

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Issues of Universal Feasibility and Multiplier Adjustment
in Data Envelopment Analysis (DEA) with an application

Jorge Manuel Azevedo Santos

Sob a orientação do
Professor J. H. Dulá

Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Issues of Universal Feasibility and Multiplier Adjustment
in Data Envelopment Analysis (DEA) with an application

Jorge Manuel Azevedo Santos

Sob a orientação do
Professor J. H. Dulá

Esta tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri



171 889

Resumo

O objectivo desta tese é o estudo dos casos de ausência de soluções admissíveis e desenvolvimento de modelos que contornem esse inconveniente que surge nos modelos de determinação de eficiência.

Na prática esse problema só se põe nos modelos com rendimentos de escala variáveis (*Variable Returns to Scale*), o vulgo modelo BCC. São expostas várias soluções para esse problema, que passam quer pela relaxação da restrição da convexidade, conduzindo a um modelo novo e original – O Modelo Homotético; quer pela relaxação da restrição da não negatividade conduzindo a problemas de decomposição facial, bem como soluções baseadas em técnicas de regressão e simulação e ainda pela introdução de Unidades Organizacionais fictícias.

Dadas as boas propriedades do modelo de Bognol e Dulá, no que respeita quer à invariância (referente à escala, ou à origem dos eixos) quer à admissibilidade, esse modelo foi alvo de uma formulação completamente nova baseada em programação linear binária mista, obtendo-se resultados muito mais rápidos que os usuais que chegavam a usar dias de CPU.

Outro objectivo proposto que também foi conseguido foi a implementação de um sistema original de ajuste dos pesos por técnicas não lineares de Programação por Metas. Esse sistema articula-se com o primeiro problema, o da ausência de soluções admissíveis, e mostra-se com um caso de aplicação prática a resolução desse problema pelas técnicas de ajuste de pesos.

Abstract

The aim of this thesis is to study Universal Feasibility and to develop a new Multiplier Adjustment in Data Envelopment Analysis.

Infeasibility in Data Envelopment Analysis appears after the introduction of the deleted domain or superefficiency technique by Banker et al. in 1989, but this technique was really put to use by Andersen and Petersen in 1993. This technique, especially in the variable returns to scale models, originated unfeasible programs. It is an interesting field of research to study under which conditions such problems arise, and find some solution for it.

Relaxation of the convexity constraint leads to a new original model, the homothetic one. By relaxing the non-negativity constraint one delves in programs of facial decomposition. Solutions by simulation and regression are studied, as well as the inclusion of artificial points.

In the spirit of universal feasibility, Bournol and Dulá developed a new model in 2001 that has very good properties concerning invariance (scale and translation invariance) and feasibility; it had a drawback of being demanding in time and computation. In order to solve this problem an original faster mixed integer linear formulation was developed.

The problem of unfeasibility is related to unboundness in its dual, so a properly tuned scheme of weight restrictions can fix that problem. This is accomplished as a subproduct of the new weight adjustment technique.

Finally, the removal of unfeasibility by this new weight adjustment scheme is demonstrated in real data.

Índice

RESUMO.....	2
ABSTRACT	3
ÍNDICE DE FIGURAS	7
AGRADECIMENTOS.....	11
INTRODUÇÃO.....	12
CAPÍTULO 1. A MEDIÇÃO DA EFICIÊNCIA	16
CAPÍTULO 2. AS TÉCNICAS DE <i>DATA ENVELOPMENT ANALYSIS</i>	19
CAPÍTULO 3. A SUPEREFICIÊNCIA	52
CAPÍTULO 4. MODELOS NÃO LINEARES EM <i>DATA ENVELOPMENT ANALYSIS</i>	61
CAPÍTULO 5. A INEXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSSÍVEIS EM SUPEREFICIÊNCIA	72
CAPÍTULO 6. MÚLTIPLAS CONSTITUÊNCIAS.....	88
CAPÍTULO 7. AJUSTE DOS MULTIPLICADORES EM <i>DEA</i>	100
CAPÍTULO 8. APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS ANTERIORES A UM CASO REAL.	115
CONCLUSÕES.....	123
BIBLIOGRAFIA.....	125
ANEXO 1 – FORMULAÇÕES PARA OS MODELOS CCR E BCC	132
ANEXO 2 – AJUSTE DOS PESOS A DADOS GERADOS ARTIFICIALMENTE	136
ANEXO3 - CORRELAÇÕES ENTRE AS 26 VARIÁVEIS DO CAPÍTULO 8.....	138

Sumário

RESUMO.....	2
ABSTRACT	3
ÍNDICE DE FIGURAS	7
AGRADECIMENTOS.....	11
INTRODUÇÃO.....	12
CAPÍTULO 1. A MEDIÇÃO DA EFICIÊNCIA	16
1.1. A eficiência	17
1.2. Especificação e estimação de funções fronteira.....	17
CAPÍTULO 2. AS TÉCNICAS DE <i>DATA ENVELOPMENT ANALYSIS</i>.....	19
2.1. Introdução	19
2.2. Uma breve visão histórica.....	20
2.2.1. O trabalho de Farrell ou os primórdios das técnicas de Data Envelopment Analysis	23
2.2.2. O modelo Charnes Cooper e Rhodes.....	24
2.2.3. O modelo Banker Charnes e Cooper	30
2.2.4. O modelo aditivo	33
2.3. O exemplo a expor	34
2.4. Economias com rendimentos constantes à escala.....	35
2.4.1. Um <i>Input</i> e apenas um <i>Output</i>	36
2.4.2. Um <i>Input</i> e dois <i>Outputs</i>	38
2.4.3. Dois <i>Inputs</i> e um <i>Output</i>	43
2.5. Economias com rendimentos variáveis à escala	46
2.5.1. Aplicação ao exemplo.....	46
CAPÍTULO 3. A SUPEREFICIÊNCIA	52
3.1. A Supereficiência para o modelo CCR.....	52
3.2. A Supereficiência para o modelo BCC.....	54
CAPÍTULO 4. MODELOS NÃO LINEARES EM <i>DATA ENVELOPMENT ANALYSIS</i>.....	61
4.1. Modelos combinatórios.....	61
4.2. Modelos não lineares contínuos.....	68
CAPÍTULO 5. A INEXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSSÍVEIS EM SUPEREFICIÊNCIA	72
5.1. O modelo CCR.....	73
5.2. O modelo BCC.....	73

5.2.1. O modelo BCC de Banker e Gifford.....	74
5.2.2. Aplicação de técnicas estocásticas ao modelo BCC	76
5.2.3. Aplicação de técnicas de relaxação ao modelo BCC	78
5.2.4. Inclusão de unidades artificiais e restrições aos pesos.....	86
5.3. Conclusões	87
CAPÍTULO 6. MÚLTIPLAS CONSTITUÊNCIAS.....	88
6.1. Introdução	88
6.2. Um modelo misto binário linear	93
6.3. Tempos de processamento	97
6.4. Conclusões	98
CAPÍTULO 7. AJUSTE DOS MULTIPLICADORES EM DEA	100
7.1. Introdução	100
7.2. Exemplo com penalidade quadrática, resolução gráfica.....	103
7.3. Exemplo para dados dispostos em camadas concêntricas	107
7.4. Exemplo com penalidade monomial.....	109
7.5. Aplicação do algoritmo de Karmakar ao ajuste de pesos.....	111
7.6. Conclusões	113
CAPÍTULO 8. APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS ANTERIORES A UM CASO REAL.	115
8.1. Introdução	115
8.2. Material e métodos.....	116
8.3. Escolha de variáveis.....	116
8.4. Resultados.....	117
8.4.1. Resultados do software EMS.....	117
8.4.2. Resultados do software EMS com o DMU fictício.....	119
8.4.3. Aplicação do modelo BCC homotético	119
8.4.4. Distribuição dos pesos com penalidades.....	120
8.5. Conclusão.....	122
CONCLUSÕES.....	123
BIBLIOGRAFIA.....	125
ANEXO 1 – FORMULAÇÕES PARA OS MODELOS CCR E BCC	132
ANEXO 2 – AJUSTE DOS PESOS A DADOS GERADOS ARTIFICIALMENTE	136
ANEXO 3 - CORRELAÇÕES ENTRE AS 26 VARIÁVEIS DO CAPÍTULO 8.....	138

Índice de figuras

Figura 1.1 Conjunto de possibilidades de produção.....	16
Figura 2.1 Corte no espaço de possibilidades de produção à cota 1.....	24
Figura 2.2: Fronteiras de eficiência para os modelos BCC e CCR.....	31
Figura 2.3: Representação dos 12 DMUs em termos do <i>Output</i> y_1 e do <i>Input</i> x_1	36
Figura 2.4: Minimização de <i>Inputs</i> - representação no plano, dos dados e respectiva envolvente	39
Figura 2.5: Representação gráfica da formulação recíproca.....	44
Figura 2.6: Modelo BCC minimização do <i>Input</i>	46
Figura 3.1 DMU C eficiente e robusto.	53
Figura 3.2: DMU C' eficiente mas pouco robusto.	53
Figura 3.3: Corte da fronteira de eficiência à cota <i>Output</i> $I=1$	55
Figura 3.4: DMU Supereficiente mas com folga.....	56
Figura 3.5:DMU Supereficiente mas com um DMU ineficiente no seu grupo de referência.	57
Figura 3.6: Exemplo para o modelo BCC	58
Figura 3.7: Exemplo de ambiguidade dos pesos para o modelo BCC.....	59
Figura 4.1 Exemplo de tipo de envolvimento das unidades	62
Figura 4.2 Exemplo de tecnologia não convexa e descontínua: FDH.....	64
Figura 5.1 Representação gráfica de dois DMUs ambos BCC eficientes mas com grandes diferenças na sua eficiência CCR e à escala.....	75
Figura 5.2: Exemplo para o uso dum combinação afim	78
Figura 5.3 Ilustração do modelo Homotético	86
Figura 6.1: Fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e 4 constituências	92
Figura 6.2: Envolvente convexa dos oito DMUs da Tabela 6.1	96
Figura 6.3 Tempos de resolução para 24 instâncias.	97
Figura 6.4: Tempos de resolução para 120 DMUs com uma distribuição Normal em 7 dimensões.....	98
Figura 7.1: DMU F é apenas referente de si próprio.	101
Figura 7.2: Resolução gráfica do problema dos pesos.	104
Figura 7.3: Resolução gráfica do problema dos pesos com penalidade quadrática para o DMU10.	106
Figura 7.4 Dados usados para o exemplo de desvio em torno da média.	107
Figura 7.5 Resultados para a supereficiência no exemplo penalizando o desvio em torno da média.	108

Figura 7.6 Resultados para os multiplicadores (pesos) no exemplo penalizando o desvio em torno da média.....	108
Figura 7.7: Resolução gráfica do problema dos pesos com penalidade monomial para o DMU 10.....	110
Figura 8.1: Dendrograma da análise hierárquica das variáveis	117

Índice de tabelas

Tabela 2.1 Representação matricial (esquemática) do modelo CCR, problema dos pesos.	28
Tabela 2.2: Representação matricial (esquemática) do modelo CCR, problema da envolvente.	29
Tabela 2.3: Dados do exemplo a apresentar	35
Tabela 2.4: Eficiência (y_1, x_1) e escalares λ_3 para max. de <i>Outputs</i> ($\lambda_3 O$) e para min. de <i>Inputs</i> ($\lambda_3 I$)	38
Tabela 2.5: <i>Outputs</i> normalizados pelo <i>Input</i> x_1	38
Tabela 2.6: Minimização de <i>Inputs</i> - variáveis duais (λ_j), folgas e eficiência para o caso de dois <i>Outputs</i> e um <i>Input</i>	39
Tabela 2.7: Problema dos multiplicadores - multiplicadores e eficiência para o caso de dois <i>Outputs</i> e um <i>Input</i>	42
Tabela 2.8: <i>Inputs</i> x_1 e x_2 normalizados pelo <i>Output</i> x_2	43
Tabela 2.9: Resultados para o problema da envolvente em maximização de <i>Outputs</i>	45
Tabela 2.10: Resultados para o problema dos multiplicadores em maximização de <i>Outputs</i>	45
Tabela 2.11: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC).....	47
Tabela 2.12: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC).....	48
Tabela 2.13: Resultados para o problema dos multiplicadores em minimização de <i>Inputs</i>	49
Tabela 3.1: Dados de teste para o exemplo 2	54
Tabela 3.2: Resultados para o exemplo 2	57
Tabela 3.3: Supereficiências - exemplo 3 <i>Output</i> /1 <i>Input</i>	59
Tabela 4.1 Eficiência do FDH sob Maximização de <i>Outputs</i>	65
Tabela 4.2 Resultados do EMS para os dados habituais X_1 e Y_1 e cálculo separado da Super-eficiência	66
Tabela 5.1: Dados para dois casos extremos de DMUs BCC efficientes.	74
Tabela 5.2: Resultados do software EMS.....	75
Tabela 5.3: Dados e resultados para os dois DMUs que originavam soluções ilimitadas.....	77
Tabela 5.4: Resultados para o caso aditivo sob VRS.	77
Tabela 5.5: Resultados para o caso multiplicativo sob VRS	77
Tabela 5.6 Dados para exemplificar o uso dum combinação afim.	78
Tabela 5.7: Resultados para o uso dum combinação afim.	79
Tabela 5.8: Cálculos para determinar o ponto composto.	79
Tabela 5.9 Solução para a unidade 9 em minimização de <i>inputs</i>	85
Tabela 5.10 Solução para a unidade 1 em maximização de <i>outputs</i>	85
Tabela 6.1 Dados para o exemplo	91

Tabela 6.2: Resultados para os 8 DMUs	96
Tabela 7.1: Dados da Tabela 2.3 normalizados pelo <i>Input X₁</i>	103
Tabela 7.2: Resultados exactos do problema dos pesos com penalidade quadrática.....	106
Tabela 7.3 Resultados exactos do problema dos pesos com penalidade monomial.	110
Tabela 7.4 Resultados da aplicação do algoritmo de Karmakar ao DMU 10.....	113
Tabela 8.1: Resultados do software EMS para o modelo BCC em maximização de <i>Outputs</i> . .	118
Tabela 8.2 Valores das variáveis referentes aos 14 DMUs mais eficientes.....	118
Tabela 8.3: Resultados do software EMS com o DMU fictício	119
Tabela 8.4 Resultados do modelo BCC homotético.....	120
Tabela 8.5: Distribuição original dos pesos (BCC).....	121
Tabela 8.6: Distribuição dos pesos ajustados (BCC).....	121

Agradecimentos

Este espaço é dedicado àqueles que deram a sua contribuição para que esta dissertação fosse realizada. A todos eles deixo aqui o meu agradecimento sincero.

Em primeiro lugar agradeço ao Prof. Doutor José Dulá a forma como orientou o meu trabalho. As notas dominantes da sua orientação foram a utilidade das suas recomendações e a cordialidade com que sempre me recebeu. Estou grato por ambas e também pela liberdade de acção que me permitiu e que foi decisiva para que este trabalho contribuísse para o meu desenvolvimento pessoal.

Em segundo lugar, agradeço ao Prof. Doutor Luís Cavique Santos pelo incentivo amigo e por me ter animado nos momentos de estagnação.

Gostaria ainda de agradecer aos meus colegas e familiares pelo apoio e paciência que tiveram sempre que tive de os privar do prazer da minha companhia para estudar e ler mais duma centena de artigos e uma dúzia de livros.

É óbvio que tenho também de agradecer aos meus pais o muito que sempre fizeram por mim, e apenas lamento que a minha mãe que me viu começar esta tarefa não possa ainda cá estar para me apoiar e mandar ser prático e eficiente.

Uma última palavra para a minha esposa pelo apoio e compreensão.

Introdução

A medida da eficiência, com formas mais ou menos elaboradas e mais ou menos explícitas, acompanha o Homem desde sempre como um factor impulsionador do desenvolvimento, seja em que campo for. E se no passado era relativamente fácil perceber se uma inovação tornava, ou não, um sistema mais eficiente, presentemente (dada a multiplicidade de factores envolvidos e a redução de ganhos marginais) essa conclusão nem sempre é óbvia. Esta foi a motivação para me interessar pelos avanços mais recentes da análise da eficiência das organizações e elaborar esta tese.

Partindo da definição de óptimo de Pareto (um economista social do fim do século XIX) consubstanciada no seguinte princípio: “Uma sociedade está num óptimo quando nenhum dos seus elementos pode melhorar sem que isso implique uma pioria para qualquer um dos restantes elementos” (Pareto, 1906), encontramos, cerca de 50 anos depois, uma reformulação por Koopmans (1951) ao apresentar, em “Analysis of production as an efficient combination of activities”: “A possible point in the commodity space is called efficient whenever an increase in one of its coordinates (the net *output* of one good) can be achieved only at the cost of a decrease in some other coordinate (the net *output* of another good)”.

Das duas afirmações anteriores nasceu o princípio da optimalidade de Pareto-Koopmans que hoje em dia é de grande importância sobretudo na área do multicritério.

Sensivelmente pela mesma altura Gérard Debreu (1951) introduz o conceito de coeficiente de utilização dos recursos, pelo que é considerado como um dos pioneiros da área da análise de eficiência. Merecidamente qualquer um destes autores foi galardoado com o prémio Nobel da Economia em 1975 e 1983 respectivamente, sendo colegas na Cowles Commission for Research in Economics da Universidade de Chicago.

Em 1953, Shephard desenvolveu a função de distância em *input* em que encontra a máxima redução equiproporcional dos *inputs* para que a produção de um dado conjunto

de *outputs* seja ainda praticável (Shephard, 1953); em 1970 definiu a congénere da anterior isto é a função de distância em *output* (Shephard, 1970).

Farrell, em 1957, introduziu independentemente da medida da eficiência de Shephard, as bases para a técnica que veio a ser designada, em 1978, por Data Envelopment Analysis (DEA) por Charnes, Cooper e Rhodes. Este modelo tinha o inconveniente de ser aplicável apenas a tecnologias com rendimentos de escala constantes, contudo Banker, Charnes e Cooper, em 1984, introduziram uma restrição de convexidade no modelo anterior estendendo a aplicabilidade deste modelo ao caso de economias com rendimentos de escala variáveis.

Todos estes modelos, baseados em programas lineares, tinham o inconveniente de atribuírem uma eficiência unitária às unidades eficientes, isto é às que correspondem a pontos extremos do conjunto de possibilidades de produção. Para permitir discernir entre essas unidades eficientes Banker e Gifford (1988) retiraram uma restrição de modo a permitir que essas unidades tivessem eficiências superiores à unidade. Ao retirar essa restrição alguns programas tinham solução ilimitada e portanto não tinham soluções admissíveis no seu dual, ficando novamente ainda algumas unidades sem um coeficiente numérico que as pudesse distinguir.

A resolução deste problema é um dos objectivos base desta tese. Nesse sentido ensaiam-se e sugerem-se várias soluções, algumas com o auxílio de técnicas estocásticas (regressão e simulação) e outras por aplicação de técnicas de relaxação da restrição de convexidade, substituindo as combinações convexas por combinações afins.

Tendo surgido recentemente (Bougnol e Dulá, 2005) um modelo com características muito boas no sentido quer da sua invariância quer, sobretudo, por ter sempre soluções admissíveis (*universal feasibility*), foi-lhe dedicada uma atenção especial de onde resultou a apresentação, inovadora, de uma formulação linear inteira mista (Santos, 2003) que permite ultrapassar o maior inconveniente desse modelo (a elevada carga computacional) reduzindo drasticamente os tempos de processamento. Este modelo tem ainda outra característica inovadora ao deixar livre a classificação das variáveis em *inputs* ou *outputs* consoante o público alvo (a constituição).

Outro objectivo da tese é o desenvolvimento de um novo sistema de ajuste dos pesos, o que é conseguido recorrendo a técnicas de programação por metas.

As técnicas de ajuste de pesos podem ser usadas para remover o inconveniente das soluções ilimitadas. Este facto é referido, dada a sua originalidade, e aplicado a um caso real.

São ainda apresentados os resultados do ajuste dos pesos a dados gerados artificialmente, e no âmbito do modelo de constituências múltiplas de Bournol e Dulá.

O texto de apresentação desta tese estrutura-se em duas partes distintas. A primeira (capítulos 2 e 3) visa o enquadramento no «estado da arte» destas matérias e a segunda (capítulos 4 a 8) apresenta as contribuições originais que este trabalho acrescenta ao referido «estado da arte».

O primeiro capítulo introduz as questões da análise de eficiência na generalidade, incluindo matérias bem conhecidas como as fronteiras estocásticas.

O segundo é dedicado a uma abordagem, detalhada e ilustrada por exemplos, das técnicas de Data Envelopment Analysis.

O terceiro capítulo descreve o conceito de super-eficiência com base num exemplo clássico, devido a Andersen e Petersen (1993).

No capítulo quatro inseriu-se uma revisão bibliográfica relativa aos modelos não lineares em Data Envelopment Analysis, para lá de uma componente original que consiste na aplicação da supereficiência ao modelo FDH.

No quinto capítulo apresenta-se situações práticas de inexistência de soluções admissíveis e as técnicas inovadoras para resolver esse problema. Desenvolve-se um novo modelo orientado e com resultados iguais aos do BCC, quando este tem solução admissível, e com a grande vantagem de ser sempre possível. Apresentam-se ainda as demonstrações mais importantes das propriedades deste modelo.

No capítulo seis descreve-se uma formulação original, para, através dum programa linear binário misto, se resolver o modelo para constituências múltiplas de Bournol e Dulá, com elevados ganhos de rapidez.

O capítulo sete apresenta conceitos inovadores de ajuste dos pesos, quer recorrendo a técnicas de Programação por metas quer recorrendo a um algoritmo de ponto interior, o algoritmo de Karmakar (1984).

No capítulo oito conjugam-se as técnicas dos capítulos precedentes numa aplicação a um caso real.

No apêndice 1 apresentam-se as formulações matriciais para os modelos CCR e BCC e no apêndice 2 os resultados do ajuste dos pesos a dados gerados artificialmente, no âmbito do modelo de constituências múltiplas de Bournol e Dulá.

No apêndice 3 apresentam-se as correlações entre as vinte e seis variáveis consideradas para a exemplificação das técnicas desenvolvidas, a um conjunto de dados reais referentes

Capítulo 1.

A medição da eficiência

A função de produção define-se tradicionalmente como a fronteira do conjunto de possibilidades de produção (*Production Possibility Set*), ou, de uma forma equivalente, o *output* máximo que se pode produzir com um determinado conjunto de *inputs*. Trata-se de um conceito limite que implica a noção de eficiência produtiva. Esta situação pode ser ilustrada, no caso mais simples de um só *input* e um só *output*, pela figura seguinte:

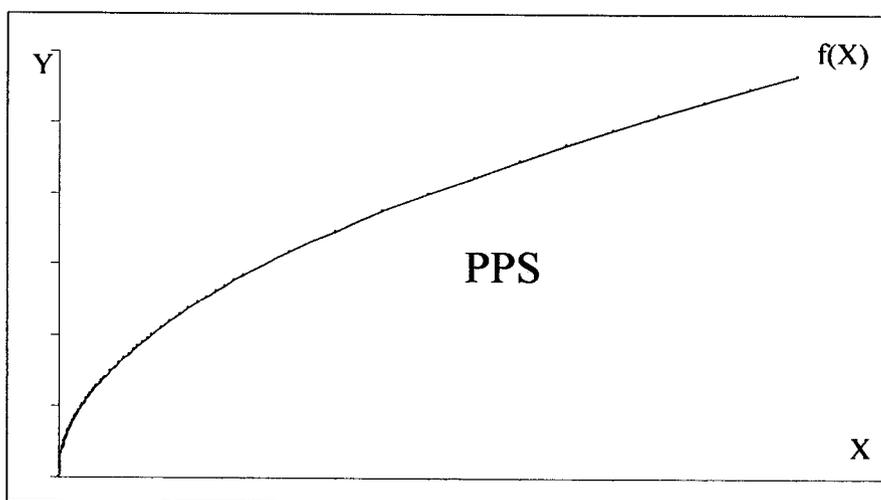


Figura 1.1 Conjunto de possibilidades de produção

Se x representar o *input* e y o *output*, a superfície PPS, como lugar geométrico de todo o *output* que se pode produzir com uma dada tecnologia, é o conjunto de possibilidades de produção. A fronteira deste conjunto, expressa por $y=f(x)$, é o máximo *output* que se pode produzir com um nível dado de *input*, ou dito de outra forma, é a função de produção. Então, uma unidade organizacional concreta estará sobre a fronteira do conjunto de produção ou no seu interior.

Os problemas econométricos suscitados pelo facto das hipóteses de normalidade e média nula das perturbações se deixarem de verificar, afastam a estimação de fronteiras da situação clássica do Modelo de Regressão Linear Múltipla, embora existam comparações entre esta e outras técnicas (Thanassoulis, 1993).

1.1. A eficiência.

Considere-se uma unidade organizacional dum total de n unidades, produzindo o *output* y com um vector de *inputs* de dimensão m : $x'=(x_1, \dots, x_m)$, cujos preços são fixos: p , o do *output*, e $w'=(w_1, \dots, w_m)$, os dos *inputs*.

Então define-se:

- A função de produção como a fronteira do conjunto de produção: $y=f(x)$.
- A função de custo: $c(y,w)=\min_x \{w'x | f(x) \geq y, x \geq 0\}$.
- A função de lucro: $\pi(p,w)=\max_{y,x} \{py - w'x | f(x) \geq y, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Associados a estes conceitos definem-se três tipos de medidas de eficiência (ineficiência). Diz-se que um plano de produção (y_0, x_0) é tecnicamente eficiente se $y_0=f(x_0)$ e tecnicamente ineficiente se $0 \leq y_0 < f(x_0)$.

A ineficiência técnica mede-se pelo rácio $0 \leq y_0/f(x_0) \leq 1$. Deste modo, um *ratio* inferior à unidade significa que o plano de produção se situa no interior do conjunto de possibilidades de produção, ou seja, que se pode obter mais *output* com aquele conjunto de *inputs*, ou alternativamente, que o mesmo *output* pode ser produzido com menos *inputs*.

$$w'x_0 > c(y_0, w) \quad \text{e} \quad py_0 - w'x_0 < \pi(p, w).$$

Além da eficiência técnica, a unidade organizacional procura a eficiência de afectação, como se pode ver na figura da eficiência de Farrell no capítulo seguinte.

Um terceiro tipo de eficiência que as unidades organizacionais procuram é a eficiência de escala.

1.2. Especificação e estimação de funções fronteira.

Pode-se admitir que seja possível chegar ao conhecimento do máximo *output* alcançável com uma dada quantidade de *inputs*, com o conhecimento que os técnicos têm da tecnologia.

Contudo, a forma de estimação de fronteiras que se utiliza frequentemente é a partir de observações quantificadas das variáveis incluídas na função de produção.

Os diferentes modelos e os métodos de estimação dos seus parâmetros podem classificar-se pela forma como se especifica a fronteira de produção. Deste modo podemos distinguir entre:

- Métodos paramétricos e métodos não paramétricos consoante se especifique ou não uma forma funcional dependendo de parâmetros.
- Uma segunda distinção é entre métodos estatísticos e não estatísticos, segundo se explicita ou não um modelo estatístico para o processo gerador dos dados.
- Finalmente, a fronteira pode ser determinística ou estocástica, conforme se assuma que as perturbações aleatórias do modelo igualam exactamente a ineficiência das empresas, ou em alternativa, que as perturbações correspondem não só à ineficiência, mas também a ruído estatístico, apresentado num termo adicional com uma dada distribuição.

Capítulo 2.

As técnicas de *Data Envelopment Analysis*.

2.1. Introdução

Com este capítulo sobre *Data Envelopment Analysis* (DEA), pretendem apresentar-se estas técnicas, não paramétricas, de análise da eficiência relativa de Unidades Organizacionais cujo nome surgiu nos EUA, em 1978.

As técnicas de DEA permitem lidar com múltiplos *Inputs* e múltiplos *Outputs*, para determinar as Unidades Organizacionais que evidenciam um desempenho óptimo no sentido de Pareto. Como resultado da análise, obtém-se ainda informação acerca da redução de *Inputs* e/ou aumento de *Outputs*, necessários para que as Unidades Organizacionais ineficientes alcancem o óptimo e uma caracterização destas como uma combinação linear das Unidades Organizacionais classificadas como óptimas. As técnicas de DEA têm sido utilizadas sobretudo no estudo da eficiência de organizações do sector público e em situações em que apenas o lucro numa organização não seja critério suficiente para aferir do seu desempenho.

Faz-se primeiro uma breve retrospectiva dos desenvolvimentos das técnicas de DEA para o caso dos dois modelos mais usuais: Modelos Charnes, Cooper e Rhodes (CCR) e Banker, Charnes e Cooper (BCC). Seguidamente aborda-se, através de exemplos, o caso de economias com rendimentos constantes à escala e as representações gráficas mais usuais nas duas perspectivas possíveis:

- Minimização do consumo de factores de produção (*Inputs*);
- Maximização do produto (*Outputs*).

O modelo para economias com rendimentos variáveis à escala é abordado apenas no seu caso mais simples: um *Input* e um *Output*, por ser o único passível de representação geométrica completa no plano. Tal como no ponto anterior, são abordadas ambas as perspectivas.

Ao longo da exposição evitou-se o recurso ao formalismo matemático que se condensou em apêndice, juntamente com a nomenclatura mais específica destas técnicas. Os resultados apresentados foram obtidos através da resolução dos problemas de programação linear apresentados no apêndice.

2.2. Uma breve visão histórica.

Desde a aplicação e desenvolvimento por Charnes Cooper e Rhodes das referidas técnicas em 1978, têm surgido várias contribuições e desenvolvimentos. Uma bibliografia datada de 1990 (Seiford, 1990) dava conta de cerca de quatrocentas publicações, estimando-se que presentemente tal número ultrapasse largamente os dois milhares, dado que noutra bibliografia de 2002 (Tavares, 2002) este número já ultrapassava as mil e quinhentas publicações e as mil comunicações.

Historicamente, a área do ensino tem sido um campo de eleição para aplicação das técnicas de DEA que permitem lidar com múltiplos *Inputs* e múltiplos *Outputs*, sem recorrer a nenhuma relação definida *a priori* entre as variáveis.

A primeira aplicação deste método deve-se a Edwardo Rhodes que, na década de setenta, elaborou a sua tese de doutoramento com base nos resultados dum vasto

programa de acompanhamento do sistema educativo nos Estados Unidos (Rhodes, 1978).

Outras aplicações posteriores, também na área da educação, devem-se a Charnes, Cooper e Rhodes em 1981, Bessent e outros em 1982 e 1983 nos Estados Unidos e, mais recentemente, em Inglaterra, a Beasley em 1991 e 1993 e Thanassoulis em 1994. Em Portugal merece especial destaque o trabalho pioneiro de Rosa Castro (Castro, 1993) sobre as escolas secundárias do distrito do Porto, e os de Tavares e Antunes (1999) sobre as Telecomunicações em Portugal, bem como outros artigos mais teóricos (Tavares e Antunes, 2001).

No campo da regulação do sector da água e saneamento básico merece destaque o trabalho de Rui Marques e António Monteiro (2004).

No sector da educação deve-se realçar ainda a análise de eficiência das escolas portuguesas por Oliveira e Santos (2005). Mais recentemente (Portela, et al. 2006), Portela, Camanho, e Azevedo estudaram o valor acrescentado das escolas secundárias portuguesas e as duas primeiras autoras estenderam o estudo também a uma análise paramétrica e não paramétrica (DEA) da eficiência das universidades portuguesas (Geraint et al. 2008).

O sector bancário tem também sido alvo de estudos inovadores por Portela e Thanassoulis, (2005) e também por Camanho e Dyson no mesmo ano (Camanho e Dyson, 2005).

O sector segurador também já foi alvo de análise da sua eficiência e produtividade por Barros, Barroso e Borges (Barros et al. 2005).

Mais aplicações se poderiam ainda descrever quer no campo da saúde, gestão de resíduos sólidos, análise da frota pesqueira, manutenção e qualidade de serviço da rede eléctrica nacional, no retalho e muitas mais áreas. A intenção não é de modo algum ser exaustivo, mas apenas ilustrar o modo como estas técnicas vão conquistando espaço em múltiplos sectores.

A técnica de *Data Envelopment Analysis* é uma técnica de programação matemática, para análise de eficiência, desenvolvida por Charnes Cooper e Rhodes que a descreveram pela primeira vez em 1978 (Charnes, et al. 1978).

Nesse artigo introduz-se o conceito de eficiência, visto do mesmo modo que em engenharia se define rendimento - como o quociente entre o observado e o "teoricamente previsível". Aqui a expressão "teoricamente previsível", deverá ser entendida como o melhor desempenho observado, já que é difícil, se não mesmo impossível, na grande maioria dos casos conhecer a fronteira de eficiência, pelo que a técnica de *Data Envelopment Analysis* fornece apenas medidas de eficiência relativa.

O modelo proposto na altura sofreu apenas uma pequena alteração no ano seguinte, pelos próprios autores (Charnes, Cooper e Rhodes, 1979), no sentido de tornar o método mais selectivo e de garantir que eficiência unitária equivaleria a optimalidade no sentido de *Pareto*.

Este modelo é ainda hoje largamente utilizado sendo conhecido como modelo CCR, as iniciais dos seus autores, e também, pelo acima exposto, por *Engineering Ratio Model*. Esta técnica de análise de eficiência é considerada como bastante robusta, por não exigir nenhuma definição *a priori*, nem da forma da função de produção, nem da distribuição estatística dos desvios (resíduos) entre valores esperados e observados, daí ser classificada como uma técnica não paramétrica.

De facto a técnica de DEA apenas assume a convexidade e linearidade do espaço de possibilidades de produção, condições que lhe são introduzidas axiomáticamente por Banker em 1980.

O modelo CCR tinha contudo a limitação de ser intrinsecamente apenas aplicável a economias com rendimentos constantes à escala. Esta limitação foi ultrapassada em 1984 devido sobretudo aos trabalhos de Banker e dos já referidos Charnes e Cooper que culminaram no modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper, 1984).

Nos anos que se seguiram surgiram muitos novos modelos mas de reduzida importância e aplicação.

No sentido de esclarecer alguns termos, como é o caso de eficiência técnica e eficiência alocativa, faz-se seguidamente uma breve apresentação do trabalho de Farrell, sendo depois apresentadas as formulações matemáticas dos modelos CCR e BCC.

2.2.1. O trabalho de Farrell ou os primórdios das técnicas de Data Envelopment Analysis

Este autor é usualmente referido nos trabalhos de *Data Envelopment Analysis* como um dos seus precursores, já que introduziu, pela primeira vez, o conceito de eficiência de preços ou de alocação versus o de eficiência técnica, agregando estes dois num só conceito, o de eficiência global.

Considere-se a título de exemplo a situação apresentada na Figura 2.1 em que se representa a curva SS' que é uma isoquanta do produto (isoproducto) para condições óptimas de produção,¹ (fronteira de eficiência) e em que AA' é uma recta de preços constantes (isocustos). O ponto P representa uma Unidade Organizacional (Decision Making Unit)² que produz apenas uma unidade de *Output*.

Saliente-se que o gráfico da Figura 2.1 representa um corte no espaço de possibilidades de produção à cota 1, isto é: no plano definido por todos os pontos cujo *Output* é exactamente de uma unidade. Os eixos representam os factores de produção x e y . Baseando-se neste caso, Farrell define eficiência alocativa como o quociente OR/OQ e eficiência técnica como OQ/OP . Ao produto destas duas eficiências deu-se o nome de eficiência global $(OR/OQ) \times (OQ/OP) = OR/OP$.

Se bem que a eficiência alocativa seja importante (no mínimo, porque deste gráfico decorre a bem conhecida ideia de que o ponto óptimo é aquele em que as linhas de isocustos são tangentes às curvas de isoproducto), em termos da técnica de *Data Envelopment Analysis*, a preocupação central será a eficiência técnica que muito justamente é também referida como eficiência de Farrell.

Merece ainda destaque o facto de Farrell ter aplicado pela primeira vez o modelo a que mais tarde se chamaria o Dual³ do modelo Charnes Cooper Rhodes-CCR, à agricultura

¹ Esta curva poderá ser obtida por vários métodos estatísticos que pouco têm a ver com as técnicas de *Data Envelopment Analysis*. Neste caso concreto optou-se por uma função de Cobb Douglas.

² As iniciais destas três palavras são a origem do termo DMU que se emprega amiúde neste campo, para referir Unidades Organizacionais semelhantes mas com um mínimo de autonomia de decisão. Se esta autonomia não existisse não faria sentido analisar a eficiência destas unidades.

³ Existe uma certa confusão acerca da designação de Dual para este problema dado existirem autores que o referem por Primal. Para evitar confusões utiliza-se a designação de problema da envolvente para este e a designação de problema dos multiplicadores para o seu dual.

de 48 estados americanos.

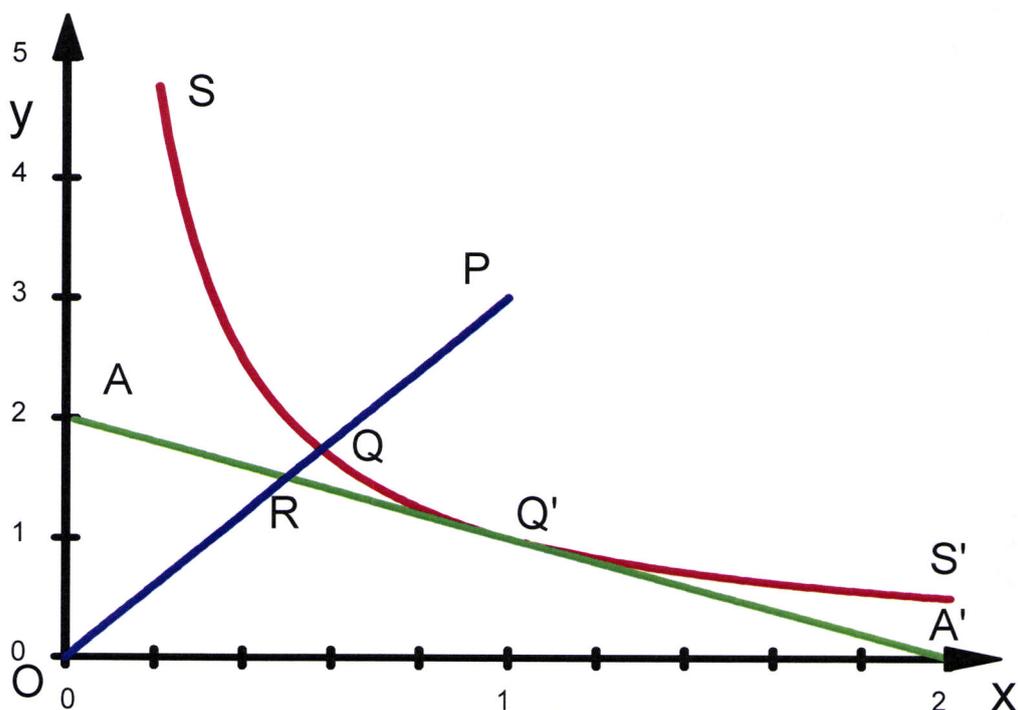


Figura 2.1 Corte no espaço de possibilidades de produção à cota 1

2.2.2. O modelo Charnes Cooper e Rhodes

Em 1978 surgiu o modelo CCR que define eficiência como o quociente da soma ponderada dos *Outputs* pela soma ponderada dos *Inputs*.

Com:

$$Ef_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}} \quad (2.1)$$

Ef_k = Eficiência do DMU_k

μ_{rk} = Peso atribuído ao *Output* r do DMU_k

v_{ik} = Peso atribuído ao *Input* i do DMU_k

y_{rk} = *Output* r do DMU_k

x_{ik} = *Input* i do DMU_k

s = Número de *Outputs* considerados.

m = Número de *Inputs* considerados.

A cada uma das parcelas do numerador (contribuição de cada *Output*, depois de ponderado) é usual chamar-se *Output* virtual. Do mesmo modo designam-se as parcelas do denominador por *Inputs* virtuais, pelo que esta medida de eficiência consiste no quociente do somatório dos *Outputs* virtuais pelo somatório dos *Inputs* virtuais.

Os *Inputs* virtuais e os *Outputs* virtuais são resultados usuais nos programas de DEA disponíveis, por exemplo, no EMS - *Efficiency Measurement System* tem-se a opção de escolher entre a apresentação dos pesos (*pure weights*), ou entre a dos *Inputs/Outputs* virtuais (*virtual Inputs/Outputs*).

Esta definição parece algo redutora e baseada em aspectos muito discutíveis, nomeadamente o da escolha dos pesos, e de facto assim seria se se ficasse por aqui. A ideia chave do método DEA reside em cada Unidade Organizacional ser livre na escolha dos seus próprios pesos (no sentido de maximizar a sua eficiência), apenas com a restrição de nenhuma Unidade Organizacional (inclusive ela própria), apresentar eficiências superiores à unidade.

A ideia anteriormente exposta traduz-se pelo seguinte problema de programação fraccionária linear, que é resolvido para cada DMU:

$$\text{Max: } w_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}} \quad (2.2)$$

$$\text{Sujeito a: } w_j = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.5)$$

(ε é uma pequena quantidade não Arquimediana, por tradição usa-se $\varepsilon=10^{-6}$ embora este valor seja dependente das unidades em que se esteja a trabalhar).

Charnes Cooper e Rhodes resolveram este problema pelo método de Charnes & Cooper (Charnes e Cooper, 1962) que transforma o problema fraccionário num de programação linear através de mudanças de variáveis e introdução de restrições extra.



Suponha-se que a função objectivo está sob a forma de fracção, isto é, a razão de duas funções:

$$\text{Maximizar } f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}. \quad (2.6)$$

em que $f_1(x) = cx + c_0$ e $f_2(x) = dx + d_0$, onde c e d são vectores-linha e x é um vector-coluna, e c_0 e d_0 são escalares. Ficamos então com $f(x) = \frac{cx + c_0}{dx + d_0}$

Assuma-se que as funções de restrição $g_i(x)$ são lineares de modo que as restrições na forma de matriz são $Ax \leq b$ e $x \geq 0$.

Sob estas restrições adicionais, pode transformar-se o problema num *problema de programação linear* equivalente fazendo:

$$y = \frac{x}{dx + d_0} \text{ e } t = \frac{1}{dx + d_0},$$

tal que $x = y/t$. Estas substituições conduzem a:

$$\text{Max: } Z = cy + c_0t$$

$$\text{Sa: } Ay - bt \leq 0$$

$$dy + d_0t = 1$$

$$y \geq 0, t \geq 0$$

que já pode ser resolvido pelo método do Simplex.

O caso anterior é o mais geral, mas a via que se seguirá conduz ao mesmo resultado de um modo mais intuitivo.

Este caso, pela sua simplicidade, pode ser resolvido fixando o denominador num valor unitário (geralmente 100%) e maximizando o numerador. Deste modo obtém-se o seguinte programa linear:

$$Max : w_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} \quad (2.7)$$

$$S. a: \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (2.8)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} \leq \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.11)$$

Para obter o dual deste programa convém reescrever o problema anterior sob a seguinte forma matricial, como se apresenta esquematicamente na Tabela 2.1.

Da Tabela 2.1 verifica-se que considerar mais um DMU corresponde a introduzir mais uma restrição, o que apenas *pode piorar* a função objectivo reduzindo o seu valor, o que é lógico pois o DMU em análise é confrontado com um maior grupo de Unidades Organizacionais. Analogamente verifica-se na Tabela 2.2 que considerar mais um factor (*Input* ou *Output*) corresponde a introduzir mais uma restrição o que apenas *pode piorar* a função objectivo, aumentando o seu valor, o que era de esperar uma vez que deste modo se aumentou o número de parâmetros e consequentemente a flexibilidade da medida de eficiência obtida.

Da Tabela 2.2 obtém-se o seguinte modelo:

$$\min : Z_k = \theta_k - \varepsilon \left\{ \sum_{r=1}^s S_{rk}^+ + \sum_{i=1}^m S_{ik}^- \right\} \quad (2.12)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_{ik}^- = \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.14)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

$$S_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.16)$$

$$S_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.17)$$

Esta formulação é conhecida por "o problema da envolvente em minimização de *Inputs* do modelo CCR".

Tabela 2.2: Representação matricial (esquemática) do modelo CCR, problema da envolvente.

min:

1	0	...	0	...	0	- ϵ	...	- ϵ	...	- ϵ	- ϵ	...	- ϵ	θ_k
														λ_1
														...
														λ_j
														...
														λ_n
														S_1^+
														...
														S_i^+
														...
														S_m^+
														S_1^-
														...
														S_r^-
														...
														S_s^-

Sujeito a:

0	Y_{11}	...	Y_{1j}	...	Y_{1n}	-1	...	0	...	0	0	...	0	...	0	θ_k	=	Y_{1k}
...	λ_1	=	...
0	Y_{r1}	...	Y_{rj}	...	Y_{rn}	0	...	-1	...	0	0	...	0	...	0	...	=	Y_{rk}
...	λ_j	=	...
0	Y_{s1}	...	Y_{sj}	...	Y_{sn}	0	...	0	...	-1	0	...	0	...	0	...	=	Y_{sk}
X_{1k}	$-X_{11}$...	$-X_{1j}$...	$-X_{1n}$	0	...	0	...	0	-1	...	0	...	0	λ_n	=	0
...	S_1^+	=	...
X_{ik}	$-X_{i1}$...	$-X_{ij}$...	$-X_{in}$	0	...	0	...	0	0	...	-1	...	0	...	=	0
...	S_i^+	=	...
X_{mk}	$-X_{m1}$...	$-X_{mj}$...	$-X_{mn}$	0	...	0	...	0	0	...	0	...	-1	...	=	0
																S_m^+		
																S_1^-		
																...		
																S_r^-		
																...		
																S_s^-		

Procurando interpretar o significado concreto desta formulação ressalta claramente a razão de ser da referência à minimização de *Inputs*. De facto pretende-se determinar a menor percentagem θ_k de todos os *Inputs* do DMU_k que ainda seja superior à combinação linear $\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ik}$. Do lado do *Output*, pretende-se que com os coeficientes λ_{jk} obtidos, todos os *Outputs* do DMU em análise sejam inferiores aos obtidos para um DMU eficiente, fictício com *Outputs* $\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj}$ $r=1\dots S$.

As variáveis S_{rk}^+ e S_{ik}^- representam as folgas, para cada factor em análise e fazem parte da função objectivo com um peso infinitamente pequeno a fim de, além da minimização proporcional de todos os *Inputs* (objectivo principal), procurar secundariamente descobrir as maiores folgas possíveis. Alguns autores preferem de facto resolver estes problemas em duas etapas: primeiro determinam a contracção máxima de todos os *Inputs* (θ_k); seguidamente, após a redução de todos os *Inputs*, resolvem novo Simplex (com os *Inputs* corrigidos) para determinação das folgas. Esta resolução bietápica é a mais usual hoje em dia, dado haver dificuldades computacionais envolvendo a escolha do valor numérico das entidades não arquimedianas.

Resumindo, pode-se afirmar que esta perspectiva visa encontrar a proporção mínima de *Inputs* da Unidade Organizacional em estudo que a torne eficiente, isto é, coincidente com uma Unidade Organizacional fictícia obtida por uma combinação linear de DMUs eficientes.

Assim como se descreveu o modelo CCR na perspectiva da minimização de *Inputs* de modo análogo se poderia descrever o referido modelo na via da maximização de *Outputs* que conduz ao mesmo resultado.

2.2.3. O modelo Banker Charnes e Cooper

O modelo BCC, das iniciais dos seus autores, Banker, Charnes e Cooper, surgiu em 1984 para acomodar economias com rendimentos variáveis à escala (Banker et al. 1984). Curiosamente, já na década de cinquenta, Farrel tinha tentado dar resposta a este problema tendo deparado com dificuldades em economias com rendimentos crescentes à escala mas com espaços de possibilidades de produção não convexas (Farrel, 1957). O problema residia em que um dos postulados da técnica de DEA é a convexidade do espaço de possibilidades de produção, o que estava a ser violado.

O modelo BCC obtém-se facilmente do problema da envolvente em minimização de *Inputs*, acrescentando uma restrição extra que garante que o DMU em análise será comparado com uma combinação convexa dos restantes DMUs ao invés duma combinação linear positiva, como sucedia no modelo CCR.

Acrescentada essa restrição adicional $\sum_{jk=1}^n \lambda_{jk} = 1$, obtém-se o seguinte problema linear de minimização:

$$\text{Min: } Z_k = \theta_k - \varepsilon \left\{ \sum_{r=1}^s S_{rk}^+ + \sum_{i=1}^m S_{ik}^- \right\} \quad (2.18)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_{ik}^- = \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.19)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.20)$$

$$\sum_{jk=1}^n \lambda_{jk} = 1 \quad (2.21)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.22)$$

$$S_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.23)$$

$$S_{rk}^+ \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

Repare-se que ao introduzir esta restrição nunca se vai *melhorar* o valor da função objectivo isto é, nunca se obterá uma eficiência mais baixa.

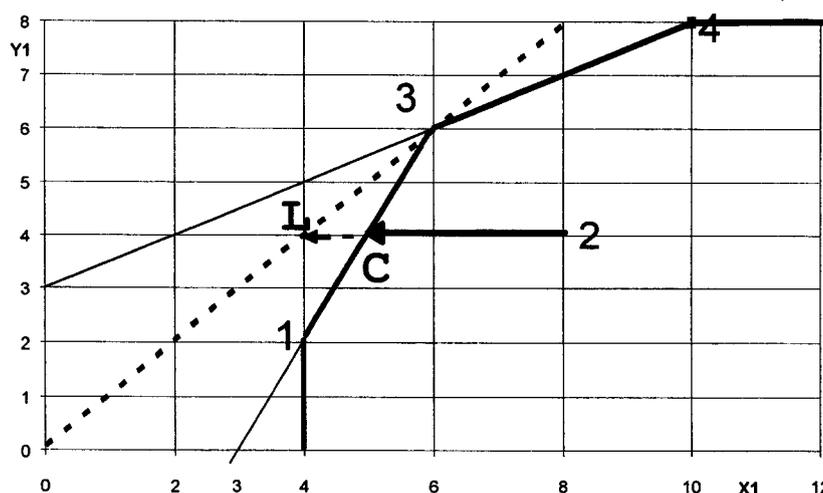


Figura 2.2: Fronteiras de eficiência para os modelos BCC e CCR

Na Figura 2.2 ilustra-se a diferença entre confrontar o DMU em análise (neste caso o DMU 2) com uma combinação convexa dos DMUs 1 e 3 (ponto C) em vez duma combinação linear positiva do DMU 3 (ponto L).

Tal como no modelo CCR, o problema da envolvente tem um problema dual associado, conhecido como o problema dos pesos.

A formulação é a seguinte:

$$\text{Max: } w_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} + u_k \quad (2.25)$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (2.26)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} + u_k \leq \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} \quad j = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.28)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.29)$$

$$u_k \text{ Livre} \quad (2.30)$$

Fazendo agora um percurso inverso ao que foi feito para o modelo CCR, chega-se à conclusão que este programa linear é equivalente ao seguinte programa fraccionário linear:

$$\text{Max: } w_k = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} + u_k}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik}} \quad (2.31)$$

$$\text{Sujeito a: } w_j = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rj} + u_k}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (2.33)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (2.34)$$

$$u_k \text{ Livre} \quad (2.35)$$

Verifica-se que existe mais um parâmetro (u_k) neste modelo, o que conduz à sua maior flexibilidade, nunca se obtendo valores de eficiência inferiores aos do modelo CCR.

Repare-se ainda que este novo modelo é exactamente igual ao anterior com uma variável extra que assume sempre o valor 1, desde que se restrinja u_k a assumir sempre valores não negativos. Surge contudo a complicação de, por vezes, a variável u_k tomar valores negativos e, nessa situação, já os modelos CCR e BCC apresentam diferenças significativas.

2.2.4. O modelo aditivo

O modelo aditivo foi desenvolvido por Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz e publicado em 1985 (Charnes et al. 1985).

O modelo aditivo tem o mesmo conjunto de possibilidades de produção que o modelo BCC anteriormente descrito. Isto é, a soma de Minkowsky da envolvente convexa dos dados com o ortante dos *Outputs* negativos e *Inputs* positivos.

A principal diferença vem de ser um modelo não orientado ao contrário dos anteriores em que havia duas orientações: minimização de *inputs* por contracção radial destes e maximização de *outputs* pela sua expansão radial.

A vantagem deste modelo é o de distinguir, sem recorrer a entidades não Arquimedianas, as unidades eficientes das fracamente eficientes, que são por definição, as que apresentam folgas.

Repare-se que na formulação deste modelo as entidades não Arquimedianas foram substituídas pela unidade.

O modelo aditivo maximiza a distância de métrica L_1 (também conhecida por distância de Manhattan, caso particular da distância de Minkowski) do ponto em estudo até á fronteira de eficiência.

A formulação para o problema dos multiplicadores é a seguinte:

$$Max: W_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} + u_k \quad (2.36)$$

Sujeito a

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + u_k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

$$v_{ik} \geq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.38)$$

$$\mu_{rk} \geq 1 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.39)$$

$$u_k \text{ Livre} \quad (2.40)$$

O respectivo Dual, o problema da envolvente é dado pelo seguinte problema linear de minimização:

$$\text{Min} : Q_k = - \left\{ \sum_{r=1}^s S_{rk}^+ + \sum_{i=1}^m S_{ik}^- \right\} \quad (2.41)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.42)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (2.43)$$

$$\sum_{jk=1}^n \lambda_{jk} = 1 \quad (2.44)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

$$S_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.46)$$

$$S_{rk}^+ \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.47)$$

2.3. O exemplo a expor

A selecção dos factores de produção e dos produtos a considerar na análise é um problema de capital importância para a aplicação bem sucedida da técnica de DEA a problemas reais, mas que cai fora do âmbito desta tese. Para uma discussão deste ponto ver Boussofiane (Boussofiane, Dyson e Thanassoulis 1991). Vai-se contudo dar uma ideia geral de como essa escolha deverá ser feita.

Um *Input* é algo de que a Unidade Organizacional necessita para a produção de *Outputs*. Uns serão controláveis (Capital, Trabalho, Espaço ...), mas outros poderão não o ser (População, Clima, Níveis de Conhecimento dos alunos à entrada, Classe social donde estes são originários ...). A definição dos *Inputs* e *Outputs* deve sempre obedecer à regra de "quanto maior melhor". Por exemplo, na avaliação duma turma poder-se-ia definir como *Input* a percentagem de bons alunos ou a de maus; a escolha correcta é a primeira, pois é a percentagem de bons alunos a que obedece à regra de "quanto maior melhor" (ou de preferência crescente, também conhecida por isotonicidade).

Quanto a *Outputs* a situação é idêntica. Por exemplo em avaliações de sistemas prisionais é evidente que as fugas são uma consequência do pior desempenho duma prisão pelo que este aspecto deveria ser introduzido em termos de não-fugas, isto é permanências.

Tabela 2.3: Dados do exemplo a apresentar

DMU	x_1	x_2	y_1	y_2
1	4.0	140	2.0	28.0
2	5.0	90	1.0	22.5
3	6.0	36	6.0	12.0
4	10.0	300	8.0	60.0
5	11.0	66	7.0	16.5
6	8.0	36	6.0	12.0
7	9.0	12	7.0	6.0
8	5.0	210	3.0	30.0
9	5.5	33	4.4	5.5
10	8.0	288	4.0	72.0
11	10.0	80	2.0	20.0
12	8.0	8	1.0	4.0

Vai-se a título meramente didáctico desenvolver um caso de análise de eficiência em que se supõe existirem 12 Unidades Organizacionais similares que produzem dois *Outputs* y_1 e y_2 (bens e/ou serviços) consumindo para tal dois *Inputs*, x_1 e x_2 . Os dados são apresentados na Tabela 2.3

Uma primeira tentativa de análise da eficiência destas doze Unidades Organizacionais, consistiria na determinação de *ratios* para cada par *Output/Input* e daí tirar conclusões que seriam sempre algo discutíveis pois um DMU mal classificado num *ratio*, mas bem classificado noutro, poderia sempre argumentar que o *ratio* onde obteve uma elevada classificação é o mais importante.

A técnica de *Data Envelopment Analysis* não vai por si resolver este problema, pode sim incorporar informação no sentido de privilegiar um ou outro *Input* ou *Output* (Dyson e Thanassoulis, 1988).

2.4. Economias com rendimentos constantes à escala

Numa economia com rendimentos constantes à escala, a um acréscimo de *Inputs* corresponde, por definição, um acréscimo proporcional de *Outputs*. Este caso é resolvido no âmbito da técnica de DEA pelo modelo CCR cuja formulação matemática completa se apresenta em apêndice.

2.4.1. Um *Input* e apenas um *Output*

A situação mais simples de analisar será a correspondente a um só *Output* versus um só *Input* admitindo economias com rendimentos constantes à escala.

Analisando a Figura 2.3, que representa y_1 em função apenas de x_1 , verifica-se que existe uma e apenas uma Unidade Organizacional eficiente, que é o DMU 3, que consegue produzir seis unidades de *Output* a partir de 6 de *Input*, pelo que se dirá que é eficiente, uma vez que nenhum outro DMU obteve um *ratio* tão elevado quanto este.

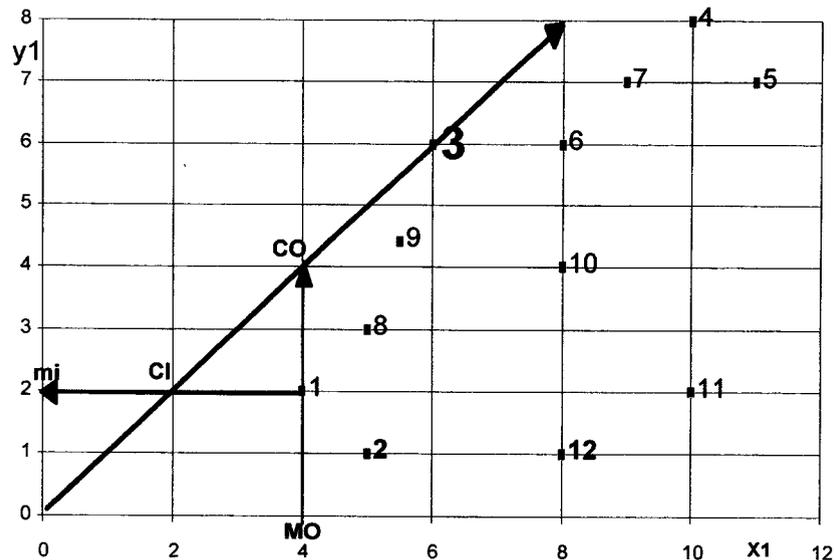


Figura 2.3: Representação dos 12 DMUs em termos do *Output* y_1 e do *Input* x_1 .

No que se refere ao DMU 1, este é ineficiente. De facto com o mesmo *Input* de 4 unidades este poderia ter atingido o ponto **CO** através da maximização do seu *Output*. Mais especificamente, ele poderia ter duplicado o seu produto sem ultrapassar a fronteira de eficiência (que é a semi-recta que une a origem com o ponto eficiente, o DMU 3, pelo que a sua ineficiência é de 2.0 e a sua eficiência apenas de 0.5.

Era também possível minimizar o *Input* do DMU 1 até ele chegar ao ponto **CI**, o que implicaria reduzir o seu *Input* em 50%, pelo que tem uma eficiência de 0.5, igual à obtida pela outra via. Adianta-se já que, em economias com rendimentos constantes à escala, o valor da eficiência obtido, tanto pela via da maximização dos *Outputs*, como pela da minimização de *Inputs*, é sempre igual. Apenas os pontos de referência são diferentes: obtém-se **CO** para ponto Compósito em maximização dos *Outputs* e **CI** para ponto Compósito em minimização de *Inputs*.

Matematicamente tem-se:
$$Ef = \frac{MO}{CO} \frac{I}{mi} = \frac{CI}{I} \frac{mi}{mi}$$

Em que:

Ef é a eficiência do DMU 1

CO é o ponto Compósito em Maximização de *Outputs*

CI é o ponto Compósito em minimização de *Inputs*

mi é um ponto no eixo dos yy utilizado na minimização de *inputs*

MO é um ponto no eixo dos xx utilizado na Maximização de *Outputs*

Os pontos referidos estão representados na Figura 2.3.

Foi anteriormente utilizado o conceito de “pontos compósitos”, que se encontram assinalados na Figura 2.3 para o DMU 1. Esta designação advém do facto de estes pontos poderem ser obtidos a partir de uma combinação linear dos DMUs eficientes, neste caso apenas o DMU 3. Apresenta-se, na última coluna, da Tabela 2.4, o escalar $\lambda_3 I$, pelo qual se deverá multiplicar as coordenadas do DMU 3 para obter as coordenadas dos pontos compósitos de cada um dos doze DMUs, em minimização de *Inputs*.

Outra designação comum para pontos compósitos é a de “referentes” ou grupo de referência, da tradução de *reference set* ou *peer group*.

O significado da penúltima coluna da tabela 2.4 é equivalente ao da última ($\lambda_3 I$), para o caso da Maximização de *Outputs* ($\lambda_3 O$). Exemplificando novamente com o DMU1, tem-se:

$CO(4;4)=4/6 \times (6;6)$ para Maximização de *Outputs* e:

$CI(2;2)=2/6 \times (6;6)$ para minimização de *Inputs*.

Convém ainda salientar que a coluna y_1/x_1 apresenta valores iguais aos obtidos para a eficiência, apenas por o *ratio* mais elevado correspondente ao DMU eficiente ser unitário. De facto, se assim não fosse, haveria que normalizar y_1/x_1 , dividindo todos os valores pelo seu máximo para garantir eficiência unitária (100%) para esse DMU eficiente.

Tabela 2.4: Eficiência (y_1, x_1) e escalares λ_3 para max. de *Outputs* ($\lambda_3 O$) e para min. de

DMU	<i>Inputs</i> ($\lambda_3 I$)			$\lambda_3 O$	$\lambda_3 I$
	x_1	y_1	y_1/x_1		
1	4.0	2.0	0.500	0.667	0.333
2	5.0	1.0	0.200	0.833	0.167
3	6.0	6.0	1.000	1.000	1.000
4	10.0	8.0	0.800	1.667	1.333
5	11.0	7.0	0.636	1.833	1.167
6	8.0	6.0	0.750	1.333	1.000
7	9.0	7.0	0.778	1.500	1.167
8	5.0	3.0	0.600	0.833	0.500
9	5.5	4.4	0.800	0.917	0.733
10	8.0	4.0	0.500	1.333	0.667
11	10.0	2.0	0.200	1.667	0.333
12	8.0	1.0	0.125	1.333	0.167

Esta análise foi evidentemente muito simples e serviu apenas para ilustrar alguns conceitos fundamentais.

Seguidamente acrescentar-se-á mais um *Output*, à análise.

2.4.2. Um *Input* e dois *Outputs*

Este caso apenas seria passível de representação gráfica a três dimensões; contudo, como se assume economias com rendimentos constantes à escala, é possível normalizar os dois *Outputs* pelo *Input* x_1 , de acordo com a Tabela 2.5.

Tabela 2.5: *Outputs* normalizados pelo *Input* x_1 .

DMU	x_1	y_1	y_2	y_1/x_1	y_2/x_1
1	4.0	2.0	28.0	0.500	7.000
2	5.0	1.0	22.5	0.200	4.500
3	6.0	6.0	12.0	1.000	2.000
4	10.0	8.0	60.0	0.800	6.000
5	11.0	7.0	16.5	0.636	1.500
6	8.0	6.0	12.0	0.750	1.500
7	9.0	7.0	6.0	0.778	0.667
8	5.0	3.0	30.0	0.600	6.000
9	5.5	4.4	5.5	0.800	1.000
10	8.0	4.0	72.0	0.500	9.000
11	10.0	2.0	20.0	0.200	2.000
12	8.0	1.0	4.0	0.125	0.500

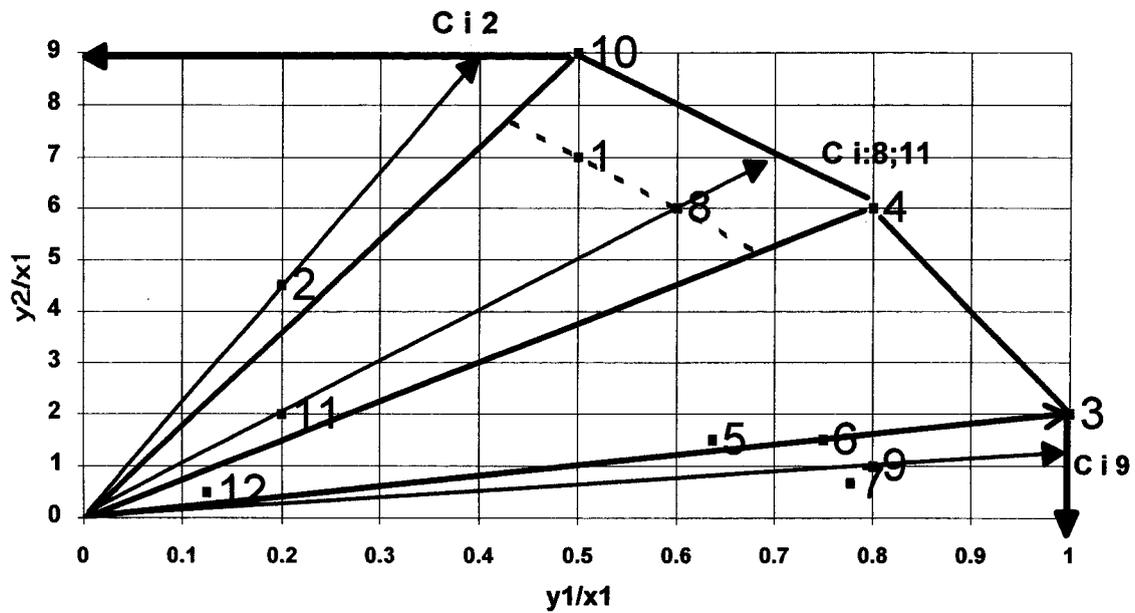


Figura 2.4: Minimização de *Inputs* - representação no plano, dos dados e respectiva envoltente

Como se verá seguidamente, a representação gráfica deste caso vai justificar o nome desta técnica, uma vez que na Figura 2.4 todos os *dados* são *analisados* por comparação com a sua *envoltente*.

Como se pode verificar facilmente, o número de Unidades Organizacionais eficientes subiu para 3 e a eficiência de todas as outras Unidades Organizacionais também aumentou, como se esperava.

Tabela 2.6: Minimização de *Inputs* - variáveis duais (λ_j), folgas e eficiência para o caso de dois *Outputs* e um *Input*.

DMU	λ_3	λ_4	λ_{10}	S_1^+	S_2^+	Eficiência
1	0	0.0952	0.3095	0	0	0.857
2	0	0	0.3125	0.25	0	0.500
3	1.0	0	0	0	0	1
4	0	1.0	0	0	0	1
5	1.0909	0.0568	0	0	0	0.647
6	1.0	0	0	0	0	0.750
7	1.1667	0	0	0	8.00	0.778
8	0	0.2857	0.1786	0	0	0.857
9	0.7333	0	0	0	3.30	0.800
10	0	0	1.0	0	0	1
11	0	0.1905	0.1190	0	0	0.286
12	0.1061	0.0455	0	0	0	0.136

Apresentam-se na Tabela 2.6, os resultados obtidos que devem ser interpretados em conjunto com a Figura 2.4.

Veja-se, por exemplo, o caso do DMU 6 com eficiência de $3/4$, colinear com a origem, sendo o DMU 3 o seu ponto compósito. Enquanto o DMU 3 consome 6 unidades de *Input*, o DMU 6 consome 8, produzindo ambos exactamente os mesmos *Outputs*. Tal significa que, para o DMU 6 atingir o desempenho do DMU 3, deveria reduzir o seu *Input* para $8 \times (6/8) = 6$, já que se considera a via da minimização do *Input* para atingir a eficiência.

O DMU 6 ilustra também o significado dos coeficientes λ_j . Neste caso, o único λ não nulo é o λ_3 . Multiplicando os valores referentes ao DMU 3 por λ_3 , obtém-se o ponto compósito, que, neste caso, é o próprio DMU de referência, que pode ser alcançado pela contracção de $3/4$ no *Input* do DMU 6.

Estes coeficientes indicam portanto quais são os DMUs de referência (ou grupo de pares) para um dado DMU em análise. No caso dos DMUs 1, 8 e 11, vê-se pelo gráfico que ao contraírem o seu *Input*, irão atingir a fronteira de eficiência na aresta limitada pelos DMUs 10 e 4; mas tal transparece também da consulta da Tabela 2.6, em que para os DMUs em análise, os únicos λ_s não nulos são o λ_4 e o λ_{10} .

O que foi acima exposto aplica-se também ao grupo de DMUs 5 e 12, apenas com a diferença do DMU 3 tomar agora o lugar do DMU 10.

Falta apenas esclarecer o significado das variáveis s_i^+ , que surgem quando a projecção eficiente⁴ dum DMU na fronteira fica localizada num troço paralelo a qualquer um dos eixos.

Veja-se o caso do DMU 2 cuja eficiência é de 0.5 pelo que, se reduzir o seu *Input* para metade, atingirá a fronteira no ponto **Ci2** cujas coordenadas são $x_1=2.5$; $y_1=1.0$, $y_2=22.5$. Nesta situação verifica-se que o **Ci2** é idêntico ao DMU 10 que no entanto consegue alcançar mais 0.1 (ver Figura 2.4) em y_1/x_1 do que **Ci2**, o que significa que este pode incrementar a sua produção de y_1 em $s_1^+ = 2.5 \times 0.1 = 0.25$ pelo que o ponto a alcançar pelo DMU2 para se tornar eficiente deverá ser o ponto $x_1=2.5$; $y_1=1.25$ e $y_2=22.5$.

⁴ Optou-se por usar esta terminologia no sentido de explicar que estes pontos são obtidos por uma *expansão radial do ponto até à fronteira* e não como uma *composição* dos DMUs eficientes.

Este ponto encontra-se sobreposto com o DMU 10 por se estar a trabalhar apenas a duas dimensões ⁵.

Situação idêntica se passa com os DMUs 7 e 9 só que agora existe a possibilidade de melhoria na produção de y_2 em vez de y_1 pelo que a variável que mede esta folga se denomina s_2^+ . A estas variáveis, s_i^+ , deu-se o nome de variáveis de folga por analogia com as da Programação Linear ⁶.

Repare-se que, em vez de reduzir o *Input* do DMU 2 para metade, conservando os *Outputs*, também se poderia passá-los para o dobro, enquanto o *Input* se mantinha constante. Estar-se-ia a optar pela via da maximização de *Outputs*, o que nesta situação de economias com rendimentos constantes à escala apenas altera o valor das variáveis de folga. Neste caso, a variável de folga em y_1 seria ainda 0.1 do *Input*, isto é, meia unidade do *Output* y_1 . No caso geral tem-se:

$$\frac{\text{Folgas em minimização de } inputs}{\text{Folgas em maximização de } outputs} = \text{Eficiência}$$

Este tipo de análise, que se acabou de fazer com recurso à Tabela 2.6, é claramente uma análise de envolvente, em que se procura determinar uma envolvente dos dados, definida pelos vértices correspondentes às Unidades Organizacionais eficientes.

Os vértices correspondem, portanto, às Unidades Organizacionais eficientes e, a partir duma combinação linear destes podem obter-se todos os pontos compósitos das Unidades Organizacionais ineficientes, à excepção das que se encontrem em arestas paralelas aos eixos, caso em que surge a necessidade de recorrer a variáveis de folga.

Repare-se que os λ_j dão uma informação importante acerca de semelhanças entre DMUs. De facto, vê-se que o alvo do DMU 5 estará muito mais próximo do DMU 3 do que do DMU 4, o que se confirma pelos valores do respectivo λ_3 e λ_4 . Por este raciocínio poder-se-ia afirmar que o quociente λ_4/λ_{10} deveria ser constante ao longo da semi-recta que parte da origem para $Ci:8;11$, o que de facto acontece no caso dos DMUs 8 e 11 (ver Figura 2.4 e Tabela 2.6).

⁵ Repare-se que multiplicando por 3.2 as coordenadas acima referidas $X_1=2.5$; $Y_1=1.25$ e $Y_2=22.5$ se obtém: $X_1=8$; $Y_1=4$ e $Y_2=72$... que são as coordenadas do DMU 10.

⁶ Neste caso em que existem folgas será mais correcto evitar a designação de ponto compósito pois os pontos assinalados como $Ci2$ e $Ci9$ não podem ser expressos como combinações lineares (com escalares λ_s positivos) dos DMUs eficientes. É necessário entrar em linha de conta com as folgas.

Os cálculos anteriores basearam-se sobretudo nos vértices da fronteira de eficiência. De seguida aborda-se o problema sob o ponto de vista das normais às arestas. Os dois problemas estão relacionados, conduzindo ambos à mesma solução, já que um problema é o dual do outro.

Apresentam-se na Tabela 2.7 as soluções referentes a este problema.

Tabela 2.7: Problema dos multiplicadores - multiplicadores e eficiência para o caso de dois *Outputs* e um *Input*

DMU	v_1	μ_1	μ_2	Eficiência	μ_1/μ_2
1	0.250	0.179	0.018	0.857	10
2	0.200	0.000	0.022	0.500	5E-05
3	0.167	0.152	0.008	1.000	20
4	0.100	0.091	0.005	1.000	20
5	0.091	0.083	0.004	0.647	20
6	0.125	0.114	0.006	0.750	20
7	0.111	0.111	0.000	0.778	111109
8	0.200	0.143	0.014	0.857	10
9	0.182	0.182	0.000	0.800	181816
10	0.125	0.089	0.009	1.000	10
11	0.100	0.071	0.007	0.286	10
12	0.125	0.114	0.006	0.136	20

Como se pode constatar, as eficiências obtidas pelos dois métodos são iguais. Incluiu-se na última coluna o quociente entre os multiplicadores μ_1 e μ_2 , que nos fornece a taxa marginal de substituição entre os dois *Outputs*. Repare-se que, quer o DMU 1, quer o 8, são avaliados como igualmente eficientes⁷, embora este último seja menos produtivo no que se refere a y_1 . Poder-se-á então perguntar quanto é admissível perder em y_1 para ganhar em y_2 ? A resposta é justamente o referido quociente, que torna a ilustrar a divisão dos DMUs por quatro classes.

Com a interpretação anteriormente dada, baseada numa certa ordem de importância dos *Outputs*, compreende-se que os multiplicadores que lhes estão associados sejam referidos por pesos.

⁷ De facto ambos os DMUs têm eficiência 0.857... já que o segmento de recta que os une está sobre uma contracção homotética de razão 0.857... da fronteira de eficiência que constitui uma curva de isoeficiência = 0.857

Repare-se que se obtêm taxas de substituição diferentes para os vários DMUs, sendo esta a característica fundamental da técnica de DEA: uma grande flexibilidade na avaliação do desempenho.

Este aspecto é frequentemente indesejável, pelo que é usual impor restrições aos pesos, além da estrita positividade, que os impede de serem nulos. Neste caso, obrigou-se os pesos a serem maiores ou iguais a 10^{-6} .

Através de restrições aos pesos, é portanto possível incorporar informação adicional no modelo.

2.4.3. Dois *Inputs* e um *Output*

Vai considerar-se de seguida o modelo que incorpora x_1 , x_2 e y_2 ainda com economias com rendimentos constantes à escala, o que normalizando os *Inputs* pelo *Output* y_2 , permitirá a sua representação gráfica a duas dimensões. A esta formulação é dada por vezes o nome de formulação recíproca.

Tabela 2.8: *Inputs* x_1 e x_2 normalizados pelo *Output* x_2

DMU	x_1	x_2	y_2	x_1/y_2	x_2/y_2
1	4	140	28	0.14	5.00
2	5	90	22.5	0.22	4.00
3	6	36	12	0.50	3.00
4	10	300	60	0.17	5.00
5	11	66	16.5	0.67	4.00
6	8	36	12	0.67	3.00
7	9	12	6	1.50	2.00
8	5	210	30	0.17	7.00
9	5.5	33	5.5	1.00	6.00
10	8	288	72	0.11	4.00
11	10	80	20	0.50	4.00
12	8	8	4	2.00	2.00

Desta vez vai optar-se pela via da maximização do *Output*. Neste caso, os pontos mais eficientes são os mais próximos da origem, sendo a medida de eficiência, por exemplo, do DMU 11, dada pelo quociente entre as distâncias à origem do ponto **C11** (ponto Compósito do DMU 11) e do próprio DMU 11.

Constata-se que o DMU 4 deixa de ser eficiente, dando lugar ao DMU 7.

Tabela 2.9: Resultados para o problema da envolvente em maximização de *Outputs*

DMU	λ_3	λ_7	λ_{10}	S_1^-	S_2^-	z_i
1	0.0222	0	0.4833	0	0	1.252381
2	0.5000	0	0.2500	0	0	1.066667
3	1	0	0	0	0	1
4	0.3333	0	1	0	0	1.266667
5	1.8333	0	0	0	0	1.333333
6	0.9047	0.2857	0	0	0	1.047619
7	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0.625	0	30	1.500030
9	0.9166	0	0	0	0	2.000000
10	0	0	1	0	0	1
11	1.5555	0	0.083	0	0	1.233333
12	0	0.6667	0	2	0	1.000002

O DMU 12 encontra-se numa aresta paralela ao eixo x_1/y_2 , pelo que deverá existir uma folga em x_1 ($s_1^- = 2$), o que significa que se poderia ter atingido a produção deste DMU poupando duas unidades do *Input* 2. Este facto é fácil de verificar graficamente: o DMU 12 consome mais 0.5 de x_1/y_2 do que o DMU 7, mas $y_2 = 4$, confirma assim o resultado da Tabela 7 que indica ser possível economizar 2 unidades de x_1 . Assim, o alvo a atingir pelo DMU 12 será $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $y_2 = 4$, o que é justamente $2/3$ (λ_7) do ponto 7.

Tabela 2.10: Resultados para o problema dos multiplicadores em maximização de *Outputs*

DMU	v_1	v_2	μ_2	q_j
1	0.0214	0.0083	0.0357	1.252381
2	0.0267	0.0104	0.0444	1.066667
3	0.0500	0.0194	0.0833	1
4	0.0100	0.0039	0.0167	1.266667
5	0.0364	0.0141	0.0606	1.333333
6	0.0238	0.0238	0.0833	1.047619
7	0.0476	0.0476	0.1667	1
8	0.3000	1E-06	0.0333	1.500030
9	0.1091	0.0424	0.1818	2.000000
10	0.0083	0.0032	0.0139	1
11	0.0300	0.0117	0.0500	1.233333
12	1E-06	0.1250	0.2500	1.000002

Repare-se que, neste caso, como o ponto está na fronteira de eficiência, a folga é sempre a mesma quer se trate de minimização de *Inputs* quer se trate de maximização de *Outputs*.

Sempre que existem folgas numa variável, o multiplicador que lhe corresponde, assume o mínimo valor que a formulação lhe permite, neste caso 10^{-6} , como fica bem claro por análise da Tabela 2.10.

2.5. Economias com rendimentos variáveis à escala

Até agora considerou-se apenas a situação de economias com rendimentos constantes à escala, em que, por exemplo, a uma duplicação dos factores de produção corresponderia a duplicação do produto.

Sabe-se contudo que esta situação é pouco frequente, sendo um exemplo trivial o caso em que além de *custos* variáveis existam também *custos* fixos. O modelo BCC, apresentado em 2.2.3, e cuja formulação matemática completa é apresentada em anexo permite lidar com economias com rendimentos variáveis à escala. Os exemplos apresentados seguidamente ilustram a sua aplicação.

2.5.1. Aplicação ao exemplo

No exemplo que se tem vindo a apresentar verifica-se que, se todos os *Outputs* fossem subtraídos de 3 unidades (ordenada na origem da recta que contém a aresta $\overline{3-4}$), passaria a haver 2 DMUs eficientes: o 3 e o 4 (ver a Figura 2.6).

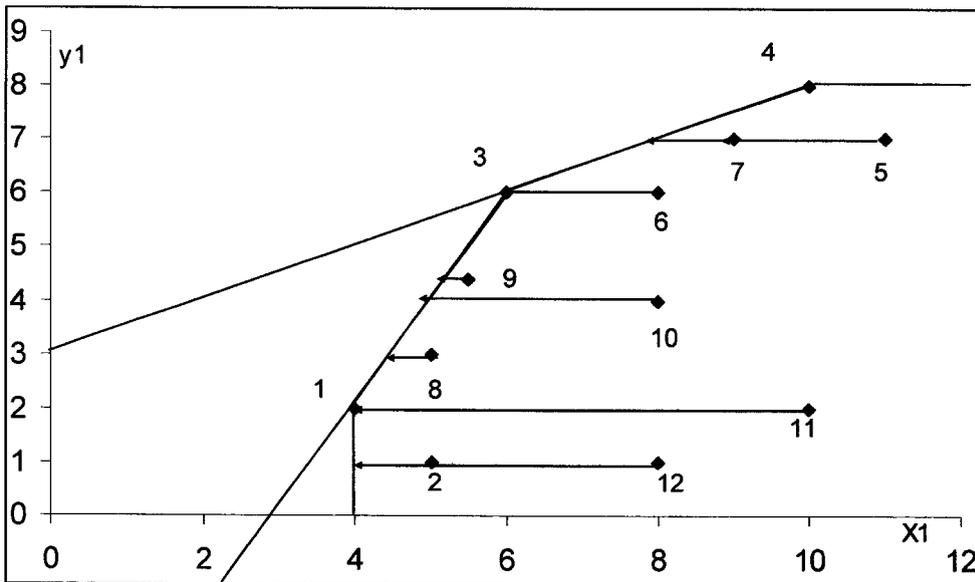


Figura 2.6: Modelo BCC minimização do *Input*

O mesmo se passaria se se adicionassem 6 unidades ao *Input* (isto é, subtrair-lhe a abcissa na origem que é -6).

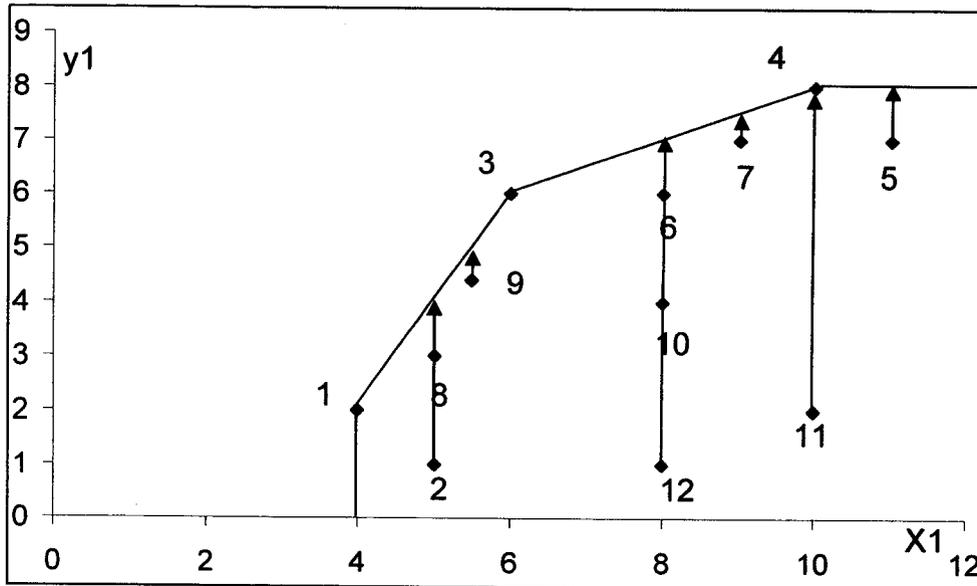


Figura 2.7: Modelo BCC Maximização do *Output*

Estes factos podem ser confirmados na Tabela 2.11 onde se verifica quais os DMUs eficientes, na suposição destes, serem avaliados após a correcção acima referida.

Na Figura 2.7 apresenta-se o tipo de projecção em direcção à fronteira para Maximização do *Output*.

Tabela 2.11: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC).

DMU	x_1	y_1	x_1+6	y_1-3	$(y_1-3)/x_1$	$y_1/(x_1+6)$	Normalizados pelo máximo da respectiva coluna (eficiências)	
							$(y_1-3)/x_1$	$y_1/(x_1+6)$
3	6.0	6.0	12.0	3.0	0.50	0.50	1.00	1.00
4	10.0	8.0	16.0	5.0	0.50	0.50	1.00	1.00
5	11.0	7.0	17.0	4.0	0.36	0.41	0.73	⁸
6	8.0	6.0	14.0	3.0	0.38	0.43	0.75	0.86
7	9.0	7.0	15.0	4.0	0.44	0.47	0.89	0.93

* A projecção deste DMU sobre a fronteira de eficiência não cai sobre a aresta em análise pelo que não faz sentido a sua inclusão nesta tabela.

Os valores apresentados na Tabela 2.11 representam as eficiências dos respectivos DMUs, na última coluna, em maximização de *Outputs*, e, na penúltima, em minimização de *Inputs*. Convém realçar que, contrariamente ao que se verifica em economias com rendimentos constantes à escala, onde as eficiências e os grupos de referência são os mesmos, quer analisados sob o prisma da maximização de *Outputs*, quer sob o da minimização de *Inputs*, aqui eles serão em geral diferentes. Efectivamente, a eficiência é maior em maximização de *Outputs*, por estarmos numa economia com rendimentos decrescentes à escala.

No que respeita aos grupos de pares também há diferenças: o grupo de pares do DMU 5 em minimização de *Inputs* é formado pelos DMUs 3 e 4, como se pode confirmar na Figura 2.6, enquanto que, em maximização de *Outputs*, o seu grupo de pares é apenas constituído pelo DMU 4, existindo uma folga no *Input* x_1 , como se pode confirmar na Figura 2.8.

Para analisar os restantes DMUs, deve-se considerar uma fronteira de eficiência que não a recta que contém a aresta $\overline{3-4}$, mas sim a que contém a aresta $\overline{1-3}$ e que intercepta o eixo $\overline{0-x}$ em $x_1=3$ e o eixo $\overline{0-y}$ em $y=-6$.

Adoptando um procedimento idêntico ao anterior, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 2.12.

Tabela 2.12: Exemplo de cálculo de eficiência (modelo BCC)

DMU	x_1	y_1	x_1-3	y_1+6	$(y_1+6)/x_1$	$y_1/(x_1-3)$	Normalizados pelo máximo da respectiva coluna (eficiências)	
							$(y_1+6)/x_1$	$y_1/(x_1-3)$
1	4.0	2.0	1.0	8.0	2.00	2.00	1	1
2	5.0	1.0	2.0	7.0	1.40	0.50	⁹	0.250
3	6.0	6.0	3.0	12.0	2.00	2.00	1	1
6	8.0	6.0	5.0	12.0	1.50	1.20	0.750	⁹
8	5.0	3.0	2.0	9.0	1.80	1.50	0.900	0.750
9	5.5	4.4	2.5	10.4	1.89	1.76	0.945	0.880
10	8.0	4.0	5.0	10.0	1.25	0.80	0.625	⁹
11	10.0	2.0	7.0	8.0	0.80	0.29	0.400	⁹
12	8.0	1.0	5.0	7.0	0.88	0.20	⁹	⁹

Verifica-se que as eficiências em maximização de *Outputs* desta vez são menores do que em minimização de *Inputs*, contrariamente ao que se passava no caso anterior

⁹ A projecção deste DMU sobre a fronteira de eficiência não cai sobre a aresta em análise pelo que não faz sentido a sua inclusão nesta tabela.

(Tabela 2.11), uma vez que nesta aresta se está em economias com rendimentos crescentes à escala.

Conclui-se portanto que, no caso de economias com rendimentos variáveis à escala, a fronteira de eficiência já não é uma semi-recta no primeiro quadrante com origem em (0;0), mas sim a envolvente convexa de todas as observações.

Quanto aos troços da fronteira, paralelos aos eixos, a sua justificação e interpretação é apresentada seguidamente.

No caso do DMU 2, não há nada que permita admitir que ele possa manter o seu nível de produto, consumindo menos de 4 unidades de x_1 . De facto, neste caso, as 4 unidades de x_1 deverão ser encaradas como um limiar que só uma vez ultrapassado permite a produção de algo.

Já no caso do DMU 4, a interpretação é diferente, pois aqui trata-se, duma limitação do produto. Num método não paramétrico como este, baseado apenas nas observações, nada permite supor que se consiga produzir mais de 8 unidades de y_1 . Assim sendo, o DMU 5 em maximização de *Outputs* apenas pode aumentar o seu produto até às referidas 8 unidades e seguidamente reduzir o seu *Input* de 11 para 10 (folga de uma unidade no *Input* (s^-)).

Apresentam-se na Tabela 2.13 os resultados para o problema dos multiplicadores, em minimização de *Inputs*.

Nesta tabela apresentou-se a última coluna com 6 casas decimais apenas para ilustrar a existência da folga unitária nos DMUs 2 e 12.

Tabela 2.13: Resultados para o problema dos multiplicadores em minimização de *Inputs*

DMU	Variáveis		Constante	Multiplicadores		Eficiência
	x_1	y_1		v	μ	
1	4.0	2.0	1.0000	0.2500	1E-06	1.000000
2	5.0	1.0	0.8000	0.2000	1E-06	0.799999
3	6.0	6.0	0.5000	0.1667	0.0833	1.000000
4	10.0	8.0	-0.6000	0.1000	0.2000	1.000000
5	11.0	7.0	-0.5455	0.0909	0.1818	0.727273
6	8.0	6.0	-0.7500	0.1250	0.2500	0.750000
7	9.0	7.0	-0.6667	0.1111	0.2222	0.888889
8	5.0	3.0	0.6000	0.2000	0.1000	0.900000
9	5.5	4.4	0.5455	0.1818	0.0909	0.945455
10	8.0	4.0	0.3750	0.1250	0.0625	0.625000
11	10.0	2.0	0.3000	0.1000	0.0500	0.400000
12	8.0	1.0	0.5000	0.1250	1E-06	0.499999

O significado da constante na quarta coluna da tabela é semelhante ao significado da ordenada na origem. De facto, a constante é igual ao produto do simétrico da ordenada na origem, da recta que contém a aresta em causa, pelo multiplicador μ .

Vai-se agora ilustrar a resolução pelo método gráfico do problema anterior apenas para o DMU 4. A formulação matemática vem dada pelo seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \text{Max:} & \quad 8\mu_1 + \nu \\ \text{S.a:} & \quad 10\nu_1 = 1 \\ & \quad -10\nu_1 + 8\mu_1 + \nu \leq 0 \\ & \quad -4\nu_1 + 2\mu_1 + \nu \leq 0 \\ & \quad -6\nu_1 + 6\mu_1 + \nu \leq 0 \end{aligned}$$

Optou-se por representar apenas as restrições referentes aos DMUs eficientes pois as restrições referentes aos ineficientes são não activas, pelo que a sua representação seria desnecessária.

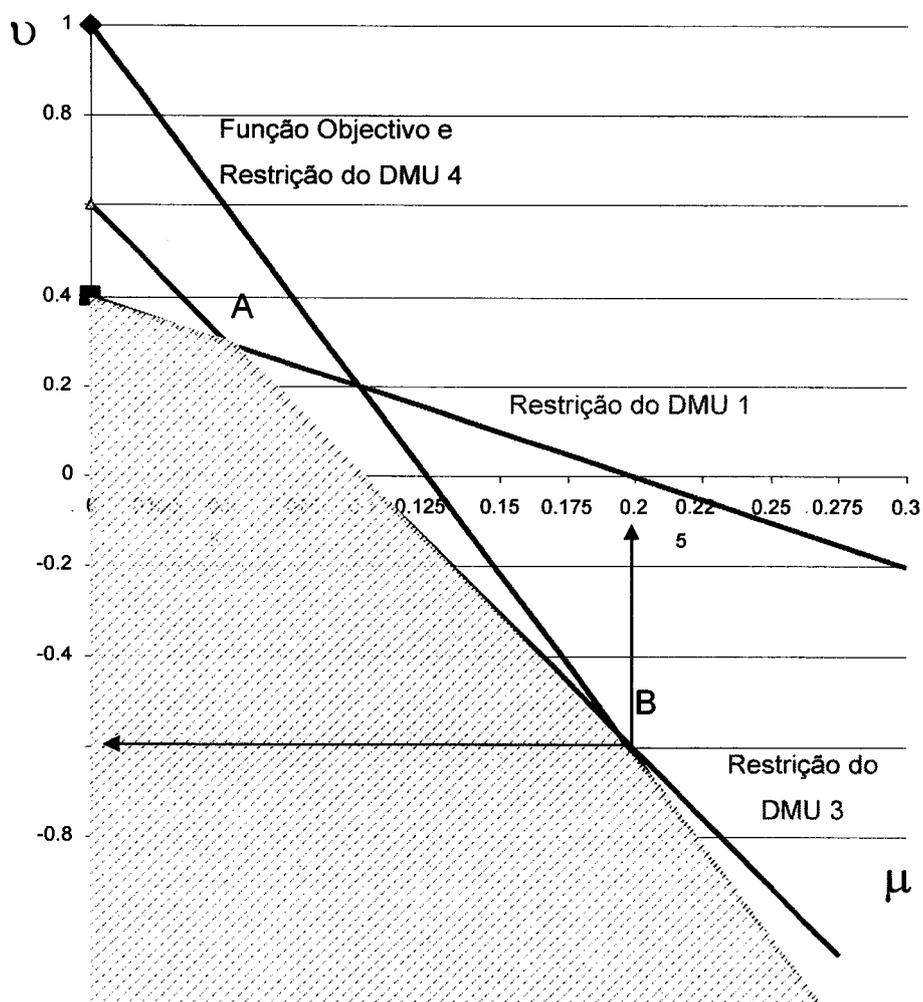


Figura 2.7: Resolução gráfica do modelo BCC em minimização do *Input*

Repare-se ainda que existe apenas uma restrição de não negatividade - a referente ao multiplicador μ , pois a variável característica do modelo BCC é livre podendo assumir valores negativos, o que acontece na solução ótima.

Verifica-se que a solução ótima não é única, pois trata-se dum DMU eficiente, e condiz com o apresentado na Tabela 2.13 que apresenta as coordenadas do ponto B.

Capítulo 3.

A Supereficiência

Da aplicação da técnica de DEA, resulta por vezes um elevado número de Unidades Organizacionais eficientes, ficando o decisor com relativamente pouca informação acerca destas, excepto a de serem eficientes. Pretende-se, baseado na DEA Extended Measure,¹⁰ introduzida por Andersen e Petersen (Andersen e Petersen, 1993), discriminar entre estas Unidades Organizacionais quais as mais robustas, no sentido de poderem acomodar um maior consumo de *Inputs*, mas mantendo ainda a classificação de eficientes.

A designação acima utilizada foi importada directamente do trabalho desses dois autores, contudo recentemente tem-se empregado a expressão de *Super-efficiency* que será traduzida por Supereficiência e utilizada no decorrer desta dissertação.

Dado a extensão utilizada não ser muito divulgada vai-se fazer uma breve descrição do método através de três exemplos o segundo dos quais é exactamente retirado do artigo de Andersen e Petersen.

3.1. A Supereficiência para o modelo CCR

Observe-se os dois casos seguintes do modelo CCR em que se consideram dois *Outputs* e um *Input* sob economias com rendimentos constantes à escala: enquanto que o DMU C

¹⁰ Esta foi a designação que Andersen e Petersen utilizaram nesse seu artigo, outras designações como robustez e supereficiência têm no entanto sido propostas. Por haver indícios de recentemente se estar a preferir a última expressão será essa a utilizada no decorrer desta tese.

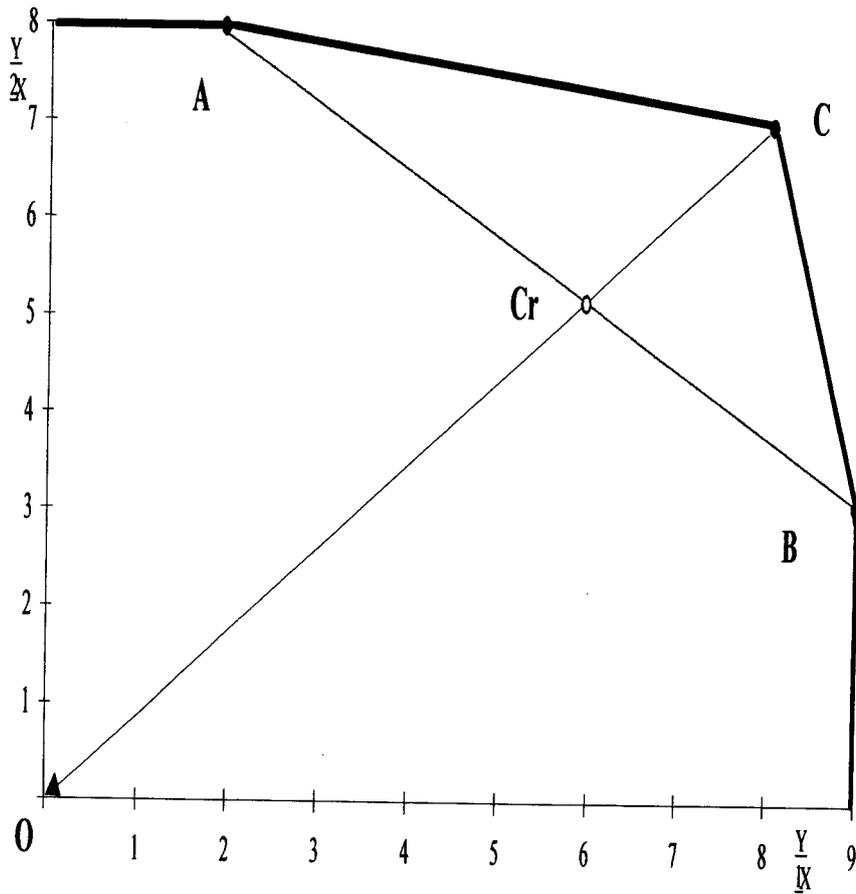


Figura 3.1 DMU C eficiente e robusto.

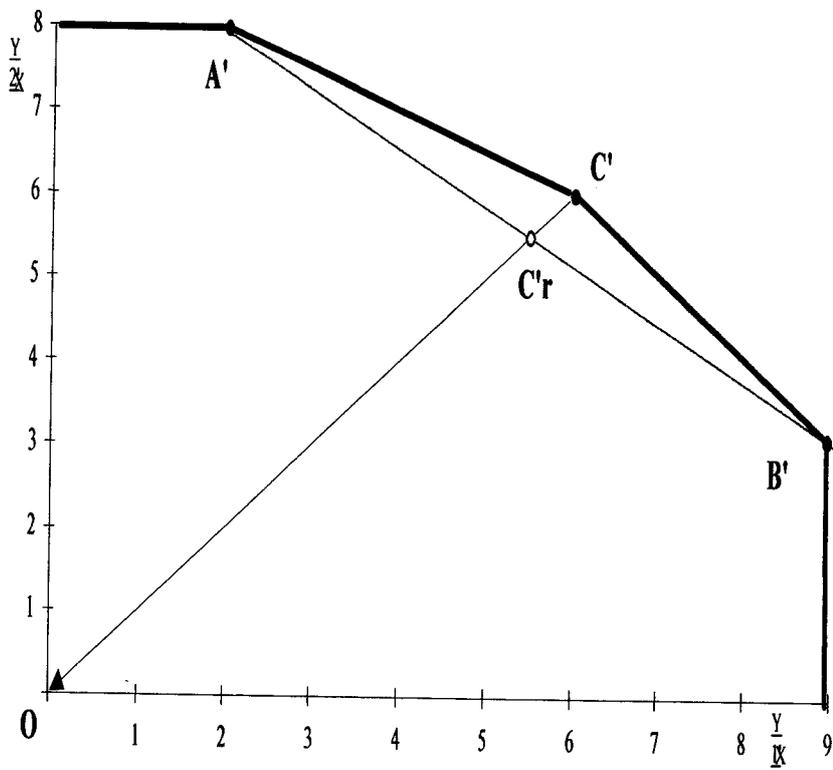


Figura 3.2: DMU C' eficiente mas pouco robusto.

na Figura 3.1 é claramente eficiente e robusto a uma degradação do seu desempenho não superior a OC/OCr , já o mesmo não se poderá dizer do caso da Figura 3.2 em que uma pequena variação em $O'C'/O'C'r$ poderia conduzi-la abaixo dos 100% de eficiência, implicando a passagem do DMU C' a ineficiente.

Por estes motivos, este quociente foi proposto como uma medida de robustez e de Supereficiência e, em 1994 Santos propô-lo também para seriação de Unidades Organizacionais eficientes.

Repare-se que este quociente é semelhante ao que se utilizou para definir eficiência, apenas há que admitir que possa ser superior à unidade. Pela semelhança exposta e por ser superior à unidade, é usual designar esse quociente por Supereficiência.

As Figuras 3.1 e 3.2 pretendem ser o mais simples possíveis apenas para ilustrar que dentro das Unidades Organizacionais eficientes há umas mais robustas que outras a variações conjuntas dos *Inputs* ou *Outputs*. Tal facto não deve ser confundido com análises de sensibilidade (Charnes e Neralic, 1989) que se revestem duma maior complexidade e que permitem inclusive tratar variações numa só variável, saindo das condições de passeios radiais no espaço de possibilidades de produção.

3.2. A Supereficiência para o modelo BCC

No artigo original (Andersen e Petersen 1993), este aspecto é descrito pelo seguinte baseado na minimização de *Inputs* para o problema da envolvente do modelo BCC para os 5 DMUs A,B,C,D e E apresentados na Tabela 3.1 e na Figura 3.3.

Tabela 3.1: Dados de teste para o exemplo 2.

	A	B	C	D	E
Input 1	2	2	5	10	10
Input 2	12	8	5	4	6
Output 1	1	1	1	1	1

Para a determinação deste novo índice, a formulação do DEA mantém-se inalterada, excepto que o DMU em análise deixa de ser considerado nas restrições que limitam a eficiência ao valor máximo de 1. Assim sendo, todas as Unidades Organizacionais ineficientes (A e E na Figura 3.3) manterão exactamente o mesmo valor para a

eficiência, já que a supressão da restrição correspondente ao DMU em análise nada altera pois tratando-se dum DMU ineficiente, a sua eficiência era já menor que a unidade, pelo que a restrição retirada não estava saturada (*Non Binding Constraint*). Do ponto de vista computacional, em vez de retirar a restrição, optou-se por admitir que o seu termo independente, em vez de ser a unidade (100%), passasse a ser infinito (na prática um valor muito elevado). O dual desta técnica acaba por ser o modelo de Banker e Gifford, apenas com a diferença de estes usarem um valor finito muito elevado.

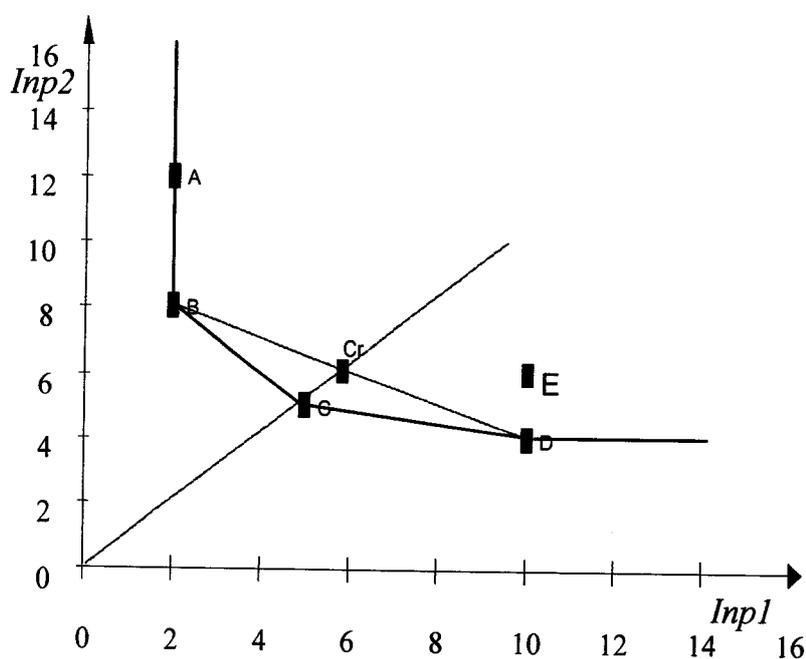


Figura 3.3: Corte da fronteira de eficiência à cota *Output 1=1*.

Já no que respeita às Unidades Organizacionais eficientes, uma vez retirada a restrição que impedia que a sua eficiência ultrapassasse os 100%, verifica-se que se obtém um valor superior à unidade e cuja interpretação é imediata: o valor obtido corresponde à pioria máxima admissível no desempenho do DMU em causa até este ficar ainda estritamente eficiente.

No caso das Unidades Organizacionais eficientes B;C,D no modelo tradicional, a sua eficiência seria unitária e o seu grupo de referência seria apenas a própria Unidade Organizacional.

Na Figura 3.3 está assinalado o ponto de referência do DMU C de coordenadas (6, 6, 1) que se representa por Cr. Comparando os *Inputs* de C (5, 5) com os de Cr facilmente se conclui que o DMU C apresenta uma Supereficiência de $6/5=1.2$.

Do mesmo modo, se assinalou na Figura 3.4 o ponto de referência do DMU D de coordenadas (12.5, 5, 1) e representado por Dr. De modo idêntico ao anterior se conclui que, se o DMU D, em vez de consumir 10 unidades do *Input* 1 e 4 do *Input* 2, consumisse mais de 12.5 e de 5 respectivamente, passaria a ser ineficiente, tendo o DMU C como grupo de referência.

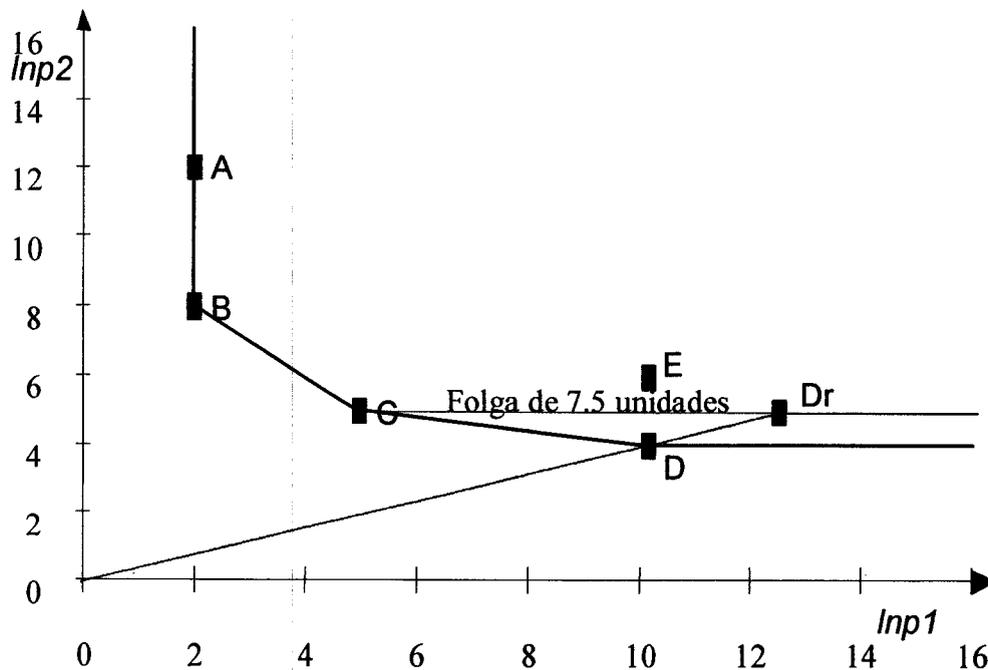


Figura 3.4: DMU Superficiente mas com folga.

Convém salientar que, neste caso, se os *Inputs* de D aumentassem de $5/4=1.25$, este apresentaria uma folga de 7.5 unidades no *Input* 1, o que contudo não é de grande interesse prático mas considera-se importante chamar a atenção para este facto que pode ser resumido do seguinte modo:

Uma Unidade Organizacional Super-eficiente pode eventualmente apresentar folgas o que não sucedia quando se analisava apenas a sua eficiência no sentido clássico do termo.

Outro aspecto interessante, ilustrado na Figura 3.5, consiste na inclusão de Unidades Organizacionais ineficientes no grupo de pares das Unidades Organizacionais Supereficientes, como sucede no caso do DMU B que possui um DMU de referência ineficiente, concretamente o DMU A. Repare-se que tal nem sempre sucede; no caso do DMU C todos os seus DMUs de referência são eficientes.

Repare-se agora como esta nova medida de desempenho é mais rica em informação, permitindo a ordenação das Unidades Organizacionais eficientes através dos resultados sumariados na Tabela 3.2:

Tabela 3.2: Resultados para o exemplo 2.

	B	D	C
Supereficiência	1.316	1.25	1.2
Grupo de pares	A, C	C	B, D

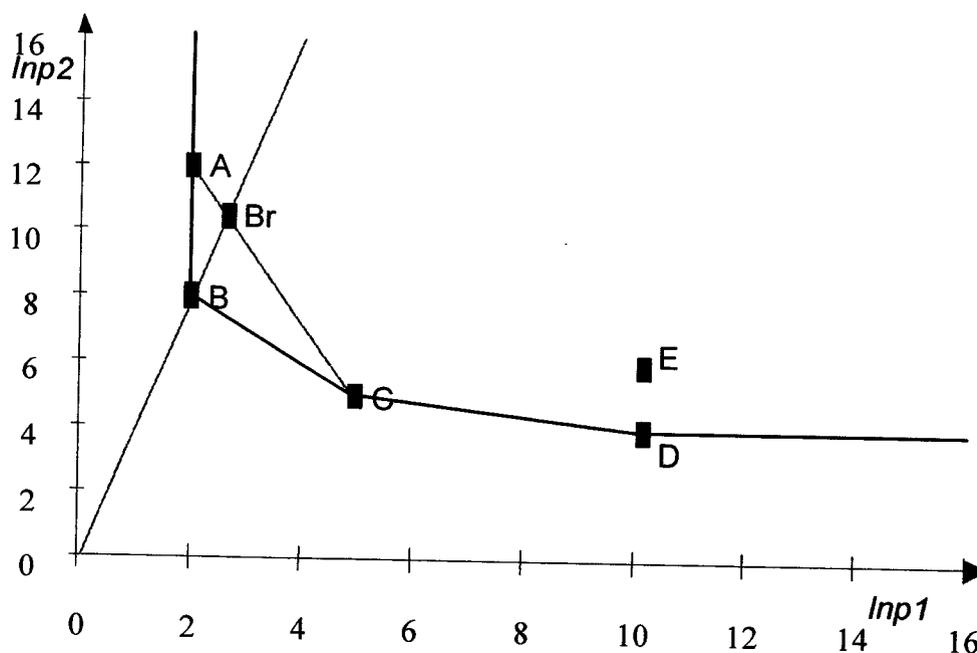


Figura 3.5: DMU Supereficiente mas com um DMU ineficiente no seu grupo de referência.

Outro exemplo interessante é o apresentado na Figura 3.6, em que se apresentam cinco DMUs dos quais três são eficientes e cujos multiplicadores μ e constantes ν_0 são indefinidos, como se exemplifica para o caso do DMU 3 com as linhas a

tracejado a representarem possíveis hiperplanos de suporte, cujas normais são exactamente os pesos μ e $(-v)$.

Repare-se que os hiperplanos de suporte, (rectas, neste caso a duas dimensões) mais inclinados que a aresta 1-3 não podem ser utilizados na avaliação do DMU 3, pois nesse caso a eficiência do DMU 1 seria superior à unidade. O outro limite é a aresta 3-4 pois para hiperplanos de suporte menos inclinados que a aresta 3-4, a eficiência do DMU 4 ultrapassaria a unidade.

Preferiu-se criar este novo exemplo apenas com duas variáveis, pois, para o modelo BCC, é impossível representar completamente no plano casos com mais variáveis. As Figuras 3.3 a 3.5 apenas representam um corte no espaço de possibilidades de produção, segundo o plano *Output*=1, no qual seria pouco correcto traçar hiperplanos de suporte e respectivas normais.

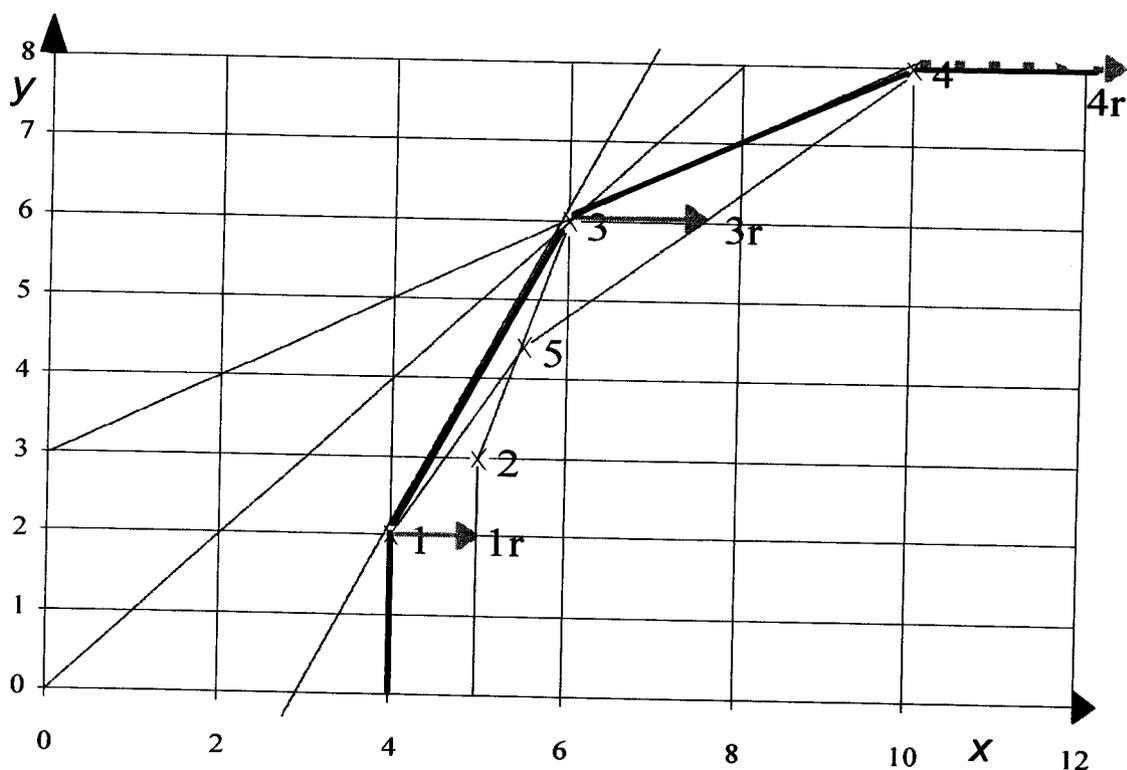


Figura 3.6: Exemplo para o modelo BCC.

Na Tabela 3.3 apresentam-se os resultados, calculando a Supereficiência apenas para as Unidades Organizacionais eficientes e constata-se que a ambiguidade a nível dos pesos foi neste caso eliminada,¹¹ o que é uma vantagem adicional desta abordagem não referida em Andersen e Petersen (1993).

¹¹ O hiperplano de suporte do ponto 3r é único e consiste na recta definida por 3 pontos colineares 5-3r-4.

Surgiu contudo outro problema, frequente neste tipo de análise, relacionado com o DMU 4; o qual, mesmo que o seu consumo de *Inputs* fosse infinito, este ainda continuaria eficiente. Tal facto resulta de se estar a trabalhar com economias com rendimentos variáveis à escala (modelo BCC), em minimização de *Inputs* com o DMU que produz o máximo num qualquer *Output* (neste caso $y_4=8.0$). Esta é uma limitação do modelo BCC, que ainda não foi resolvida com esta extensão. No entanto, ao pôr em evidência esta classe particular de DMUs eficientes, esta extensão apresenta vantagens em relação ao modelo original, em que todos os DMUs eficientes apresentavam eficiência unitária.

Tabela 3.3: Supereficiências - exemplo 3 *Output/1 Input*.

DMU	Variáveis		Constante	Multiplicadores		Superefi- ciência
	x	y	ν_0	ν	μ	ω_0
1	4.0	2.0	1.2500	0.2500	1E-06	1.2500
3	6.0	6.0	0.0000	0.1667	0.2083	1.2500
4	10.0	8.0	$-\infty$	0.1000	$+\infty$	$+\infty$

Repare-se que nem sempre é garantida a unicidade dos pesos mesmo recorrendo à Supereficiência.

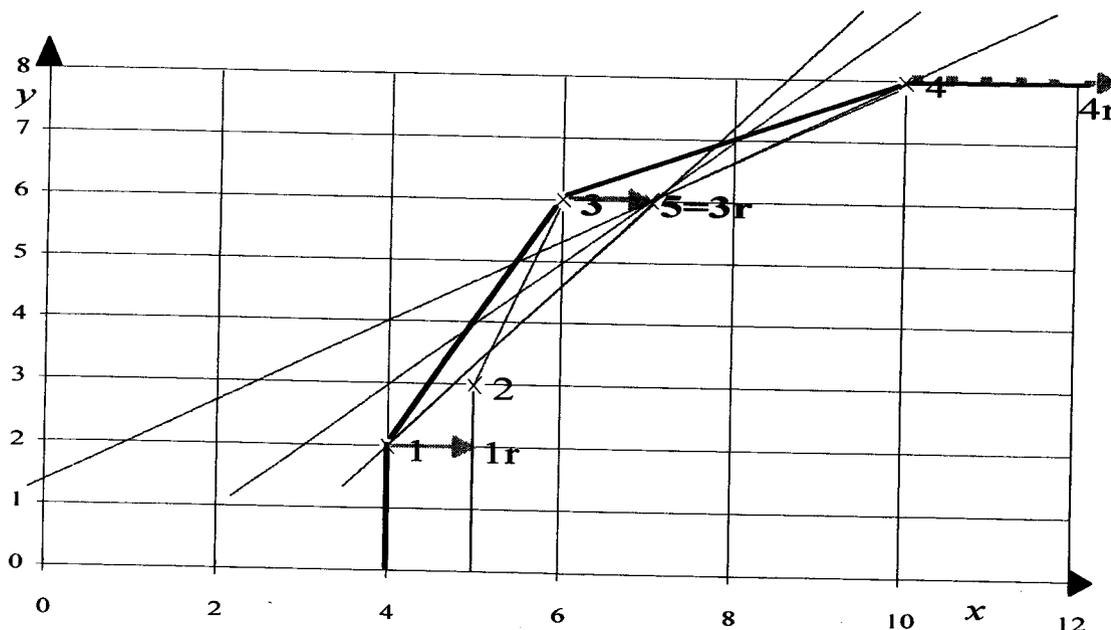


Figura 3.7: Exemplo de ambiguidade dos pesos para o modelo BCC.

De facto na Figura 3.7 apresenta-se um exemplo académico (dado que a probabilidade de suceder é nula por se tratar de variáveis contínuas) em que a ambiguidade dos pesos se mantém.

Esta maior (e geralmente total) unicidade dos pesos é particularmente interessante para obviar a críticas frequentemente feitas aos pesos que a técnica de DEA atribui às Unidades Organizacionais eficientes (Belton e Vickers, 1993).

Além do mais, os pesos assim obtidos serão uma boa alternativa aos métodos usuais para a sua determinação em aplicações de eficiência cruzada (Doyle e Green 1993 e 1994).

Entende-se por eficiência cruzada do DMU_j segundo a perspectiva do DMU_k (que se designará por E_{kj}) a avaliação do DMU_j com os pesos do DMU_k (Sexton et al. 1986)

sendo portanto definida pela expressão:
$$E_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij}}$$

À custa da ambiguidade dos pesos determinados para Unidades Organizacionais eficientes, é possível obter diferentes valores para os elementos das linhas correspondentes a esses DMUs eficientes, na matriz de eficiências cruzadas. Um método usual, para ordenar DMUs eficientes, consiste na escolha desses pesos de modo a maximizar ou minimizar a média das colunas¹². Esse método tem em linha de conta todos os DMUs, uma vez que se trata da média duma coluna na matriz de eficiências cruzadas. Uma vez que na Supereficiência os pesos são geralmente únicos, as médias obtidas para cada coluna são também únicas, sendo assim directamente um índice interessante para ordenação das Unidades Organizacionais eficientes.

¹² Consoante se opte por maximização ou minimização, assim se obtém as duas técnicas designadas por Doyle e Green por: Blanketed Benevolent Approach ou Blanketed Aggressive Approach respectivamente.

Capítulo 4.

Modelos não lineares em Data

Envelopment Analysis

Deixando de parte os modelos radiais que embora não lineares podem ser facilmente linearizáveis pela transformação de Charnes e Cooper, (1962) bem como o caso do modelo multiplicativo de Charnes, Cooper, Seiford e Stutz. (1982), em que se obtém um modelo linear trabalhando com os logaritmos das variáveis, subsistem alguns modelos não linearizáveis que se expõem no seguimento.

Vão-se estudar dois grandes grupos não disjuntos, de modelos:

Modelos combinatórios, baseados em programação linear mista e modelos não lineares contínuos.

4.1. Modelos combinatórios

Um dos primeiros modelos combinatórios deve-se a Bessent, Bessent, Elam e Clark (1988) que no seu artigo: "*Efficiency frontier determination by constrained facet analysis*", expõem uma técnica que evita as variáveis de folga, uma vez que projecta radialmente a unidade em análise sobre o prolongamento da faceta que contém os DMUs do conjunto de referência.

Esta desigualdade advém do facto da nova formulação poder ser interpretada como a relaxação da restrição de não negatividade das variáveis duais no problema da envolvente. Este facto já tinha sido sugerido em 1998 (Santos et. al, 1998) através da interpretação das variáveis duais, no problema da envolvente, como factores de extrapolação, no sentido de reduzir as folgas em Data Envelopment Analysis.

Para terminar, será interessante referir que o resultado acima ilustrado poderia ter sido obtido por restrições aos pesos (Allen et al. 1997) ou pela introdução duma unidade fictícia de coordenadas ($X_1=4, X_2=0, Y=1$) (Thanassoulis et al. 1998).

Outra aplicação de programação linear inteira mista é devida a Lang et al. (1995) em que se procura determinar exactamente quantas unidades eficientes estarão no hiperplano de suporte da unidade em análise. Esta técnica, conhecida por *Controlled envelopment by face extension in DEA*, permite variar esse número à custa do número de restrições activas no problema dos multiplicadores.

De facto, cada restrição activa significa que a unidade correspondente a essa restrição pertence ao hiperplano usado na avaliação da unidade em análise.

Consoante o número de restrições que se obrigue a serem activas na solução óptima, assim se obtém um “maior ou menor envolvimento da unidade em análise”. É óbvio que a partir de certos valores se obterá problemas sem solução admissível.

Recentemente um artigo (Cooper et al. 2007), pretendendo garantir a escolha dos pesos que conduz à faceta de mais alta dimensão, utiliza também um programa linear inteiro misto muito semelhante ao de Lang. Saliente-se, contudo, que a probabilidade de se ter esse tipo de problema com dados contínuos é nula, por definição de dados contínuos.

Essa técnica terá interesse quando se trata de dados discretos, caso em que a aplicabilidade dos modelos de Data Envelopment Analysis tradicionais é muito questionável.

Para dados discretos, é particularmente útil o modelo FDH Free Disposal Hull, desenvolvido por Deprins, Simar, e Tulkens (1984).

Ilustra-se na Figura 4.2 com a linha a ponteados, a alteração à fronteira de eficiência correspondente à avaliação da super-eficiência da unidade 3.

Embora haja outros algoritmos para a resolução do referido modelo, este é mais um caso de programação linear binária mista. De facto, basta substituir a restrição de não

negatividade das variáveis do problema da envolvente isto é, $\lambda_{jk} \geq 0$ por uma

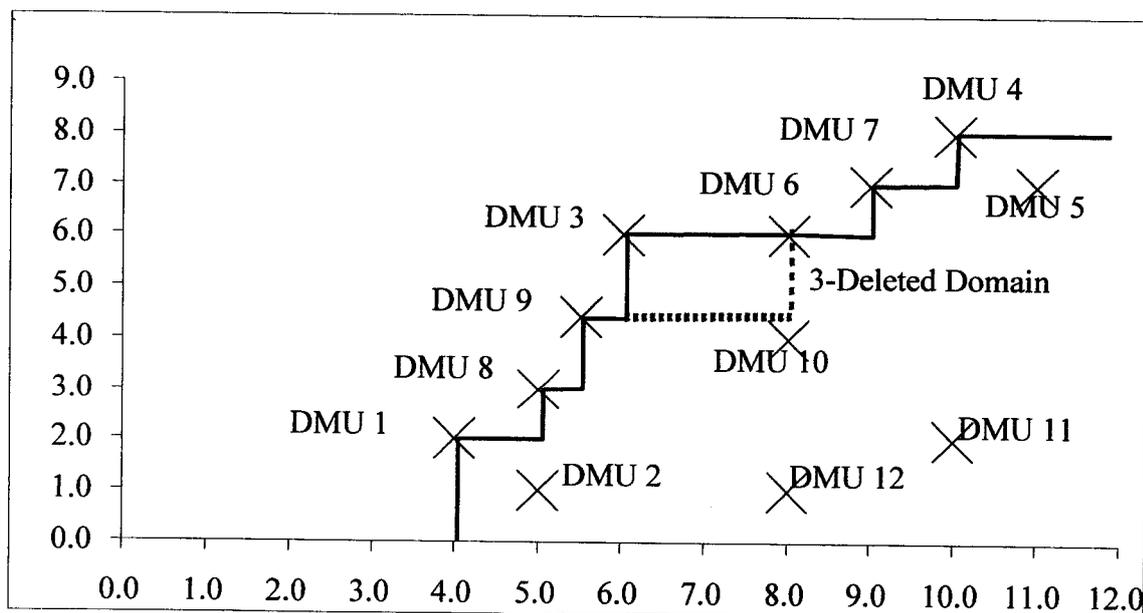


Figura 4.2 Exemplo de tecnologia não convexa e descontínua: FDH.

restrição de integralidade, $\lambda_{jk} \in \{0;1\}$, para se modificar o conjunto de possibilidades de produção, como se ilustra para as variáveis X_2 e Y_1 já descritas anteriormente e que se tornam a representar agora na Figura 4.2.

O modelo FDH pode portanto ser definido pela seguinte formulação em minimização de *inputs*:

$$\min : Z_k = \theta_k - \varepsilon \left\{ \sum_{r=1}^s S_{rk}^+ + \sum_{i=1}^m S_{ik}^- \right\} \quad (4.1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_{ik}^- = \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (4.3)$$

$$\lambda_{jk} \in \{0;1\} \quad j = 1, \dots, n \quad (4.4)$$

$$S_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

$$S_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1 \quad (4.7)$$

Tabela 4.1 Eficiência do FDH sob Maximização de *Outputs*.

_FDH_RAD_OUT						
Unit	Score	Bench- marks	Nº Do- minated	Dominated	Nº Do- minating	Dominating
U 1	100.00%	-	-		3	2 11 12
U 2	300.00%	8	2	1 8	1	12
U 3	100.00%	3	-		4	6 10 11 12
U 4	100.00%	2	-		2	5 11
U 5	114.29%	4	2	4 7	0	
U 6	100.00%	3	1	3	3	10 11 12
U 7	100.00%	-	-		2	5 11
U 8	100.00%	1	-		3	2 11 12
U 9	100.00%	-	-		3	10 11 12
U 10	150.00%	3 6	3	3 6 9	2	11 12
U 11	400.00%	4	8	1 3 4 6 7 8 9 10	0	
U 12	600.00%	3 6	7	1 2 3 6 8 9 10	0	

Novamente se pode definir dois tipos de orientação radial: maximização de *Outputs* e minimização de *inputs*.

Os resultados para a Maximização de *Outputs* são os apresentados na Tabela 4.1.

Os resultados para minimização de *inputs* seriam idênticos, excepto no *score* que se apresenta na Tabela 4.2, em que também se acrescentou a super-eficiência para os dois casos, pois o EMS não calcula esse indicador. Repare-se que todos os *scores* de 100% aparecem em ambas as orientações, excepto no caso do DMU 6, que não é dominante, mas sim fracamente dominado pelo 3.

Os resultados são os apresentados na Tabela 4.2.

Na coluna Deleted Domain, apresentam-se os dados para a super-eficiência que o EMS não calcula, no caso dos modelos não convexos.

Verifica-se que não existem soluções admissíveis no problema da envolvente, e no dos pesos, estas são ilimitadas, concretamente no caso do DMU 4. Tal deve-se a ser este DMU o que tem maior output, o que já Santos em 1994 tinha mostrado ser condição

suficiente para se obter soluções ilimitadas no problema dos multiplicadores em minimização de inputs (Santos, 1994).

Tabela 4.2 Resultados do EMS para os dados habituais X1 e Y1 e cálculo separado da Super-eficiência.

DMU.	X1 {I}	Y1 {O}	Input minimization		Output maximization	
			Del. Domain	Score	Del. Domain	Score
DMU 1	4	2	125.00%	100.00%	0.00%	100.00%
DMU 2	5	1	80.00%	80.00%	300.00%	300.00%
DMU 3	6	6	133.33%	100.00%	73.33%	100.00%
DMU 4	10	8	Ilimitado	100.00%	87.50%	100.00%
DMU 5	11	7	81.82%	81.82%	114.29%	114.29%
DMU 6	8	6	75.00%	75.00%	73.33%	100.00%
DMU 7	9	7	111.11%	100.00%	85.71%	100.00%
DMU 8	5	3	110.00%	100.00%	66.67%	100.00%
DMU 9	5.5	4.4	109.09%	100.00%	68.18%	100.00%
DMU 10	8	4	68.75%	68.75%	150.00%	150.00%
DMU 11	10	2	40.00%	40.00%	400.00%	400.00%
DMU 12	8	1	50.00%	50.00%	600.00%	600.00%

Repare-se ainda que, tendo acrescentado a restrição de integralidade ao modelo BCC, obteve-se um modelo mais benevolente no sentido em que a sua eficiência nunca será inferior à do BCC e a sua ineficiência nunca será superior à obtida no caso convexo (BCC), o que se aplica também ao modelo de *deleted domain*, isto é, ao modelo da super-eficiência.

Outros modelos binários que surgiram recentemente estão relacionados com as diferentes preferências que cada grupo possa ter. Este aspecto foi primeiro levantado acerca das diferentes perspectivas dos clientes das universidades inglesas. (Sarrico et al, 1997). O mesmo tema foi entretanto retomado por Bougnol e Dulá, (2002) que lhe deram o formalismo matemático que ainda lhe faltava e introduziram um novo modelo não orientado, com características muito boas no que respeita à existência de soluções admissíveis e invariância. Dados os elevados tempos de processamento deste modelo, Santos apresentou em Abril de 2003 na JOCLAD 2003 X Jornadas de Classificação e Análise de Dados decorrida na Universidade de Aveiro, um Poster intitulado- *A New*

Model for Finding the Most Favourable Constituency in Data Envelopment Analysis. Esta nova formulação introduzia variáveis binárias e era cerca de vinte vezes mais rápida que a anterior. Já em Atlanta, no mesmo ano, tornou a fazer uma apresentação em que mostrou a vantagem da sua formulação, para problemas ainda maiores que os de Bognol. Uma das dificuldades encontradas relaciona-se com a maior complexidade deste último modelo não orientado, relativamente aos modelos orientados CCR e BCC.

Para estes últimos modelos, é de referir a aplicação da técnica anterior a dois conjuntos de dados clássicos, referentes a universidades inglesas e ao sector bancário, mas apenas para economias com rendimentos de escala constantes. (Cook e Zhu, 2007).

Em todos estes problemas anteriores, a determinação dos pontos extremos é um grande avanço. Como tal, tem merecido especial atenção de muitos investigadores.

O problema mais simples consiste em determinar os pontos extremos de um conjunto de pontos. Esse problema tem nomes diferentes consoante os autores. Assim, segundo Gerstenhaber, este consiste em determinar a *frame* (Gerstenhaber, 1951) e mais recentemente Fukuda descreve-o como o “problema da remoção da redundância” (Fukuda, 2004).

Dulá, Helgason e Hickman desenvolveram algoritmos para tratamento prévio dos dados (Dulá, et al. 1992), e os dois primeiros autores exploraram ainda a via de gerar uma sequência encaixada de envolventes, que vai incluindo um ponto em cada iteração (Dulá e Helgason 1996) até à obtenção da envolvente convexa final do conjunto de pontos original. Uma comparação e descrição global destas técnicas podem ser consultadas no artigo de Dulá e Lopez. (Dulá et al. 2006).

Estas técnicas têm aplicação em Data Envelopment Analysis, pois, como referido por Dulá e Thrall, os pontos extremos do polítopo convexo com um número finito de vértices correspondem a unidades eficientes (Dulá e Thrall, 2001).

Existe outro tipo de problema que é o da decomposição facial, em que se pretende conhecer não só quais os pontos extremos mas também a que faces estes pertencem.

Trata-se de um problema computacionalmente pesado e claramente combinatório. Embora para duas ou três dimensões existam algoritmos bem conhecidos, uma referência para a sua resolução para dimensões mais elevadas é o artigo “Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data

envelopment analysis model” (Yu et al. 1996). Nesse artigo, apresenta-se um modelo geral que consegue através de três parâmetros abranger num só modelo quatro dos modelos mais usuais- o CCR, o BCC, o NIRS e o NDRS.

Baseando-se num algoritmo de Bron e Kerbosch (1973) para encontrar todas as cliques dum grafo, este algoritmo faz uma busca em árvore, identificando todos os subconjuntos de vértices que estão na mesma face. Outro algoritmo referido por Dulá e Lopez (2006) está descrito em “Algorithms in combinatorial geometry” (Edelsbrunner, 1987).

Para obter esses resultados existem programas, como o Qhull já utilizado na área da Data Envelopment Analysis (Santos et al. 1998), que embora possuam o inconveniente de correr em DOS calculam não só os vértices pertencentes a cada faceta, como também apresentam a respectiva normal e o volume.

Existem também funções em Matlab que executam a decomposição facial, embora apenas até dimensões relativamente baixas.

4.2. Modelos não lineares contínuos

O primeiro modelo não linear contínuo (Fare et al. 1985) deve-se a Fare, Grosskopf e Lovell que em 1985, introduzem a função de distância hiperbólica, em que se procura não só uma contracção isoproporcional de inputs Z_k mas também uma expansão isoproporcional de outputs Z_k . O modelo é dado por:

$$\text{Min: } Z_k \quad (4.8)$$

$$\text{S.a: } \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_{ik}^- = Z_k x_{ik} \quad i=1 \dots m \quad (4.9)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_{rk}^+ = y_{rk} / Z_k \quad r=1 \dots s \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1 \quad (4.11)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j=1 \dots n \quad (4.12)$$

$$S_{ik}^+ \geq 0 \quad i=1 \dots m \quad (4.13)$$

$$S_{rk}^- \geq 0 \quad r=1 \dots s \quad (4.14)$$

Este modelo foi alterado, originando o modelo FGL, em que os inputs e outputs podem variar em diferentes proporções, isto é, em vez de se ter uma única variável Z_k que representa a tal contracção e expansão, tem-se uma variável h_{ik} para cada Input e g_{jk} para cada Output.

$$FGL = \left\{ \min \frac{\sum_{i=1}^m h_{ik} + \sum_{r=1}^s 1/g_{rk}}{m+s} \mid (h_{ik}, x_{ik}, g_{rk}, y_{rs}) \in T, 0 \leq h_{ik} \leq 1, g_{rk} \geq 1 \right\}$$

Na fórmula anterior esclarece-se que, na definição axiomática da produção, se costuma representar por T o espaço de possibilidades de produção associado a uma dada Tecnologia.

Outro modelo não linear é o de Brockett, Rousseau, Wang e Zhou (1997) cuja expressão se passa a indicar:

$$BRWZ = \left\{ \min \frac{\sum_{i=1}^I h_{ik} \times \sum_{j=1}^J 1/g_{jk}}{m+s} \mid (h_{ik}, x_{ik}, g_{jk}, y_{jk}) \in T, 0 \leq h_{ik} \leq 1, g_{jk} \geq 1 \right\}$$

Nalguns modelos não orientados como, por exemplo, o modelo aditivo, acaba-se por maximizar a distância entre a unidade em análise e o respectivo conjunto de pares, o que é um inconveniente que alguns autores resolveram, como é o caso de Tavares e Antunes (2001), que aplicaram a medida de Tchebycheff alargada ao modelo aditivo mas minimizando as folgas em vez de as maximizar, como na formulação original de Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz.

Outro caso de minimização das folgas, embora por alteração ao modelo BRWZ, pode ser encontrado em Portela e outros (2003), (2004).

Na base de muitos trabalhos, na última década, tem estado a introdução de bases topológicas no espaço dos factores de produção.

Briec introduz uma métrica para medir a eficiência técnica. Esta função associa a um ponto a sua distância ao conjunto de possibilidades de produção, mas medida em relação a uma norma explícita num espaço vectorial, em particular no que respeita à métrica de Hölder, que inclui como caso particular a métrica Euclidiana.

A distância de Hölder, em primeiro lugar, pela sua natureza, tem a flexibilidade para medir a eficiência técnica no espaço completo de *input-output*. Assim, essa nova

medida indica, em relação a uma norma dada, as menores modificações requeridas nos inputs e outputs para alcançar o “subconjunto eficiente fraco”. Em segundo, as normas são construídas em torno de uma componente técnica que tem a flexibilidade para ter em conta as particularidades do mercado, introduzindo um esquema de pesos conveniente. Esta propriedade é interessante, porque o produtor pode considerar que alguns inputs e outputs são mais importantes do que os outros. Em terceiro lugar, a função de distância de Hölder pode ser usada para comparar os vectores de produção: caracteriza o subconjunto eficiente fraco, é fracamente monotónica e contínua. Finalmente, e talvez ainda mais importante, a função de distância de Hölder faz uma ligação entre a maneira como a eficiência é medida, na análise da eficiência, e a noção de distância na topologia. Em particular a função de distância de Hölder inclui, como um caso especial, a *shortage function*, um conceito recentemente introduzido na teoria microeconómica por Luenberger (1995).

Entretanto, há um inconveniente em executar a medida de eficiência acima referida baseada na distância: a sua dependência das unidades de medida. Isto não altera a eficiência das unidades de produção eficientes, para as quais o valor do índice é zero. Por outro lado, a comparação entre duas unidades de produção não eficientes pode ser alterada pelas unidades de medida escolhidas pelo produtor. Ou seja uma função de distância métrica não satisfaz à condição da comensurabilidade sugerida por Russell (1988). Este termo teve origem no tratamento axiomático de índices de preços por Eichorn e por Voeller (1978). A fim de preservar a condição da comensurabilidade, introduzem uma normalização da distância de Hölder. Nesta linha, prova-se que a medida de Debreu-Farrell pode ser expressa como um caso particular duma distância de Holder. Seguindo Luenberger (1995); Chambers, Chung e Färe (1995-1996) interpretaram a “*shortage function*” como uma medida de eficiência denominada “a distância direcciona” que é útil na decomposição da eficiência na sua componente Nerloviana.

A norma de Hölder define-se num espaço normado real n dimensional por:

$$\| \cdot \|_k : \mathbf{x} \rightarrow \| \mathbf{x} \|_k = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^k \right)^{1/k} \quad \text{para } k \in [1; \infty[\text{ ou}$$

$$\| \cdot \|_k : \mathbf{x} \rightarrow \| \mathbf{x} \|_k = \max \{ |x_i| \} \quad \text{para } k = \infty$$

Para o caso de $k=2$ obtém-se a métrica Euclidiana habitual

As bolas definidas por esta distância vão ser hipersferas para $k=2$ e polítopos com $2n$ vértices para $k=1$ e com 2^n vértices para o caso limite da outra norma poliédrica, a norma de Tshebishev.

5.1. O modelo CCR.

Uma condição necessária e suficiente para a inexistência de soluções possíveis num modelo de minimização de *inputs* é que o DMU excluído tenha o único valor zero para qualquer *input*, ou o único valor positivo para qualquer *output*, entre todo e qualquer DMU no conjunto de referência (Dulá e Hickman, 1997) (Seiford e Zhu, 1999).

Seiford e Zhu provaram ainda que existem sempre soluções possíveis, num modelo de maximização de *outputs* sob rendimentos constantes à escala (Seiford e Zhu, 1999).

5.2. O modelo BCC

As condições para a inexistência de soluções possíveis no modelo BCC são referidas em Santos (Santos, 1994), Dulá e Hickman (Dulá e Hickman, 1997) e Seiford e Zhu (Seiford e Zhu, 1999).

Uma condição necessária para a inexistência de soluções possíveis é que o DMU excluído seja “extremo-eficiente”.

Quando todas as variáveis são positivas para todo e qualquer DMU, uma condição necessária e suficiente para a inexistência de soluções possíveis é que o DMU excluído seja “super-eficiente” no sentido que:

(a) Num modelo de minimização de *inputs*, ele tem pelo menos um *output* estritamente maior do que uma combinação convexa de *outputs*, entre todos os DMUs no grupo de referência;

(b) Num modelo de maximização de *outputs*, tem ao menos um *input* estritamente menor do que uma combinação convexa de *inputs*, entre todos os DMUs no grupo de referência.

Ir-se-ão apenas desenvolver técnicas para contornar o problema da inexistência de soluções possíveis no modelo BCC, pois nos modelos CCR tal problema só surge com conjuntos de dados artificiais com padrões particulares de zeros, que não podem surgir em dados reais próprios para aplicação das técnicas de DEA. Recordar-se que os

Capítulo 5.

A inexistência de soluções possíveis em Supereficiência

No Capítulo 3, já se referiu que a inexistência de soluções possíveis em modelos de super-eficiência ocorre sempre para as unidades que apresentem um máximo nalgum *Output* em minimização de *Inputs*, passando-se o contrário para maximização de *Outputs*.

O objectivo desse Capítulo 3 era apenas o de introduzir o conceito de super-eficiência, e abordou-se superficialmente a questão da inexistência de soluções admissíveis, sendo a afirmação anterior apenas uma condição suficiente.

Neste capítulo 5 vão-se referir as situações que originam soluções ilimitadas no problema dos multiplicadores e apresentar várias soluções todas elas originais para obviar a esse inconveniente.

Dulá e Hickman (Dulá e Hickman, 1997) e Seiford e Zhu (Seiford e Zhu, 1999) provaram as condições gerais de inexistência de soluções possíveis nos modelos anteriormente referidos, quer para o caso de economias com rendimentos de escala constante quer para o caso de economias com rendimentos de escala variável.

dados devem corresponder a grandezas contínuas, o que por vezes é ignorado em muitas aplicações.

Para dados discretos, existem outras técnicas como o *Free Disposal Hull*.

Já Farrell tinha reconhecido que muitas variáveis têm uma essência discreta como se pode concluir da seguinte citação:

“A glance at the world about us should be enough to convince us that most commodities are to some extent indivisible and that many have very large indivisibilities. Similarly, whenever one refers to “economies of scale” and of “specialization”, one is pointing to concavities in production functions. There is thus no need to argue the importance of either indivisibilities or concavities in production functions – the former are an obvious feature of the real world, and the latter have constituted a central topic in economics since the time of Adam Smith.” (Farrell, 1959).

5.2.1. O modelo BCC de Banker e Gifford

Neste modelo de maximização de *Outputs*, aplica-se uma penalidade negativa à função objectivo de modo que a solução com um λ_0 não nulo, quando se avalia o DMU_0 seria evitada e apenas surgiria quando o modelo de supereficiência de Petersen não admitisse solução.

No caso de minimização de *inputs*, deve-se aplicar uma penalidade positiva, como foi feito no Capítulo 3.

Tabela 5.1: Dados para dois casos extremos de DMUs BCC efficientes.

Caso B	<i>Input</i>	<i>Output</i>	CRS	Caso C	<i>Input</i>	<i>Output</i>	CRS
DMU-BIE-1	19	1	0.05	DMU-CAE-1	10	9	0.90
DMU-BE-2	20	20	1	DMU-CE-2	20	20	1.00
DMU-BIE-3	99	21	0.21	DMU-CAE-3	30	29	0.97

Estas modificações na função objectivo conduzem sempre a soluções possíveis, contudo não destringem entre os dois casos que se apresentam na Tabela 5.1

Embora todos os 3 DMUs sejam BCC eficientes, as suas eficiências no modelo CCR são muito diferentes e apresentam-se na última coluna (CRS).

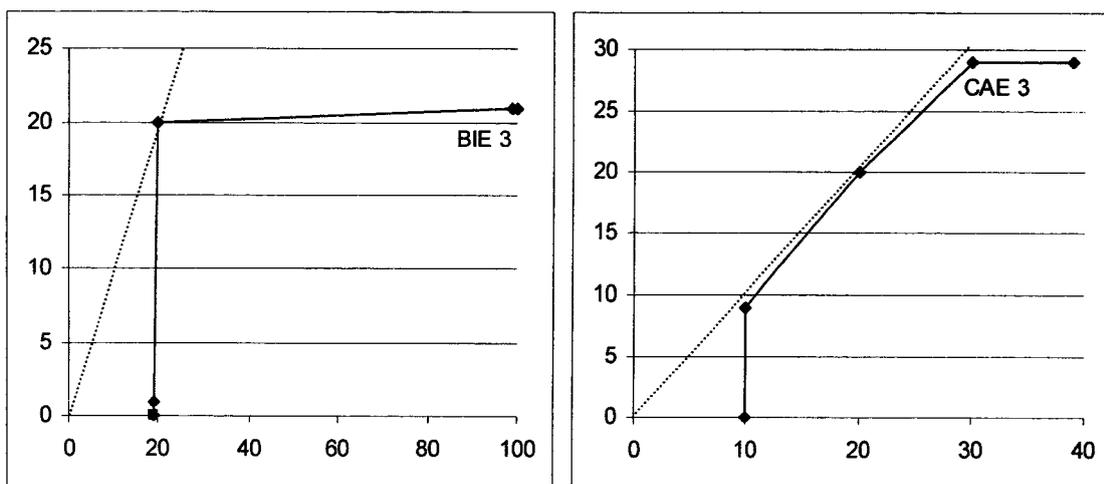


Figura 5.1 Representação gráfica de dois DMUs ambos BCC eficientes mas com grandes diferenças na sua eficiência CCR e à escala.

Criaram-se dois ficheiros: *dmuB-I1O1-BCC.xls* e *dmuC-I1O1-BCC.xls*. I1O1 é mnemónica de *Input (1)* e *Output (1)*; e BCC é o acrónimo das iniciais dos nomes dos autores do modelo aplicável a VRS.

Tabela 5.2: Resultados do software EMS.

EMS							
File Edit DEA Window Help							
J:\Programas\EMS\dmuB-I1O1-BCC.xls VRS (1)							
	DMU	Score	X (I)\W	Y (O)\W	Benchmarks	{S} X (I)	{S} Y (O)
1	BIE-1	105.26%	0.05	0.00	0		
2	BE-2	475.00%	0.05	0.20	0		
3	BIE-3	big	0.01	4764378959516.54	0		
J:\Programas\EMS\dmuC-I1O1-BCC.xls VRS (1)							
	DMU	Score	X (I)\W	Y (O)\W	Benchmarks	{S} X (I)	{S} Y (O)
1	BIE-1	big	176242975493123.00	1.00	0		
2	BE-2	6.25%	0.01	0.05	0		
3	BIE-3	95.24%	0.00	0.05	0		
J:\Programas\EMS\dmuB-I1O1-BCC.xls VRS (1)							
	DMU	Score	X (I)\W	Y (O)\W	Benchmarks	{S} X (I)	{S} Y (O)
1	CAE-1	200.00%	0.10	0.00	0		
2	CE-2	105.00%	0.05	0.05	0		
3	CAE-3	big	0.03	67660810.01	0		
J:\Programas\EMS\dmuC-I1O1-BCC.xls VRS (1)							
	DMU	Score	X (I)\W	Y (O)\W	Benchmarks	{S} X (I)	{S} Y (O)
1	CAE-1	big	2824187059.17	0.11	0		
2	CE-2	95.00%	0.05	0.05	0		
3	CAE-3	68.97%	0.00	0.03	0		

Os resultados dum software típico de DEA são apresentados na Tabela 5.2, para mostrar como casos bem diferentes conduzem a resultados idênticos escondidos sob o resultado “*big*”, significando a inexistência de soluções possíveis no modelo da envolvente, e uma solução ilimitada no dos pesos.

Na literatura surgiu recentemente algum trabalho (Chen 2004) acerca destes casos de soluções ilimitadas, em que o autor (Chen, 2005) sugere a construção de uma medida composta da super-eficiência em maximização de Outputs e da super-eficiência em minimização de Inputs, excluindo o caso raro de ambos os problemas serem ilimitados. Essa abordagem tem contudo o inconveniente de fazer depender a super-eficiência de DMUs claramente dominados.

5.2.2. Aplicação de técnicas estocásticas ao modelo BCC

Uma solução consiste em ajustar uma regressão para explicar a eficiência de escala pela localização do DMU. Deste modo reduz-se o problema da dimensão $m+s$ para $m+1$ ou $s+1$, consoante se opte por tomar os m *Inputs* ou os s *Outputs* para variáveis explicativas.

Esta técnica exige conjuntos de dados extensos. Neste exemplo, aplicou-se esta técnica a um caso com duzentos DMUs distribuídos segundo uma função de “Cobb Douglas deslocada” com 4 *Inputs* e 2 *Outputs*.

Observa-se que somente duas unidades conduziam a soluções ilimitadas no modelo BCC. Nomeadamente o DMU 35 tem o valor mais elevado no *Output* Y_1 , enquanto o DMU 123 tem o valor mais elevado no *Output* Y_2 . Para determinar primeiro a estimativa da eficiência da escala, aplicou-se uma regressão que explica a eficiência da escala pelos quatro *Inputs*. De facto, somente o *Input* X_4 era significativo e negligenciou-se a contribuição menor das restantes variáveis. Esta análise foi restringida aos DMUs com rendimentos decrescentes à escala. Finalmente, calculou-se a eficiência de BCC.

Recorda-se que: eficiência de escala = eficiência CCR/eficiência BCC pelo que:

$$\text{BCC_Eff} = \text{CCR_Eff} / \text{Scale_Eff}.$$

Obtém-se assim os valores apresentados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Dados e resultados para os dois DMUs que originavam soluções ilimitadas.

DMU	CCR Eff	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	Scale Eff	BCC Eff
u35	108.23%	19.24	19.15	13.9	16.45	6.4	5.29	97.65%	110.83%
u123	114.66%	14.56	19.94	14.2	18.59	5.13	6.42	96.45%	118.89%

Outra solução consiste em recorrer a técnicas de simulação, contaminando os dados originais com Ruído Branco Gaussiano:

1 – Aditivo;

2 – Multiplicativo;

Foram rejeitados os casos ilimitados e calculados a média aritmética, o erro padrão, o máximo, o mínimo e o erro padrão para cada DMU. Deve-se ser bastante cauteloso na interpretação destes resultados. De facto, as mudanças do conjunto de referência em cada concretização da série de dados, pode mesmo levar a que este contenha algumas unidades originalmente ineficientes dependendo de quão grande os desvios aleatórios são em relação aos dados originais, e naturalmente, se as unidades ineficientes foram ou não excluídas destas simulações. Neste caso, mantiveram-se todas as 200 unidades na série de dados.

Tabela 5.4: Resultados para o caso aditivo sob VRS.

Adit.	A. Mean	St.Error	St. Dev.	Max	min	%Feasib.
u35	94.50%	16.17%	1.95%	131.49%	58.83%	62.73%
u123	95.43%	15.57%	1.95%	134.54%	65.87%	58.18%

Fizeram-se 210 simulações que demoraram 4 horas e 12 minutos, para resolver todos os 210 conjuntos de dados simulados com um total de 200 DMUs.

Os resultados para o caso aditivo sob VRS apresentam-se na Tabela 5.4.

Os resultados para o caso multiplicativo sob VRS apresentam-se na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Resultados para o caso multiplicativo sob VRS.

Mult.	A. Mean	St.Error	St. Dev.	Max	min	%Feasib.
u35	101.58%	16.68%	2.52%	153.53%	71.28%	44.00%
u123	110.30%	14.59%	1.93%	155.64%	82.85%	57.00%

Repare-se que o DMU 123 teve sempre resultados mais elevados em todos os modelos e que o caso multiplicativo sob VRS foi o que conduziu a eficiências mais elevadas.

5.2.3. Aplicação de técnicas de relaxação ao modelo BCC

Os métodos originais que agora se vão descrever baseiam-se em relaxar a restrição de convexidade no modelo da envolvente.

5.2.3.1. Substituição das combinações convexas por combinações afins

Primeiro vão-se substituir as combinações convexas por combinações afins o que vai levar a um prolongamento das facetas do poliedro que envolve os dados.

Vão-se considerar os seguintes dados referentes a 9 DMUs com apenas duas variáveis.

Tabela 5.6 Dados para exemplificar o uso duma combinação afim.

	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9
X	6.0	6.1	6.5	7.0	8.0	10.0	13.0	17.0	25.0
Y	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0

Prolongando a penúltima faceta não horizontal, consegue-se um ponto compósito para avaliar o DMU com maior *output*.

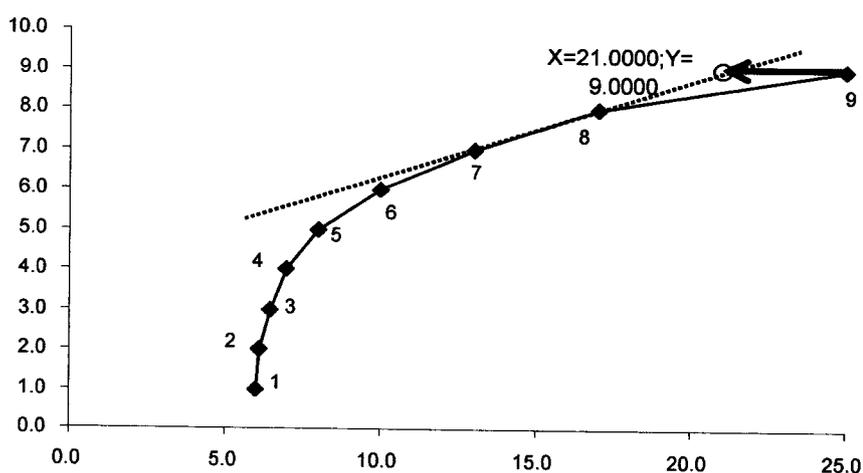


Figura 5.2: Exemplo para o uso duma combinação afim.

O caso apresentado é de fácil resolução gráfica. Genericamente basta permitir que os escalares λ_j possam assumir valores negativos que deverão ser interpretados como coeficientes de extrapolação.

Obtém-se neste caso um hiperplano definido por U7 e U8 representado na figura pela recta a ponteadado.

A resolução analítica conduz aos resultados da Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Resultados para o uso duma combinação afim.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	Sx	Sy	Score
0.0	0.0	0.0	0.00	0.00	0.00	-1.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.8400

Pode-se interpretar os coeficientes λ_7 e λ_8 como coeficientes de extrapolação pois vão definir um ponto fora da aresta que os une, em contraste com a formulação convexa em que deveriam ser interpretados como coeficientes de interpolação dos vértices da aresta. De qualquer modo fica claro que o ponto compósito obtido fica localizado na semi-recta com origem no DMU7 passando pelo DMU 8

Tabela 5.8: Cálculos para determinar o ponto compósito.

	X	Y	λ	X. λ	Y. λ
U_7	13.00	7.00	-1.00	-13.00	-7.00
U_8	17.00	8.00	2.00	34.00	16.00
Ref.=				21.00	9.00

Casos mais complexos (de maior dimensionalidade) tornam-se mais difíceis de resolver. Uma solução consiste em adoptar a técnica de 1988 (Bessent et al, 1988) que usa um método iterativo para remover folgas na sua *Constrained Facet Analysis*. Presentemente, será mais fácil adaptar o modelo *Controlled Envelopment by Face Extension in DEA* (Lang et al. 1995) e construir um programa linear binário misto, em que inclusive se pode variar o grau de envolvimento das faces.

Convém realçar que uma vez que se está a relaxar restrições no problema da envolvente, que é um programa de minimização, nunca se irão obter valores óptimos da função objectivo superiores aos do modelo clássico.

Graficamente, isto pode ser visto pelo facto do ponto compósito estar sempre fora do conjunto das possibilidades de produção.

5.2.3.2. O modelo BCC Homotético

Outro modo de relaxar a restrição de convexidade consiste em substituir a igualdade $\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1$, por uma desigualdade do género $\sum_{j=1}^J \lambda_j = E > 1$. Esta questão será desenvolvida mais detalhadamente nesta secção.

Deste modo, obtém-se uma nova fronteira de eficiência que é uma expansão homotética da original, como se mostra na Figura 5.3.

O problema consiste em determinar o melhor valor para E. Para E demasiado próximo da unidade pode ainda conduzir a um problema sem solução. Verifica-se por exemplo para o caso da Figura 5.3 que basta E crescer para 1.125 no caso dos DMUs na zona de rendimentos decrescentes à escala e em minimização de inputs para passar a ter solução.

Deve-se realçar que, se se está a relaxar restrições num problema de minimização de *inputs*, vai-se obter um valor da Função Objectivo nunca superior ao original. Isto significa que estes DMUs eficientes passarão a apresentar eficiências menores que os valores obtidos no modelo de Banker e Gifford.

Desenvolveu-se portanto um novo modelo, o modelo BCC Homotético, que se passa a apresentar. Dado ser um modelo original, apresenta-se nas duas orientações: primeiro, em minimização de inputs e depois, em maximização de outputs. Estabelecem-se e demonstram-se também algumas propriedades interessantes.

O modelo BCC Homotético é um modelo original, desenvolvido no âmbito desta tese para ter sempre soluções admissíveis. Tal propriedade é obtida relaxando a relação de

convexidade e permitindo que $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \geq 1$, em minimização de inputs, e $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \leq 1$

para maximização de outputs.

No sentido de garantir o máximo de comparabilidade entre este novo modelo e o

BCC, qualquer desvio em torno de $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} = 1$ provoca uma penalidade na função

objectivo, por recurso a um Big M.

5.2.3.2.1. O modelo BCC Homotético em minimização de inputs

O modelo BCC Homotético em minimização de inputs é dado por:

$$\text{Min } Z_k = \theta_k + M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \quad (5.1)$$

$$\text{S.a: } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} x_{ij} \leq \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} y_{rj} \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, m \quad (5.3)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \geq 1 \quad (5.4)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

k é a unidade em análise e θ_k é a respectiva eficiência.

Proposição 1: *O modelo BCC Homotético em minimização de inputs tem sempre solução admissível.*

Demonstração: Se se omitir a penalidade introduzida pelo Big M, o modelo reduz-se ao modelo BCC com economias de escala não decrescentes (Non Decreasing Returns to Scale).

Sabe-se que o modelo BCC-NDRS é sempre admissível em minimização de inputs, (Seiford e Zhu, 1998).

O facto de acrescentarmos a penalidade a θ_k na função objectivo em nada altera a admissibilidade duma solução, pelo que esta nova formulação tem sempre solução admissível. Q.E.D.

Proposição 2: *Sempre que o modelo BCC em minimização de inputs tem solução admissível, o valor da sua função objectivo iguala θ no modelo BCC Homotético em minimização de inputs.*

Demonstração: Pelo elevado valor do M na função objectivo, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ será minimizado

o mais possível apenas limitado pela restrição: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \geq 1$. Deste modo tem-

se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} = 1$, pelo que os resultados serão idênticos aos do modelo BCC pois a soma

duma constante à função objectivo não altera a sua optimalidade. Q.E.D.

Proposição 3: Quando o modelo BCC não tem solução admissível, a avaliação da unidade em causa é feita sobre a homotetia de centro na origem e razão $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ da fronteira de eficiência original.

Demonstração: Se se definir $\lambda'_{jk} = \lambda_{jk} / \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ e se substituir λ_{jk} por $\lambda'_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$

passa-se a ter a restrição de convexidade característica do modelo BCC e pode-se

fazer $x'_{jk} = x_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ e $y'_{jk} = y_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$.

Obtém-se assim o seguinte modelo:

$$\text{Min } Z_k = \theta_k + M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \quad (5.6)$$

$$\text{s.a: } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda'_{jk} x'_{ij} \leq \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.7)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda'_{jk} y'_{rj} \geq y_{rk} \quad r = 1, \dots, m \quad (5.8)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda'_{jk} \geq 1 \quad (5.9)$$

$$\lambda'_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.10)$$

Este modelo é um modelo BCC apenas com a diferença que a unidade k em análise vai ser comparada com uma nova fronteira de eficiência (expandida) obtida

multiplicando os valores dos inputs e outputs da original por $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ QED.

Proposição 4: O modelo BCC em minimização de inputs não tem solução admissível,

se e só se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} > 1$ no modelo BCC Homotético em minimização de inputs

Demonstração: O modelo BCC Homotético, em minimização de inputs, tem sempre

solução admissível. Se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} > 1$ então tal deve-se ao modelo BCC clássico, em

minimização de inputs, não ter solução admissível.

Recíproca: Se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} > 1$, para um M suficientemente grande significa que

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} = 1$ conduzia a problema sem solução admissível modelo BCC clássico.

Q.E.D.

5.2.3.2.2. O modelo BCC Homotético em maximização de outputs

O modelo BCC Homotético em maximização de outputs é dado por:

$$\text{Max } t_k = \phi_k + M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda'_{jk} \quad (5.11)$$

$$\text{S.a: } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} x_{ij} \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.12)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} y_{rj} \geq \phi_k y_{rk} \quad r = 1, \dots, m \quad (5.13)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \leq 1 \quad (5.14)$$

$$\lambda_{jk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.15)$$

k é a unidade em análise e ϕ_k é a respectiva ineficiência.

Proposição 5: *O modelo BCC Homotético, em maximização de outputs, tem sempre solução admissível.*

Demonstração: Se se omitir a penalidade introduzida pelo Big M o modelo reduz-se ao modelo BCC com economias de escala não crescentes (Non Increasing Returns to Scale).

Sabe-se que o modelo BCC-NIRS é sempre admissível em maximização de outputs, (Seiford e Zhu, 1998).

O facto de se acrescentar a penalidade a ϕ_k na função objectivo em nada altera a admissibilidade duma solução, pelo que esta nova formulação tem sempre solução admissível. Q.E.D.

Proposição 6: *Sempre que o modelo BCC, em maximização de outputs, tem solução admissível, o valor da sua função objectivo iguala ϕ no modelo BCC Homotético em maximização de outputs.*

Demonstração: Pelo elevado valor do M na função objectivo, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ será

maximizado o mais possível apenas limitado pela restrição: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \leq 1$. Deste modo

$$\text{teremos } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} = 1,$$

pelo que os resultados serão idênticos aos do modelo BCC pois a soma duma constante à função objectivo não altera a sua optimalidade. Q.E.D.

Proposição 7: *Quando o modelo BCC não tem solução admissível, a avaliação da*

unidade em causa é feita sobre a homotetia de centro na origem e razão $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$ da

fronteira de eficiência original.

Demonstração: Se se definir $\lambda'_{jk} = \lambda_{jk} / \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$, e se se substituir λ_{jk} por $\lambda'_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}$

passa-se a ter a restrição de convexidade característica do modelo BCC e pode-se

$$\text{fazer } x'_{jk} = x_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} \text{ e } y'_{jk} = y_{jk} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk}. \text{ Q.E.D.}$$

Obtém-se assim uma demonstração idêntica à da proposição 3, apenas com a diferença de que a razão de homotetia é menor que a unidade, conduzindo portanto a uma contracção da fronteira do modelo BCC.

Proposição 8: *O modelo BCC em maximização de outputs não tem solução*

admissível, se e só se, $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} < 1$ no modelo BCC Homotético em maximização de

outputs.

Demonstração: O modelo BCC Homotético, em maximização de outputs, tem sempre

solução admissível. Se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} < 1$, então tal deve-se ao modelo BCC clássico em

maximização de outputs não ter solução admissível.

Recíproca: Se $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} < 1$, para um M suficientemente grande significa que

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_{jk} = 1$ conduzia a problema sem solução admissível no modelo BCC clássico.

Q.E.D.

Na Figura 5.3, ilustra-se o novo modelo para ambas as situações: Minimização de inputs e maximização de outputs. Os valores das nove unidades são os apresentados na Tabela 5.6.

Na minimização de inputs, em que, para o modelo BCC, o DMU 9 não teria soluções admissíveis, o novo modelo expande a fronteira original de 9/8 obtendo-se uma solução que é dada na Tabela 5.9:

Tabela 5.9 Solução para a unidade 9 em minimização de inputs

$\lambda_{1,9}$	$\lambda_{2,9}$	$\lambda_{3,9}$	$\lambda_{4,9}$	$\lambda_{5,9}$	$\lambda_{6,9}$	$\lambda_{7,9}$	$\lambda_{8,9}$	$\lambda_{9,9}$	θ_1	S_1^-	S_1^+
0	0	0	0	0	0	0	1.125	n.a.	0.765	0	0

O ponto compósito para este caso é dado por $X=19.125$ e $Y=9$, pelo que o input deveria diminuir de 25 para 19.125, resultando numa eficiência de $\theta=19.125/25=0.765$.

Na maximização de outputs, em que, para o modelo BCC, o DMU 1 não teria soluções admissíveis, o novo modelo contrai a fronteira original de 6.1/6.0 obtendo-se uma solução que é dada na Tabela 5.10 por:

Tabela 5.10 Solução para a unidade 1 em maximização de outputs

$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{3,1}$	$\lambda_{4,1}$	$\lambda_{5,1}$	$\lambda_{6,1}$	$\lambda_{7,1}$	$\lambda_{8,1}$	$\lambda_{9,1}$	ϕ_1	S_1^-	S_1^+
n.a.	0.983	0	0	0	0	0	0	0	1.967	0	0

O ponto compósito para este caso é dado por $X=6$ e $Y=1.967$, pelo que o output deveria aumentar de 1 para 1.967, resultando numa ineficiência de $\phi=1.967/1=1.967$.

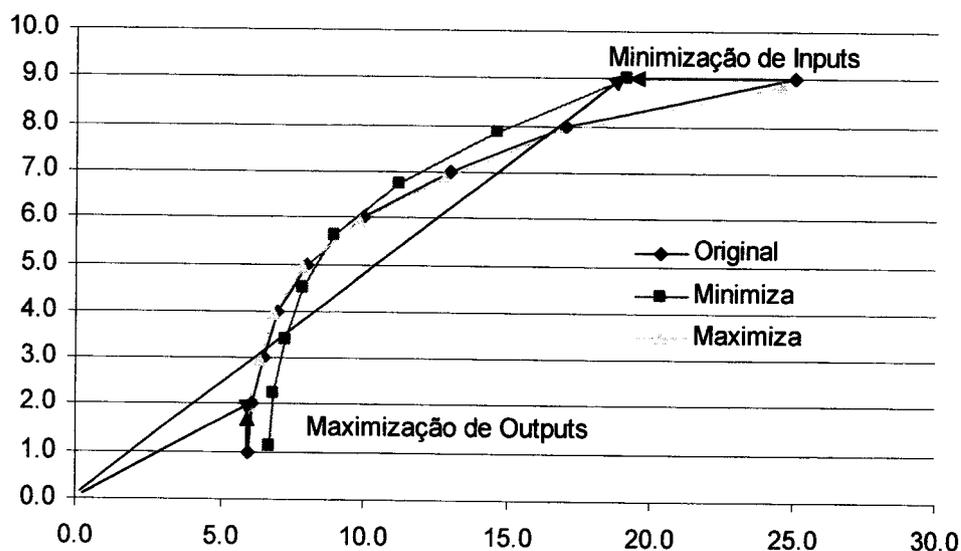


Figura 5.3 Ilustração do modelo Homotético.

5.2.4. Inclusão de unidades artificiais e restrições aos pesos.

Com uma introdução pouco clara e justificada de unidades artificiais e restrições aos pesos pode-se alterar profundamente os resultados duma análise. De facto a partir do momento em que se pretende incorporar pontos de vista subjectivos do decisor, as técnicas de DEA perdem a sua beleza de serem baseadas apenas nos dados, (embora a escolha das variáveis possa sempre introduzir alguma subjectividade).

Repare-se que a inclusão de unidades artificiais e restrições aos pesos, desde que seja feito dum modo transparente, não será um problema grave. O caso contrário pode comprometer a credibilidade da análise. Um exemplo de transparência e objectividade é por exemplo a inclusão dum DMU médio que nunca terá eficiência superior à unidade, mas que pode ser útil para efeitos de benchmarking e para avaliar da centralidade dos restantes DMUs.

Outro exemplo interessante consiste em incluir um DMU fictício em que os valores das suas variáveis correspondam aos máximos observados em todas elas nos restantes DMUs.

A inclusão deste DMU não tem nada de subjectivo e garante a existência de solução óptima para todos os restantes em minimização de *inputs*.

De modo análogo, em maximização de *outputs*, é interessante acrescentar um DMU eficiente e fictício, em que os valores das suas variáveis correspondam aos mínimos observados em todas as variáveis nos restantes DMUs.

5.3. Conclusões

A inexistência de solução possível para alguns DMUs nos modelos de supereficiência leva a que seja impossível a sua ordenação e também não lhes faz corresponder nenhum conjunto de pares para benchmarking.

Assim sendo, enfatizou-se a procura de técnicas para contornar essa dificuldade, em detrimento do estudo das condições em que ela surge, dado estas já estarem suficientemente esclarecidas por Dulá e Hickman desde 1997 (Dulá e Hickman, 1997).

Explicaram-se dois métodos que permitem que as unidades em estudo ainda se mantenham eficientes: regressão explicativa da eficiência de escala e simulação.

Introduziram-se outras soluções em que a eficiência é calculada pela relaxação da restrição de convexidade, que conduz sempre a valores de eficiência nunca superiores à unidade.

Desenvolveu-se um modelo novo, o modelo BCC Homotético, que foi apresentado nas duas vertentes: minimização de inputs e maximização de outputs.

Dada a novidade do modelo demonstraram-se as suas principais propriedades:

- 1 - Existência universal de solução admissível;
- 2 – Relação com o BCC (mais especificamente, os resultados são iguais quando o BCC é possível);
- 3 – Interpretação geométrica da nova fronteira de eficiência que contrai ou expande homoteticamente, consoante se esteja em maximização de outputs ou minimização de inputs respectivamente.

Finalmente explicou-se porque se deve evitar o recurso à inclusão de unidades artificiais e restrições aos pesos, excepto para casos bem definidos e justificados.

Capítulo 6.

Múltiplas constituências

6.1. Introdução

Na fase de modelação há sempre que escolher quais as variáveis a considerar e, de entre estas, quais as desejáveis e que são portanto produzidas, os *Outputs*, e quais as consumidas ou *Inputs*.

A melhor abordagem a este tema é acompanhar a inclusão, exclusão, agregação e desagregação de variáveis, numa análise das correlações entre estas e a eficiência calculada previamente numa fase anterior com um subconjunto das variáveis em causa (Norman e Stoker, 1991).

Muitas vezes, porém, a escolha acaba por estar condicionada pela falta de dados. Concretamente, uma variável com muitos casos omissos pode diminuir drasticamente o número de DMUs a poderem ser analisados, o que poderá justificar a escolha de outra variável, correlacionada com a primeira, em substituição da original.

Este problema, embora de grande importância, não será aqui abordado. O objectivo deste capítulo é apenas o de chamar a atenção para o facto de uma variável poder ser considerada, por alguns decisores, como um Input e, por outros, como um Output.

Em algumas situações, há um forte argumento para permitir que determinados factores tenham simultaneamente o papel de inputs e outputs.

Um exemplo é o número de enfermeiros estagiários na equipa de funcionários num estudo da eficiência dum hospital. Tal factor constitui claramente um output para o hospital, mas, ao mesmo tempo, é uma componente importante do total da equipa de funcionários do hospital, pelo que poderá ser encarado como um input.

O mesmo se passa com médicos em formação: podem ser considerados como um output, por receberem formação, e uma vez esta, terminada poderem ir exercer medicina noutra local, tendo portanto o hospital aumentado a capacidade profissional do médico; mas também pode ser interpretado como um input, por desempenharem implicitamente algumas tarefas que contribuem para o bom desempenho da equipa em que se integram e, num sentido mais global, no hospital como um todo.

Outro exemplo semelhante, embora num contexto completamente diferente, é o problema dos investigadores bolseiros que recebem bolsas e isenções de propinas de fundações e outros organismos. O facto de uma entidade atribuir uma bolsa é um sinal de credibilidade da instituição, pelo que poderá ser encarado como um output; (reconhecimento da excelência da investigação aí desenvolvida), por outro lado, as verbas que acompanham o investigador podem ser consideradas como inputs.

O investigador, pelos mesmos motivos apresentados atrás para o caso do hospital, tem um papel duplo na estrutura de investigação. Assim, o número total dos estudantes graduados que estão em formação pode ser considerado quer um input quer um output.

A ideia de tratar um factor como um input e um output, no âmbito da estrutura do DEA, não é inteiramente nova. Beasley (1990, 1995), num estudo da eficiência de departamentos de física e de química das universidades inglesas, considera “*research income*” simultaneamente um input e um output, embora imponha restrições aos pesos, pois, caso contrário, todas as unidades seriam eficientes.

Num ambiente muito diferente, Cook e outros, (1990), na avaliação de patrulhas de manutenção de estradas, usa a qualidade média do pavimento como um input que influencia (negativamente) o output. Ao mesmo tempo, pode-se defender o argumento de que esta medida é, também, um output que é claramente influenciado pelo nível da manutenção anual.

Por vezes o que é desejável para um dado grupo de utilizadores é claramente indesejável para outro grupo (na literatura da especialidade, usa-se o termo *constituency*, que será traduzido como constituição).

Exemplos de diferentes constituições são por exemplo condutores de automóveis *versus* ambientalistas, empreiteiros de obras públicas *versus* contribuintes e mais exemplos se poderiam arranjar.

Uma das primeiras aplicações deste conceito embora sem o formalizar claramente foi a medida de desempenho das Universidades Inglesas consoante os interessados- pais, professores e alunos. Os autores desse estudo desenvolveram vários modelos idênticos em que iam alternando as variáveis como *Inputs* ou *Outputs* (Sarrico et al. 1997).

Cook e Zhu apresentaram um modelo para a classificação de inputs e outputs em Data Envelopment Analysis (Cook e Zhu, 2007), em que desenvolvem um programa linear binário misto, que permite escolher se um atributo deverá ser um input ou um output, quer dum ponto de vista individual (cada DMU com liberdade para essa escolha) quer dum ponto de vista global, em que essa escolha é feita maximizando a eficiência média do conjunto de todas as unidades.

A formulação destes autores tem contudo um erro: não terem previsto o caso de a livre escolha simultânea de todas as variáveis ser idêntica.

De facto, em minimização de inputs (que é aliás a única orientação que descrevem), no mínimo uma variável tem de ser um *input*.

Tal deve-se a terem escolhido aplicar um programa linear binário misto ao modelo mais simples de DEA, em que se precisa sempre de ter no mínimo um *input*.

Saliente-se ainda que apenas se dedicaram a aplicar um programa linear binário misto ao modelo CCR, deixando, sem explicações, o BCC de fora.

Uma aplicação deste tipo de formulações já foi utilizada, por exemplo, por Edirisinghe e Zhang (2007), para maximizar a correlação entre a eficiência obtida com um modelo de múltiplas constituições e o desempenho em bolsa da empresa analisada.

Dado que a primeira aplicação se deve a Bournol (2001), acerca da localização duma via rodoviária em Memphis, seguir-se-á esse seu trabalho pioneiro tanto quanto possível neste capítulo.

Bougnol introduz a seguinte definição:

Definição 1. Uma constituição é um vector m dimensional $C^i = [s(1)...s(i)...s(m)]$ composto de 1s e -1s. A presença de um '1', na posição i , significa que essa constituição considera o atributo i desejável; pelo contrário, um '-1' indicaria que essa constituição o consideraria indesejável.

Quando nos referirmos a uma qualquer constituição, supondo que as variáveis estão fixamente ordenadas (por ordem alfabética, por exemplo), vai-se usar a seguinte terminologia: Constituição $[s(1)...s(i)...s(m)]$ será representada por C_k em que k é dado por:

$$K = \sum_{i=1}^{i=m} [s(i) + |s(i)|] / 2 \times 2^{(m-i)} \quad (6.1)$$

Esta fórmula apenas representa o valor decimal do número binário obtido substituindo o "-1" por zero e o "+1" por 1. Deste modo, para m variáveis, teremos um total de $T=2^m$ constituições de C_0 até C_{T-1} .

Neste capítulo, vai-se seguir a notação usada por Bougnol o mais possível, nomeadamente, em vez de se falar de m' inputs x_i e de s' outputs y_r vai-se falar sim num total de $m=m'+s'$ atributos a^j , pois à partida não se sabe quais desses atributos irão ser considerados como inputs ou como outputs. Do mesmo modo, vai-se designar os multiplicadores por π em vez de v_i ou μ_r como é usual nas formulações dos modelos clássicos de DEA. $\langle a, \pi \rangle$ representa o produto interno entre a e π e usar-se-á β como a variável característica do modelo BCC em vez de u_k .

Vai-se ilustrar este conceito com um exemplo criado por Bougnol (2001) acerca de $n=8$ carros, caracterizados por $m=2$ atributos, a serem vendidos em $T=2^m=2^2=4$ mercados, com preferências bem distintas e mesmo opostas:

Tabela 6.1 Dados para o exemplo.

Modelo	Atributo 1	Atributo 2
1	3	2
2	1	4
3	5	1
4	8	5
5	6	8
6	3	6
7	4	4.5
8	6.5	5.5

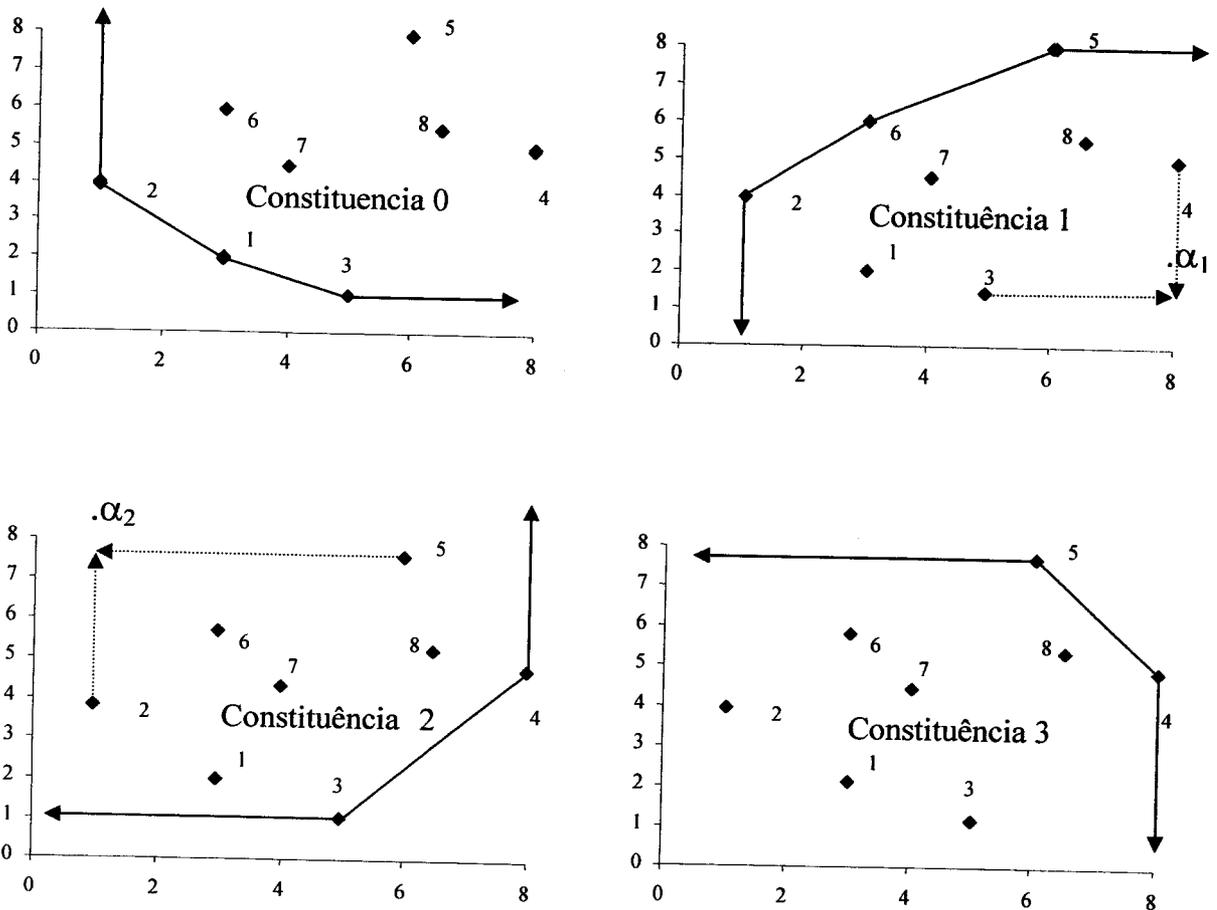


Figura 6.1: Fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e 4 constituências.

A Figura 6.1 ilustra as fronteiras de eficiência para um caso com 8 DMUs, 2 atributos e 4 constituências, cujos valores se encontram na Tabela 6.1.

As fronteiras de eficiência para os casos das constituências 0 (-1;-1) e 3 (1;1) são já familiares, correspondendo aos modelos: “2_Input 1_Output_maximização CCR” e ao “2_Output 1_Input_minimização CCR”, respectivamente.

A formulação de Bougnol recorre a um ponto auxiliar α'_i para cada constituição definido originalmente pela seguinte expressão:

$$\alpha'_i = \begin{cases} \min_j a'_i \text{ se } \delta'_i = 1 \\ \max_j a'_i \text{ se } \delta'_i = -1 \end{cases} \quad (6.2)$$

Em que δ'_i representa o sentido da preferência na constituição l , para a variável i , sendo a'_i o valor do atributo i no DMU j

Estes pontos auxiliares estão representados na Figura 6.1 apenas para as constituências 1 e 2 para maior clareza.

O modelo primal de Bognol é o seguinte (quando o DMU j^* está a ser avaliado sob a constituição 1):

$$\text{Min } \omega (1) = \langle a^{j^*}, \pi \rangle + \beta \quad (6.3)$$

$$\begin{array}{l} \pi, \beta \\ \text{s.a:} \quad \langle a^j, \pi \rangle + \beta \geq 0 \quad \forall j \neq j^* \end{array} \quad (6.4)$$

$$\langle \alpha^1 - a^{j^*}, \pi \rangle = 1 \quad (6.5)$$

$$\langle \delta^1, \pi \rangle \leq 0 \quad (6.6)$$

$$\beta \text{ livre}$$

6.2. Um modelo misto binário linear

O nosso modelo introduz variáveis binárias B_i e um Big M: M , e considera apenas α_i' duas quantidades para cada atributo a_i :

$$\alpha_i^+ = \max_j a_i^j \quad i=1 \dots m \quad (6.7)$$

$$\alpha_i^- = \max_j -a_i^j = -\min_j a_i^j \quad i=1 \dots m \quad (6.8)$$

Repare-se que uma vez que o nosso modelo determina qual a constituição mais favorável, ao contrário do modelo de Bognol que resolve um programa de DEA para todas as $T=2^m$ constituições, basta-nos de facto determinar os valores $\alpha_i^+ = \max_j a_i^j$ e $\alpha_i^- = \max_j -a_i^j = -\min_j a_i^j$. A escolha da constituição mais favorável e a única a ser calculada em detalhe é determinada pela combinação de variáveis binárias que definem se o atributo é desejável (Output) ou indesejável (input).

Deste modo o nosso modelo misto binário linear tem todas as variáveis não negativas, pois desdobra todas as variáveis reais nas suas componentes positiva e negativa excepto no que respeita a β que mantém o mesmo significado que no modelo primal de Bognol.

Vai-se também duplicar todos os dados no sentido de se ter os atributos a^j e os respectivos simétricos $-a^j$ o que facilita a implementação computacional do modelo.

Tendo em linha de conta as capacidades actuais de armazenamento de dados, esta duplicação não traz grandes limitações ao desempenho do modelo.

Vindo:

$$\text{Min } \omega = \langle +a^{j*}, \pi^+ \rangle + \langle -a^{j*}, \pi^- \rangle + \beta \quad (6.9)$$

$$\pi^+, \pi^-, \beta, B$$

$$s.a. \pi_i^+ - M B_i \leq 0 \quad i=1 \dots m \quad (6.10)$$

$$\pi_i^- - M(1-B_i) \leq 0 \quad i=1 \dots m \quad (6.11)$$

$$\langle +a^j, \pi^+ \rangle + \langle -a^j, \pi^- \rangle + \beta \geq 0 \quad \forall j \neq j^* \quad (6.12)$$

$$\langle \alpha^+ - a^{j*}, \pi^+ \rangle + \langle \alpha^- - (-a^{j*}), \pi^- \rangle = 1 \quad (6.13)$$

$$\pi^+, \pi^- \geq 0 \quad (6.14)$$

$$\beta \text{ Livre} \quad (6.15)$$

$$B \text{ Binário} \quad (6.16)$$

As duas primeiras restrições (6.10) e (6.11) asseguram que, se o atributo j é considerado desejável, ele não pode ser considerado indesejável simultaneamente e vice-versa.

A restrição (6.13) é semelhante à última do modelo original, especificamente o produto interno com π^+ . De facto, se π_i é positivo, significa que π_i^- é nulo e $\pi_i^+ = \pi_i$ vem que $\delta_i^1 = -1$.

Se π_i é negativo, significa que π_i^+ é nulo e $\pi_i^- = -\pi_i$ e, recordando que $\max_j -a'_j = -\min_j a'_j$, obtém-se para uma constituição hipotética em que a variável h seria indesejável ($\delta_h^1 = 1$):

$$\left[(\min_j a'_j) - a_h^* \right] \pi_h^1 = \left[(-\max_j -a'_j) - a_h^* \right] \pi_h^1 = (-\alpha'_h - a_h^*) \pi_h^1 = (-\alpha'_h - a_h^*) (-\pi_h^1) = [\alpha'_h - (-a_h^*)] (\pi_h^1)$$

Na Tabela 6.2 apresentam-se os resultados para o modelo das 4 constituições para os dados da Tabela 6.1. Na Figura 6.2 pretende-se ilustrar que agora o cálculo é feito em relação à envolvente convexa do conjunto dos oito pontos, que consiste na intersecção dos 4 conjuntos de possibilidades de produção das quatro constituições apresentadas na Figura 6.1. Esta nova formulação, em vez de resolver quatro modelos de DEA como se exemplifica na Figura 6.1, resolve apenas um modelo que considera a envolvente convexa do conjunto de todos os oito pontos e procura o óptimo em relação a todas as possíveis constituições.

Da Tabela 6.2 pode-se concluir que a equação do hiperplano avaliando o DMU1 tem por equação $0.08a_1 + 0.1a_2 = 0.49$.

Já para o caso do DMU2, a equação seria $0.14a_1 = 0.43$, isto é, um hiperplano vertical que suporta a faceta 1-6. O DMU2 é eficiente para duas diferentes constituições.

Para o DMU3, a equação do hiperplano seria $-0.06a_1+0.11 a_2=0.02$. A formulação concreta para a avaliação, deste DMU apresenta-se de seguida, em que, em vez de retirar a restrição referente ao DMU3, se optou por a manter substituindo o seu termo independente por uma quantidade muito negativa (-M) de modo a assegurar que essa restrição seja não activa.

$$(6.9) \quad \text{Min } \omega = 5\pi_1^+ + 1\pi_2^+ - 5\pi_1^- - 1\pi_2^- + \beta$$

$B_1 \ B_2 \ \beta \ \pi_1^+ \ \pi_1^- \ \pi_2^+ \ \pi_2^-$

$$(6.10.1) \text{ S.a:} \quad \pi_1^+ - M \cdot B_1 \leq 0$$

$$(6.10.2) \quad \pi_2^+ - M \cdot B_2 \leq 0$$

$$(6.11.1) \quad \pi_1^- - M(1-B_1) \leq 0$$

$$(6.11.2) \quad \pi_2^- - M(1-B_2) \leq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 1} \quad 3\pi_1^+ + 2\pi_2^+ - 3\pi_1^- - 2\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 2} \quad 1\pi_1^+ + 4\pi_2^+ - 1\pi_1^- - 4\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 3} \quad 5\pi_1^+ + 1\pi_2^+ - 5\pi_1^- - 1\pi_2^- \geq -M$$

$$(6.12) \text{ DMU 4} \quad 8\pi_1^+ + 5\pi_2^+ - 8\pi_1^- - 5\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 5} \quad 6\pi_1^+ + 8\pi_2^+ - 6\pi_1^- - 8\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 6} \quad 3\pi_1^+ + 6\pi_2^+ - 3\pi_1^- - 6\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 7} \quad 4\pi_1^+ + 4.5\pi_2^+ - 4\pi_1^- - 4.5\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.12) \text{ DMU 8} \quad 6.5\pi_1^+ + 5.5\pi_2^+ - 6.5\pi_1^- - 5.5\pi_2^- \geq 0$$

$$(6.13) \quad 3\pi_1^+ + 7\pi_2^+ - 4\pi_1^- - 0\pi_2^- = 1$$

$$(6.14) \quad \pi_1^+ ; \pi_2^+ ; \pi_1^- ; \pi_2^- \geq 0$$

$$(6.15) \quad \beta \text{ livre}$$

$$(6.16) \quad B \text{ Binário}$$

Cálculos auxiliares

$$(6.7) \quad 8 \quad 8$$

$$(6.8) \quad -1 \quad -1$$

Coeficientes de (6.13) $8-5=3 + 8-1=7 -1-(-5)=4 -1-(-1)=0$

Na resolução de facto optou-se por fazer $M= 1000$, quer para as restrições referentes às variáveis binárias (6.10) e (6.11) quer para a 3ª restrição do grupo 6.12.

Na restrição (6.13) esta foi obtida determinando os máximos apresentados em (6.7) e (6.8) e subtraindo-lhes os coeficientes da função objectivo.

Tabela 6.2: Resultados para os 8 DMUs

Modelo	π_1^+	π_2^+	π_1^-	π_2^-	β	α_1	α_2	<u>Ef.</u>
	$b_1=1$	$b_2=1$	$b_1=0$	$b_2=0$				
1	0,08	0,10	0,00	0,00	-0,49	8	8	-0,05
2	0,14	0,00	0,00	0,00	-0,43	8	8 1	-0,29
3	0,00	0,11	0,06	0,00	-0,02	1	8	-0,23
4	0,00	0,00	0,14	0,00	0,93	1	8 1	-0,21
5	0,00	0,00	0,02	0,13	0,83	1	1	-0,31
6	0,09	0,00	0,00	0,11	0,36	8	1	-0,04
7	0,13	0,00	0,00	0,13	0,40	8	1	0,33
8	0,00	0,00	0,12	0,08	1,33	1	1	0,14

Na Tabela 6.2, além dos valores dos pesos, apresentou-se também as coordenadas do ponto auxiliar α e realce-se que, por vezes, aparecem dois valores numa célula da tabela significando que existe um multiplicador nulo, o que significa que existem duas constituências em que esse DMU é óptimo. São exemplos deste facto os DMUs 2 e 4. Na Tabela 6.2, acrescentou-se uma linha, clarificando que a um peso positivo corresponde uma variável binária unitária e a um peso negativo corresponde uma variável binária nula.

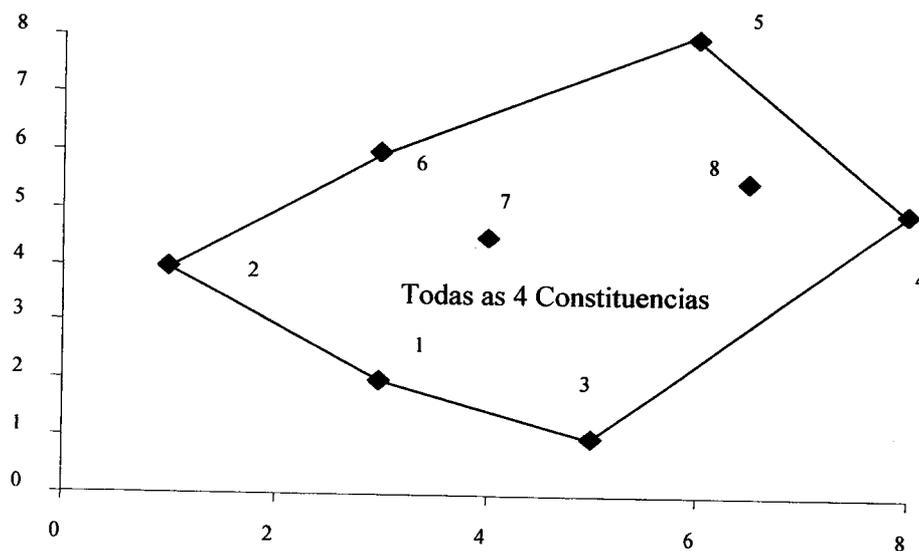


Figura 6.2: Envoltura convexa dos oito DMUs da Tabela 6.1

6.3. Tempos de processamento

Com esta nova formulação, consegue-se reduzir os tempos de processamento de 9 horas, para 16 minutos, em máquinas equivalentes, para a questão de qual a constituição que atribui a melhor avaliação a um dado DMU.

Em ambos os casos os computadores utilizados foram os Pentium III Fujitsu Siemens Scaleo a 512 799.97 Dupla Precisão kilowhats por segundo.

Embora, no que respeita aos computadores, se tenha conseguido garantir a comparabilidade entre eles, já no que respeita aos dados, isso já não é garantido, pois os dados de Bougnol não estão disponíveis ao público. Por esse motivo, se fez um total de 24 simulações para se dispor duma amostra minimamente significativa.

No que respeita à geração dos dados usaram-se dados com uma distribuição normal multivariada em vez das clássicas funções de Cobb-Douglas, dada a simetria do problema (isto é: não há claramente nem *Inputs* nem *outputs*, mas apenas atributos). Para a geração dos dados, usou-se o Distribution View, pois este pode ser executado em qualquer ambiente que permita a criação de objectos COM (Coelho, 2005).

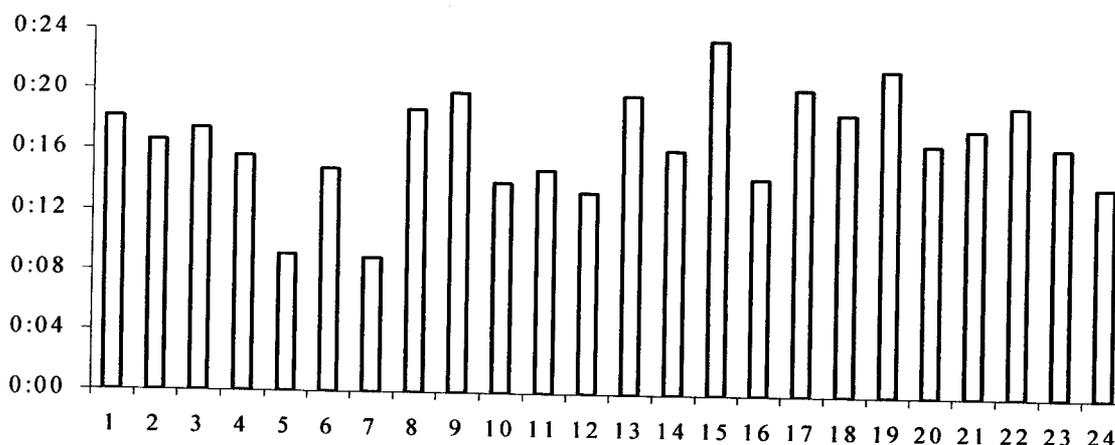


Figura 6.3 Tempos de resolução para 24 instâncias.

Na Figura 6.3, apresentam-se os resultados e observa-se que mesmo para o pior caso (que demorou 23 minutos e 32 segundos), obtém-se uma redução global de 22 para 1 com a nossa formulação.

Dos resultados apresentados por Bournol, verifica-se que o tempo de processamento aumenta exponencialmente.

Neste novo modelo o aumento não é tão acentuado quer pelas potencialidades do Branch and Bound, quer pelo facto de, aumentando o número de atributos mantendo-se constante o número total de DMUs, se ter cada vez menos DMUs interiores que como se apresenta na Figura 6.4, são os que requerem mais tempo de processamento. Na Figura 6.4, ilustra-se o facto de os vértices consumirem muito menos tempo de cálculo que os pontos interiores, pelo que um preprocessamento dos dados poderia ser bastante vantajoso.

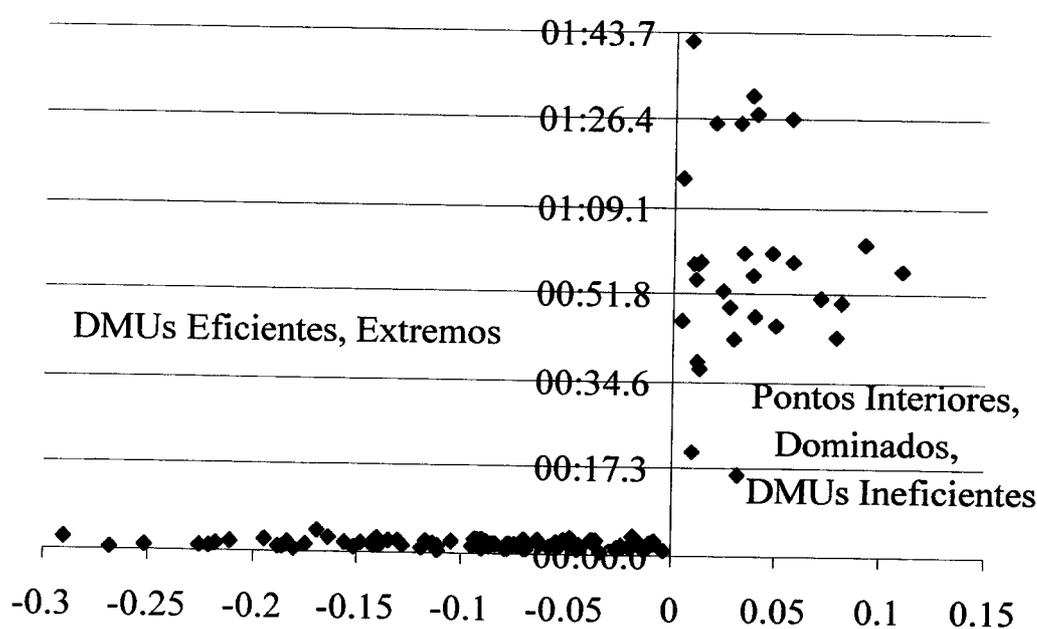


Figura 6.4: Tempos de resolução para 120 DMUs com uma distribuição Normal em 7 dimensões.

6.4. Conclusões

A nova formulação provou ser mais rápida que a anterior. Tem, contudo, o inconveniente de não dar mais informação senão a de identificar a constituição que melhor avalia o DMU em causa e de fornecer a classificação de todos os outros DMUs, com esse conjunto de multiplicadores assim obtido.

Tem a grande vantagem de já ter resolvido problemas ainda maiores (220 unidades por 9 variáveis).

Recorda-se que ao utilizar o Matlab, este encrava para além das 6 variáveis ao calcular a envolvente convexa do conjunto de dados.

Se se desistisse de analisar os DMUs ineficientes (pontos interiores da envolvente convexa do conjunto de dados), o cálculo seria ainda mais rápido.

Finalmente, falta referir que se utilizou o solver usual do Excel que corresponde à opção mais fraca da Frontline Systems. Com o Premium Solver os resultados seriam ainda mais rápidos e precisos.

Capítulo 7.

Ajuste dos multiplicadores em DEA

7.1. Introdução

Como na técnica de DEA se permite que cada DMU escolha os seus próprios pesos, sucede que qualquer DMU que seja óptimo, num dos múltiplos ratios $\frac{y_{rk}}{x_{ik}}$ irá atribuir o valor máximo aos respectivos pesos (μ_{rk} e ν_{ik}), resultando uma avaliação muito particular e desequilibrada, uma vez que concentra toda a atenção apenas num *ratio Output / Input*, desprezando todos os outros factores aos quais são atribuídos pesos nulos.

Repare-se que assim sendo, numa avaliação com m *Inputs* e s *Outputs* poderá haver $m \cdot s$ DMUs eficientes, apenas por serem óptimos num particular *ratio*, embora tal não suceda sempre, pois frequentemente um DMU é óptimo em vários *ratios*.

Perante este problema colocam-se dois desafios: o primeiro consiste na detecção destes casos e o segundo na respectiva correcção.

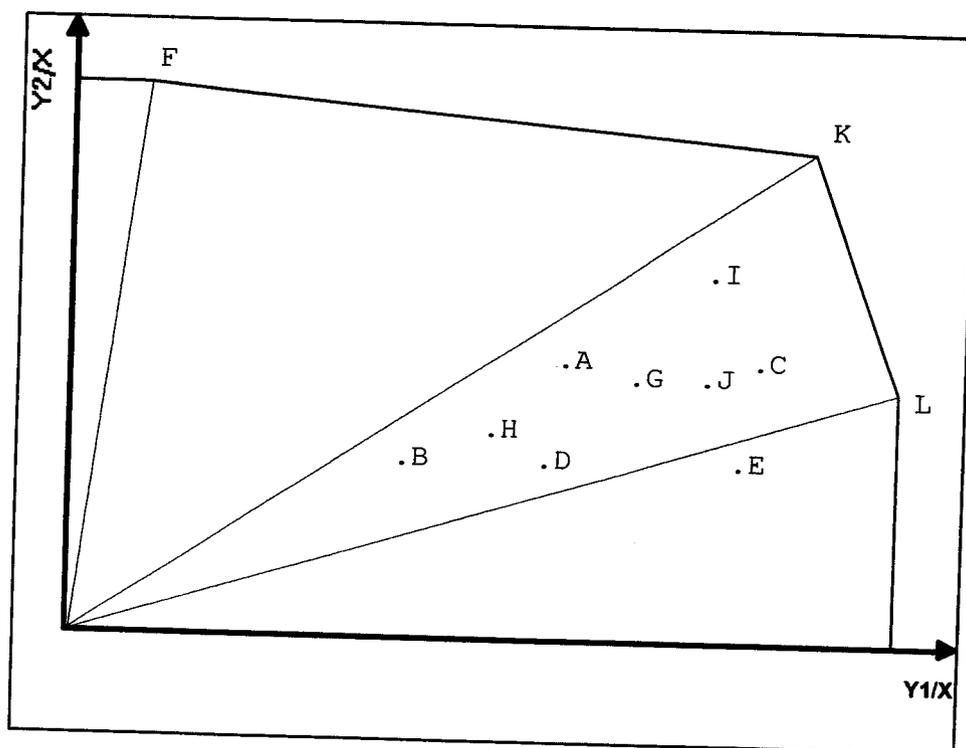


Figura 7.1: DMU F é apenas referente de si próprio.

Para detectar casos em que um DMU funciona mais como um avaliador de si próprio do que como uma Unidade Organizacional com um conjunto equilibrado de factores, é usual recorrer a uma estatística relativamente fácil de recolher e que consiste na frequência com que esse DMU surge no grupo de referência de todos os restantes. Quanto maior o número de DMUs que o utilizam na combinação linear que constitui o seu ponto compósito, maior crédito deverá ser atribuído à sua eficiência. Como caso extremo apresenta-se o DMU F na Figura 7.1 que apenas entra num grupo de referência que é o seu.

No caso da Figura 7.1 o DMU F apenas é considerado eficiente por ter o melhor ratio

$$\frac{y_2}{x} \text{ enquanto é justamente o pior em } \frac{y_1}{x}$$

Outra solução consiste em recorrer à matriz de eficiências cruzadas (Sexton et al 1986) e (Doyle e Green, 1994), que consiste apenas numa matriz de termo genérico E_{jk} que representa a eficiência do DMU k , quando avaliado com os pesos que maximizam a eficiência do DMU j .

A diagonal principal desta matriz corresponde às eficiências dos DMUs em estudo. Esta matriz revela-se útil sobretudo quando se toma a média de cada coluna e se compara essa média com a eficiência do DMU respectivo (o elemento da diagonal principal nessa coluna). Para DMUs, como o DMU F da Figura 7.1, a sua eficiência é

unitária, mas a média das eficiências cruzadas E_{jF} ($j \in \{A...L\}$) é bastante baixa, o que demonstra o carácter unilateral da avaliação do DMU F. Saliente-se contudo que a média acima referida não é um valor univocamente definido para cada coluna, uma vez que cada DMU eficiente admite uma infinidade de pesos que o apresentam como eficiente.

Finalmente, convém referir o método mais simples para detectar estes casos de eficiências, baseadas em análises pouco abrangentes da totalidade dos factores, que consiste na inspecção dos *Inputs* e *Outputs* virtuais.

Tendo-se referido como é possível detectar situações de avaliação desequilibrada de Unidades Organizacionais, vai-se ver como se pode corrigir essa limitação.

A solução mais simples consiste em aplicar restrições aos pesos, em valor absoluto, o que põe o problema dos valores a escolher. A escolha desses valores pode ser baseada nos valores médios obtidos para os pesos, num modelo DEA inicial, sem restrições ou, no caso de um só *Input* ou de um só *Output*, a partir dos coeficientes duma regressão linear múltipla (Dyson e Thanassoulis, 1988)¹³.

A outra solução consiste em restringir as razões entre os pesos, o que corresponde a introduzir um conjunto extra de equações lineares no modelo (Thompson et al 1986).

Finalmente, outra solução consiste em restringir não os pesos directamente, mas sim os *Outputs* e \ ou *Inputs* virtuais, o que se torna computacionalmente pesado, quando aplicado a todos os DMUs, pelo que, frequentemente, se aplica apenas ao DMU em análise e a um DMU artificial, cujos valores são a média de todo o conjunto em análise (Beasley e Wong, 1989).

No modelo original, a única restrição aos pesos consistia em que estes fossem não inferiores a uma entidade não Arquimediana ϵ infinitamente pequena. Nessa formulação, tinha-se o inconveniente de se poder ter unidades eficientes, por serem óptimas apenas num aspecto, pondo a totalidade dos pesos só nesse multiplicador.

As técnicas usuais de restrições aos pesos têm o inconveniente de, por vezes, aumentarem ainda mais a assimetria e enviesamento da distribuição destes. De facto, no caso duma restrição simples, como $\mu_r \geq \alpha_r$, o que vai acontecer é o deslocamento de todos os pesos entre ϵ e α_r para este novo limite inferior.

¹³ Caso o termo independente seja significativamente diferente de zero convirá subtrai-lo à variável explicada antes de aplicar a técnica DEA que portanto será aplicada a um conjunto de dados em que uma das variáveis foi corrigida (subtraída de β).

Uma solução para esse problema reside em utilizar técnicas de programação por metas, para ajustar os pesos.

7.2. Exemplo com penalidade quadrática, resolução gráfica

Para exemplificar como o objectivo acima descrito pode ser conseguido, recorre-se novamente ao exemplo do capítulo 2 cujos dados se repetem na Tabela 7.1

Para maior simplicidade vai-se recorrer ao modelo CCR para permitir considerar três variáveis e estas ainda poderem ser representadas no plano.

Ainda não se vai aplicar a técnica da Supereficiência para não introduzir demasiada complexidade no modelo, pois, sob a referida técnica, o conjunto das soluções admissíveis vai mudando consoante o DMU eficiente que está sob avaliação.

Para a resolução, vai-se utilizar o método gráfico, pois $x_{1j}=1$ leva a que o seu multiplicador $v_{1j}=1$ sempre e apenas restem duas incógnitas μ_{1j} e μ_{2j} .

Na Figura 7.2 representa-se o conjunto das soluções admissíveis que consiste no polígono ABCD0. As rectas mais afastadas da origem correspondem a DMUs ineficientes, que geram restrições não activas no problema (espaço) dos pesos

Tabela 7.1: Dados da Tabela 2.3 normalizados pelo *Input* X_1 .

DMU	X_1	Y_1	$Y_2 X_{n1}$	$Y_{n1}=y_1/x_1$	$Y_{n2}=y_2/x_1$	Intersecções com o eixo:		
						μ_1	μ_2	
1	4.0	2.0	28.0	1	0.500	7.000	2.000	0.143
2	5.0	1.0	22.5	1	0.200	4.500	5.000	0.222
3	6.0	6.0	12.0	1	1.000	2.000	1.000	0.500
4	10.0	8.0	60.0	1	0.800	6.000	1.250	0.167
5	11.0	7.0	16.5	1	0.636	1.500	1.572	0.667
6	8.0	6.0	12.0	1	0.750	1.500	1.333	0.667
7	9.0	7.0	6.0	1	0.778	0.667	1.285	1.499
8	5.0	3.0	30.0	1	0.600	6.000	1.667	0.167
9	5.5	4.4	5.5	1	0.800	1.000	1.250	1.000
10	8.0	4.0	72.0	1	0.500	9.000	2.000	0.111
11	10.0	2.0	20.0	1	0.200	2.000	5.000	0.500
12	8.0	1.0	4.0	1	0.125	0.500	8.000	2.000

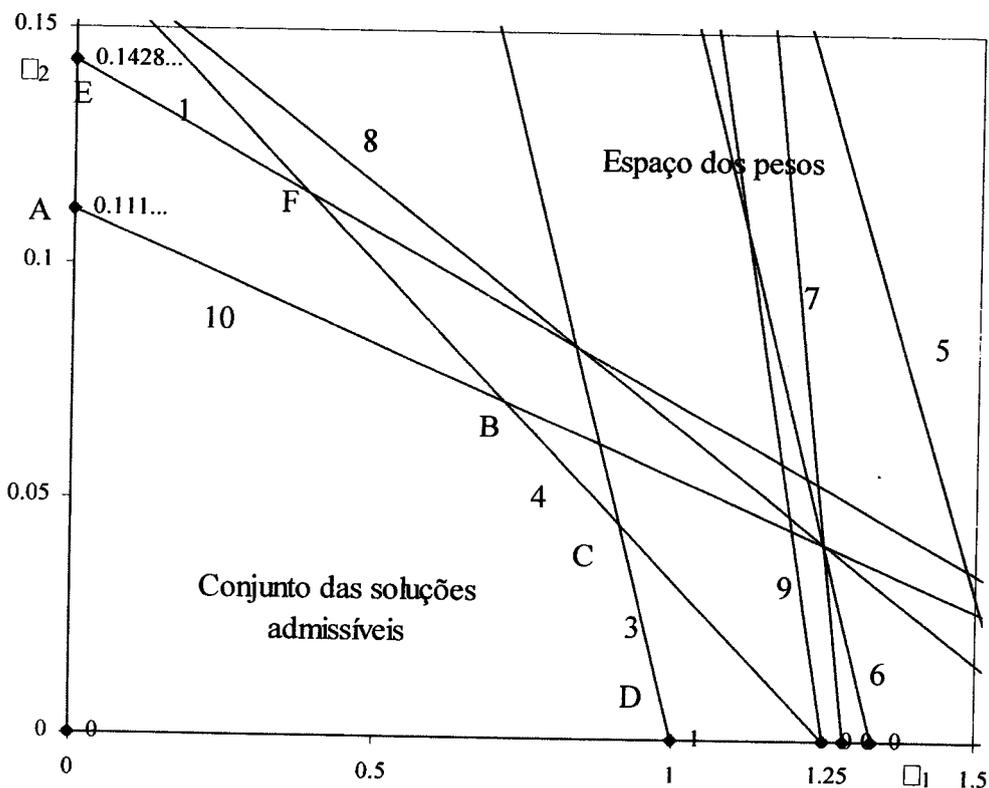


Figura 7.2: Resolução gráfica do problema dos pesos.

A função objectivo é paralela à restrição do próprio DMU e, portanto, conduz a soluções múltiplas para os DMUs eficientes. (Neste caso não se está a trabalhar no modelo de supereficiência).

Vai-se introduzir uma penalização não linear mas convexa na função objectivo, penalizando desvios d_i e d_r dos objectivos impostos g_i e g_r , obtendo-se a seguinte formulação:

$$\text{Max } G_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} - P(\vec{d}) \quad (7.1)$$

$$\text{s.a: } d_r = \mu_{rk} - g_r \quad r=1 \dots s \quad (7.2)$$

$$d_i = v_{ik} - g_i \quad i=1 \dots m \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (7.4)$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rj} \leq \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} \quad j=1 \dots k-1, k+1 \dots n \quad (7.5)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon > 0 \quad r=1 \dots s \quad (7.6)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon > 0 \quad i=1 \dots m \quad (7.7)$$

Repare-se que a definição de eficiência mantém-se como: $Ef = L = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk}$

Apenas se acrescentou à função objectivo uma penalidade relativa ao afastamento dos pesos dos pontos definidos como ideais.

Assim sendo, pode-se enunciar a seguinte proposição:

Proposição: O modelo de DEA com ajuste dos pesos por Goal Programming não altera a existência de soluções admissíveis no problema dos multiplicadores, podendo, contudo alterar uma solução ilimitada para uma limitada.

Demonstração: Com a introdução das variáveis de desvio não se alterou o conjunto das soluções admissíveis, pelo que a admissibilidade de qualquer solução mantém-se, pois a alteração foi feita apenas na função objectivo.

Todavia por alteração da função objectivo, esta pode passar a dar um óptimo limitado. QED.

Em vez de considerar o desvio em relação a um dado ponto, pode-se considerar o desvio em relação a regiões do espaço, como se pode verificar, no exemplo seguinte, em que se considerou, como região preferida para a localização dos pesos, a recta $0.4\mu_{1k} = 4\mu_{2k}$. Vindo assim a seguinte expressão para a função objectivo:

$$G_j = \underbrace{\sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk}}_{l = \text{Eficiência}} - \underbrace{2 \times (0.4\mu_1 - 4\mu_2)^2}_{\substack{\text{Penalidade (Estritamente Convexa)} \\ -k \times P(\vec{d}) \xrightarrow{\epsilon} \text{Estritamente Concava}}} \quad (7.8)$$

Vai-se agora ilustrar o uso dessa técnica para o DMU 10, num modelo CCR de super-eficiência.

Como se pode ver, a recta da função objectivo já não é paralela a nenhuma aresta, pois retirou-se a restrição correspondente ao DMU 10. Por outro lado vê-se que a solução óptima se obtém para $G \approx 1.1$ e $\mu_1 \approx 0.5$ $\mu_2 \approx 0.1$. Os valores exactos podem ser lidos na Tabela 7.2.

O tipo de penalidades impostas na função objectivo por desvio dos pesos em torno dum dado ponto, encontram semelhança em controle de qualidade nas funções de perdas de Taguchi, que já tinham sido aplicadas num estudo sobre a produção duma

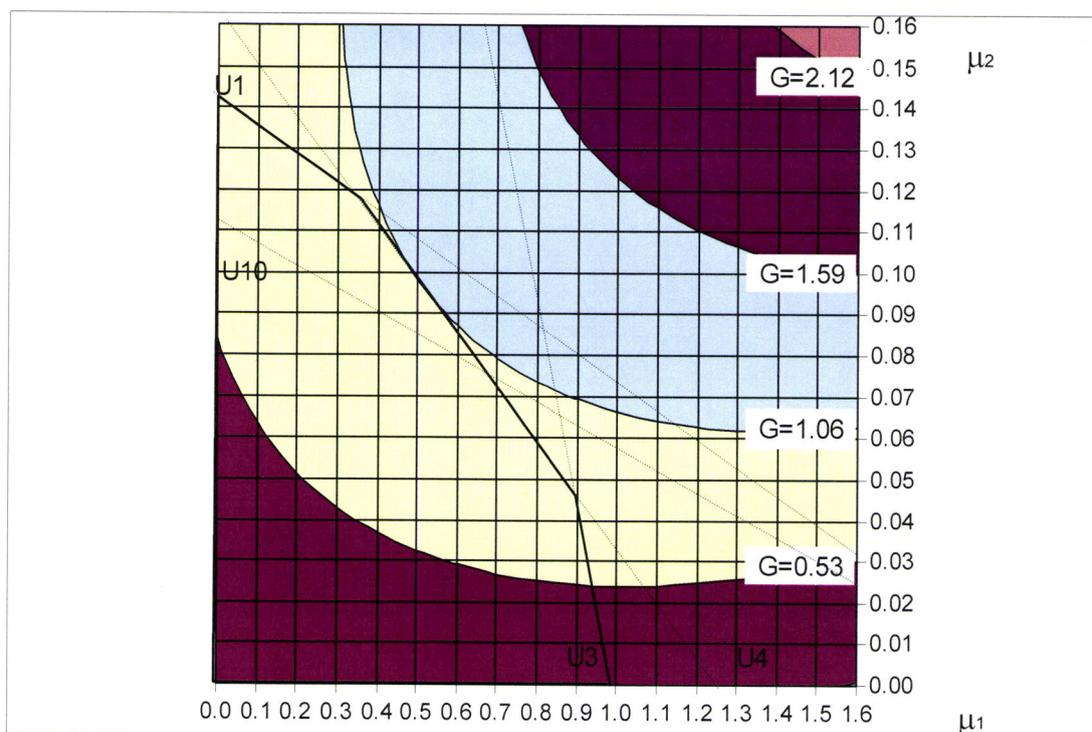


Figura 7.3: Resolução gráfica do problema dos pesos com penalidade quadrática para o DMU10.

empresa de Tupelo Mississípi, por investigadores nesta área da Universidade do Mississipi em 1999 (Caporaleti et al, 1999).

Tabela 7.2: Resultados exactos do problema dos pesos com penalidade quadrática.

DMU	μ_1	μ_2	G	d	L
1	.71	.0714	0.857	0.000	85.71%
2	.68	.0732	0.465	-0.020	46.59%
3	.92	.0434	0.934	0.196	101.15%
4	.87	.0625	1.055	0.100	107.50%
5	.83	.0547	0.589	0.117	61.60%
6	.87	.0504	0.686	0.147	72.97%
7	.90	.0455	0.671	0.182	73.76%
8	.71	.0714	0.857	0.000	85.71%
9	.90	.0459	0.707	0.179	77.04%
10	.51	.0982	1.070	-0.188	114.06%
11	.71	.0714	0.286	0.000	28.57%
12	.73	.0692	0.125	0.016	12.60%

7.3. Exemplo para dados dispostos em camadas concêntricas

Para ilustrar a utilização da técnica de ajuste de pesos com penalidade quadrática geraram-se 99 pares de valores para Outputs (YC1 e YC2) e aplicou-se o modelo CCR, supondo um input unitário. Os dados representam-se graficamente na Figura 7.4.

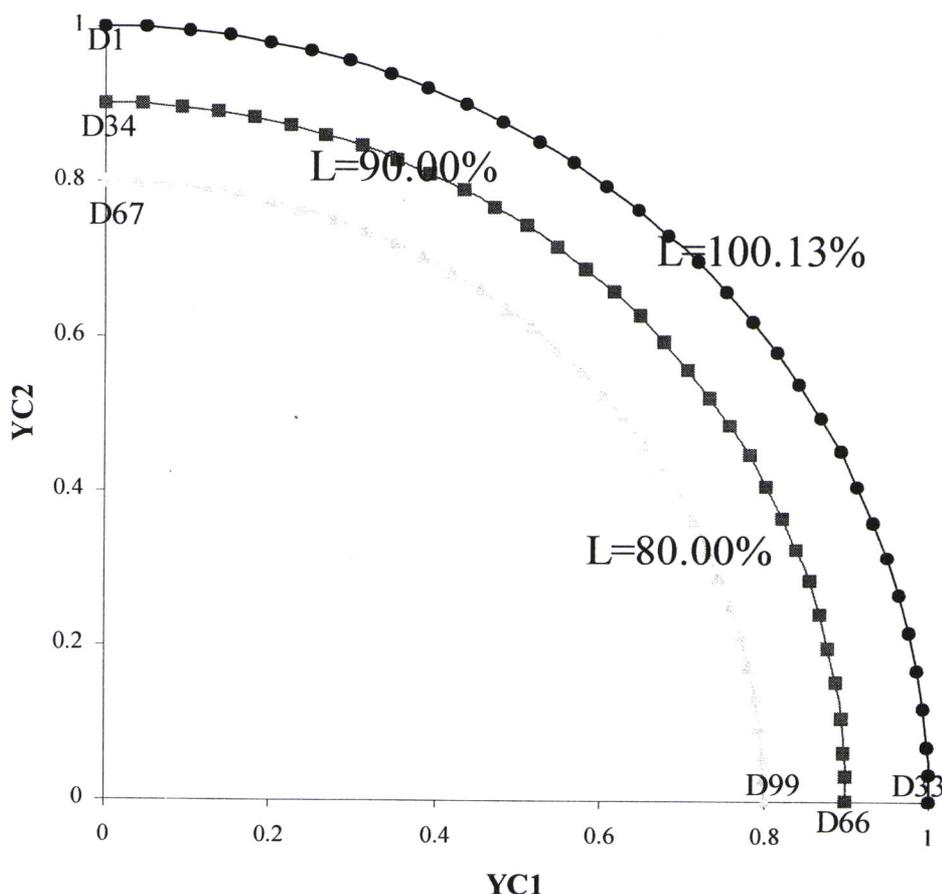


Figura 7.4 Dados usados para o exemplo de desvio em torno da média.

Desta vez o desvio e a penalidade foram definidos como o quadrado da distância até à média dos pesos originais normalizados pelos respectivos desvios padrões:

$$P(\vec{d}) = \left(\frac{\left(\mu_1 - E(\mu_1) \right)}{\sigma_{\mu_1}} \right)^2 + \left(\frac{\left(\mu_2 - E(\mu_2) \right)}{\sigma_{\mu_2}} \right)^2 \quad (7.9)$$

Os resultados obtidos para a eficiência são os apresentados graficamente na Figura 7.5 e os multiplicadores estão apresentados na Figura 7.6 onde se vê que estes se encontram distribuídos dum modo relativamente uniforme, sem atingirem valores extremos.

Como se esperava os resultados da eficiência para este caso mostram que esta assume valores mais elevados nos dados próximos da bissectriz dos quadrantes ímpares e que a eficiência vai decrescendo à medida que se caminha para o centro.

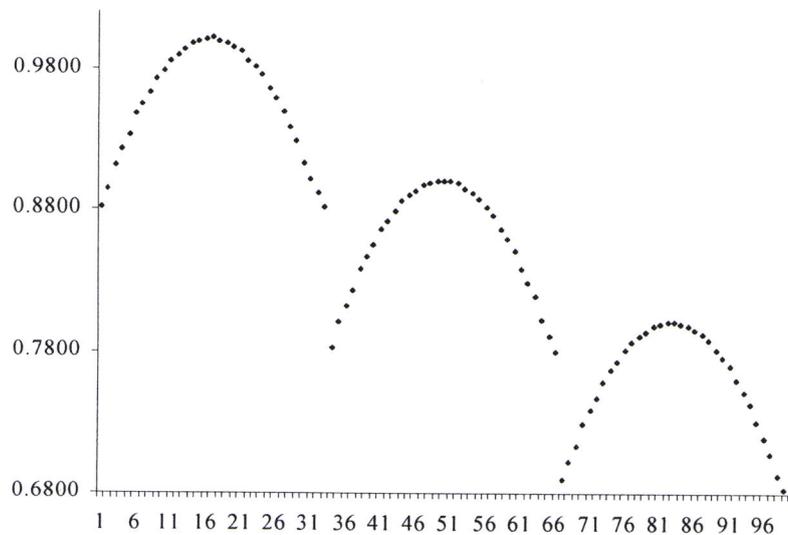


Figura 7.5 Resultados para a supereficiência no exemplo penalizando o desvio em torno da média.

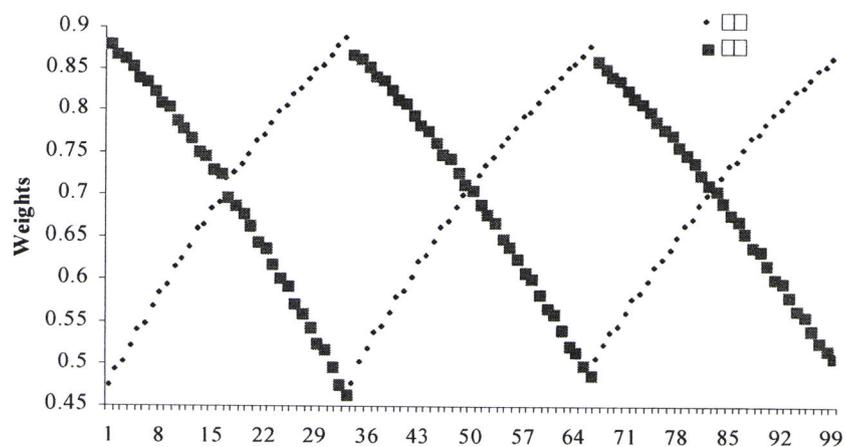


Figura 7.6 Resultados para os multiplicadores (pesos) no exemplo penalizando o desvio em torno da média.

7.4. Exemplo com penalidade monomial.

Pode-se usar outro tipo de funções de penalidade. Um exemplo interessante é o caso em que se pretende evitar que quer os pesos quer as folgas se anulem.

Evitando que os pesos se anulem, tem a grande vantagem de facilitar a sua interpretação, (nomeadamente os seus quocientes) em termos de taxas marginais de substituição que deixam de ser quer nulas quer infinitas.

Evitando-se que os pesos se anulem tem-se a vantagem de remover a multiplicidade das soluções óptimas, conduzindo a um conjunto de pesos específico do DMU.

Estes pesos assim obtidos não estão nem sobre os eixos nem sobre as facetas dos restantes DMUs (no espaço dos pesos).

$$\text{Max } G_k = \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rk} + k \prod_{r=1}^s \mu_{rk} \prod_{i=1}^m v_{ik} \prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^E F_{ek} \quad (7.10)$$

$$\text{s.a: } \sum_{r=1}^s \mu_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + F_{jk} = 0 \quad j=1 \dots n \quad (7.11)$$

$$\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (7.12)$$

$$\mu_{rk} \geq \varepsilon > 0 \quad r=1 \dots s \quad (7.13)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon > 0 \quad i=1 \dots m \quad (7.14)$$

$$F_{jk} \geq 0 \quad j=1 \dots n \quad (7.15)$$

Nesta formulação falta esclarecer o significado da variável F_{ek} que é a variável de folga da restrição referente ao DMU e , quando se analisa o DMU k (Convém não confundir estas variáveis de folga com as do problema da envolvente).

Na penalidade da função objectivo, considera-se apenas as folgas F_{ek} das E unidades eficientes.

A constante K tem por objectivo garantir a homogeneidade dimensional da equação (7.10), pelo que pode ser calculada pelo produto das médias ou das medianas ou de algum percentil dessas variáveis. No caso que a seguir se ilustra a constante K foi calculada pelo produto do máximo de Y_{n1} pelo de Y_{n2} vindo: $K = \max(y_{n1}) \cdot \max(y_{n2}) = 1 \times 9 = 9$.

A função objectivo deste problema é um posinómio em que a última parcela é um monómio que representa o hipervolume do polítopo de arestas m_s , n_i , e S_e .

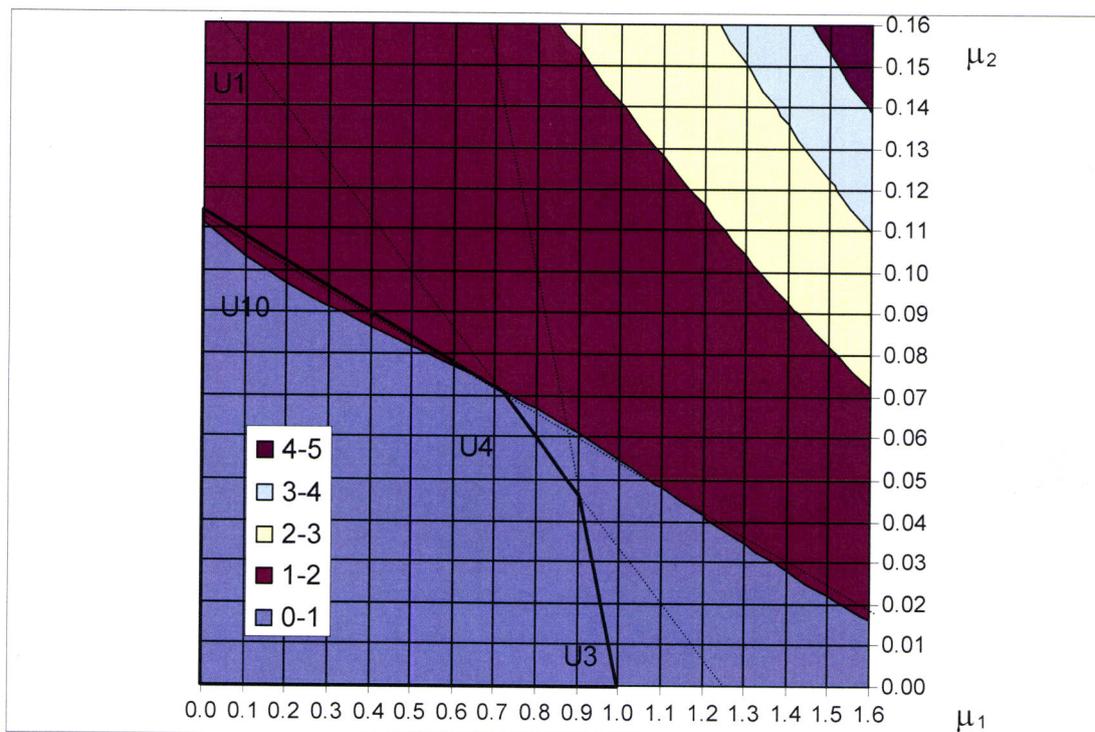


Figura 7.7: Resolução gráfica do problema dos pesos com penalidade monomial para o DMU 10.

Este problema pode também ser resolvido graficamente, o que é feito através da Figura 7.7, em que se verifica que o óptimo é atingido sobre a aresta definida pelo DMU 10 (U10) num ponto que está longe dos eixos, o que significa que os multiplicadores não se anulam. O óptimo também não está sobre nenhum vértice o que significa que as folgas também não se anulam.

Também para este caso, se podiam obter os valores exactos do óptimo. Os resultados apenas para os DMUs eficientes são apresentados na Tabela 7.3. Realça-se que houve o cuidado de confirmar que o óptimo obtido, para cada DMU, era de facto um óptimo global.

O principal interesse desta formulação reside sobretudo em obter um conjunto de pesos que avaliem o DMU em causa do melhor ponto de vista, no sentido de o fazer sobressair dos seus concorrentes mais directos.

Tabela 7.3 Resultados exactos do problema dos pesos com penalidade monomial.

DMU	μ_1	μ_2	G
3	.96	.0169	1.0067
4	.80	.0591	1.055
10	.24	.0979	1.070

O principal problema desta formulação reside em ter de se resolver um problema de optimização não convexo, o que, para problemas de mais elevada dimensão, poderá ser impraticável.

7.5. Aplicação do algoritmo de Karmakar ao ajuste de pesos

Justifica-se portanto a introdução de um outro modelo, que recorre ao conceito de desigualdades repulsivas e ao centro analítico e caminho central presentes no algoritmo de Karmakar, que tem a vantagem de, sendo um algoritmo de ponto interior, em que as soluções nunca tocam a fronteira, permitir obter resultados semelhantes aos do modelo com penalidade monomial.

Algumas considerações devem no entanto ser feitas antecipadamente, nomeadamente acerca da representação mínima do conjunto das soluções admissíveis para a determinação do centro analítico, e das restrições a considerar para a resolução do problema, pelo algoritmo de Karmakar.

Para a determinação do centro analítico do conjunto das soluções admissíveis, ignoram-se todas as restrições que não definam a fronteira do conjunto das soluções admissíveis. Este conjunto de restrições constitui aquilo a que Caron Greenberg e Holder (Caron et al 2002) designam por “Prime Representation”.

A determinação do centro analítico é fundamental para o método que se apresenta, pois a solução interior inicial que se vai sempre considerar vai ser o centro analítico.

Na Figura 7.8, ilustra-se a influência que a escolha da solução inicial tem sobre a trajectória das soluções até ao óptimo. Esta trajectória é importante, pois, consoante o critério de paragem, assim se obtêm soluções mais próximas. Isto é, após muitas iterações, as soluções finais vão ser pouco dependentes da solução inicial; mas, caso se opte por parar o algoritmo de Karmakar ainda longe do óptimo, então a escolha da solução inicial é determinante.

Na sequência, optar-se-á por tomar, como solução inicial, o centro analítico.

Vai-se ilustrar a aplicação do algoritmo de Karmakar ao DMU 10, à semelhança do já efectuado para o modelo CCR clássico com penalidade monomial.

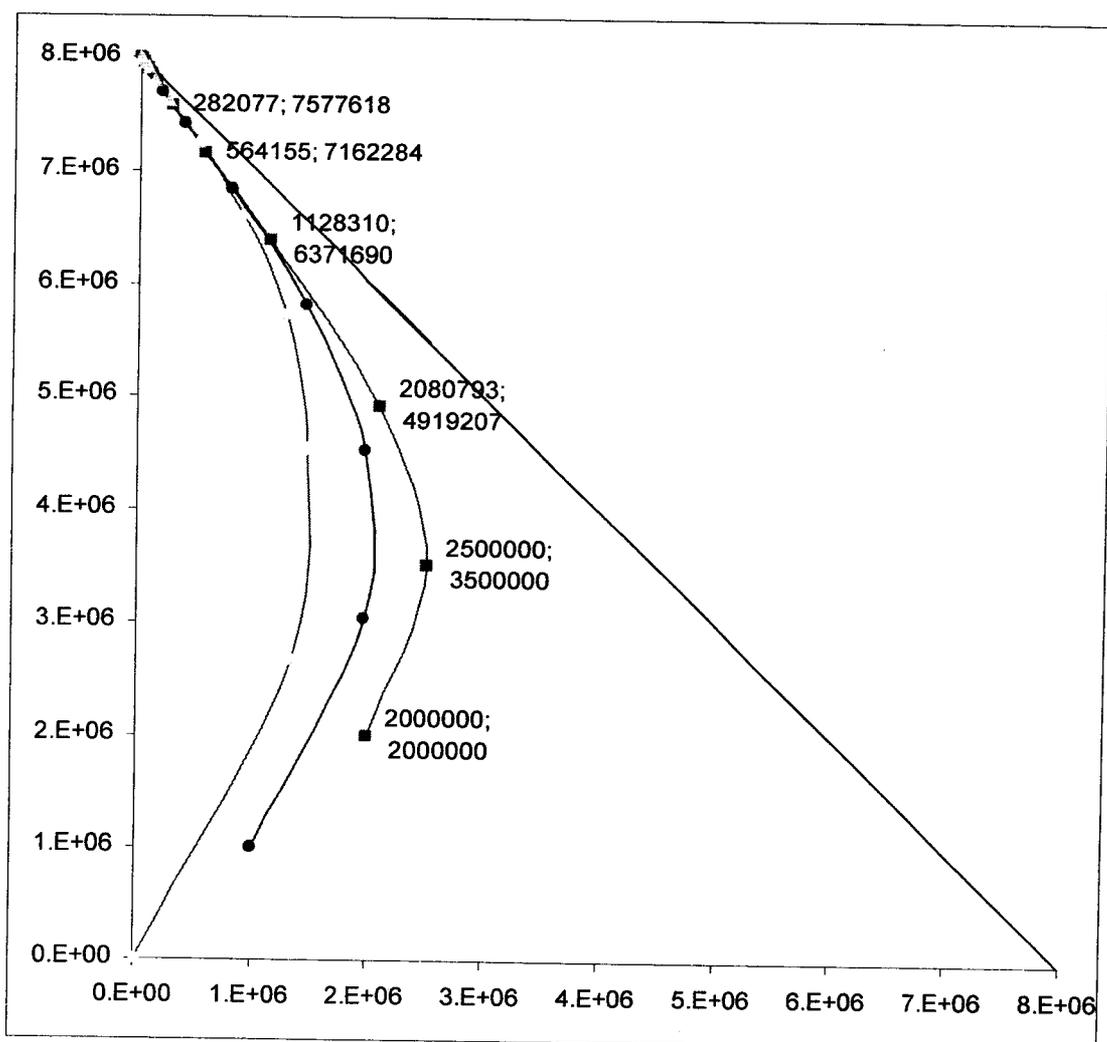


Figura 7.8: Ilustração da importância da solução inicial nas soluções intermédias.

Primeiro determinou-se o centro analítico do conjunto das soluções admissíveis que é o ponto $\mu_1=0.266$ e $\mu_2=0.017$, seguidamente aplicou-se o algoritmo de Karmakar apenas às restrições referentes aos DMUs 4 e 10 e à restrição de não negatividade referente a μ_1 .

Os resultados são os apresentados na Tabela 7.4 e ilustrados na Figura 7.9, em que se verifica que a trajetória converge para uma solução afastada de qualquer vértice, aproximando-se apenas da restrição do DMU em análise.

O critério de paragem escolhido foi o da manutenção do último dígito significativo do valor da função objectivo.

Saliente-se que este método tem a vantagem de ser relativamente simples, por bastar definir o critério de paragem e basear-se num algoritmo bastante divulgado. Tem contudo o inconveniente de, tal como o método da penalidade monomial, obrigar à remoção das restrições redundantes, para não influenciarem a solução final.

Tabela 7.4 Resultados da aplicação do algoritmo de Karmakar ao DMU 10.

Iteração	μ_1	μ_2	Ef
0	0.266	0.017	0.286
1	0.340	0.051	0.629
2	0.341	0.070	0.800
3	0.327	0.080	0.886
4	0.317	0.086	0.929
5	0.311	0.088	0.950
6	0.307	0.090	0.961
7	0.306	0.090	0.966
8	0.305	0.091	0.969
9	0.304	0.091	0.970
10	0.304	0.091	0.971
11	0.304	0.091	0.971

Repare-se que o resultado obtido foi semelhante ao descrito na Tabela 7.4 que foi de $\mu_1=0.24$ e $\mu_2=0.0979$.

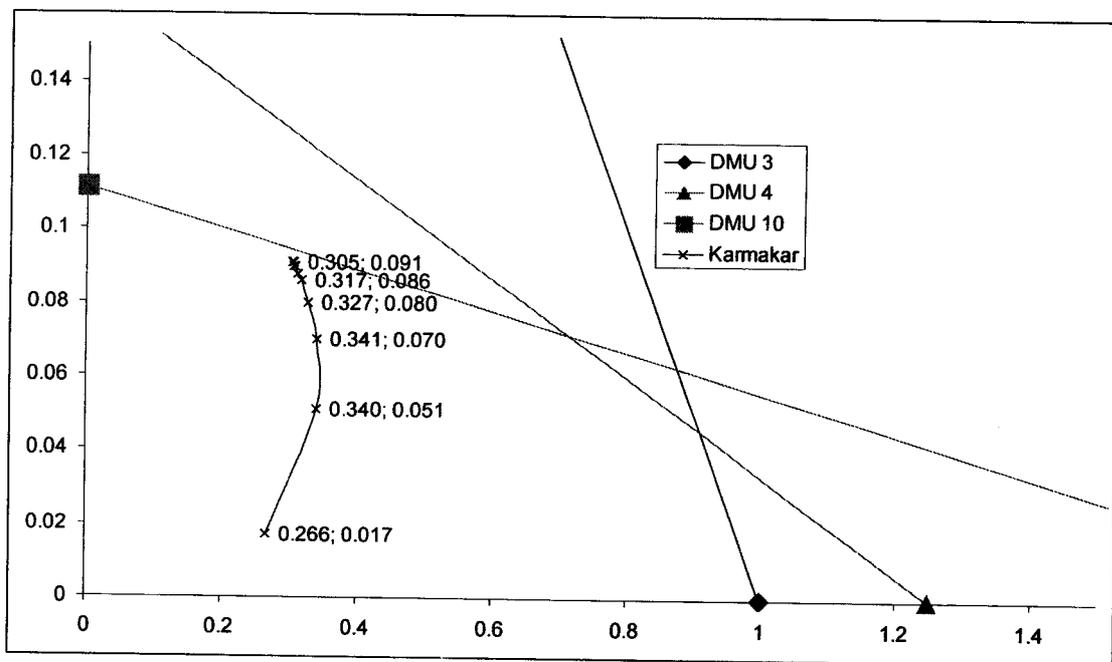


Figura 7.9: Ilustração da trajetória das soluções do algoritmo de Karmakar.

7.6. Conclusões

Os resultados obtidos mostram que se consegue uma distribuição mais uniforme para os multiplicadores. Verifica-se ainda que estas técnicas são muito gerais, podendo substituir com vantagem as técnicas usuais de restrições dos pesos.

Têm ainda uma outra vantagem, que consiste em não empregarem restrições extra, não alterando portanto a admissibilidade de soluções anteriores sem restrições. Realce-se também que as técnicas de ajuste de pesos podem ainda retirar o problema da inexistência de soluções admissíveis, como será ilustrado com dados reais no capítulo 8.

Ilustrou-se outro método de ajuste, baseado em maximizar todas as folgas e todos os pesos, a que se chamou o modelo com penalidade monomial. Tem no entanto o inconveniente de ter uma função objectivo não convexa, o que retira a garantia de um óptimo local ser o óptimo global.

Dada a dificuldade em obter um óptimo global para o modelo com penalidade monomial, utilizou-se o algoritmo de Karmakar, para ilustrar as suas potencialidades de fornecer uma solução de compromisso entre a optimização da função objectivo e evitar a anulação das folgas no problema dos multiplicadores.

Em qualquer destes dois métodos, mantém-se o problema da remoção das restrições redundantes, que podem ser muito numerosas numa aplicação de DEA.

Capítulo 8.

Aplicação das técnicas anteriores a um caso real

8.1. Introdução

Pretende-se agora ilustrar, como aplicando as técnicas de ajuste de pesos se consegue além duma distribuição mais uniforme destes, ultrapassar o problema da inexistência de soluções admissíveis.

Aproveita-se ainda para apresentar as potencialidades das técnicas de “Deleted Domain”, que permitem uma ordenação dos DMUs em análise.

Ilustra-se também como a introdução dum DMU fictício pode remover o inconveniente da inexistência de soluções admissíveis no problema da envolvente.

Para tal vai-se aplicar as técnicas apresentadas nos capítulos anteriores a dados referentes às explorações pecuárias da ilha Terceira.

Esses dados foram obtidos a partir da “Rede de Informação de Contabilidade Agrícola-Açores” que será referida neste capítulo pelas iniciais RICA-A.

8.2. Material e métodos

As noventa e cinco explorações da RICA-A no ano de 2002, foram caracterizadas no que respeita à estrutura do produto e dos gastos, e resultam numa selecção das explorações da RICA-A, baseada na comparabilidade com estudos anteriores.

Deste modo, as principais componentes do produto agrícola da Terceira, no período em análise, foram a produção do leite, sendo a produção de carne (bovinos com excepção do leite) residual. Consequentemente, consideraram-se como outputs a produção de leite (em litros) representada pela variável R91 FORMAÇÃO PRODUTO BRUTO ANIMAL.

Neste trabalho, a escolha das variáveis relativas à estrutura dos gastos e do produto, dependeu da sua representatividade, estimada aquando da caracterização da estrutura dos gastos e do produto das explorações leiteiras da Terceira.

8.3. Escolha de variáveis

Uma primeira selecção foi feita de modo a excluir as variáveis mais correlacionadas entre si, concretamente substituíram-se todas as variáveis com correlação superior a 0.9 por uma apenas, a que tinha menos casos omissos.

Foram, por exemplo, os casos das seguintes variáveis: R51 EXPLORAÇÃO e R266 ENCARGOS ATRIBUIDOS AO CAPITAL DE EXPLORAÇÃO; foram substituídas considerando-se apenas R266 ENCARGOS ATRIBUIDOS AO CAPITAL DE EXPLORAÇÃO; R53 TOTAL DE ANIMAIS substituiu R54 ANIMAIS ADULTOS e R168 BOVINOS; R35 SUPERFÍCIE CULTIVADA, R161 SUPERFÍCIE FORRAGEIRA, R162 PRADOS E PASTAGENS, R25 SUPERFÍCIE AGRÍCOLA ÚTIL (SAU) foram substituídas por R24 SUPERFÍCIE TOTAL.

O significado das restantes variáveis pode ser consultado em <http://www.gpp.pt/rica/FRESULT.pdf>.

Obteve-se assim uma matriz de correlações entre as vinte e seis variáveis em que apenas constam as variáveis que não estão demasiado correlacionadas.

Sobre essas 26 variáveis fez-se uma análise de *clusters* obtendo-se o dendrograma que se apresenta na Figura 8.1.

Da Figura 8.1 conclui-se que uma decisão acertada seria considerar quatro variáveis, escolhendo as mais abrangentes e excluindo as que têm muitos valores omissos.

***** H I E R A R C H I C A L C L U S T E R A N A L Y S I S *****

Dendrogram using Average Linkage (Between Groups)

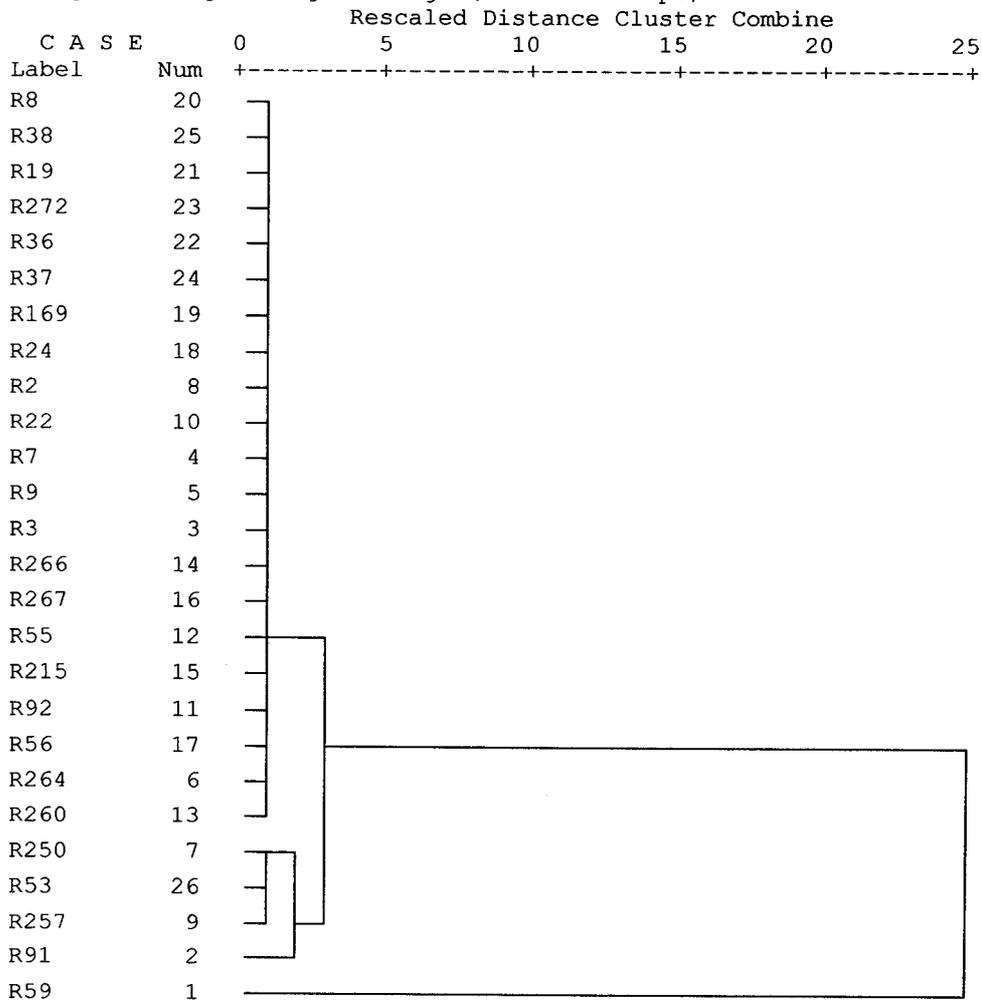


Figura 8.1: Dendrograma da análise hierárquica das variáveis

Assim sendo, os inputs considerados foram: a quantidade monetária de R59 CAPITAL TOTAL (SEM FLORESTAS) e R250 TOTAL ENCARGOS REAIS, e ainda R24 SUPERFICIE TOTAL medida em hectares.

8.4. Resultados

Aplicou-se o software EMS e compararam-se os resultados com os das principais técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

8.4.1. Resultados do software EMS

Por aplicação do software EMS e optando por um modelo BCC (Banker et al, 1984), em maximização de Outputs, obteve-se uma medida de eficiência cujos valores mais elevados se apresentam na Tabela 8.1.

Repare-se que se tem um total de 95 valores, mas apenas interessam as unidades eficientes pois apenas essas podem conduzir a problemas sem soluções admissíveis.

Tabela 8.1: Resultados do software EMS para o modelo BCC em maximização de Outputs.

Unidade	Ineficiência	μ_1	μ_2	μ_3	v
U81	115.56%	0.00000658	0	0	0.00001203
U47	108.84%	0.00000457	0	0.00000864	0.00001468
U95	99.78%	0.00000037	0.02964163	0	0.00001266
U83	98.24%	0	0.03428396	0.00000231	0.00001477
U12	94.51%	0	0.02119242	0	0.00000878
U68	90.13%	0	0.07995351	0.00002441	0.00002119
U22	89.50%	0.00000367	0	0	0.00001005
U38	84.88%	0	0.17665617	0	0.00002614
U8	69.30%	0.00004129	0.05853639	0	0.00002001
U46	61.34%	0	0	0.00000535	0.00000683
U93	25.91%	0	0.00000001	0.0000933	0.00003307
U23	Big	0.00000019	3746980.686	3544.900902	0.00037341
U72	Big	14.15045146	8954.397951	0.09205227	0.00038329
U89	Big	0.00209205	1961978.331	0.00006447	0.00042919

Estes resultados eram de esperar, pois os mínimos em cada Input conduziriam a modelos sem solução admissível.

Tabela 8.2 Valores das variáveis referentes aos 14 DMUs mais eficientes

DMU	X_1	X_2	X_3	Y
U81	108703	43.5	75477	83127
U47	91983	21.01	30041	68116
U95	87426	21.31	57398	78983
U83	109660	16.49	30989	67701
U12	345628	33.02	88362	113831
U68	30002	10.16	17058	47203
U22	115022	29.81	78155	99520
U38	101539	7.2	24805	38260
U8	24437	9.79	24723	49980
U46	271828	49.11	57705	146392
U93	20236	11.25	2804	30236
U23	27105	4.88	2114	2678
U72	11528	7.95	952	2609
U89	25597	2.74	6459	2330

Na Tabela 8.2, apresentam-se os valores das variáveis referentes a todos os 9 DMUs eficientes com soluções admissíveis, 3 DMUs eficientes sem soluções admissíveis e

ainda os de dois DMUs ineficientes, o 81 e o 47, para se ilustrar as alterações que cada modelo provoca nas respectivas avaliações.

8.4.2. Resultados do software EMS com o DMU fictício

A título ilustrativo, acrescentou-se um DMU artificial, (o 96º) cujos valores são os mínimos de todas as variáveis. Este DMU conduzirá a um Programa Linear sem solução admissível, mas garante que os três DMUs, que anteriormente estavam classificados apenas como Big, passem a ter algum valor numérico, uma vez que os programas lineares que originam já têm soluções admissíveis.

Tabela 8.3: Resultados do software EMS com o DMU fictício.

Unidade	Ineficiência	μ_1	μ_2	μ_3	v
U81	115.56%	0.00000658	0	0	0.00001203
U47	108.84%	0.00000457	0	0.00000864	0.00001468
U95	99.78%	0.00000037	0.02964163	0	0.00001266
U83	98.24%	0	0.03428395	0.00000231	0.00001477
U12	94.51%	0	0.02119242	0	0.00000878
U68	90.35%	0	0.06438394	0.00002337	0.00002119
U22	89.50%	0.00000367	0	0	0.00001005
U38	84.88%	0	0.17665617	0	0.00002614
U8	72.43%	0.00003777	0.02696129	0	0.00002001
U46	61.34%	0	0	0.00000535	0.00000683
U93	25.91%	0	0.00000012	0.0000933	0.00003307
U23	385.90%	0	1.10930362	0.00052931	0.00037341
U89	100.00%	0	3.99365872	0	0.00042918
U72	89.31%	0.00083761	0	0.0018371	0.00038329

Repare-se que os DMUs 89 e 72 mantiveram-se eficientes, enquanto o 23 passou a claramente ineficiente.

8.4.3. Aplicação do modelo BCC homotético

Aplicou-se o modelo BCC homotético em maximização de outputs às 14 unidades, para mostrar que os resultados eram idênticos aos do modelo BCC original, para todos os casos, excepto para os três casos em que não havia solução admissível no problema da envolvente.

Os resultados apresentam-se na Tabela 8.4, onde se suprimiu as colunas referentes às unidades 81 e 38 por serem colunas só de zeros, pois estas unidades não pertenciam ao grupo de pares de nenhuma das unidades em análise.

Tabela 8.4 Resultados do modelo BCC homotético.

	inef.	λ_{47}	λ_{95}	λ_{83}	λ_{12}	λ_{68}	λ_{22}	λ_8	λ_{46}	λ_{93}	λ_{23}	λ_{72}	λ_{89}	$\Sigma\lambda_j$
U81	1.15	0	0	0	0	0	.930	.070	0	0	0	0	0	1
U47	1.08	0	0	0	0	.439	0	.298	.263	0	0	0	0	1
U95	.998	0	0	0	.050	0	.517	.433	0	0	0	0	0	1
U83	.982	0	0	0	.015	0	0	.824	.162	0	0	0	0	1
U12	.945	0	0	.493	0	0	0	0	.507	0	0	0	0	1
U68	.901	0	0	0	0	0	0	.647	0	.336	0	0	.017	1
U22	.895	0	.850	0	0	0	0	0	.150	0	0	0	0	1
U38	.849	0	0	0	0	0	0	.633	0	0	0	0	.367	1
U8	.693	0	0	0	0	.637	0	0	0	.131	0	.232	0	1
U46	.613	.526	0	0	.474	0	0	0	0	0	0	0	0	1
U93	.256	0	0	0	0	.115	0	0	0	0	0	.885	0	1
U23	.731	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.528	.249	.777
U72	.904	0	0	0	0	0	0	0	0	.043	.393	0	0	.436
U89	.645	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.561	0	0	.561

Repare-se que as unidades das 3 últimas linhas mantiveram o seu estatuto de eficientes, mas agora existe solução admissível pois relaxou-se a restrição de convexidade.

8.4.4. Distribuição dos pesos com penalidades

Outra solução para o problema da inexistência de soluções possíveis consiste em evitar a total liberdade dos pesos.

Isso pode ser conseguido por técnicas de restrições aos pesos bem como pelas técnicas de ajuste de pesos por Goal Programming, em que se introduz penalidades por os pesos se desviarem dos valores tidos como ideais.

Neste caso, optou-se por penalizações quadráticas, pela sua maior simplicidade o que conduzirá a uma menor dispersão destes, diminuindo também o número de DMUs eficientes.

Tabela 8.5: Distribuição original dos pesos (BCC).

	μ_1	μ_2	μ_3
Max	0.000838	3.993659	0.001837
Decil 9	2.25E-05	0.12374	0.000102
Decil 8	1.59E-05	0.050437	7.23E-05
Decil 7	1.1E-05	0.025808	4.58E-05
Decil 6	8.4E-06	0	3.36E-05
Decil 5	6.48E-06	0	2.45E-05
Decil 4	1.44E-06	0	1.51E-05
Decil 3	0	0	8.44E-06
Decil 2	0	0	4.8E-07
Decil 1	0	0	0
Min	0	0	0

Por aplicação da referida técnica obteve-se uma distribuição dos pesos mais uniforme como se apresenta na Tabela 8.6.

Tabela 8.6: Distribuição dos pesos ajustados (BCC).

	μ_1	μ_2	μ_3
Max	0.000103	0.207236	0.000273
Decil 9	2.78E-05	0.083313	0.000102
Decil 8	1.86E-05	0.066089	6.85E-05
Decil 7	1.13E-05	0.050002	5.16E-05
Decil 6	9.08E-06	0.036553	3.19E-05
Decil 5	6.47E-06	0.026772	2.39E-05
Decil 4	3.47E-06	0.017534	2.01E-05
Decil 3	9.42E-07	0.008702	1.55E-05
Decil 2	3.39E-07	0	9.1E-06
Decil 1	0	0	7.66E-07
Min	0	0	0

Verifica-se que, neste caso, apenas se mantinham como eficientes o DMU 22 e o 83 e não surgia o problema da ausência de soluções admissíveis para nenhum caso.

8.5. Conclusão

Recorrendo a técnicas de ajuste dos pesos conseguiu-se uma avaliação mais abrangente, no sentido em que se evitou a ocorrência muito frequente de valores nulos.

Ilustrou-se ainda que a inclusão de DMUs artificiais pode levar à existência de soluções admissíveis o que também foi conseguido com o novo modelo BCC Homotético e com as técnicas de ajuste dos pesos.

Verificou-se, por fim, uma diminuição do número de DMUs eficientes com a inclusão de um DMU artificial, bem como com as técnicas de ajuste dos pesos, o que mostra que o método permite uma maior exigência na avaliação, evitando que um dado DMU concentre os seus pesos apenas em poucas variáveis nas quais tenha um bom desempenho.

Conclusões.

Sugeriram-se várias técnicas inovadoras para obviar ao problema das soluções ilimitadas no problema dos multiplicadores. A escolha de uma ou outra dependerá do número de DMUs e do número de variáveis.

Desenvolveu-se um novo modelo, o modelo BCC Homotético, que tem sempre soluções admissíveis e que se baseia na substituição da fronteira do modelo BCC por uma contracção ou expansão homotética desta com centro na origem,

No caso de muitas variáveis e poucos DMUs aconselha-se as técnicas de relaxação, se pelo contrário o número de DMUs for suficiente os métodos estocásticos parecem ser uma boa escolha.

Dadas as boas propriedades do modelo de Bognol e Dulá, no que respeita quer a invariância quer à admissibilidade desenvolveu-se uma nova formulação muito mais rápida para o modelo de Bognol e Dulá, baseado em programação linear binária mista, que permite resolver problemas que dantes demoravam dias em menos de uma hora e com mais variáveis.

Introduziu-se ainda um conceito original, o de pesos negativos, que surge na formulação binária do problema das múltiplas constituências. Esse facto por estar fora do âmbito desta tese, é apenas afluído no Apêndice 2, onde se ilustra a conjugação dos métodos de ajuste de pesos com o conceito de pesos negativos.

Outro objectivo que também foi conseguido foi a implementação de um sistema original de ajuste dos pesos. Esse sistema articula-se com o primeiro problema, o da ausência de soluções admissíveis, e mostra-se com um caso de aplicação prática a resolução desse problema pelas técnicas de ajuste de pesos com funções de perda de Taguchi.

Apresentou-se ainda outro método de ajuste baseado em maximizar todas as folgas e todos os pesos, a que se chamou o modelo com penalidade monomial, que tem no entanto o inconveniente de ter uma função objectivo não convexa, o que retira a garantia de um óptimo local ser o óptimo global.

Para obviar este inconveniente aplicou-se o algoritmo de Karmakar para obter soluções que evitem pesos e folgas nulas, o que não se consegue com o algoritmo do Simplex.

Repare-se que este trabalho ainda tem muito espaço para se desenvolver. Algumas das técnicas são de difícil implementação e parametrização, mas num futuro próximo mais investigadores poderão debruçar-se sobre estes temas e avançar para concretizações e aplicações bem sucedidas.

Bibliografia

- Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G., Thanassoulis, E., 1997. Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research* 73, 13–34.
- Andersen, P., Petersen, N. C., (1993), "A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis", *Management Science*, 39 N°10 pp 1261-4
- Banker, R D., Charnes, A., Cooper, W W., (1984), "Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis". *Management Science*, Vol. 30 (9), pp1078-1092
- Banker,R.D, e Morey,R., (1986), "The use of categorical variables in data envelopment analysis ,"*Management Science*, Vol. 32, No. 12, pp. 1613-1627
- Barros CP, Barroso N, Borges MR. (2005) Evaluating the efficiency and productivity of insurance companies with a Malmquist index: a case study for Portugal. *Geneva Papers on Risk and Insurance—Issues and Practice*;30(2):244–67
- Beasley , J.E., (1990), "Comparing university departments", *Omega* 18, 171-183
- Beasley, J. E., (1993), "Determining Teaching and Research Efficiencies", The Management School, Imperial College, London SW7 2AZ England
- Belton, V., e Vickers, P., (1993).,"Demistifying DEA - A Visual Interactive Approach Based on Multiple Criteria Analysis", *Journal of the Operational Research Society* ,Vol 44, pp. 883-96
- Bessent, A., e Bessent,W.,(1980), "Determining the Comparative Efficiency of Schools Through Data Envelopment Analysis," *Educational Administration Quarterly*, Vol. 16, No. 2, pp. 57-75.
- Bessent, A., Bessent, W., Kennington, J., e Regan, B., (1982), "An application of mathematical programming to assess productivity in the Houston independent school district," *Management Science*, Vol. 28, No. 12, pp. 1355-1367.
- Bessent, A., Bessent, W., Charnes, A., Cooper, W.W., e Thorogood, N., (1983), "Evaluation of Educational Program Proposals by Means of Data Envelopment Analysis," *Educational Administration Quarterly*, Vol. 19, No. 2, pp. 82-107.

-
- Bessent, Authella M., Edgar Wailand Bessent, Joyce Elam and Charles Terrance Clark, (1988), "Efficiency frontier determination by constrained facet analysis", *Operations Research* 36(5), pp 785-796, Set-Oct.
- Bougnol, M. L., (2001) "Nonparametric Frontier Analysis with Multiple Constituencies", Ph.D. Dissertation, The University of Mississippi, University, MS 38677.
- Bougnol, M. L., Dulá, J. H.; Retzlaff-Roberts, D., Womer, N. K., (2005), "Nonparametric frontier analysis with multiple constituencies". *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 56 (3), pp252-266
- Boussofiane A., Dyson R. G., e Thanassoulis E., (1991), "Applied data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, 52, pp. 1-15.
- Briec, Walter, (1999), "Hölder distance function and measurement of technical efficiency", *The Journal of Productivity Analysis* 11(2), pp 111-131.
- Brockett, P. L., J. J. Rousseau, Y. Wang, and L. Zhou: 1997, 'Implementation of DEA Models Using GAMS'. Research Report 765, University of Texas, Austin.26
- Bron, C., e Kerbosch, J. (1973), "Algorithm 457 — Finding all cliques of an undirected graph", *Communications of the ACM* 16, 575—583.
- Camanho AS, Dyson RG. (2005), Cost efficiency measurement with price uncertainty: a DEA application to bank branch assessments. *European Journal of Operational Research*;161(2):432–46.
- Caporaletti, L. E., Jose H. Dulá e Norman Keith Womer, (1999), "Performance evaluation based on multiple attributes with nonparametric frontiers", *Omega, International Journal of Management Science* 27(6), pp 637-645.
- Caron, Richard J, Greenberg Harvey J., Holder Allen G. (2002) "Analytic centers and repelling inequalities" *European Journal of Operational Research* 143 268–290
- Castro, Rosa D. S. L., "O Método DEA - Aplicação à avaliação da eficiência comparativa das escolas secundárias do distrito do Porto", *Dissertação de Mestrado, Faculdade de Economia, Universidade do Porto*, (1993).
- Chambers, R. G., Y. Chung, e R. Färe: 1996, 'Benefit and distance functions'. *Journal of Economic Theory* 70, 407-419.

-
- Charnes, A., Cooper, W. W., (1962), "Programming with linear fractional functionals", Naval Research Logistics Quarterly 9 pp.181-185
- Charnes, A., Cooper, W. W., e Rhodes, E., (1978), "Measuring the efficiency of decision making units", European Journal of Operational Research, Vol. 2, No. 6, pp. 429-444. (The "CCR" Model)
- Charnes, A., Cooper, W. W., e Rhodes, E., (1979), "Short communication: measuring the efficiency of decision making units", European Journal of Operational Research, Vol. 3, No. 4, pp. 339.
- Charnes, A., Cooper, W.W., e Rhodes, E., (1981), "Evaluating program and managerial efficiency: an application of data envelopment analysis to program follow through," Management Science, Vol. 27, No. 6, pp. 668-697
- Charnes, Abraham, William Wager Cooper, Lawrence M. Seiford and J. Stutz, (1982), "A multiplicative model for efficiency analysis", Socio-Economic Planning Sciences 16(5), pp 223-224.
- Charnes A, Cooper WW, Golany B, Seiford LM, Stutz J. Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto–Koopmans efficient empirical production functions. Journal of Econometrics 1985;30(1/2):91–107.
- Charnes,A. e Neralic,L.,(1989), "Sensitivity analysis in data envelopment analysis 2," Glasnik Mathematicki, Vol. 24 (44), No.2/3.
- Chen,Yao, (2005) "Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility" European Journal of Operational Research Volume 161, Issue 2, 1 March 2005, Pages 545-551
- Chen,Yao, (2004) "Ranking efficient units in DEA" Omega Volume 32, Issue 3, June 2004, Pages 213-219
- Coelho, J. S., (2005) "DistributionView: ferramenta para facilmente definir e simular qualquer distribuição", I Workshop em Matemática Estatística e Computação, Universidade Aberta, Maio de 2005
- Cook, W.D., Kress, M., e Seiford, L.M., (1993), "On the use of ordinal data in data envelopment analysis", Journal of the Operational Research Society ,44, No. 2, 133-140.

-
- Cook, Wade D. e Zhu, Joe, (2007), "Classifying inputs and outputs in data envelopment analysis," *European Journal of Operational Research*, Elsevier, vol. 127(2), pages 692-699, July.
- Cooper William W., José L. Ruiz, Inmaculada Sirvent (2007): Choosing weights from alternative optimal solutions of dual multiplier models in DEA. *European Journal of Operational Research* 180(1): 443-458
- Debreu, Gerard (1951), "The Coefficient of Resource Utilization." *Econometrica* 19 (3): 273-292 July
- Doyle, J. R., e Green, R., D., (1993), "Data envelopment analysis and Multiple Criteria Decision Making", *Omega*, Vol: 21, pp. 713-5.
- Doyle, J. R., e Green, R.,D.,(1994), "Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses", *Journal of the Operational Research Society* 45, No. 5, 567-578.
- Dulá J.H.; Helgason R.V.; Hickman B.L. (1992), Preprocessing schemes and a solution method for the convex hull problem in multidimensional space, *Computer Science and Operations Research: New Developments in Their Interfaces*, O. Balci (ed.), 59-70, Pergamon Press, U.K.
- Dulá J.H.; Helgason R.V. (1996), A new procedure for identifying the frame of the convex hull of a finite collection of points in multidimensional space, *European Journal of Operational Research* 92, 352-367.
- Dulá, J.H. and B.L. Hickman, (1997). "Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix", *Journal of the Operational Research Society* 48, 1001-1012.
- Dulá J.H.; Helgason R.V.; Venugopal. N. (1997), An algorithm for identifying the frame of a pointed finite conical hull, *INFORMS Journal on Computing* Vol. 10, No. 3, 323-330.
- Dulá J. H. ; R.M. Thrall (2001), A computational framework for accelerating DEA, *J. of Productivity Analysis*, Vol. 16, July 2001, No. 1, pp. 63-78.
- Dulá J. H. e Lopez F. J. 2006. Algorithms for the Frame of a Finitely Generated Unbounded Polyhedron. *INFORMS J. on Computing* 18, 1 (Jan. 2006), 97-110. DOI=<http://dx.doi.org/10.1287/ijoc.1040.0109>

-
- Dyson, R. G. e E. Thanassoulis (1988). "Reducing weight flexibility in data envelopment analysis." *Journal of the Operational Research Society* 39(6): 563-76
- Edelsbrunner H. (1987), Algorithms in combinatorial geometry, Monographs in Theoretical Computer Science, Vol.10, Springer-Verlag, New York.
- Edirisinghe N.C.P., X. Zhang, (2007) "Generalized DEA model of fundamental analysis and its application to portfolio optimization", *Journal of Banking & Finance*, Volume 31, Issue 11, November 2007, Pages 3311-3335
- Färe, R. e C. A. K. Lovell: (1978), 'Measuring the technical efficiency of production'. *Journal of Economic Theory* 19(1), 150-162.
- Färe, Rolf, Shawna Grosskopf and C. A. Knox Lovell, (1985), The measurement of efficiency of production, Kluwer-Nijhoff Publishing Co., Boston.
- Farrell, M. J., (1957), "The measurement of Productive Efficiency", *Journal of Royal Statistical Society A*, 120, pp. 253-281.
- Farrell, M. J., (1959) "The Convexity Assumption in the Theory of Competitive Markets" *The Journal of Political Economy*, Vol. 67, No. 4 (Aug.), pp. 377-391
- Gang, Quan Ling Wei, Patrick L. Brockett e Li Zhou, (1996), "Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model", *European Journal of Operational Research* 95(3), pp 491-510.
- Ganley, J. A., Cubbin, J. S., (1992), *Public Sector Efficiency Measurement - Applications of Data Envelopment Analysis*, North - Holland.
- Geraint J., Maria S. Portela e Ana S. Camanho "Assessing efficiency of portuguese universities through parametric and non-parametric methods" *Portuguese Journal of Management Studies* Volume 13 Issue 1 - Jan / Jun 2008 pp. 39-66.
- K. Fukuda (2004), *Frequently Asked Questions in Polyhedral Computation*, <http://www.cs.mcgill.ca/~fukuda/soft/polyfaq/>
- Kamakura, W.A., (1988), "A Note on The Use of Categorical Variables in Data Envelopment Analysis", *Management Science*, Vol. 34, No. 10, pp. 1273-1276.
- Narendra Karmarkar (1984). "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica*, Vol 4, nr. 4, p. 373-395.

-
- Lang, Pascal, Osman Reha Yolalan e Ossama Kettani, (1995), "Controlled envelopment by face extension in DEA", *Journal of the Operational Research Society* 46, pp473-491.
- Marques Rui C, Monteiro António J. Benchmarking the economic performance of Portuguese water and sewerage services. In: Emrouznejad A, Podinovski V, editors. *Proceedings of DEA2004*, Birmingham, UK, 2004. p. 63
- Norman, M.,Stoker ,B., (1991), *Data envelopment analysis: the assessment of performance.*, John Wiley, Chichester.
- Oliveira MA, Santos C. (2005) Assessing school efficiency in Portugal using FDH and bootstrapping. *Applied Economics*;37(8):957-68.
- Pareto, V., *Manuale di Economia Politica*. Società Editrice Libreria, Milano, 1906.
- Portela, M.C.A.S., and Borges, P.C. e Thanassoulis, E. (2003), "Finding Closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies", *Journal of Productivity Analysis* 19/2-3, pp 251-269.
- Portela, M.C.A.S., Thanassoulis, E. e Simpson, G.P.M. (2004), "Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches", *Journal of the Operational Research Society*, 55, pp 1111-1121.
- Portela, M.C.A.S., e Thanassoulis, E. (2005), "Profitability of a sample of Portuguese bank branches and its decomposition into technical and allocative components", *European Journal of Operational Research*, 162/3, pp.850-866.
- Portela, M.C.A.S., Camanho, A. S. e Azevedo, J. (2006), "Análise do valor acrescentado de escolas secundárias Portuguesas", *Revista Portuguesa de Investigação Educacional*, N. 5, 107-141
- Rousseau, J.J., e Semple, J.H., (1993), "Notes: Categorical outputs in data envelopment analysis" *Management Science*, Vol. 39, No. 3, pp. 384-386
- Russell, R. R.: 1985, 'Measures of technical efficiency'. *Journal of Economic Theory* 35(1), 109-126.
- Santos, Jorge Manuel Azevedo, (1994), "Ranking of efficient units using data envelopment analysis (in Portuguese)", MSc, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, October.

-
- Santos, Jorge Manuel Azevedo, "A New Model for Finding the Most Favorable Constituency in Data Envelopment Analysis". Apresentado em: INFORMS Annual Meeting Atlanta 2003 10/19 a 10/22
- Santos, Jorge Manuel Azevedo, "A New Model for Finding the Most Favorable Constituency in Data Envelopment Analysis". Apresentado em: JOCLAD 2003 X Jornadas de Classificação e Análise de Dados. 04/10 a 04/12, Universidade de Aveiro
- Santos, Jorge Manuel Azevedo, Isabel Themido and Luís Cavique, (1998), "Um algoritmo para a supressão de folgas nos modelos de data envelopment analysis (in Portuguese)", Presented at: (IO' 98) 8º Congresso da APDIO [in DEA], Faro, Portugal, 11/29 a 12/2.
- Sarrico, Cláudia, Susanna M. Hogan, Robert G. Dyson and Andreas D. Athanassopoulos, (1997), "Data envelopment analysis and university selection", Journal of the Operational Research Society 48 (12), pp 1163-1177.
- Seiford, L. M., (1990), "A bibliography of data envelopment analysis (1978-1990): version 5.0." Working paper Department of Industrial Engineering and Operations Research, The University of Massachusetts, Amherst MA 01003, USA.
- Sexton TR, Silkman RH, Hogan AJ. Data Envelopment Analysis: critique and extensions. In: Silkman RH, editor. Measuring efficiency: an assessment of Data Envelopment Analysis. San Francisco, CA: Jossey-Bass; 1986. p. 73–105.
- Shephard, R. W., (1953), Cost and production functions", Princeton University Press, Princeton.
- Shephard, R. W., (1970), The theory of cost and production funtions, Princeton University Press, Princeton.
- Sexton TR. The methodology of Data Envelopment Analysis. In: Silkman RH, editor. Measuring efficiency: an assessment of Data Envelopment Analysis. San Francisco, CA: Jossey-Bass; 1986
- T.Koopmans, (1951), Analysis of production as an efficient combination of activities. In T. Koopmans, editor, Activity Analysis of Production and Allocations, volume 13 of Cowles Commission Monograph, pages 33–97. Jonh Wiley and Sons, New York,.
- Tavares G., Antunes C. Henggeler. "Avaliação da Modernização dos Serviços de Telecomunicações nos Países da OCDE Usando DEA - a Situação de Portugal". Investigação Operacional, vol. 19, nº 2, 177-192, 1999.

-
- Tavares Gabriel, Antunes Carlos Henggeler, (2001), "A Tchebycheff DEA model", RRR 35-01, RUTCOR -Rutgers Center for Operations Research, Rutgers University.
- Tavares, Gabriel, A BIBLIOGRAPHY OF DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (1978-2001) Rutcor Research Report RRR 01-02, Rutgers University, USA, JANUARY, 2002
- Thanassoulis E. A comparison of regression-analysis and Data Envelopment Analysis as alternative methods for performance assessments. *Journal of the Operational Research Society* 1993;4:1129-44.
- Thanassoulis, E., Allen, R., 1998. Simulating weights restrictions in data envelopment analysis by means of unobserved DMUs. *Management Science* 44, 586-594.
- Thompson, R.G., Singleton, F.D., Thrall, R.M., e Smith, B.A., (1986) ,"Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas", *Interfaces*, Vol. 16, No. 6, December , pp. 38-49.
- Vaz, C., Camanho, A. e Portela MCAS "Performance Evaluation Accounting for Non-Discretionary Factors: The Assessment of Retailing Stores Using Data Envelopment Analysis" submetido.
- Wong, H.B., e Beasley, J.E., (1990), "Restricting weight flexibility in data envelopment analysis." *Journal of the Operational Research Society* ,Vol.41, pp.829-835.
- Yao Chen, Luvai F. Motiwalla, Muhammad Riaz Khan: Using Super-Efficiency Dea To Evaluate Financial Performance Of E-Business Initiative In The Retail Industry. *International Journal of Information Technology and Decision Making* 3(2): 337-351 (2004)
- Yao Chen: Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research* 161(2): 545-551 (2005)
- Yu, G., Q. Wei, P. Brockett, and L. Zhou: 1996, 'Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model'. *European Journal of Operational Research* 95, 491-510.

Anexo 1 – Formulações para os Modelos CCR e BCC

Considere-se que se está a resolver um caso com M DMUs que consomem J *Inputs* e produzem I *Outputs*. Assim sendo resolvem-se M programas lineares (um para cada DMU_m) fazendo $(X_0, Y_0) = (X_j, Y_j)$ para $j=1, \dots, M$.

As matrizes são representadas a **BOLD**.

Apresentam-se de seguida as formulações para os dois modelos bem como a respectiva nomenclatura:

Dados:

- X_0 *Inputs* do DMU_0 (DMU em análise).
- Y_0 *Outputs* do DMU_0 . (DMU em análise).
- X Matriz dos *Inputs* de todos os DMUs.
- Y Matriz dos *Outputs* de todos os DMUs.

Unidades auxiliares:

- 0 Matriz nula de dimensão conformável.
- 1 Matriz de *uns* de dimensão conformável.
- ε Infinitamente pequeno, positivo. (Geralmente 10^{-6})
- θ Variável auxiliar
- ϕ Variável auxiliar

Variáveis:

- s^+ Matriz coluna das folgas nos *Outputs*.
- s^- Matriz coluna das folgas nos *Inputs*.
- λ Matriz coluna das variáveis duais.
- z_0 Eficiência (problema da envolvente em minimização de *Inputs*).
- w_0 Eficiência (problema dos multiplicadores em minimização de *Inputs*).
- μ Matriz linha dos multiplicadores (pesos) dos *Outputs*.
- v Matriz linha dos multiplicadores (pesos) dos *Inputs*.
- u_0 Constante indicadora de rendimentos crescentes ou decrescentes à escala
- v_0 Constante indicadora de rendimentos crescentes ou decrescentes à escala
- t_0 Ineficiência (problema da envolvente em maximização de *Outputs*).
- q_0 Ineficiência (problema dos multiplicadores em maximização de *Outputs*).

Modelo CCR

Minimização de *Inputs*

Problema da envolvente	Problema dos multiplicadores
$\min z_0 = \theta - \epsilon 1s^+ - \epsilon 1s^-$	$\max w_0 = \mu Y_0$
$\theta, \lambda, s^+, s^-$	μ, v
s.a.:	s.a.:
$Y\lambda - s^+ = Y_0$	$vX_0 = 1$
$\theta X_0 - X\lambda - s^- = 0$	$\mu Y - vX \leq 0$
$\lambda, s^+, s^- \geq 0$	$-\mu \leq -\epsilon 1$
	$-v \leq -\epsilon 1$

Maximização de *Outputs*

Problema da envolvente	Problema dos multiplicadores
$\max t_0 = \phi + \epsilon 1s^+ + \epsilon 1s^-$	$\min q_0 = vX_0$
ϕ, λ, s^+, s^-	μ, v
s.a.:	s.a.:
$\phi Y_0 - Y\lambda + s^+ = 0$	$\mu Y_0 = 1$
$X\lambda + s^- = X_0$	$-\mu Y + vX \geq 0$
$\lambda, s^+, s^- \geq 0$	$\mu \geq \epsilon 1$
	$v \geq \epsilon 1$

Destas formulações resulta que as eficiências nunca diminuirão, por inclusão de mais um *Input* ou *Output*, pois tal equivale a acrescentar uma restrição no problema das envolventes. Este facto já tinha sido anteriormente verificado quando se alargou a análise do exemplo de x_1, y_1 a x_1, y_1 e y_2 .

Nota: Considerou-se estar definida a seguinte relação de ordem entre matrizes de dimensão $n \times m$:

$A \geq B$ sse $a_{k,l} \geq b_{k,l} \forall k,l \in \{1,n\} \times \{1,m\}$ e $A \leq B$ sse $a_{k,l} \leq b_{k,l} \forall k,l \in \{1,n\} \times \{1,m\}$.

Modelo BCC

Minimização de *Inputs*

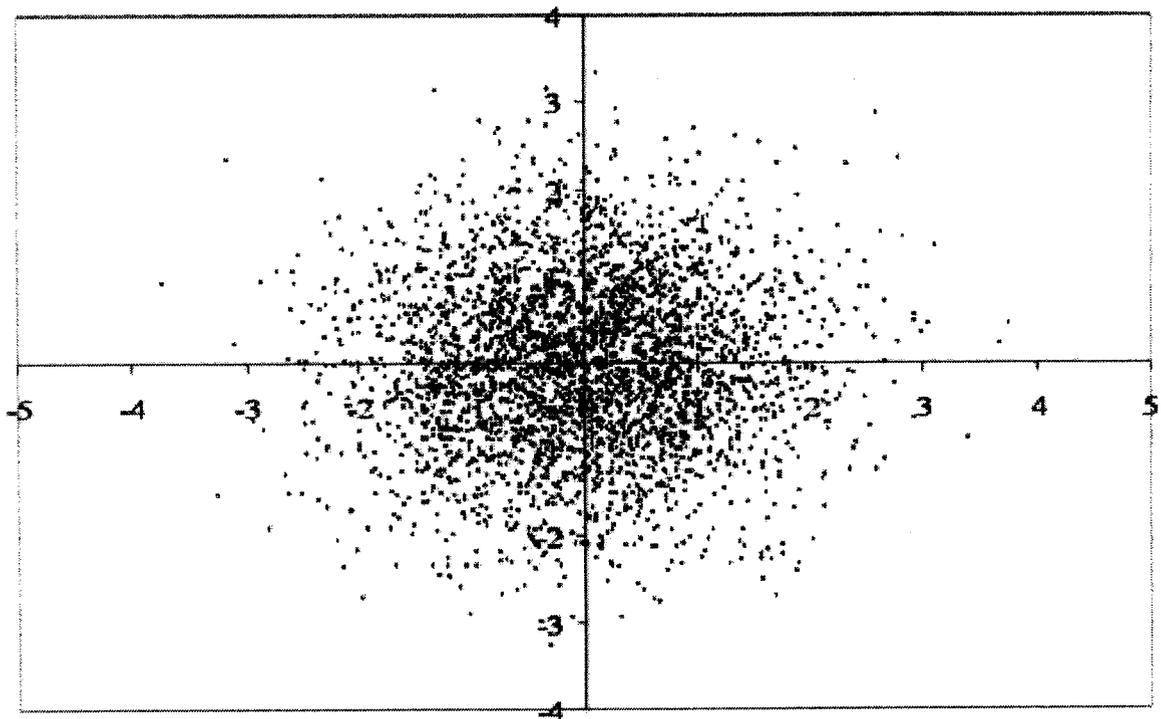
Problema da envolvente	Problema dos multiplicadores
$\min z_0 = \theta - \varepsilon 1s^+ - \varepsilon 1s^-$	$\max w_0 = \mu Y_0 + u_0$
$\theta, \lambda, s^+, s^-$	μ, v, u_0
s.a.:	s.a.:
$Y\lambda - s^+ = Y_0$	$vX_0 = 1$
$\theta X_0 - X\lambda - s^- = 0$	$\mu Y - vX + u_0 1 \leq 0$
$1\lambda = 1$	$-\mu \leq -\varepsilon 1$
$\lambda, s^+, s^- \geq 0$	$-v \leq -\varepsilon 1$
	$u_0 \in \mathbb{R}$

Maximização de *Outputs*

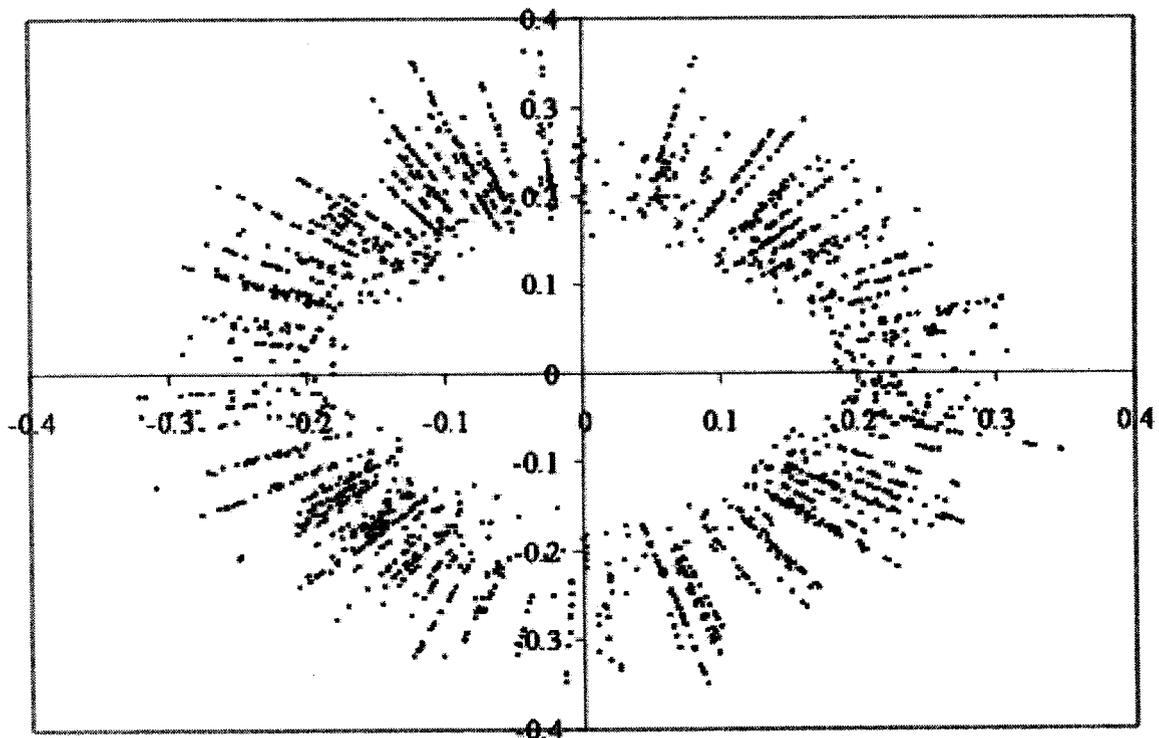
Problema da envolvente	Problema dos multiplicadores
$\max t_0 = \phi + \varepsilon 1s^+ + \varepsilon 1s^-$	$\min q_0 = vX_0 + v_0$
ϕ, λ, s^+, s^-	μ, v, v_0
s.a.:	s.a.:
$\phi Y_0 - Y\lambda + s^+ = 0$	$\mu Y_0 = 1$
$X\lambda + s^- = X_0$	$-\mu Y + vX + v_0 1 \geq 0$
$1\lambda = 1$	$\mu \geq \varepsilon 1$
$\lambda, s^+, s^- \geq 0$	$v \geq \varepsilon 1$
	$v_0 \in \mathbb{R}$

Anexo 2 – Ajuste dos pesos a dados gerados artificialmente

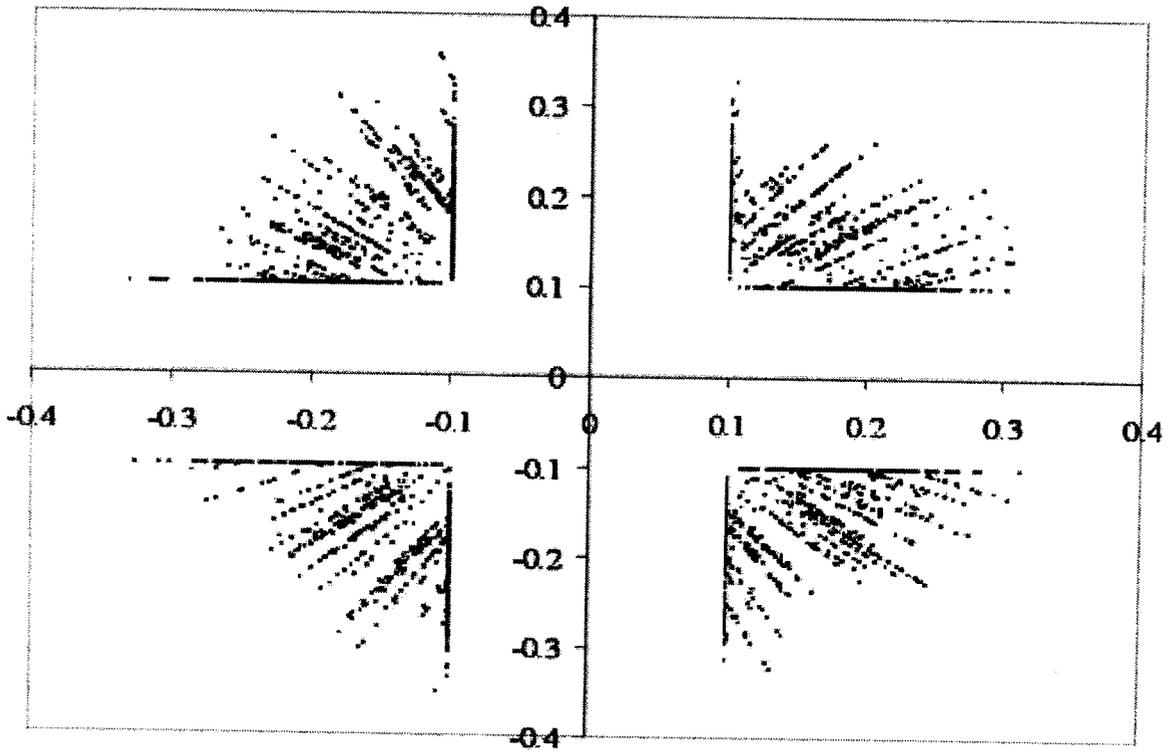
Normal Bivariada:



Pesos sem nenhum ajuste:



Pesos com ajuste "usual":



Pesos com ajuste "gradual":

