por Rosado, algumas das quais coincidem com as estatísticas clássicas. Para todas estas estatíticas serão determinadas as respectivas funções de distribuição, para os dois casos possíveis: existência de "outlier" na amostra e não existência de "outlier" na amostra.

No capítulo III e relativamente a todas as estatísticas, serão determinadas expressões analíticas para o cálculo dos valores críticos e para as medidas de "performance". Apresentar-se-ão também formas de proceder ao cálculo numérico das mesmas, deduzindo-se por vezes fórmulas alternativas que visam facultar e apressar o cálculo, o qual, de outra forma, se tornaria praticamente impossível.

No capítulo IV apresentar-se-ão tabelas de valores críticos e tabelas das medidas de "performance". Será ainda feita uma análise destes valores, nomeadamente comparando a "performance" dos novos testes obtidos pelo método GAN com a "performance" de testes tradicionais.

1.2 O QUE SÃO "OUTLIERS" E COMO APARECEM?

A percepção da existência de valores duvidosos ou anómalos num conjunto de dados já não é recente e data certamente desde meados do século XVIII. No entanto, isto não obsta a que dois séculos depois ainda não exista uma definição objectiva de "outlier" aceite universalmente. De facto, em praticamente toda a literatura sobre o assunto, a noção de "outlier" é um tanto vaga. Senão vejamos algumas definições:

Grubbs (1969) definiu "outlier" como uma observação que parece desviar-se marcadamente dos outros membros da amostra a que pertence.

Em Hawkins (1980) "outlier" é definido como uma observação que se desvia tanto das outras observações que se torna suspeito que tenha sido gerada por um mecanismo diferente.

Barnett e Lewis (1984) definem "outlier", num conjunto de dados, como uma observação (ou subconjunto de observações) que parece ser inconsistente com as restantes observações desse conjunto de dados.

Como se vê, nas três definições o ponto crucial do problema está sujeito a um julgamento subjectivo por parte do observador. A propósito dessa subjectividade pode-se ler em Beckman e Cook (1983) pg. 120: *Although much has been written, the notion of an outlier seems as vague today as it was 200 years ago.* Mas para clarificar um pouco as ideias, vamos ver um caso relatado por Barnett e Lewis (1984), o qual, na nossa opinião, se torna bastante elucidativo:

Em 1949 foi apresentado a tribunal, em Inglaterra, um pedido de divórcio por parte do marido, baseando-se no facto de a mulher ter dado à luz 349 dias depois dele se ter ausentado do país. Para o marido, este número desviava-se "marcadamente" dos restantes períodos de gestação (em média de 280 dias). Assim, considerou-o um "outlier". No entanto, não foi bem sucedido no seu pedido, pois o tribunal considerou que, embora pouco provável, o período de 349 dias não era impossível de acontecer. Assim, embora considerando que se tratava de uma observação surpreendentemente extrema, incluiu-a na distribuição de todas as gestações começadas 349 dias antes de ela ter dado à luz. No entanto, o marido podia ter razão e essa observação pertencer a uma outra distribuição (de todas as gestações com origem nalgum dia mais tardio).

Além disso, suponhamos que ela tivesse dado à luz 280 dias depois de o marido se ausentar, tendo tido na realidade uma gestação de apenas 260 dias. A observação 280 dias não estava "marcadamente" desviada nem era "inconsistente" com as restantes observações (até coincidia com a média) e, no entanto, tratava-se de uma observação de uma outra população.

A observações deste tipo, isto é, observações de uma outra distribuição, chamam Barnett e Lewis contaminantes. Assim, segundo eles, contaminantes podem ser "outliers" (o caso de 349 dias tendo o marido razão - ver fig.1) ou não ser "outlier" (o último exemplo que vimos de 280 dias - ver fig.2). Também os "outliers" podem ser contaminantes ou não. Pode tratar-se de uma observação de uma outra distribuição e que é "marcadamente" extremo (portanto "outlier"-contaminante - ver fig.1), mas também se pode tratar de um valor "marcadamente" extremo que pertence à mesma distribuição (caso dos 349 dias tendo a mulher razão) ou que apareceu devido a um erro de medição, a um erro de dactilografia, etc. (ver fig.3). Vejamos graficamente, considerando F, G e H as funções de distribuição dos tempos de gestação de todas as gestações com início, respectivamente, nos dias 0, 60 e -20.

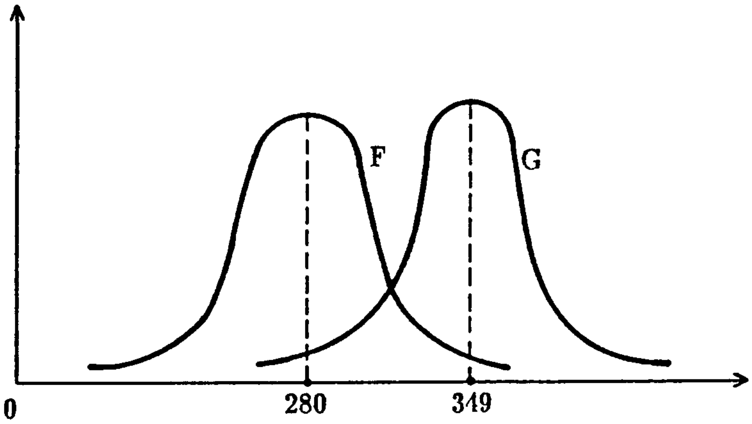


Fig.1: 349 é uma obs. da dist. G

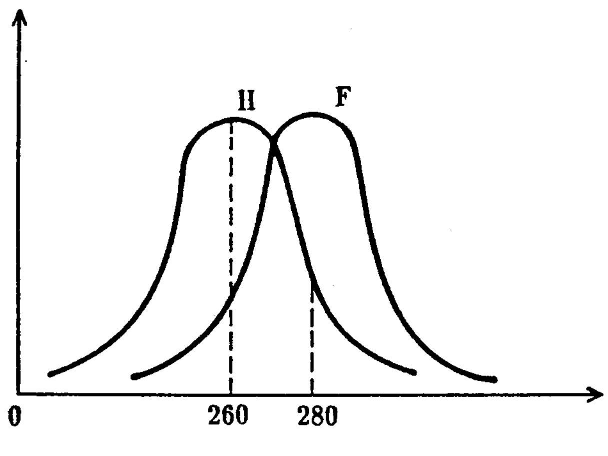


Fig.2: 280 é uma obs. da dist. H

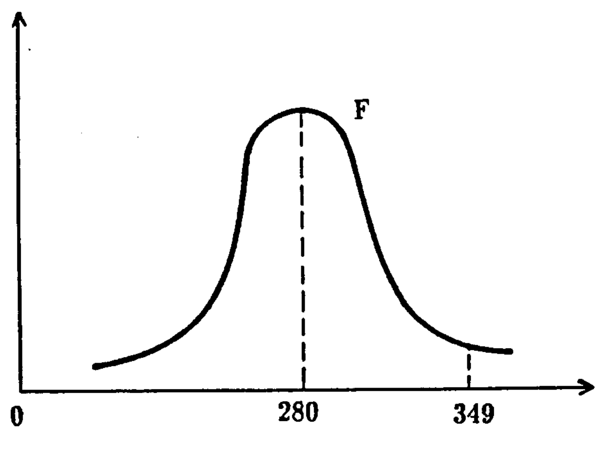


Fig.3: 349 é uma obs. da dist. F

Como é impossível saber se um "outlier" é uma observação de uma outra distribuição ou se é uma observação errada ou extrema da distribuição com que se está a trabalhar, em todos os casos o "outlier" é tratado de igual modo, isto é, como contaminante. Quanto aos contaminantes que não sejam "outliers", Barnett e Lewis reconhecem a sua incapacidade em os detectar, conforme se pode ler em "Outliers in Statistical Data" (1984) pag.6: *Of course, we have no way of knowing whether or not any observation is a contaminant. All we can do is* *concentrate attention on outliers as the possible manifestation of contamination and we shall see how statistical methods for examining outliers aim specifically at this prospect.*

Podemos dizer que para Barnett e Lewis valores extremos podem ser ou não "outliers" mas "outliers" são sempre valores extremos. E este conceito de "outlier" tem sido o conceito clássico, o qual prevaleceu até aos nossos dias. Assim, tem-se vindo a considerar candidatos a "outliers" (sujeitos a posterior confirmação) apenas valores extremos, deixando de lado os contaminantes que não são valores extremos. Isto porque a abordagem ao problema tem sido feita *a priori*, isto é, primeiro desconfia-se de que uma observação é um "outlier" e só depois se vai decidir se se tinha ou não razão em desconfiar. Ora, empiricamente só se detectam valores surpreendentes extremos.

No entanto, Rosado (1984) na sua tese de doutoramento, definiu um método, o qual gera a observação "outlier", no caso de existir. Trata-se portanto de um método objectivo. Adiante veremos no que consiste este método e como, com base nele, se pode apresentar uma definição objectiva de "outlier", a qual englobará não apenas valores extremos mas qualquer contaminante, mesmo que não seja extremo. Em certas populações normais foram já, por este método, encontrados "outliers" que não são valores extremos.

1.3 COMO DETECTAR E TRATAR OS "OUTLIERS"?

O problema da detecção e tratamento das "observações aberrantes", "surpreendentes" ou "não representativas" surgiu no momento em que o homem se começou a preocupar com a análise dos dados. Desde logo se apercebeu que as informações contidas nesses dados poderiam ser distorcidas ou até mesmo alteradas profundamente devido à existência dos chamados "outliers". Foi portanto do consenso geral o facto de existirem "outliers", mas (e de acordo com o que verificámos ao tentar dar uma definição de "outlier") a sua detecção, bem como a forma de os tratar, tem sido polémica e sujeita a muitas divergências. Por exemplo, Boscovich em 1755, ao tentar determinar a elipsidade da terra fez dez medições do excesso do grau polar sobre o equatorial, vindo a determinar a média apenas com uma amostra de oito pois decidiu desfazer-se dos dois valores extremos; e tal como ele muitos outros autores apareceram também abertos à ideia de rejeitar qualquer "outlier". Legendre em 1805 recomendava a rejeição de desvios que se julgassem grandes demais para serem admissíveis. Por outro lado, outros autores mostravam-se bastante renitentes em rejeitar qualquer observação. Vejamos, por exemplo, o caso de Daniel Brenoulli, o qual, em 1977, referindo-se a observações de astronomia, defendeu que não haveria necessidade de desenhar uma linha divisória entre as observações que deveriam ser rejeitadas e as que deveriam ser conservadas, podendo mesmo acontecer que as rejeitadas fossem as que melhor informação dessem ou melhor servissem para corrigir as outras. No entanto, achava que uma ou outra observação pudesse eventualmente ser rejeitada mas apenas no caso do observador não estar completamente seguro de que não houve nenhum erro de observação. Defendendo este mesmo ponto de vista, Bessel e Baener escreveram em 1838, que nunca rejeitaram uma observação meramente porque tinha um grande desvio e que todas as observações deviam poder contribuir com igual peso para o resultado. E desde este período até meados do século XIX o principal ponto de discussão na literatura sobre o assunto foi o facto de se poder justificar ou não a rejeição de um "outlier".

No entanto começaram a aparecer posições mais conciliadoras do que as que vimos inicialmente, isto é, de um lado os que rejeitavam de ânimo leve qualquer observação extrema e do outro os que pretendiam conservar todas dando-lhes igual peso. Surgiram então critérios para a detecção de "outliers", podendo referirmo-nos aqui aos testes de Pierce em 1852, de Chauvenet em 1863 e de Stone em 1868.

Quanto à forma de tratar os "outliers" (depois de detectados) podemos dizer que apareceram escritores menos drásticos do que os primeiros apresentados, os quais tentaram encontrar um ponto de equilíbrio. Assim, apareceu em 1872-73, com Glaisher, o primeiro processo de pesagem (ou ponderação), processo esse que permite acomodar os "outliers", isto é, minimizar a sua influência. E muitos outros processos de pesagem se seguiram (Stone em 1973, Newcomb em 1886, Mendele em 1895, etc.). Um estudo histórico completo, incluindo referências aos trabalhos indicados, poderá ser feito em "An Encyclopaedic Survey" de Harter (1974-76).

Por uma questão de curiosidade podemos lembrar os concursos de patinagem artística, já nos nossos dias, que, até recentemente, rejeitavam a pontuação mais elevada e a mais baixa. Hoje já não o fazem, dando igual peso a todas as pontuações.

Vamos ver a seguir métodos estatísticos para o estudo de "outliers", embora, na nossa opinião, antes de qualquer método estatístico, o primeiro passo, na presença de uma observação surpreendente, deverá ser tentar descobrir porquê relativamente à experiência. Tentar ver se foi um erro de medição ou muito simplesmente um erro ao passar os resultados. Vejamos um exemplo. Suponhamos que ao lançar um dado 6 vezes se obteve:

1, 2, 6, 45, 3.

É óbvio que não iremos testar o número 45 como "outlier". O que falta aqui é uma vírgula e deveria ser:

1, 2, 6, 4, 5, 3.

1.4 TESTES DE DISCORDÂNCIA PARA "OUTLIERS"

Estes testes também aparecem na literatura, por vezes, com a designação de testes de rejeição de "outliers". Não nos parece, no entanto, um termo correcto, uma vez que a rejeição não é a única hipótese possível para tratar os "outliers" (como vimos em 1.3).

Vejamos então no que consiste um teste de discordância para "outliers" que, como qualquer outro teste de hipóteses, terá uma hipótese nula e uma hipótese alternativa. Num teste de discordância de "outliers", a hipótese nula deverá expressar algum modelo probabilístico básico para a geração de toda a amostra sem contemplação de "outliers"; a hipótese alternativa expressa uma forma em que o modelo poderá ser modificado para incorporar ou explicar os "outliers".

Como é óbvio, para cada situação particular, dever-se-à escolher um teste específico. No entanto, esta escolha não deverá ser feita depois de inspeccionados os dados, o que seria incorrecto.

A escolha do modelo probabilístico básico para a hipótese nula é importantíssimo. De salientar que que uma observação poderá ser considerada "outlier" para uma distribuição e não o ser para outra. Também a escolha da hipótese alternativa se reveste de primordial importância e existem vários tipos de hipóteses alternativas para optar. No entanto, neste trabalho apenas utilizaremos a alternativa por deslizamento e para não nos alongarmos muito falaremos aqui apenas nela (as restantes poderão ser encontradas em Barnett e Lewis (1984)). Vejamos então no que consiste a alternativa por deslizamento: suponhamos que estamos a testar um "outlier" superior $X_{(n)}$ numa amostra univariada $X_1,...,X_n$. A hipótese nula é:

$$H_0 : X_i \sim F \qquad (i=1,...,n),$$

ou seja, todas as observações vêm da distribuição F a qual poderá ser, por exemplo, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ com μ e σ desconhecidos. Consideremos uma alternativa por deslizamento H_1 que diz que n-1 das observações pertencem a F e que a observação n, X_n, pertence a uma distribuição diferente de F, que poderá ser $\mathcal{N}(\mu+a,\sigma^2)$ (deslizamento em localização) ou $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2 \exp a)$ (deslizamento em dispersão). Temos então as hipóteses formuladas da seguinte forma:

$$H_0 : a=0$$

$H_1 : a>0$ e vamos testar $X_{(n)}$ como "outlier".

Por vezes a escolha da hipótese alternativa não é fácil, conforme se pode ver em Barnett e Lewis (1984): *The historical development of tests of outliers mirrors such a progression in statistical sophistication. Whilst the declaration of the alternative hypothesis in the crux of the problem of defining just what we mean by outliers, it still has not been very widely discussed. Perhaps this is inevitable: outliers are not easily defined, or incorporated in a generally acceptable form of model, and a degree of controversy still surrounds their study.*

Quanto às estatísticas de teste empregues, elas dependem em primeiro lugar da hipótese alternativa empregue. Para a construção destas estatísticas existem processos intuitivos, bem como dois métodos estatísticos dos quais apenas iremos falar do princípio de máxima verosimilhança. Várias estatísticas de teste são propostas em Barnett e Lewis (1984), nomeadamente as estatísticas de tipo Dixon bem como algumas de que iremos tratar neste trabalho, como sejam as estatísticas $X_{(1)}$, $X_{(n)}$, $X_{(1)}/\Sigma X_i$ e $X_{(n)}/\Sigma X_i$.

Além da escolha das hipóteses nula e alternativa e da estatística, falta ainda pre-definir o nível de significância com que se pretende elaborar o teste de discordância. É de notar que a noção de nível de significância se torna irrelevante pelos métodos tradicionais, uma vez que só se fazem testes quando se desconfia , *a priori*, das amostras que podem ter "outliers".

Os métodos tradicionais (ver Barnett e Lewis (1984)), apresentam três fases distintas para o estudo de "outliers":

1º Detecção (subjectiva) das observações surpreendentes,

2º Teste de discordância para essas observações, o qual permite confirmar ou rejeitar tais valores como "outliers",

3º Acomodação dos dados.

Quanto à primeira fase, escolhem apenas valores extremos (os quais ocorrem em qualquer conjunto de dados). Na segunda fase vão ver se esses valores extremos podem ser considerados pertencentes a uma distribuição assumida para a população (modelo previamente adoptado), ou se pertencem a uma distribuição alternativa. De notar que cada hipótese alternativa só serve para aquela observação que se seleccionou *a priori*. Como é óbvio, a formulação do modelo de discordância é determinante para a aceitação ou rejeição de uma observação extrema como "outlier". É até condicionante da própria noção de "outlier". De facto, uma observação pode ser "outlier" para um modelo de discordância e não o ser para outro.

A terceira fase já foi abordada no ponto 1.3. Processos de acomodação são definidos por Barnett e Lewis como métodos estatísticos que permitem inferências não distorcidas pela presença de "outliers".

No capítulo II apresentaremos um outro tipo de teste de discordância chamado método generativo de alternativa natural (método GAN) que se deve a Rosado (1984), baseado no princípio da razão de verosimilhança. Este teste apresenta a seguinte distinção (crucial) relativamente aos métodos tradicionais: a ordem da primeira e segunda fases é invertida, isto é, primeiro formula-se o modelo de discordância com base no qual se testa a homogeneidade nas observações. Se no teste de homogeneidade nos decidirmos pela sua aceitação (isto é, aceitamos que a amostra é homogénea), então concluímos que não existem "outliers". Se, no entanto, a homogeneidade for rejeitada, passa-se à fase seguinte na qual é seleccionada a observação "outlier". Trata-se portanto de uma selecção objectiva, feita *a posteriori*.

Ao contrário dos métodos tradicionais que apenas detectam valores extremos (máximos e mínimos) como "outliers", com o método GAN é possível encontrar candidatos a "outliers" que não sejam valores extremos. De facto, para o caso da distribuição normal foi detectada a possibilidade de o elemento mais próximo da média ser um "outlier" (ver Rosado (1984a)) ou, no caso de dois "outliers", o par constituído pelos dois elementos mais próximos da média ou os pares constituídos pelo elemento mais próximo da média e por um extremo, serem candidatos a "outliers" (ver Braumann (1989)). Intuitivamente este facto não é de estranhar, uma vez que obter uma observação muito próxima da média pode ser suspeito. Por exemplo, desconfia-se hoje que Mendell falsificou os dados relativos às suas experiências com ervilhas, para provar o seu ponto de vista, e esta desconfiança deve-se ao facto de os resultados serem muito próximos dos valores médios esperados; terá utilizado uma distribuição (pessoal) com variância muito inferior à real.

1.5 MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DOS TESTES

Seja α o nível de significância do teste. Consideremos uma amostra de n elementos, tal que

$$X_1,...,X_{n-1} \sim \text{Exp}(1) \qquad \text{e} \qquad X_n \sim \text{Exp}(\delta') \qquad \text{(contaminante).}$$

Formulando as hipóteses:

$$H_0 : \delta' \text{ tem o valor } 1$$

$$H_1 : \delta' \text{ tem um valor diferente de } 1.$$

Em David (1981), para as estatísticas do tipo $W = \min_{1 \leq j \leq n} W_j$ (ou $W = \max_{1 \leq j \leq n} W_j$)

é definida a região de rejeição, $\mathcal{R}$, como sendo da forma $W < c$ (ou $W > c$), onde c é o valor crítico - critério de discordância. Em caso de se concluir pela contaminação, a observação responsável é o W_j que minimiza (ou maximiza).

Posto isto, são definidas as seguintes medidas de "performance":

P_1 = Potência = $P(W \in \mathcal{R} \mid H_1)$ = probabilidade de concluir pela existência de contaminação, admitindo que ela existe.

P_2 = $P(W_n \in \mathcal{R} \mid H_1)$ = probabilidade de que o contaminante satisfaça o critério de discordância, admitindo que há contaminante.

$P_3 = P(W \in \mathfrak{R}$ e $W = W_n \mid H_1)$ = probabilidade de concluir pela existência de contaminação e responsabilizar a observação contaminante, admitindo que há contaminação.

$P_4 = P(W \in \mathfrak{R}$, $W = W_n$ e $W_1,\ldots,W_{n-1} \notin \mathfrak{R} \mid H_1)$ = probabilidade de concluir pela existência de contaminação e a única observação que satisfaz o critério de discordância ser a observação contaminante, admitindo que há contaminação.

$P_5 = P(W_n \in \mathfrak{R} \mid W = W_n, H_1)$ = probabilidade de a observação contaminante satisfazer o critério de discordância caso tenha sido considerada (potencialmente) responsável e caso haja contaminação $= P_3 / P_6$

onde $P_6 = P(W = W_n \mid H_1)$ = probabilidade de considerar (potencialmente) responsável a observação contaminante, caso haja contaminação.

NOTA: Esta última probabilidade foi denominada por nós P_6 por uma questão de comodidade.

Vê-se que $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4$.

Hawkins (1980a) usa a notação β_1, β_2, β_3, β_4 e β_5 para P_3, P_1, P_5, P_2 e P_4, respectivamente, e recomenda o uso de β_1 e β_2.

Barnett e Lewis (1984) afirmam que P_1, P_3 e P_5 são medidas bastante úteis, podendo as três ser consideradas como contendo entre elas toda a informação relevante sobre a "performance" de um teste de discordância, contra uma alternativa de deslizamento. Pouca importância dão a P_2 e P_4. Além disso, introduzem duas novas medidas baseadas em P_1, P_3 e P_5 e que são elas P_3 / P_5 e $P_1 - P_3$, por nós designadas por P_6 e P_7, respectivamente.

O seu significado é o seguinte:

$P_6 = \frac{P_3}{P_5} = P(W = W_n \mid H_1)$ = probabilidade de que o contaminante apareça como "outlier".

$P_7 = P_1 - P_3$ = probabilidade de que o teste conclua pela existência de contaminante, mas erradamente identifique uma boa observação como contaminante.

É óbvio que se desejará P_7 o mais pequeno possível, enquanto que P_1, P_3, P_5 e P_6 tão grandes quanto possível, embora as duas últimas medidas pareçam estar em conflito. Barnett e Lewis(1984) apresentam contudo um exemplo hipotético que poderá responder a esta dúvida. Consideremos dois testes com as seguintes medidas de "performance":

	Teste A	Teste B
P_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
P_5	1	$\frac{1}{2}$
P_6	$\frac{1}{2}$	1

Barnett e Lewis concluem que o teste A é preferível ao teste B pois é preferível um alto valor de P_5 a um alto valor de P_6. Justificam da seguinte forma: no teste A o contaminante tem apenas 50% de hipótese de se mostrar como valor extremo, indicando que o grau de contaminação não é severo em média (o valor de a em H_1 não é grande); contudo, quando o contaminante aparece como o "outlier" é certo ser detectado. No teste B, por outro lado, contaminação é mais severa e o contaminante é sempre o valor extremo. Mas é só detectado como discordante 50% das vezes e o que se pretende de um teste é que ele identifique contaminação quando ela é suficientemente manifesta.

Capítulo II

Estatísticas de Teste Obtidas pelo Método GAN e suas Funções de Distribuição

2.1 MÉTODO GENERATIVO DE ALTERNATIVA NATURAL (MÉTODO GAN)

Seguindo Rosado (1984), apresentamos em seguida a formulação do modelo de discordância com alternativa natural. Para melhor facilidade de exposição e melhor compreensão, consideraremos apenas o caso de a f.d.p. da população depender de um único parâmetro δ. A generalização do método para mais de um parâmetro é imediata.

A. Formulação do modelo de discordância

Seja H_0 a hipótese de homogeneidade, a qual considera que todas as observações (independentes) da amostra $X_1, X_2,...,X_n$ têm f.d.p. $f(x;\delta)$ e seja $\bar{H}$ a hipótese alternativa natural, na qual se considera que existe um "outlier" na amostra, podendo ser qualquer dos n elementos. Seja X_j tal elemento. Então, a sub-hipótese $\bar{H}_j$ admite que X_j tem f.d.p. $f(x;\delta')$, com $\delta \neq \delta'$. Tem-se $\bar{H} = \bigcup_{j=1}^{n} \bar{H}_j$.

A função de verosimilhança da amostra é, na hipótese H_0,

$$L_0(x_1, x_2,...,x_n; \delta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \delta)$$

e, na hipótese $\bar{H}_j$,

$$L_j(x_1, x_2,...,x_n; \delta, \delta') = f(x_j; \delta') \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} f(x_i; \delta)$$

Sejam $\hat{\delta}_j$ o estimador de máxima verosimilhança de δ na hipótese $\bar{H}_j$, $\hat{\delta}'_j$ o estimador de máxima verosimilhança de δ' na hipótese $\bar{H}_j$ e $\hat{\delta}$ o estimador de máxima verosimilhança de δ na hipótese H_0. Teremos então como máximos das funções de verosimilhança sob H_0 e $\bar{H}_j$, respectivamente

$$\hat{L}_0 = L_0(x_1, x_2,...,x_n; \hat{\delta}) \quad \text{e} \quad \hat{L}_j = L_j(x_1, x_2,...,x_n; \hat{\delta}_j, \hat{\delta}'_j).$$

B. Teste de homogeneidade

Para a formulação dum teste de homogeneidade, comecemos por construir a razão de verosimilhanças

$$\ell_n = \frac{\hat{L}_0}{\max(\hat{L}_0, \max_j \hat{L}_j)} = \frac{1}{\max(1, \max_j \hat{L}_j/\hat{L}_0)}.$$

Daqui tira-se que $0 \leq \ell_n \leq 1$. Para grandes valores de ℓ_n (próximos de 1), estaremos na região de aceitação da hipótese de homogeneidade formulada para as observações $X_1, X_2,...,X_n$, uma vez que, neste caso, o máximo do denominador (na primeira expressão) será aproximadamente igual a $\hat{L}_0$, permitindo concluir que todas as observações seguem uma mesma distribuição com f.d.p. $f(x; \delta)$.

Então, baseando-nos em princípios de máxima verosimilhança, podemos formular a regra de teste:

Rejeitar H_0 se $\ell_n<c \qquad (c<1)$.

Se agora considerarmos a estatística

$$S(x_1, x_2,...,x_n) = \max_j \hat{L}_j/\hat{L}_0,$$

a região de rejeição de H_0 será

$$\frac{1}{\max(1, S(x_1,x_2,...,x_n))} < c \quad \text{e, como } c<1, \text{ teremos}$$

$$S(x_1,x_2,...,x_n) > c' \qquad (\text{onde } c' = 1/c > 1).$$

Logo, dada uma amostra $X_1, X_2,...,X_n$ e determinada a estatística $S(x_1, x_2,...,x_n)$, ou uma equivalente, se se verificar a condição anterior aceita-se a existência de um "outlier" e passa-se à fase seguinte.

C. Selecção do "outlier"

Caso se aceite a existência de um "outlier", o índice j onde a estatística $S(x_1, x_2,...,x_n)$ atinge o máximo, define a observação X_j considerada responsável pela não homogeneidade na amostra e que aceitaremos como "outlier". Rosado (1984) dá a seguinte definição objectiva de "outlier": "outlier" é aquela observação que, após rejeição da homogeneidade nas observações, for responsável por essa rejeição.

2.2 ESTATÍSTICAS DE TESTE OBTIDAS PELO MÉTODO GAN E SUAS FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO

Consideremos uma amostra aleatória X_1, X_2,...,X_n (independentes) de uma população com densidade de probabilidade

$$f(x;\ \lambda,\ \delta)= \begin{cases} \frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{x-\lambda}{\delta}\right) & \text{para } x \geq \lambda \\ 0 & \text{para } x < \lambda. \end{cases}$$

Trata-se portanto de uma população que segue uma distribuição exponencial com parâmetros de escala ou dispersão δ e parâmetro de localização λ.

Seguindo 2.1 podemos escrever:

$$H_0 : X_1, X_2,...,X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda,\ \delta)$$

$$\bar{H}_j : X_j \sim \mathrm{Exp}(\lambda,\ \delta') \quad \text{e restantes } X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda,\ \delta)$$

$$L_0 = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{x_i-\lambda}{\delta}\right)\right) = \frac{1}{\delta^n}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)\right)$$

$$L_j = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{x_i-\lambda}{\delta}\right)\right)\frac{1}{\delta'}\exp\left(-\frac{x_j-\lambda}{\delta'}\right) = g_1(\delta,\ \lambda)\ .\ g_2(\delta',\ \lambda), \text{ onde}$$

$$g_1(\delta,\ \lambda) = \frac{1}{\delta^{n-1}}\exp\left(-\frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)-(x_j-\lambda)\right)\right) \geq 0 \quad \text{e} \quad g_2(\delta',\ \lambda) = \frac{1}{\delta'}\exp\left(-\frac{x_j-\lambda}{\delta'}\right) \geq 0.$$

2.2.1 Parâmetro de localização (λ) conhecido

Como $L_j = g_1(\delta,\lambda).g_2(\delta',\lambda)$, a maximização de L_j com respeito a δ e a δ' pode ser feita separadamente, pois

$$\max_{\delta,\delta'} L_j = (\max_{\delta} g_1(\delta,\lambda)).(\max_{\delta'} g_2(\delta',\lambda)).$$

Também se vê que $L_0 = g_1(\delta,\lambda).g_2(\delta,\lambda)$, pelo que

(a) $\max\limits_{\delta,\delta'} \; L_j \geq \max\limits_{\delta} L_0$

(b) $\max\limits_{\delta'} \; L_j \geq L_0$.

Com efeito, (b) resulta de $\max\limits_{\delta'} \; g_2(\delta',\lambda) \geq g_2(\delta,\lambda)$ e (a) é consequência imediata de (b).

Temos então como estimadores de máxima verosimilhança e como máximos das funções de verosimilhança:

$$\begin{cases} \dfrac{d\, L_0}{d\, \delta} = 0 \Rightarrow \hat{\delta}_0 = \dfrac{\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)}{n}. \\ \\ \text{É de facto máximo pois } \dfrac{d^2\, L_0}{d\, \delta^2}\Big|_{\delta=\hat{\delta}_0} = \text{-}n\, \dfrac{1}{(\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)/n)^{n+2}}\, e^{-n} < 0. \\ \\ \text{Logo:} \\ \max\limits_{\delta}\; L_0 = \dfrac{1}{(\Sigma(x_i\text{-}\lambda)/n)^n}\, \exp(\text{-}n). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\, g_1(\delta,\lambda)}{d\, \delta} = 0 \Rightarrow \hat{\delta}_j = \dfrac{\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)\text{-}(x_j\text{-}\lambda)}{n\text{-}1}. \text{ Facilmente se vê que } \dfrac{d^2\, g_1(\delta,\lambda)}{d^2\, \delta^2}\Big|_{\delta=\hat{\delta}_j} < 0. \\ \\ \text{Logo:} \\ \max\limits_{\delta}\; g_1(\delta,\lambda) = \dfrac{1}{((\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)\text{-}(x_j\text{-}\lambda)/(n\text{-}1))^{n\text{-}1}}\, \exp\,(\text{-}(n\text{-}1)). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\, g_2(\delta',\lambda)}{d\, \delta'} = 0 \Rightarrow \hat{\delta}'_j = x_j\text{-}\lambda. \text{ Facilmente se vê que } \dfrac{d^2\, g_2(\delta',\lambda)}{d\, \delta'^2}\Big|_{\delta'=\hat{\delta}'_j} < 0. \\ \\ \text{Logo:} \\ \max\limits_{\delta'}\; g_2(\delta',\lambda) = \dfrac{1}{x_j\text{-}\lambda}\, \exp\,(\text{-}1). \end{cases}$$

Temos então:

$$\max_{\delta,\delta'} \ L_j = \max_{\delta} g_1(\delta,\lambda).\max_{\delta'} g_2(\delta',\lambda) = \frac{1}{((\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)\text{-}(x_j\text{-}\lambda))/(n\text{-}1))^{n\text{-}1}} \cdot \frac{1}{x_j\text{-}\lambda} \cdot \exp\,(\text{-}n)$$

e

$$\max_{\delta'} L_j = \frac{1}{\delta^{n\text{-}1}} \exp\,(\text{-}\frac{1}{\delta}\,\Sigma\,(x_i\text{-}\lambda)\text{-}(x_j\text{-}\lambda)).\ \frac{1}{x_j\text{-}\lambda} \exp\,(\text{-}1).$$

Seja $Y_i = \frac{X_i\text{-}\lambda}{\delta}$. Vem

$$H_0 : Y_1,\ Y_2,\ldots,\ Y_n \ \sim \text{Exp}(0,1)$$
$$\bar{H}_j : Y_j \ \sim \text{Exp}(0,\sigma) \text{ e restantes } Y_i \ \sim \text{Exp}(0,1) \text{ com } \sigma = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Seja $L = \min_{1 \leq j \leq n\text{-}1} Y_j$ e $M = \max_{1 \leq j \leq n\text{-}1} Y_j$.

$Y_{(1)} = \min\,(L,Y_n)$ e $Y_{(n)} = \max\,(M,Y_n)$ e Y_n é independente de (L,M), como é óbvio.

Vamos obter as distribuições de $Y_{(1)}$, de $Y_{(n)}$ e de $\left(Y_{(1)}\ ,\ Y_{(n)}\right)$ (que serão necessárias a seguir) quando $Y_n \sim \text{Exp}(0,\sigma)$ e $Y_1,Y_2,\ldots,Y_{n\text{-}1} \ \sim \text{Exp}(0,1)$, ou seja, no caso de X_n ser o "outlier" (escolhe-se X_n para facilitar a notação e uma vez que podia ser qualquer elemento da amostra).

Designaremos por H_1 a correspondente hipótese alternativa.

Sabe-se que $F_L(\ell) = 1\text{-}e^{\text{-}(n\text{-}1)\ell}$ para $\ell>0$ e $F_M(m) = (1\text{-}e^{\text{-}m})^{n\text{-}1}$ para $m>0$ (veja-se, por exemplo, Tiago de Oliveira, 1990, vol. I, pg. 129).

Então:

$$F_{Y_{(1)}}(y) = P(Y_{(1)} \leq y) = 1\text{-}P(Y_{(1)}>y) = 1\text{-}P(\min(L,Y_n)>y) = 1\text{-}P(L>y).P(Y_n>y) =$$

$= 1-(1-F_L(y)).e^{-y/\sigma} = 1-e^{-(n-1)y}.e^{-y/\sigma}$ para $y>0$.

$F_{Y_{(n)}}(y) = P(Y_{(n)} \leq y) = P(\max(M,Y_n) \leq y) = P(M \leq y).P(Y_{(n)} \leq y) =$

$= (1-e^{-y})^{n-1}.(1-e^{-y/\sigma})$ para $y>0$.

Para $\ell \leq m$ e $u \leq v$, tem-se:

$P_{L,M}(\ell,m) = P(L \geq \ell,\ M \leq m) = P(\ell \leq Y_1, \ldots, Y_{n-1} \leq m) = \prod_{j=1}^{n-1} P(\ell \leq Y_j \leq m) =$

$= \prod_{j=1}^{n-1} (e^{-\ell} - e^{-m}) = (e^{-\ell} - e^{-m})^{n-1}$ para $0 < \ell \leq m$.

$P_{Y(1),\,Y(n)}(u,v) = P(Y_{(1)} \geq u,\ Y_{(n)} \leq v) = P(L \geq u,\ Y_n \geq u,\ M \leq v,\ Y_n \leq v) =$

$= P(L \geq u,\ M \leq v) \cdot P(u \leq Y_n \leq v) = P_{L,M}(u,v) \cdot (e^{-u/\sigma} - e^{-v/\sigma}) =$

$= (e^{-u} - e^{-v})^{n-1} \cdot (e^{-u/\sigma} - e^{-v/\sigma})$ para $0 < u \leq v$.

Para $\ell>m$ e $u > v$, tem-se:

$P_{L,M}(\ell,m) = P(Y_1,\ldots, Y_{n-1} \leq m;\ Y_1,\ldots,Y_{n-1} \geq \ell) = P\ (\emptyset) = 0$ para $\ell>m>0$.

$P_{Y_{(1)},\,Y_{(n)}}(u,v) = P_{L,M}(u,v) \cdot P(Y_n \leq v,\ Y_n \geq u) = 0.\ P(\emptyset) = 0$ para $u > v > 0$.

$F_{L,M}(\ell,m) = F_M(m) - P_{L,M}(\ell,m) =$

$$= \begin{cases} (1-e^{-m})^{n-1} - (e^{-\ell} - e^{-m})^{n-1} & \text{para } 0 < \ell \leq m \\ (1-e^{-m})^{n-1} & \text{para } \ell > m > 0. \end{cases}$$

$$F_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v) = F_{Y_{(n)}}(v) - P_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v) =$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-v})^{n-1} \cdot (1 - e^{-v/\sigma}) - (e^{-u} - e^{-v})^{n-1} \cdot (e^{-u/\sigma} - e^{-v/\sigma}) & \text{para } 0 < u \leq v \\ (1 - e^{-v})^{n-1} (1 - e^{-v/\sigma}) & \text{para } u > v > 0. \end{cases}$$

2.2.1.1 Caso de δ conhecido e δ' conhecido ($\delta' \neq \delta$)

Neste caso tem-se $\hat{L}_0 = L_0$ e $\hat{L}_j = L_j$. Logo:

$$\ell_n = \frac{1}{\max(1, \max\limits_j L_j/L_0)} = \frac{1}{\max\left(1, \frac{\delta}{\delta'} \exp\left(\max\limits_j \left((x_j - \lambda)\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)\right)\right)\right)}.$$

A região de rejeição é da forma $\ell_n < c'$ com $c' < 1$, pelo que é equivalente a ser:

$$\frac{\delta}{\delta'} \exp\left(\max_j \left((x_j - \lambda)\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)\right)\right) > c'' \quad \text{desde que } c'' > 1.$$

Logo, uma estatística de teste equivalente é $A = \dfrac{X_{(1)} - \lambda}{\delta}$ caso $\delta' < \delta$, ou $B = \dfrac{X_{(n)} - \lambda}{\delta}$ caso $\delta' > \delta$. No caso da estatística A a região de rejeição é da forma $A < c$ e o candidato a "outlier" é a observação $X_{(1)}$. No caso da estatística B a região de rejeição é da forma $B > c$ e o candidato a "outlier" é $X_{(n)}$.

NOTA: Para usar A como estatística de teste dever-se-á verificar se $c < \dfrac{\ell n\, \sigma}{1 - \frac{1}{\sigma}}$, pois caso contrário não poderá ser usada.

NOTA: Para podermos usar B como estatística de teste deverá verificar-se $c > \dfrac{\ell n\, \sigma}{1 - \frac{1}{\sigma}}$.

Vejamos as funções de distribuição das estatísticas A e B.

Temos $A = Y_{(1)} = \min(L, Y_n)$ e $B = Y_{(n)} = \max(M, Y_n)$.

Logo (veja-se pags. 19 e 20):

$F^1{}_A(a) = 1 - e^{-(n-1)a}\ e^{-a/\sigma}$ para $a > 0$

$F^0{}_A(a) = 1 - e^{-na}$ para $a > 0$

$F^1{}_B(b) = (1 - e^{-b})^{n-1} \cdot (1 - e^{-b/\sigma})$ para $b > 0$

$F^0{}_B(b) = (1 - e^{-b})^n$ para $b > 0$.

2.2.1.2 Caso de δ conhecido e δ'desconhecido, sem informação suplementar

Neste caso tem-se:

$\hat{L}_0 = L_0$

$\hat{L}_j = \max\limits_{\delta'} L_j \geq \hat{L}_0$ (Veja-se (b) pag. 18). Logo $\hat{L}_j / \hat{L}_0 \geq 1$, donde se conclui que

$\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j / \hat{L}_0) = \max\limits_j (\hat{L}_j / \hat{L}_0)$

e, portanto

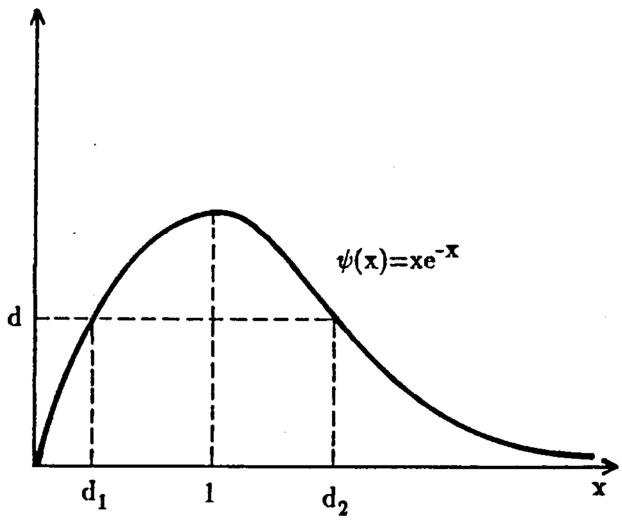
$$\ell_n = \frac{1}{\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j / \hat{L}_0)} = \min_j \hat{L}_0 / \hat{L}_j.$$

Assim (substituindo $\hat{L}_0$ e $\hat{L}_j$ pelos seus valores):

$$\ell_n = \min_j \frac{1/\delta^n \ \exp\left(-\frac{1}{\delta}\Sigma(x_i - \lambda)\right)}{1/\delta^{n-1} \ \exp\left(-\frac{1}{\delta}(\Sigma(x_i - \lambda) - (x_j - \lambda))\right)\frac{1}{x_j - \lambda}e^{-1}} = eD, \text{ onde}$$

$D = \min_j \left(\frac{x_j - \lambda}{\delta}\exp\left(-\frac{x_j - \lambda}{\delta}\right)\right)$ e poderá ser usada como estatística de teste.

De notar que $\frac{x_j - \lambda}{\delta} > 0$. Vejamos agora o comportamento da função $\psi\ (x) = xe^{-x}$.



Verifica-se que o mínimo da função é atingido nos pontos $x_{(1)}$ ou $x_{(n)}$. Assim podemos escrever:

$$D = \min\left(\frac{X_{(1)}-\lambda}{\delta}\exp\left(-\frac{X_{(1)}-\lambda}{\delta}\right), \frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta}\exp\left(-\frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta}\right)\right).$$

A região de rejeição será $D < c$, isto é, $\frac{X_{(1)} - \lambda}{\delta} < c_1$ ou $\frac{X_{(n)} - \lambda}{\delta} > c_2$. O candidato a "outlier" será $X_{(1)}$ se $D = \frac{X_{(1)}-\lambda}{\delta} \exp\left(- \frac{X_{(1)}-\lambda}{\delta}\right)$ e será $X_{(n)}$ se $D = \frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta} \exp\left(- \frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta}\right)$.

Vejamos as funções de distribuição da estatística D.

Temos $D = \min_j (Y_j \exp(-Y_j)) = \min(Y_{(1)} \exp(-Y_1), Y_{(n)} \exp(-Y_{(n)}) =$

$= \min(\psi(Y_{(1)}), \psi(Y_{(n)}))$.

Logo (veja-se pag. 20):

$F^1{}_D(d) = P(D \leq d \mid H_1) = 1\text{-}P(D > d \mid H_1) = 1\text{-} P(d_1 < Y_{(1)} < d_2, d_1 < Y_{(n)} < d_2 \mid H_1) =$

$= 1\text{-} P_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(d_1, d_2) = 1\text{-} (e^{-d_1} - e^{-d_2})^{n-1} (e^{-d_1/\sigma} - e^{-d_2/\sigma})$ para $0 < d < 1/e$.

$F^0{}_D(d)$ é o caso particular de $F^1{}_D(d)$ quando $\sigma = 1$.

Assim, podemos escrever :

$$F^1{}_D(d) = \begin{cases} 1\text{-}(e^{-d_1} - e^{-d_2})^{n-1} (e^{-d_1/\sigma} - e^{-d_2/\sigma}) & \text{para } 0 < d < 1/e \\ 1 & \text{para } d \geq 1/e \\ 0 & \text{para } d \leq 0 \end{cases}$$

$$F^0{}_D(d)=\begin{cases} 1-(e^{-d_1}-e^{-d_2})^n & \text{para } 0 < d < 1/e \\ 1 & \text{para } d \geq 1/e \\ 0 & \text{para } d \leq 0 \end{cases}$$

com $0 < d_1 < 1 < d_2$ tal que $d_1 e^{-d_1} = d_2 e^{-d_2} = d$.

2.2.1.3 Caso de δ conhecido e δ'desconhecido, com informação suplementar $\delta' \leq \delta$

Devemos usar $\max\limits_{j:\hat{\delta}'_j<\delta} \hat{L}_j/\hat{L}_0$.

Ora $\hat{\delta}'_j<\delta \Leftrightarrow \frac{x_j-\lambda}{\delta} < 1$. Caso não haja nenhum j nestas condições, isto é, caso $\frac{x_{(1)}-\lambda}{\delta} \geq 1$,

vem $\max\limits_{j:\hat{\delta}'_j<\delta} \hat{L}_j/\hat{L}_0 = 0$ e $\max\,(1, \max\limits_{j:\hat{\delta}'_j<\delta} \hat{L}_j/\hat{L}_0) = 1$, donde $\ell_n=1$.

Caso $\frac{x_{(1)}-\lambda}{\delta} < 1$, vem $\ell_n = \min\limits_{j:\frac{x_j-\lambda}{\delta}<1} \hat{L}_0/\hat{L}_j$ (veja-se 2.2.1.2), donde, dada a forma de ψ,

vem:

$$\ell_n=\left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{se } A = \dfrac{X_{(1)}-\lambda}{\delta} \geq 1 \\ \\ e\,A\exp(-A) & \text{se } A<1 \end{array}\right\} = e\psi(\min(A, 1)).$$

Uma estatística equivalente é min(A,1), com região de rejeição min(A,1) $<$ c, sendo obrigatoriamente $c \leq 1$ (se $c>1$, H_0 seria sempre rejeitada, donde seria P(rejeitar $H_0 \mid H_0$)= 1 em vez de igual a α). Neste caso $c \leq 1$, a região de rejeição é equivalente a A$<$ c, podendo usar-se o valor crítico $c= -\frac{1}{n}\ \ell n(1-\alpha)$ de A desde que ≤ 1, isto é, desde que $\alpha \leq 1-e^{-n}$, o que sucede para os α's habituais. Logo:

Uma estatística equivalente é $A= \frac{X_{(1)}-\lambda}{\delta} = Y_{(1)}$ com região de rejeição da forma A$<$ c e candidato a "outlier" $X_{(1)}$, desde que $\alpha \leq 1-e^{-n}$.

Pode-se ver em 2.2.1.1 as funções de distribuição da estatística A.

2.2.1.4 Caso de δ conhecido e δ'desconhecido com informação suplementar $\delta' \geq \delta$

Fazendo um raciocínio idêntico ao feito em 2.2.1.3 com $\hat{\delta}'_j > \delta$, daria

$$\ell_n = e\psi(\max(B, 1)) \qquad \text{onde } B= \frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta}.$$

Logo:

Uma estatística equivalente é $B= \frac{X_{(n)}-\lambda}{\delta} = Y_{(n)}$ com região de rejeição da forma B $>$ c e candidato a "outlier" $X_{(n)}$, desde que $\alpha \leq 1 - \left(1-\frac{1}{e}\right)^n$.

Pode-se ver em 2.2.1.1 as funções de distribuição da estatística B.

2.2.1.5 Caso de δ desconhecido e δ' desconhecido sem informação suplementar

Neste caso temos:

$$\hat{L}_0 = \max_{\delta} L_0$$

$\hat{L}_j = \max\limits_{\delta,\delta'} L_j \geq \hat{L}_0$ (veja-se (a) pag. 18). Logo $\hat{L}_j \,/\, \hat{L}_0 \geq 1$, donde se conclui que

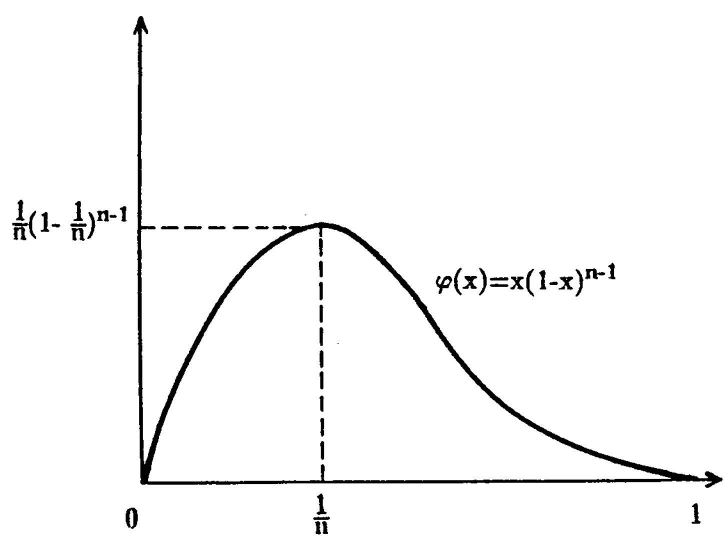
$$\max(1, \max_j \hat{L}_j \,/\, \hat{L}_0) = \max_j \hat{L}_j \,/\, \hat{L}_0$$

e, portanto

$$\ell_n = \frac{1}{\max\,(1, \max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0)} = \min_j \hat{L}_0/\hat{L}_j = \min_j \frac{\dfrac{x_j - \lambda}{(\Sigma(x_i-\lambda)/n)^n}}{1/((\Sigma(x_i-\lambda) - (x_j - \lambda)) \,/\, (n-1))^{n-1}} =$$

$$= \min_j \frac{x_j - \lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)} \cdot \left(1 - \frac{x_j - \lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)}\right)^{n-1} \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_j \varphi\left(\frac{x_j-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)}\right) \quad \text{onde } \varphi(x)=x(1-x)^{n-1}.$$

Veja-se o gráfico da função $\varphi(x)$:



Logo:

Uma estatística equivalente é $Z = \min_j \varphi\left(\frac{X_j-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}\right)$ com $\varphi(x) = x(1-x)^{n-1}$.

Como $\frac{X_j-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}$ varia entre 0 e 1, vem $Z = \min\left(\varphi\left(\frac{X_{(1)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}\right), \varphi\left(\frac{X_{(n)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}\right)\right)$. A região de rejeição é da forma $Z < c$ e o candidato a "outlier" é $X_{(1)}$ ou $X_{(n)}$ conforme $Z = \varphi\left(\frac{X_{(1)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}\right)$ ou $Z = \varphi\left(\frac{X_{(n)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}\right)$, respectivamente.

Para o cálculo das funções de distribuição da estatística Z, vamos supor (como já fizemos atrás) que X_n é o "outlier".

Note-se que

$$Z = \min_j \varphi\left(\frac{Y_j}{\Sigma Y_i}\right) = \min\,(\varphi(U), \varphi(T)) \quad \text{onde} \quad U = \frac{Y_{(1)}}{\Sigma Y_i} \ \text{e} \ T = \frac{Y_{(n)}}{\Sigma Y_i}.$$

Seja

$$V_j = \frac{X_j-\lambda}{(X_1-\lambda)+...+(X_n-\lambda)} = \frac{Y_j}{Y_1+...+Y_n} \qquad (j = 1, ..., n)$$

$$A_j = \begin{cases} \dfrac{X_j-\lambda}{(X_1-\lambda)+...+(X_{n-1}-\lambda)} = \dfrac{Y_j}{Y_1+...+Y_{n-1}} & \text{para } j = 1, ..., n-1 \\[2ex] \dfrac{(X_n-\lambda)/\sigma}{(X_1-\lambda)+...+(X_{n-1}-\lambda)} = \dfrac{Y_n/\sigma}{Y_1+...+Y_{n-1}} & \text{para } j = n. \end{cases}$$

Como $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}, Y_n/\sigma$ são i.i.d. Exp(1), A_n é independente de $A_1, \ldots, A_{n-1}$ (ver Lewis e Fieller, 1979).

$$V_j = \frac{\dfrac{Y_j}{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}}{1+\dfrac{Y_n}{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}} = \begin{cases} \dfrac{A_j}{1+\sigma A_n} = \dfrac{A_j}{1+S} & \text{para } j=1, \ldots, n\text{-}1 \\ \\ \dfrac{\sigma A_n}{1+\sigma A_n} = \dfrac{S}{1+S} & \text{para } j = n \end{cases} \qquad \text{com } S = \sigma\, A_n.$$

Seja $R = \min\limits_{1 \leq j \leq n-1} A_j$ e $H = \max\limits_{1 \leq j \leq n-1} A_j$. Temos S independente de (R,H), como é óbvio.

Vem:

$$U = \min_{1 \leq j \leq n} V_j = \min\left(\min_{1 \leq j \leq n-1} V_j, V_n\right) = \min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right)$$

$$T = \max_{1 \leq j \leq n} V_j = \max\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} V_j, V_n\right) = \max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right)$$

$$Z = \min_{1 \leq j \leq n} \varphi(V_j) = \min(\varphi(U), \varphi(T)) = \min\left(\varphi\left(\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right)\right), \varphi\left(\max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right)\right)\right) =$$

$$= \min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)\right).$$

NOTA: Verifica-se a última igualdade olhando para a curva φ (pag. 27) e comparando todas as posições relativas de $\frac{R}{1+S}$, $\frac{H}{1+S}$ e $\frac{S}{1+S}$ entre si e relativamente ao máximo de φ; note-se que $\frac{R}{1+S}$, $\frac{H}{1+S}$ e $\frac{S}{1+S}$ estão entre 0 e 1, já que $0 \leq A_j \leq 1 \;\; \forall_{j=1,\ldots,n-1} \Rightarrow 0 \leq R \leq 1$,

$0 \leq H \leq 1$ e $S \geq 0$.

Vejamos as funções de distribuição (quando X_n é o "outlier") de S, de (R,H) e de (U,T), necessárias para o cálculo das funções de distribuição de Z.

Função de distribuição de S

Seja $B = \frac{Y_n/\sigma}{Y_1+...+Y_n/\sigma}$. Vem $A_n = \frac{Y_n/\sigma}{Y_1+...+Y_{n-1}} = \frac{Y_n/\sigma}{Y_1+...+Y_n/\sigma - Y_n/\sigma} =$

$$= \frac{1}{\frac{Y_1+...+Y_n/\sigma}{Y_n/\sigma} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{B} - 1}.$$

Como $Y_1,...,Y_{n-1}, Y_n/\sigma \sim \text{Exp}(1)$ vem:

$Y_1+...+Y_{n-1} \sim$ Gama reduzida com n-1 g.ℓ. e $Y_n/\sigma \sim$ Gama reduzida com 1 grau de liberdade. Logo:

$$\frac{Y_n/\sigma}{Y_n/\sigma+(Y_1+...+Y_{n-1})} = B \sim \text{Beta}\ (1,\ n\text{-}1).$$

B tem distribuição com densidade

$$f_B(x) = \frac{x^{1-1}\ (1-x)^{(n-1)-1}}{B(1,\ n-1)} = (n-1)\ (1-x)^{n-2} \qquad \text{para } 0 < x < 1$$

e com função de distribuição

$$F_B(b) = \int_0^b f_B(x)\ dx = 1-(1-b)^{n-1} \qquad \text{para } 0 < b < 1.$$

Logo, para s> 0:

$$F_S(s)= P(\sigma A_n \leq s) = P\left(\frac{1}{\frac{1}{B}-1} \leq \frac{s}{\sigma}\right) = P\left(B \leq \frac{1}{1+\frac{\sigma}{s}}\right) = F_B\left(\frac{1}{1+\frac{\sigma}{s}}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1+\frac{\sigma}{s}}\right)^{n-1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^{n-1}}, \text{ donde}$$

$$f_S(s) = (n-1)\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^{n}}\frac{1}{\sigma} \qquad \text{para } s > 0.$$

Para o cálculo das f.d. de (R,H) comecemos por ver o domínio em que a f.d.p. de (R,H) é não nula.

É óbvio que $0 \leq R < \frac{1}{n-1} < H < 1$.

Tem-se:

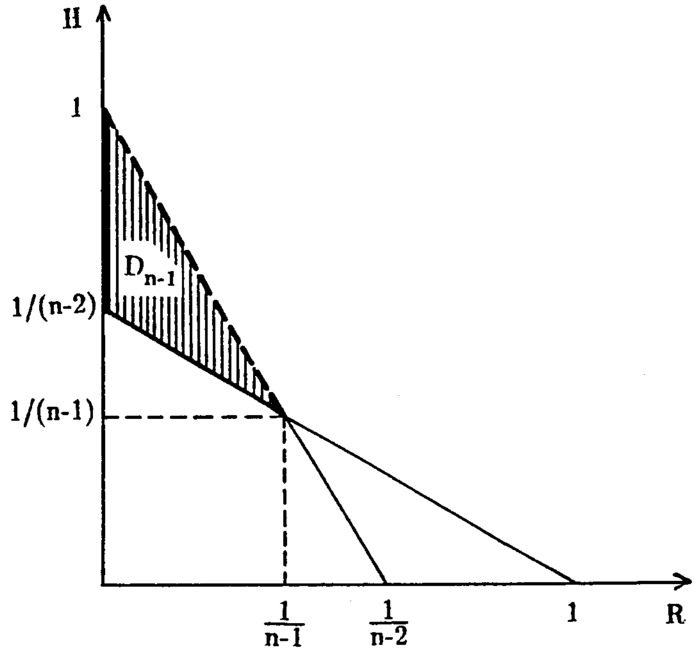
$$\begin{cases} (n-2)R+H = \dfrac{(n-2)\min\limits_{1\leq j\leq n-1} Y_j + \max\limits_{1\leq j\leq n-1} Y_j}{Y_1+ \ldots +Y_{n-1}} \leq \dfrac{Y_1+ \ldots +Y_{n-1}}{Y_1+ \ldots + Y_{n-1}} = 1 \\ \\ R+(n-2)H = \dfrac{\min\limits_{1\leq j\leq n-1} Y_j + (n-2)\max\limits_{1\leq j\leq n-1} Y_j}{Y_1+ \ldots +Y_{n-1}} \geq \dfrac{Y_1+ \ldots +Y_{n-1}}{Y_1+ \ldots +Y_{n-1}} = 1. \end{cases}$$

Como as igualdades ocorrem com probabilidade nula, podemos concluir que a f.d.p. de (R,H) é nula fora do domínio

$$D_{n-1}= \left\{(r,h) : (n-2)r+h < 1,\ r+(n-2)h \geq 1,\ r \geq 0\right\}.$$

Estas desigualdades implicam $0 \leq r < \frac{1}{n-1} < h < 1$.

Veja-se a figura seguinte:



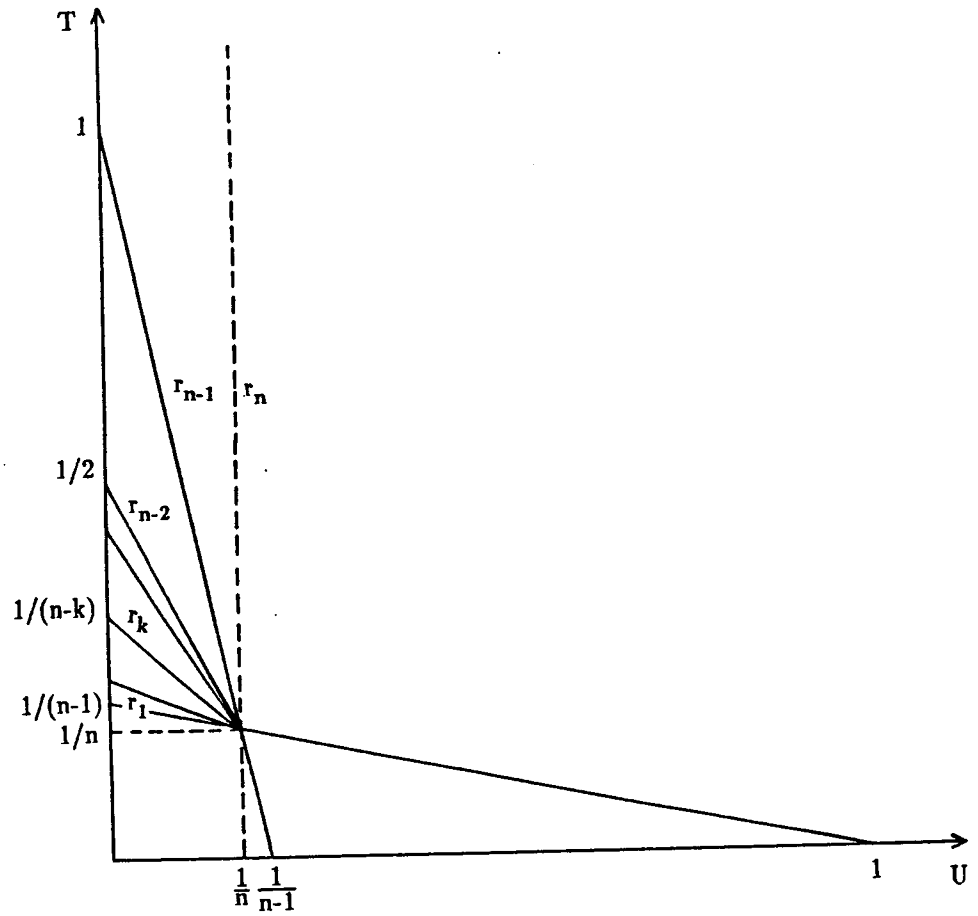
Fazendo um raciocínio idêntico ao anterior mostra-se que a f.d.p. de (U,T) é nula fora do domínio

$$D_n=\left\{(u,t) : (n-1)u+t<1,\ u+(n-1)t \geq 1,\ u\geq 0\right\}.$$

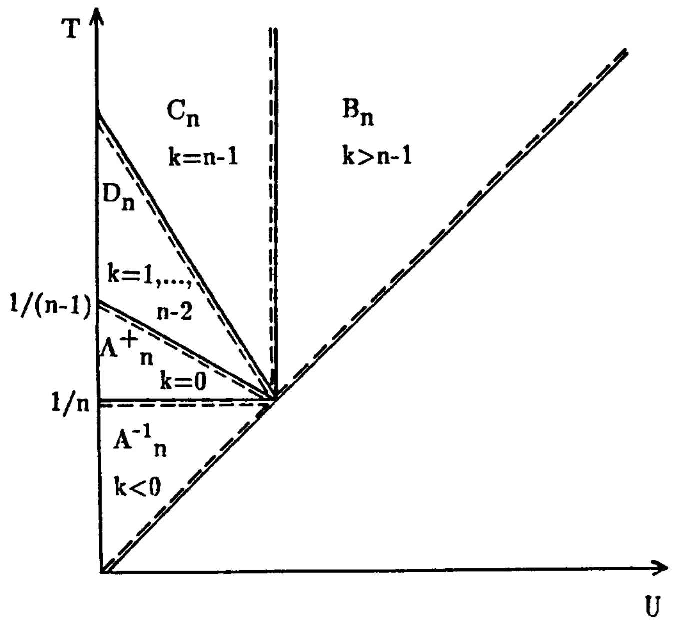
Estas desigualdades implicam $0 \leq u < \frac{1}{n} < t \leq 1$.

Vejamos a decomposição do domínio da f.d.p.(U,T), D_n, devida a Rosado(1984).

Seja r_k a recta que passa por $\left(0, \frac{1}{n-k}\right)$ e $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e tem equação $U=b_k(T) = \frac{1-(n-k)T}{k}$, equivalente a $T= a_k(U)= \frac{1-kU}{n-k}$. A decomposição será a apresentada na figura seguinte.



Na próxima figura apresentamos o espaço limitado pelas rectas U=0 e U=T dividido em subespaços.



Para $t>u$, vem, com $k=\mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right)$:

$k < 0 \Leftrightarrow (u,t) \in A^-_n$

$k = 0 \Leftrightarrow (u,t) \in A^+_n$

$k=1, ..., n-2 \Leftrightarrow (u,t) \in D_n$; (u,t) entre as rectas r_k e r_{k+1}, isto é, $b_k(t) \leq u \leq b_{k+1}(t)$, ou

seja, $a_k(u) \leq t \leq a_{k+1}(u)$

$k=n-1 \Leftrightarrow (u,t) \in C_n$

$k>n-1 \Leftrightarrow (u,t) \in B_n$.

Para mostrar todas as equivalências, excepto a primeira e a última, basta ver que, para $k=0, 1, ..., n-2, n-1$, se tem $b_k(t) \leq u \leq b_{k+1}(t)$ e $a_k(u) \leq t \leq a_{k+1}(u)$ e vice-versa.

De facto:

$\mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) = k$ equivale a $k \leq \frac{nt-1}{t-u} < k+1$, e esta dupla desigualdade é equivalente a

$$\begin{cases} 1-ku \leq (n-k)t \ \text{ e } \ (n-k-1)t < 1-(k+1)u \\ 1-(n-k)t \leq ku \ \text{ e } \ (k+1)u < 1-(n-k-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k(u) \leq t \ \text{ e } \ t < a_{k+1}(u) \\ b_k(t) \leq u \ \text{ e } \ u < b_{k+1}(t). \end{cases}$$

Para mostrar a primeira equivalência:

$\mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{nt-1}{t-u} < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{n} \Leftrightarrow (u,t) \in A^-_n$.

Para a última equivalência:

$\mathrm{INT}\left(\frac{nt - 1}{t - u}\right) > n\text{-}1 \Leftrightarrow \frac{nt - 1}{t\text{-}u} \geq n \Leftrightarrow -1 \geq -nu \Leftrightarrow u \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow (u,t) \in B^{-}_{n-1}.$

Façamos uma decomposição semelhante do domínio da f.d.p. de (R,H). Vem:

Para $h > r$, com $j = \mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)h - 1}{h - r}\right)$

$j < 0 \Leftrightarrow (r,h) \in A^{-}_{n-1}$

$j = 0 \Leftrightarrow (r,h) \in A^{+}_{n-1}$

$j = 1, \ldots, n-3 \Leftrightarrow (r,h) \in D_{n-1}$

$j = n-2 \Leftrightarrow (r,h) \in C_{n-1}$

$j > n-2 \Leftrightarrow (r,h) \in B_{n-1}.$

Consideremos a seguinte hipótese de indução, $*$:

$$P_{R,H}(r,h) \underset{*}{=} P(R > r,\ H < h) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir + (n-1-i)h - 1)^{n-2} = \Sigma_1 \\ \\ \sum\limits_{i=0}^{n-2-j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1 - (n-1-i)r - ih)^{n-2} = \Sigma_2 \end{cases}$$

com $j = \mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)h-1}{h-r}\right) = 0, 1, \ldots, n-3, n-2$, isto é, para $0 \leq r < \frac{1}{n-1}$, $h \geq \frac{1}{n-1}$.

É fácil verificar que $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Com efeito,

$$\Sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-2-j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)r-ih)^{n-2} = \sum_{\ell=j+1}^{n-1} (-1)^{n-1}(-1)^{\ell} \binom{n-1}{\ell} (1-\ell r-(n-1-\ell)h)^{n-2} =$$

$$= - \sum_{i=j+1}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir + (n-1-i)h-1)^{n-2},$$

donde

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir+(n-1-i)h-1)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (i+\alpha)^{n-2} \beta^{n-2} = 0, \text{ com}$$

$$\alpha = \frac{(n-1)h-1}{r-h}, \ \beta = r - h.$$

De facto,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (i+\alpha)^{n-2} =$$

$$= \alpha^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \left(\binom{n-2}{i-1} + \binom{n-2}{i} \right) (i+\alpha)^{n-2} + (-1)^{n-1}(n-1+\alpha)^{n-2} =$$

$$= \alpha^{n-2} - \sum_{\ell=0}^{n-3} (-1)^{\ell} \binom{n-2}{\ell} (\ell+\alpha+1)^{n-2} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \binom{n-2}{i} (i+\alpha)^{n-2} - (-1)^{n-2} \binom{n-2}{n-2} (n-2+\alpha+1)^{n-2} =$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{n-2} (-1)^{\ell} \binom{n-2}{\ell} (\ell+\alpha+1)^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-2}{i} (i+\alpha)^{n-2} = -(-1)^{n-2}(n-2)! + (-1)^{n-2}(n-2)! = 0.$$

É óbvio que

$$P_{R,H}(r,h) = \begin{cases} 0 \text{ para } r \geq \frac{1}{n-1} \text{ ou para } h < \frac{1}{n-1} \\ \\ P_{R,H}(0,h) \text{ para } r < 0. \end{cases}$$

Façamos a dedução de $P^1{}_{U,T}(u,t) = P(U > u,\ T < t \mid H_1)$ admitindo que a hipótese $*$ é verdadeira para $0 < u < \frac{1}{n} \leq t < 1$.

$$P^1{}_{U,T}(u,t) = P\left(\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) > u,\ \max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) < t \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{R}{1+S} > u,\ \frac{S}{1+S} > u,\ \frac{H}{1+S} < t,\ \frac{S}{1+S} < t \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{u}{1-u} < S < \frac{t}{1-t},\ R > u(1+S),\ H < t(1+S) \mid H_1\right) =$$

$$= \int_{u/(1-u)}^{t/(1-t)} f_S(s)\, P_{R,H}\,(u(1+s),\ t(1+s))\, ds.$$

Seja:

$x = u(1+s)$

$y = t(1+s)$

$s > 0$

$k = \mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right)$

$\ell = \mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)t-1}{t-u}\right)$

$j = \mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)y-1}{y-x}\right)$

$$\alpha_i = \frac{1}{iu + (n-1-i)t} - 1.$$

Tem-se que k só pode tomar valores 0, 1, ..., n-2, n-1, que j(s) varia com s e que $\ell < k$. Para provar esta última desigualdade basta ver que $\ell = \text{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u} - \frac{t}{t-u}\right)$ e como $\frac{nt-1}{t-u} - \frac{t}{t-u} < \frac{nt-1}{t-u} - 1$, podemos escrever:

$$\ell \leq \text{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u} - 1\right) = \text{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) - 1 = k-1 \Rightarrow \ell < k.$$

Com base nisto vamos provar que, para $0 < u < \frac{1}{n} \leq t < 1$ se tem:

(i) $\alpha_i > -1$ para $i \leq n-1$

(ii) $\alpha_\ell \leq 0 < \alpha_{\ell+1}$

(iii) $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ para $i \leq n-2$

(iv) Se $j \leq n-2$, vem $\alpha_j \leq s < \alpha_{j+1}$; $j > n-2$ sse $\alpha_{n-1} \leq s$.

(v) $\alpha_{k-1} \leq \frac{u}{1-u} < \alpha_k \leq \frac{t}{1-t}$ para k=0, 1, ..., n-2, n-1 e $\frac{t}{1-t} < \alpha_{k+1}$ para k=0,1,...,n-2.

Demonstração:

(i) $iu+(n-1-i)t \geq iu+(n-1-i)u = (n-1)u > 0.$

(ii) $\ell \leq \frac{(n-1)t-1}{t-u} < \ell+1 \Rightarrow \frac{1}{(\ell+1)u + ((n-1)-(\ell+1))t} > 1 \geq \frac{1}{\ell u+(n-1-\ell)t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{\ell+1} > 0 \geq \alpha_\ell$; note-se que $\ell < k \leq n-1 \Rightarrow n-1-(\ell+1) \geq 0$ e $n-1-\ell > 0$.

(iii) Para $i \leq n-2$, vem $\alpha_i > -1$ e $\alpha_{i+1} > -1$. Logo $\frac{1}{\alpha_{i+1}+1} - \frac{1}{\alpha_i + 1} =$

$= (i+1)u + (n-2-i)t - iu - (n-1-i)t = u-t < 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{i+1}+1} < \frac{1}{\alpha_i+1} \Rightarrow \alpha_{i+1}+1 > \alpha_i+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{i+1}>\alpha_i$.

(iv) $j \leq \frac{(n-1)y-1}{y-x} < j+1 \Leftrightarrow j(t-u)(1+s) \leq (n-1)t(1+s)-1 <(j+1)(t-u)(1+s)$

Para $j \leq n-2$ a dupla desigualdade é equivalente a

$\frac{1}{ju+(n-1-j)t} \leq 1+s < \frac{1}{(j+1)u+(n-1-(j+1))t} \Leftrightarrow \alpha_j \leq s < \alpha_{j+1}$.

Para $j > n-2$ vem $\frac{(n-1)y-1}{y-x} \geq n-1 \Leftrightarrow s \geq \alpha_{n-1}$.

(v) $k \leq \frac{nt-1}{t-u} < k+1 \Rightarrow \begin{cases} ku+(n-1-k)t < 1-u \leq (k-1)u+(n-1-(k-1))t \\ \\ (k+1)u+(n-1-(k+1))t < 1-t \leq ku+(n-1-k)t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(k-1)u+(n-1-(k-1))t} \leq \frac{1}{1-u} < \frac{1}{ku+(n-1-k)t} & \text{desde que } k-1 \leq n-1 \text{ e } k \leq n-1, \text{ respectivamente} \\ \\ \frac{1}{ku+(n-1-k)t} \leq \frac{1}{1-t} < \frac{1}{(k+1)u+(n-1-(k+1))t} & \text{desde que } k \leq n-1 \text{ e } k+1 \leq n-1, \text{ respectivamente} \end{cases}$$

Como $\frac{1}{1-u} - 1 = \frac{u}{1-u}$ e $\frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t}$, vem o pretendido.

Seja

$$w_i(s)= (n\text{-}1)\ \frac{1}{(1+s/\sigma)^n}\frac{1}{\sigma}\ (\text{-}1)^i \binom{n\text{-}1}{i}\ (iu(1+s) + (n\text{-}1\text{-}i)t\ (1+s) - 1)^{n\text{-}2} =$$

$$= (n\text{-}1)\ \frac{(iu+(n\text{-}1\text{-}i)t)\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}}{(1+s/\sigma)^2} \left(\frac{iu(1+s) + (n\text{-}1\text{-}i)t\ (1+s) - 1}{1+s/\sigma}\right)^{n\text{-}2} (\text{-}\ 1)^i \binom{n\text{-}1}{i} \times$$

$$\times\ \frac{1/\sigma}{(iu+(n\text{-}1\text{-}i)t)\left(1\text{-}\ \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}} = \frac{d}{ds}\left(\frac{iu(1+s) + (n\text{-}1\text{-}i)t\ (1+s)\text{-}1}{1+s/\sigma}\right)^{n\text{-}1} (\text{-}1)^i \binom{n\text{-}1}{i} \frac{1}{(iu+(n\text{-}1\text{-}i)t)(\sigma\text{-}1)+1}.$$

Tem-se:

$$W_i(s)= \int w_i(x)dx = (\text{-}1)^i \binom{n\text{-}1}{i} \frac{1}{(iu+(n\text{-}1\text{-}i)t)\ (\sigma\text{-}1)+1} \left(\frac{iu(1+s)+(n\text{-}1\text{-}i)t\ (1+s)\text{-}1}{1+s/\sigma}\right)^{n\text{-}1}.$$

Note-se que $W_i(\alpha_i) = 0$ e que $W_i(s)$ não está definido para $s= \text{-}\sigma$.

De (v) tira-se que

$$P^1_{U,T}(u,\ t) = \left(\int_{u/(1\text{-}u)}^{\alpha_k} + \int_{\alpha_k}^{t/(1\text{-}t)}\right) f_S(s)\ P_{R,H}(x,\ y)ds.$$

Procedamos ao cálculo da primeira parcela, isto é, $\int_{u/(1\text{-}u)}^{\alpha_k} f_S(s)\ P_{R,H}(x,y)ds$. Dá zero se

$k=0$, pois, neste intervalo de integração, vem $s < \alpha_0 \Rightarrow j+1\ \leq 0 \Rightarrow j < 0 \Rightarrow (x,y) \in A^-_{n\text{-}1} \Rightarrow$
$\Rightarrow P_{R,H}(x,y) = 0$.

Para $k>0$, admitindo verdadeira a hipótese $*$ e tendo em conta (iv) e (v) (pelo que, neste intervalo de integração, se tem $j=k\text{-}1$), obtemos:

$$\int_{u/(1-u)}^{\alpha_k} f_S(s)\ P_{R,H}(x,y)ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{u/(1-u)}^{\alpha_k} w_i(s)ds = \sum_{i=0}^{n-2-(k-1)} \int_{u/(1-u)}^{\alpha_k} - w_{n-1-i}(s)ds.$$

Como no intervalo de integração que estamos a considerar nunca se tem s= - σ, pois $s > \frac{u}{1-u} > 0$, vem

$$\int_{u/(1-u)}^{\alpha_k} f_S(s)\ P_{R,H}(x,y)ds = \sum_{i=0}^{k-1} \left(W_i(\alpha_k) - W_i\left(\frac{u}{1-u}\right)\right) = \sum_{i=0}^{n-2-(k-1)} \left(W_{n-1-i}\left(\frac{u}{1-u}\right) - W_{n-1-i}(\alpha_k)\right).$$

NOTA: Como $\Sigma_1 = \Sigma_2$ (veja-se pag. 36), vem, com $r = x$, $h = y$:

$$\sum_{i=0}^{j} w_i(s) = \sum_{i=0}^{n-2-j} - w_{n-1-i}(s).$$

Vamos provar, para uso posterior, que $\sum_{i=0}^{n-1} W_i(y) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(x)$ para quaisquer $x,y > -\sigma$.

Podemos supor $y > x$ e integrarmos membro a membro de x a y; virá

$$\sum_{i=0}^{j} (W_i(y) - W_i(x)) = \sum_{i=0}^{n-2-j} \left(W_{n-1-i}(x) - W_{n-1-i}(y)\right) = \sum_{\beta=j+1}^{n-1} \left(W_\beta(x) - W_\beta(y)\right).$$

Logo

$\sum_{i=0}^{n-1} \left(W_i(y) - W_i(x)\right) = 0$, donde o pretendido.

Procedamos ao cálculo de $\int_{\alpha_k}^{t/(1-t)} f_S(s)\ P_{R,H}(x,y)ds$.

Dá zero para k = n-1, pois neste intervalo da integração, vem $s \geq \alpha_{n-1} \Rightarrow j > n-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in B_{n-1} \Rightarrow P_{R,H}(x,y) = 0.$

Para k < n-1, admitindo verdadeira a hipótese * e tendo em conta (iv) e (v) (pelo que, neste intervalo de integração, se tem j= k), obtemos:

$$\int_{\alpha_k}^{t/(1-t)} f_S(s)\, P_{R,H}(x,y)ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{\alpha_k}^{t/(1-t)} w_i(s)ds = \sum_{i=0}^{n-2-k} \int_{\alpha_k}^{t/(1-t)} - w_{n-1-i}(s)ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(W_i\left(\frac{t}{1-t}\right) - W_i(\alpha_k)\right) = \sum_{i=0}^{n-2-k} \left(W_{n-1-i}(\alpha_k) - W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right)\right).$$

Assim, para k=1, ..., n-2, vem:

$$P^1_{U,T}(u,t) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(W_i(\alpha_k) - W_i\left(\frac{u}{1-u}\right)\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(W_i\left(\frac{t}{1-t}\right) - W_i(\alpha_k)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-k+1} \left(W_{n-1-i}\left(\frac{u}{1-u}\right) - W_{n-1-i}(\alpha_k)\right) + \sum_{i=0}^{n-2-k} \left(W_{n-1-i}(\alpha_k) - W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(W_i\left(\frac{t}{1-t}\right) - W_i\left(\frac{u}{1-u}\right)\right) + W_k\left(\frac{u}{1-u}\right) = \sum_{i=0}^{n-1-k} \left(W_{n-1-i}\left(\frac{u}{1-u}\right) - W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right)\right) + W_k\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

Para k=0, vem:

$$P^1_{U,T}(u,t) = \sum_{i=0}^{0} \left(W_i\left(\frac{t}{1-t}\right) - W_i(\alpha_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-2-0} \left(W_{n-1-i}(\alpha_0) - W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right)\right) =$$

$$= W_0\left(\frac{t}{1-t}\right) = \sum_{i=0}^{n-2} W_{n-1-i}(\alpha_0) - \sum_{i=0}^{n-2} W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} W_{n-1-i}(\alpha_0) - W_0(\alpha_0) - \sum_{i=0}^{n-1} W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right) + W_0\left(\frac{t}{1-t}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} W_{n-1-i}\left(\frac{u}{1-u}\right) - \sum_{i=0}^{n-1} W_{n-1-i}\left(\frac{t}{1-t}\right) + W_0\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

NOTA: A expressão deduzida para k=1,...,n-2 também é, como se vê, válida para k=0.

Para k=n-1, vem:

$$P^1{}_{U,T}(u,t) = \sum_{i=0}^{n-2} \left(W_i(\alpha_{n-1}) - W_i\left(\frac{u}{1-u}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} W_i(\alpha_{n-1}) - W_{n-1}(\alpha_{n-1}) - \sum_{i=0}^{n-1} W_i\left(\frac{u}{1-u}\right) + W_{n-1}\left(\frac{u}{1-u}\right) = \sum_{i=0}^{0} \left(W_{n-1-i}\left(\frac{u}{1-u}\right) - W_{n-1-i}(\alpha_{n-1})\right) =$$

$$= W_{n-1}\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

NOTA: A expressão deduzida para k=1,...,n-2 também é, como se vê, válida para k=n-1.

Conclusão (se a hipótese * for verdadeira):

$$
P^1_{U,T}(u,t) = \begin{cases}
= \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(iu+(n-1-i)t)(\sigma-1)+1} \left(\left(\frac{iu+(n-i)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t} \right)^{n-1} - \right. \\
\quad \left. - \left(\dfrac{(i+1)u+(n-1-i)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u} \right)^{n-1} \right) + \\
\quad + (-1)^k \dbinom{n-1}{k} \dfrac{1}{(ku+(n-1-k)t)(\sigma-1)+1} \left(\dfrac{(k+1)u+(n-1-k)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u} \right)^{n-1} \\
= \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{((n-1-i)u+it)(\sigma-1)+1} \left(\left(\frac{1-(n-i)u-it}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u} \right)^{n-1} - \right. \\
\quad \left. - \left(\dfrac{1-(n-1-i)u-(i+1)t}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t} \right)^{n-1} \right) + (-1)^k \dbinom{n-1}{k} \dfrac{1}{(ku+(n-1-k)t)(\sigma-1)+1} \left(\dfrac{ku+(n-k)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t} \right)^{n-1} \\
\\
\text{Caso } 0 < u < \frac{1}{n} \leq t < 1 \quad \left(k = \mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) \text{ pode tomar os valores } 0,\ 1,\ \ldots, n-1\right). \\
\\
= 0 \text{ para } u \geq \frac{1}{n} \text{ ou para } t < \frac{1}{n} \\
\\
= P^1_{U,T}(0^+,t) \quad \text{para} \quad u \leq 0 \\
\\
= P^1_{U,T}(u,1^-) \quad \text{para } t \geq 1.
\end{cases}
$$

$**$

NOTA: Fazendo a mudança de variável $i \rightarrow n\text{-}1\text{-}i$, para $0 < u < \frac{1}{n} \leq t<1$, obtemos na segunda expressão de $**$

$$
P^1_{U,T}(u,t) = \sum_{i=k}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(iu+(n-1-i)t)(\sigma-1)+1} \left(\left(\frac{(i+1)u+(n-1-i)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u} \right)^{n-1} - \right.
$$

$$
\left. - \left(\frac{iu+(n-i)t-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t} \right)^{n-1} \right) + (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{(ku+(n-1-k)t)(\sigma-1)+1} \left(\frac{ku+(n-k)t-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t} \right)^{n-1}.
$$

Caso $\frac{nt-1}{t-u}$ inteiro maior que zero, as expressões anteriores também valem com k substítuido por k-1 (basta ver que a parcela correspondente a k é nula, pois vem ku+(n-k)t=1). Portanto os erros de arredondamento que podem dar origem a um k errado têm influência pequena.

Para a dedução de $P^0_{U,T}(u,t) = P(U > u,\ T < t \mid H_0)$, admitindo a hipótese $*$ verdadeira, basta particularizar σ=1 em $**$. Assim, correspondente ao primeiro somatório, tem-se:

$$P^0_{U,T}(u,t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left((iu+(n-i)t - 1)^{n-1}\right) - \left(((i+1)u+(n-1-i)t-1)^{n-1}\right) +$$

$$+ (-1)^k \binom{n-1}{k} ((k+1)u+(n-1-k)t - 1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-1}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i} ((i+1)u+(n-1-i)t-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-1}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} + \sum_{\beta=1}^{k} (-1)^{\beta} \binom{n-1}{\beta-1} (\beta u+(n-\beta)t-1)^{n-1} =$$

$$=(-1)^0 \binom{n-1}{0} (nt-1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) (iu+(n-i)t-1)^{n-1} =$$

$$=(-1)^0 \binom{n}{0} (nt-1)^{n-1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} \quad \text{, caso } 0 < u < \frac{1}{n} \leq t < 1, \text{ com } k = \mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) = 0,\ 1,\ \ldots,n-1.$$

Correspondente ao segundo somatório em $**$, com σ = 1:

$$P^0_{U,T}(u,t) = \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left((1-(n-i)u-it)^{n-1} - (1-(n-1-i)u - (i+1)t)^{n-1}\right) +$$

$$+ (-1)^k \binom{n-1}{k} (ku+(n-k)t-1)^{n-1} =$$

$$= (-1)^0 \binom{n-1}{0} (1-nu)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)u - (i+1)\ t)^{n-1} - (-1)^{n-k} \binom{n-1}{n-k-1} (1-ku-(n-k)t)^{n-1} =$$

$$= (-1)^0 \binom{n-1}{0} (1-nu)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^{i+1} \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)u -$$

$$- (i+1)t)^{n-1} - (-1)^{n-k} \binom{n-1}{n-k-1} (1-ku-(n-k)t)^{n-1} =$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} (1-nu)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1} + \sum_{\beta=1}^{n-k} (-1)^i \binom{n-1}{\beta-1} (1-(n-\beta)u-\beta t)^{n-1} -$$

$$- (-1)^{n-k} \binom{n-1}{n-k-1} (1-(n-(n-k)u) - (n-k)t)^{n-1} =$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} (1-nu)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1-k} (-1)^i \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) (1-(n-i)u-it)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1} ,$$

caso $0 < u < \frac{1}{n} \leq t < 1$, com $k = \mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) = 0, 1, \ldots, n-1.$

Para os outros casos vem:

$$P^0_{U,T}(u,t) = \begin{cases} = 0 & \text{para } u \geq \frac{1}{n} \text{ ou para } t < \frac{1}{n} \\ = P^0_{U,T}(0^+,t) & \text{para } u \leq 0 \\ = P^0_{U,T}(u,1^-) & \text{para } t \geq 1. \end{cases}$$

De notar que as duas primeiras expressões de $P^0_{U,T}(u,t)$, também valem para $0 < u < \frac{1}{n}$, $t \geq 1$ (caso em que vem k=n-1). Com efeito, neste caso

$$P^0_{U,T}(u,t) = P^0_{U,T}(u,1^-) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(i + \frac{n-1}{u-1}\right)^{n-1} (u-1)^{n-1} - (-1)^n (nu-(n-n)-1)^{n-1} = 0 - (-1)^n (nu-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(i + \frac{nt-1}{u-t}\right)^{n-1} (u-t)^{n-1} - (-1)^n (nu+(n-n)t-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1},$$ que é a 1ª expressão de $P^0_{U,T}(u,t)$, pag. 45.

Por outro lado, tem-se também:

$$P^0_{U,T}(u,t) = P^0_{U,T}(u,1^-) = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{n}{i} (1-(n-i)u-i)^{n-1} = (1-nu)^{n-1} = (1-nu-0t)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{n}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1},$$ que é a 2ª expressão de $P^0_{U,T}(u,t)$, pag. 46.

As duas primeiras expressões de $P^0_{U,T}(u,t)$ também valem para u=0, $t \geq \frac{1}{n}$ (caso em que se tem $k=\mathrm{INT}\left(n-\frac{1}{t}\right) \geq 0$). Com efeito, neste caso $P^0{}_{U,T}(u,t) = P^0{}_{U,T}(0^+,t) = P^0{}_{U,T}(0,t)$ dada a continuidade para u=0 dessas expressões (veja-se nota da pag. 44, segunda parte, para o caso mais complicado de $n-\frac{1}{t}$ ser inteiro).

Conclusão (se a hipótese * for verdadeira):

$$
P^0{}_{U,T}(u,t) = \left\{
\begin{array}{ll}
= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1-k} (-1)^i \binom{n}{i} (1-(n-i)u-it)^{n-1} & \\
\qquad \text{caso } 0 \leq u < \frac{1}{n},\ t \geq \frac{1}{n},\ \text{com } k=\mathrm{INT}\left(\frac{nt-1}{t-u}\right) = 0, 1, \ldots, n-1. & \\
= 0 \qquad \text{caso } u \geq \frac{1}{n} \text{ ou } t < \frac{1}{n} & \\
= P^0{}_{U,T}(0, t) \qquad \text{caso } u < 0. &
\end{array}
\right.
$$

***

NOTA: Fazendo a mudança de variável $i \to n-i$ na segunda expressão de ***, obtemos

$$P^0{}_{U,T}(u,t) = -\sum_{i=k+1}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (iu+(n-i)t-1)^{n-1} \qquad \text{para } 0 \leq u < \frac{1}{n},\quad t \geq \frac{1}{n}.$$

Caso $\frac{nt-1}{t-u}$ inteiro maior que zero, as expressões de *** também valem com k substituído por k-1.

<u>Ponto da situação :</u> Partimos da hipótese de indução * e provámos que se as expressões dessa hipótese forem válidas para n-1, então também são válidas para n. Com efeito, a partir de * provámos ***, que é análoga a * com n-1 substituído por n; note-se que (U,T) é, para H_0 verdadeira, isto é, para $\sigma = 1$, o equivalente a (R, H) quando n-1 é substituído por n. Logo, para provar *, ** e *** para $n \geq 3$, basta provar que * vale para n=3.

<u>Prova de que * vale para n=3</u>

Para n=3 vem

$$A_1 = \frac{Y_1}{Y_1+Y_2}, \quad A_2 = \frac{Y_2}{Y_1+Y_2}, \quad R= \min(A_1, A_2), \; H= \max(A_1, A_2).$$

Como neste caso $A_2=1-A_1$, vem

$R=\min(A_1, 1-A_1)$ e $H=1-R$.

Seja $0 \leq r \leq \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$, $h \geq \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$. Vem

$$P_{R,H}(r, h) = P(R>r, \; H \leq h) = P(R>r, 1-R \leq h) = P(R>r, R \geq 1-h) =$$

$$= P(R \geq \max(r, 1-h)) = P(A_1 \geq \max(r, 1-h), A_2 \geq \max(r,1-h)) =$$

$$= P(A_1 \geq \max(r, 1-h), A_1 \leq 1-\max(r,1-h)) = P(\max(r, 1-h) \leq A_1 \leq 1-\max(r,1-h)).$$

Como A_1 tem distribuição Beta (1,1), isto é, uniforme, temos

$$P_{R,H}(r,h) = \int_{\max(r,1-h)}^{1-\max(r,1-h)} 1dx = 1- \max(r,1-h)-\max(r,1-h) = 1-2\max(r,1-h) =$$

$$= \begin{cases} 1-2r & \text{se} \quad r \geq 1-h \quad (r+h \geq 1) \\ 2h-1 & \text{se} \quad r < 1-h \quad (r+h < 1). \end{cases}$$

Ora $0 \leq \frac{(n-1)h-1}{h-r} = \frac{2h-1}{h-r} < \frac{2h-2r}{h-r} = 2$ implica $j=INT\left(\frac{(n-1)h-1}{h-r}\right)$ igual a 0 ou 1.

Vem $j=0$ se e só se $0 \leq \frac{(n-1)h-1}{h-r} < 1$, ou seja, $0 \leq r+h<1$.

Vem $j=1$ se e só se $1 \leq \frac{(n-1)h-1}{h-r} < 2$, ou seja, $2r<1 \leq r+h$.

Logo, para $0 \leq r < \frac{1}{2} \leq h$, vem

$$P_{R,H}(r,h)=\begin{cases} 1\text{-}2r & \text{se } r+h \geq 1 \quad (j=1) \\ \\ 2h\text{-}1 & \text{se } r+h < 1 \quad (j=0). \end{cases}$$

A expressão $*$ dá, para j=0

$$P_{R,H}(r,h) = ((n-1)h-1)^{n-2} = 2h-1$$

e para j=1

$$P_{R,H}(r,h)=((n-1)h-1)^{n-2}-(n-1)(r+(n-2)h-1)^{n-2}=(2h-1)-2(r+h-1)=1-2r.$$

Conclusão: $*$, $**$ e $***$ valem para $n \geq 3$.

Determinemos agora as distribuições de R e de H, as quais irão ser necessárias no capítulo III.

Para $0 < r < \frac{1}{n-1}$ temos

$$F_R(r)= P(R \leq r) = 1-P(R > r) = 1-P(R > r,\ H \leq 1)= 1-P_{R,H}(r,1).$$

Pela 2ª expressão da pag. 35 vem

$$F_R(r) = 1- \sum_{i=0}^{n-2-n+2} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)r-i1)^{n-2}= 1-(-1)^0\binom{n-1}{0} (1-(n-1)r)^{n-2}=1-(1-(n-1)r)^{n-2}.$$

Logo:

$$F_R(r)= \begin{cases} 1-(1-(n-1)r)^{n-2} & \text{para } 0 < r < \frac{1}{n-1} \\ 1 & \text{para } r \geq \frac{1}{n-1} \\ 0 & \text{para } r \leq 0. \end{cases}$$

Para $\frac{1}{n-1} \leq h < 1$, temos

$F_H(h) = P(H \leq h)= P(R>0,\ H \leq h) = P_{R,H}(0,h)$.

Pela expressão da pag. 35, temos

$$F_H(h)= \sum_{i=0}^{n-2-INT(1/h)} (-1)^i\binom{n-1}{i}((n-1-i)h-1)^{n-2} = \sum_{i=0}^{INT(1/h)} (-1)^i\binom{n-1}{i}(1-ih)^{n-2}.$$

Logo

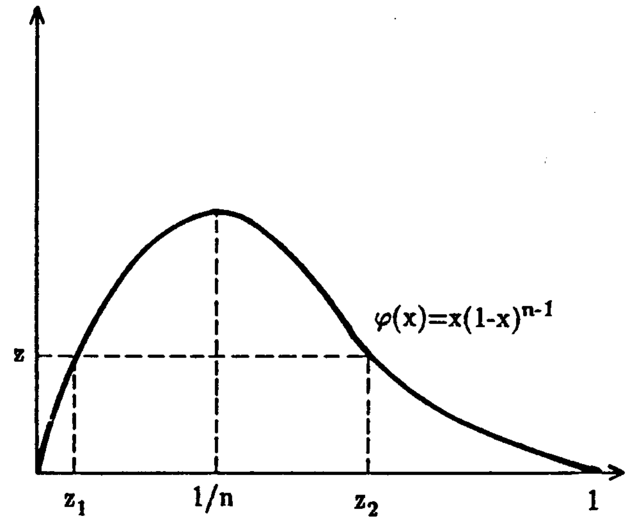
$$F_H(h)= \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2-INT(1/h)} (-1)^i\binom{n-1}{i}((n-1-i)h-1)^{n-2}= \sum_{i=0}^{INT(1/h)} (-1)^i\binom{n-1}{i}(1-ih)^{n-2} & \text{para } \frac{1}{n-1} \leq h<1 \\ 0 \quad \text{para } h < \frac{1}{n-1} & \\ 1 \quad \text{para } h \geq 1. & \end{cases}$$

Funções de distribuição da estatística Z

Para $0 < z < \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ vem

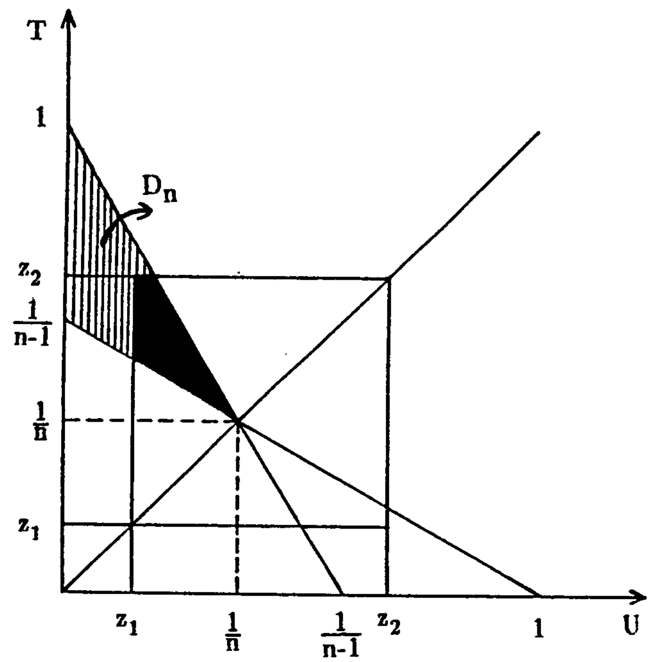
$F^1{}_Z(z) = P(Z \leq z \mid H_1) = 1-P(Z > z \mid H_1) = 1-P(\min(\varphi(U), \varphi(T)) > z \mid H_1)=$

$=1-P(\varphi(U) > z, \varphi(T) > z \mid H_1)= 1-P(z_1< U < z_2, z_1 < T < z_2 \mid H_1)$ - veja-se a figura seguinte:



No apêndice A prova-se que $(z_1,z_2) \in D_n$ para $0 < z < \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ e que, para esses z,

$k=\mathrm{INT}\left(\frac{nz_2-1}{z_2-z_1}\right)$ só pode tomar valores $k=\mathrm{INT}\left(\frac{n}{2}\right)$, ...,n-2. Veja-se figura seguinte:



$F^1{}_Z(z)=1 - P^1{}_{U,T}(z_1, z_2)$

$F^1{}_Z(z) = 0$ para $z \le 0$ e $F^1{}_Z(z)=1$ para $z \ge \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Logo temos (veja-se ** na pg. 44):

$$
1-F^1{}_Z(z)=\begin{cases}
=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(iz_1+(n-1-i)z_2)(\sigma-1)+1}\left(\left(\frac{iz_1+(n-i)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_2}\right)^{n-1}-\left(\frac{(i+1)z_1+(n-1-i)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_1}\right)^{n-1}\right)+ \\
\quad +(-1)^k\displaystyle\binom{n-1}{k}\frac{1}{(kz_1+(n-1-k)z_2)(\sigma-1)+1}\left(\frac{(k+1)z_1+(n-1-k)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_1}\right)^{n-1} \\
=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1-k}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{((n-1-i)z_1+iz_2)(\sigma-1)+1}\left(\left(\frac{1-(n-i)z_1-iz_2}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_1}\right)^{n-1}-\right. \\
\quad \left.-\left(\frac{1-(n-1-i)z_1-(i+1)z_2}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_2}\right)^{n-1}\right)+(-1)^k\displaystyle\binom{n-1}{k}\frac{1}{(kz_1+(n-1-k)z_2(\sigma-1)+1}\left(\frac{kz_1+(n-k)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_2}\right)^{n-1} \\
\quad \text{para } k=\mathrm{INT}\left(\frac{nz_2-1}{z_2-z_1}\right) \text{ caso } 0<z<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \text{ e com } 0<z_1<\frac{1}{n}<z_2<1 \\
\quad \text{tal que } \varphi(z_1)=\varphi(z_2)=z. \\
=0 \qquad \text{caso } z\geq\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
=1 \qquad \text{caso } z\leq 0.
\end{cases}
$$

NOTA: A segunda fórmula tem menos parcelas.

NOTA: Para $0 < z < \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$, também vem (fazendo a mudança de variável de i para n-1-i no 2º somatório):

$$
1-F^1{}_Z(z)=-\sum_{i=k-1}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(iz_1+(n-1-i)z_2)(\sigma-1)+1}\left(\left(\frac{iz_1+(n-i)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_2}\right)^{n-1}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{(i+1)z_1+(n-1-i)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_1}\right)^{n-1}\Bigg)+(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{1}{(kz_1+(n-1-k)z_2)(\sigma-1)+1}\left(\frac{(k+1)z_1+(n-1-k)z_2-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)z_1}\right)^{n-1}.
$$

Análogamente, para H_0 verdadeira:

$$1\text{-}F^0{}_Z(z)=\begin{cases} =\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}(iz_1+(n\text{-}i)z_2\text{-}1)^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1-k}(-1)^i\binom{n}{i}(1\text{-}(n\text{-}i)z_1\text{-}iz_2)^{n-1}= \\ \quad =-\sum_{i=k+1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(iz_1+(n\text{-}i)z_2\text{-}1)^{n-1} \quad \text{com} \quad k=\mathrm{INT}\left(\frac{nz_2\text{-}1}{z_2\text{-}z_1}\right) \quad \text{caso} \\ \quad 0<z<\frac{1}{n}\left(1\text{-}\frac{1}{n}\right)^{n-1} \text{ e com } 0<z_1<\frac{1}{n}<z_2<1 \quad \text{tal que} \quad \varphi(z_1)=\varphi(z_2)=z. \\ =0 \quad \text{caso } z\geq\frac{1}{n}\left(1\text{ - }\frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ =1 \quad \text{caso } z\leq 0. \end{cases}$$

NOTA: A segunda fórmula tem menos parcelas que a primeira e a terceira obtém-se da segunda pela mudança de variável de i para n-i.

NOTA: Em todas as expressões anteriores (quer para $F^0{}_Z$ como para $F^1{}_Z$), quando k for inteiro, é indiferente usar k ou k-1, pelo que eventuais erros de arredondamento no cálculo de $\frac{nz_2\text{-}1}{z_2\text{-}z_1}$, não afectam substancialmente o resultado.

2.2.1.6 Caso de δ desconhecido e δ' desconhecido com informação suplementar $\delta' \leq \delta$

Devemos usar $\max\limits_{j:\hat{\delta}'_j<\hat{\delta}_j} \hat{L}_j / \hat{L}_0$.

Ora $\hat{\delta}'_j<\hat{\delta}_j \Leftrightarrow x_j\text{-}\lambda<\frac{\Sigma(x_i\text{-}\lambda)\text{-}(x_j\text{-}\lambda)}{n\text{-}1} \Leftrightarrow x_j\text{ - }\lambda<\frac{\Sigma(x_i\text{-}\lambda)}{n} \Leftrightarrow \frac{x_j\text{-}\lambda}{\Sigma(x_i\text{-}\lambda)}<\frac{1}{n}$.

Como há pelo menos um j nestas condições, pois $\frac{x_{(1)}\text{-}\lambda}{\Sigma(x_i\text{-}\lambda)}<\frac{1}{n}$ (veja-se que $nx_{(1)}<$ $<x_1+...+x_n=\Sigma x_i$ salvo se $x_1=...=x_n$ o que tem probabilidade nula de ocorrer), o raciocínio da pag. 27 adaptado a este caso dá:

$$\ell_n = \min_{j:\hat{\delta}'_j < \hat{\delta}_j} \hat{L}_0 / \hat{L}_j = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_{j:\frac{x_j-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)} < \frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{x_j-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)}\right)$$

e, dada a forma da função φ

$$\ell_n = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \varphi(U).$$

Logo:

Uma estatística equivalente é $U = \frac{X_{(1)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)} = \min_{1 \leq j \leq n} V_j$, sendo a região de rejeição da forma $U < c$ e o candidato a "outlier" o elemento $X_{(1)}$.

NOTA: Podia pensar-se que o valor crítico de U correspondente a α=0.025 fosse aproximadamente o valor c_1 de Z correspondente a α=0.05, mas tal não se verifica, como demonstramos calculando os dois valores referidos (veja-se apêndice C); tal invalida a possibilidade de usar como teste aproximado, quando não há informação suplementar sobre δ', a "conjunção" dos dois testes correspondentes a haver informação suplementar $\delta'<\delta$ (teste sobre U) e a haver informação suplementar $\delta' > \delta$ (teste sobre T -veja-se 2.2.1.7) com $\alpha/2$.

Vejamos as funções de distribuição da estatística U.

Para $0 < u < \frac{1}{n}$ tem-se

$$F^1_U(u) = P(U \leq u \mid H_1) = 1-P(U > u \mid H_1) = 1-P(U > u, T \leq 1 \mid H_1) = 1-P^1_{U,T}(u,1).$$

Pela 2ª fórmula de ** pg. 44, vem

$$F^1_U(u) = 1- \sum_{i=0}^{n-1-(n-1)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{((n-1-i)u+i1)\,(\sigma-1)+1} \cdot \left(\left(\frac{1-(n-i)u-i1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u}\right)^{n-1} -\right.$$

$$-\left(\frac{1-(n-1-i)u-(i+1)1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)1}\right)^{n-1}\Bigg)+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\frac{1}{((n-1)u+(n-1-n+1))1(\sigma-1)+1}\left(\frac{(n-1)u+(n-n+1)1-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)1}\right)^{n-1}=$$

$$=1-\frac{1}{(n-1)u(\sigma-1)+1}\left(\left(\frac{1-nu}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-(n-1)u-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)1}\right)^{n-1}\right)+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)u(\sigma-1)+1}\left(\frac{(n-1)u+1-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)1}\right)^{n-1}=$$

$$=1-\frac{1}{(n-1)u(\sigma-1)+1}\left(\frac{1-nu}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u}\right)^{n-1}.$$

Logo

$$F^1{}_U(u)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{1+(n-1)(\sigma-1)u}\left(\dfrac{1-nu}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)u}\right)^{n-1} & \text{para } 0 < u < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{para } u \leq 0 \\ 1 & \text{para } u \geq \frac{1}{n}\ . \end{cases}$$

Caso H_0 verdadeira, basta fazer $\sigma=1$. Assim

$$F^0{}_U(u)=\begin{cases} 1-(1-nu)^{n-1} & \text{para } 0 < u < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{para } u \leq 0 \\ 1 & \text{para } u \geq \frac{1}{n}\ . \end{cases}$$

NOTA: Caso H_0 verdadeira $nU \sim$ Beta $(1, n-1)$. Assim:

$$E\,(nU \mid H_0) = \frac{1}{n} \Rightarrow E\,(U \mid H_0)=\frac{1}{n^2}$$

$$\mathrm{Var}(nU \mid H_0)= \frac{n-1}{(n+1)n^2} \Rightarrow \mathrm{var}(U \mid H_0)= \frac{n-1}{(n+1)n^4}.$$

2.2.1.7 Caso de δ desconhecido e δ'desconhecido com informação suplementar $\delta' \geq \delta$

Devemos usar $\max\limits_{j:\hat{\delta}'_j > \hat{\delta}_j} \hat{L}_j / \hat{L}_0$.

Ora $\hat{\delta}'_j > \hat{\delta}_j$ se e só se $\frac{x_j - \lambda}{\Sigma(x_i - \lambda)} > \frac{1}{n}$.

Como há pelo menos um j nestas condições, pois $\frac{x_{(n)}-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)} > \frac{1}{n}$ (veja-se que $n x_{(n)} > x_1 + ... +$

$+ x_n = \Sigma x_i$ salvo se $x_1 = ... = x_n$, o que tem probabilidade nula de ocorrer), o racíocinio da pag. 27 adaptado a este caso dá:

$$\ell_n = \min_{j:\hat{\delta}'_j > \hat{\delta}_j} \hat{L}_0 / \hat{L}_j = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_{j:\frac{x_j-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)} > \frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{x_j-\lambda}{\Sigma(x_i-\lambda)}\right)$$

e, dada a forma da função φ

$$\ell_n = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \varphi(T).$$

Logo:

Uma estatística equivalente é $T = \frac{X_{(n)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} V_j$. A região de rejeição é da forma $T > c$ e o candidato a "outlier" é o elemento $X_{(n)}$.

NOTA: Podia pensar-se que o valor crítico de T correspondente a α=0,025 fosse aproximadamente o valor c_2 de z correspondente a α=0,05, mas tal não se verifica. Veja-se a observação da pag. 55.

Vejamos as funções de distribuição da estatística T.

Para $\frac{1}{n} \leq t < 1$

$F^1{}_T(t) = P(T \leq t \mid H_1)=P(U>0,\ T \leq t \mid H_1)=P^1{}_{U,T}(0,t)$.

Pela 2ª fórmula de ** pg. 44, vem

$$F^1{}_T(t)= \sum_{i=0}^{n-1-n+INT(1/t)+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{((n-1-i)0+it)(\sigma-1)+1} \left(\left(\frac{1-(n-i)0-it}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)0}\right)^{n-1} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-(n-1-i)0-(i+1)t}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t}\right)^{n-1}\right) + (-1)^{n-INT(1/t)-1} \binom{n-1}{n-INT(1/t)-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{((n-INT(1/t)-1)0+(n-1-n+INT(1/t)+1)t)(\sigma-1)+1} \cdot \left(\frac{(n-INT(1/t)-1)0+(n-n+INT(1/t)+1)t-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t}\right)^{n-1}.$$

Logo

$$F^1{}_T(t)= \sum_{i=0}^{INT(1/t)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+(\sigma-1)it} \left((1-it)^{n-1} - \left(\frac{1-(i+1)t}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t}\right)^{n-1}\right) +$$

$$+(-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)} \frac{1}{1+(\sigma-1)INT(1/t)t} \left(\frac{1-(INT(1/t)+1)t}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t}\right)^{n-1}, \text{ para } \frac{1}{n} \leq t < 1.$$

Usando a primeira fórmula de $**$, vem

$$F^1{}_T(t)= \sum_{i=0}^{n-1-INT(1/t)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t} \left(\left(\frac{(n-i)t-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t} \right)^{n-1} -((n-1-i)t-1)^{n-1} \right) +$$

$$+ (-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)} \frac{1}{1+(\sigma-1)INT(1/t)t} (1-INT(1/t)t)^{n-1} \qquad \text{para } \frac{1}{n} \le t < 1 .$$

NOTA: notas semelhantes às feitas a $**$, pag. 44

$F^1{}_T(t)=0$ para $t < \frac{1}{n}$

$F^1{}_T(t)=1$ para $t \ge 1$.

Caso H_0 verdadeira, basta fazer $\sigma=1$. Assim, para $\frac{1}{n} \le t < 1$

$$F^0{}_T(t)= \sum_{i=0}^{n-1-INT(1/t)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(((n-i)t-1)^{n-1} -((n-1-i)t-1)^{n-1} \right) + (-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)}.$$

$$.(1-INT(1/t)t)^{n-1}=$$

$$= \sum_{i=0}^{INT(1/t)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left((1-it)^{n-1}-(1-(i+1)t)^{n-1} \right) + (-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)} \cdot (1-(INT(1/t)+1)t)^{n-1}.$$

Fazendo $j=i+1$ nas parcelas subtractivas e $j=i$ nas aditivas vem

$$F^0{}_T(t)=(-1)^0 \binom{n-1}{0} (nt-1)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1-INT(1/t)} (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right) \left((n-j)t-1 \right)^{n-1} .$$

$$- (-1)^{n-1-INT(1/t)} \binom{n-1}{n-1-INT(1/t)} ((n-1-n+1+INT(1/t)t-1)^{n-1} +$$

$$+(-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)} (1-INT(1/t)t)^{n-1} = (-1)^0 \binom{n-1}{0} + \sum_{j=1}^{INT(1/t)} (-1)^j \left(\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right) (1-jt)^{n-1} -$$

$$-(-1)^{INT(1/t)} \binom{n-1}{INT(1/t)} (1-(1+INT(1/t))t)^{n-1} + (-1)^{INT(1/t)} \cdot \binom{n-1}{INT(1/t)} (1-(INT(1/t)+1)t)^{n-1}.$$

Logo, como $\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} = \binom{n}{j}$, vem

$$F^0_T(t) = \begin{cases} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1-INT(1/t)} (-1)^j \binom{n}{j} ((n-j)t-1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{INT(1/t)} (-1)^j \binom{n}{j} (1-jt)^{n-1} \\ \qquad \text{para } \frac{1}{n} \leq t < 1 \\ = 1 \qquad \text{para } t \geq 1 \\ = 0 \qquad \text{para } t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

NOTA: No cálculo dos valores críticos é preferível a segunda expressão por ter menos parcelas.

2.2.2 Parâmetro de localização (λ) desconhecido

Como $g_1(\delta, \lambda) \geq 0$ e $g_2(\delta', \lambda) \geq 0$ crescem com λ para δ e δ' fixos, vem que $L_0 = g_1(\delta,\lambda) \cdot g_2(\delta, \lambda)$ e $L_j = g_1(\delta, \lambda) \cdot g_2(\delta', \lambda)$ crescem com λ para δ e δ' fixos. Como $X_i \geq \lambda$ para todo o i, implica $\lambda \leq \min_i X_i$, pelo que o maior valor que λ pode tomar compatível com a amostra é $X_{(1)}$; resulta que o valor de λ que maximiza L_0 e L_j para δ e δ' fixos é $X_{(1)}$. Logo:

$$\hat{\lambda} = X_{(1)}$$

$$g_1(\delta, \hat{\lambda}) = \frac{1}{\delta^{n-1}} \exp\left(- \frac{1}{\delta} \left(\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})\right)\right)$$

$$g_2(\delta', \hat{\lambda}) = \frac{1}{\delta'} \exp\left(- \frac{x_j - x_{(1)}}{\delta'}\right)$$

$$\max_{\lambda} L_0(\delta, \lambda) = g_1(\delta, \hat{\lambda}) \cdot g_2(\delta, \hat{\lambda}) = L_0(\delta, \hat{\lambda}) = \frac{1}{\delta^n} \exp\left(- \frac{1}{\delta} \Sigma(x_i - x_{(1)})\right)$$

$$\max_{\lambda} L_j(\delta, \delta', \lambda) = g_1(\delta, \hat{\lambda}) \cdot g_2(\delta', \hat{\lambda}) = L_j(\delta, \delta', \hat{\lambda}) = \frac{1}{\delta^{n-1}} \exp\left(- \frac{1}{\delta} \left(\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\delta'} \exp\left(- \frac{x_j - x_{(1)}}{\delta'}\right).$$

Daqui resulta que a maximização de L_0 e L_j com respeito a δ e/ou δ' se pode fazer separadamente à maximização com respeito a λ e, por raciocinío idêntico ao da pag.17, separadamente uma da outra.

Raciocínio idêntico ao da pag. 18, mostra que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial L_0(\delta, \hat{\lambda})}{\partial \delta} = \left(- \dfrac{n}{\delta} + \dfrac{1}{\delta^2} \Sigma(x_i - x_{(1)})\right) L_0(\delta, \hat{\lambda}) = 0 \Rightarrow \hat{\delta}_0 = \dfrac{\Sigma(x_i - x_{(1)})}{n}. \\ \text{Logo:} \\ \max\limits_{\delta,\lambda} L_0(\delta, \lambda) = \dfrac{1}{(\Sigma(x_i - x_{(1)})/n)^n} e^{-n}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1(\delta,\hat\lambda)}{\partial\delta} = \left(n\,\frac{n-1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\,(\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)}))\right).\ g_1(\delta,\hat\lambda) = 0 \Rightarrow \\[2em] \Rightarrow \hat\delta_j = \frac{1}{n-1}\,(\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})). \\[1em] \text{Logo:} \\[1em] \max\limits_{\delta}\ g_1(\delta,\hat\lambda) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})}{n-1}\right)^{n-1}}\ e^{-(n-1)}\ . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_2(\delta',\hat\lambda)}{\partial\delta'} = \left(-\frac{1}{\delta'} + \frac{x_j - x_{(1)}}{\delta'^2}\right)\cdot g_2(\delta',\hat\lambda) = 0 \Rightarrow \hat\delta_j{}' = x_j - x_{(1)}. \\[1em] \text{Logo:} \\[1em] \max\limits_{\delta'}\ g_2(\delta',\hat\lambda) = \frac{1}{x_j - x_{(1)}}\, e^{-1}. \end{cases}$$

Assim:

$$\max_{\delta,\delta',\lambda}\ L_j(\delta,\delta',\lambda) = \max_{\delta}\ g_1(\delta,\hat\lambda)\cdot\max_{\delta'}\ g_2(\delta',\hat\lambda) = \frac{1}{x_j - x_{(1)}}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})}{n-1}\right)^{n-1}}\ e^{-n}\ .$$

$$\max_{\delta',\lambda}\ L_j(\delta,\delta',\lambda) = g_1(\delta,\hat\lambda)\cdot\max_{\delta'}\ g_2(\delta',\hat\lambda) = \frac{1}{\delta^{n-1}}\exp\left(-\frac{1}{\delta}(\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)}))\right)\frac{1}{x_j - x_{(1)}}\ e^{-1}.$$

Claro que:

(c) $\max\limits_{\delta,\delta',\lambda}\ L_j \geq \max\limits_{\delta,\lambda}\ L_0$

(d) $\max\limits_{\delta',\lambda}\ L_j \geq \max\limits_{\lambda}\ L_0$.

2.2.2.1 Caso de δ conhecido e δ'conhecido

Neste caso tem-se $\hat{L}_0=\max\limits_{\lambda} L_0(\delta, \lambda)$ e $\hat{L}_j=\max\limits_{\lambda} L_j(\delta,\delta',\lambda)$.

Logo:

$$\ell_n = \frac{1}{\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0)} = \frac{1}{\max\left(1, \max\limits_j \frac{\delta}{\delta'} \exp\left(\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)(x_j - x_{(1)})\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\max\left(1, \frac{\delta}{\delta'} \exp\left(\max\limits_j \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)(x_j - x_{(1)})\right)\right)}.$$

Caso $\delta'<\delta$, vem $\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'} <0$, donde $\max\limits_j \left(\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)(x_j - x_{(1)})\right) = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)(x_{(1)} - x_{(1)})=0$, e,

portanto, $\ell_n \equiv \sigma$; não é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças.

Caso $\delta' > \delta$, a região de rejeição é da forma $\ell_n < c'$ com $c' < 1$ e, portanto, é equivalente

a $\frac{\delta}{\delta'} \exp\left(\max\limits_j \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta'}\right)(x_j - x_{(1)})\right) > c''$ com $c'' > 1$, que, por sua vez, é equivalente a

$\frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\delta} > c$ com $c > \frac{\ell n\ \sigma}{1-1/\sigma}$.

Logo, caso $\delta' > \delta$, uma estatística de teste é $B' = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\delta}$, com região de rejeição da forma $B' > c$ e candidato a "outlier" o elemento $X_{(n)}$, na condição de $c > \frac{\ell n\ \sigma}{1-1/\sigma}$.

Caso esta condição não se verifique, não se pode usar B' como estatística de teste. Da expressão que se verá adiante de c, conclui-se que $c > \frac{\ell n\ \sigma}{1-1/\sigma}$ equivale a $\alpha < 1 - (1-\sigma^{-\sigma/(\sigma-1)})^{n-1}$.

Para determinarmos as funções de distribuição de B', notemos que $B'=Y_{(n)}-Y_{(1)}$. Na pag. 21 temos:

$$F_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v)=\begin{cases}(1-e^{-v})^{n-1}(1-e^{-v/\sigma})-(e^{-u}-e^{-v})^{n-1}(e^{-u/\sigma}-e^{-v/\sigma}) & \text{para } 0<u\leq v\\ \\ (1-e^{-v})^{n-1}(1-e^{-v/\sigma}) & \text{para } u>v>o,\end{cases}$$

donde

$$f_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v)=\frac{\partial F_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v)}{\partial u\partial v}=$$

$$=(n-1)\,(e^{-u}-e^{-v})^{n-3}\Big((n-2)e^{-u}e^{-v}(e^{-u/\sigma}-e^{-v/\sigma})+\tfrac{1}{\sigma}(e^{-u}-e^{-v})(e^{-u/\sigma}e^{-v}+e^{-u}\,e^{-v/\sigma})\Big),$$

para $0<u\leq v$,

e $f_{Y_{(1)},Y_{(n)}}(u,v)=0$ nos demais casos.

Pondo $b=v-u$, vem $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u,b)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$, donde, para $u>0$, $b>0$:

$$f_{Y_{(1)},Y_{(n)}-Y_{(1)}}(u,b)=(n-1)(e^{-u}-e^{-b}\,e^{-u})^{n-3}((n-2)e^{-u}\,e^{-b}\,e^{-u}\,(e^{-u/\sigma}-e^{-b/\sigma}\,e^{-u/\sigma})+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\,(e^{-u}-e^{-b}\,e^{-u})\,(e^{-u/\sigma}\,e^{-b}\,e^{-u}+e^{-u}\,e^{-b/\sigma}\,e^{-u/\sigma})=$$

$$=(n-1)(1-e^{-b})^{n-3}((n-2)e^{-b}(1-e^{-b/\sigma})+\frac{1}{\sigma}\,(1-e^{-b})(e^{-b}+e^{-b/\sigma}))\,e^{-(n-1)u}\,e^{-u/\sigma}.$$

Como $\int_0^{+\infty} e^{-(n-1)u}\, e^{-u/\sigma}\, du = \int_0^{+\infty} e^{-(n-1+1/\sigma)u} du = \frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}$,

vem para b > 0:

$$f^1_{B'}(b) = \int_0^{+\infty} f_{Y_{(1)},Y_{(n)}-Y_{(1)}}(u,b)\, du =$$

$$= \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} (1-e^{-b})^{n-3}\Big((n-2)\, e^{-b}\, (1 - e^{-b/\sigma}) + \tfrac{1}{\sigma}(1-e^{-b})(e^{-b}+e^{-b/\sigma})\Big),$$

e para $b \leq 0$ vem $f^1_{B'}(b)=0$.

Logo, usando a mudança de variável $z=1-e^{-x}$, vem, para b > 0:

$$F^1_{B'}(b)= \int_0^b f^1_{B'}(x)\, dx = \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \int_0^{1-e^{-b}} z^{n-3}\Big((n-2)(1-z)(1-(1-z)^{1/\sigma}) +$$

$$+ \tfrac{1}{\sigma}\, z(1-z)+ \tfrac{1}{\sigma}\, z(1-z)^{1/\sigma}\Big) \frac{1}{1-z}\, dz =$$

$$= \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \int_0^{1-e^{-b}} (n-2)z^{n-3}+ \frac{1}{\sigma(n-1)} (n-1)z^{n-2} - \Big((n-2)z^{n-3}\, (1-z)^{1/\sigma} - z^{n-2}\, (1-z)^{1/\sigma-1}\, \tfrac{1}{\sigma}\Big)\, dz =$$

$$= \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \Big[z^{n-2}+ \frac{1}{\sigma(n-1)}\, z^{n-1} - z^{n-2}(1-z)^{1/\sigma}\Big]_{z=0}^{z=1-e^{-b}} =$$

$$= \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \Big((1-e^{-b})^{n-2} + \frac{1}{\sigma(n-1)}\, (1-e^{-b})^{n-1} - (1-e^{-b})^{n-2}\, e^{-b/\sigma}\Big).$$

Logo:

$$F^1_{B'}(b)=\begin{cases} \dfrac{n\text{-}1}{n\text{-}1+\frac{1}{\sigma}}\left(\dfrac{1}{\sigma(n\text{-}1)}\,(1\text{-}e^{-b})^{n-1}+(1\text{-}e^{-b})^{n-2}(1\text{-}e^{-b/\sigma})\right) & \text{para } b>0 \\ 0 & \text{para } b\leq 0. \end{cases}$$

Fazendo σ=1 obtemos, caso H_0 verdadeiro:

$$F^0_{B'}(b)=\begin{cases} (1\text{-}e^{-b})^{n-1} & \text{para } b>0 \\ 0 & \text{para } b\leq 0. \end{cases}$$

$F^0_{B'}(b) = F_M(b)$ tem a mesma expressão que $F^o_B(b)$ com n substituído por n-1.

2.2.2.2 <u>Caso δ conhecido e δ' desconhecido</u>

Neste caso tem-se $\hat{L}_0 = \max\limits_{\lambda} L_0(\delta,\lambda)$ e $\hat{L}_j = \max\limits_{\delta',\lambda} L_j(\delta,\delta',\lambda)$.

Logo:

$$\ell_n = \frac{1}{\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0)}\,.$$

Devido a (d) (pg. 62) vem $\max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0 \geq 1$, donde, $\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0) = \max\limits_j \hat{L}_j/\hat{L}_0$ e, como

$$\hat{L}_j/\hat{L}_0 = \frac{1}{\delta^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{\delta}\Sigma(x_i-x_{(1)}) + \frac{1}{\delta}(x_j-x_{(1)})\right) \frac{1}{x_j-x_{(1)}} e^{-1}.\ \delta^n \exp\left(\frac{1}{\delta}\Sigma(x_i-x_{(1)})\right) =$$

$$= \frac{\delta}{e} \cdot \frac{1}{x_j-x_{(1)}} \exp\left(\frac{1}{\delta}(x_j-x_{(1)})\right), \text{ vem}$$

$$\ell_n = \min_j \frac{e}{\delta}(x_j-x_{(1)}) \exp\left(-\frac{1}{\delta}(x_j-x_{(1)})\right).$$

Caso não haja informação suplementar, o mínimo é atingido para $\frac{x_j - x_{(1)}}{\delta} = 0$, isto é, quando $x_j=x_{(1)}$, e esse número é zero, pelo que $\ell_n \equiv 0$ e não é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças.

Caso a informação suplementar seja $\delta' < \delta$ vem

$$\ell_n = \min_{j:\hat{\delta}'_j = x_j-x_{(1)} < \delta} \frac{e}{\delta}(x_j-x_{(1)}) \exp\left(-\frac{1}{\delta}(x_j-x_{(1)})\right) \equiv 0$$

e também não é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças.

Já, porém, se a informação suplementar for $\delta' > \delta$, é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças, vindo

$$\ell_n = \min_{j:\hat{\delta}'_j = x_j-x_{(1)} > \delta} \frac{e}{\delta}(x_j-x_{(1)}) \exp\left(-\frac{1}{\delta}(x_j-x_{(1)})\right) = e\left(\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\delta}\right),$$

no caso de haver pelo menos um j tal que $\hat{\delta}'_j = x_j-x_{(1)} > \delta$, isto é, no caso de $\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\delta} > 1$. Neste caso, a região de rejeição é da forma $\ell_n < c'$, com $c' < 1$.

Logo:

Caso haja informação suplementar $\delta'>\delta$, uma estatística de teste é $B'=\dfrac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\delta}$, com região de rejeição da forma $B'>c$ e candidato a "outlier" o elemento $X_{(n)}$, na condição de $c>1$. Vê-se mais adiante que $c = -\ell_n(1-(1-\alpha)^{1/(n-1)})$. Logo temos $c \geq 1$ se $\alpha \leq 1-\left(1-\frac{1}{e}\right)^{n-1}$, que varia entre 0,36... para n=2 e 1 para $n=+\infty$. Assim, para os α's habituais, pode fazer-se o teste.

As funções de distribuição de B' já foram obtidas em 2.2.2.1.

2.2.2.3 Caso de δ desconhecido e δ'desconhecido

Neste caso tem-se $\hat{L}_0=\max\limits_{\delta,\lambda} L_0(\delta,\lambda)$ e $\hat{L}_j=\max\limits_{\delta,\delta',\lambda} L_j(\delta,\delta',\lambda)$.

Devido a (c), vem $\hat{L}_j / \hat{L}_0 \geq 1$, donde $\max(1, \max\limits_j \hat{L}_j / \hat{L}_0) = \max\limits_j \hat{L}_j / \hat{L}_0$ e, portanto

$$\ell_n=\min_j \hat{L}_0 / \hat{L}_j = \min_j e^{-n} \frac{1}{\left(\frac{\Sigma(x_i-x_{(1)})}{n}\right)^n} (x_j-x_{(1)}) \left(\frac{\Sigma(x_i-x_{(1)}) - (x_j-x_{(1)})}{n-1}\right)^{n-1} e^n =$$

$$= \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_j \frac{(x_j-x_{(1)})}{\Sigma(x_i-x_{(1)})}\left(1-\frac{(x_j-x_{(1)})}{\Sigma(x_i-x_{(1)})}\right)^{n-1}.$$

Caso não haja informação suplementar, o mínimo é atingido quando $x_j=x_{(1)}$, vindo $\ell_n \equiv 0$ e não é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças.

Caso a informação suplementar seja $\delta'<\delta$, vem

$$\ell_n = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_{j:\ \frac{(x_j - x_{(1)})}{\Sigma(x_i - x_{(1)})} < \frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{x_j - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})}\right) \equiv 0$$

$\Bigg($pois $x_j - x_{(1)} < \frac{\Sigma(x_i - x_{(1)}) - (x_j - x_{(1)})}{n-1}$ é equivalente a $\frac{n}{n-1}\ (x_j - x_{(1)}) < \frac{\Sigma(x_i - x_{(1)})}{n-1}$ e por sua vez equivalente a $\frac{x_j - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})} < \frac{1}{n}\ \Bigg)$, e também não é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças.

Já porém, se a informação suplementar for $\delta' > \delta$, é possível realizar um teste de razão de verosimilhanças, vindo

$$\ell_n = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \min_{j:\ \frac{(x_j - x_{(1)})}{\Sigma(x_i - x_{(1)})} > \frac{1}{n}} \varphi\left(\frac{x_j - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})}\right) = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \varphi\left(\frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})}\right)$$

no caso de haver pelo menos um j tal que $\frac{x_j - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})} > \frac{1}{n}$, isto é, se $\frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})} > \frac{1}{n}$. Ora isto é equivalente a $x_{(n)} - x_{(1)} > \frac{1}{n}\ \Sigma(\ x_i - x_{(1)})$, por sua vez equivalente a $n x_{(n)} > \Sigma x_i$, o que se verifica com probabilidade um. A região de rejeição é da forma $\ell_n < c'$ com $c' < 1$. Logo:

Caso haja informação suplementar $\delta' > \delta$, uma estatística de teste é $T' = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{\Sigma(x_i - x_{(1)})}$, com região de rejeição da forma $T' > c$ e candidato a "outlier" o elemento X(n).

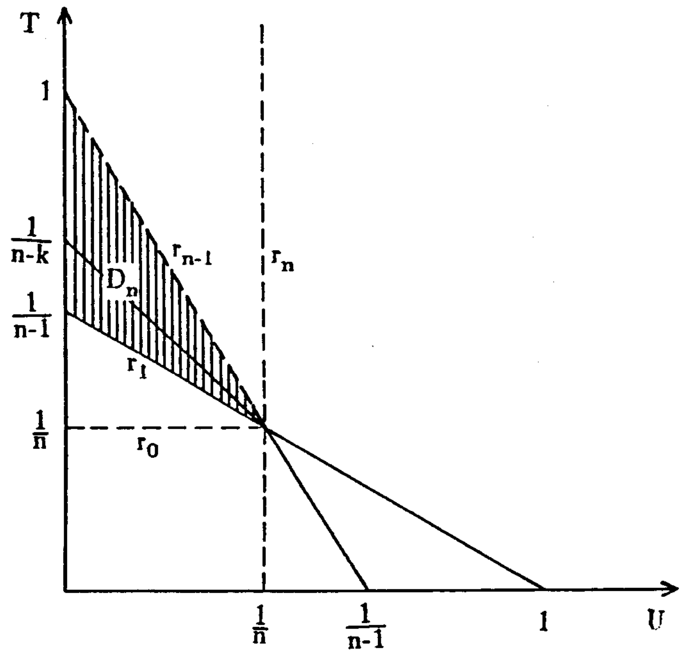
Determinemos as funções de distribuição da estatística T'.

$$T'=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\Sigma(x_i-x_{(1)})}=\frac{T\Sigma y_i - U\Sigma y_i}{\Sigma y_i - nU\Sigma y_i}=\frac{T-U}{1-nU}$$

Vejamos o domínio em que a f.d.p. de T′ é não nula. Sabe-se que o domínio em que a f.d.p. de (U, T) é não nula é:

$$D_n=\left\{ (U,T):(n-1)u+t<1,\ u+(n-1)t \geq 1,\ u \geq 0\right\}.$$

Vejamos a figura seguinte:



A recta r_k passa por $\left(0, \frac{1}{n-k}\right)$ e $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e tem equação $U= b_k(T) = \frac{1-(n-k)T}{k}$ ou

$$T = a_k(U) = \frac{1-kU}{n-k} \Leftrightarrow T-U = \frac{1-nU}{n-k} \Leftrightarrow \frac{T-U}{1-nU} = \frac{1}{n-k}.$$

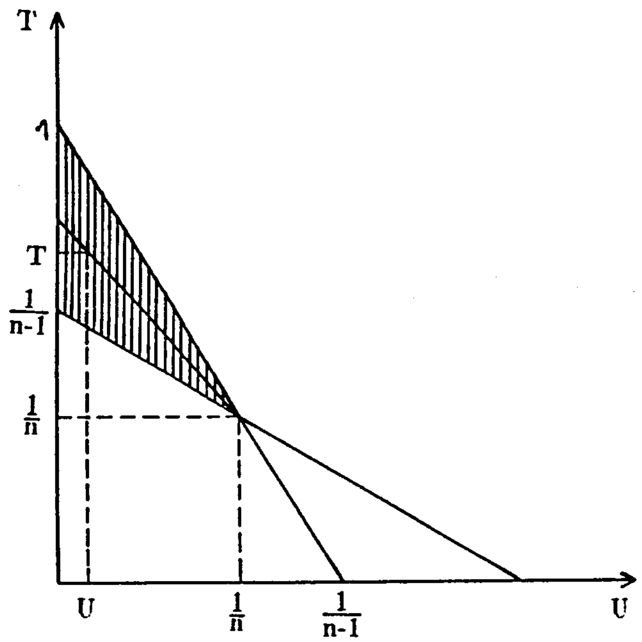
Para k=1, 2, ..., n-2, vem (U, T) em D_n e (U, T) entre r_k e

$r_{k+1} \Leftrightarrow b_k(T) \leq U < b_{k+1}(T) \Leftrightarrow a_k(U) \leq T < a_{k+1}(U) \Leftrightarrow \text{INT}\left(\frac{nT-1}{T-U}\right) = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-kU}{n-k} \leq T < \frac{1-(k+1)U}{n-k-1} \Leftrightarrow \frac{1-nU}{n-k} \leq T-U < \frac{1-nU}{n-k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n-k} \leq \frac{T-U}{1-nU} < \frac{1}{n-k-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n-k-1 < \frac{1}{T'} \leq n-k.$

Vejamos a interpretação geométrica:



A recta que passa por $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e (U, T) tem equação $\frac{T-\frac{1}{n}}{U-\frac{1}{n}}\left(u-\frac{1}{n}\right) = t-\frac{1}{n}$, e intersecta o

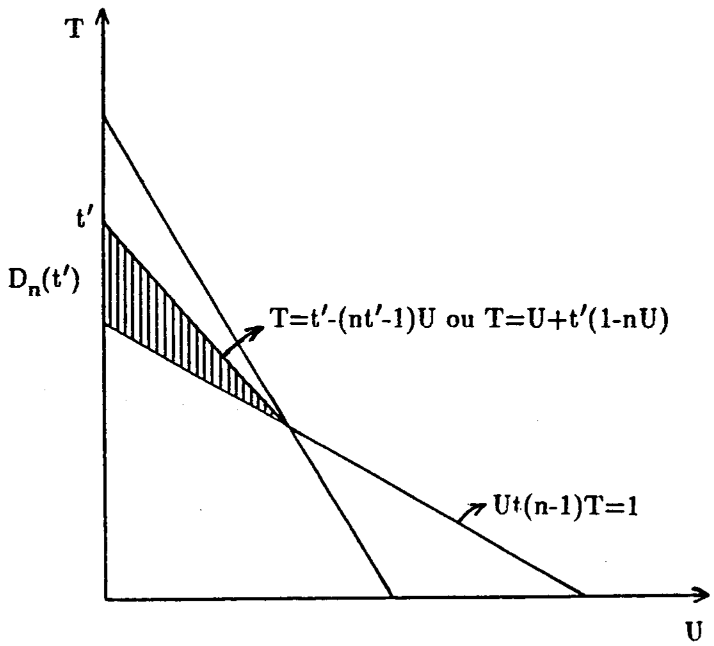
eixo dos t(u=0) quando $\frac{T-\frac{1}{n}}{U-\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n}\right) = t-\frac{1}{n}$, isto é, quando $t = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\,\frac{T-\frac{1}{n}}{U-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{T-\frac{1}{n}}{nU-1} =$

$= \frac{T-U}{1-nU} = T'.$

Consequentemente, o domínio em que a f.d.p. de T′ é não nula é:

$$\bigcup_{k=1}^{n-2} \left[\frac{1}{n-k}, \frac{1}{n-k-1}\right[= \left[\frac{1}{n-1}, 1\right[.$$

Veja-se a figura seguinte:



Claro que se tem :

$F^1_{T'}(t') = 0$ para $t' \leq \frac{1}{n-1}$

$F^1_{T'}(t') = 1$ para $t' \geq 1.$

Vamos obter $F^1_{T'}(t')$ para $t' \in \left[\frac{1}{n-1}, 1\right[$:

$$F^1_{T'}(t') = P(T' < t' \mid H_1) = P\left(\frac{T-U}{1-nU} < t' \mid H_1\right) = P(T-U < t'-nt'U \mid H_1) =$$

$$= P(T+(nt'-1)U < t' \mid H_1) = P((U, T) \in D_n(t') \mid H_1).$$

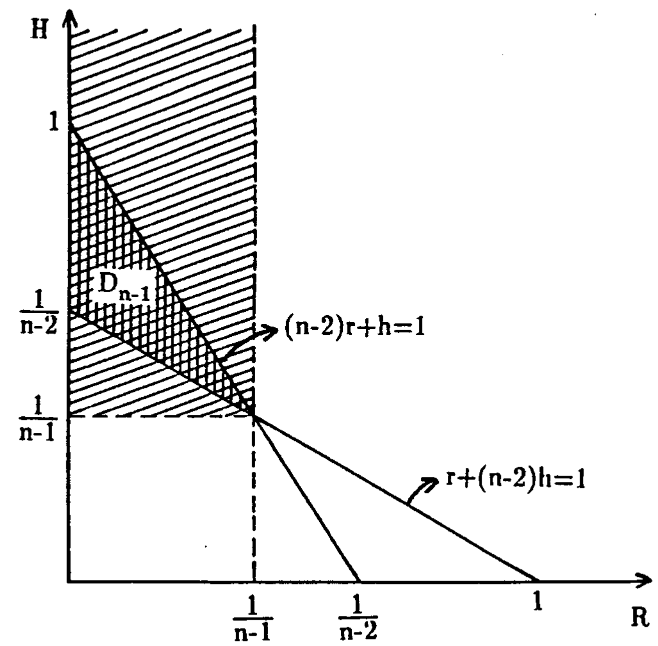
Lembremos que de * pag. 35, se tem:

$$P_{R,H}(r, h) = P(R > r, H \leq h) = \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir+(n-1-i)h-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)r-ih)^{n-2}, \quad \text{com} \quad j = \text{INT}\left(\frac{(n-1)h-1}{h-r}\right) = j(r,h) =$$

$$= 0, 1, 2, \ldots, n-2, \quad \text{para} \quad 0 \leq r < \frac{1}{n-1}, \; h \geq \frac{1}{n-1}.$$

A região onde valem estas fórmulas pode ser vista na figura seguinte:



$D_{n-1}=\left\{(r,h): (n-2)r + h<1,\ r+(n-2)h \geq 1,\ r \geq 0\right\}$ é o suporte de (R,H). Fora de D_{n-1} vem $f_{R,H}(r,h)=0$.

Visto isto, passemos então à estatística $T'=\frac{T-U}{1-nU}$. Vamos considerar $t' \in \left]\frac{1}{n-1}, 1\right[$.

Vem:

$$P(T'< t') = P(T-U< t'-nt'U) = P(T +(nt'-1)U< t')=$$

$$= P\left(\max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) + (nt'-1)\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) < t'\right)=$$

$$= P\left(\max(H,S) + (nt'-1) \min (R,S)< t'(1+S)\right) =$$

$$= P\left(S \leq R \leq H,\ \max (H, S)+(nt'-1) \min (R,S) < t'(1+S)\right)+P\left(R< S <H,\ \max(H,S)+\right.$$

$$\left.+(nt'-1) \min(R,S)< t'(1+S)\right) + P\left(R \leq H \leq S,\ \max(H,S)+(nt'-1) \min(R,S)< t'(1+S)\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} f_S(s)Q(s)\, ds, \text{ com}$$

$$Q(s)=Q_1(s) + Q_2(s)+Q_3(s).$$

$$Q_1(s)=P(s \leq R \leq H,\ H+(nt'-1)s < t'(1+s)) = P(s \leq R \leq H,\ H< t'(1+s)-(nt'-1)s).$$

Fazendo $y=y(s)=t'+s(1-(n-1)t')=t'-s((n-1)t'-1) = t'(1-s(n-1))+s$, vem

$$Q_1(s) = P\left(s \leq R \leq H,\ H<y(s),\ H \geq \frac{1}{n-1},\ 0 \leq R < \frac{1}{n-1}\right).$$

$$Q_2(s) = P(R<s<H,\ H+(nt'-1)R<t'(1+s))=$$

$$= P\left(R < s < H,\ H+(nt'-1) R < t'(1+s),\ H \geq \frac{1}{n-1},\ 0 < R < \frac{1}{n-1}\right)$$

$Q_3(s) = P(R \leq H \leq s,\ s+(nt'-1)R< t'(1+s) = P\left(R \leq H \leq s,\ R< \frac{t'(1+s)-s}{nt'-1}\right)$

Fazendo $x=x(s) = \frac{t'-s(1-t')}{nt'-1} = \frac{t'(1-(n-1)s)}{nt'-1} + s$, vem

$Q_3(s) = P(R \leq H \leq s,\ R < x(s),\ H \geq \frac{1}{n-1},\ 0 \leq R< \frac{1}{n-1}\Big)$.

Seja α a recta de equação $H+(nt'-1)R = t'(1+s)$. A ordenada da intersecção de α com a recta $R=s$ é y e a abcissa da intersecção de α com a recta $H = s$ é x.

Como $\frac{1}{n-1} < t' < 1$ vem $1-t' > 0$, $(n-1)t'-1 > 0$, $nt'-1 > (n-1)t'-1>0$.

<u>y decresce com s</u> $\qquad y(0) = t'>0 \qquad y\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}$

Para $0 < s < \frac{1}{n-1}$ tem-se $y(s) > \frac{1}{n-1}$. Para $s > \frac{1}{n-1}$ vem $y(s) < \frac{1}{n-1}$.

$$y \begin{cases} > s & \text{para } 0 < s < \frac{1}{n-1} \left(\text{como se viu vem } y> \frac{1}{n-1}\right) \\ = s & \text{para } s= \frac{1}{n-1} \\ < s & \text{para } s > \frac{1}{n-1} \left(\text{como se viu vem } y< \frac{1}{n-1}\right) \end{cases}$$

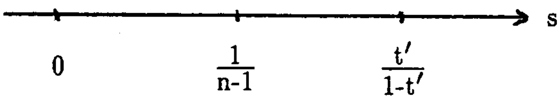
<u>x decresce com s</u> $\qquad x(0) = \frac{t'}{nt'-1} \qquad x\left(\frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}$

Para $0 < s < \frac{1}{n-1}$ vem $x(s) > \frac{1}{n-1}$. Para $s > \frac{1}{n-1}$ vem $x(s) < \frac{1}{n-1}$.

$$x \begin{cases} > \text{s} \quad \text{para} \quad 0 < \text{s} < \frac{1}{\text{n-1}} \left(\text{como se viu vem } x > \frac{1}{\text{n-1}}\right) \\ = \text{s} \quad \text{para s} = \frac{1}{\text{n-1}} \\ < \text{s} \quad \text{para s} > \frac{1}{\text{n-1}} \quad \left(\text{como se viu vem } x < \frac{1}{\text{n-1}}\right) \end{cases}$$

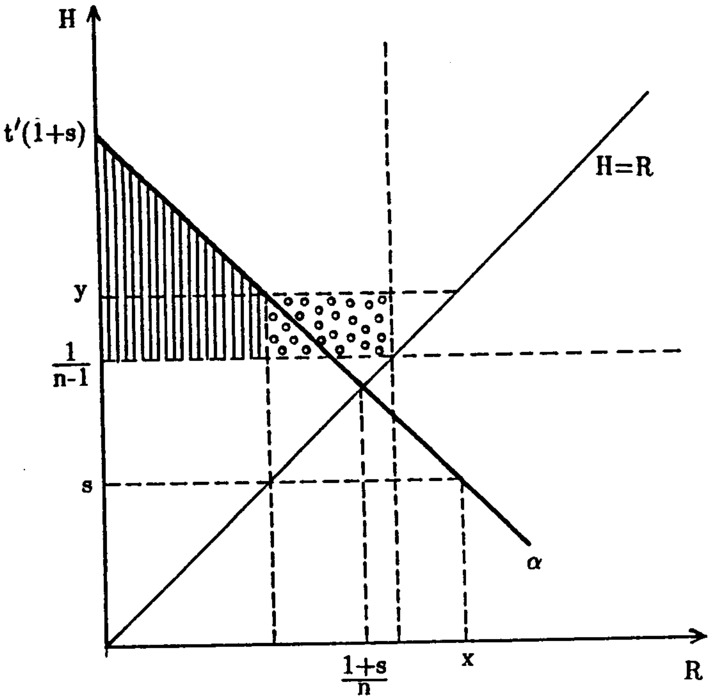
$$x\left(\frac{\text{t}'}{\text{1-t}'}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \quad \text{para} \quad \text{s} < \frac{\text{t}'}{\text{1-t}'} \\ x = 0 \quad \text{para s} = \frac{\text{t}'}{\text{1-t}'} \\ x < 0 \quad \text{para s} > \frac{\text{t}'}{\text{1-t}'} \end{cases}$$

Note-se que $\frac{\text{t}'}{\text{1-t}'}$ cresce com t$'$ e varia entre $\frac{1}{\text{n-2}}$ e $+\infty$ para t$'$ a variar entre $\frac{1}{\text{n-1}}$ e 1.



Vejamos gráficamente os três casos possíveis:

Caso $0 < s < \frac{1}{n-1}$

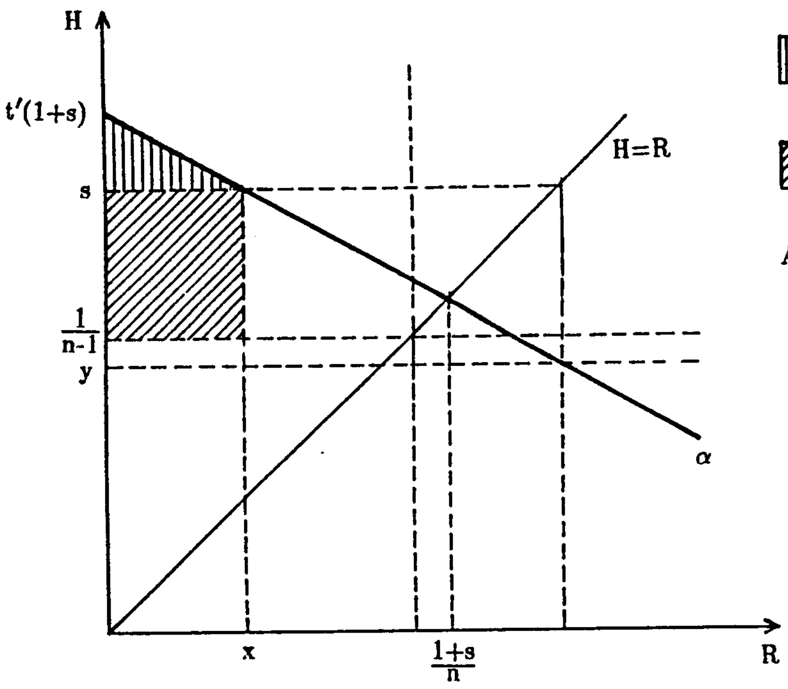


Região correspondente a $Q_2(s)$

Região correspondente a $Q_1(s)$

A região correspondente a $Q_3(s)$ é vazia

Caso $\frac{1}{n-1} \leq s < \frac{t'}{1-t'}$

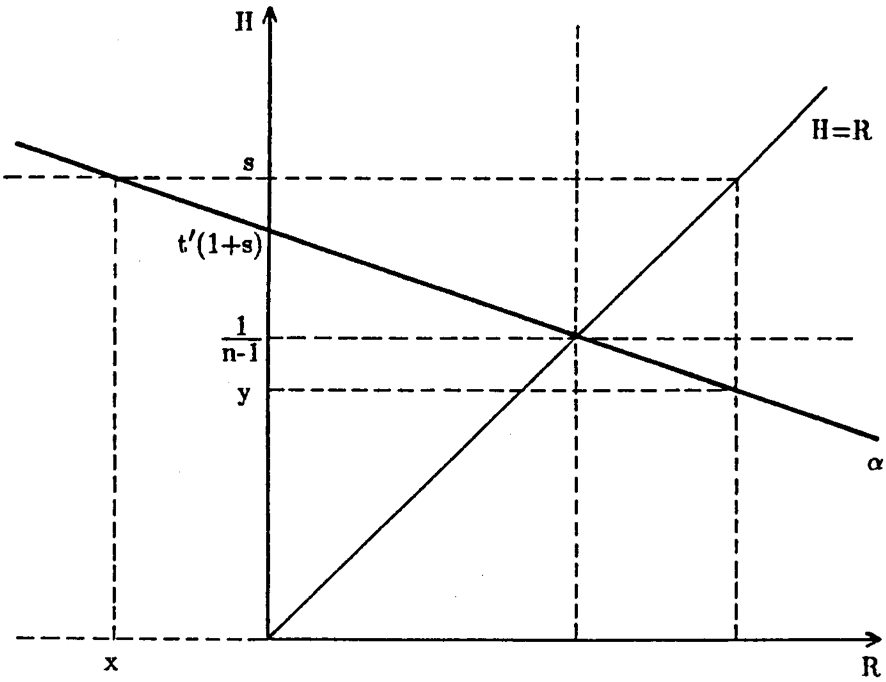


Região correspondente a $Q_2(s)$

Região correspondente a $Q_3(s)$

A região correspondente a $Q_1(s)$ é vazia

Caso $s \geq \frac{t'}{1-t'}$



As regiões correspondentes a $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ e $Q_3(s)$ são vazias

Logo

$$P(T'<t') = \int_0^{t'/(1-t')} f_S(s)\, Q(s)\, ds = \int_0^{1/(n-1)} f_S(s)\, Q(s)\, ds + \int_{1/(n-1)}^{t'/(1-t')} f_S(s)\, Q(s)\, ds.$$

Caso $0 < s < \frac{1}{n-1}$ temos

$$Q(s) = P_{R,H}(s,y) + \int_0^s \left(\int_{1/(n-1)}^{t'(1+s)-r(nt'-1)} f_{R,H}(r,h)\, dh \right) dr.$$

Seja $g_s(r) = \int_{1/(n-1)}^{t'(1+s)-r(nt'-1)} f_{R,H}(r,h)\, dh.$

Caso $\frac{1}{n-1} \leq s < \frac{t'}{1-t'}$ temos

$$Q(s) = \int_0^x g_s(r)\, dr.$$

Procedamos ao cálculo de $P_{R,H}(s,y)$ para $0 < s < \frac{1}{n-1}$:

$$\text{Vem } j(s,y) = \text{INT}\left(\frac{(n-1)y-1}{y-s}\right) = \text{INT}\left(n-1-\frac{1}{t'}\right)$$

$$P_{R,H}(s,y) = \sum_{i=0}^{\text{INT}(n-1-1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (is+(n-1-i)y-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-\text{INT}(1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (is+(n-1-i)y-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-\text{INT}(1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}((n-1-i)t'-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-\text{INT}(n-1-1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)\, s - iy)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\text{INT}(1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)\, s-iy)^{n-2} = \sum_{i=0}^{\text{INT}(1/t')} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}(1-it')^{n-2}.$$

Procedamos ao cálculo de $g_s(r)$:

$$g_s(r) = \int_{1/(n-1)}^{t'(1+s)-r(nt'-1)} f_{R,H}(r,h)dh = \int_{1/(n-1)}^{t'(1+s)-r(nt'-1)} \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{\partial}{\partial r} P_{R,H}(r,h)\right) dh=$$

$$= \left[- \frac{\partial}{\partial r} P_{R,H}(r, h) \right]_{h=\frac{1}{n-1}}^{h=t'(1+s)-r(nt'-1)} =$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir + (n-1-i)h-1)^{n-3}(n-2)i \right]_{h=t'(1+s)-r(nt'-1)}^{h=\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \left[- \sum_{i=0}^{n-2-j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1- (n-1-i)r-ih)^{n-3}(n-2)(n-1-i) \right]_{h=t'(1+s)-r(nt'-1)}^{h=\frac{1}{n-1}} .$$

Para $h = \frac{1}{n-1}$ vem $j(r, h)=\mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)\frac{1}{n-1} - 1}{\frac{1}{n-1} - r} \right) = 0.$

$$\sum_{i=0}^{j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir+(n-1-i)h-1)^{n-3} (n-2)i = 0$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1- (n-1-i)r-ih)^{n-3}(n-2)(n-1-i)=$$

$$= - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)(n-1-i)\left(\frac{(n-1)-(n-1-i)(n-1)r-i}{n-1} \right)^{n-3} =$$

$$= - \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)(n-1-i)^{n-2} \frac{1}{(n-1)^{n-3}} (1-(n-1)r)^{n-3}=$$

$$= (-1)^n \frac{n-2}{(n-1)^{n-3}} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{n-2}(1-(n-1)r)^{n-3} =$$

$= (-1)^n \frac{n-2}{(n-1)^{n-3}} (1-(n-1)r)^{n-3} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} j^{n-2} =0$, pois o último somatório é nulo.

Para h=t' (1+s)-r (nt'-1) vem $j(r, h) = \mathrm{INT}\left(\frac{(n-1)t'(1+s)-(n-1)r(nt'-1)-1}{t'(1+s)-r(nt'-1)-r}\right)=$

$$=\mathrm{INT}\left((n-1)-\frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-rn)}\right).$$

Seja $j^*(r,s) = \mathrm{INT}\left(\frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-rn)}\right)$. Logo $j(r,h) = n-2-j^*(r,s)$.

Então

$$\sum_{i=0}^{j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (ir+(n-1-i)h-1)^{n-3} (n-2)i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-j^*(r,s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ i\ ((n-1-i)t'(1+s-rn)-(1-(n-1)r)^{n-3}=$$

$$= - \sum_{i=0}^{n-2-j(r,h)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(n-1-i)r-ih)^{n-3}(n-2)(n-1-i) =$$

$$= - \sum_{i=0}^{j^*(r,s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ (n-1-i)\ ((1-(n-1)r)-it'(1+s-rn))^{n-3}.$$

Logo

$$g_s(r)= - \sum_{i=0}^{n-2-j^*(r,s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ i\ ((n-1-i)t'(1+s-rn)-(1-(n-1)r)^{n-3}=$$

$$= \sum_{i=0}^{j^*(r,s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ (n-1-i)\ ((1-(n-1)r)-\ it'(1+s-rn))^{n-3}$$

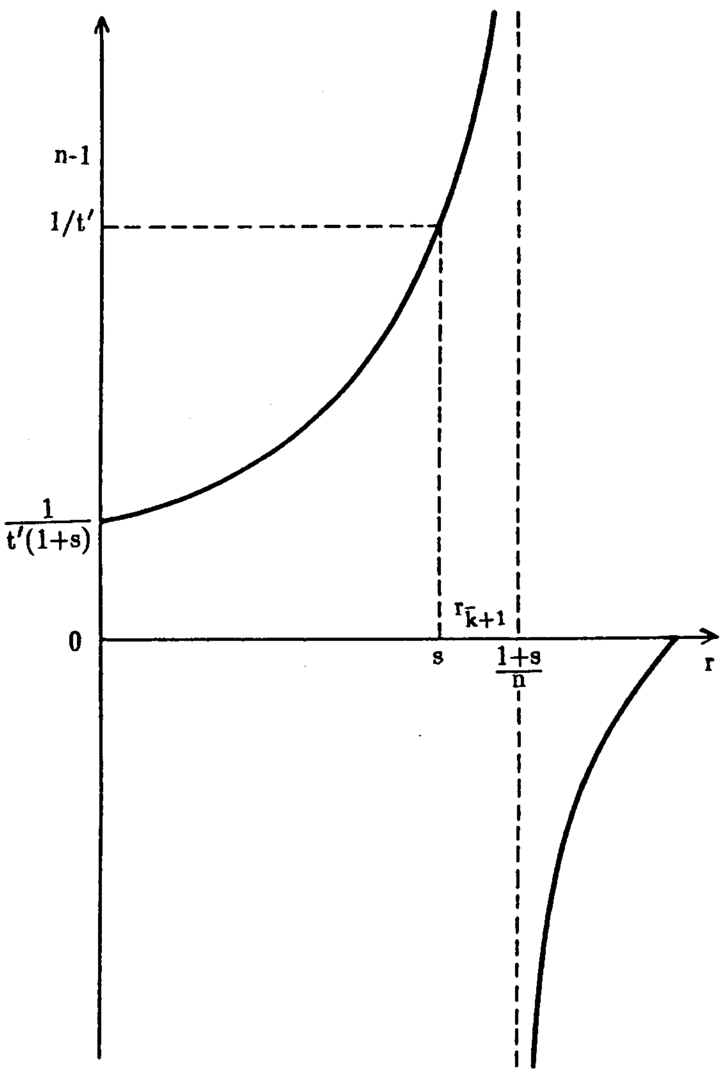
Vejamos o comportamento de $j^*(r,s) = \mathrm{INT}\left(\frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-rn)}\right)$

$$\frac{d}{dr}\frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-rn)} = \frac{1-s(n-1)}{t'(1+s-rn)^2}\,.$$

Vejamos gráficamente os dois casos possíveis:

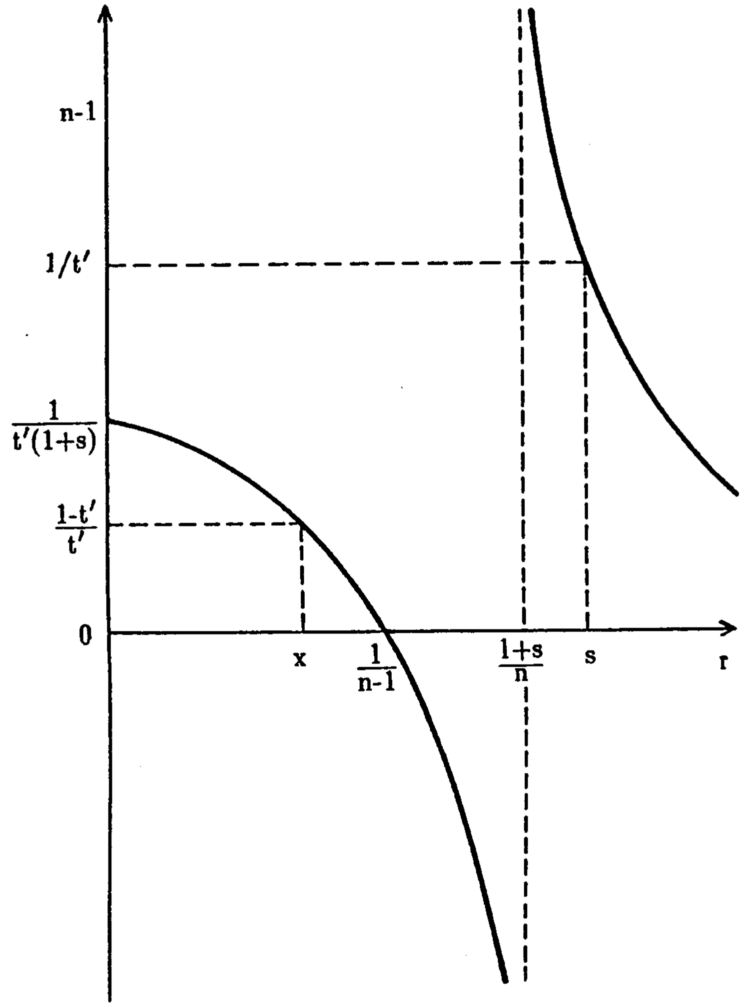
Gráfico de $\frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-rn)}$

Caso $0 < s < \frac{1}{n-1}$



Para r a variar entre 0 e s, $j^*(r,s)$ cresce em sentido lato com r

Caso $\frac{1}{\text{n-1}} \leq s < \frac{t'}{1-t'}$



Para r a variar entre 0 e x(s), $j^*(r,s)$ decresce em sentido lato com r

Seja

$$j^*(s) = j^*(0,s) = \text{INT}\left(\frac{1}{t'(1+s)}\right)$$

$$k' = j^*(s,s) = \text{INT}\left(\frac{1}{t'}\right)$$

$$j^*(x(s),\, s) = \mathrm{INT}\left(\frac{1-t'}{t'}\right) = k'-1$$

$$r_\ell(s) = \frac{\ell t'(1+s)-1}{n(\ell t'-1)+1}$$

$$r = r_\ell(s) \Leftrightarrow \frac{1-(n-1)r}{t'(1+s-nr)} = \ell\,.$$

Caso $0 < s < \frac{1}{n-1}$:

$$\int_0^s g_s(r)\, dr = \left(\int_0^{r_{j^*(s)+1}(s)} + \sum_{\ell=j^*(s)+1}^{k'} \int_{r_\ell(s)}^{r_{\ell+1}(s)} - \int_s^{r_{k'+1}(s)} \right) g_S(r)\, dr\,.$$

Tem-se, respectivamente, para o primeiro, segundo e terceiro integrais, $j^*(r,s)=j^*(s)$, $j^*(r,s)=\ell$ e $j^*(r,s)=k'$.

Seja

$$\int -(-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)i\ ((n-1-i)t'\ (1+s-rn) - (1-(n-1)r))^{n-3} dr=$$

$$=(-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t'\ (1+s-rn) - (1-(n-1)r))^{n-2}\ \frac{i}{(n-1-i)t'n - (n-1)} = \theta_{i,s}(r) \qquad \text{e}$$

$$\int (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ (n-1-i)\ ((1-(n-1)r)-it'(1+s-rn))^{n-3} dr =$$

$$=(-1)^i \binom{n-1}{i}\ ((1-(n-1)r)-it'(1+s-rn))^{n-2}\ \frac{n-1-i}{it'n-\ (n-1)} = -\ \theta_{n-1-i,\, s}\ (r).$$

Então, vem

$$\int_0^s g_s(r)\,dr = \sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)} \left(\theta_{i,s}(r_{j^*(s)+1}) - \theta_{i,s}(0)\right) + \sum_{\ell=j^*(s)+1}^{k'} \sum_{i=0}^{n-2-\ell} \left(\theta_{i,s}(r_{\ell+1}) - \theta_{i,s}(r_\ell)\right) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'} \left(\theta_{i,s}(r_{k'+1}) - \theta_{i,s}(s)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j^*(s)} \left(\theta_{n-1-i,\,s}(0) - \theta_{n-1-i,s}\,(r_{j^*(s)+1})\right) + \sum_{\ell=j^*(s)+1}^{k'} \sum_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n-1-i,\,s}(r_\ell) - \theta_{n-1-i,\,s}(r_{\ell+1})\right) -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'} \left(\theta_{n-1-i,\,s}\,(s) - \theta_{n-1-i,\,s}(r_{k'+1})\right) =$$

$$= \sum_{i=j^*(s)+1}^{k'} \theta_{n-1-i,\,s}\,(r_i) - \sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)} \theta_{i,s}(0) + \sum_{i=0}^{n-2-k'} \theta_{i,s}(s) =$$

$$= \sum_{i=j^*(s)+1}^{k'} \theta_{n-1-i,\,s}\,(r_i) + \sum_{i=0}^{j^*(s)} \theta_{n-1-i,s}(0) - \sum_{i=0}^{k'} \theta_{n-1-i,\,s}\,(s).$$

Como $\theta_{n-1-i,\,s}\,(r_i) = -(-1)^i \binom{n-1}{i} \dfrac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \cdot \left(\left(1-(n-1)\dfrac{it'(1+s)-1}{n(it'-1)+1}\right)- \right.$

$$\left. - it'\left(1+s-n\,\frac{it'(1+s)-1}{n(it'-1)+1}\right)\right)^{n-2} = -(-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \cdot 0 = 0, \text{ vem}$$

$$\int_0^s g_s(r)\,dr = \sum_{i=0}^{n-2-k'} \theta_{i,s}(s) - \sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)} \theta_{i,s}(0) = - \sum_{i=0}^{k'} \theta_{n-1-i,s}(s) + \sum_{i=0}^{j^*(s)} \theta_{n-1-i,s}(0)$$

o que implica

$$Q(s) = \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}((n-1-i)t'-1)^{n-2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}((n-1-i)t'-1)^{n-2} \frac{i}{(n-1-i)t'n - (n-1)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t'(1+s)-1)^{n-2} \frac{i}{(n-1-i)t'n - (n-1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}(1-it')^{n-2} -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-s(n-1))^{n-2}(1-it')^{n-2} \frac{n-1-i}{(n-1)-it'n} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j^*(s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it'(1+s))^{n-2} \frac{n-1-i}{(n-1)-it'n} .$$

Caso $\frac{1}{n-1} \leq s < \frac{t'}{1-t'}$:

Da figura da pag. 83 vem $\frac{1-t'}{t'} < \frac{1}{t'(1+s)} < \frac{1}{t'}$, o que implica $k'-1 \leq j^*(s) \leq k'$.

Há duas possibilidades:

a) $j^*(s) = k'-1$ o que implica que para $0 < r < x$ vem $j^*(r,s) = k'-1$

b) $j^*(s) = k'$ o que implica que para $0 < r \leq r^*(s)$ vem $j^*(r,s)=k'$ e para $r^*(s) < r < x$ vem $j^*(r,s)=k' -1$, com $r^*(s) = \frac{1-k't'(1+s)}{n-1-nk't'}$.

Subcaso a)

$$Q(s)= \int_0^x g_s(r)dr = \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (\theta_{i,s}(x)-\theta_{i,s}(0)) = \sum_{i=0}^{k'-1} (\theta_{n-1-i,s}(0)-\theta_{n-1-i,s}(x)) .$$

Subcaso b)

$$Q(s)=\left(\int_0^{r^*(s)}+\int_{r^*(s)}^{x}\right)g_s(r)dr=\sum_{i=0}^{n-2-k'}(\theta_{i,s}(r^*(s))-\theta_{i,s}(0))+\sum_{i=0}^{n-2-k'+1}(\theta_{i,s}(x)-\theta_{i,s}(r^*(s))=$$

$$=\sum_{i=0}^{k'}(\theta_{n-1-i,s}(0)-\theta_{n-1-i}(r^*(s)))+\sum_{i=0}^{k'-1}(\theta_{n-1-i,s}(r^*(s))-\theta_{n-1-i,s}(x)).$$

Como $\theta_{n-2-k'+1,s}(r^*(s))=\theta_{n-1-k',s}(r^*(s))=$

$$=-(-1)^{k'}\binom{n-1}{k'}\frac{n-1-k'}{k't'n-(n-1)}\left(\left(1-(n-1)\frac{1-k't'(1+s)}{n-1-nk't'}-k't'\left(1+\quad s\text{-}n\quad\frac{1-k't'(1+s)}{n-1-nk't'}\right)\right)^{n-2}=0,\text{ vem}$$

$$Q(s)=\sum_{i=0}^{n-1-k'}\theta_{i,s}(x)-\sum_{i=0}^{n-2-k'}\theta_{i,s}(0))=\sum_{i=0}^{k'}\theta_{n-1-i,s}(0)-\sum_{i=0}^{k'-1}\theta_{n-1-i,\,s}(x).$$

Assim, em qualquer dos dois subcasos:

$$Q(s)=\sum_{i=0}^{n-2-k'+1}\theta_{i,s}(x)-\sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)}\theta_{i,s}(0)=\sum_{i=0}^{j^*(s)}\theta_{n-1-i,s}(0)-\sum_{i=0}^{k'-1}\theta_{n-1-i,\,s}(x).$$

Resumindo, temos:

$$Q(s)=\sum_{i=0}^{n-2-k'}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{(n-1-i)(nt'-1)}{(n-1-i)t'n-(n-1)}((n-1-i)t'-1)^{n-2}\cdot(1-s(n-1))^{n-2}-$$

$$-\sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)}((n-1-i)t'(1+s)-1)^{n-2}=$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i(nt'-1)}{it'n-(n-1)} (1-it')^{n-2}(1-s(n-1))^{n-2} -$$

$$- \sum_{i=0}^{j^*(s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} (1-it'(1+s))^{n-2}, \quad \text{para } 0 < s < \frac{1}{n-1}$$

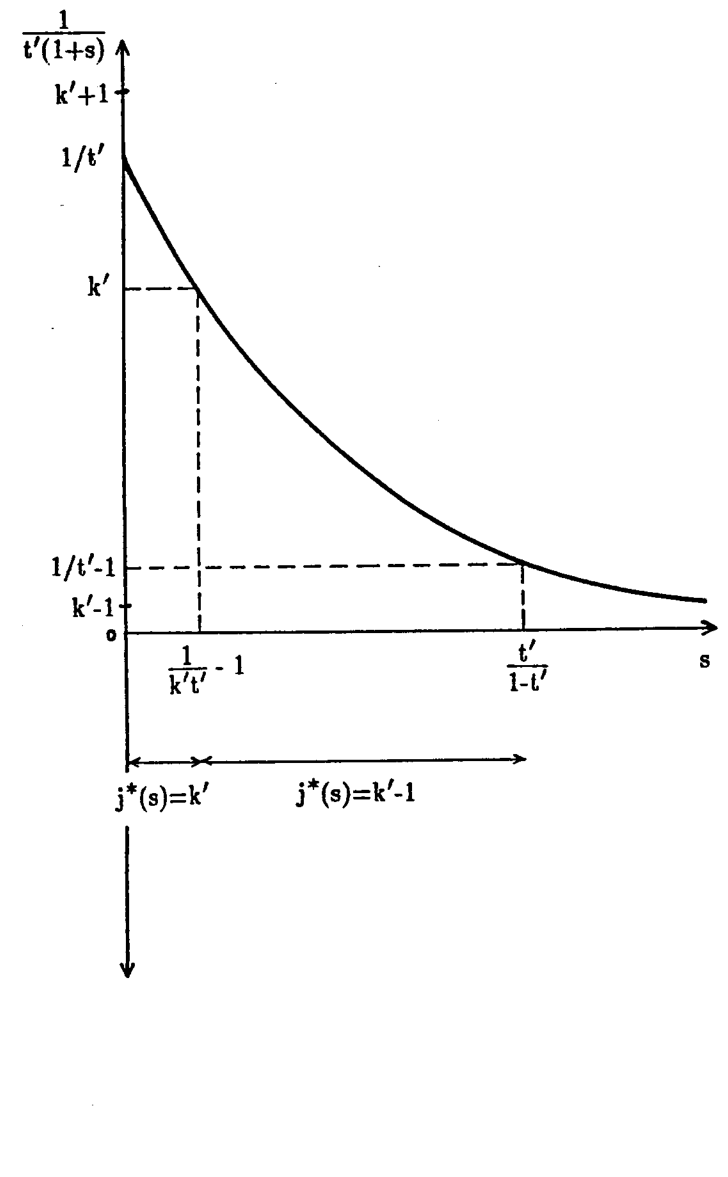
$$Q(s) = \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \left(\frac{1-(n-i)t'}{nt'-1}\right)^{n-2} (1-(n-1)s)^{n-2} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-j^*(s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} ((n-1-i)t'(1+s)-1)^{n-2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{j^*(s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{(n-1)-it'n} (1-it'(1+s))^{n-2} -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{(n-1)-it'n} \left(\frac{(i+1)t'-1}{nt'-1}\right)^{n-2} (1-(n-1)s)^{n-2}, \quad \text{para } \frac{1}{n-1} \leq s < \frac{t'}{1-t'}.$$

Veja-se a figura seguinte, que representa o gráfico da função $\frac{1}{t'(1+s)}$:



$\frac{1}{t'(1+s)}$
$k'+1$
$1/t'$
k'
$1/t'-1$
$k'-1$
o
$\frac{1}{k't'} - 1$
$\frac{t'}{1-t'}$
s
$j^*(s)=k'$
$j^*(s)=k'-1$

Seja

$$\int f_S(s)\,(1\text{-}s(n\text{-}1))^{n-2}\,ds = \int \tfrac{n-1}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n}(1\text{-}s(n\text{-}1))^{n-2}\,ds=$$

$$= \int (n\text{-}1)\left(\frac{1\text{-}s(n\text{-}1)}{1+\frac{1}{\sigma}}\right)^{n-2}\frac{-(n\text{-}1)-\frac{1}{\sigma}}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^2}\;\frac{1}{-(n\text{-}1)\sigma\text{-}1}\,ds= -\frac{1}{1+(n\text{-}1)\sigma}\left(\frac{1\text{-}s(n\text{-}1)}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-1} = A(s)$$

$$\int f_S\,(s)\,(1\text{-}it'(1+s))^{n-2}\,ds = -\frac{1}{1+(\sigma\text{-}1)it'}\left(\frac{1\text{-}it'(1+s)}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-1} = B_i(s)$$

$$\int f_S\,(s)\,((n\text{-}1\text{-}i)t'(1+s)\text{-}1)^{n-2}\,ds = \frac{1}{1+(\sigma\text{-}1)(n\text{-}1\text{-}i)t'}\left(\frac{(n\text{-}1\text{-}i)t'(1+s)\text{-}1}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-1} = C_i(s)\,.$$

Vê-se que:

$$A\!\left(\frac{1}{n\text{-}1}\right) = 0\,,\quad A(0) = -\frac{1}{1+(n\text{-}1)\sigma}\ \text{ e }\ A\!\left(\frac{t'}{1\text{-}t'}\right) = -\frac{1}{1+(n\text{-}1)\sigma}\left(\frac{1\text{-}nt'}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t'}\right)^{n-1}$$

Logo:

$$P(T'<t'\,|\,H_1) = \int_0^{1/(n-1)} f_S(s)\,Q(s)\,ds + \int_{1/(n-1)}^{t'/(1-t')} f_S(s)\,ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-k'}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{(n\text{-}1\text{-}i)(nt'\text{-}1)}{(n\text{-}1\text{-}i)t'n\text{-}(n\text{-}1)}\,((n\text{-}1\text{-}i)t'\text{-}1)^{n-2}\int_0^{1/(n-1)} f_S(s)\,(1\text{-}s(n\text{-}1))^{n-2}ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-2-k'+1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{i}{(n\text{-}1\text{-}i)t'n\text{-}(n\text{-}1)}\left(\frac{1\text{-}(n\text{-}i)t'}{nt'\text{-}1}\right)^{n-2}\int_{1/(n-1)}^{t'/(1-t')} f_S(s)\,(1\text{-}s(n\text{-}1))^{n-2}ds\,-$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \int_0^{1/(k't')-1} f_S(s) \, ((n-1-i)t'(1+s)-1)^{n-2} ds -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \int_{1/(k't')-1}^{t'/(1-t')} f_S(s) \, ((n-1-i)t'(1+s)-1)^{n-2} ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i(nt'-1)}{it'n-(n-1)} (1-it')^{n-2} \int_0^{1/(n-1)} f_S(s) \, (1-s(n-1))^{n-2} \, ds +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \left(\frac{(i+1)t'-1}{nt'-1}\right)^{n-2} \int_{1/(n-1)}^{t'/(1-t')} f_S(s) \, (1-s(n-1))^{n-2} \, ds -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \int_0^{1/(k't')-1} f_S(s) \, (1-it'(1+s))^{n-2} \, ds -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \int_{1/(k't')-1}^{t'/(1-t')} f_S(s) \, (1-it'(1+s))^{n-2} \, ds$$

$$P(\, T' < t' \mid H_1) = \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{(n-1-i)(nt'-1)}{(n-1-i)t'n-(n-1)} ((n-1-i)t'-1)^{n-2} \, \frac{1}{1+(n-1)\sigma} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \left(\frac{1-(n-i)t'}{nt'-1}\right)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(\frac{1-nt'}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t'}\right)^{n-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \, \frac{1}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'} \left(\frac{(n-i)t'-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)t'}\right)^{n-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i}{(n-1-i)t'n-(n-1)} \, \frac{1}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'} \, ((n-1-i)t'-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{i(nt'-1)}{it'n-(n-1)} (1-it')^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \left(\frac{(i+1)t'-1}{nt'-1}\right)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(\frac{1-nt'}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'}\right)^{n-1} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \frac{1}{1+(\sigma-1)it'} \left(\frac{1-(i+1)t'}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'}\right)^{n-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{it'n-(n-1)} \frac{1}{1+(\sigma-1)it'} (1-it')^{n-1},$$

atendendo a que $C_{n-1-k'}\left(\frac{1}{k't'} - 1\right) = 0$ e $B_{k'}\left(\frac{1}{k't'} - 1\right) = 0$.

Assim, temos para $\frac{1}{n-1} < t' < 1$ e com $k' = \mathrm{INT}\left(\frac{1}{t'}\right)$:

$$F^1_{T'}(t') = P(T' < t' \mid H_1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(n-1-i)t'n-(n-1)} ((n-1-i)t'-1)^{n-2} \left(\frac{(n-1-i)(nt'-1)}{1+(n-1)\sigma} + \frac{i((n-1-i)t'-1)}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'}\right) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-2-k'+1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(n-1-i)t'n - (n-1)} \frac{i}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'} \left(\frac{(n-i)t'-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'}\right)^{n-2} \left(- \frac{(nt'-1)}{1+(n-1)\sigma} +\right.$$

$$\left. + \frac{(n-i)t'-1}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{it'n - (n-1)} (1-it')^{n-2} \left(\frac{i(nt'-1)}{1+(n-1)\sigma} - \frac{(n-1-i)(1-it')}{1+(\sigma-1)it'}\right) -$$

$$- \sum_{i=0}^{k'-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{it'n-(n-1)} \frac{n-1-i}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'} \left(\frac{1-(i+1)t'}{1+\left(\frac{1}{\sigma} -1\right)t'}\right)^{n-2} \left(- \frac{nt'-1}{1+(n-1)\sigma} + \frac{(i+1)t'-1}{1+(\sigma-1)it'}\right).$$

Procedamos à simplificação destes resultados para fins computacionais.

Fazendo j=i+1 no somatório $\sum_{i=0}^{k'-1}$, ele virá igual a:

$$\sum_{j=1}^{k'} - (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{j}{n-j} \frac{1}{(j-1)\ t'n\ -(n-1)} \frac{n-j}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t'} \left(\frac{1-jt'}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t'}\right)^{n-2} \cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{nt'-1}{1+(n-1)\sigma}+\frac{jt'-1}{1+(\sigma-1)(j-1)t'}\right)=$$

$$= -\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \binom{n-1}{j} (1-jt')^{n-2} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t'\right)^{n-1}} \frac{j}{(j-1)\ t'n\ -(n-1)} \frac{(j-1)t'n-(n-1)\ (t'+\sigma(1-t'))}{(1+(n-1)\sigma)(1+(\sigma-1)(j-1)t')} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \binom{n-1}{j} (1-jt')^{n-2} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t'\right)^{n-1}} \frac{j(t'+\sigma(1-t'))}{(1+(n-1)\sigma)(1+(\sigma-1)(j-1)t')} .$$

Quanto ao somatório $\sum_{i=0}^{k'}$ ele é igual a:

$$\sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2} \frac{1}{it'n-(n-1)} \frac{(int'-(n-1))\ (1+\sigma(n-1)-i(t'+\sigma(1-t')))}{(1+(n-1)\sigma)\ (1+(\sigma-1)it')} =$$

$$=\sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2} \frac{1+(\sigma-1)it'+(n-1-i)\sigma}{(1+(n-1)\sigma)\ (1+(\sigma-1)it')} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1+\frac{(n-1-i)\sigma}{1+(\sigma-1)it'}\right) =$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1+\frac{(n-1-i)\ \sigma}{1+(\sigma-1)it'}\right).$$

Fazendo j=i-1 no somatório $\sum_{i=0}^{n-2-k'+1}$ e tendo em atenção que a parcela correspondente

a i=0 é nula, virá esse somatório igual a:

$$-\sum_{j=0}^{n-2-k'} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{n-1-j}{j+1} \frac{1}{(n-2-j)t'n - (n-1)} \frac{j+1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'\right)^{n-1}} ((n-1-j)t'-1)^{n-2} \cdot$$

$$\cdot \frac{((n-2-j)nt' - (n-1)\ (t'+\sigma(1-t'))}{(1+(n-1)\sigma)\ (1+(\sigma-1)\ (n-2-j)t')} =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n-2-k'} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{n-1-j}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'\right)^{n-1}} ((n-1-j)t'-1)^{n-2} \frac{(t'+\sigma(1-t))}{(1+(n-1)\sigma\ (1+(\sigma-1)(n-2-j)t')} \ .$$

Quanto ao somatório $\sum_{i=0}^{n-2-k'}$ ele é igual a:

$$\sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t'-1)^{n-2} \frac{1}{(n-1-i)t'n - (n-1)} \frac{((n-1-i)t'n - (n-1))(1+(n-1-i)t'(\sigma-1)+\sigma i)}{(1+(n-1)\sigma)\ (1+(\sigma-1)(n-1-i)t')} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t'-1)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(1+ \frac{i\sigma}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'}\right) \cdot$$

Logo:

$$
F^1_{T'}(t') = \begin{cases}
= \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t'-1)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(\left(1+ \frac{i\sigma}{1+(\sigma-1)(n-1-i)t'} \right) + \right. \\
\qquad \left. + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'\right)^{n-2}} \frac{(n-1-i)\sigma}{1+(\sigma-1)\ (n-2-i)t'} \right) = \\
= 1+\displaystyle\sum_{i=1}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(\left(1+ \frac{(n-1-i)\sigma}{1+(\sigma-1)it'} \right) + \right. \\
\qquad \left. + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)t'\right)^{n-2}} \frac{i\sigma}{1+(\sigma-1)(i-1)t'} \right) \quad \text{para } \frac{1}{n-1} < t' < 1 \text{ com } k'=\text{INT}(1/t') \\
= 1 \quad \text{para } t' \geq 1 \\
= 0 \quad \text{para } t' \leq \frac{1}{n-1}\,.
\end{cases}
$$

Verificação dos dois últimos resultados:

Caso $t'=1^-$ vem $k'=\text{INT}(1/t')=1$ e tem-se

$$
F^1_{T'}(t') = 1 + (-1)^1 \binom{n-1}{1} (1-1)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(1 + \frac{(n-2)\sigma}{1 + (\sigma-1)1} + \frac{\sigma}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)1\right)^{n-2}} \right) = 1.
$$

Caso $t' = \left(\frac{1}{n-1}\right)^+$ vem $k'=n-2$ e tem-se

$$
F^1_{T'}(t') = (-1)^0 \binom{n-1}{0} \left((n-1-0) \frac{1}{n-1} - 1\right)^{n-2} \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \left(1 + \frac{0}{1 + (\sigma-1)(n-1) \frac{1}{n-1}} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\left(1+ \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \frac{1}{n-1}\right)^{n-2}} \frac{(n-1)\sigma}{1+(\sigma-1)\ (n-2) \frac{1}{n-1}} \right) = 0\,.
$$

Caso H_0 verdadeira, basta fazer σ=1. Assim

$$P(T'< t'|\, H_0) = \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t' - 1)^{n-2}\ \frac{1}{n}\left(1 + \frac{i}{1} + \frac{n-1-i}{1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t' - 1)^{n-2} = 1+\sum_{i=1}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2}\ \frac{1}{n}\left(1+ \frac{n-1-i}{1} + \frac{i}{1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1 - it')^{n-2}\,.$$

Logo:

$$F^0_{T'}(t') = \begin{cases} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2-k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)t' - 1)^{n-2} = \\ = \displaystyle\sum_{i=0}^{k'} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-it')^{n-2}, \quad \text{para } \frac{1}{n-1} < t' < 1 \quad \text{com } k'=\mathrm{INT}\left(\frac{1}{t'}\right) \\ = 1 \quad \text{para } t' \geq 1 \\ = 0 \quad \text{para } t' \leq \frac{1}{n-1}\,. \end{cases}$$

NOTA: $F^0_{T'}(t') = F_H(t')$ coincide com a expressão de $F^0_T(t')$ mas com n substítuido por n-1. Isto é, o valor crítico de T' para n=50, por exemplo, é o de T para n=49.

2.3 QUADRO RESUMO

Apresentamos a seguir o quadro resumo de todas as estatísticas deduzidas em 2.2. Como se viu, todas elas foram obtidas utilizando o método GAN, embora as estatísticas A, B, U e T já tenham vindo a ser propostas tradicionalmente. Estas quatro estatísticas, assim como a estatística Z, foram obtidas pelo método GAN por Rosado (1984). As restantes estatísticas, isto é, D, B′ e T′, foram obtidas no presente trabalho. É interessante verificar que para δ conhecido se têm as mesmas estatísticas de teste quer δ' seja conhecido ou desconhecido (desde que se tenha a mesma informação suplementar). Torna-se portanto, nesses casos, irrelevante conhecer ou não o valor de δ' desde que se saiba se ele é maior ou menor que δ.

Quadro Resumo

λ	δ	δ'	Inf. sup.	Estat. de teste	Candidato a "outlier"	Região de rejeição
conh.	conh.	conh.	$\delta'<\delta$	$A = \frac{X_{(1)} - \lambda}{\delta}$	$X_{(1)}$	$A<c$
"	"	"	$\delta'>\delta$	$B = \frac{X_{(n)} - \lambda}{\delta}$	$X_{(n)}$	$B>c$
"	conh.	desc.	–	$D = \min(A\exp(-A), B\exp(-B))$	$X_{(1)}$ se $D=A\exp(-A)$ $X_{(n)}$ se $D=B\exp(-B)$	$D<c$
"	"	"	$\delta'<\delta$	A	$X_{(1)}$	$A<c$
"	"	"	$\delta'>\delta$	B	$X_{(n)}$	$B>c$
"	desc.	desc.	–	$Z = \min(\varphi(U),\varphi(T))$	$X_{(1)}$ se $Z=\varphi(U)$ $X_{(n)}$ se $Z=\varphi(T)$	$Z<c$
"	"	"	$\delta'<\delta$	$U = \frac{X_{(1)} - \lambda}{\Sigma(X_i - \lambda)}$	$X_{(1)}$	$U<c$
"	"	"	$\delta'>\delta$	$T = \frac{X_{(n)} - \lambda}{\Sigma(X_i - \lambda)}$	$X_{(n)}$	$T>c$
desc.	conh.	conh.	$\delta'<\delta$	Não é possível realizar um teste de razão de ver.		
"	"	"	$\delta'>\delta$	$B' = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\delta}$	$X_{(n)}$	$B'>c$
"	conh.	desc.	$\delta'>\delta$	$B' = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\delta}$	$X_{(n)}$	$B'>c$
"	"	"	$\delta'<\delta$	Não é possível realizar um teste de razão de ver.		
"	"	"	–	Não é possível realizar um teste de razão de ver.		
"	desc.	desc.	$\delta'>\delta$	$T' = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\Sigma(X_i - X_{(1)})}$	$X_{(n)}$	$T'>c$
"	"	"	$\delta'<\delta$	Não é possível realizar um teste de razão de ver.		
"	"	"	–	Não é possível realizar um teste de razão de ver.		

NOTA: O caso de δ desconhecido e δ' conhecido não tem interesse em termos práticos.

Capítulo III

Valores Críticos e Medidas de "Performance"

3.1 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA A

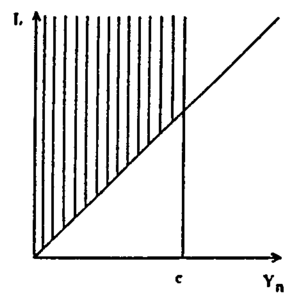
Lembremos que $A = \min\limits_{1 \leq j \leq n} Y_j = \min(L, Y_n)$.

$\alpha = P(A<c \mid H_0) = F^0{}_A(c) = 1\text{-}e^{-nc}$. Logo $c = -\frac{1}{n}\ln(1\text{-}\alpha)$.

$P_1 = P(A<c \mid H_1) = F^1{}_A(c) = 1\text{-}e^{-(n-1)c}\, e^{-c/\sigma} = 1\text{-}(1\text{-}\alpha)\, e^{c(1-1/\sigma)}$.

$P_2 = P(Y_n<c \mid H_1) = 1\text{-}e^{-c/\sigma}$.

$P_3 = P(A<c,\ A=Y_n \mid H_1) = P(Y_n<c,\ L \geq Y_n \mid H_1) =$

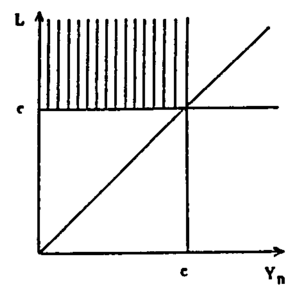


$$= \int_0^c \left(\int_y^{+\infty} f_L(l)\, dl \right) f_{Y_n}(y)\, dy = \int_0^c \left(1\text{-}F_L(y)\right) f_{Y_n}(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_0^c \exp\!\left(-y\left(n-1+\frac{1}{\sigma}\right)\right) dy = \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1\text{-}e^{-nc}\, e^{c(1-1/\sigma)}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1\text{-}(1\text{-}\alpha)e^{c(1-1/\sigma)}\right).$$

$P_4 = P(A<c,\ A=Y_n;\ Y_1,...,Y_{n-1}>c \mid H_1) =$



$= P(Y_n<c,\ L \geq Y_n,\ L>c \mid H_1) = P(Y_n<c,\ L>c \mid H_1) =$

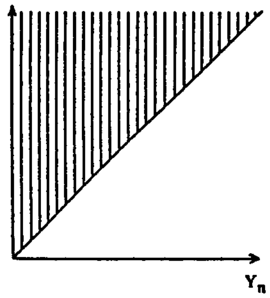
$= P(Y_n<c \mid H_1) \cdot P(L>c) = (1\text{-}e^{-c/\sigma})\, e^{-(n-1)c} =$

$= (1\text{-}e^{-c/\sigma})\, e^c(1\text{-}\alpha)$.

$$P_6=P(A=Y_n \mid H_1)=P(L \geq Y_n \mid H_1)=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_y^{+\infty} f_L(l)dl\right) f_{Y_n}(y)dy = \int_0^{+\infty}\left(1-F_L(y)\right) f_{Y_n}(y)dy =$$

$$=\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty} \exp(-y(n-1+1/\sigma)dy = \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \, .$$



$$P_5 = P_3/P_6 = 1-(1-\alpha)e^{c(1-1/\sigma)} \, .$$

$$P_7 = P_1-P_3 = \left(1- \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\right)\left(1-(1-\alpha)\, e^{c(1-1/\sigma)}\right).$$

NOTA: Caso H_0 verdadeira, vem 1-exp(-nA) $\sim$ Uniforme (0,1), podendo ser usada como estatísticade teste com região de rejeição 1-exp(-nA) $<\alpha$.

3.2 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA B

Lembremos que $B = \max\limits_{1 \leq j \leq n} Y_j = \max(M,Y_n)$.

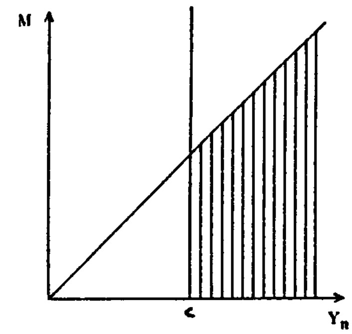
$\alpha = P(B>c \mid H_0) = 1-F^0{}_B(c) = 1-(1-e^{-c})^n$. Logo $c = -\ln\left(1-(1-\alpha)^{1/n}\right)$.

$$P_1 = P(B>c \mid H_1) = 1-F^1{}_B(c) = 1-(1-e^{-c})^{n-1}(1-e^{-c/\sigma}) = 1-(1-\alpha)^{1-1/n}\left(1-e^{-c/\sigma}\right).$$

$$P_2 = P(Y_n>c \mid H_1) = e^{-c/\sigma}.$$

$$P_3 = P(B>c,\ B=Y_n \mid H_1) = P(B=Y_n,\ Y_n>c \mid H_1) =$$

$$= P(M \le Y_n,\ Y_n>c \mid H_1) = \int_c^{+\infty} \left(\int_0^y f_M(m)dm\right) f_{Y_n}(y)dy =$$

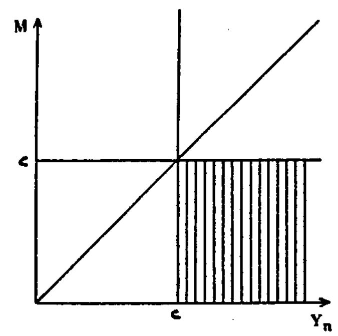


$$= \int_c^{+\infty} (1-e^{-y})^{n-1} \tfrac{1}{\sigma}\ e^{-y/\sigma}\ dy =$$

$$= \tfrac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \int_c^{+\infty} e^{-ky-y/\sigma}\ dy =$$

$$= \tfrac{1}{\sigma}\, e^{-c/\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}}\, e^{-ck}\ .$$

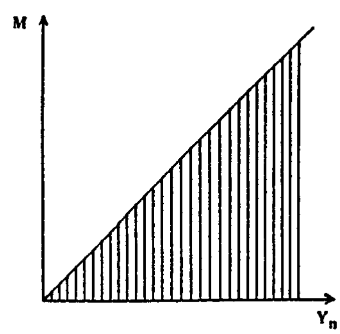
$$P_4 = P(B>c,\ B=Y_n;\ Y_1,\dots,Y_{n-1}<c \mid H_1) =$$



$$= P(M \le Y_n,\ Y_n>c,\ M<c \mid H_1) = P(M<c)\cdot P(Y_n>c \mid H_1) =$$

$$= (1-e^{-c})^{n-1}\ e^{-c/\sigma} = (1-\alpha)^{1-1/n} e^{-c/\sigma}\ .$$

$$P_6 = P(B=Y_n \mid H_1) = P(M \le Y_n \mid H_1) =$$



$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y f_M(m)dm\right) f_{Y_n}(y)dy = \int_0^{+\infty} (1-e^{-y})^{n-1}\ \tfrac{1}{\sigma}\ e^{-y/\sigma}dy =$$

$$= \tfrac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}}\ .$$

Como fórmula alternativa para o P_6 temos (fazendo a mudança de variável $x=1-e^{-y}$):

$$P_6 = \tfrac{1}{\sigma} \int_0^1 x^{n-1}\ (1-x)^{1/\sigma-1}\ dx = \tfrac{1}{\sigma}\ B\left(n,\ \tfrac{1}{\sigma}\right) = \tfrac{1}{\sigma}\cdot \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{\sigma}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{(n-1)!\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\left(n-1+\frac{1}{\sigma}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{\sigma}\right)} = \dots = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{(n-1)!\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\left(n-1+\frac{1}{\sigma}\right)\dots\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\,\Gamma\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+\frac{1}{\sigma}}$$

(veja-se Patel, J., Kapadia, C. H. e Owen, D. B. (1976) pag.246 e Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1972) pag.944).

$P_5 = P_3/P_6$.

$P_7 = P_1 - P_3$.

NOTA: Caso H_0 verdadeira, vem $(1-\exp(-B))^n \sim$ Uniforme (0,1), podendo ser usada como estatística de teste com região de rejeição $(1-\exp(-B))^n > 1-\alpha$.

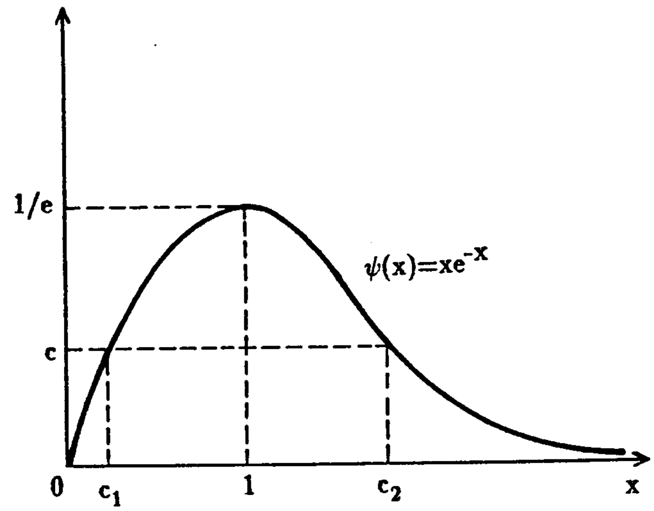
3.3 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA D

Lembremos que $D = \min_j \left(Y_j \exp(-Y_j)\right) = \min\left(\psi\left(Y_{(1)}\right), \psi\left(Y_{(n)}\right)\right)$.

$\alpha = P(D<c \mid H_0) = F^0{}_D(c) = 1-(e^{-c_1} - e^{-c_2})^n$.

NOTA: Obtém-se c resolvendo $(e^{-c_1} - e^{-c_2})^n = 1-\alpha$ com $0<c_1<1<c_2$ tal que

$c_1 e^{-c_1} = c_2\, e^{-c_2} = c$. Veja-se figura seguinte:



$$P_1 = P(D<c \mid H_1) = F^1{}_D(c) = 1-\left(e^{-c_1}-e^{-c_2}\right)^{n-1}\left(e^{-c_1/\sigma}-e^{-c_2/\sigma}\right) = 1-(1-\alpha)^{1-1/n}\left(e^{-c_1/\sigma}-e^{-c_2/\sigma}\right).$$

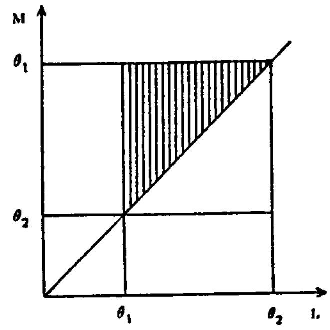
$$P_2 = P(\psi(Y_n)<c \mid H_1) = 1-P(\psi(Y_n)\geq c \mid H_1) = 1-P(c_1 \leq Y_n \leq c_2 \mid H_1) = 1-\left(e^{-c_1/\sigma}-e^{c_2/\sigma}\right).$$

NOTA: Para o cálculo de P_3 note-se que $D = \min\left(\psi\left(Y_{(1)}\right), \psi\left(Y_{(n)}\right)\right) =$

$= \min\left(\psi\left(\min(L, Y_n)\right), \psi\left(\max(M,Y_n)\right)\right) = \min\left(\psi(L), \psi(M), \psi(Y_n)\right)$ e veja-se o gráfico de ψ considerando-se todas as possíveis posições relativas de L, M e Y_n atendendo a que $L \leq M$, tendo também em atenção a sua posição relativamente ao máximo de ψ. Seja $\theta = \psi(Y_n)$.

$$P_3 = P(D<c,\ D=\psi(Y_n)\mid H_1) = P(\psi(Y_n)<c,\ \psi(L)\geq\psi(Y_n),\ \psi(M)\geq\psi(Y_n)\mid H_1) =$$

$$= P(\psi(L)\geq\theta,\ \psi(M)\geq\theta,\ \theta<c\mid H_1) =$$



$$= P(\theta_1\leq L\leq\theta_2,\ \theta_1\leq M\leq\theta_2,\ \theta<c\mid H_1)=$$

$$= \left(\int_0^{c_1} + \int_{c_2}^{+\infty}\right) P_{L,M}(\theta_1,\theta_2)\, f^1_{Y_n}(y)dy =$$

$$= \left(\int_0^{c_1} + \int_{c_2}^{+\infty}\right)\left(e^{\theta_1} - e^{-\theta_2}\right)^{n-1} \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)dy\ .$$

$\theta=\psi(y)$ e θ_1, θ_2 são determinados de modo que $0<\theta_1<1<\theta_2$ e $\theta_1\ e^{-\theta_1} = \theta_2 e^{-\theta_2} = \theta$. No primeiro integral vem $\theta_1=y$ e no segundo vem $\theta_2=y$. Façamos no segundo integral a mudança de variável de integração de $y=\theta_2$ para θ_1. Virá:

$$P_3 = \int_0^{c_1}\left(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}\right)^{n-1} \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{\theta_1}{\sigma}\right)d\theta_1 + \int_0^{c_1}\left(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}\right)^{n-1} \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{\theta_2}{\sigma}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}(-1)d\theta_1.$$

Seja $\tilde{H}(\theta_1) = 1-\exp(-\theta_1/\sigma)$ e $\tilde{G}(\theta_1) = \exp(-\theta_2/\sigma)-1$.

$\tilde{L}(\theta_1) = \tilde{H}(\theta_1)+\tilde{G}(\theta_1) = \exp(-\theta_2/\sigma)-\exp(-\theta_1/\sigma)$. Note-se $\tilde{L}$, $\tilde{G}$ e $\tilde{H}$ crescem com θ_1, enquanto que θ_2 decresce com θ_1.

$$\frac{d\tilde{H}(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{\theta_1}{\sigma}\right).$$

$$\frac{d\tilde{G}(\theta_1)}{d\theta_1} = \frac{d\tilde{G}(\theta_1)}{d\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{\theta_2}{\sigma}\right)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}.$$

NOTA: $\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1} = \dfrac{d\theta_2/d\theta}{d\theta_1/d\theta} = \dfrac{d\theta/d\theta_1}{d\theta/d\theta_2} = \dfrac{e^{-\theta_1}(1-\theta_1)}{e^{-\theta_2}(1-\theta_2)} = \dfrac{\frac{\theta}{\theta_1}(1-\theta_1)}{\frac{\theta}{\theta_2}(1-\theta_2)} = \dfrac{\theta_2}{1-\theta_2}\cdot\dfrac{1-\theta_1}{\theta_1}$.

Logo:

$$P_3 = \int_0^{c_1}\left(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}\right)^{n-1} d\tilde{L}(\theta_1) \quad \text{com } \theta_2>1 \text{ tal que } \theta_2\ e^{-\theta_2} = \theta_1 e^{-\theta_1}.$$

Para o cálculo numérico decompõe-se o intervalo $[0, c_1]$ em pontos $\theta_{1,k}=kc_1/\ell$ (com $k=0, 1,..., \ell$) e põe-se $\theta_{2,k}>1$ tal que $\theta_{2,k}e^{-\theta_{2,k}}=\theta_{1,k}e^{-\theta_{1,k}}$.

Dado que $\tilde{L}$ cresce com θ_1 e $\left(e^{-\theta_1}-e^{-\theta_2}\right)^{n-1}$ decresce com θ_1 vem:

$$\begin{cases} P_3 \leq \sum_{k=1}^{\ell} \left(e^{-\theta_{1,k-1}}-e^{-\theta_{2,k-1}}\right)^{n-1}\left(\tilde{L}(\theta_{1,k})-\tilde{L}(\theta_{1,k-1})\right) \\ \\ P_3 \geq \sum_{k=1}^{\ell} \left(e^{-\theta_{1,k}}-e^{-\theta_{2,k}}\right)^{n-1}\left(\tilde{L}(\theta_{1,k})-\tilde{L}(\theta_{1,k-1})\right) \end{cases}$$

com $\tilde{L}(\theta_{1,k}) = e^{-\theta_{2,k}/\sigma}-e^{-\theta_{1,k}/\sigma}$.

Para $\theta_{1,0}=0$ vem $\theta_{2,0}=+\infty$, devendo usar-se $e^{-\theta_{2,0}}= e^{-\theta_{2,0}/\sigma}=0$.

$P_4= P(D<c,\ D=\psi(Y_n);\ \psi(Y_1),...,\psi(Y_{n-1}) \geq c \mid H_1)$.

Note-se que $D<c$ e $\psi(Y_1),..., \psi(Y_{n-1}) \geq c$ implica que $D = \psi(Y_n)$. Assim:

$$P_4= P(D<c;\ \psi(Y_1),...,\psi(Y_{n-1}) \geq c \mid H_1) = P(\psi(Y_n)<c;\ \min(\psi(L), \psi(M)) \geq c \mid H_1) =$$

$$= P(\psi(Y_n)<c,\ \psi(L) \geq c,\ \psi(M) \geq c \mid H_1) = P(\psi(Y_n)<c \mid H_1) \cdot P(\psi(L) \geq c,\ \psi(M) \geq c) =$$

$$= (1-P(\psi(Y_n) \geq c \mid H_1)) \cdot P(c_1 \leq L \leq c_2,\ c_1 \leq M \leq c_2) =$$

$$= (1-P(c_1 \leq Y_n \leq c_2 \mid H_1)) \cdot P_{L,M}(c_1, c_2) = \left(1-(e^{-c_1/\sigma}-e^{-c_2/\sigma})\right)\cdot\left(e^{-c_1}-e^{-c_2}\right)^{n-1}.$$

$P_6 = P(D=\psi(Y_n) \mid H_1) = P(\psi(L) \geq \psi(Y_n),\ \psi(M) \geq \psi(Y_n) \mid H_1) =$

$= P(\psi(L) \geq \theta, \psi(M) \geq \theta \mid H_1) = P(\theta_1 \leq L \leq \theta_2,\ \theta_1 \leq M \leq \theta_2 \mid H_1)$.

Fazendo um raciocínio idêntico ao feito em P_3 (substituindo $\theta<c$ por $\theta \leq 1/e$) temos:

$$P_6 = \int_0^1 \left(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}\right)^{n-1} \cdot d\tilde{L}(\theta_1).$$

O cálculo numérico é semelhante ao feito em P_3 usando $\theta_{1,k}=k/\ell$ (com $k=0,\ldots,\ell$)

$P_5 = P_3/P_6$.

$P_7 = P_1 - P_3$.

3.4 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA Z

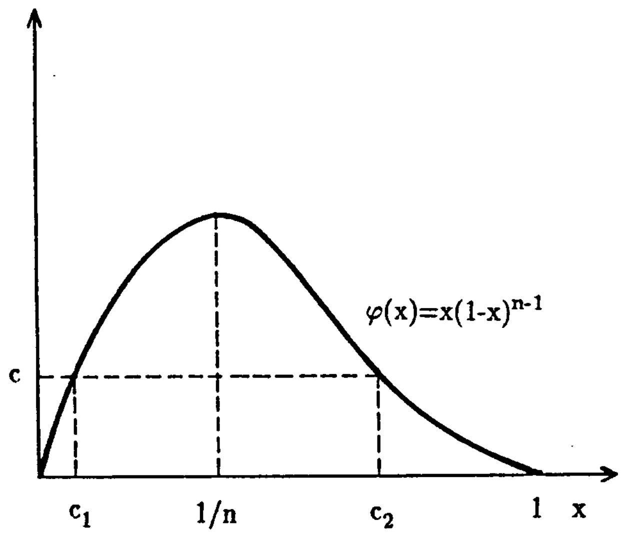
Lembremos que $Z = \min\limits_j \varphi\left(\frac{x_j-\lambda}{\sum (x_i-\lambda)}\right) = \min\left(\varphi(U), \varphi(T)\right)$ com $\varphi(x) = x(1-x)^{n-1}$.

$$\alpha = P(Z<c \mid H_0) = F^0{}_Z(c) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1-\bar{k}} (-1)^i \binom{n}{i} (1-(n-i)c_1-ic_2)^{n-1}$$

com $\bar{k} = \mathrm{INT}\left(\frac{nc_2-1}{c_2-c_1}\right)$.

Obtém-se c resolvendo $\sum_{i=0}^{n-1-\bar{k}} (-1)^i \binom{n}{i} \left(1-(n-i)c_1-ic_2\right)^{n-1} = 1-\alpha$ com $0<c_1<\frac{1}{n}<c_2<1$, tal que

$\varphi(c_1) = \varphi(c_2) = c$ e $\bar{k} = \mathrm{INT}\left(\frac{nc_2-1}{c_2-c_1}\right)$, o que pode ser feito por bissecção, pois c está no intervalo $\left(0, \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$ – ver figura seguinte:



$$P_1 = P(Z<c \mid H_1) = F^1{}_Z(c) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{n-1-\bar{k}} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{\left((n-1-i)\, c_1+ic_2\right)(\sigma-1)+1} \cdot \left(\left(\frac{1-(n-i)c_1-ic_2}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c_1}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-(n-1-i)c_1-(i+1)c_2}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c_2}\right)^{n-1} \right) -$$

$$-(-1)^{\bar{k}} \binom{n-1}{\bar{k}} \frac{1}{(\bar{k}c_1+(n-1-\bar{k})c_2)(\sigma-1)+1} \cdot \left(\frac{\bar{k}c_1+(n-\bar{k})c_2-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c_2}\right)^{n-1}.$$

$$P_2 = P(\varphi(V_n)<c \mid H_1) = 1-P(\varphi(V_n) \geq c \mid H_1) = 1-P(c_1 \leq V_n \leq c_2 \mid H_1) =$$

$$= 1-P\left(c_1 \leq \frac{S}{1+S} \leq c_2 \mid H_1\right) = 1-P\left(\frac{c_1}{1-c_1} \leq S \leq \frac{c_2}{1-c_2} \mid H_1\right) = 1-\left(F_S\left(\frac{c_2}{1-c_2}\right) - F_S\left(\frac{c_1}{1-c_1}\right)\right) =$$

$$= 1- \left(\frac{1}{\left(1+\frac{c_1}{1-c_1}\cdot\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{c_2}{1-c_2}\cdot\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}} \right).$$

$$P_3 = P(Z<c,\ Z=\varphi(V_n)\mid H_1) = P\left(\min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)\right) = \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right) <c \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right) \geq \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right) \geq \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right) \text{ e } \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right) < c \mid H_1\right).$$

Seja $\theta = \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)$. Logo:

$$P_3 = P\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right) \geq \theta,\ \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right) \geq \theta \text{ e } \theta<c \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\theta_1 \leq \frac{R}{1+S} \leq \theta_2,\ \theta_1 \leq \frac{H}{1+S} \leq \theta_2,\ \theta<c \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{R}{1+S} \geq \theta_1,\ \frac{H}{1+S} \leq \theta_2,\ \theta<c \mid H_1\right) = P\left(\frac{R}{1+S} \geq \theta_1,\ \frac{H}{1+S} \leq \theta_2,\ \theta<c,\ \frac{S}{1+S} < \frac{1}{n} \mid H_1\right) +$$

$$+ P\left(\frac{R}{1+S} \geq \theta_1, \frac{H}{1+S} \leq \theta_2, \theta<c, \frac{S}{1+S} > \frac{1}{n} \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(R \geq \frac{\theta_1}{1-\theta_1},\ H \leq \frac{\theta_2}{1-\theta_1},\ \theta_1<c_1 \mid H_1\right) + P\left(R \geq \frac{\theta_1}{1-\theta_2},\ H \leq \frac{\theta_2}{1-\theta_2},\ \theta_2>c_2 \mid H_1\right) = I_1+I_2,$$

onde

$$I_1 = \int_0^{c_1} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) f_{\theta_1}(\theta_1)\, d\theta_1$$

e

$$I_2 = \int_{c_2}^{1} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) f_{\theta_2}(\theta_2) d\theta_2.$$

Vejamos como proceder ao cálculo numérico. Temos $\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)=\theta$; em I_1, $\frac{s}{1+s}=\theta_1$ e em I_2, $\frac{s}{1+s}=\theta_2$.

Em I_1 temos $\frac{\theta_1}{1-\theta_1}=s$, pelo que $f_{\theta_1}(\theta_1)=f_S(s)\frac{ds}{d\theta_1}=\frac{dF_S\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)}{d\theta_1}$ e, portanto,

$$f_{\theta_1}(\theta_1)d\theta_1=dF_S\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)=d\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{n-1}}\right)=dH(\theta_1),$$

onde

$$H(\theta_1)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{n-1}},$$

que cresce com θ_1 para $0<\theta_1<\frac{1}{n}$.

Logo

$$I_1=\int_0^{c_1}P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1},\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)dH(\theta_1).$$

Em I_2 temos $\frac{\theta_2}{1-\theta_2}=s$, pelo que $f_{\theta_2}(\theta_2)=f_S(s)\frac{ds}{d\theta_2}=\frac{dF_S\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)}{d\theta_2}$ e, portanto,

$$\left(-f_{\theta_2}(\theta_2)\frac{d\theta_2}{d\theta_1}\right)d\theta_1=-\frac{dF_S\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)}{d\theta_2}\cdot\frac{d\theta_2}{d\theta_1}d\theta_1=-\frac{dF_S\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)}{d\theta_1}d\theta_1=\frac{-d\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-1}}\right)}{d\theta_1}d\theta_1=$$

$$=\frac{dG(\theta_1)}{d\theta_1}d\theta_1=dG(\theta_1),$$

onde

$$G(\theta_1)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-1}}.$$

Note-se que θ_1é tal que $0<\theta_1<\frac{1}{n}$ e $\varphi(\theta_1)=\varphi(\theta_2)$.

Logo $I_2=\int_0^{c_1} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2},\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)dG(\theta_1)$.

Do Apêndice A, sabe-se que, para $0<\theta<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ (o que é o caso excepto para $\theta_1=0$),

$j=INT\left(\frac{n\theta_2-1}{\theta_2-\theta_1}\right)$ só pode tomar valores entre $INT\left(\frac{n}{2}\right)$ e n-2.

Seja $j'=INT\left(\frac{(n-1)\frac{\theta_2}{1-\theta_1}-1}{\frac{\theta_2}{1-\theta_1}-\frac{\theta_1}{1-\theta_1}}\right)=j-1$ e $j''=INT\left(\frac{(n-1)\frac{\theta_2}{1-\theta_2}-1}{\frac{\theta_2}{1-\theta_2}-\frac{\theta_1}{1-\theta_2}}\right)=j$.

Vem $0\leq INT\left(\frac{n}{2}\right)-1\leq j'\leq n-3$ e $0<INT\left(\frac{n}{2}\right)\leq j''\leq n-2$.

Logo $\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1},\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)\in A^+{}_{n-1}\cup D_{n-1}$ e $\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2},\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)\in D_{n-1}\cup C_{n-1}$, e pode usar-se a expressão geral de $P_{R,H}$ em I_1 e I_2.

Vamos estudar a monotonia da função $P_{R,H}$.

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1}=\frac{d\theta/d\theta_1}{d\theta/d\theta_2}=-\frac{(1-n\theta_1)(1-\theta_1)^{n-2}}{(n\theta_2-1)(1-\theta_2)^{n-2}}=-\frac{1-n\theta_1}{n\theta_2-1}\cdot\frac{\theta_1(1-\theta_1)^{n-1}}{\theta_2(1-\theta_2)^{n-1}}\cdot\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{\theta_1(1-\theta_1)}=-\frac{1-n\theta_1}{n\theta_2-1}\cdot\frac{\theta_2(1-\theta_2)}{\theta_1(1-\theta_1)}.$$

Em I_1 temos:

$$\frac{d\frac{\theta_1}{1-\theta_1}}{d\theta_1}=\frac{1}{(1-\theta_1)^2}>0,$$ pelo que $\frac{\theta_1}{1-\theta_1}$ é crescente, variando entre 0 e $\frac{1}{n-1}$ quando θ_1 varia entre 0 e $\frac{1}{n}$, e temos

$$\frac{d\frac{\theta_2}{1-\theta_1}}{d\theta_1}=\frac{d\theta_2/d\theta_1(1-\theta_1)+\theta_2}{(1-\theta_1)^2}=\frac{\theta_2}{(1-\theta_1)^2\theta_1(n\theta_2-1)}(-(1-n\theta_1)(1-\theta_2)+\theta_1(n\theta_2-1))=$$

$$=\frac{\theta_2}{(1-\theta_1)^2\theta_1(n\theta_2-1)}((n-1)\theta_1+\theta_2-1)<0,$$ pelo que $\frac{\theta_2}{1-\theta_1}$ é decrescente, variando entre 1 e $\frac{1}{n-1}$ quando θ_1 varia entre 0 e $\frac{1}{n}$.

Assim, $P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1},\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)$ é decrescente com θ_1 e varia entre $P_{R,H}(0,1)=1$ e $P_{R,H}\left(\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-1}\right)=0$ quando θ_1 varia entre 0 e $\frac{1}{n}$.

Já vimos que

$$P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1},\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)=\sum_{i=0}^{n-2-j'}(-1)^i\binom{n-1}{i}\left(1-(n-1-i)\frac{\theta_1}{1-\theta_1}-i\frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{n-2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2-j'}(-1)^i\binom{n-1}{i}\left(\frac{1-(n-i)\theta_1-i\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{n-2}.$$

Note-se que $j=\mathrm{INT}\left(n-\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)=(n-1)-\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)$ salvo se $\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$ for inteiro, caso em que, porém , é indiferente ter ou não uma parcela a mais no somatório, pois tal parcela é nula. Logo

$$n-2-j'=n-2-j+1=n-2-(n-1)+\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)+1=\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right).$$

Podemos então escrever:

$$P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) = \sum_{i=0}^{INT\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(\frac{1-(n-i)\theta_1-i\theta_2}{1-\theta_1}\right)^{n-2}.$$

NOTA: A expressão $INT\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)$ falha quando $\theta_1=\frac{1}{n}$, mas nesse caso $P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) =$

$= P_{R,H}\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right)=0.$

Em I_2 temos:

$$\frac{d\frac{\theta_1}{1-\theta_2}}{d\theta_1} = \frac{(1-\theta_2)+\theta_1 d\theta_2/d\theta_1}{(1-\theta_2)^2} = \frac{(1-\theta_1)(n\theta_2-1)-\theta_2(1-n\theta_1)}{(1-\theta_2)(n\theta_2-1)(1-\theta_1)} =$$

$= \frac{1}{(1-\theta_2(1-\theta_1)(n\theta_2-1)} \cdot (\theta_1+(n-1)\theta_2-1)>0$, pelo que $\frac{\theta_1}{1-\theta_2}$ é crescente e varia entre 0 (pois

$\frac{0}{0} = \lim\limits_{\theta\to 0} \frac{1}{-d\theta_2/d\theta_1} = \lim\limits_{\theta_1\to 0} \frac{n\theta_2-1}{1-n\theta_1} \cdot \frac{(1-\theta_2)^{n-2}}{(1-\theta_1)^{n-1}} = \frac{0}{1} = 0)$ e $\frac{1}{n-1}$ quando θ_1 varia entre 0 e $\frac{1}{n}$, e

temos

$\frac{d\frac{\theta_2}{1-\theta_2}}{d\theta_1} = \frac{1}{(1-\theta_2)^2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} < 0$, pelo que $\frac{\theta_2}{1-\theta_2}$ é decrescente e varia entre $+\infty$ e $\frac{1}{n-1}$, quando θ_1

varia entre 0 e $\frac{1}{n}$.

Assim, $P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)$ é decrescente e varia entre $P_{R,H}(0,+\infty)=1$ e $P_{R,H}\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right)=0$

quando θ_1 varia entre 0 e $\frac{1}{n}$.

$$P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) = \sum_{i=0}^{n-2-j''} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(1-(n-1-i)\frac{\theta_1}{1-\theta_2} i- \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-2}.$$

Como $n\text{-}2\text{-}j''=\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)-1$ (salvo se $\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$ for inteiro, o que não oferece problemas),

podemos escrever:

$$P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) = \sum_{j=1}^{\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)} (-1)^{j-1} \binom{n-1}{j-1} \left(\frac{1-(n-j)\theta_1-j\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-2}.$$

NOTA: A expressão $\mathrm{INT}\left(\frac{1-n\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right)$ falha quando $\theta_1=\frac{1}{n}$, caso em que $P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)=0$.

A expressão $\left(\frac{1-(n-j)\theta_1-j\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{n-2}$ falha quando $\theta_1=0$, caso em que $P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) =$

$= P_{R,H}(0, +\infty) = 1.$

Então, o cálculo de P_3 pode obter-se numericamente, decompondo o intervalo de integração $[o, c_1]$ em pontos $\theta_{1,k}=kc_1/\ell$ (com $k=0,1,\ldots,\ell$) e pondo $\frac{1}{n} \leq \theta_{2,k} \leq 1$ tal que $\varphi(\theta_{2,k})=\varphi(\theta_{1,k})$.

Vem:

$$I_1=\sum_{k=1}^{\ell} \int_{\theta_{1,k-1}}^{\theta_{1,k}} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) dH(\theta_1) \begin{cases} \leq \sum_{k=1}^{\ell} p_{1,k-1}(H(\theta_{1,k})-H(\theta_{1,k-1})) \\ \\ \geq \sum_{k=1}^{\ell} p_{1,k}(H(\theta_{1,k})-H(\theta_{1,k-1})) \end{cases}$$

$$I_2=\sum_{k=1}^{\ell}\int_{\theta_{1,k-1}}^{\theta_{1,k}} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2},\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)dG(\theta_1)\begin{cases}\leq \sum_{k=1}^{\ell} p_{2,k-1}(G(\theta_{1,k})-G(\theta_{1,k-1}))\\ \\ \geq \sum_{k=1}^{\ell} p_{2,k}(G(\theta_{1,k})-G(\theta_{1,k-1}))\end{cases}$$

$$\text{com}\begin{cases} p_{1,k}=P_{R,H}\left(\frac{\theta_{1,k}}{1-\theta_{1,k}},\frac{\theta_{2,k}}{1-\theta_{1,k}}\right)\\ \\ p_{2,k}=P_{R,H}\left(\frac{\theta_{1,k}}{1-\theta_{2,k}},\frac{\theta_{2,k}}{1-\theta_{2,k}}\right).\end{cases}$$

$$P_4=P(Z<c,\ Z=\varphi(V_n);\ \varphi(V_1),\ldots,\varphi(V_{n-1})\geq c \mid H_1)=$$

$$=P(\varphi(V_n)<c;\varphi(V1),\ldots,\varphi(V_{n-1})\geq c\mid H_1)=P(\varphi(V_n)<c,\ \min_{1\leq i\leq n-1}\varphi(V_i)\geq c\mid H_1)=$$

$$=P\left(\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)<c,\ \min\left(\varphi(\min_{1\leq i\leq n-1}V_i),\ \varphi(\max_{1\leq i\leq n-1}V_i)\right)\geq c\mid H_1\right)=$$

$$=P\left(\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)<c,\ \min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right),\ \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right)\right)\geq c\mid H_1\right)=$$

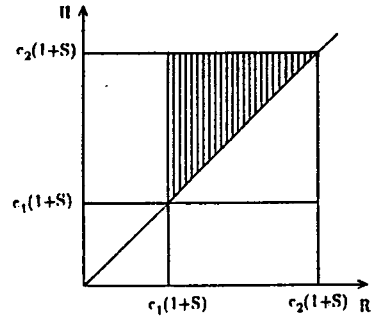
$$=P\left(\min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right),\varphi\left(\frac{H}{1+S}\right)\right)\geq c\mid H_1\right)-P\left(\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)\geq c,\min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right),\ \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right)\right)\geq c\mid H_1\right)=$$

$$=P\left(c_1\leq\frac{R}{1+S}\leq c_2,c_1\leq\frac{H}{1+S}\leq c_2\mid H_1\right)-P\left(\min\left(\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right),\ \varphi\left(\frac{R}{1+S}\right),\ \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right)\right)\geq c\mid H_1\right)=$$

$= P(c_1(1+S) \leq R \leq c_2(1+S),\ c_1(1+S) \leq H \leq c_2(1+S) \mid H_1)-(1-P_1)=$

$= \int_0^{+\infty} f_S(s)P_{R,H}(c_1(1+s),\ c_2(1+s))ds-(1-P_1).$

Note-se que $0<c_1<\frac{1}{n}<c_2<1$.



Faça-se: $\overline{x} = c_1(1+s)$

$\overline{y} = c_2(1+s)$

$\overline{k} = INT\left(\frac{nc_2-1}{c_2-c_1}\right)$

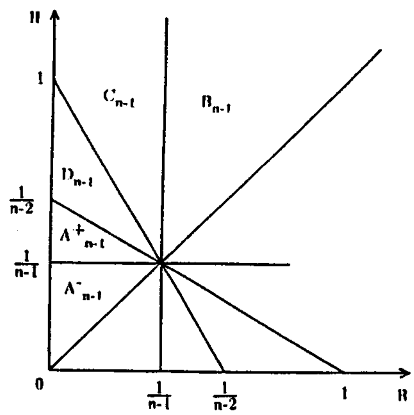
$\overline{\ell} = INT\left(\frac{(n-1)c_2-1}{c_2-c_1}\right)$

$\overline{j} = INT\left(\frac{(n-1)\overline{y}-1}{\overline{y}-\overline{x}}\right)$

$\overline{\alpha}_i = \frac{1}{ic_1+(n-1-i)c_2} - 1,$

que são semelhntes a x, y, k, ℓ, j e α_i definidos em 2.2.1.5. Como se viu no Apêndice A, $\overline{k}$ só pode tomar valores entre $INT\left(\frac{n}{2}\right)$ e n-2; de notar que $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{j}$ variam com s.

Como se viu em 2.2.1.5:



$\overline{\alpha}_{\overline{\ell}} \leq 0 \leq \overline{\alpha}_{\overline{\ell}+1}$

$\overline{\ell} < \overline{k} \leq n-2$

$\overline{\alpha}_i < \overline{\alpha}_{i+1}$ para $i \leq n-2$

$\overline{\alpha}_i \leq s \leq \overline{\alpha}_{i+1} \Leftrightarrow \overline{j}=i$ para $0 \leq i \leq n-2$

$\bar{j} > n\text{-}2 \Rightarrow s \geq \bar{\alpha}_{n-1}$.

Como $P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})=0$ para $(\bar{x}, \bar{y}) \in B_{n-1}$ (que corresponde a $\bar{j}>n\text{-}2$) ou para

$(\bar{x}, \bar{y}) \in A^{-}_{n-1}$ (que corresponde a $\bar{j}<0$), vem:

$$P_4=I\text{-}(1\text{-}P_1) \quad \text{onde } I=\int_{\max(0,\bar{\alpha}_0)}^{\bar{\alpha}_{n-1}} f_S(s)\, P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds.$$

Vejamos como se pode proceder ao cálculo de I.

Caso $c_2<\frac{1}{n-1}$ vem $(n\text{-}1)c_2\text{-}1<0 \Rightarrow \bar{\ell}<0 \Rightarrow \bar{\ell}+1 \leq 0 \Rightarrow 0<\bar{\alpha}_{\bar{\ell}+1} \leq \bar{\alpha}_0 \Rightarrow \max(0,\bar{\alpha}_0)=\bar{\alpha}_0$. Logo:

$$I=\int_{\bar{\alpha}_0}^{\bar{\alpha}_{n-1}} f_S(s)P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds + \sum_{\bar{j}=0}^{n-2} \int_{\bar{\alpha}_{\bar{j}}}^{\bar{\alpha}_{\bar{j}+1}} f_S(s)\, P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds.$$

Caso $c_2>\frac{1}{n-1}$ vem $(n\text{-}1)c_2\text{-}1 \geq 0 \Rightarrow \bar{\ell} \geq 0 \Rightarrow \bar{\alpha}_0 \leq \bar{\alpha}_{\bar{\ell}} \leq 0 \Rightarrow \max(0,\bar{\alpha}_0)=0$. Logo:

$$I=\int_{0}^{\bar{\alpha}_{\bar{\ell}+1}} f_S(s)\, P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds \; + \sum_{\bar{j}=\bar{\ell}+1}^{n-2} \int_{\bar{\alpha}_{\bar{j}}}^{\bar{\alpha}_{\bar{j}+1}} f_S(s)P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})\, ds.$$

Vamos proceder ao cálculo de $\int_a^b f_S(s)P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds$ quando $\bar{j}=INT\left(\frac{(n-1)\bar{y}-1}{\bar{y}-\bar{x}}\right)=j$ no

intervalo (a, b) – veja-se 2.2.1.5.

$$\int_a^b f_S(s)P_{R,H}(\bar{x}, \bar{y})ds=\int_a^b (n\text{-}1)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\, s\right)^n}\cdot\frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^{j} (\text{-}1)^i \binom{n-1}{i} (i\bar{x}+(n\text{-}1\text{-}i)\bar{y}\text{-}1)^{n-2}ds=$$

$$= \int_a^b (n-1)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}s\right)^n}\cdot\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{n-2-j}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-(n-1-i)\overline{x}-i\overline{y})^{n-2}ds = \sum_{i=0}^{j}\int_a^b \overline{w}_i(s)ds =$$

$$=\sum_{i=0}^{j}(\overline{W}_i(b)-\overline{W}_i(a))$$

$$\text{com}\begin{cases} \overline{w}_i(s)=(n-1)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}s\right)^n}\cdot\frac{1}{\sigma}(-1)^i\binom{n-1}{i}(i\overline{x}+(n-1-i)\overline{y}-1)^{n-2}=\frac{d\overline{W}_i(s)}{ds} \\ \\ \overline{W}_i(s)=(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{(ic_1+(n-1-i)c_2)(\sigma-1)+1}\left(\frac{ic_1(1+s)+(n-1-i)c_2(1+s)-1}{1+\frac{1}{\sigma}s}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

De notar que $\overline{W}_i(\overline{\alpha}_i)=0$.

Provemos que $\sum_{i=0}^{n-1}\overline{W}_i(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\overline{W}_i(x)$ para quaisquer x, $y>-\sigma$.

Podemos supor $y>x$. Sabemos de 2.2.1.5 que:

$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n-1}{i}(i\overline{x}+(n-1-i)\overline{y}-1)^{n-2}=\sum_{i=0}^{n-2-j}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-(n-1-i)\overline{x}-i\overline{y})^{n-2}$, para $0\leq j\leq n-2$ e quaisquer $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Logo:

$\sum_{i=0}^{j}\overline{w}_i(s)=-\sum_{i=0}^{n-2-j}\overline{w}_{n-1-i}(s)$, e integrando membro a membro de x a y (integrais não impróprios pois $-\sigma<x<y$), vem

$$\sum_{i=0}^{j} (\overline{W}_i(y)-\overline{W}_i(x))=-\sum_{i=0}^{n-2-j} (\overline{W}_{n-1-i}(y)-\overline{W}_{n-1-i}(x))$$

e fazendo uma mudança de índice, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\overline{W}_i(y)-\overline{W}_i(x))=0, \text{ donde o pretendido.}$$

Temos então, para o cálculo do I:

Caso $c_2<\frac{1}{n-1}$,

$$I=\sum_{\bar{j}=0}^{n-2} \int_{\overline{\alpha}_{\bar{j}}}^{\overline{\alpha}_{\bar{j}+1}} f_S(s)\, P_{R,H}(\overline{x}, \overline{y})ds = \sum_{\bar{j}=0}^{n-2} \sum_{i=0}^{\bar{j}} (\overline{W}_i(\overline{\alpha}_{\bar{j}+1}) - \overline{W}_i(\overline{\alpha}_{\bar{j}})) =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2} \overline{W}_i(\overline{\alpha}_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{W}_i(\overline{\alpha}_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1}\overline{W}_i(0).$$

Caso $c_2 \geq \frac{1}{n-1}$,

$$I=\sum_{i=0}^{\bar{\ell}}(\overline{W}_i(\overline{\alpha}_{\bar{\ell}+1})-\overline{W}_i(0)) + \sum_{\bar{j}=\bar{\ell}+1}^{n-2} \sum_{i=0}^{\bar{j}} (\overline{W}_i(\overline{\alpha}_{\bar{j}+1})-\overline{W}_i(\overline{\alpha}_{\bar{j}}))=$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \overline{W}_i(\overline{\alpha}_{n-1})-\sum_{i=0}^{\bar{\ell}} \overline{W}_i(0)=\sum_{i=0}^{n-1} \overline{W}_i(\overline{\alpha}_{n-1})- \sum_{i=0}^{\bar{\ell}} \overline{W}_i(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{W}_i(0)-\sum_{i=0}^{\bar{\ell}} \overline{W}_i(0)=\sum_{i=\bar{\ell}+1}^{n-1} \overline{W}_i(0).$$

E, em ambos os casos:

$$I = \sum_{i=\max(0,\bar{\ell}+1)}^{n-1} \overline{W}_i(0)=$$

$$= \sum_{i=\max(0,\bar{\ell}+1)}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(ic_1+(n-1-i)c_2-1)(\sigma-1)+1} (ic_1+(n-1-i)c_2-1)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=\max(0,\bar{\ell}+1)}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(1-(c_2-c_1)(i-\lambda))(\sigma-1)+1} ((c_1-c_2)(i-\lambda))^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1-\max(0,\bar{\ell}+1)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(1-(c_2-c_1)(n-1-i-\lambda))(\sigma-1)+1} ((c_2-c_1)(n-1-i-\lambda)^{n-1}$$

com $\lambda = \frac{(n-1)c_2-1}{c_2-c_1}$ e $\bar{\ell}=\mathrm{INT}(\lambda)$.

$P_4 = I-(1-P_1)$.

$$P_6 = P(Z=\varphi(V_n) \mid H_1)=P\left(\min\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right)\right)=\varphi\left(\frac{S}{1+S}\right) \mid H_1\right)=$$

$$= P\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right) \geq \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right), \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right) \geq \varphi\left(\frac{S}{1+S}\right) \mid H_1\right) =P\left(\varphi\left(\frac{R}{1+S}\right) \geq \theta, \varphi\left(\frac{H}{1+S}\right) \geq \theta, \theta<\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \mid H_1\right)=$$

$$= P\left(\theta_1 \leq \frac{R}{1+S} \leq \theta_2, \theta_1 \leq \frac{H}{1+S} \leq \theta_2, \theta< \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \mid H_1\right)=$$

$$= P\left(\frac{R}{1+S} \geq \theta_1, \frac{H}{1+S} \leq \theta_2, \theta< \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}, \frac{S}{1+S} <\frac{1}{n} \mid H_1\right) +P\left(\frac{R}{1+S} \geq \theta_1, \frac{H}{1+S} \leq \theta_2, \theta< \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1},\right.$$

$$\left.\frac{S}{1+S} >\frac{1}{n} \mid H_1\right)=P\left(R \geq \frac{\theta_1}{1-\theta_1}, H \leq \frac{\theta_2}{1-\theta_1}, \theta_1<\frac{1}{n} \mid H_1\right)+P\left(R \geq \frac{\theta_1}{1-\theta_2}, H \leq \frac{\theta_2}{1-\theta_2}, \theta_2>\frac{1}{n} \mid H_1\right)=$$

$$= \int_0^{1/n} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) f_{\theta_1}(\theta_1)d\theta_1+\int_{1/n}^{1} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right) f_{\theta_2}(\theta_2)d\theta_2=$$

$$= \int_0^{1/n} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}, \frac{\theta_2}{1-\theta_1}\right) dH(\theta_1) +\int_0^{1/n} P_{R,H}\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_2}, \frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)dG(\theta_1).$$

Numericamente obtém-se como o P_3, fazendo $\theta_{1,k}=k/(n\ell)$ (com $k=0,1,\ldots,\ell$).

$P_5=P_3/P_6$.

$P_7 = P_1-P_3$.

3.5 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA U

Lembremos que $U=\dfrac{X_{(1)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}$.

$\alpha=P(U<c\mid H_0)=F^0{}_U(c)=1-(1-nc)^{n-1}$. Logo $c=\frac{1}{n}\left(1-(1-\alpha)^{1/(n-1)}\right)$.

De notar que $0 < c < \frac{1}{n}$ e $0 < \frac{c}{1-c} < \frac{1}{n-1}$.

$$P_1=P(U<c\mid H_1) = F^1{}_U(c)=1-\frac{1}{1+(n-1)(\sigma-1)c}\left(\frac{1-nc}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1} =$$

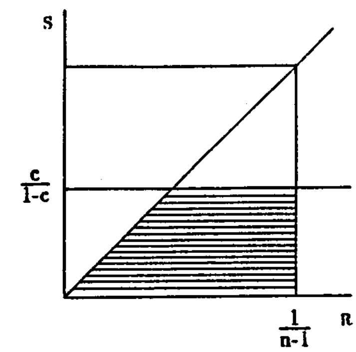
$$= 1-\frac{1}{1+(n-1)(\sigma-1)c}\left(\frac{1-(n-1)\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

$$P_2 = P(V_n<c\mid H_1) = P\left(\frac{S}{1+S} < c\mid H_1\right) = P\left(S < \frac{c}{1-c}\mid H_1\right) = F_S\left(\frac{c}{1-c}\right)=$$

$$= 1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}\right)^{n-1}} = 1-\frac{(1-c)^{n-1}}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}}.$$

$$P_3= P(U<c,\ U=V_n\mid H_1) = P(U=V_n, V_n<c\mid H_1) =P\left(\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) =\frac{S}{1+S}, \frac{S}{1+S}<c\mid H_1\right)=$$

$$= P(R \geq S,\ S < \tfrac{c}{1-c} \mid H_1) =$$



$$= \int_0^{c/(1-c)} f_S(s) \int_s^{1/(n-1)} f_R(r)\, dr\, ds =$$

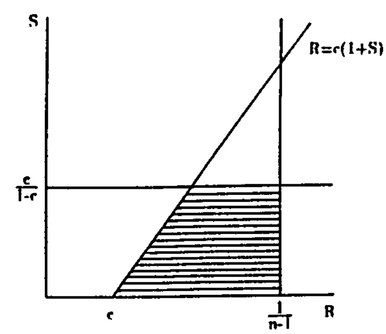
$$= \int_0^{c/(1-c)} f_S(s)\, (1-F_R(s))\, ds =$$

$$= \int_0^{c/(1-c)} (n-1)\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^n} \cdot \frac{1}{\sigma}(1-(n-1)s)^{n-2}\, ds =$$

$$= \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1-\left(\frac{1-(n-1)\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1-\left(\frac{1-nc}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c}\right)^{n-1}\right).$$

$$P_4 = P(U<c,\ U=V_n;\ V_1, \dots, V_{n-1}>c \mid H_1) = P(V_n<c;\ V_1, \dots, V_{n-1}>c \mid H_1) =$$

$$= P\left(\frac{S}{1+S}<c,\ \frac{R}{1+S}>c \mid H_1\right) = P\left(S < \frac{c}{1-c},\ R>c(1+S) \mid H_1\right) =$$



$$= \int_0^{c/(1-c)} f_S(s) \int_{c(1+s)}^{1/(n-1)} f_R(r)\, dr\, ds =$$

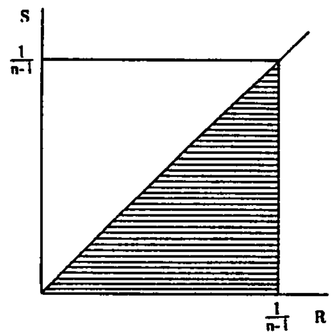
$$= \int_0^{c/(1-c)} f_S(s)\, (1-F_R(c(1+s)))\, ds =$$

$$= \int_0^{c/(1-c)} (n-1)\, \frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^n} \cdot \frac{1}{\sigma}\, (1-(n-1)c\ (1+s))^{n-2}\, ds =$$

$$= \frac{1}{1+(n-1)c(\sigma-1)}\left((1-(n-1)c)^{n-1}-\left(\frac{1-nc}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1}\right).$$

$$P_6 = P(U=V_n \mid H_1) = P(R \geq S \mid H_1) = \int_0^{1/(n-1)} f_S(s) \int_s^{1/(n-1)} f_R(r)\, dr\, ds =$$

$$= \int_0^{1/(n-1)} f_S(s)\,(1-F_R(s))\, ds =$$



$$= \int_0^{1/(n-1)} (n-1)\,\frac{1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^n}\cdot\frac{1}{\sigma}\,(1-(n-1)s)^{n-2} ds =$$

$$= \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\left(1-\left(\frac{1-(n-1)\,\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{1+(n-1)\sigma}\,.$$

$$P_5 = P_3/P_6 = 1-\left(\frac{1-nc}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)\,c}\right)^{n-1} = 1-\left(\frac{1-(n-1)\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

$$P_7 = P_1 - P_3\,.$$

De notar que podemos simplificar os cálculos usando $(1-nc)^{n-1}=1-\alpha$.

3.6 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA T

Lembremos que $T=\frac{X_{(n)}-\lambda}{\Sigma(X_i-\lambda)}$.

$$\alpha=P(T>c\,|\,H_0)=1-F^0{}_T(c)=1-\sum_{i=0}^{INT(1/c)}(-1)^i\binom{n}{i}(1-ic)^{n-1}=$$

$$=-\sum_{i=1}^{INT(1/c)}(-1)^i\binom{n}{i}(1-ic)^{n-1}=-\sum_{i=1}^{\bar{k}}(-1)^i\binom{n}{i}(1-ic)^{n-1}\ \text{com}\ \bar{k}=INT(1/c).$$

Determina-se por bissecção, por exemplo entre $\frac{1}{n}$ e 1.

Note-se que

$$\left(\frac{1-(i+1)c}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1}=\left(\frac{1-i\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

$$P_1=P(T>c\,|\,H_1)=1-F^1{}_T(c)=1-\sum_{i=0}^{\bar{k}}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{ic(\sigma-1)+1}\left((1-ic)^{n-1}-\left(\frac{1-(i+1)c}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1}\right)-$$

$$-(-1)^{n-1-\bar{k}}\binom{n-1}{\bar{k}}\frac{1}{\bar{k}c(\sigma-1)+1}\left(\frac{(1+\bar{k})c-1}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1}=$$

$$=1-\sum_{i=0}^{\bar{k}-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{ic(\sigma-1)+1}\left((1-ic)^{n-1}-\left(\frac{1-(i+1)c}{1+(\frac{1}{\sigma}-1)c}\right)^{n-1}\right)-(-1)^{\bar{k}}\binom{n-1}{\bar{k}}\frac{1}{\bar{k}c(\sigma-1)+1}(1-\bar{k}c)^{n-1}$$

$$P_2=P(V_n>c\,|\,H_1)=P\left(\frac{S}{1+S}>c\,|\,H_1\right)=P\left(S>\frac{c}{1-c}\,|\,H_1\right)=1-F_S\left(\frac{c}{1-c}\right)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}\right)^{n-1}}=$$

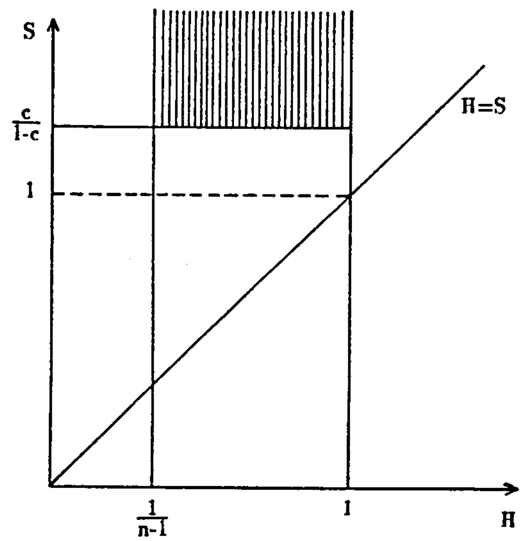
$$=\frac{(1-c)^{n-1}}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}}.$$

$$P_3 = P(T>c,\ T=V_n \mid H_1) = P(T=V_n,\ V_n>c \mid H_1) = P\left(\frac{H}{1+S} \le \frac{S}{1+S},\ \frac{S}{1+S}>c \mid H_1\right) =$$

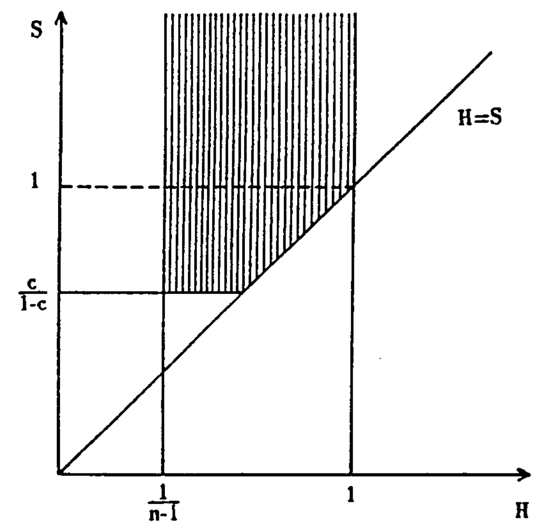
$$= P\left(S > \frac{c}{1-c},\ H \le S \mid H_1\right) = \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s) \int_{1/(n-1)}^{\min(s,1)} f_H(h)\, dh\, ds = \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(\min(s,1))ds.$$

Vejam-se as figuras seguintes:

Caso $c>\frac{1}{2}$ $(\bar{k}=1)$



Caso $c \le \frac{1}{2}$ $(\bar{K}>1)$



Caso $c > \frac{1}{2}$, vem no intervalo de integração de s, $s > 1$, donde $\min(s,1)=1$ e $F_H(\min(s,1)) = F_H(1) = 1$.

Logo:

$$P_3=\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\,ds = 1-F_S\left(\frac{c}{1-c}\right) = P_2 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}\right)^{n-1}},\ \text{para } c > \frac{1}{2}.$$

Caso $c \leq \frac{1}{2}$:

$$P_3=\int_{c/(1-c)}^{1} f_S(s) \sum_{i=0}^{INT(1/s)} (-1)^i\binom{n-1}{i}(1-is)^{n-2}\,ds+\int_1^{+\infty} f_S(s)\,ds=$$

$$=\left(\int_{c/(1-c)}^{1/(\bar{k}-1)} f_S(s)\sum_{i=0}^{\bar{k}-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-is)^{n-2}\,ds+\int_{1/(\bar{k}-1)}^{1/(\bar{k}-2)} f_S(s)\sum_{i=0}^{\bar{k}-2}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-is)^{n-2}ds+\ldots+\right.$$

$$\left.+\int_{1/2}^{1} f_S(s)\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-is)^{n-2}\,ds\right)+1-F_S(1).$$

Ora $\int_a^b f_S(s)\,(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-is)^{n-2}ds = A_i(a)-A_i(b)$, com $A_i(x)=(-1)^i\,\frac{1}{1+i\sigma}\left(\frac{1-ix}{1+\frac{1}{\sigma}x}\right)^{n-1}$.

Note-se que $A_i(1/i)=0$ e que $1-F_S(1)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}} = A_0(1)$.

Assim:

$$P_3=\sum_{i=0}^{\bar{k}-1}\left(A_i\left(\frac{c}{1-c}\right)-A_i\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right)\right)+\sum_{i=0}^{\bar{k}-2}\left(A_i\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right)-A_i\left(\frac{1}{\bar{k}-2}\right)\right)+\ldots+\sum_{i=0}^{1}\left(A_i\left(\frac{1}{2}\right)-A_i(1)\right)+A_0(1)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} A_i\left(\frac{c}{1-c}\right)=\sum_{i=0}^{\bar{k}-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{1+i\sigma}\left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Como esta expressão para $\bar{k}=1$ dá a mesma expressão de P_3 obtida para $c > \frac{1}{2}$, ela poderá ser usada qualquer que seja o c.

Logo:

$$P_3 = \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\frac{c}{1-c}} \right)^{n-1} \quad \text{(qualquer que seja c).}$$

$$P_4 = P(T>c,\ T=V_n;\ V_1,\ \dots\ ,V_{n-1}<c \mid H_1) = P(V_n>c;\ V_1,\ \dots\ ,V_{n-1}<c \mid H_1) =$$

$$= P\left(\frac{S}{1+S}>c,\ \frac{H}{1+S} <c \mid H_1\right) = P\left(S > \frac{c}{1-c},\ H<c(1+s) \mid H_1\right) =$$

$$= \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s) \int_{1/(n-1)}^{\min(c(1+s),\ 1)} f_H(h)\ dh\ ds.$$

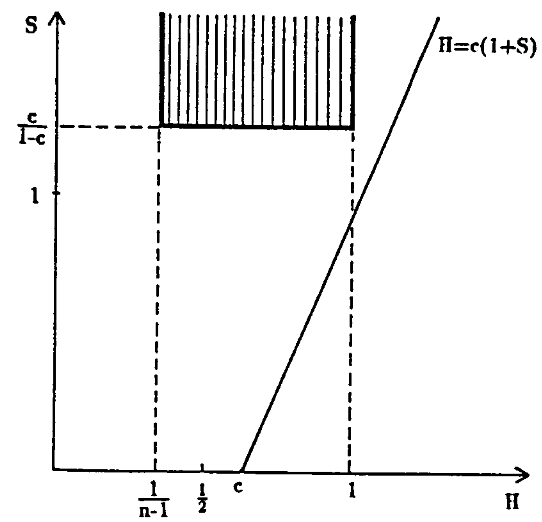
Note-se que para $s \in \left(\frac{c}{1-c},\ +\infty\right)$ vem $c(1+s) > c\left(1+ \frac{c}{1-c}\right) = \frac{c}{1-c} > \frac{1/n}{1-1/n} = \frac{1}{n-1}$.

Assim:

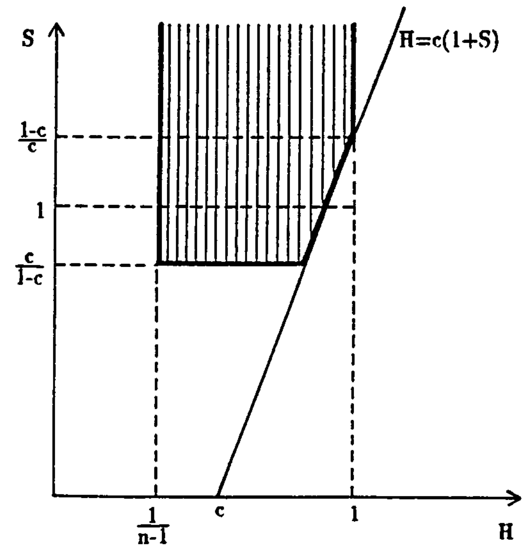
$$P_4 = \int_{c(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(\min(c(1+s),1))\ ds.$$

Vejam-se as figuras seguintes:

Caso $c > \frac{1}{2}$ ($\bar{k}=1$)



Caso $c \leq \frac{1}{2}$ ($\bar{k}>1$)



Caso $c > \frac{1}{2}$, $F_H(\min(c(1+s),1))=F_H(1)=1$ para $s \in \left(\frac{c}{1-c}, +\infty\right)$, pois $c(1+s) > c\left(1+\frac{c}{1-c}\right)=$

$$= \frac{c}{1-c} > \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Logo:

$$P_4 = 1-F_S\left(\frac{c}{1-c}\right) = P_2 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{c}{1-c}\right)^{n-1}}\text{, para } c > \frac{1}{2}.$$

Caso $c \leq \frac{1}{2}$:

$$P_4=\int_{c/(1-c)}^{(1-c)/c} f_S(s)\, F_H(c(1+s))ds+\int_{(1-c)/c}^{+\infty} f_S(s)\, ds=\int_{c/(1-c)}^{1} f_S\!\left(\frac{y-c}{c}\right) F_H(y)\, \frac{1}{c}\, dy+1-F_S\!\left(\frac{1-c}{c}\right)=$$

$$= \int_{c/(1-c)}^{1/(\bar{k}-1)} \frac{1}{c} f_S\left(\frac{y-c}{c}\right) \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-iy)^{n-2}\, dy +$$

$$+\int_{1/(\bar{k}-1)}^{1/(\bar{k}-2)} \frac{1}{c} f_S\left(\frac{y-c}{c}\right)\sum_{i=0}^{\bar{k}-2} (-1)^i \binom{n-1}{i}(1-iy)^{n-2}dy+\ldots+$$

$$+\int_{1/2}^{1} \frac{1}{c} f_S\!\left(\frac{y-c}{c}\right)\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(1-iy)^{n-2}dy+1- F_S\!\left(\frac{1-c}{c}\right).$$

Ora $\int_a^b \frac{1}{c} f_S\left(\frac{y-c}{c}\right) (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-iy)^{n-2}\, dy = B_i(a)-B_i(b)$ com

$$B_i(x) = (-1)^i\binom{n-1}{i} \frac{1}{1+ic(\sigma-1)} \left(\frac{1-ix}{1+ \frac{1}{\sigma} \frac{x-c}{c}}\right)^{n-1}.$$

Note-se que $B_i(1/i)=0$ e que $1-F_S\left(\frac{1-c}{c}\right)= \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\frac{1-c}{c}\right)^{n-1}} = B_0(1)$.

Logo:

$$P_4= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} \left(B_i\!\left(\frac{c}{1-c}\right)-B_i\!\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right)\right) + \sum_{i=0}^{\bar{k}-2} \left(B_i\!\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right)-B_i\!\left(\frac{1}{\bar{k}-2}\right)\right) +\ldots+\sum_{i=0}^{1}\left(B_i\!\left(\frac{1}{2}\right)-B_i(1)\right)+B_0(1)=$$

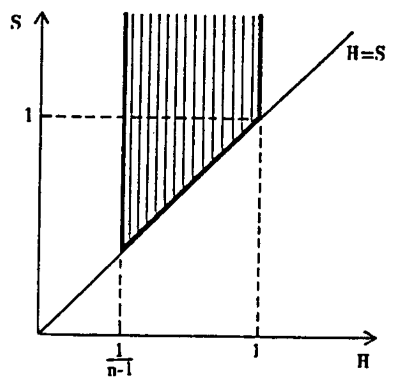
$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} \left(B_i\!\left(\frac{c}{1-c}\right)\right) = \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i\binom{n-1}{i} \frac{1}{1+ic(\sigma-1)} \left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Esta expressão funciona para $c > \frac{1}{2}$ (caso de $\bar{k}=1$).

Logo:

$$P_4=\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+ic(\sigma-1)} \left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1} \quad \text{(qualquer que seja c).}$$

$$P_6=P(T=V_n \mid H_1)=P(H \leq S \mid H_1)=$$



$$=\int_{1/(n-1)}^{+\infty} f_S(s) \int_{1/(n-1)}^{\min(s,1)} f_H(h)\, dh\, ds=$$

$$=\int_{1/(n-1)}^{+\infty} f_S(s)\, F_H(\min(s,1))ds.$$

Esta expressão é a mesma que a obtida para P_3 com c substítuido por $\frac{1}{n}$, donde $\bar{k}$=INT(1/c) deverá ser substituído por n. Logo(dado que a parcela i=n-1 seria nula):

$$P_6=\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\,\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}.$$

$$P_5=P_3/P_6.$$

$$P_7=P_1-P_3.$$

3.7 VALORES CRÍTICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATÍSTICA B′

Lembremos que $B' = \dfrac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\delta}$.

$\alpha=P(B'>c \mid H_0) = 1-F^0_{B'}(c)=1-(1-e^{-c})^{n-1}$. Logo $c=-\ell n(1-(1-\alpha)^{1/(n-1)})$.

NOTA: Pode usar-se a mesma tabela de valores críticos de B, com n desfazado de uma unidade. Por exemplo, o valor crítico de B′ para n=50 é o valor crítico de B para n=49.

NOTA: Caso H_0 verdadeiro, vem $(1-\exp(-B'))^{n-1} \sim$ Uniforme(0,1), podendo ser usada como estatística de teste, com região de rejeição da forma $(1-\exp(-B'))^{n-1}>1-\alpha$.

$$P_1= P(B'>c \mid H_1)=1-F^1_{B'}(c)=1- \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma(n-1)}(1-e^{-c})^{n-1}+(1-e^{-c})^{n-2}\cdot(1-e^{-c/\sigma})\right)=$$

$$= 1- \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{1}{\sigma(n-1)}(1-\alpha)+ \frac{1-\alpha}{1-e^{-c}}(1-e^{-c/\sigma})\right)=1- \frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}(1-\alpha)\left(\frac{1}{\sigma(n-1)} + \frac{1-e^{-c/\sigma}}{1-e^{-c}}\right).$$

$$P_2= P\left(\frac{X_n-X_{(1)}}{\delta} > c \mid H_1\right)=P\left(Y_n-Y_{(1)}> c \mid H_1\right).$$

De $Y_n-Y_{(1)}> c$ vem $Y_n>Y_{(1)}=\min(L,Y_n)$; como não pode ser neste caso $Y_{(1)}=Y_n$, tem de ser $Y_{(1)}=L$. Logo $Y_n-Y_{(1)}> c$ implica $Y_{(1)}=L$, pelo que a probabilidade não se altera se intersectarmos esse acontecimento com o acontecimento $Y_{(1)}=L$. Assim:

$$P_2 = P(Y_n-L > c \mid H_1) =$$

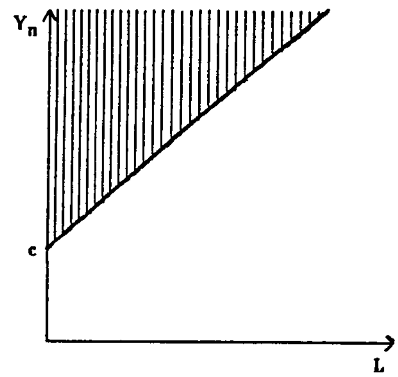
$$=\int_0^{+\infty} \left(\int_{\ell+c}^{+\infty} f^1_{Y_n}(y)dy\right) f_L(\ell)\, d\ell=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_{\ell+c}^{+\infty}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)dy\right)(n-1)\,e^{-(n-1)\ell}\,d\ell=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(c+\ell)/\sigma}\,(n-1)\,e^{-(n-1)\ell}\,d\ell=$$

$$=(n-1)\,e^{-c/\sigma}\int_0^{+\infty} e^{-(n-1+1/\sigma)\ell}\,d\ell=$$

$$=\frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\,e^{-c/\sigma}.$$



$$P_3= P(B'> c,\ Y_{(n)}=Y_n \mid H_1) = P(Y_{(n)}-Y_{(1)}> c,\ Y_{(n)}= Y_n \mid H_1)=$$

$$= P(Y_n-Y_{(1)}> c,\ \max(M,Y_n)=Y_n \mid H_1)=P(Y_n-L> c,\ Y_n \geq M \mid H_1)=$$

$$= P(L < Y_n-c,\ M \leq Y_n \mid H_1)=\int_c^{+\infty} F_{L,M}(y-c,\ y)\ f^1{}_{Y_n}(y)dy=$$

$$= \int_c^{+\infty}\left((1-e^{-y})^{n-1}-\left(e^{-(y-c)}-e^{-y}\right)^{n-1}\right)\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)dy =$$

$$=\int_c^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k e^{-ky}-(e^c-1)^{n-1}\,e^{-y(n-1)}\right)\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right)dy=$$

$$=\int_c^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\frac{1}{\sigma}e^{-(k+1/\sigma)y}-(e^c-1)^{n-1}\frac{1}{\sigma}\,e^{-(n-1+\frac{1}{\sigma})y}\right)dy=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\frac{1}{\sigma}\frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}}\,e^{-(k+1/\sigma)c}-(e^c-1)^{n-1}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\,e^{-(n-1+\frac{1}{\sigma})c}=$$

$$=\frac{1}{\sigma}\,e^{-c/\sigma}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}(-1)^k e^{-kc}\left(\frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}}-\frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\right).$$

NOTA: Para o cálculo numérico pode usar-se $P_3= e^{-c/\sigma}\sum\limits_{k=0}^{n-2} c_k$, com $c_0 = \dfrac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}$ e

$c_k=e^{-c}\left(\frac{n-1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}} \quad -1\right)c_{k-1}$ para $k \geq 1$.

$P_4=P(Y_{(n)}-Y_{(1)} > c,\ Y_{(n)}=Y_n;\ Y_1-Y_{(1)}, \dots ,Y_{n-1}-Y_{(1)}<c \mid H_1)=$

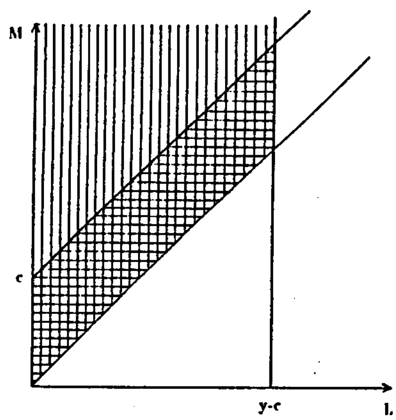
$=P(Y_n-Y_{(1)}> c,\ \max(M,Y_n)=Y_n,\ M-Y_{(1)}< c \mid H_1)=$

$=P(Y_n-Y_{(1)}>c,\ Y_n \geq M,\ M-Y_{(1)}<c \mid H_1)=P(Y_n-Y_{(1)}>c,\ Y_{(1)}=L,\ Y_n \geq M,\ M-Y_{(1)}<c \mid H_1)=$

$=P(Y_n-L > c,\ Y_n \geq M,\ M-L < c \mid H_1)$.

Como ($M-L < c$ e $Y_n-L > c$) implica $M<Y_n$ e como $P(M=Y_n)=0$, podemos escrever:

$P_4=(Y_n-L >c,\ M-L <c \mid H_1) =$



$=P(L<Y_n-c,\ M-L< c \mid H_1)=$

$=\int_c^{+\infty} P(L < y-c,\ M-L < c \mid H_1)\ \frac{1}{\sigma}\, e^{-y/\sigma}dy=$

$=\int_c^{+\infty}\left(\int_0^{y-c} \int_\ell^{\ell+c} f_{L,M}(\ell, m)\ dm\ d\ell\right)\frac{1}{\sigma}\, e^{-y/\sigma}dy$.

Ora, para $0<\ell<m$, $f_{L,M}(\ell,m)= \dfrac{\partial F_{L,M}(\ell,m)}{\partial\ell\partial m} = \dfrac{\partial}{\partial\ell\partial m}\left((1-e^{-m})^{n-1}-(e^{-\ell} - e^{-m})^{n-1}\right)=$

$= \dfrac{\partial}{\partial m}\left((n-1)(e^{-\ell} - e^{-m})^{n-2}\ e^{-\ell}\right)= (n-1)(n-2)(e^{-\ell} - e^{-m})^{n-3}\ e^{-m}\ e^{-\ell}$. Logo:

$P_4=\int_c^{+\infty}\left(\int_0^{y-c} (n-1)\ e^{-\ell} \int_\ell^{\ell+c} (n-2)(e^{-\ell}- e^{-m})^{n-3}\ e^{-m}\ dm\ d\ell\right)\frac{1}{\sigma}\, e^{-y/\sigma}\ dy=$

$= \int_c^{+\infty}\left(\int_0^{y-c} (n-1)\ e^{-\ell}\left((e^{-\ell} - e^{-\ell-c})^{n-2} - (e^{-\ell} - e^{-\ell})^{n-2}\right) dl\right)\frac{1}{\sigma}\, e^{-y/\sigma}\ dy =$

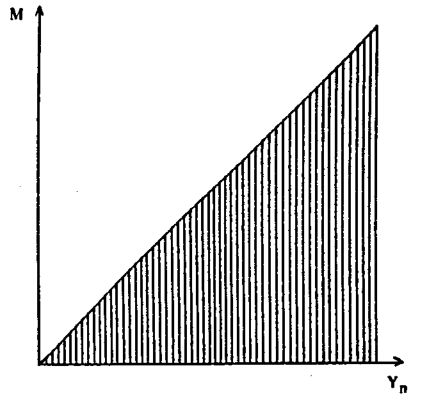
$$=\int_c^{+\infty}\left(\int_0^{y-c}(n-1)\,e^{-(n-1)\ell}(1-e^{-c})^{n-2}\,d\ell\right)\frac{1}{\sigma}\,e^{-y/\sigma}dy=$$

$$=\int_c^{+\infty}(1-e^{-c})^{n-2}\left(1-e^{-(n-1)(y-c)}\right)\frac{1}{\sigma}\,e^{-y/\sigma}\,dy=(1-e^{-c})^{n-2}\int_c^{+\infty}\left(\frac{1}{\sigma}\,e^{-y/\sigma}-\frac{1}{\sigma}\,e^{(n-1)c}\,e^{-(n-1+1/\sigma)y}\right)dy=$$

$$=(1-e^{-c})^{n-2}\left(e^{-c/\sigma}-\frac{1}{\sigma}\,e^{(n-1)c}\,\frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\,e^{-(n-1+1/\sigma)c}\right)=(1-e^{-c})^{n-2}\,e^{-c/\sigma}\,\frac{n-1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\,.$$

$$P_6=P(Y_{(n)}=Y_n \mid H_1)=P(M \leq Y_n \mid H_1)=$$

$$=\int_0^{+\infty}F_M(y)\,\frac{1}{\sigma}\,e^{-y/\sigma}\,dy=$$



$$=\int_0^{+\infty}(1-e^{-y})^{n-1}\,\frac{1}{\sigma}\,e^{-y/\sigma}\,dy=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\,\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-ky}\,e^{-y/\sigma}\,dy=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\,\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}}\,.$$

Como fórmula alternativa para P_6 temos (fazendo a mesma mudança de variável e os mesmos cálculos que fizemos para P_6 da estatística B):

$$P_6=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i}{i+\frac{1}{\sigma}}\,.$$

$$P_5=P_3/P_6\,.$$

$$P_7=P_1-P_3\,.$$

3.8 VALORES CRITICOS E MEDIDAS DE "PERFORMANCE" DA ESTATISTICA T'

Lembremos que $T' = \dfrac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\Sigma(X_i - X_{(1)})}$.

$$\alpha = P(T' > c \,|H_0) = 1 - F^0{}_{T'}(c) = 1 - \sum_{i=0}^{INT(1/c)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-ic)^{n-2} =$$

$$= - \sum_{i=1}^{INT(1/c)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-ic)^{n-2} .$$

Determinam-se os valores críticos, por exemplo, por bissecção entre $\frac{1}{n-1}$ e 1.

NOTA: Pode usar-se a tabela de valores críticos de T com n desfasado de uma unidade. Por exemplo, o valor crítico de T' para n=50 é o valor crítico de T para n=49.

Seja $\bar{k} = INT(1/c)$.

$$P_1 = P(T' > c \mid H_1) = 1 - F^1{}_{T'}(c) = - \sum_{i=1}^{\bar{k}} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-ic)^{n-2} \frac{1}{1 + (n-1)\sigma} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{(n-1-i)\sigma}{1+(\sigma-1)ic} + \frac{1}{(1+(\frac{1}{\sigma} - 1) c)^{n-2}} \cdot \frac{i\sigma}{1+(\sigma-1)(i-1) c} \right).$$

Para o cálculo de P_2 note-se que

$$T' = \max_{1 \le j \le n} \frac{Y_j - Y_{(1)}}{\Sigma(Y_i - Y_{(1)})} = \max_{1 \le j \le n} W_j.$$

$$\text{Seja } W_j = \frac{Y_j - Y_{(1)}}{\Sigma(Y_i - Y_{(1)})} = \frac{Y_j/\Sigma Y_i - Y_{(1)}/\Sigma Y_i}{1 - nY_{(1)}/\Sigma Y_i} = \frac{V_j - U}{1 - nU} .$$

$$P_2 = P(W_n > c \mid H_1) = P\left(\frac{V_n - U}{1 - nU} > c \mid H_1\right) = P(V_n + U\,(nc-1) > c \mid H_1) =$$

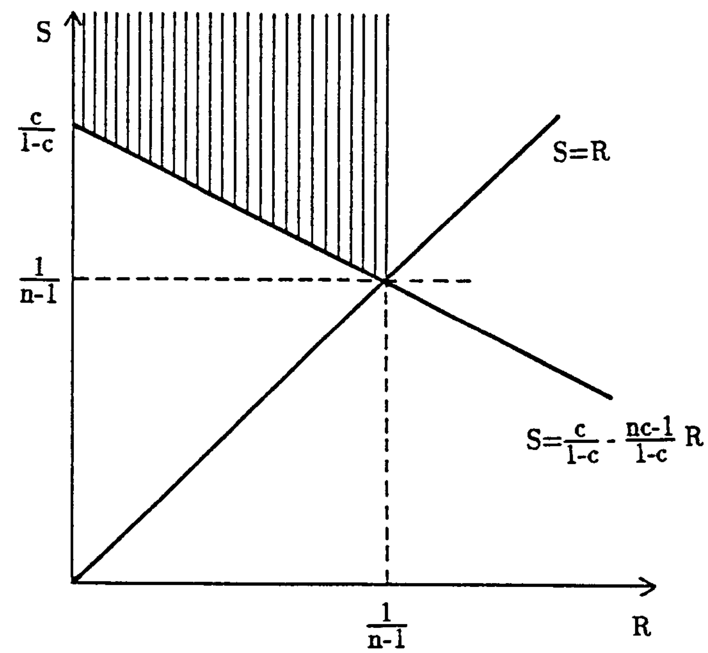
$$= P\left(\frac{S}{1+S} + (nc - 1)\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) > c \mid H_1\right) = P(S+(nc-1)\min(R, S)>c(1+S) \mid H_1)=$$

$$= P(S \le R,\ S+(nc-1)S > c\,(1+S) \mid H_1) + P(S>R,\ S+(nc-1)R > c\,(1+S) \mid H_1)=$$

$$= P\left(R \ge S,\ 0 \le R < \frac{1}{n-1},\ S > \frac{1}{n-1}\right) + P\left(R < S,\ S > \frac{c}{1-c} - \frac{nc-1}{1-c}R,\ S>0,\ 0 \le R < \frac{1}{n-1}\right).$$

Note-se que a região que aparece na primeira probabilidade é vazia.

A recta $S=\frac{c}{1-c} - \frac{nc-1}{1-c}R$ está representada na figura seguinte e intersecta a recta $S = R$ no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right)$.



Como R e S são independentes, vem:

$$P_2 = 0 + \int_0^{1/(n-1)} f_R(r) \left(\int_{\frac{c}{1-c} - \frac{nc-1}{1-c} r}^{+\infty} f_S(s)\, ds \right) dr =$$

$$= \int_0^{1/(n-1)} f_R(r) \left(1 - F_S\left(\frac{c}{1-c} - \frac{nc-1}{1-c} r\right)\right) dr = \int_0^{1/(n-1)} f_R(r) \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)r}{1-c}\right)^{n-1}} dr =$$

$$= \int_0^{1/(n-1)} (n-1)\,(n-2)\,(1-(n-1)r)^{n-3} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)\,r}{1-c}\right)^{n-1}} dr =$$

$$= \int_0^{1/(n-1)} (n-2) \left(\frac{1-(n-1)r}{1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)\,r}{1-c}} \right)^{n-3} \cdot \frac{-\frac{1+\sigma(n-1)}{\sigma}}{\left(1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)r}{1-c}\right)^2} \cdot (n-1) \cdot \frac{-\sigma}{1+\sigma(n-1)}\, dr.$$

Como os três primeiros factores do integral são a derivada em ordem a r de

$$\left(\frac{1-(n-1)r}{1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)r}{1-c}} \right)^{n-2}, \quad \text{vem:}$$

$$P_2 = \frac{-\sigma(n-1)}{1+\sigma(n-1)} \left(\left(\frac{1-(n-1)\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)\frac{1}{n-1}}{1-c}} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-(n-1)0}{1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c-(nc-1)\,0}{1-c}} \right)^{n-2} \right) =$$

$$= \frac{\sigma(n-1)}{1+\sigma(n-1)} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{c}{1-c}} \right)^{n-2} = \frac{n-1}{\frac{1}{\sigma} + (n-1)} \left(\frac{1-c}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)c} \right)^{n-2}.$$

$$P_3 = P(T'>c \text{ e } T'=W_n \mid H_1) = P\left(\frac{T-U}{1-nU} > c, \ \frac{T-U}{1-nU} = \frac{V_n-U}{1-nU} \mid H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{T-U}{1-nU} > c, T=V_n \mid H_1\right) = P\left(\frac{V_n-U}{1-nU} > c, \ T=V_n \mid H_1\right) = P(V_n\text{-}U > c\text{-}cnU, T=V_n \mid H_1) =$$

$$= P\Big(V_n+(nc-1)U > c, T=V_n \mid H_1\Big) =$$

$$= P\left(\frac{S}{1+S} + (nc-1)\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) > c, \ \max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) = \frac{S}{1+S} \mid H_1\right) =$$

$$= P(S+(nc-1)\min(R, S) > c(1+S), H \le S \mid H_1) =$$

$$= P(S+(nc-1)\min(R, S) > c(1+S), H \le S, H \ge \frac{1}{n-1}, 0 \le R < \frac{1}{n-1}, S>0, R \le H \mid H_1).$$

Como ($R \le H$ e $H \le S$) implica $R \le S$, tem-se min $(R, S) = R$. Logo:

$$P_3 = (S+(nc-1)R > c(1+S), H \le S, H \ge \frac{1}{n-1}, \ 0 \le R < \frac{1}{n-1}, \ S > 0 \mid H_1) =$$

$$= P\Big((1-c)S + (nc-1)R > c, H \le S, H \ge \frac{1}{n-1}, 0 \le R < \frac{1}{n-1}, S > 0 \mid H_1\Big).$$

E como S é independente de (R, H) vem:

$$P_3 = \int_0^{+\infty} f_S(s)\, P\left((1-c)s + (nc-1)R > c, \ H \le s, H \ge \frac{1}{n-1}, \ 0 \le R < \frac{1}{n-1}\right) ds=$$

$$= \int_0^{+\infty} f_S(s)\, P\left(R > \frac{c-(1-c)s}{nc-1}, \ 0 \le R < \frac{1}{n-1}, \ \frac{1}{n-1} \le H \le s\right) ds.$$

Como a probabilidade é nula para $s < \frac{1}{n-1}$, pois neste caso torna-se impossível a dupla desigualdade $\frac{1}{n-1} \le H \le s$, podemos escrever:

$$P_3 = \int_{1/(n-1)}^{+\infty} f_S(s)\, P\left(R > \frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ 0 \leq R < \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq s \right) ds.$$

A expressão $\frac{c-(1-c)s}{nc-1}$ decresce com s. Para $s = \frac{1}{n-1}$ dá $\frac{1}{n-1}$, para $s=+\infty$ dá $-\infty$ e para $s = \frac{c}{1-c}$ dá zero. Como $c > \frac{1}{n-1}$, vem $\frac{c}{1-c} > \frac{1}{n-2} > \frac{1}{n-1}$. Assim:

$$P_3 = \int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\, P\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1} < R < \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq s \right) ds +$$

$$+ \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ P\left(0 \leq R < \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H < s\right) ds =$$

$$= \int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\ P_{R,H}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ s \right) ds + \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(s)\ ds.$$

Vem

$$P_{R,H}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ s \right) = \sum_{i=0}^{n-2-INT(j)} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(1-(n-1-i)\, \frac{c-(1-c)s}{nc-1} - is \right)^{n-2}$$

com $INT(j) = INT\left(\frac{(n-1)s - 1}{s - \frac{c-(1-c)s}{nc-1}} \right) = INT\left(\frac{nc-1}{c} \right) = INT\left(n- \frac{1}{c}\right)$, donde $n-2-INT(j) =$

$= n-2-INT\left(n- \frac{1}{c}\right)$. Podemos usar $n-2-INT(j) = INT\left(\frac{1}{c}\right) - 1$. Assim:

$$P_{R,H}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ s \right) = \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(\frac{(1-(i+1)c)\ ((n-1)s-1)}{nc-1} \right)^{n-2} \quad e$$

$$\int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\ P_{R,H}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ s\right) ds = \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2} \cdot$$

$$\cdot \int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} \frac{1}{\sigma}(n-1)\left(\frac{(n-1)s-1}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)}\right)^{n-2} \cdot \frac{n-1+\frac{1}{\sigma}}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}}\, ds=$$

$$= \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2} \frac{1}{\sigma}\ \frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \left(\left(\frac{(n-1)\frac{c}{1-c}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1} - \left(\frac{(n-1)\frac{1}{n-1}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{(1-(i+1)c)^{n-2}}{(nc-1)^{n-2}} \cdot \frac{1}{1+(n-1)\sigma} \cdot \frac{(nc-1)^{n-1}}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(i+1)c)^{n-2}\ \frac{nc-1}{1+(n-1)\sigma}\ \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}}.$$

Para $c > \frac{1}{2}$, vem $\frac{c}{1-c} > 1$ e $\bar{k}=1$ e, como $F_H(s) = 1$ para $s \geq 1$, vem

$$\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(s)\, ds = 1 - F_S\left(\frac{c}{1-c}\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}\right)^{n-1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Para $c \leq \frac{1}{2}$, vem $\frac{c}{1-c} \leq 1$ e $\bar{k} \geq 2$, pelo que

$$\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(s)\, ds = \int_{c/(1-c)}^{1} f_S(s)\ F_H(s)\, ds + 1 - F_S(1) =$$

$$= \int_{c/(1-c)}^{1} f_S(s)\ F_H(s)\ ds + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}};$$

Como no intervalo de integração se tem $\frac{c}{1-c} \le s < 1$, vem $F_H(s) =$

$= \sum_{i=0}^{INT(1/s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-is)^{n-2}$ e, no intervalo de integração, INT (1/s) = $\bar{k}$-1, $\bar{k}$ -2, ..., 1,

respectivamente para $\frac{c}{1-c} \le s \le \frac{1}{\bar{k}-1}$, $\frac{1}{\bar{k}-1} < s \le \frac{1}{\bar{k}-2}$, ..., $\frac{1}{2} < s \le 1$, podemos escrever,

pondo $\theta_i(s) = \left(\frac{1-is}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-1}$ e omitindo o $\sum_{j=1}^{\bar{k}-2}$ caso $\bar{k} = 2$:

$$\int_{c/(1-c)}^{1} f_S(s)\ F_H(s)\ ds = \int_{c/(1-c)}^{1/(\bar{k}-1)} f_S(s) \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-is)^{n-2} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\bar{k}-2} \int_{1/(j+1)}^{1/j} f_S(s) \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-is)^{n-2} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \int_{c/(1-c)}^{1/(\bar{k}-1)} + \sum_{j=1}^{\bar{k}-2} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-1}{i} \int_{1/(j+1)}^{1/j} \right) (n-1) \left(\frac{1-is}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-2} \frac{-i-\frac{1}{\sigma}}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{-(1+\sigma i)}\ ds=$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\theta_i\left(\frac{c}{1-c}\right) - \theta_i\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right) \right) + \sum_{j=1}^{\bar{k}-2} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\theta_i\left(\frac{1}{j+1}\right) - \theta_i\left(\frac{1}{j}\right) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\left(\frac{c}{1-c}\right) - \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right) +$$

$$+ \left(\sum_{i=0}^{0} \sum_{j=1}^{\bar{k}-2} + \sum_{i=1}^{\bar{k}-2} \sum_{j=i}^{\bar{k}-2} \right) (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\theta_i\left(\frac{1}{j+1}\right) - \theta_i\left(\frac{1}{j}\right) \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\left(\frac{c}{1-c}\right) - \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\ \left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right) +$$

$$+ \theta_0\left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right) - \theta_0(1) + \sum_{i=1}^{\bar{k}-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\theta_i\ \left(\frac{1}{\bar{k}-1}\right) - \theta_i\left(\frac{1}{i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\left(\frac{c}{1-c}\right) - \ \theta_0(1) - \ \sum_{i=1}^{\bar{k}-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma}\ \theta_i\ \left(\frac{1}{i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sigma}}\right)^{n-1}.$$

Logo, para qualquer c entre $\frac{1}{n-1}$ e 1, vem

$$\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ F_H(s)\ ds = \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Atendendo a que $\left(\frac{1-i\,\frac{c}{1-c}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right) = \frac{1-(i+1)c}{1+\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)c}$, vem

$$P_3 = \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(i+1)c)^{n-2}\ \frac{nc-1}{1+(n-1)\sigma}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(i+1)c)^{n-1}\ \frac{1}{1+i\sigma}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} \sum_{i=0}^{INT(1/c)-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (1-(i+1)c)^{n-2} \left(\frac{nc-1}{1+(n-1)\sigma} + \frac{1-(i+1)c}{1+i\sigma}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} \sum_{j=1}^{INT(1/c)} (-1)^j \binom{n-1}{j} (1-jc)^{n-2} \frac{j}{1+(j-1)\sigma} \cdot \frac{c+\sigma(1-c)}{1+(n-1)\sigma} =$$

$$= -\frac{c+\sigma(1-c)}{1+(n-1)\sigma} \cdot \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-1}} \sum_{j=1}^{INT(1/c)} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{j}{1+(j-1)\sigma} (1-jc)^{n-2} =$$

$$= -\frac{1}{(n-1)+\frac{1}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c\right)^{n-2}} \sum_{j=1}^{INT(1/c)} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{j}{1+(j-1)\sigma} (1-jc)^{n-2} .$$

$$P_4 = P(T' > c,\ T' = W_n;\ W_1, ..., W_{n-1} \le c\ |H_1) =$$

$$= P\left(\frac{T-U}{1-nU} > c,\ T=V_n;\ \frac{V_1-U}{1-nU}, ..., \frac{V_{n-1}-U}{1-nU} \le c\ |H_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{V_n-U}{1-nU} > c,\ T=V_n,\ \frac{\max\limits_{1\le j\le n-1} V_j-U}{1-nU} \le c\ |H_1\right) =$$

$$= P(V_n+(nc-1)U>c,\ T=V_n,\ \max_{1\le j\le n-1} V_j+(nc-1)U \le c\ |\ H_1) =$$

$$= P\left(\frac{S}{1+S} + (nc-1)\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) > c,\ \max\left(\frac{H}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) = \frac{S}{1+S},\right.$$

$$\left.\frac{H}{1+S}+(nc-1)\min\left(\frac{R}{1+S}, \frac{S}{1+S}\right) \le c\ |H_1\right) =$$

$$= P\left(S+(nc-1)\min(R,S) > c(1+S),\ H \le S,\ H+(nc-1)\min(R,S) \le c(1+S),\ R \le H\ |H_1\right).$$

Como ($R \leq H$ e $H \leq S$) implica $R \leq S$ tem-se $\min(R,S) = R$. Logo:

$$P_4 = P\left(R > \frac{c-(1-c)S}{nc-1},\ 0 \leq R < \frac{1}{n-1},\ S>0,\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq S,\ H+(nc-1)R \leq c(1+S)\ |H_1\right)=$$

$$= \int_0^{+\infty} f_S(s)\ P\left(R > \frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ 0 \leq R< \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq s,\ H+(nc-1)R \leq c(1+s)\right) ds.$$

Como esta probabilidade é nula para $s < \frac{1}{n-1}$ (uma vez que nesse caso é impossível ter $\frac{1}{n-1} \leq H \leq s$) e como $\frac{c}{1-c} > \frac{1}{n-1}$ (pois c varia entre $\frac{1}{n-1}$ e 1), podemos escrever:

$$P_4 = \int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\ P\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1} < R < \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq s,\ H+(nc-1)R \leq c(1+s)\right)ds\ +$$

$$+ \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ P\left(0 \leq R< \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1} \leq H \leq s,\ H+(nc-1)R \leq c(1+s)\right)ds=$$

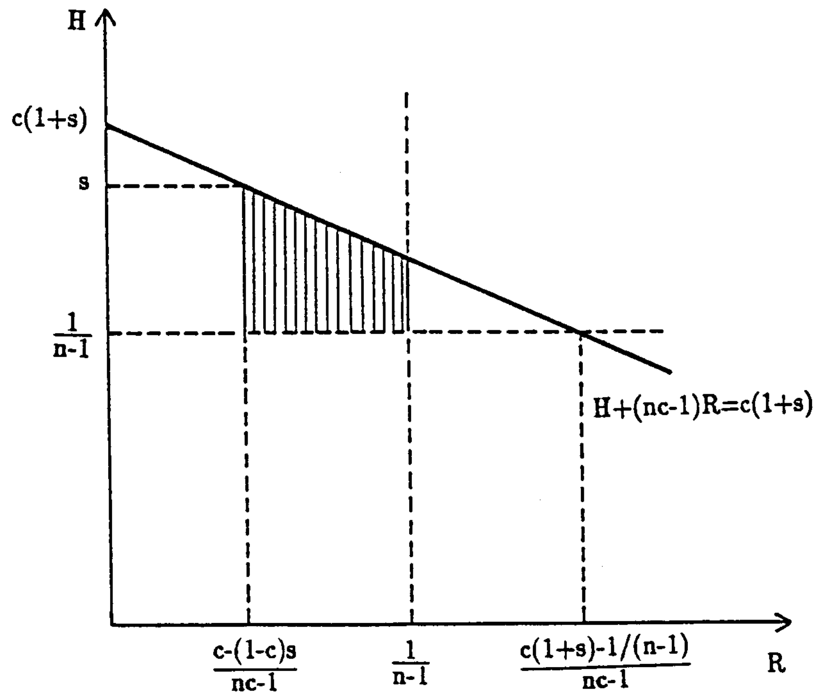
$$= \int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\ Q^*_1(s)\ ds + \int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s) Q^*_2(s)\ ds, \quad \text{onde}$$

$$Q^*_1(s) = P\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1} < R < \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1} \leq H \leq s,\ H+(nc-1)R \leq c(1+s)\right) \quad \text{e}$$

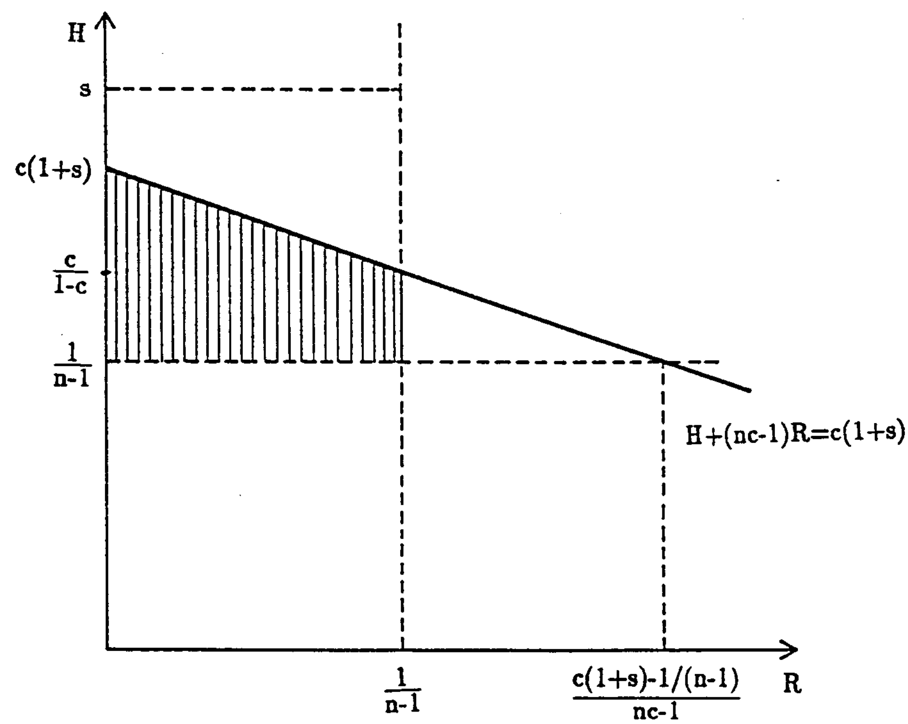
$$Q^*_2(s) = P\left(0 \leq R < \frac{1}{n-1},\ \frac{1}{n-1} \leq H \leq s,\ H+(nc-1)R \leq c(1+s)\right).$$

Vejamos gráficamente as duas regiões atrás indicadas.

Para $\frac{1}{n-1} \leq s < \frac{c}{1-c}$



Para $s \geq \frac{c}{1-c}$



Calculemos $Q^*_1(s)$. Tem-se

$$Q^*_1(s) = \int_{(c-(1-c)s)/(nc-1)}^{1/(n-1)} \left(\int_{1/(n-1)}^{c(1+s)-(nc-1)r} f_{R,H}(r,\, h)dh \right) dr.$$

Este segundo integral já foi estudado (ver pag. 78 com a diferença de agora se ter o caso particular de $t'=c$) e denominado $g_s(r)$.

Da página 81 vem:

$$g_s(r)= \sum_{i=0}^{j^*(r,s)} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-2)\ (n-1-i)\Big((1-(n-1)r) - ic(1+s-rn)\Big)^{n-3} \qquad \text{com}$$

$$j^*(r,s)=\mathrm{INT}\left(\frac{1-(n-1)r}{c(1+s-rn)}\right).$$

Como $s \geq \frac{1}{n-1}$ vê-se (da pag. 83) que $j^*(r,s)$ decresce em sentido lato quando r varia entre

$$\frac{c-(1-c)s}{nc-1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n-1}.$$

Fazendo, como na pag. 84,

$$r_\ell(s) = \frac{\ell c\ (1+s)-1}{n(\ell c-1)+1}$$

vem

$$r_0(s) = \frac{1}{n-1} \ \text{ e } \ j^*(r,s) = \ell \ \text{ para } \ r_{\ell+1}(s) < r \ \leq r_\ell(s).$$

Note-se que, sendo $\bar{k} = \mathrm{INT}\left(\frac{1}{c}\right)$, vem

$$j^*\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1},\ s\right) = \mathrm{INT}\left(\frac{1-c}{c}\right) = \bar{k}-1.$$

$$j^*\left(\frac{1}{n-1},\ s\right) = 0.$$

Faça-se, como na página 84,

$$\theta_{i,s}(r) = (-1)^i \binom{n-1}{i} ((n-1-i)c\ (1+s-rn) - (1-(n-1)r))^{n-2}\ \frac{i}{(n-1-i)cn - (n-1)}$$

donde

$$\theta_{n-1-i,s}(r) = -\ (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} (ic(1+s-rn) - (1-(n-1)r))^{n-2}\ \frac{n-1-i}{(n-1) - icn}\ .$$

Vem

$$\int g_s(r)dr = -\sum_{i=0}^{j^*(r,s)} \theta_{n-1-i,\ s}(r) + \text{constante}.$$

Logo

$$Q^*_1(s) = \left(\int_{(c-(1-c)s)/(nc-1)}^{r_{\bar{k}-1}(s)} + \sum_{\ell=0}^{\bar{k}-2} \int_{r_{\ell+1}(s)}^{r_\ell(s)}\right) g_s\ (r)\ dr=$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} \left(\theta_{n-1-i,\ s}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1}\right) - \theta_{n-1-i,\ s}\left(r_{\bar{k}-1}(s)\right)\right) +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{\bar{k}-2} \sum_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n-1-i,s}\left(r_{\ell+1}(s)\right) - \theta_{n-1-i,\ s}\left(r_\ell(s)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} \left(\theta_{n-1-i,s}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1}\right) - \theta_{n-1-i,\ s}(r_i(s))\right) = \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} \theta_{n-1-i,s}\left(\frac{c-(1-c)s}{nc-1}\right) =$$

$$=-\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{(n-1)-icn}\left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2}(1-s(n-1))^{n-2}\ .$$

Assim

$$\int_{1/(n-1)}^{c/(1-c)} f_S(s)\ Q^*{}_1(s)\ ds =$$

$$=-\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{(n-1)-icn}\left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2}\frac{1}{\sigma}\int_{1/(n-1)}^{1/(1-c)}(n-1)\left(\frac{1-s(n-1)}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-2}\frac{-(n-1)-\frac{1}{\sigma}}{\left(1+\frac{s}{\sigma}\right)^{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{-(n-1)-\frac{1}{\sigma}}\,ds =-\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{(n-1)-icn}\left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2}\frac{1}{1+\sigma(n-1)}\left(\left(\frac{1-\frac{1}{n-1}(n-1)}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1-\frac{c}{1-c}(n-1)}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}\right)=\sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2}\frac{1}{1+\sigma(n-1)}\left(\frac{1-\frac{c}{1-c}(n-1)}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Passemos agora ao cálculo de $Q^*{}_2(s)$.

$$Q^*{}_2(s) = \int_0^{1/(n-1)}\left(\int_{1/(n-1)}^{c(1+s)-(nc-1)r} f_{R,H}(r,\ h)dh\right)dr.$$

Seja $j^*(0,\ s) = \mathrm{INT}\left(\frac{1}{c(1+s)}\right) = j^*(s) \qquad (\geq 0).$

Então

$$Q^*{}_2(s) =\left(\int_0^{r_{j^*(s)}(s)} + \sum_{\ell=0}^{j^*(s)-1}\int_{r_{\ell+1}(s)}^{r_\ell(s)}\right)g_s(r)\ dr=$$

$$= \sum_{i=0}^{j^*(s)} \left(\theta_{n-1-i,s}(0) - \theta_{n-1-i,s}\left(r_{j^*(s)}(s)\right)\right) + \sum_{\ell=0}^{j^*(s)-1} \sum_{i=0}^{\ell} \left(\theta_{n-1-i,s}\left(r_{\ell+1}(s)\right) - \theta_{n-1-i,s}\left(r_{\ell}(s)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j^*(s)} \left(\theta_{n-1-i,s}(0) - \theta_{n-1-i,s}\left(r_i(s)\right)\right) = - \sum_{i=0}^{j^*(s)} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{n-1-icn} (ic(1+s)-1)^{n-2} .$$

Note-se que $j^*(s) = \text{INT}\left(\frac{1}{c(1+s)}\right)$ decresce em sentido lato com s e que $j^*(s) = j$ quando $\frac{1}{c(j+1)} - 1 < s \leq \frac{1}{cj} - 1$.

Vem $j^*\left(\frac{c}{1-c}\right) = \text{INT}\left(\frac{1-c}{c}\right) = \bar{k} - 1$ e $j^*(+\infty) = 0$.

Assim

$$\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ Q^*_2(s)\, ds =$$

$$= \int_{c/(1-c)}^{1/(c(\bar{k}-1))-1} \left(- \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{n-1-icn} f_S(s)\ (ic(1+s)-1)^{n-2} \right) ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\bar{k}-2} \int_{1/(c(j+1))-1}^{1/(cj)-1} \left(- \sum_{i=0}^{j} (-1)^{n-1-i} \binom{n-1}{i} \frac{n-1-i}{n-1-icn} f_S(s)\ (ic(1+s)-1)^{n-2} \right) ds.$$

Como $\int f_S(s)\ (ic(1+s)-1)^{n-2}\, ds =$

$$= \frac{1}{\sigma} \int (n-1) \left(\frac{ic(1+s) - 1}{1 + \frac{s}{\sigma}} \right)^{n-2} \frac{ic\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}}{\left(1 + \frac{s}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{ic\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{1+ic(\sigma-1)} \left(\frac{ic(1+s)-1}{1+\frac{s}{\sigma}}\right)^{n-1} + \text{ constante,}$$

vem

$$\int_{c/(1-c)}^{+\infty} f_S(s)\ Q^*_2(s)\ ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} -(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\cdot\frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\left(\left(\frac{ic\frac{1}{c(\bar{k}-1)}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{c(1+\bar{k})}-1\right)}\right)^{n-1} - \left(\frac{ic\frac{1}{1-c}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}\right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\bar{k}-2}\ \sum_{i=0}^{j} -(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\cdot\frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\left(\left(\frac{ic\frac{1}{cj}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{cj}-1\right)}\right)^{n-1} - \left(\frac{ic\frac{1}{c(j+1)}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{c(j+1)}-1\right)}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} -(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\cdot\frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\left(\left(\frac{ic\frac{1}{ic}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{ic}-1\right)}\right)^{n-1} - \left(\frac{ic\frac{1}{1-c}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1} (-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\ \frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\left(\frac{ic\frac{1}{1-c}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}.$$

Logo

$$P_4 = \sum_{i=0}^{\bar{k}-1}(-1)^{n-1-i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\left(\frac{1}{1+\sigma(n-1)}\left(\frac{1-(i+1)c}{nc-1}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\frac{c}{1-c}(n-1)}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\left(\frac{ic\frac{1}{1-c}-1}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{c}{1-c}}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\bar{k}-1}(-1)^{i}\binom{n-1}{i}\frac{n-1-i}{n-1-icn}\left(\frac{1-(i+1)c}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{1+\sigma(n-1)}\cdot\frac{nc-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c} - \frac{(i+1)c-1}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c}\cdot\frac{1}{1+ic(\sigma-1)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-1-i) \left(\frac{1-(i+1)c}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c} \right)^{n-2} \frac{\sigma}{(1+\sigma(n-1))\cdot(1+ic(\sigma-1))} .$$

Note-se que $\binom{n-1}{i}(n-1-i) = \binom{n-1}{i+1}(i+1)$ e faça-se j= i+1.

Vem

$$P_4 = -\sum_{j=1}^{INT(1/c)} (-1)^j \binom{n-1}{j} \left(\frac{1-jc}{1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)c} \right)^{n-2} \frac{j}{(1+(j-1)(\sigma-1)c)(n-1+\frac{1}{\sigma})} =$$

$$= -\frac{1}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \cdot \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)\right)^{n-2}} \sum_{j=1}^{INT(1/c)} (-1)^j \binom{n-1}{j} \frac{j}{1+(j-1)(\sigma-1)c} (1-jc)^{n-2} .$$

$P_6 = P(T'=W_n \mid H_1) = P(T=V_n \mid H_1)$.

E esta probabilidade já tinha sido calculada (ver pag. 130). Assim

$$P_6 = \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{1-i\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n-1}} \right)^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} \left(\frac{n-1-i}{n-1+\frac{1}{\sigma}} \right)^{n-1} = \frac{1}{\left(n-1+\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{1+i\sigma} (n-1-i)^{n-1} .$$

$P_5 = P_3/P_6$.

$P_7 = P_1 - P_3$.

4.1 INTRODUÇÃO

Como foi dito em 2.3, as estatísticas A, B, U, T e Z foram obtidas pelo método GAN por Rosado (1984) e as estatísticas D, B′ e T′ foram obtidas no âmbito do presente trabalho.

Relativamente à distribuição gama, tabelas de valores críticos das estatísticas U e Z foram obtidas por simulação por Braumann, M. M. (1989) no trabalho de síntese apresentado nas provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica. Posteriormente as tabelas de valores críticos relativas à estatística U foram publicadas em Rosado, F.F. e Braumann, M.M. (1990). Relativamente à estatística T já existem tabelas publicadas desde 1947 (ver Barnett e Lewis pags. 369 e 370).

No presente trabalho, para além de tabelas de valores críticos das estatísticas U, T e Z para a distribuição exponencial, agora valores exactos, apresentamos tabelas de valores críticos para as restantes estatísticas A, B, D, B′ e T′, para as quais não existiam. O nível de significância das tabelas apresentadas é 5%.

Relativamente às medidas de "performance" não existia nada feito para nenhuma das estatísticas aqui estudadas. Ao apresentar as tabelas das medidas de "performance" optámos por indicar também os valores das caudas que têm menos interesse analisar, ou seja, cauda inferior para as estatísticas A e U e cauda superior para as estatísticas B, B′, T e T′. Para D e Z ambas as caudas interessam.

4.2 TABELAS DE VALORES CRITICOS

Apresentam-se a seguir as tabelas dos valores críticos das estatísticas obtidas no capítulo II.

Valores Críticos das Estatísticas A e U

($\alpha = 0.05$)

n	A	U
3	0.1710E-1	0.8440E-2
4	0.1282E-1	0.4238E-2
5	0.1026E-1	0.2548E-2
6	0.8549E-2	0.1701E-2
7	0.7328E-2	0.1216E-2
8	0.6412E-2	0.9126E-3
9	0.5699E-2	0.7101E-3
10	0.5129E-2	0.5283E-3
11	0.4663E-2	0.4651E-3
12	0.4274E-2	0.3877E-3
13	0.3946E-2	0.3281E-3
14	0.3664E-2	0.2831E-3
15	0.3420E-2	0.2438E-3
16	0.3206E-2	0.2134E-3
17	0.3017E-2	0.1883E-3
18	0.2850E-2	0.1674E-3
19	0.2700E-2	0.1498E-3
20	0.2565E-2	0.1348E-3
21	0.2443E-2	0.1220E-3
22	0.2332E-2	0.1109E-3
23	0.2230E-2	0.1013E-3
24	0.2137E-2	0.9282E-4
25	0.2052E-2	0.8540E-4
26	0.1973E-2	0.7883E-4
27	0.1900E-2	0.7300E-4
28	0.1832E-2	0.6778E-4
29	0.1769E-2	0.6311E-4
30	0.1710E-2	0.5891E-4
31	0.1655E-2	0.5511E-4
32	0.1603E-2	0.5167E-4
33	0.1554E-2	0.4853E-4
34	0.1509E-2	0.4568E-4
35	0.1466E-2	0.4307E-4
36	0.1425E-2	0.4068E-4
37	0.1386E-2	0.3848E-4
38	0.1350E-2	0.3646E-4
39	0.1315E-2	0.3459E-4
40	0.1282E-2	0.3286E-4
41	0.1251E-2	0.3126E-4
42	0.1221E-2	0.2977E-4
43	0.1193E-2	0.2838E-4
44	0.1166E-2	0.2710E-4
45	0.1140E-2	0.2589E-4
46	0.1115E-2	0.2477E-4
47	0.1091E-2	0.2371E-4
48	0.1069E-2	0.2272E-4
49	0.1047E-2	0.2180E-4
50	0.1026E-2	0.2093E-4

n	A	U
51	0.1006E-2	0.2010E-4
52	0.9864E-3	0.1933E-4
53	0.9678E-3	0.1860E-4
54	0.9499E-3	0.1791E-4
55	0.9326E-3	0.1726E-4
56	0.9160E-3	0.1665E-4
57	0.8999E-3	0.1606E-4
58	0.8844E-3	0.1551E-4
59	0.8694E-3	0.1498E-4
60	0.8549E-3	0.1448E-4
61	0.8409E-3	0.1401E-4
62	0.8273E-3	0.1356E-4
63	0.8142E-3	0.1313E-4
64	0.8015E-3	0.1272E-4
65	0.7891E-3	0.1233E-4
66	0.7772E-3	0.1195E-4
67	0.7656E-3	0.1160E-4
68	0.7543E-3	0.1125E-4
69	0.7434E-3	0.1093E-4
70	0.7328E-3	0.1062E-4
71	0.7224E-3	0.1032E-4
72	0.7124E-3	0.1003E-4
73	0.7026E-3	0.9756E-5
74	0.6932E-3	0.9492E-5
75	0.6839E-3	0.9240E-5
76	0.6749E-3	0.8996E-5
77	0.6661E-3	0.8763E-5
78	0.6576E-3	0.8538E-5
79	0.6493E-3	0.8321E-5
80	0.6412E-3	0.8114E-5
81	0.6333E-3	0.7913E-5
82	0.6255E-3	0.7721E-5
83	0.6180E-3	0.7535E-5
84	0.6106E-3	0.7355E-5
85	0.6035E-3	0.7182E-5
86	0.5964E-3	0.7015E-5
87	0.5896E-3	0.6854E-5
88	0.5829E-3	0.6697E-5
89	0.5763E-3	0.6547E-5
90	0.5799E-3	0.6402E-5
91	0.5637E-3	0.6262E-5
92	0.5575E-3	0.6126E-5
93	0.5515E-3	0.5994E-5
94	0.5457E-3	0.5866E-5
95	0.5399E-3	0.5742E-5
96	0.5343E-3	0.5623E-5
97	0.5288E-3	0.5507E-5
98	0.5234E-3	0.5395E-5
99	0.5181E-3	0.5286E-5
100	0.5129E-3	0.5180E-5

Valores Críticos das Estatísticas B e T

($\alpha = 0.05$)

n	B	T
3	0.4077E+1	0.8709
4	0.4363E+1	0.7679
5	0.4585E+1	0.6838
6	0.4766E+1	0.6161
7	0.4920E+1	0.5612
8	0.5053E+1	0.5157
9	0.5170E+1	0.4775
10	0.5275E+1	0.4450
11	0.5370E+1	0.4169
12	0.5457E+1	0.3924
13	0.5537E+1	0.3708
14	0.5611E+1	0.3517
15	0.5680E+1	0.3346
16	0.5744E+1	0.3192
17	0.5805E+1	0.3053
18	0.5862E+1	0.2926
19	0.5916E+1	0.2810
20	0.5967E+1	0.2704
21	0.6016E+1	0.2606
22	0.6062E+1	0.2516
23	0.6107E+1	0.2432
24	0.6149E+1	0.2353
25	0.6190E+1	0.2280
26	0.6229E+1	0.2212
27	0.6267E+1	0.2148
28	0.6303E+1	0.2088
29	0.6338E+1	0.2032
30	0.6372E+1	0.1978
31	0.6405E+1	0.1928
32	0.6437E+1	0.1880
33	0.6467E+1	0.1835
34	0.6497E+1	0.1792
35	0.6526E+1	0.1751
36	0.6554E+1	0.1712
37	0.6582E+1	0.1675
38	0.6608E+1	0.1640
39	0.6634E+1	0.1606
40	0.6660E+1	0.1574
41	0.6684E+1	0.1543
42	0.6708E+1	0.1513
43	0.6732E+1	0.1485
44	0.6755E+1	0.1457
45	0.6777E+1	0.1431
46	0.6799E+1	0.1406
47	0.6821E+1	0.1381
48	0.6842E+1	0.1358
49	0.6862E+1	0.1335
50	0.6883E+1	0.1313

n	B	T
51	0.6902E+1	0.1292
52	0.6922E+1	0.1272
53	0.6941E+1	0.1252
54	0.6960E+1	0.1233
55	0.6978E+1	0.1215
56	0.6996E+1	0.1197
57	0.7014E+1	0.1180
58	0.7031E+1	0.1163
59	0.7048E+1	0.1147
60	0.7065E+1	0.1131
61	0.7081E+1	0.1116
62	0.7098E+1	0.1101
63	0.7114E+1	0.1086
64	0.7129E+1	0.1072
65	0.7145E+1	0.1058
66	0.7160E+1	0.1045
67	0.7175E+1	0.1032
68	0.7190E+1	0.1020
69	0.7205E+1	0.1007
70	0.7219E+1	0.9953E-1
71	0.7233E+1	0.9836E-1
72	0.7247E+1	0.9722E-1
73	0.7261E+1	0.9611E-1
74	0.7275E+1	0.9502E-1
75	0.7288E+1	0.9396E-1
76	0.7301E+1	0.9293E-1
77	0.7314E+1	0.9192E-1
78	0.7327E+1	0.9093E-1
79	0.7340E+1	0.8997E-1
80	0.7352E+1	0.8903E-1
81	0.7365E+1	0.8810E-1
82	0.7377E+1	0.8720E-1
83	0.7389E+1	0.8632E-1
84	0.7401E+1	0.8546E-1
85	0.7413E+1	0.8461E-1
86	0.7425E+1	0.8378E-1
87	0.7436E+1	0.8297E-1
88	0.7448E+1	0.8218E-1
89	0.7459E+1	0.8140E-1
90	0.7470E+1	0.8064E-1
91	0.7481E+1	0.7989E-1
92	0.7492E+1	0.7916E-1
93	0.7503E+1	0.7844E-1
94	0.7514E+1	0.7774E-1
95	0.7524E+1	0.7705E-1
96	0.7535E+1	0.7637E-1
97	0.7545E+1	0.7570E-1
98	0.7555E+1	0.7505E-1
99	0.7565E+1	0.7441E-1
100	0.7576E+1	0.7378E-1

NOTA: Esta tabela poderá ser usada para a estatística B′ (e T′), com n desfazado de uma unidade. Por exemplo, o valor crítico de B′ (T′) para n=50 é o valor crítico de B (T) para n=49.

Valores Críticos da Estatística Z

($\alpha = 0.05$)

n	c	c_1	c_2
3	0.5970E-2	0.6042E-2	0.9194
4	0.3150E-2	0.3180E-2	0.8449
5	0.1965E-2	0.1981E-2	0.7756
6	0.1346E-2	0.1355E-2	0.7149
7	0.9798E-3	0.9856E-3	0.6625
8	0.7456E-3	0.7495E-3	0.6170
9	0.5865E-3	0.5892E-3	0.5775
10	0.4734E-3	0.4755E-3	0.5428
11	0.3902E-3	0.3918E-3	0.5123
12	0.3272E-3	0.3284E-3	0.4851
13	0.2784E-3	0.2793E-3	0.4608
14	0.2397E-3	0.2405E-3	0.4389
15	0.2086E-3	0.2092E-3	0.4191
16	0.1832E-3	0.1837E-3	0.4012
17	0.1621E-3	0.1625E-3	0.3848
18	0.1445E-3	0.1449E-3	0.3697
19	0.1296E-3	0.1299E-3	0.3559
20	0.1169E-3	0.1172E-3	0.3431
21	0.1060E-3	0.1063E-3	0.3313
22	0.9658E-4	0.9677E-4	0.3202
23	0.8834E-4	0.8851E-4	0.3100
24	0.8111E-4	0.8126E-4	0.3004
25	0.7474E-4	0.7487E-4	0.2914
26	0.6909E-4	0.6921E-4	0.2830
27	0.6405E-4	0.6416E-4	0.2751
28	0.5955E-4	0.5965E-4	0.2677
29	0.5551E-4	0.5560E-4	0.2606
30	0.5187E-4	0.5195E-4	0.2540
31	0.4857E-4	0.4864E-4	0.2477
32	0.4558E-4	0.4565E-4	0.2417
33	0.4286E-4	0.4292E-4	0.2360
34	0.4038E-4	0.4043E-4	0.2306
35	0.3810E-4	0.3815E-4	0.2254
36	0.3601E-4	0.3606E-4	0.2205
37	0.3409E-4	0.3414E-4	0.2158
38	0.3232E-4	0.3236E-4	0.2114
39	0.3069E-4	0.3072E-4	0.2071
40	0.2917E-4	0.2921E-4	0.2030
41	0.2777E-4	0.2780E-4	0.1990
42	0.2646E-4	0.2649E-4	0.1953
43	0.2525E-4	0.2527E-4	0.1916
44	0.2411E-4	0.2414E-4	0.1881
45	0.2305E-4	0.2308E-4	0.1848
46	0.2206E-4	0.2208E-4	0.1815
47	0.2114E-4	0.2116E-4	0.1784
48	0.2026E-4	0.2028E-4	0.1754
49	0.1945E-4	0.1946E-4	0.1725
50	0.1868E-4	0.21869-4	0.1697

n	c	c_1	c_2
51	0.1795E-4	0.1797E-4	0.1670
52	0.1727E-4	0.1729E-4	0.1644
53	0.1663E-4	0.1664E-4	0.1619
54	0.1602E-4	0.1603E-4	0.1594
55	0.1544E-4	0.1545E-4	0.1571
56	0.1489E-4	0.1491E-4	0.1548
57	0.1438E-4	0.1439E-4	0.1526
58	0.1389E-4	0.1390E-4	0.1504
59	0.1342E-4	0.1343E-4	0.1483
60	0.1298E-4	0.1299E-4	0.1463
61	0.1256E-4	0.1257E-4	0.1443
62	0.1216E-4	0.1216E-4	0.1424
63	0.1177E-4	0.1178E-4	0.1405
64	0.1141E-4	0.1142E-4	0.1387
65	0.1106E-4	0.1107E-4	0.1369
66	0.1073E-4	0.1074E-4	0.1352
67	0.1041E-4	0.1041E-4	0.1335
68	0.1011E-4	0.1012E-4	0.1319
69	0.9819E-5	0.9825E-5	0.1303
70	0.9541E-5	0.9547E-5	0.1288
71	0.9274E-5	0.9280E-5	0.1272
72	0.9019E-5	0.9025E-5	0.1258
73	0.8774E-5	0.8780E-5	0.1243
74	0.8539E-5	0.8545E-5	0.1229
75	0.8314E-5	0.8319E-5	0.1216
76	0.8097E-5	0.8102E-5	0.1202
77	0.7888E-5	0.7893E-5	0.1189
78	0.7688E-5	0.7692E-5	0.1176
79	0.7495E-5	0.7499E-5	0.1164
80	0.7309E-5	0.7313E-5	0.1152
81	0.7130E-5	0.7134E-5	0.1140
82	0.6958E-5	0.6962E-5	0.1128
83	0.6791E-5	0.6795E-5	0.1116
84	0.6631E-5	0.6635E-5	0.1105
85	0.6476E-5	0.6480E-5	0.1094
86	0.6327E-5	0.6330E-5	0.1084
87	0.6183E-5	0.6186E-5	0.1073
88	0.6043E-5	0.6047E-5	0.1063
89	0.5909E-5	0.5912E-5	0.1053
90	0.5778E-5	0.5781E-5	0.1043
91	0.5652E-5	0.5655E-5	0.1033
92	0.5531E-5	0.5533E-5	0.1023
93	0.5413E-5	0.5415E-5	0.1014
94	0.5298E-5	0.5301E-5	0.1005
95	0.5188E-5	0.5190E-5	0.9961E-1
96	0.5080E-5	0.5083E-5	0.9872E-1
97	0.4976E-5	0.4979E-5	0.9786E-1
98	0.4876E-5	0.4878E-5	0.9701E-1
99	0.4778E-5	0.4780E-5	0.9618E-1
100	0.4683E-5	0.4685E-5	0.9536E-1

Valores Críticos da Estatística D

($\alpha = 0.05$)

n	d	d_1	d_2
3	0.1445E-1	0.1466E-1	0.6034E+1
4	0.1096E-1	0.1081E-1	0.6364E+1
5	0.8832E-2	0.8911E-2	0.6619E+1
6	0.7401E-2	0.7456E-2	0.6827E+1
7	0.6371E-2	0.6412E-2	0.7002E+1
8	0.5935E-2	0.5625E-2	0.7154E+1
9	0.4986E-2	0.5011E-2	0.7287E+1
10	0.4499E-2	0.4519E-2	0.7406E+1
11	0.4098E-2	0.4115E-2	0.7514E+1
12	0.3764E-2	0.3778E-2	0.7612E+1
13	0.3480E-2	0.3492E-2	0.7702E+1
14	0.3236E-2	0.3247E-2	0.7786E+1
15	0.3024E-2	0.3034E-2	0.7863E+1
16	0.2839E-2	0.2847E-2	0.7936E+1
17	0.2675E-2	0.2682E-2	0.8004E+1
18	0.2529E-2	0.2535E-2	0.8068E+1
19	0.2398E-2	0.2404E-2	0.8128E+1
20	0.2280E-2	0.2285E-2	0.8186E+1
21	0.2173E-2	0.2178E-2	0.8241E+1
22	0.2076E-2	0.2081E-2	0.8293E+1
23	0.1987E-2	0.1991E-2	0.8342E+1
24	0.1906E-2	0.1910E-2	0.8390E+1
25	0.1831E-2	0.1834E-2	0.8435E+1
26	0.1762E-2	0.1765E-2	0.8479E+1
27	0.1697E-2	0.1700E-2	0.8521E+1
28	0.1638E-2	0.1640E-2	0.8562E+1
29	0.1582E-2	0.1584E-2	0.8601E+1
30	0.1530E-2	0.1532E-2	0.8639E+1
31	0.1481E-2	0.1484E-2	0.8675E+1
32	0.1436E-2	0.1438E-2	0.8711E+1
33	0.1393E-2	0.1395E-2	0.8745E+1
34	0.1352E-2	0.1354E-2	0.8778E+1
35	0.1314E-2	0.1316E-2	0.8810E+1
36	0.1278E-2	0.1280E-2	0.8841E+1
37	0.1244E-2	0.1246E-2	0.8872E+1
38	0.1212E-2	0.1213E-2	0.8902E+1
39	0.1181E-2	0.1183E-2	0.8931E+1
40	0.1152E-2	0.1154E-2	0.8959E+1
41	0.1125E-2	0.1126E-2	0.8986E+1
42	0.1098E-2	0.1099E-2	0.9013E+1
43	0.1073E-2	0.1074E-2	0.9039E+1
44	0.1049E-2	0.1050E-2	0.9064E+1
45	0.1026E-2	0.1027E-2	0.9089E+1
46	0.1004E-2	0.1005E-2	0.9114E+1
47	0.9827E-3	0.9837E-3	0.9138E+1
48	0.9625E-3	0.9634E-3	0.9161E+1
49	0.9431E-3	0.9440E-3	0.9184E+1
50	0.9245E-3	0.9253E-3	0.9206E+1

n	d	d_1	d_2
51	0.9066E-3	0.9074E-3	0.9228E+1
52	0.8894E-3	0.8902E-3	0.9250E+1
53	0.8728E-3	0.8736E-3	0.9271E+1
54	0.8568E-3	0.8576E-3	0.9291E+1
55	0.8415E-3	0.8422E-3	0.9312E+1
56	0.8266E-3	0.8273E-3	0.9332E+1
57	0.8123E-3	0.8129E-3	0.9351E+1
58	0.7984E-3	0.7991E-3	0.9370E+1
59	0.7851E-3	0.7857E-3	0.9389E+1
60	0.7721E-3	0.7727E-3	0.9408E+1
61	0.7596E-3	0.7602E-3	0.9426E+1
62	0.7475E-3	0.7481E-3	0.9444E+1
63	0.7358E-3	0.7364E-3	0.9462E+1
64	0.7244E-3	0.7250E-3	0.9479E+1
65	0.7134E-3	0.7139E-3	0.9496E+1
66	0.7028E-3	0.7032E-3	0.9513E+1
67	0.6924E-3	0.6929E-3	0.9530E+1
68	0.6832E-3	0.6828E-3	0.9546E+1
69	0.6725E-3	0.6730E-3	0.9562E+1
70	0.6630E-3	0.6635E-3	0.9578E+1
71	0.6582E-3	0.6542E-3	0.9594E+1
72	0.6448E-3	0.6453E-3	0.9609E+1
73	0.6361E-3	0.6365E-3	0.9624E+1
74	0.6276E-3	0.6280E-3	0.9639E+1
75	0.6193E-3	0.6197E-3	0.9654E+1
76	0.6113E-3	0.6117E-3	0.9669E+1
77	0.6034E-3	0.6038E-3	0.9683E+1
78	0.5958E-3	0.5961E-3	0.9698E+1
79	0.5883E-3	0.5887E-3	0.9712E+1
80	0.5810E-3	0.5814E-3	0.9725E+1
81	0.5740E-3	0.5743E-3	0.9739E+1
82	0.5670E-3	0.5674E-3	0.9753E+1
83	0.5603E-3	0.5606E-3	0.9766E+1
84	0.5537E-3	0.5540E-3	0.9779E+1
85	0.5472E-3	0.5475E-3	0.9792E+1
86	0.5409E-3	0.5412E-3	0.9805E+1
87	0.5348E-3	0.5351E-3	0.9818E+1
88	0.5288E-3	0.5291E-3	0.9830E+1
89	0.5230E-3	0.5232E-3	0.9843E+1
90	0.5172E-3	0.5174E-3	0.9855E+1
91	0.5115E-3	0.5118E-3	0.9867E+1
92	0.5060E-3	0.5063E-3	0.9879E+1
93	0.5006E-3	0.5009E-3	0.9891E+1
94	0.4954E-3	0.4956E-3	0.9903E+1
95	0.4902E-3	0.4905E-3	0.9915E+1
96	0.4852E-3	0.4854E-3	0.9926E+1
97	0.4802E-3	0.4804E-3	0.9938E+1
98	0.4754E-3	0.4756E-3	0.9949E+1
99	0.4706E-3	0.4708E-3	0.9960E+1
100	0.4660E-3	0.4662E-3	0.9971E+1

4.3 TABELAS DAS MEDIDAS DE "PERFORMANCE"

Apresentam-se a seguir as tabelas das medidas de "performance" das estatísticas obtidas no capítulo II.

P_1 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.1338	0.1243	0.1220	0.1257	0.4020E-1	0.1040	0.4650E-1	0.7041E-1
0.2	0.8819E-1	0.8027E-1	0.8203E-1	0.8565E-1	0.4020E-1	0.8836E-1	0.4455E-1	0.7108E-1
0.5	0.5970E-1	0.5480E-1	0.5716E-1	0.5733E-1	0.4030E-1	0.6202E-1	0.4193E-1	0.5876E-1
0.7	0.5417E-1	0.5124E-1	0.5242E-1	0.5213E-1	0.4158E-1	0.5390E-1	0.4236E-1	0.5298E-1
0.9	0.5108E-1	0.5011E-1	0.5027E-1	0.5020E-1	0.4609E-1	0.5040E-1	0.4631E-1	0.5031E-1
0.99	0.5010E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.4956E-1	0.5000E-1	0.4958E-1	0.5000E-1
1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1
1.01	0.4990E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5045E-1	0.5000E-1	0.5043E-1	0.5000E-1
1.1	0.4911E-1	0.5009E-1	0.5029E-1	0.5018E-1	0.5507E-1	0.5037E-1	0.5486E-1	0.5029E-1
1.5	0.4675E-1	0.5160E-1	0.5752E-1	0.5385E-1	0.8536E-1	0.5795E-1	0.8449E-1	0.5638E-1
2	0.4511E-1	0.5478E-1	0.7953E-1	0.6324E-1	0.1372	0.7706E-1	0.1357	0.7194E-1
5	0.4217E-1	0.7974E-1	0.2973	0.1673	0.4239	0.2482	0.4213	0.2187
10	0.4119E-1	0.1218	0.5362	0.3442	0.6470	0.4626	0.6449	0.4197

P_2 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.9750E-1	0.9598E-1	0.8526E-1	0.7560E-1	0.1226E-19	0.3818E-5	0.3222E-19	0.7213E-5
0.2	0.5000E-1	0.4950E-1	0.4358E-1	0.3874E-1	0.1107E-9	0.5138E-4	0.1492E-9	0.8230E-4
0.5	0.2031E-1	0.2018E-1	0.1767E-1	0.1598E-1	0.1042E-3	0.1244E-2	0.1082E-3	0.1508E-2
0.7	0.1455E-1	0.1447E-1	0.1273E-1	0.1206E-1	0.1431E-2	0.3577E-2	0.1447E-2	0.3923E-2
0.9	0.1133E-1	0.1127E-1	0.1049E-1	0.1059E-1	0.6132E-2	0.7461E-2	0.6141E-2	0.7652E-2
0.99	0.1031E-1	0.1026E-1	0.1021E-1	0.1043E-1	0.9744E-2	0.9728E-2	0.9734E-2	0.9751E-2
1	0.1021E-1	0.1015E-1	0.1021E-1	0.1043E-1	0.1021E-1	0.1000E-1	0.1091E-1	0.1000E-1
1.01	0.1011E-1	0.1005E-1	0.1021E-1	0.1043E-1	0.1068E-1	0.1028E-1	0.1066E-1	0.1025E-1
1.1	0.9283E-2	0.9236E-2	0.1050E-1	0.1058E-1	0.1548E-1	0.1293E-1	0.1544E-1	0.1265E-1
1.5	0.6816E-2	0.6784E-2	0.1804E-1	0.1366E-1	0.4705E-1	0.2814E-1	0.4676E-1	0.2601E-1
2	0.5116E-2	0.5093E-2	0.4097E-1	0.2200E-1	0.1010	0.5331E-1	0.1003	0.4753E-1
5	0.2050E-2	0.2041E-2	0.2679	0.1238	0.3997	0.2375	0.3980	0.2075
10	0.1025E-2	0.1021E-2	0.5167	0.3057	0.6322	0.4570	0.6307	0.4139

P_3 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.956E-1	0.946E-1	0.836E-1	0.730E-1	0.118E-19	0.382E-5	0.311E-19	0.721E-5
0.2	0.490E-1	0.488E-1	0.427E-1	0.374E-1	0.107E-9	0.514E-4	0.145E-9	0.823E-4
0.5	0.199E-1	0.199E-1	0.173E-1	0.154E-1	0.101E-3	0.124E-2	0.105E-3	0.151E-2
0.7	0.143E-1	0.142E-1	0.125E-1	0.116E-1	0.140E-2	0.358E-2	0.142E-2	0.392E-2
0.9	0.111E-1	0.111E-1	0.103E-1	0.102E-1	0.600E-2	0.746E-2	0.602E-2	0.765E-2
0.99	0.101E-1	0.101E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.955E-2	0.973E-2	0.955E-2	0.975E-2
1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1
1.01	0.990E-2	0.990E-2	0.100E-1	0.100E-1	0.105E-1	0.103E-1	0.105E-1	0.103E-1
1.1	0.910E-2	0.910E-2	0.103E-1	0.101E-1	0.152E-1	0.129E-1	0.152E-1	0.127E-1
1.5	0.668E-2	0.668E-2	0.177E-1	0.130E-1	0.463E-1	0.281E-1	0.460E-1	0.260E-1
2	0.501E-2	0.502E-2	0.403E-1	0.208E-1	0.997E-1	0.533E-1	0.991E-1	0.475E-1
5	0.201E-2	0.201E-2	0.266	0.118	0.397	0.238	0.395	0.208
10	0.100E-2	0.101E-2	0.514	0.294	0.630	0.457	0.628	0.414

P_4 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.9358E-1	0.9308E-1	0.8183E-1	0.7070E-1	0.1177E-19	0.3818E-5	0.3100E-19	0.7213E-5
0.2	0.4799E-1	0.4800E-1	0.4183E-1	0.3622E-1	0.1063E-9	0.5138E-4	0.1436E-9	0.8230E-4
0.5	0.1949E-1	0.1957E-1	0.1696E-1	0.1492E-1	0.9998E-4	0.1244E-2	0.1041E-3	0.1508E-2
0.7	0.1396E-1	0.1403E-1	0.1222E-1	0.11232-1	0.1373E-2	0.3577E-2	0.1393E-2	0.3923E-2
0.9	0.1088E-1	0.1093E-1	0.1007E-1	0.9781E-2	0.5886E-2	0.7461E-2	0.5909E-2	0.7652E-2
0.99	0.9894E-2	0.9945E-2	0.9799E-2	0.9588E-2	0.9353E-2	0.9728E-2	0.9367E-2	0.9751E-2
1	0.9796E-2	0.9847E-2	0.9796E-2	0.9581E-2	0.9796E-2	0.1000E-1	0.9808E-2	0.1000E-1
1.01	0.9699E-2	0.9750E-2	0.9799E-2	0.9577E-2	0.1025E-1	0.1028E-1	0.1026E-1	0.1025E-1
1.1	0.8909E-2	0.8957E-2	0.1008E-1	0.9656E-2	0.1486E-1	0.1293E-1	0.1485E-1	0.1265E-1
1.5	0.6542E-2	0.6578E-2	0.1732E-1	0.1216E-1	0.4516E-1	0.2814E-1	0.4499E-1	0.2601E-1
2	0.4911E-2	0.4939E-2	0.3933E-1	0.1920E-1	0.9696E-1	0.5331E-1	0.9655E-1	0.4753E-1
5	0.1967E-2	0.1979E-2	0.2571	0.1040	0.3837	0.2375	0.3830	0.2075
10	0.9841E-3	0.9903E-3	0.4960	0.2472	0.6068	0.4570	0.6069	0.4139

P_5 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.134	0.132	0.127	0.125	0.118E-16	0.382E-2	0.311E-16	0.722E-2
0.2	0.882E-1	0.878E-1	0.887E-1	0.877E-1	0.135E-7	0.647E-2	0.182E-7	0.104E-1
0.5	0.597E-1	0.596E-1	0.646E-1	0.607E-1	0.152E-2	0.187E-1	0.158E-2	0.226E-1
0.7	0.542E-1	0.541E-1	0.568E-1	0.536E-1	0.116E-1	0.298E-1	0.118E-1	0.327E-1
0.9	0.511E-1	0.511E-1	0.509E-1	0.503E-1	0.345E-1	0.429E-1	0.346E-1	0.440E-1
0.99	0.501E-1	0.501E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.484E-1	0.493E-1	0.484E-1	0.494E-1
1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1
1.01	0.499E-1	0.499E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.517E-1	0.507E-1	0.517E-1	0.506E-1
1.1	0.491E-1	0.491E-1	0.511E-1	0.506E-1	0.674E-1	0.574E-1	0.673E-1	0.562E-1
1.5	0.467E-1	0.468E-1	0.780E-1	0.611E-1	0.147	0.892E-1	0.146	0.824E-1
2	0.451E-1	0.451E-1	0.145	0.862E-1	0.245	0.131	0.244	0.117
5	0.422E-1	0.422E-1	0.497	0.278	0.587	0.351	0.585	0.307
10	0.412E-1	0.412E-1	0.716	0.493	0.771	0.559	0.769	0.506

P_6 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.714	0.714	0.659	0.582	0.999E-3	0.999E-3	0.999E-3	0.999E-3
0.2	0.556	0.556	0.481	0.426	0.794E-2	0.794E-2	0.794E-2	0.794E-2
0.5	0.333	0.333	0.268	0.254	0.667E-1	0.667E-1	0.667E-1	0.667E-1
0.7	0.263	0.263	0.219	0.217	0.120	0.120	0.120	0.120
0.9	0.217	0.217	0.202	0.202	0.174	0.174	0.174	0.174
0.99	0.202	0.202	0.200	0.200	0.197	0.197	0.197	0.197
1	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.01	0.198	0.198	0.200	0.200	0.203	0.203	0.203	0.203
1.1	0.185	0.185	0.201	0.200	0.225	0.225	0.225	0.225
1.5	0.143	0.143	0.227	0.212	0.316	0.316	0.316	0.316
2	0.111	0.111	0.278	0.242	0.406	0.406	0.406	0.406
5	0.476E-1	0.476E-1	0.534	0.424	0.676	0.676	0.676	0.676
10	0.244E-1	0.244E-1	0.719	0.597	0.817	0.817	0.817	0.817

P_7 (n=5)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.382E-1	0.298E-1	0.385E-1	0.528E-1	0.402E-1	0.104	0.465E-1	0.704E-1
0.2	0.392E-1	0.315E-1	0.393E-1	0.483E-1	0.402E-1	0.883E-1	0.446E-1	0.710E-1
0.5	0.398E-1	0.349E-1	0.398E-1	0.419E-1	0.402E-1	0.608E-1	0.418E-1	0.572E-1
0.7	0.396E-1	0.370E-1	0.399E-1	0.405E-1	0.402E-1	0.503E-1	0.409E-1	0.491E-1
0.9	0.400E-1	0.390E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.401E-1	0.429E-1	0.403E-1	0.427E-1
0.99	0.401E-1	0.399E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.403E-1	0.400E-1	0.403E-1
1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1
1.01	0.400E-1	0.401E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.400E-1	0.397E-1	0.400E-1	0.398E-1
1.1	0.400E-1	0.410E-1	0.400E-1	0.401E-1	0.399E-1	0.374E-1	0.397E-1	0.376E-1
1.5	0.401E-1	0.449E-1	0.398E-1	0.409E-1	0.391E-1	0.298E-1	0.384E-1	0.304E-1
2	0.401E-1	0.498E-1	0.392E-1	0.424E-1	0.375E-1	0.238E-1	0.366E-1	0.244E-1
5	0.402E-1	0.777E-1	0.315E-1	0.493E-1	0.268E-1	0.107E-1	0.258E-1	0.112E-1
10	0.402E-1	0.121	0.217E-1	0.497E-1	0.171E-1	0.559E-2	0.164E-1	0.584E-2

P_1 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.9286E-1	0.8844E-1	0.8731E-1	0.8820E-1	0.4511E-1	0.7506E-1	0.4743E-1	0.6323E-1
0.2	0.6929E-1	0.6539E-1	0.6645E-1	0.6759E-1	0.4511E-1	0.6987E-1	0.4651E-1	0.6409E-1
0.5	0.5486E-1	0.5242E-1	0.5371E-1	0.5393E-1	0.4514E-1	0.5806E-1	0.4558E-1	0.5706E-1
0.7	0.5209E-1	0.5062E-1	0.5128E-1	0.5125E-1	0.4562E-1	0.5297E-1	0.4583E-1	0.5270E-1
0.9	0.5054E-1	0.5005E-1	0.5015E-1	0.5013E-1	0.4783E-1	0.5033E-1	0.4789E-1	0.5031E-1
0.99	0.5005E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.4975E-1	0.5000E-1	0.4975E-1	0.5000E-1
1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1
1.01	0.4995E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5026E-1	0.5000E-1	0.5026E-1	0.5000E-1
1.1	0.4956E-1	0.5004E-1	0.5017E-1	0.5013E-1	0.5301E-1	0.5033E-1	0.5296E-1	0.5031E-1
1.5	0.4837E-1	0.5081E-1	0.5484E-1	0.5316E-1	0.7347E-1	0.5802E-1	0.7327E-1	0.5755E-1
2	0.4756E-1	0.5241E-1	0.7080E-1	0.6249E-1	0.1134	0.7929E-1	0.1131	0.7780E-1
5	0.4609E-1	0.6523E-1	0.2631	0.1899	0.3776	0.2785	0.3770	0.2714
10	0.4560E-1	0.8762E-1	0.5008	0.3975	0.6086	0.5086	0.6081	0.5002

P_2 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.5000E-1	0.4975E-1	0.4418E-1	0.4181E-1	0.1229E-22	0.2539E-8	0.1665E-22	0.4243E-8
0.2	0.2532E-1	0.2523E-1	0.2234E-1	0.2115E-1	0.3505E-11	0.5045E-6	0.3811E-11	0.6946E-6
0.5	0.1021E-1	0.1018E-1	0.8998E-2	0.8539E-2	0.2618E-4	0.1821E-3	0.2642E-4	0.2002E-3
0.7	0.7301E-2	0.7281E-2	0.6460E-2	0.6228E-2	0.5334E-3	0.1039E-2	0.5349E-3	0.1081E-2
0.9	0.5683E-2	0.5668E-2	0.5275E-2	0.5259E-2	0.2847E-2	0.3239E-2	0.2848E-2	0.3270E-2
0.99	0.5168E-2	0.5155E-2	0.5118E-2	0.5144E-2	0.4851E-2	0.4802E-2	0.4850E-2	0.4806E-2
1	0.5116E-2	0.5103E-2	0.5116E-2	0.5143E-2	0.5116E-2	0.5000E-2	0.5115E-2	0.5000E-2
1.01	0.5066E-2	0.5053E-2	0.5118E-2	0.5144E-2	0.5391E-2	0.5203E-2	0.5389E-2	0.5198E-2
1.1	0.4652E-2	0.4640E-2	0.5291E-2	0.5259E-2	0.8265E-2	0.7250E-2	0.8259E-2	0.7197E-2
1.5	0.3414E-2	0.3405E-2	0.1018E-1	0.8107E-2	0.2969E-1	0.2121E-1	0.2965E-1	0.2070E-1
2	0.2561E-2	0.2555E-2	0.2690E-1	0.1721E-1	0.7153E-1	0.4814E-1	0.7142E-1	0.4667E-1
5	0.1025E-2	0.1023E-2	0.2283	0.1478	0.3482	0.2623	0.3478	0.2554
10	0.5128E-3	0.5116E-3	0.4773	0.3647	0.5901	0.4996	0.5897	0.4913

P_3 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.489E-1	0.488E-1	0.432E-1	0.408E-1	0.118E-22	0.254E-8	0.160E-22	0.424E-8
0.2	0.247E-1	0.247E-1	0.218E-1	0.206E-1	0.337E-11	0.504E-6	0.367E-11	0.695E-6
0.5	0.997E-2	0.997E-2	0.880E-2	0.832E-2	0.254E-4	0.182E-3	0.256E-4	0.200E-3
0.7	0.714E-2	0.713E-2	0.631E-2	0.607E-2	0.519E-3	0.104E-2	0.521E-3	0.108E-2
0.9	0.555E-2	0.555E-2	0.516E-2	0.512E-2	0.278E-2	0.324E-2	0.278E-2	0.327E-2
0.99	0.505E-2	0.505E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.474E-2	0.480E-2	0.474E-2	0.481E-2
1	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.500E-2
1.01	0.495E-2	0.495E-2	0.500E-2	0.500E-2	0.527E-2	0.520E-2	0.527E-2	0.520E-2
1.1	0.455E-2	0.455E-2	0.517E-2	0.511E-2	0.809E-2	0.725E-2	0.808E-2	0.720E-2
1.5	0.334E-2	0.334E-2	0.997E-2	0.784E-2	0.292E-1	0.212E-1	0.291E-1	0.207E-1
2	0.250E-2	0.250E-2	0.264E-1	0.166E-1	0.704E-1	0.481E-1	0.703E-1	0.467E-1
5	0.100E-2	0.100E-2	0.226	0.144	0.346	0.262	0.345	0.255
10	0.501E-3	0.501E-3	0.475	0.359	0.588	0.500	0.587	0.491

P_4 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.4774E-1	0.4775E-1	0.4219E-1	0.3973E-1	0.1173E-22	0.2539E-8	0.1590E-22	0.4243E-8
0.2	0.2418E-1	0.2421E-1	0.2133E-1	0.2010E-1	0.3347E-11	0.5045E-6	0.3641E-11	0.6946E-6
0.5	0.9746E-2	0.9768E-2	0.8592E-2	0.8114E-2	0.2499E-4	0.1821E-3	0.2525E-4	0.2002E-3
0.7	0.6971E-2	0.6989E-2	0.6169E-2	0.5914E-2	0.5094E-3	0.1039E-2	0.5111E-3	0.1081E-2
0.9	0.5427E-2	0.5440E-2	0.5037E-2	0.4982E-2	0.2719E-2	0.3239E-2	0.2721E-2	0.3270E-2
0.99	0.4935E-2	0.4947E-2	0.4887E-2	0.4862E-2	0.4632E-2	0.4802E-2	0.4633E-2	0.4806E-2
1	0.4885E-2	0.4898E-2	0.4885E-2	0.4860E-2	0.4885E-2	0.5000E-2	0.4887E-2	0.5000E-2
1.01	0.4837E-2	0.4850E-2	0.4887E-2	0.4860E-2	0.5147E-2	0.5203E-2	0.5149E-2	0.5198E-2
1.1	0.4442E-2	0.4454E-2	0.5052E-2	0.4953E-2	0.7892E-2	0.7250E-2	0.7891E-2	0.7197E-2
1.5	0.3260E-2	0.3268E-2	0.9721E-2	0.7528E-2	0.2835E-1	0.2121E-1	0.2833E-1	0.2070E-1
2	0.2446E-2	0.2452E-2	0.2569E-1	0.1583E-1	0.6830E-1	0.4814E-1	0.6824E-1	0.4667E-1
5	0.9791E-3	0.9818E-3	0.2180	0.1336	0.3325	0.2623	0.3323	0.2554
10	0.4897E-3	0.4911E-3	0.4557	0.3227	0.5634	0.4996	0.5635	0.4913

P_5 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.929E-1	0.926E-1	0.921E-1	0.918E-1	0.109E-17	0.235E-3	0.148E-17	0.392E-3
0.2	0.693E-1	0.692E-1	0.722E-1	0.718E-1	0.675E-8	0.101E-2	0.735E-8	0.139E-2
0.5	0.549E-1	0.548E-1	0.599E-1	0.584E-1	0.140E-2	0.100E-1	0.141E-2	0.110E-1
0.7	0.521E-1	0.521E-1	0.554E-1	0.537E-1	0.113E-1	0.227E-1	0.114E-1	0.236E-1
0.9	0.505E-1	0.505E-1	0.509E-1	0.504E-1	0.343E-1	0.400E-1	0.343E-1	0.404E-1
0.99	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.483E-1	0.490E-1	0.483E-1	0.490E-1
1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1
1.01	0.500E-1	0.500E-1	0.499E-1	0.500E-1	0.517E-1	0.510E-1	0.517E-1	0.510E-1
1.1	0.496E-1	0.496E-1	0.511E-1	0.508E-1	0.677E-1	0.607E-1	0.677E-1	0.603E-1
1.5	0.484E-1	0.484E-1	0.814E-1	0.679E-1	0.148	0.108	0.148	0.105
2	0.476E-1	0.476E-1	0.157	0.111	0.248	0.170	0.248	0.164
5	0.461E-1	0.461E-1	0.519	0.388	0.592	0.449	0.591	0.437
10	0.456E-1	0.456E-1	0.731	0.617	0.774	0.658	0.774	0.647

P_6 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.526	0.526	0.469	0.444	0.108E-4	0.108E-4	0.108E-4	0.108E-4
0.2	0.357	0.357	0.302	0.287	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3
0.5	0.182	0.182	0.147	0.143	0.182E-1	0.182E-1	0.182E-1	0.182E-1
0.7	0.137	0.137	0.114	0.113	0.458E-1	0.458E-1	0.458E-1	0.458E-1
0.9	0.110	0.110	0.101	0.102	0.810E-1	0.810E-1	0.810E-1	0.810E-1
0.99	0.101	0.101	0.100	0.100	0.981E-1	0.981E-1	0.981E-1	0.981E-1
1	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100
1.01	0.991E-1	0.991E-1	0.100	0.100	0.102	0.102	0.102	0.102
1.1	0.917E-1	0.917E-1	0.101	0.101	0.119	0.119	0.119	0.119
1.5	0.690E-1	0.690E-1	0.122	0.115	0.197	0.197	0.197	0.197
2	0.526E-1	0.526E-1	0.168	0.150	0.284	0.284	0.284	0.284
5	0.217E-1	0.217E-1	0.436	0.372	0.584	0.584	0.584	0.584
10	0.110E-1	0.110E-1	0.650	0.582	0.759	0.759	0.759	0.759

P_7 (n=10)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.440E-1	0.397E-1	0.441E-1	0.474E-1	0.451E-1	0.751E-1	0.474E-1	0.632E-1
0.2	0.446E-1	0.407E-1	0.446E-1	0.470E-1	0.451E-1	0.699E-1	0.465E-1	0.641E-1
0.5	0.449E-1	0.425E-1	0.449E-1	0.456E-1	0.451E-1	0.579E-1	0.456E-1	0.569E-1
0.7	0.450E-1	0.435E-1	0.450E-1	0.452E-1	0.451E-1	0.519E-1	0.453E-1	0.516E-1
0.9	0.450E-1	0.445E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.451E-1	0.471E-1	0.451E-1	0.470E-1
0.99	0.445E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.445E-1	0.450E-1	0.452E-1	0.450E-1	0.452E-1
1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1
1.01	0.450E-1	0.451E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.448E-1	0.450E-1	0.448E-1
1.1	0.450E-1	0.455E-1	0.450E-1	0.450E-1	0.449E-1	0.431E-1	0.449E-1	0.431E-1
1.5	0.450E-1	0.475E-1	0.449E-1	0.453E-1	0.443E-1	0.368E-1	0.442E-1	0.369E-1
2	0.451E-1	0.499E-1	0.444E-1	0.459E-1	0.430E-1	0.311E-1	0.427E-1	0.311E-1
5	0.451E-1	0.642E-1	0.368E-1	0.455E-1	0.321E-1	0.162E-1	0.318E-1	0.160E-1
10	0.451E-1	0.871E-1	0.259E-1	0.384E-1	0.209E-1	0.899E-2	0.208E-1	0.885E-2

P_1 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.6451E-1	0.6305E-1	0.6285E-1	0.6296E-1	0.4837E-1	0.5875E-1	0.4875E-1	0.5671E-1
0.2	0.5647E-1	0.5518E-1	0.5564E-1	0.5579E-1	0.4837E-1	0.5738E-1	0.4857E-1	0.5649E-1
0.5	0.5162E-1	0.5081E-1	0.5129E-1	0.5134E-1	0.4838E-1	0.5363E-1	0.4843E-1	0.5349E-1
0.7	0.5070E-1	0.5021E-1	0.5046E-1	0.5046E-1	0.4848E-1	0.5153E-1	0.4850E-1	0.5150E-1
0.9	0.5018E-1	0.5002E-1	0.5006E-1	0.5005E-1	0.4918E-1	0.5020E-1	0.4918E-1	0.5019E-1
0.99	0.5002E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.4990E-1	0.5000E-1	0.4990E-1	0.5000E-1
1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1
1.01	0.4998E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5011E-1	0.5000E-1	0.5011E-1	0.5000E-1
1.1	0.4985E-1	0.5001E-1	0.5007E-1	0.5006E-1	0.5128E-1	0.5022E-1	0.5127E-1	0.5021E-1
1.5	0.4946E-1	0.5027E-1	0.5235E-1	0.5192E-1	0.6197E-1	0.5602E-1	0.6195E-1	0.5595E-1
2	0.4919E-1	0.5081E-1	0.6177E-1	0.5926E-1	0.8771E-1	0.7446E-1	0.8768E-1	0.7426E-1
5	0.4870E-1	0.5516E-1	0.2178	0.1904	0.3144	0.2734	0.3144	0.2725
10	0.4854E-1	0.6294E-1	0.4497	0.4099	0.5516	0.5094	0.5515	0.5083

P_2 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.1695E-1	0.1693E-1	0.1521E-1	0.1495E-1	0.2117E-27	0.2206E-15	0.2209E-27	0.2922E-15
0.2	0.8512E-2	0.8504E-2	0.7633E-2	0.7504E-2	0.1455E-13	0.7607E-10	0.1470E-13	0.8630E-10
0.5	0.3414E-2	0.3411E-2	0.3060E-2	0.3009E-2	0.2918E-5	0.8912E-5	0.2921E-5	0.9120E-5
0.7	0.2440E-2	0.2437E-2	0.2191E-2	0.2160E-2	0.1113E-3	0.1580E-3	0.1113E-3	0.1592E-3
0.9	0.1898E-2	0.1896E-2	0.1769E-2	0.1764E-2	0.8415E-3	0.8906E-3	0.8416E-3	0.8920E-3
0.99	0.1726E-2	0.1724E-2	0.1709E-2	0.1710E-2	0.1602E-2	0.1579E-2	0.1602E-2	0.1579E-2
1	0.1708E-2	0.1707E-2	0.1708E-2	0.1710E-2	0.1708E-2	0.1673E-2	0.1708E-2	0.1673E-2
1.01	0.1691E-2	0.1690E-2	0.1709E-2	0.1710E-2	0.1820E-2	0.1771E-2	0.1820E-2	0.1770E-2
1.1	0.1553E-2	0.1552E-2	0.1781E-2	0.1771E-2	0.3049E-2	0.2832E-2	0.3049E-2	0.2828E-2
1.5	0.1139E-2	0.1138E-2	0.4175E-2	0.3659E-2	0.1429E-1	0.1210E-1	0.1429E-1	0.1205E-1
2	0.8545E-3	0.8538E-3	0.1407E-1	0.1123E-1	0.4133E-1	0.3431E-1	0.4133E-1	0.3415E-1
5	0.3419E-3	0.3416E-3	0.1780	0.1484	0.2796	0.2475	0.2796	0.2467
10	0.1710E-3	0.1708E-3	0.4217	0.3790	0.5288	0.4933	0.5287	0.4924

P_3 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.165E-1	0.165E-1	0.148E-1	0.146E-1	0.202E-27	0.219E-15	0.211E-27	0.290E-15
0.2	0.831E-2	0.830E-2	0.745E-2	0.732E-2	0.140E-13	0.756E-10	0.141E-13	0.858E-10
0.5	0.333E-2	0.333E-2	0.299E-2	0.293E-2	0.282E-5	0.887E-5	0.283E-5	0.908E-5
0.7	0.238E-2	0.238E-2	0.214E-2	0.211E-2	0.108E-3	0.157E-3	0.108E-3	0.159E-3
0.9	0.185E-2	0.185E-2	0.173E-2	0.172E-2	0.820E-3	0.887E-3	0.820E-3	0.889E-3
0.99	0.168E-2	0.168E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.156E-2	0.157E-2	0.156E-2	0.157E-2
1	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.167E-2
1.01	0.165E-2	0.165E-2	0.167E-2	0.167E-2	0.178E-2	0.176E-2	0.178E-2	0.176E-2
1.1	0.152E-2	0.152E-2	0.174E-2	0.173E-2	0.298E-2	0.282E-2	0.298E-2	0.282E-2
1.5	0.111E-2	0.111E-2	0.407E-2	0.357E-2	0.140E-1	0.121E-1	0.140E-1	0.120E-1
2	0.834E-3	0.834E-3	0.138E-1	0.110E-1	0.407E-1	0.342E-1	0.407E-1	0.341E-1
5	0.334E-3	0.334E-3	0.176	0.146	0.277	0.247	0.277	0.246
10	0.167E-3	0.167E-3	0.419	0.376	0.526	0.493	0.526	0.492

P_4 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.1613E-1	0.1614E-1	0.1447E-1	0.1422E-1	0.2014E-27	0.2185E-15	0.2102E-27	0.2895E-15
0.2	0.8101E-2	0.8107E-2	0.7263E-2	0.7137E-2	0.1385E-13	0.7536E-10	0.1399E-13	0.8554E-10
0.5	0.3249E-2	0.3251E-2	0.2912E-2	0.2862E-2	0.2777E-5	0.8834E-5	0.2780E-5	0.9046E-5
0.7	0.2322E-2	0.2324E-2	0.2085E-2	0.2054E-2	0.1059E-3	0.1566E-3	0.1060E-3	0.1580E-3
0.9	0.1806E-2	0.1808E-2	0.1683E-2	0.1677E-2	0.8008E-3	0.8835E-3	0.8009E-3	0.8853E-3
0.99	0.1642E-2	0.1643E-2	0.1626E-2	0.1625E-2	0.1524E-2	0.1567E-2	0.1524E-2	0.1567E-2
1	0.1626E-2	0.1627E-2	0.1626E-2	0.1624E-2	0.1626E-2	0.1660E-2	0.1626E-2	0.1660E-2
1.01	0.1610E-2	0.1611E-2	0.1626E-2	0.1625E-2	0.1732E-2	0.1757E-2	0.1732E-2	0.1757E-2
1.1	0.1478E-2	0.1479E-2	0.1694E-2	0.1681E-2	0.2901E-2	0.2810E-2	0.2901E-2	0.2808E-2
1.5	0.1084E-2	0.1085E-2	0.3973E-2	0.3457E-2	0.1360E-1	0.1201E-1	0.1360E-1	0.1197E-1
2	0.8132E-3	0.8139E-3	0.1339E-1	0.1058E-1	0.3933E-1	0.3409E-1	0.3933E-1	0.3394E-1
5	0.3254E-3	0.3256E-3	0.1694	0.1391	0.2661	0.2464	0.2661	0.2457
10	0.1627E-3	0.1628E-3	0.4013	0.3526	0.5032	0.4919	0.5032	0.4911

P_5 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.645E-1	0.645E-1	0.667E-1	0.667E-1	0.129E-18	0.139E-6	0.134E-18	0.185E-6
0.2	0.565E-1	0.565E-1	0.598E-1	0.597E-1	0.388E-8	0.210E-4	0.393E-8	0.239E-4
0.5	0.516E-1	0.516E-1	0.556E-1	0.553E-1	0.131E-2	0.412E-2	0.131E-2	0.422E-2
0.7	0.507E-1	0.507E-1	0.538E-1	0.533E-1	0.111E-1	0.162E-1	0.111E-1	0.163E-1
0.9	0.502E-1	0.502E-1	0.508E-1	0.506E-1	0.342E-1	0.370E-1	0.342E-1	0.370E-1
0.99	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.483E-1	0.486E-1	0.483E-1	0.486E-1
1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1
1.01	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.517E-1	0.514E-1	0.517E-1	0.514E-1
1.1	0.499E-1	0.499E-1	0.511E-1	0.510E-1	0.679E-1	0.643E-1	0.679E-1	0.642E-1
1.5	0.495E-1	0.495E-1	0.868E-1	0.789E-1	0.149	0.129	0.149	0.128
2	0.492E-1	0.492E-1	0.174	0.149	0.250	0.211	0.250	0.210
5	0.487E-1	0.487E-1	0.540	0.486	0.595	0.530	0.595	0.528
10	0.485E-1	0.485E-1	0.744	0.701	0.776	0.727	0.776	0.726

P_6 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.256	0.256	0.222	0.219	0.157E-8	0.157E-8	0.157E-8	0.157E-8
0.2	0.147	0.147	0.125	0.123	0.359E-5	0.359E-5	0.359E-5	0.359E-5
0.5	0.645E-1	0.645E-1	0.537E-1	0.531E-1	0.215E-2	0.215E-2	0.215E-2	0.215E-2
0.7	0.470E-1	0.470E-1	0.398E-1	0.395E-1	0.972E-1	0.972E-2	0.972E-2	0.972E-2
0.9	0.369E-1	0.369E-1	0.340E-1	0.340E-1	0.240E-1	0.240E-1	0.240E-1	0.240E-1
0.99	0.337E-1	0.337E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.323E-1	0.323E-1	0.323E-1	0.323E-1
1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.333E-1
1.01	0.330E-1	0.330E-1	0.333E-1	0.333E-1	0.343E-1	0.343E-1	0.343E-1	0.343E-1
1.1	0.304E-1	0.304E-1	0.339E-1	0.338E-1	0.439E-1	0.439E-1	0.439E-1	0.439E-1
1.5	0.225E-1	0.225E-1	0.469E-1	0.452E-1	0.938E-1	0.938E-1	0.938E-1	0.938E-1
2	0.170E-1	0.170E-1	0.794E-1	0.739E-1	0.162	0.162	0.162	0.162
5	0.685E-2	0.685E-2	0.326	0.302	0.466	0.466	0.466	0.466
10	0.344E-2	0.344E-2	0.564	0.536	0.678	0.678	0.678	0.678

P_7 (n=30)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.480E-1	0.465E-1	0.480E-1	0.484E-1	0.484E-1	0.587E-1	0.487E-1	0.567E-1
0.2	0.482E-1	0.469E-1	0.482E-1	0.485E-1	0.484E-1	0.574E-1	0.486E-1	0.565E-1
0.5	0.483E-1	0.475E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.484E-1	0.536E-1	0.484E-1	0.535E-1
0.7	0.483E-1	0.478E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.484E-1	0.514E-1	0.484E-1	0.513E-1
0.9	0.483E-1	0.482E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.493E-1	0.484E-1	0.493E-1
0.99	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.483E-1	0.484E-1
1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1
1.01	0.483E-1	0.484E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.482E-1	0.483E-1	0.482E-1
1.1	0.483E-1	0.485E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.483E-1	0.474E-1	0.483E-1	0.474E-1
1.5	0.484E-1	0.492E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.480E-1	0.440E-1	0.479E-1	0.439E-1
2	0.484E-1	0.500E-1	0.480E-1	0.483E-1	0.471E-1	0.402E-1	0.470E-1	0.402E-1
5	0.484E-1	0.548E-1	0.416E-1	0.439E-1	0.371E-1	0.263E-1	0.371E-1	0.261E-1
10	0.484E-1	0.628E-1	0.304E-1	0.338E-1	0.252E-1	0.164E-1	0.251E-1	0.163E-1

P_1 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.5438E-1	0.5394E-1	0.5393E-1	0.5395E-1	0.4951E-1	0.5297E-1	0.4955E-1	0.5273E-1
0.2	0.5195E-1	0.5156E-1	0.5173E-1	0.5174E-1	0.4951E-1	0.5257E-1	0.4953E-1	0.5246E-1
0.5	0.5049E-1	0.5024E-1	0.5040E-1	0.5040E-1	0.4951E-1	0.5138E-1	0.4952E-1	0.5136E-1
0.7	0.5021E-1	0.5006E-1	0.5015E-1	0.5015E-1	0.4953E-1	0.5063E-1	0.4953E-1	0.5063E-1
0.9	0.5005E-1	0.5001E-1	0.5002E-1	0.5002E-1	0.4972E-1	0.5009E-1	0.4972E-1	0.5009E-1
0.99	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.4996E-1	0.5000E-1	0.4996E-1	0.5000E-1
1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1
1.01	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5004E-1	0.5000E-1	0.5004E-1	0.5000E-1
1.1	0.5000E-1	0.5000E-1	0.5003E-1	0.5002E-1	0.5048E-1	0.5011E-1	0.5048E-1	0.5011E-1
1.5	0.4984E-1	0.5008E-1	0.5104E-1	0.5096E-1	0.5560E-1	0.5358E-1	0.5560E-1	0.5357E-1
2	0.4976E-1	0.5024E-1	0.5623E-1	0.5564E-1	0.7104E-1	0.6656E-1	0.7103E-1	0.6654E-1
5	0.4961E-1	0.5156E-1	0.1790	0.1702	0.2584	0.2432	0.2584	0.2431
10	0.4956E-1	0.5393E-1	0.4002	0.3863	0.4951	0.4785	0.4951	0.4784

P_2 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.5116E-2	0.5115E-2	0.4651E-2	0.4628E-2	0.1257E-32	0.6464E-25	0.1263E-32	0.7071E-25
0.2	0.2561E-2	0.2561E-2	0.2328E-2	0.2317E-2	0.3546E-16	0.3858E-14	0.3549E-16	0.3971E-14
0.5	0.1025E-2	0.1025E-2	0.9319E-3	0.9273E-3	0.2630E-6	0.4408E-6	0.2630E-6	0.4424E-6
0.7	0.7325E-3	0.7323E-3	0.6664E-3	0.6634E-3	0.1995E-4	0.2325E-4	0.1995E-4	0.2327E-4
0.9	0.5698E-3	0.5696E-3	0.5333E-3	0.5326E-3	0.2210E-3	0.2258E-3	0.2210E-3	0.2259E-3
0.99	0.5180E-3	0.5178E-3	0.5130E-3	0.5131E-3	0.4750E-3	0.4707E-3	0.4750E-3	0.4707E-3
1	0.5128E-3	0.5127E-3	0.5128E-3	0.5129E-3	0.5128E-3	0.5067E-3	0.5128E-3	0.5067E-3
1.01	0.5077E-3	0.5076E-3	0.5130E-3	0.5131E-3	0.5527E-3	0.5448E-3	0.5527E-3	0.5447E-3
1.1	0.4662E-3	0.4661E-3	0.5394E-3	0.5379E-3	0.1021E-2	0.9866E-3	0.1021E-2	0.9863E-3
1.5	0.3419E-3	0.3418E-3	0.1608E-2	0.1512E-2	0.6407E-2	0.5962E-2	0.6407E-2	0.5959E-2
2	0.2564E-3	0.2564E-3	0.7069E-2	0.6421E-2	0.2265E-1	0.2093E-1	0.2264E-1	0.2092E-1
5	0.1026E-3	0.1026E-3	0.1362	0.1269	0.2198	0.2091	0.2198	0.2091
10	0.5129E-4	0.5128E-4	0.3690	0.3542	0.4688	0.4560	0.4688	0.4558

P_3 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.499E-2	0.499E-2	0.454E-2	0.451E-2	0.120E-32	0.631E-25	0.121E-32	0.690E-25
0.2	0.250E-2	0.250E-2	0.227E-2	0.226E-2	0.340E-16	0.377E-14	0.340E-16	0.388E-14
0.5	0.100E-2	0.100E-2	0.909E-3	0.904E-3	0.254E-6	0.433E-6	0.254E-6	0.435E-6
0.7	0.714E-3	0.714E-3	0.650E-3	0.647E-3	0.194E-4	0.229E-4	0.194E-4	0.229E-4
0.9	0.556E-3	0.556E-3	0.520E-3	0.519E-3	0.215E-3	0.223E-3	0.215E-3	0.223E-3
0.99	0.505E-3	0.505E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.463E-3	0.464E-3	0.463E-3	0.464E-3
1	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.500E-3
1.01	0.495E-3	0.495E-3	0.500E-3	0.500E-3	0.539E-3	0.538E-3	0.539E-3	0.538E-3
1.1	0.455E-3	0.455E-3	0.525E-3	0.524E-3	0.997E-3	0.974E-3	0.997E-3	0.974E-3
1.5	0.333E-3	0.333E-3	0.156E-2	0.148E-2	0.628E-2	0.590E-2	0.628E-2	0.590E-2
2	0.250E-3	0.250E-3	0.690E-2	0.630E-2	0.223E-1	0.207E-1	0.223E-1	0.207E-1
5	0.100E-3	0.100E-3	0.135	0.126	0.218	0.208	0.218	0.208
10	0.500E-4	0.500E-4	0.366	0.352	0.467	0.455	0.467	0.455

P_4 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.4863E-2	0.4864E-2	0.4421E-2	0.4398E-2	0.1195E-32	0.6280E-25	0.1200E-32	0.6871E-25
0.2	0.2435E-2	0.2435E-2	0.2213E-2	0.2202E-2	0.3370E-16	0.3749E-14	0.3374E-16	0.3859E-14
0.5	0.9746E-3	0.9748E-3	0.8858E-3	0.8813E-3	0.2499E-6	0.4287E-6	0.2500E-6	0.4303E-6
0.7	0.6962E-3	0.6964E-3	0.6334E-3	0.6305E-3	0.1896E-4	0.2262E-4	0.1896E-4	0.2264E-4
0.9	0.5416E-3	0.5417E-3	0.5069E-3	0.5061E-3	0.2101E-3	0.2198E-3	0.2101E-3	0.2199E-3
0.99	0.4923E-3	0.4925E-3	0.4876E-3	0.4876E-3	0.4515E-3	0.4582E-3	0.4515E-3	0.4583E-3
1	0.4874E-3	0.4875E-3	0.4874E-3	0.4874E-3	0.4874E-3	0.4933E-3	0.4874E-3	0.4933E-3
1.01	0.4826E-3	0.4827E-3	0.4876E-3	0.4876E-3	0.5254E-3	0.5303E-3	0.5254E-3	0.5303E-3
1.1	0.4431E-3	0.4432E-3	0.5127E-3	0.5110E-3	0.9705E-3	0.9606E-3	0.9705E-3	0.9605E-3
1.5	0.3250E-3	0.3251E-3	0.1529E-2	0.1435E-2	0.6089E-2	0.5810E-2	0.6089E-2	0.5807E-2
2	0.2437E-3	0.2438E-3	0.6719E-2	0.6092E-2	0.2152E-1	0.2042E-1	0.2152E-1	0.2041E-1
5	0.9750E-4	0.9753E-4	0.1295	0.1202	0.2089	0.2049	0.2089	0.2048
10	0.4875E-4	0.4877E-4	0.3507	0.3350	0.4456	0.4486	0.4456	0.4486

P_5 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.544E-1	0.544E-1	0.568E-1	0.568E-1	0.512E-19	0.269E-11	0.514E-19	0.294E-11
0.2	0.519E-1	0.519E-1	0.546E-1	0.546E-1	0.313E-8	0.347E-6	0.313E-8	0.357E-6
0.5	0.505E-1	0.505E-1	0.533E-1	0.533E-1	0.128E-2	0.219E-2	0.218E-2	0.219E-2
0.7	0.502E-1	0.502E-1	0.527E-1	0.526E-1	0.110E-1	0.130E-1	0.110E-1	0.131E-1
0.9	0.501E-1	0.501E-1	0.507E-1	0.506E-1	0.341E-1	0.353E-1	0.341E-1	0.353E-1
0.99	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.483E-1	0.484E-1	0.483E-1	0.484E-1
1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1	0.500E-1
1.01	0.500E-1	0.500E-1	0.499E-1	0.500E-1	0.517E-1	0.516E-1	0.517E-1	0.516E-1
1.1	0.500E-1	0.500E-1	0.511E-1	0.512E-1	0.679E-1	0.664E-1	0.679E-1	0.664E-1
1.5	0.498E-1	0.498E-1	0.929E-1	0.895E-1	0.150	0.141	0.150	0.141
2	0.498E-1	0.498E-1	0.188	0.178	0.251	0.234	0.251	0.234
5	0.496E-1	0.496E-1	0.544	0.533	0.596	0.569	0.596	0.569
10	0.496E-1	0.496E-1	0.751	0.737	0.777	0.757	0.777	0.757

P_6 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.917E-1	0.917E-1	0.799E-1	0.795E-1	0.235E-13	0.235E-13	0.235E-13	0.235E-13
0.2	0.481E-1	0.481E-1	0.416E-1	0.414E-1	0.109E-7	0.109E-7	0.109E-7	0.109E-7
0.5	0.198E-1	0.198E-1	0.170E-1	0.170E-1	0.198E-3	0.198E-3	0.198E-3	0.198E-3
0.7	0.142E-1	0.142E-1	0.123E-1	0.123E-1	0.175E-2	0.175E-2	0.175E-2	0.175E-2
0.9	0.111E-1	0.111E-1	0.103E-1	0.103E-1	0.630E-2	0.630E-2	0.630E-2	0.630E-2
0.99	0.101E-1	0.101E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.959E-2	0.959E-2	0.959E-2	0.959E-2
1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-1	0.100E-2	0.100E-1	0.100E-1
1.01	0.990E-2	0.990E-2	0.100E-1	0.100E-1	0.104E-1	0.104E-1	0.104E-1	0.104E-1
1.1	0.910E-2	0.910E-2	0.103E-1	0.103E-1	0.147E-1	0.147E-1	0.147E-1	0.147E-1
1.5	0.669E-2	0.669E-2	0.168E-1	0.165E-1	0.419E-1	0.419E-1	0.419E-1	0.419E-1
2	0.503E-2	0.503E-2	0.367E-1	0.353E-1	0.887E-1	0.887E-1	0.887E-1	0.887E-1
5	0.202E-2	0.202E-2	0.244	0.236	0.366	0.366	0.366	0.366
10	0.101E-2	0.101E-2	0.488	0.478	0.601	0.601	0.601	0.601

P_7 (n=100)

σ	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
0.1	0.494E-1	0.490E-1	0.494E-1	0.494E-1	0.495E-1	0.530E-1	0.496E-1	0.527E-1
0.2	0.495E-1	0.491E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.526E-1	0.495E-1	0.525E-1
0.5	0.495E-1	0.492E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.514E-1	0.495E-1	0.514E-1
0.7	0.495E-1	0.494E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.506E-1	0.495E-1	0.506E-1
0.9	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.499E-1	0.495E-1	0.499E-1
0.99	0.495E-1	0.496E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1
1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1
1.01	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1
1.1	0.495E-1	0.496E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.491E-1	0.495E-1	0.491E-1
1.5	0.495E-1	0.498E-1	0.495E-1	0.495E-1	0.493E-1	0.477E-1	0.493E-1	0.477E-1
2	0.495E-1	0.500E-1	0.493E-1	0.493E-1	0.488E-1	0.458E-1	0.488E-1	0.458E-1
5	0.495E-1	0.515E-1	0.444E-1	0.446E-1	0.405E-1	0.350E-1	0.405E-1	0.349E-1
10	0.495E-1	0.539E-1	0.338E-1	0.341E-1	0.284E-1	0.237E-1	0.284E-1	0.237E-1

4.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A. Ao analisar os resultados algo sobressaiu logo:

O valor de P_6 das estatísticas B, B′, T e T′ era o mesmo para todos os σ estudados. Era óbvio que seria o mesmo para B e B′ e também para T e T′, pois tínhamos obtido a mesma expressão. O que surpreendeu foi o facto de ser igual para as quatro estatísticas. De facto, as expressões eram distintas. Para B e B′ tínhamos:

$$P_6(B)=P_6(B') = \frac{1}{\sigma}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k \frac{1}{k+\frac{1}{\sigma}} .$$

Para T e T′ tínhamos:

$$P_6(T)=P_6(T')= \sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-1}{i}\frac{1}{1+i\sigma}\left(\frac{1-i\,\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} .$$

Em vista dos resultados fomos analisar melhor as definições de P_6 em ambos os casos e de facto elas são idênticas para B e T (e para B′ e T′). Vejamos para o caso de B e T (para B′ e T′ era idêntico):

$$P_6(B)=P(B=Y_n|H_1) = P(M\leq Y_n|H_1) = P(\max(Y_1,\ldots,Y_{n-1})\leq Y_n|H_1).$$

$$P_6(T)=P(T=V_n|H_1) = P(H\leq S|H_1) =$$

$$= P\left(\max\left(\frac{Y_1}{Y_1+\ldots+Y_{n-1}},\ldots,\frac{Y_{n-1}}{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}\right)\leq\frac{Y_n}{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}|H_1\right) = P_6(B).$$

Esta conclusão leva-nos, como subproduto, à seguinte igualdade geral:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\left(\frac{1}{k+a}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k+a}\left(\frac{1-\frac{k}{n-1}}{1+\frac{a}{n-1}}\right)^{n-1}\binom{n-1}{k} .$$

B. Como era de esperar verificou-se a relação $P_1\geq P_2\geq P_3\geq P_4$ (ver pag.12) para as oito estatísticas e todos os valores de σ, havendo a salientar as igualdades $P_2=P_3=P_4$ para as estatísticas T e T′ e para n=5 e n=10.

C. Relativamente a P_1 (potência do teste) verifica-se que à medida que o n aumenta, diminui o valor de P_1 de todas as estatísticas excepto na cauda superior das estatísticas Z, T e T′, onde essa característica também se verifica mas apenas para valores de n suficientemente grandes.

À partida seria de esperar que para n pequenos os testes fossem menos potentes que para n grandes, pois é isso que sucede geralmente nos testes paramétricos. Mas tal não sucedeu e uma explicação possível é a seguinte: nos testes paramétricos vulgares, quando a hipótese alternativa relativa ao valor de um parâmetro é verdadeira, todos os elementos da amostra têm esse valor do parâmetro e daí a potência do teste ser, para um teste de razão de verosimilhanças, debaixo de condições adequadas, uma função crescente do tamanho da amostra (ver Lehman(1959),pag.108), isto é, será tanto mais fácil detectar o desvio do parâmetro relativamente à hipótese nula quanto mais elementos da amostra (todos seguindo a hipótese alternativa) tivermos a contribuir para o valor da nossa estatística.

No nosso caso, porém, a hipótese alternativa refere-se à existência de um "outlier", isto é, de um único elemento da amostra cujo valor do parâmetro se afasta dos restantes. Sendo a hipótese alternativa verdadeira, quanto maior for a amostra maior será o número dos seus elementos que têm o valor não-desviante do parâmetro e, portanto, menor tenderá a ser a influência do único contaminante sobre a nossa estatística de teste. Isso é exactamente assim para estatísticas de teste "pouco sofisticadas" como as de máximo ou mínimo da amostra (A,B,B′) em que a influência dos elementos é mais directa e será assim a partir de certa ordem para os restantes em que a influência dos elementos é mais indirecta e, pode, para valores pequenos de n, haver alguns efeitos compensatórios. Temos, assim, o efeito de, pelo menos a partir de certa ordem, ser tanto mais difícil detectar a existência de "outlier", ser tanto menor a potência, quanto maior for o tamanho da amostra. Quanto maior a "multidão" da população corrente, maior a possibilidade de um contaminante passar despercebido, já que haverá maior tendência para aparecerem indivíduos da população corrente que apresentam comportamentos extremos.

Este fenónemo é ainda mais notório nos testes de detecção de "outliers" na cauda inferior da distribuição exponencial. Dada a forte concentração da densidade de probabilidade nessa cauda é muito provável a existência de valores extremos inferiores muito pequenos em amostras grandes e pouco provável que o contaminante seja ainda mais extremo (apesar de ele ter maiores probabilidades de ter um valor mais pequeno) do que um outro elemento da amostra escolhido ao acaso. Assim, é quase inútil a execução de testes para detecção de "outliers" na cauda inferior de populações exponenciais quando n é grande, ou mesmo moderado, já que a potência é muito fraca. Assim, o facto de nos testes clássicos, de natureza empírica, a cauda inferior nunca ser considerada, acaba por encontrar alguma justificação em face dos resultados aqui obtidos, se bem que, para valores pequenos de n, a situação já ser um pouco diferente.

Também a execução de testes para detecção de "outliers" na cauda superior de populações exponenciais em amostras muito grandes só é eficaz quando o contaminante tem valores do parâmetro bastante desviantes, pelo que pouco interesse haverá na obtenção de métodos assintóticos quando $n \to +\infty$.

O que referimos em relação à potência, será também verdadeiro para P_2,P_3,P_4 e P_6 por razões semelhantes.

Uma situação inteiramente diferente, e que está fora do âmbito desta tese, seria a situação da existência de uma mistura, em que cada elemento da amostra tem probabilidade fixa de ser contaminante, podendo haver mais de um contaminante e podendo o número de contaminantes variar com o tamanho da amostra, em vez de ser fixo. Neste caso, já o número de contaminantes tem tendência a crescer com o tamanho da amostra e o decréscimo da potência com o tamanho da amostra não é de esperar.

D. Tendo em conta as caudas que interessam mais analisar (ver pag. 153), foi-se verificar para cada medida de "performance" (excepto P_7) o seguinte esquema (dentro de parentêsis estão os parâmetros conhecidos ou parcialmente conhecidos neste caso representados a "bold"):

Cauda Inferior:

$$\begin{tikzcd}
& A(\lambda,\delta;\, \delta' \text{ ou } \boldsymbol{\delta}') \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
D(\lambda,\delta) \arrow[dr] & & U(\lambda,\, \boldsymbol{\delta}') \arrow[dl] \\
& Z(\lambda) &
\end{tikzcd}$$

Cauda Superior:

$$\begin{tikzcd}
& B(\lambda,\delta;\, \delta' \text{ ou } \boldsymbol{\delta}') \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
D(\lambda,\delta) \arrow[d] & T(\lambda,\, \boldsymbol{\delta}') \arrow[dl] \arrow[d] & B'(\delta;\delta' \text{ ou } \boldsymbol{\delta}') \arrow[dl] \\
Z\,(\lambda) & T'(\boldsymbol{\delta}') &
\end{tikzcd}$$

Uma vez que à medida que se desce em cada esquema se verifica uma perda de informação seria de esperar que as seis primeiras medidas de "performance" diminuam de acordo com o sentido das setas. Quanto a P_7 seria de esperar precisamente o contrário.

De facto foi isso que sucedeu com uma ou outra excepção, que passaremos a enunciar. Na cauda inferior, para P_1, entre as estatísticas D e Z e as estatísticas U e Z, o sentido foi geralmente ao contrário do esperado. Para P_5 passou-se o contrário do esperado entre D e A e entre Z e U (nalguns casos). Quanto a P_6 deu-se a igualdade entre A e U e B, B′, T e T′ (como já tínhamos falado em 4.4A). No que respeita ao P_7 há a salientar um sentido contrário ao esperado entre as estatísticas (salvo outras excepções pontuais): A e U, T e T′, B e B′ e B′ e T′. Quanto às restantes medidas nada há fora do esperado.

Estas excepções que apontámos levam-nos a concluir que nem sempre a perda de informação leva a uma "performance" mais fraca. Devido a este facto e também ao facto de quando há uma perda na "performance" ela é ligeira podemos tirar a seguinte conclusão geral: a perda de informação não acarreta alteração substancial na "performance" (no que respeita a duas estatísticas consecutivas).

E. Quando $\sigma=1$, pode-se ver teoricamente que, tanto o P_1 como P_3, P_5 e P_6 têm o mesmo valor para todas as estatísticas. São eles:

$P_1{}^0 = \alpha$ (óbvio)

$P_6{}^0 = \frac{1}{n}$ (como todas as observações têm a mesma distribuição, a probabilidade de que a observação que fornece o mínimo (ou máximo) ser a observação número n é $\frac{1}{n}$).

$P^0{}_5 = P(W \in \mathcal{R} \mid W=W_n,\ H_0) = P(W \in \mathcal{R} \mid H_0)=P^0{}_1 = \alpha$ (pois na hipótese nula, $W=\underset{\max}{\min}\ W_i$ estar na região de rejeição é independente de $W=W_n$).

Também:

$P^0{}_3 = P(W \in \mathcal{R} \mid W=W_n \mid H_0) = P(W \in \mathcal{R} \mid H_0) \cdot P\ (W=W_n \mid H_0)=\alpha \cdot \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n}$.

O conhecimento teórico destes valores serviu para testar os programas.

F. Em David (1981) encontra-se o seguinte enquadramento para P_1 (pag.235):

$P_2 \leq P_1 \leq P_2 + \alpha$,

desde que $\alpha < \frac{2}{n}$ onde α é o nível de significância.

De facto verifica-se esta dupla desigualdade (nas caudas que interessam analisar).

G. Relativamente à forma como as medidas de "performance" se comportam à medida que σ cresce (nas caudas que interessam analisar - ver pag. 153), verifica-se:

	A	U	D	Z	B	T	B′	T′
P_1	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_2	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_3	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_4	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_5	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_6	↘	↘	↘↗	↘↗	↗	↗	↗	↗
P_7	↗	↗	↗↘	↗↘	↘	↘	↘	↘

Apêndices

APÊNDICE A

Vamos provar que para $n \geq 3$ e $0 < z < \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ e $0 < z_1 < \frac{1}{n} < z_2 < 1$ tal que $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)=z$ com $\varphi(x)=x(1-x)^{n-1}$, vem $(z_1, z_2) \in D_n$ e $k=\mathrm{INT}\left(\frac{nz_2-1}{z_2-z_1}\right)$ a só poder tomar os valores $k=\mathrm{INT}\left(\frac{n}{2}\right), \ldots, n-2$.

Demonstração:

Defina-se

$$\psi_k(z)=\frac{\varphi(z)}{\varphi(a_k(z))} \quad \text{para } 0 < z < \frac{1}{k} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1), \quad \text{onde } a_k(z)=\frac{1-kz}{n-k}.$$

Vem, derivando

$$\psi'_k(z)=\frac{\varphi'(z)\varphi(a_k(z)) + \varphi(z)\varphi'(a_k(z))\frac{k}{n-k}}{\varphi^2(a_k(z))}=$$

$$=\frac{(1-nz)(1-z)^{n-2}a_k(z)(1-a_k(z))^{n-1} + z(1-z)^{n-1}(1-na_k(z))(1-a_k(z))^{n-2}\frac{k}{n-k}}{\varphi^2(a_k(z))}=$$

$$=\frac{(1-z)^{n-2}(1-a_k(z))^{n-2}}{(n-k)^2\varphi^2(a_k(z))}\,nk(n-2)\left(z-\frac{1}{n}\right)\left(z-\frac{n-k-1}{k(n-2)}\right).$$

Temos, fazendo o estudo de $\psi_k(z)$ e de $\psi'_k(z)$:

$$\psi_k(0)=\begin{cases} 0 & \text{para } k \neq n\text{-}1 \\ \lim\limits_{z\downarrow 0} \dfrac{z(1-z)^{n-1}}{(1-(n-1)z)((n-1)z)^{n-1}} = +\infty & \text{para } k=n\text{-}1\,. \end{cases}$$

$$\psi'_k(0)=\begin{cases} \text{finito} & \text{para } k \neq n\text{-}1 \\ -\infty & \text{para } k=n\text{-}1\,. \end{cases}$$

$$\psi_k\left(\frac{1}{k}\right)=\begin{cases} +\infty & \text{para } k \neq 1 \\ \lim\limits_{z\uparrow \frac{1}{k}} \dfrac{z(1-z)^{n-1}}{\frac{1-z}{n-1}\left(1-\frac{1-z}{n-1}\right)^{n-1}} =0 & \text{para } k=1\,. \end{cases}$$

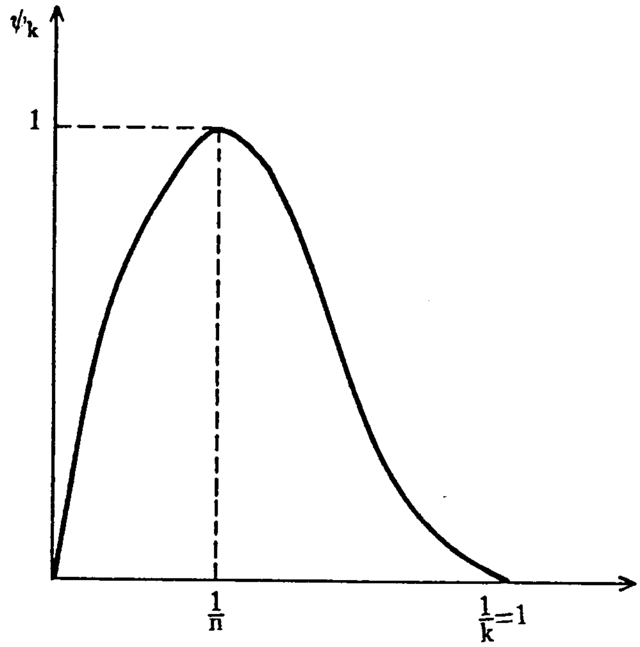
$$\psi'_k\left(\frac{1}{k}\right)=\begin{cases} +\infty & \text{para } k \neq 1 \\ 0 & \text{para } k=1 \text{ e } n>3 \\ \text{finito} & \text{para } k=1 \text{ e } n=3\,. \end{cases}$$

$$\psi_k\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1-k\frac{1}{n}}{n-k}\right)}=\frac{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}=1\,.$$

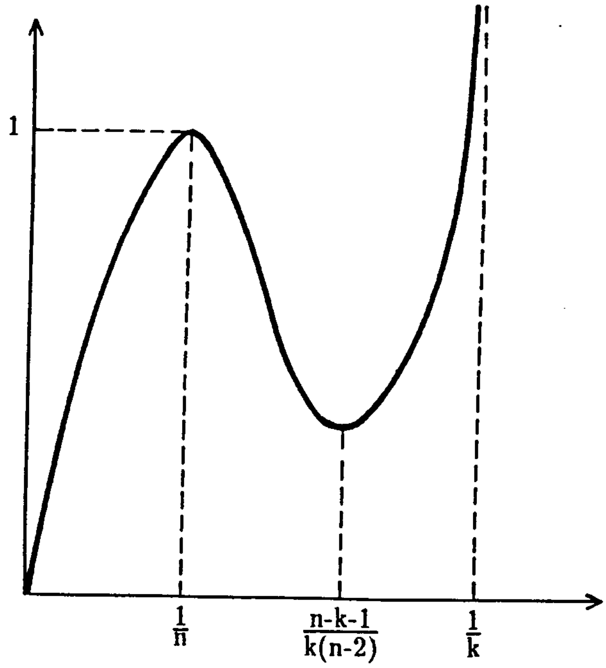
$$\frac{1}{n} - \frac{n-k-1}{k(n-2)} = -\frac{(n-1)(n-2k)}{nk(n-2)} \begin{cases} > 0 & \text{para } k > \frac{n}{2} \\ = 0 & \text{para } k = \frac{n}{2} \\ < 0 & \text{para } k < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{1}{k} - \frac{n-k-1}{k(n-2)} = \frac{k-1}{k(n-2)} \begin{cases} > 0 & \text{para } k \neq 1 \\ = 0 & \text{para } k=1, \end{cases}$$

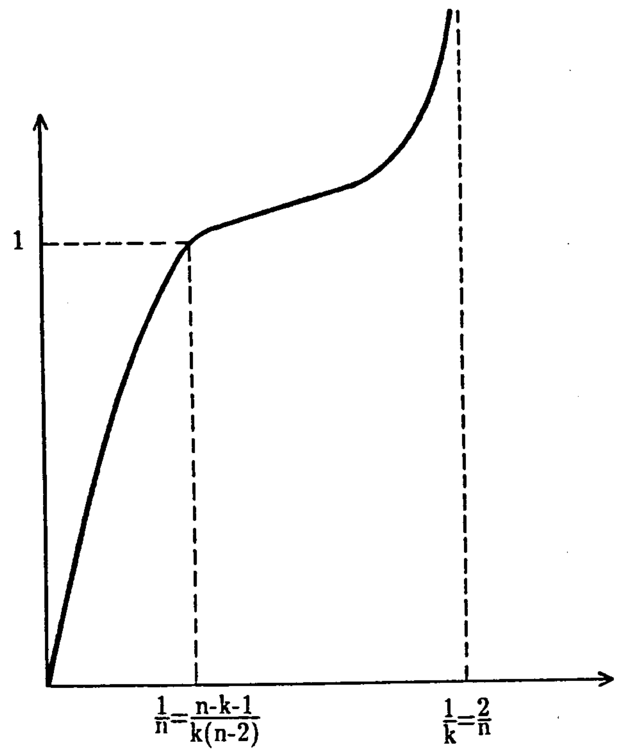
Estes resultados poderão ser visualizados graficamente nas figuras seguintes:



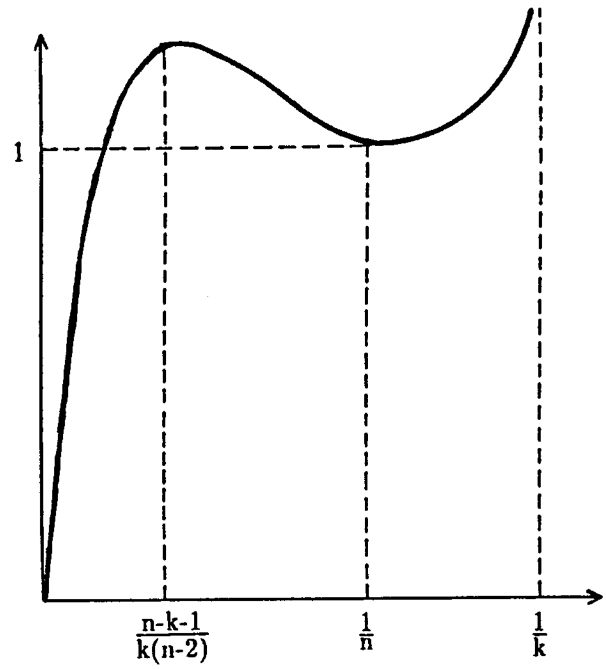
Caso k=1



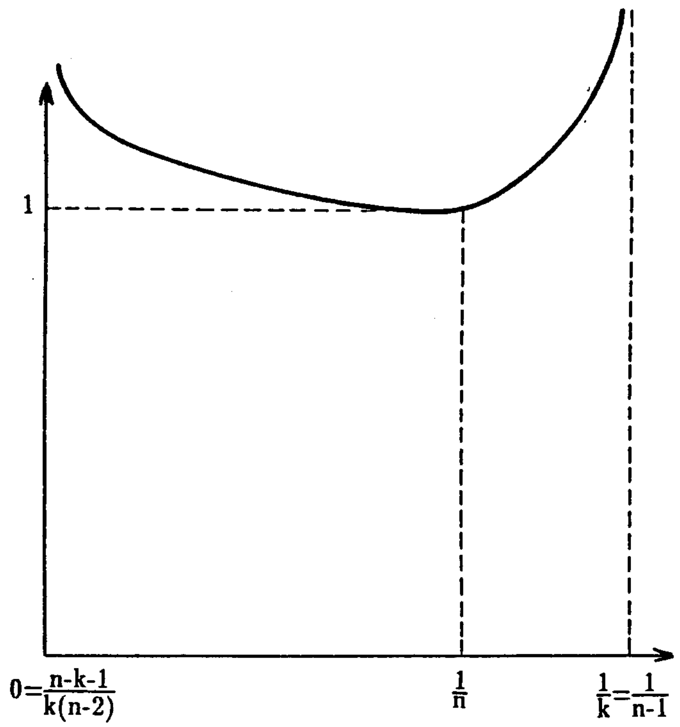
Caso $1 < k < \frac{n}{2}$



Caso $k=\frac{n}{2}$, n par



Caso $\frac{n}{2} < k < n-1$



Caso $k = n-1$

Para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ vem:

$\psi_k(z_1) < \psi_k\left(\frac{1}{n}\right)=1$ pois $0 < z_1 < \frac{1}{n}$ onde φ é crescente.

Logo $\dfrac{\varphi(z_1)}{\varphi(a_k(z_1))} < 1$ implica $\varphi(z_1) < \varphi(a_k(z_1))$.

Como $\varphi(z_1)=z=\varphi(z_2)$ vem $\varphi(z_2) < \varphi(a_k(z_1))$.

Como $\frac{1}{n} < z_2 < 1$, $\frac{1}{n} < a_k(z_1) < 1$ e φ decresce estritamente em $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, vem $z_2 > a_k(z_1)$.

Logo $z_2 > a_k(z_1)$ para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Em particular $z_2 > a_{INT(\frac{n}{2})}(z_1)$.

Em particular $z_2 > a_1(z_1) \Rightarrow z_2 > \dfrac{1-z_1}{n-1} \Rightarrow z_1+(n-1)z_2 > 1$.

Para $\frac{n}{2} < k \leq n-1$ e $\dfrac{n-k-1}{k(n-2)} < z_1 < \frac{1}{n}$, vem:

$\psi_k(z_1) > 1$, donde $\dfrac{\varphi(z_1)}{\varphi(a_k(z_1))} > 1$ e por conseguinte $\varphi(z_1)=z=\varphi(z_2) > \varphi(a_k(z_1))$.

Como $\frac{1}{n} < z_2 > 1$, $\frac{1}{n} < a_k(z_1) < 1$ e φ decresce estrictamente em $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ vem $z_2 < a_k(z_1)$.

Logo $z_2<a_k(z_1)$ para $\frac{n}{2} < k \leq n-1$ se $\dfrac{n-k-1}{k(n-2)} < z_1< \frac{1}{n}$.

Em particular $z_2< a_{n-1}(z_1)$ para $\dfrac{n(n-1)-1}{(n-1)(n-2)} < z_1 < \frac{1}{n}$, isto é, $z_2 < \dfrac{1-(n-1)z_1}{n-(n-1)}$ para $0 < z_1 < \frac{1}{n}$, ou seja, $(n-1)z_1+ z_2< 1$.

Conclusão:

$$\left.\begin{cases} z_1+(n-1)z_2 > 1 \\ \\ (n-1)z_1+ z_2 < 1 \end{cases}\right\} \text{ implicam que } (z_1, z_2) \in D_n$$

e $z_2 > a_{INT(\frac{n}{2})}(z_1)$ implica $k=INT\left(\frac{nz_2-1}{z_2-z_1}\right) \geq INT\left(\frac{n}{2}\right)$.

APÊNDICE B

Apresentam-se a seguir os programas de computador utilizados para a elaboração das tabelas de valores críticos e das medidas de "performance". Foi utilizado um computador pessoal IBM compatível e os programas foram elaborados em GWBasic com precisão dupla. Nem sempre se utilizaram directamente as fórmulas apresentadas no texto, mas variantes delas mais eficientes ou mais precisas do ponto de vista computacional.

Valores Críticos das Estatísticas A e U

($\alpha = 0.05$)

```
10 LPRINT," N","     A","     U"
15 LPRINT
20 DEFDBL A-I:DEFDBL K-Z
30 LET L=1#
40 FOR J=3 TO 100:LET N=CDBL(J)
50 REM
60 REM estatistica a
70 LET C=(-L/N)*LOG(.95#):LET X1=C
80 REM
90 REM estatistica u
100 LET C=(L-.95#^(L/(N-L)))/N:LET X2=C
110 LPRINT,J,:LPRINT USING "#.####^^^^     ";X1,:LPRINT USING "#.####^^^^";X2
120 NEXT J
```

Valores Críticos das Estatísticas B e T

$(\alpha = 0.05)$

```
1     LPRINT," N","     B","     T"
2     LPRINT
5     DEFDBL A-H:DEFDBL K-Z
6     LET L=1#
10    FOR I=3 TO 100:LET N=CDBL(I)
15    REM
16    REM estatistica b
20    LET C=-LOG(L-.95#^(L/N)):LET X=C
85    REM
86    REM estatistica t
90    LET K=L:LET S1=L
100   LET K=K+L:LET C=L/K
110   LET S=L:LET CO=L
120   FOR J=L TO K-L
130   LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
140   LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
150   NEXT J
160   LET S2=S1:LET S1=S
170   IF S1>.95# THEN GOTO 100
180   LET C1=L/K:LET C2=L/(K-L):LET C=(C1+C2)/2#
190   IF (C2-C1)/C1<.00000001# THEN GOTO 280
200   LET S=L:LET CO=L
210   FOR J=L TO K-L
220   LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
230   LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
240   NEXT J
250   IF S<.95# THEN GOTO 270
260   LET C2=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
270   LET C1=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
280 LPRINT,I,:LPRINT USING "#.####^^^^     ";X,:LPRINT USING "#.####^^^^";C
290 NEXT I
```

Valores Críticos das Estatísticas U e T

($\alpha = 0.025$)

```
1    LPRINT,"estatistica u",,"estatistica t"
5     DEFDBL A-H:DEFDBL K-Z
6     LET L=1#
10    FOR I=3 TO 100:LET N=CDBL(I)
15    REM
16    REM estatistica u
20    LET C=(L-.95#^(L/(N-L)))/N:LET X=C
85    REM
86    REM estatistica t
90    LET K=L:LET S1=L
100   LET K=K+L:LET C=L/K
110   LET S=L:LET CO=L
120   FOR J=L TO K-L
130   LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
140   LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
150   NEXT J
160   LET S2=S1:LET S1=S
170   IF S1>.95# THEN GOTO 100
180   LET C1=L/K:LET C2=L/(K-L):LET C=(C1+C2)/2#
190   IF (C2-C1)/C1<.00000001# THEN GOTO 280
200   LET S=L:LET CO=L
210   FOR J=L TO K-L
220   LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
230   LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
240   NEXT J
250   IF S<.95# THEN GOTO 270
260   LET C2=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
270   LET C1=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
280 LPRINT "n=";I,X,C
290 NEXT I
```

Valores Críticos da Estatística Z

($\alpha = 0.05$)

```
10  LPRINT "estatistica z"
15  LPRINT "c",,"c1",,"c2"
20   DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40   LET U=1#
50   FOR I=3 TO 100:LET N=CDBL(I)
60   REM rotina para calcular c1 e c2
70   LET CMIN=0#:LET CMAX=U/N*(U-U/N)^(N-U)
80   LET C1MIN=0#:LET C1MAX=U/N
90   LET C2MIN=U:LET C2MAX=U/N
100  LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
110  LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
120  LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
130  LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=C1TENT*(U-C1TENT)^(N-U)
140  LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=C2TENT*(U-C2TENT)^(N-U)
150  IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 170
160  LET C1MINL=C1TENT:GOTO 180
170  LET C1MAXL=C1TENT
180  IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 200
190  LET C2MINL=C2TENT:GOTO 210
200  LET C2MAXL=C2TENT
210  IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 130
220  IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 130
230  IF (C2MAXL-U/N)=0# THEN GOTO 250
240  IF ((U/N-C1MAXL)/(C2MINL-U/N))-((U/N-C1MINL)/(C2MAXL-U/N))>=.00001# THEN GO
TO 130
250  LET TENT=INT((N*C2TENT-U)/(C2TENT-C1TENT))
260  LET CO=U
270  LET S=(U-N*C1TENT)^(N-U)
280  FOR J=U TO N-U-TENT
290  LET CO=CO*((N+U-CDBL(J))/CDBL(J))
300  LET S=S+(-U)^CDBL(J)*CO*(U-(N-CDBL(J))*C1TENT-CDBL(J)*C2TENT)^(N-U)
310  NEXT J
320  LET ALFATENT=U-S
330  IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 360
340  LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
350  GOTO 370
360  LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
370  IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 100
380  IF ((CMAX-CMIN)/CMIN)>=.00000001# THEN GOTO 100
390  LET C=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT
830  LPRINT C,C1,C2
850 NEXT I
```

Valores Críticos da Estatística D

($\alpha = 0.05$)

```
10   LPRINT "estatistica d"
15   LPRINT "c",,"c1",,"c2"
20    DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40    LET U=1#
50    FOR I=3 TO 100:LET N=CDBL(I)
60    REM rotina para calcular c1 e c2
70    LET CMIN=0#:LET CMAX=EXP(-1)
80    LET C1MIN=0#:LET C1MAX=U
90    LET C2MIN=1000#:LET C2MAX=U
100   LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
110   LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
120   LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
130   LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=C1TENT*EXP(-C1TENT)
140   LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=C2TENT*EXP(-C2TENT)
150   IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 170
160   LET C1MINL=C1TENT:GOTO 180
170   LET C1MAXL=C1TENT
180   IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 200
190   LET C2MINL=C2TENT:GOTO 210
200   LET C2MAXL=C2TENT
210   IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 130
220   IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 130
230   IF (C2MAXL-U)=0# THEN GOTO 250
240   IF ((U-C1MAXL)/(C2MINL-U))-((U-C1MINL)/(C2MAXL-U))>=.00001# THEN GOTO 130
320   LET ALFATENT=U-(EXP(-C1TENT)-EXP(-C2TENT))^N
330   IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 360
340   LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
350   GOTO 370
360   LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
370   IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 100
380   IF ((CMAX-CMIN)/CMIN)>=.00000001# THEN GOTO 100
390   LET C=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT
830   LPRINT C,C1,C2
850 NEXT I
```

Medidas de "Performance" das Estatísticas A e B

($\alpha = 0.05$)

```
10    REM valores criticos e medidas de performance das estatisticas a e b
20    DEFDBL A-I:DEFDBL K-Z
30    LET L=1#
40    INPUT N:INPUT D
50    REM
60    REM estatistica b
70    LET C=-LOG(L-.95#^(L/N)):LET X1=C
80    LET E1=EXP(-C/D):LET E2=EXP(-C)
90    LET PB1=L-(.95#*(L-E1)/(L-E2))
100   LET PB2=E1
110   LET PB4=E1*.95#/(L-E2)
120   LET S=D:LET CO=L
130   FOR J=L TO N-L
140   LET CO=-CO*((N-CDBL(J))/CDBL(J))
150   LET S=S+CO*(EXP(-C*CDBL(J))/(L/D+CDBL(J)))
160   NEXT J
170   LET PB3=L/D*E1*S
180   LET P=L
190   FOR J=L TO N-L
200   LET P=P*(CDBL(J)/(L/D+CDBL(J)))
210   NEXT J
220   LET PB5=PB3/P
240   REM
250   REM estatistica a
260   LET C=(-L/N)*LOG(.95#):LET X2=C
270   LET E1=EXP(C*(L-L/D)):LET E2=EXP(-C/D)
280   LET PA1=L-.95#*E1
290   LET PA2=L-E2
300   LET PA3=(L-.95#*E1)/(D*(N-L)+L)
310   LET PA4=.95#*EXP(C)*(L-E2)
320   LET P=L/(N*D-D+L)
330   LET PA5=PA3/P
3000 LPRINT "n=";N;"   delta linha=";D
3010 LPRINT "alfa=";.05
3020 LPRINT
3030 LPRINT "c(b)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";X1
3040 LPRINT "c(a)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";X2
3050 LPRINT
3060 LPRINT "p1(b)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PB1
3070 LPRINT "p1(a)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PA1
3080 LPRINT
3090 LPRINT "p2(b)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PB2
3100 LPRINT "p2(a)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PA2
3110 LPRINT
3120 LPRINT "p3(b)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PB3
3130 LPRINT "p3(a)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PA3
3140 LPRINT
3150 LPRINT "p4(b)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PB4
3160 LPRINT "p4(a)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PA4
3170 LPRINT
3180 LPRINT "p5(b)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PB5
3190 LPRINT "p5(a)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PA5
```

Medidas de "Performance" das Estatísticas U, T e Z

($\alpha = 0.05$)

```
3    REM valores criticos e medidas de performance das estatisticas u,t e z
5    DEFDBL A-I:DEFDBL K-Z
6    LET L=1#
10   INPUT N:INPUT D
15   REM
16   REM estatistica u
20   LET C=(L-.95#^(L/(N-L)))/N:LET X=C
30   LET A=(L+C*(L/D-L))^(N-L)
40   LET PU1=L-.95#/(((D-L)*(N-L)*C+L)*A)
50   LET PU2=L-((L-C)^(N-L))/A
60   LET PU3=L/(L+D*(N-L))*(L-.95#/A)
70   LET PU4=(.95#/A-(L-(N-L)*C)^(N-L))/((N-L)*C*(L-D)-L)
80   LET PU5=L-.95#/A
85   REM
86   REM estatistica t
90   LET K=L:LET S1=L
100  LET K=K+L:LET C=L/K
110  LET S=L:LET CO=L
120  FOR J=L TO K-L
130  LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
140  LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
150  NEXT J
160  LET S2=S1:LET S1=S
170  IF S1>.95# THEN GOTO 100
180  LET C1=L/K:LET C2=L/(K-L):LET C=(C1+C2)/2#
190  IF (C2-C1)/C1<.00000001# THEN GOTO 280
200  LET S=L:LET CO=L
210  FOR J=L TO K-L
220  LET CO=((N+L)/CDBL(J)-L)*CO
230  LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-L)
240  NEXT J
250  IF S<.95# THEN GOTO 270
260  LET C2=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
270  LET C1=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 190
280  LET F=L:LET CO=L:LET U=L:LET A=(L/(L+(L/D-L)*C))^(N-L)
290  FOR J=L TO K-L
300  LET CO=(N/CDBL(J)-L)*CO
310  LET V=U
320  LET U=CO*(L/(L-CDBL(J)*C*(L-D)))
340  LET V=V*A
350  LET F=F+(U+V)*((L-CDBL(J)*C)^(N-L))*((-L)^CDBL(J))
360  NEXT J
370  LET PT1=L-F
380  LET PT2=L/(L+C/(D*(L-C)))^(N-L)
390  LET CO=((L-L/N)/(L+(L/D-L)/N))^(N-L):LET V=CO
400  FOR J=L TO N-2#
410  LET CO=CO*(L-N/CDBL(J))*((L+CDBL(J-L)*D)/(L+CDBL(J)*D))*(L-L/(N-CDBL(J)))^(
N-L)
420  LET V=V+CO
430  NEXT J
440  IF C<L/2# THEN GOTO 480
450  LET PT3=L/(L+C/(D*(L-C)))^(N-L)
460  LET PT4=PT3
470  LET PT5=PT3/V:GOTO 565
480  LET CO=L
490  LET PT3=((L-C)/(L+C*(L/D-L)))^(N-L):LET PT4=PT3
500  FOR J=L TO K-2#
510  LET CO=-(N/CDBL(J)-L)*CO
520  LET A=CO*((L-(CDBL(J)+L)*C)/(L+(L/D-L)*C))^(N-L)
530  LET PT3=PT3+(L/(L+CDBL(J)*D))*A
540  LET PT4=PT4+(L/(L+CDBL(J)*(D-L)*C))*A
550  NEXT J
560  LET PT5=PT3/V
565  REM
```

```
570  REM estatistica z
580  DEF FNF(X)=X*(L-X)^(N-L)
590  LET CMIN=0#:LET CMAX=FNF(L/N)
600  LET C1MIN=0#:LET C1MAX=L/N
610  LET C2MIN=L:LET C2MAX=L/N
620  LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
630  LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
640  LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
650  LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=FNF(C1TENT)
660  LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=FNF(C2TENT)
670  IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 685
680  LET C1MINL=C1TENT:GOTO 690
685  LET C1MAXL=C1TENT
690  IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 705
700  LET C2MINL=C2TENT:GOTO 710
705  LET C2MAXL=C2TENT
710  IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 650
720  IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 650
725  IF (C2MAXL-L/D)=0# THEN GOTO 760
730  IF ((L/N-C1MAXL)/(C2MINL-L/N))-((L/N-C1MINL)/(C2MAXL-L/N))>=.00001# THEN GO
TO 650
760  LET KTENT=INT((N*C2TENT-L)/(C2TENT-C1TENT))
770  LET CO=L
780  LET S=(L-N*C1TENT)^(N-L)
790  FOR J=L TO N-L-KTENT
800  LET CO=CO*((N+L-CDBL(J))/CDBL(J))
810  LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-(N-CDBL(J))*C1TENT-CDBL(J)*C2TENT)^(N-L)
820  NEXT J
830  LET ALFATENT=L-S
840  IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 870
850  LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
860  GOTO 880
870  LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
880  IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 620
890  IF (CMAX-CMIN)/CMIN>=.00000001# THEN GOTO 620
900  LET Y=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT:LET K=KTENT
920  LET A=L
930  FOR J=L TO K
940  LET A=A*((N-CDBL(J))/CDBL(J))
960  NEXT J
970  LET PZ1=L-((-L)^K*A*(L/((K*C1+(N-L-K)*C2)*(D-L)+L))*((K*C1+(N-K)*C2-L)/(L+(
L/D-L)*C2))^(N-L))
980  LET S=(L/(((N-L)*C1)*(D-L)+L))*(((L-N*C1)/(L+(L/D-L)*C1))^(N-L)-((L-(N-L)*C
1-C2)/(L+(L/D-L)*C2))^(N-L))
990  LET CO=L:IF ABS(N-L-K)<.1 THEN GOTO 1040
1000 FOR J=L TO N-L-K
1010 LET CO=-CO*((N-CDBL(J))/CDBL(J))
1020 LET S=S+CO*(L/(((N-L-CDBL(J))*C1+CDBL(J)*C2)*(D-L)+L))*(((L-(N-CDBL(J))*C1-
CDBL(J)*C2)/(L+(L/D-L)*C1))^(N-L)-((L-(N-CDBL(J)-L)*C1-(CDBL(J)+L)*C2)/(L+(L/D-L
)*C2))^(N-L))
1030 NEXT J
1040 LET PZ1=PZ1-S
1050  LET P=C1/(L-C1):LET Q=C2/(L-C2)
1060  LET P=(L+P*(L/D))^(N-L):LET Q=(L+Q*(L/D))^(N-L)
1070  LET PZ2=L-(L/P-L/Q)
1080 LET DI=C2-C1:LET IN=((N-L)*C2-L)/DI
1090 LET IN1=INT(IN)
1100 IF IN1+L<0# GOTO 1120
1110 LET MAX=IN1+L:GOTO 1130
1120 LET MAX=0#
1130 LET S=(L/((-DI*(N-L-IN)+L)*(D-L)+L))*((DI*(N-L-IN))^(N-L))
1140 LET CO=L:IF ABS(N-L-MAX)<.1# THEN GOTO 1190
1150 FOR J=L TO N-L-MAX
1160 LET CO=CO*((N-CDBL(J))/CDBL(J))
```

```
1170 LET S=S+((-L)^CDBL(J))*CO*(L/((-DI*(N-L-CDBL(J)-IN)+L)*(D-L)+L))*((DI*(N-L-
CDBL(J)-IN))^(N-L))
1180 NEXT J
1190 LET PZ4=S+PZ1-L
3000 LPRINT "n=";N,"delta linha=";D
3010 LPRINT "alfa=";.05
3020 LPRINT
3030 LPRINT "c(u)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";X
3040 LPRINT "c(t)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";C
3050 LPRINT "c(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";Y
3051 LPRINT
3052 LPRINT "c1(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";C1
3053 LPRINT "c2(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";C2
3060 LPRINT
3070 LPRINT "p1(u)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PU1
3080 LPRINT "p1(t)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PT1
3090 LPRINT "p1(z)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PZ1
3100 LPRINT
3110 LPRINT "p2(u)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PU2
3120 LPRINT "p2(t)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PT2
3130 LPRINT "p2(z)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PZ2
3140 LPRINT
3150 LPRINT "p3(u)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PU3
3160 LPRINT "p3(t)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PT3
3170 LPRINT "p3(z)="
3180 LPRINT
3190 LPRINT "p4(u)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PU4
3200 LPRINT "p4(t)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PT4
3210 LPRINT "p4(z)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PZ4
3220 LPRINT
3230 LPRINT "p5(u)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PU5
3240 LPRINT "p5(t)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";PT5
3250 LPRINT "p5(z)="
```

P_3 da Estatística Z

$(\alpha = 0.05)$

```
10    REM p3 da estatistica z
20    DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40    LET U=1#
50    INPUT N:INPUT DL
60    REM rotina para calcular c1 e c2
70    LET CMIN=0#:LET CMAX=U/N*(U-U/N)^(N-U)
80    LET C1MIN=0#:LET C1MAX=U/N
90    LET C2MIN=U:LET C2MAX=U/N
100   LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
110   LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
120   LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
130   LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=C1TENT*(U-C1TENT)^(N-U)
140   LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=C2TENT*(U-C2TENT)^(N-U)
150   IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 170
160   LET C1MINL=C1TENT:GOTO 180
170   LET C1MAXL=C1TENT
180   IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 200
190   LET C2MINL=C2TENT:GOTO 210
200   LET C2MAXL=C2TENT
210   IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 130
220   IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 130
230   IF (C2MAXL-U/N)=0# THEN GOTO 250
240   IF ((U/N-C1MAXL)/(C2MINL-U/N))-((U/N-C1MINL)/(C2MAXL-U/N))>=.00001# THEN GO
TO 130
250   LET TENT=INT((N*C2TENT-U)/(C2TENT-C1TENT))
260   LET CO=U
270   LET S=(U-N*C1TENT)^(N-U)
280   FOR J=U TO N-U-TENT
290   LET CO=CO*((N+U-CDBL(J))/CDBL(J))
300   LET S=S+(-U)^CDBL(J)*CO*(U-(N-CDBL(J))*C1TENT-CDBL(J)*C2TENT)^(N-U)
310   NEXT J
320   LET ALFATENT=U-S
330   IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 360
340   LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
350   GOTO 370
360   LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
370   IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 100
380   IF ((CMAX-CMIN)/CMIN)>=.00000001# THEN GOTO 100
390   LET C=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT
400   REM calculo de p3=p1+p2
410   LET LMAX=1
420   LET PASSO=C1/CDBL(LMAX)
430   LET P3SUP=0#:LET P3INF=0#
440   LET P1OLD=1#:LET P2OLD=1#:LET GOLD=0#:LET HOLD=-1#
450   REM rem calculo de p3sup e p3inf
455   LET TETA2MIN=U
460   FOR K=1 TO LMAX
470   LET TETA1=CDBL(K)*PASSO
480   REM rotina para calcular teta2 a partir de teta1
490   LET FI=TETA1*(U-TETA1)^(N-U)
500   LET TETA2MAX=C2MAXL
510   LET TETA2T=(TETA2MIN+TETA2MAX)/2#:LET FITENT2=TETA2T*(U-TETA2T)^(N-U)
520   IF FITENT2>=FI THEN GOTO 540
530   LET TETA2MIN=TETA2T:GOTO 550
540   LET TETA2MAX=TETA2T
550   IF (TETA2MIN-TETA2MAX)/TETA2MAX>=.00001# THEN GOTO 510
560   LET TETA2=TETA2T
570   REM calculo de p1new e p2new
580   LET P1NEW=((U-N*TETA1)/(U-TETA1))^(N-2#):LET P2NEW=0#
590   LET IND=INT((U-N*TETA1)/(TETA2-TETA1)):LET COMB=U
600   FOR I=1 TO IND
610   LET F=U-(N-CDBL(I))*TETA1-CDBL(I)*TETA2
620   LET P2NEW=P2NEW+COMB*(F/(U-TETA2))^(N-2#)
630   LET COMB=COMB*(U-N/CDBL(I))
```

```
640  LET P1NEW=P1NEW+COMB*(F/(U-TETA1))^(N-2#)
650  NEXT I
660  REM calculo de gnew e hnew
670  LET GNEW=U/(U+(TETA2/(U-TETA2))/DL)^(N-U)
680  LET HNEW=-U/(U+(TETA1/(U-TETA1))/DL)^(N-U)
690  REM mais uma parcela do somatorio
700  LET P3SUP=P3SUP+P1OLD*(HNEW-HOLD)+P2OLD*(GNEW-GOLD)
710  LET P3INF=P3INF+P1NEW*(HNEW-HOLD)+P2NEW*(GNEW-GOLD)
720  REM os valores new passam a old antes de somar mais uma parcela do somatori
o
730  LET P1OLD=P1NEW:LET P2OLD=P2NEW:LET GOLD=GNEW:LET HOLD=HNEW
740  NEXT K
750  REM impresso no ecran
760  PRINT LMAX,P3SUP,P3INF
770  REM verificaao se ja servem os valores de p3
780  IF ABS((P3SUP-P3INF)/P3INF)<.001# THEN GOTO 800
790  LET LMAX=LMAX*2:GOTO 420
800  LET P3=(P3SUP+P3INF)/2#
810  REM impressao de c1 e de p3
820  LPRINT "n=";N,"delta linha=";DL
830  LPRINT "c1(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";C1
840  LPRINT "p3(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P3
```

P_6 da Estatística Z

$(\alpha = 0.05)$

```
10    REM p6      da estatistica z
20    DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40    LET U=1#
50    INPUT N:DATA 0.1#,0.2#,0.5#,0.7#,0.9#,0.99#,1#,1.01#,1.1#,1.5#,2#,5#,10#
60    READ DL
400   REM calculo de p6=p1+p2
410   LET LMAX=1
420   LET PASSO=U*.999#/(N*CDBL(LMAX))
430   LET P6SUP=0#:LET P6INF=0#
440   LET P1OLD=1#:LET P2OLD=1#:LET GOLD=0#:LET HOLD=-1#
450   REM rem calculo de p6sup e p6inf
455   LET TETA2MIN=U
460   FOR K=1 TO LMAX
470   LET TETA1=CDBL(K)*PASSO
480   REM rotina para calcular teta2 a partir de teta1
490   LET FI=TETA1*(U-TETA1)^(N-U)
500   LET TETA2MAX=U/N
510   LET TETA2T=(TETA2MIN+TETA2MAX)/2#:LET FITENT2=TETA2T*(U-TETA2T)^(N-U)
520   IF FITENT2>=FI THEN GOTO 540
530   LET TETA2MIN=TETA2T:GOTO 550
540   LET TETA2MAX=TETA2T
550   IF (TETA2MIN-TETA2MAX)/TETA2MAX>=.00001# THEN GOTO 510
560   LET TETA2=TETA2T
570   REM calculo de p1new e p2new
580   LET P1NEW=((U-N*TETA1)/(U-TETA1))^(N-2#):LET P2NEW=0#
590   LET IND=INT((U-N*TETA1)/(TETA2-TETA1)):LET COMB=U
600   FOR I=1 TO IND
610   LET F=U-(N-CDBL(I))*TETA1-CDBL(I)*TETA2
620   LET P2NEW=P2NEW+COMB*(F/(U-TETA2))^(N-2#)
630   LET COMB=COMB*(U-N/CDBL(I))
640   LET P1NEW=P1NEW+COMB*(F/(U-TETA1))^(N-2#)
650   NEXT I
660   REM calculo de gnew e hnew
670   LET GNEW=U/(U+(TETA2/(U-TETA2))/DL)^(N-U)
680   LET HNEW=-U/(U+(TETA1/(U-TETA1))/DL)^(N-U)
690   REM mais uma parcela do somatorio
700   LET P6SUP=P6SUP+P1OLD*(HNEW-HOLD)+P2OLD*(GNEW-GOLD)
710   LET P6INF=P6INF+P1NEW*(HNEW-HOLD)+P2NEW*(GNEW-GOLD)
720   REM os valores new passam a old antes de somar mais uma parcela do somatori
o
730   LET P1OLD=P1NEW:LET P2OLD=P2NEW:LET GOLD=GNEW:LET HOLD=HNEW
740   NEXT K
750   REM impresso no ecran
760   PRINT LMAX,P6SUP,P6INF
770   REM verificaao se ja servem os valores de p6
780   IF ABS((P6SUP-P6INF)/P6INF)<.001# THEN GOTO 800
790   LET LMAX=LMAX*2:GOTO 420
800   LET P6=(P6SUP+P6INF)/2#
810   REM impressao de p6
820   LPRINT "n=";N,"delta linha=";DL
840   LPRINT "p6(z)=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P6
850   GOTO 60
```

P_1, P_3 e P_7 da Estatística D

$(\alpha = 0.05)$

```
10  LPRINT
20   DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40   LET U=1#
50   INPUT N:INPUT D
60   REM rotina para calcular c1 e c2
70   LET CMIN=0#:LET CMAX=EXP(-1)
80   LET C1MIN=0#:LET C1MAX=U
90   LET C2MIN=1000#:LET C2MAX=U
100  LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
110  LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
120  LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
130  LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=C1TENT*EXP(-C1TENT)
140  LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=C2TENT*EXP(-C2TENT)
150  IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 170
160  LET C1MINL=C1TENT:GOTO 180
170  LET C1MAXL=C1TENT
180  IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 200
190  LET C2MINL=C2TENT:GOTO 210
200  LET C2MAXL=C2TENT
210  IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 130
220  IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 130
230  IF (C2MAXL-U)=0# THEN GOTO 250
240  IF ((U-C1MAXL)/(C2MINL-U))-((U-C1MINL)/(C2MAXL-U))>=.00001# THEN GOTO 130
320  LET ALFATENT=U-(EXP(-C1TENT)-EXP(-C2TENT))^N
330  IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 360
340  LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
350  GOTO 370
360  LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
370  IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 100
380  IF ((CMAX-CMIN)/CMIN)>=.00000001# THEN GOTO 100
390  LET C=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT
830  LPRINT "n=";N,"d=";D
840  LPRINT "c(d)=";C
850  LET A=(EXP(-C1/D)-EXP(-C2/D))
880  LET P1=U-.95#^(U-U/N)*A
890  REM calculo de p3
900  LET LMAX=1
910  LET PASSO=C1/CDBL(LMAX)
920  LET P3SUP=0#:LET P3INF=0#
930  LET E1OLD=U:LET E2OLD=0#:LET LOLD=-U
940  REM calculo de p3sup e p3inf
950  LET TETA2MIN=1000#
960  FOR K=1 TO LMAX
970  LET TETA1=CDBL(K)*PASSO
980  REM rotina para calcular teta2 a partir de teta1
990  LET TETA2MAX=C2MAXL:LET PSI=TETA1*EXP(-TETA1)
1000 LET TETA2=(TETA2MIN+TETA2MAX)/2#
1010 IF ABS(TETA2*EXP(-TETA2)-PSI)<=.00001# THEN GOTO 1060
1020 IF TETA2*EXP(-TETA2)<PSI THEN GOTO 1040
1030 LET TETA2MAX=TETA2:GOTO 1050
1040 LET TETA2MIN=TETA2
1050 GOTO 1000
1060 REM calculo de e1new,e2new,lnew
1070 LET E1NEW=EXP(-TETA1)
1080 LET E2NEW=EXP(-TETA2)
1090 LET LNEW=EXP(-TETA2/D)-EXP(-TETA1/D)
1100 REM mais uma parcela no somatorio
1110 LET P3SUP=P3SUP+(E1OLD-E2OLD)^(N-U)*(LNEW-LOLD)
1120 LET P3INF=P3INF+(E1NEW-E2NEW)^(N-U)*(LNEW-LOLD)
1130 REM os valores passam a old antes de somar mais uma parcela do somatorio
1140 LET E1OLD=E1NEW:LET E2OLD=E2NEW:LET LOLD=LNEW
1150 NEXT K
1160 REM verificaao se ja servem os valores de p3
1170 IF ABS((P3SUP-P3INF)/P3INF)<.001# THEN GOTO 1190
```

```
1180 LET LMAX=LMAX*2:GOTO 910
1190 LET P3=(P3SUP+P3INF)/2#
2000 LPRINT "p1(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P1
2010 LPRINT "p3(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P3
2020 LPRINT "p7(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P1-P3
```

P_2 e P_4 da Estatística D

($\alpha = 0.05$)

```
10  LPRINT
20   DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40   LET U=1#
50   INPUT N:INPUT D
60   REM rotina para calcular c1 e c2
70   LET CMIN=0#:LET CMAX=EXP(-1)
80   LET C1MIN=0#:LET C1MAX=U
90   LET C2MIN=1000#:LET C2MAX=U
100  LET CTENT=(CMIN+CMAX)/2#
110  LET C1MINL=C1MIN:LET C1MAXL=C1MAX
120  LET C2MINL=C2MIN:LET C2MAXL=C2MAX
130  LET C1TENT=(C1MINL+C1MAXL)/2#:LET FITENT1=C1TENT*EXP(-C1TENT)
140  LET C2TENT=(C2MINL+C2MAXL)/2#:LET FITENT2=C2TENT*EXP(-C2TENT)
150  IF FITENT1>=CTENT THEN GOTO 170
160  LET C1MINL=C1TENT:GOTO 180
170  LET C1MAXL=C1TENT
180  IF FITENT2>=CTENT THEN GOTO 200
190  LET C2MINL=C2TENT:GOTO 210
200  LET C2MAXL=C2TENT
210  IF (C1MAXL-C1MINL)/(C1MINL)>=.00000001# THEN GOTO 130
220  IF (C2MINL-C2MAXL)/(C2MAXL)>=.00000001# THEN GOTO 130
230  IF (C2MAXL-U)=0# THEN GOTO 250
240  IF ((U-C1MAXL)/(C2MINL-U))-((U-C1MINL)/(C2MAXL-U))>=.00001# THEN GOTO 130
320  LET ALFATENT=U-(EXP(-C1TENT)-EXP(-C2TENT))^N
330  IF ALFATENT>=.05# THEN GOTO 360
340  LET CMIN=CTENT:LET C1MIN=C1TENT:LET C2MIN=C2TENT
350  GOTO 370
360  LET CMAX=CTENT:LET C1MAX=C1TENT:LET C2MAX=C2TENT
370  IF ABS(.05#-ALFATENT)>=.000000001# THEN GOTO 100
380  IF ((CMAX-CMIN)/CMIN)>=.00000001# THEN GOTO 100
390  LET C=CTENT:LET C1=C1TENT:LET C2=C2TENT
830  LPRINT "n=";N,"d=";D
840  LPRINT "c(d)=";C
850  LET A=(EXP(-C1/D)-EXP(-C2/D))
860  LET P2=U-A
870  LET P4=P2*((EXP(-C1)-EXP(-C2))^(N-U))
2000 LPRINT "p2(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P2
2010 LPRINT "p4(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P4
```

P_6 da Estatística D

($\alpha = 0.05$)

```
10  LPRINT
20   DEFDBL A-H:DEFDBL M-Z
40   LET U=1#
50   INPUT N:DATA 0.1#,0.2#,0.5#,0.7#,0.9#,0.99#,1#,1.01#,1.1#,1.5#,2#,5#,10#
60   READ D
830  LPRINT "n=";N,"d=";D
890  REM calculo de p6
900  LET LMAX=6000
910  LET PASSO=U/CDBL(LMAX)
920  LET P6SUP=0#:LET P6INF=0#
930  LET E1OLD=U:LET E2OLD=0#:LET LOLD=-U
940  REM calculo de p6sup e p6inf
950  LET TETA2MIN=1000#
960  FOR K=1 TO LMAX
970  LET TETA1=CDBL(K)*PASSO
980  REM rotina para calcular teta2 a partir de teta1
990  LET TETA2MAX=U:LET PSI=TETA1*EXP(-TETA1)
1000 LET TETA2=(TETA2MIN+TETA2MAX)/2#
1010 IF ABS(TETA2*EXP(-TETA2)-PSI)<=.00001# THEN GOTO 1060
1020 IF TETA2*EXP(-TETA2)<PSI THEN GOTO 1040
1030 LET TETA2MAX=TETA2:GOTO 1050
1040 LET TETA2MIN=TETA2
1050 GOTO 1000
1060 REM calculo de e1new,e2new,lnew
1070 LET E1NEW=EXP(-TETA1)
1080 LET E2NEW=EXP(-TETA2)
1090 LET LNEW=EXP(-TETA2/D)-EXP(-TETA1/D)
1100 REM mais uma parcela no somatorio
1110 LET P6SUP=P6SUP+(E1OLD-E2OLD)^(N-U)*(LNEW-LOLD)
1120 LET P6INF=P6INF+(E1NEW-E2NEW)^(N-U)*(LNEW-LOLD)
1130 REM os valores passam a old antes de somar mais uma parcela do somatorio
1140 LET E1OLD=E1NEW:LET E2OLD=E2NEW:LET LOLD=LNEW
1150 NEXT K
1160 REM verifica  se ja servem os valores de p6
1170 IF ABS((P6SUP-P6INF)/P6INF)<.001# THEN GOTO 1190
1180 LET LMAX=LMAX*2:GOTO 910
1190 LET P6=(P6SUP+P6INF)/2#
2000 LPRINT "p6(d)=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P6
2010 GOTO 60
```

Medidas de "Performance" da Estatística B′

($\alpha = 0.05$)

```
10  REM valores criticos e medidas de performance da estatistica b'
20  DEFDBL A-H:DEFDBL L-Z
30  LET L=1#
40  INPUT N:DATA 0.1#,0.2#,0.5#,0.7#,0.9#,0.99#,1#,1.01#,1.1#,1.5#,2#,5#,10#
45  READ D
50  C=-LOG(L-.95#^(L/(N-L)))
60  P1=L-((N-L)/(N-L+L/D))*.95#*(L/(D*(N-L))+((L-EXP(-C/D))/(L-EXP(-C))))
80  P2=((N-L)*EXP(-C/D))/(N-L+L/D)
100 LET A=(N-L)/(N-L+L/D):LET S=A
110 FOR K=1 TO INT(N+.1)-2
115 A=A*EXP(-C)*((N-L)/K-L)*(L/(K+L/D)-L)
120 LET S=S+A
130 NEXT K
140 P3=EXP(-C/D)*S
150 P4=(L-EXP(-C))^(N-2#)*EXP(-C/D)*((N-L)/(N-L+L/D))
160 P6=L
170 FOR I=1 TO INT(N+.1)-1
180 P6=P6*(I/(L/D+I))
190 NEXT I
200 LET P5=P3/P6
210 LET P7=P1-P3
214 LPRINT
215 LPRINT D
216 LPRINT
220 LPRINT "p1(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P1
230 LPRINT "p2(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P2
240 LPRINT "p3(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P3
250 LPRINT "p4(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P4
260 LPRINT "p5(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P5
270 LPRINT "p6(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P6
280 LPRINT "p7(b')=";:LPRINT USING "#.########^^^^";P7
290 GOTO 45
```

Medidas de "Performance" da Estatística T′

($\alpha = 0.05$)

```
1  REM valores criticos e medidas de performance da estatistica t'
5  DEFDBL A-I:DEFDBL K-Z
6  LET L=1#
10 INPUT N:DATA 0.1#,0.2#,0.5#,0.7#,0.9#,0.99#,1#,1.01#,1.1#,1.5#,2#,5#,10#
15 READ D
20 LET K=L:LET S1=L
30 LET K=K+L:LET C=L/K
40 LET S=L:LET CO=L
50 FOR J=L TO K-L
60 LET CO=(N/CDBL(J)-L)*CO
70 LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-2#)
80 NEXT J
90 LET S2=S1:LET S1=S
100 IF S1>.95# THEN GOTO 30
110 LET C1=L/K:LET C2=L/(K-L):LET C=(C1+C2)/2#
120 IF (C2-C1)/C1<.00000001# THEN GOTO 300
130 LET S=L:LET CO=L
140 FOR J=L TO K-L
150 LET CO=(N/CDBL(J)-L)*CO
160 LET S=S+(-L)^CDBL(J)*CO*(L-CDBL(J)*C)^(N-2#)
170 NEXT J
180 IF S<.95# THEN GOTO 200
190 LET C2=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 120
200 LET C1=C:LET C=(C1+C2)/2#:GOTO 120
300 LET F=L+(L/D-L)*C:LET A=N-L+L/D
310 LET G=L
320 LET P2=(N-L)*(((L-C)/F)^(N-2#))/A
330 LET P1=0#:P3=0#:P4=0#:H=L
340 FOR J=L TO K-L
350 LET G=G*(L-N/CDBL(J))
360 LET D1=(L-CDBL(J)*C)^(N-2#)
370 LET E=((L-CDBL(J)*C)/F)^(N-2#)
380 LET P4=P4+G*(CDBL(J)/H)*E
390 LET P1=P1+G*(CDBL(J)*D/H)*E
400 LET H=L+(D-L)*CDBL(J)*C
410 LET P1=P1+G*(L+((N-L-CDBL(J))*D)/H)*D1
420 LET P3=P3+G*(CDBL(J)/(L+(CDBL(J)-L)*D))*E
430 NEXT J
440 LET P1=-P1/(D*A)
450 LET P3=-P3/A
460 LET P4=-P4/A
470 LET P6=((N-L)/(N-L+L/D))^(N-L):LET G=P6
480 FOR J=L TO N-2#
490 LET G=G*(L-N/CDBL(J))*((L+CDBL(J-L)*D)/(L+CDBL(J)*D))*(L-L/(N-CDBL(J)))^(N-L
)
500 LET P6=P6+G
510 NEXT J
520 LET P5=P3/P6
530 LET P7=P1-P3
534 LPRINT
535 LPRINT "n=";N
536 LPRINT "d=";D
540 LPRINT "c(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";C
550 LPRINT "p1(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P1
560 LPRINT "p2(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P2
570 LPRINT "p3(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P3
580 LPRINT "p4(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P4
590 LPRINT "p5(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P5
600 LPRINT "p6(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P6
610 LPRINT "p7(t')=";:LPRINT USING "#.##########^^^^";P7
620 GOTO 15
```

APÊNDICE C

Na página 49 de Hawkins (1980) pode ler-se (sendo $W=\Sigma X_i$): *It is not entirely trivial to set up a test for the hypothesis that one variance has slipped, but the direction of the slip is unspecified. An obviously "sensible" procedure is to accept H_0 if neither $X_{(1)}/W$ nor $X_{(n)}/W$ is significant. Suitable conservative fractiles may be found by using the $\alpha/2$ fractile of each statistic. If the null hypothesis is rejected then one rejects the more significant of $X_{(n)}$ and $X_{(1)}$. The optimality of this procedure seems not to have been proved, ...*

Uma vez que tínhamos hipótese de verificar esta afirmação com os resultados obtidos neste trabalho, fomos fazê-lo. Para isso determinámos os valores críticos das estatísticas U e T com α=0.025 (os quais se encontram na página seguinte) e comparámo-los respectivamente com c_1 e c_2 da estatística Z com α=0.05, apresentados no capítulo IV. Os resultados não confirmaram a afirmação acima transcrita.

Valores Críticos das Estatísticas U e T

($\alpha = 0.025$)

n	U	T
3	0.4193E-2	0.9087
4	0.2101E-2	0.8158
5	0.1262E-2	0.7341
6	0.8418E-3	0.6658
7	0.6015E-3	0.6090
8	0.4513E-3	0.5613
9	0.3511E-3	0.5209
10	0.2809E-3	0.4861
11	0.2299E-3	0.4559
12	0.1916E-3	0.4295
13	0.1621E-3	0.4062
14	0.1390E-3	0.3854
15	0.1205E-3	0.3668
16	0.1054E-3	0.3500
17	0.9301E-4	0.3348
18	0.8268E-4	0.3209
19	0.7398E-4	0.3082
20	0.6658E-4	0.2966
21	0.6024E-4	0.2858
22	0.5477E-4	0.2759
23	0.5001E-4	0.2667
24	0.4584E-4	0.2581
25	0.4217E-4	0.2501
26	0.3893E-4	0.2426
27	0.3605E-4	0.2356
28	0.3347E-4	0.2290
29	0.3117E-4	0.2227
30	0.2909E-4	0.2169
31	0.2721E-4	0.2113
32	0.2551E-4	0.2061
33	0.2397E-4	0.2011
34	0.2256E-4	0.1964
35	0.2127E-4	0.1919
36	0.2009E-4	0.1876
37	0.1900E-4	0.1835
38	0.1800E-4	0.1796
39	0.1708E-4	0.1759
40	0.1622E-4	0.1723
41	0.1543E-4	0.1689
42	0.1470E-4	0.1656
43	0.1401E-4	0.1625
44	0.1338E-4	0.1595
45	0.1278E-4	0.1566
46	0.1223E-4	0.1538
47	0.1170E-4	0.1511
48	0.1122E-4	0.1485
49	0.1076E-4	0.1460
50	0.1033E-4	0.1436

n	U	T
51	0.9926E-5	0.1413
52	0.9544E-5	0.1391
53	0.9184E-5	0.1369
54	0.8844E-5	0.1348
55	0.8523E-5	0.1328
56	0.8218E-5	0.1308
57	0.7930E-5	0.1289
58	0.7656E-5	0.1271
59	0.7397E-5	0.1253
60	0.7150E-5	0.1235
61	0.6916E-5	0.1218
62	0.6693E-5	0.1202
63	0.6480E-5	0.1186
64	0.6278E-5	0.1171
65	0.6085E-5	0.1156
66	0.5900E-5	0.1141
67	0.5724E-5	0.1127
68	0.5556E-5	0.1113
69	0.5395E-5	0.1099
70	0.5241E-5	0.1086
71	0.5093E-5	0.1073
72	0.4952E-5	0.1061
73	0.4816E-5	0.1048
74	0.4686E-5	0.1037
75	0.4561E-5	0.1025
76	0.4441E-5	0.1014
77	0.4326E-5	0.1002
78	0.4215E-5	0.9916E-1
79	0.4108E-5	0.9810E-1
80	0.4005E-5	0.9706E-1
81	0.3906E-5	0.9605E-1
82	0.3811E-5	0.9506E-1
83	0.3719E-5	0.9409E-1
84	0.3631E-5	0.9314E-1
85	0.3545E-5	0.9221E-1
86	0.3463E-5	0.9130E-1
87	0.3383E-5	0.9041E-1
88	0.3306E-5	0.8954E-1
89	0.3232E-5	0.8868E-1
90	0.3160E-5	0.8785E-1
91	0.3091E-5	0.8703E-1
92	0.3024E-5	0.8622E-1
93	0.2959E-5	0.8543E-1
94	0.2896E-5	0.8466E-1
95	0.2835E-5	0.8390E-1
96	0.2776E-5	0.8315E-1
97	0.2718E-5	0.8242E-1
98	0.2663E-5	0.8171E-1
99	0.2609E-5	0.8100E-1
100	0.2557E-5	0.8031E-1

Bibliografia

BIBLIOGRAFIA

Abramowitz, M. e Stegun, I.A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, Inc., New York.

Barnett, V. e Lewis, T. (1984). *Outliers in Statistical Data.* John Wiley & Sons, New York.

Basu, A.P. (1965). On some Tests of Hypothesis Relating to the Exponencial Distribution when some Outliers are Presented. *J. Amer. Statist. Assn.*, **60**, 548-559. *Corr. J. Amer. Statist. Assn.*, **60**, 1249.

Braumann, M.M. (1989). *Testes de Discordância para "Outliers" em Populações Normais e Gama.* Trabalho de síntese apresentado nas Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica. Universidade de Évora.

Braumann, M.M. (1993). *Estatísticas de Teste para Detecção de "Outliers" em Populações Exponenciais.* Participação da Sociedade Portuguesa de Estatística no I Congreso Ibero-Americano de Estadística e Investigación Operativa, Cáceres. Editado por Dinis Pestana. Edições Salamandra, Lda., Lisboa.

David, H.A. (1981). *Order Statistics.* John Wiley & Sons, Inc., New York.

Dixon, W.J. (1950). Analysis of Extreme Values. *Ann. Math. Statist.*, 21, 488-506.

Dixon, W.J. (1951). Ratios Involving Extreme Values. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 68-78.

Fisher, R.A. (1929). Tests of Significance in Harmonic Analysis. *Proc. Roy. Soc. A*, **125**, 54-59.

Fisz, M. (1963). *Probability Theory and Mathematical Statistics.* John Wiley & Sons, New York.

Hawkins, D.M. (1980). *Identification of Outliers.* Chapman and Hall.

Joshi, P.C. (1972). Efficient Estimation of the Mean of an Exponencial Distribution when an Outlier is Presented. *Technometrics,* **14**, nº 1, 137-143.

Kabe, D.G. (1970). Testing Outliers from an Exponential Population. *Metrika,* **15**, 15-18.

Kale, B.K. e Sinha, S. K. (1971). Estimation of Expected Life in the Presence of an Outlier Observation. *Technometrics,* **13**, nº4, 755-759.

Kendall, M.G. e Stuart, A. (1961). *The Advanced Theory of Statistics.* Charles Griffin & Co. Ltd., London.

Kimber, A.C. (1979). Tests for a Single Outlier in a Gamma Sample with Unknown Shape and Scale Parameters. *Appl. Statist.,* **28**, nº3, 343-250.

Kimber, A.C. (1990). Exploratory Data Analysis for Possibly Censored Data from Skewed Distributions. *Appl. Statist.,* **39**, nº1, 21-30.

Lewis, T. e Fieller, N.R.J. (1979). A Recursive Algorithm for Null Distributions for Outliers: I. Gamma Sample. *Technometrics,* **21**, nº3, 371-376.

Likes, J. (1966). Distribution of Dixon's Statistics in the case of an Exponential Population. *Metrika,* **11**, 46-54.

Loève, M. (1977). *Probability Theory I.* Springer-Verlag, New York.

Loève, M. (1978). *Probability Theory II.* Springer-Verlag, New York.

Munõz-Garcia, J., Moreno-Rebollo, J.L. e Pascual-Acosta, A. (1990). Outliers: A Formal Approach. *International Statistical Review,* **58**, nº3, 215-226.

Ochran, H.G. (1941). The Distribution of the Largest of a Set of Estimated Variances as a Fraction of their Total. *Ann. Eugen.,* 11, 47-52.

Patel, J., Kapadia, C.H. e Owen, D.B. (1976). *Handbook of Statistical Distributions.* Marcel Dekker, Inc., New York.

Patil, S.A., Kouner, J.L. e King, R.M. (1977). Tables of Percentage Points of Ratios of Linear Combinations of Order Statistics of Samples from Exponential Distributions. *Commun. Statist. B,* **6**, 115-136.

Rosado, F.F. (1984 a). *Existência e Detecção de "Outliers". Uma Abordagem Metodológica.* Tese de doutoramento. Faculdade de Ciências / Univ. de Lisboa.

Rosado, F.F. (1984 b). The Null Distribution Function of Discordancy Tests for Outliers in Exponencial Populations. *Metron* **XLII**, nº 1-2, 51-57.

Rosado, F.F. (1987). Outliers in Exponential Populations. *Metron* **XLV**, nº 1-2, 85-91.

Rosado, F.F. e Braumann, M.M. (1990). Critical Values for a Lower Outlier in a Gamma Sample. *Metron* **XLVIII**, nº1-4, 19-25.

Tiago de Oliveira, J. (1990). *Probabilidades e Estatística. Conceitos, Métodos e Aplicações.* Vol. I e II. Editora McGraw-Hill de Portugal, Lda.

Vaughan, R.J. e Venables, W.N. (1972). Comments and Queries. Permanent Expressions for Order Statistical Densities. *J. Roy. Statist. Soc., Ser.B,* **34**, 308-310.

Wilks, S.S. (1938). The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses. *American Mathematical Society,* **9**, 60-62.