



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Física

Medição de impedâncias usando Conversores Analógico Digitais e Algoritmos de Processamento de Sinal

Mouhaydine Tlemçani

Dissertação apresentada à Universidade de Évora para a obtenção
do grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica

Orientador:

Professor Doutor Pedro Miguel Ramos

Co-orientador:

Professor Doutor António Manuel da Cruz Serra

Esta tese não inclui as críticas e sugestões do júri

Évora – 2006



141 887

Aos meus pais, à Sara, à Inês e ao Haroun

Agradecimentos

Agradeço

A todos os que de uma forma directa ou indirecta contribuíram para a execução deste trabalho proporcionando apoio científico, meios informáticos, livros, apontamentos, comentários e condições para a sua realização.

De entre todos permito-me destacar o Prof. Dr. Pedro Miguel Ramos, o meu orientador, e o Prof. Dr. António Manuel da Cruz Serra, o meu co-orientador. Pela lúcida e paciente orientação que me têm prestado ao longo deste tempo. Pela amizade, as ideias, a presença constante dos seus conselhos e a solidariedade permanente que me têm demonstrado em todos os momentos altos e baixos. Os meus agradecimentos vão também ao Instituto de Telecomunicações e à secção de Electrotecnia Teórica e Medidas Eléctricas do IST, onde tanta coisa aprendi e pela simpatia e o apoio que sempre lá encontrei nomeadamente das pessoas funcionários e docentes entre os quais o Professor Manuel Fonseca da Silva e do Professor Ferreira Fernandes.

Ao Departamento de Física da Universidade de Évora, pelas condições e apoio concedidos, nomeadamente pela concessão da dispensa de serviço docente. Um vivo agradecimento a todos os colegas do Departamento, em particular aos colegas que tiveram que desempenhar tarefas pedagógicas e outras durante o tempo em que estive a trabalhar nesta tese. Aos meus colegas de gabinete o Prof. Rui Salgado e o Eng.º Paulo Canhoto um especial agradecimento, pela disponibilidade, pelas ideias e discussões científicas que foram decisivas no meu trabalho. Ao Professor António Heitor Reis, sempre disponível para qualquer dúvida. Ao Professor Augusto Fitas pela amizade, apoio e incentivo, ao Professor José Ribeiro pelo apoio e pelos pensamentos positivos,

ao Professor Fernando Janeiro, o meu companheiro de viagens a Lisboa, pelo incentivo, amizade e ajuda.

Ao Centro de Geofísica de Évora pelos meios postos à minha disposição, pelo material de apoio, pelo incentivo e carinho que recebi por parte deste organismo. Um especial agradecimento para o Professor Mourad Bezzeghoud, o Professor Bento Caldeira, o Professor Fernando Borges e o Eng.º José Pombinho.

À Ana Maria, a minha amiga, pelo incentivo, a preocupação e por tudo.

Por fim, à minha Sarinha, à Noca e ao Harounito pela paciência, o carinho e o apoio que me têm reservado ao longo deste tempo.

Índice

Agradecimentos	iii
Índice	v
I. Introdução	1
Referências.....	7
II. Método de adaptação de sinusóides	9
2.1 Introdução	9
2.2 Método de adaptação de sinusóides de três parâmetros	11
2.3 Método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros	14
2.4 Método de adaptação de sinusóides de 4+4 parâmetros.....	16
2.5 Método de adaptação de sinusóides de 4+3 parâmetros.....	16
2.6 Método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros.....	17
2.7 Simulação numérica	20
2.7.1 Método de três parâmetros	20
2.7.2 Método de quatro parâmetros	24
2.7.3 Método de 4+4 parâmetros	31
2.7.4 Método de 4+3 parâmetros.....	34
2.7.5 Método de sete parâmetros.....	37
2.7.6 Dependência do Método de sete parâmetros do número de pontos adquiridos	41
2.8 Conclusões	43
Referências.....	44
III. Medição de impedâncias	45
3.1 Introdução	45
3.2 Montagem experimental.....	45
3.3 Aplicação do método de 4+4 parâmetros	49
3.4 Aplicação do método de 4+3 parâmetros	56
3.5 Aplicação do método de sete parâmetros	64
3.6 Influência da incerteza da impedância de referência	76
3.7 Conclusões.....	81
Referências.....	82
IV. Método de adaptação de elipses	83
4.1 Introdução	83
4.2 Descrição do método	84
4.3 Simulação numérica	91
4.3.1 Desempenho do algoritmo em função da diferença de fase.	92
4.3.2 Dependência do desvio padrão da fase em relação às amplitudes.	94
4.3.3 Estimativa das amplitudes.	101
4.3.4 Dependência do algoritmo das elipses do número de pontos adquiridos.....	102
4.4 Conclusões.....	104
Referências.....	105
V. Medição de impedâncias pelo método de adaptação de elipses	107
5.1 Introdução	107
5.2 Montagem experimental.....	108
5.3 Aplicação do método de adaptação de elipses	110
5.4 Influência da incerteza da impedância de referência	119
5.5 Comparação com o método de sete parâmetros.....	123
5.6 Conclusões.....	125
Referências.....	127
VI. Conclusões	129
Referências.....	134
Apêndice A. Transformada Discreta de Fourier	137
A.1 Descrição da DFT interpolada (IpDFT).....	141
Referências.....	144
Apêndice B. Configuração das medidas de impedância pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A	145
Referências.....	146
Apêndice C. Medição das impedâncias, pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A	147
Lista de Acrônimos	155
Lista de Símbolos	157

I. Introdução

A medida assume uma importância cada vez maior nas ciências e nas tecnologias modernas ao ponto de constituir uma disciplina à parte: a metrologia. Os progressos realizados na medida levam a um melhor conhecimento dos fenómenos físicos. Em contrapartida estes exigem uma cada vez maior extensão da medida acompanhada por uma maior precisão e exactidão dos sensores e instrumentos que a servem. Nestes contextos, as medidas de impedâncias têm desempenhado um papel preponderante em domínios tão transversais como a electrotecnia, a física, a química, a mecânica ou a medicina [1]. Seja no laboratório ou no meio industrial, a transdução das várias grandezas físicas como a temperatura, força, pressão, nível, caudal ou até uma concentração química, etc., é muitas vezes traduzida na variação de impedância.

A noção de impedância foi pela primeira vez introduzida por Oliver Heaviside em 1886 como generalização da Lei de Ohm. A impedância eléctrica mede a oposição à passagem de uma corrente num circuito eléctrico.

As medidas de impedâncias são tradicionalmente efectuadas utilizando pontes equilibradas por impedâncias padrão, por medidores de factores de qualidade ou ainda por medidores vectoriais analógicos de impedâncias [2-7]. Os medidores de impedâncias são usados para testar componentes electrónicos, circuitos e materiais. Existem vários métodos de medida de impedâncias, cada uma com uma gama de frequência específica onde produz melhores resultados. Os métodos tradicionais incluem pontes não compensadas, pontes auto compensadas, ressonância, I-V, RF I-V, análise de redes [8]. A evolução das tecnologias dos semicondutores, circuitos integrados, microprocessadores e conversores analógico digitais introduziu uma melhoria tanto em termos de uma maior exactidão e precisão dos resultados

experimentais, como uma redução significativa do tempo de medida. Os métodos usados pelos sistemas comerciais de medida de impedâncias dependem da gama de frequência em que funcionam os dispositivos. Para a gama de frequências de 10 Hz a 100 kHz, os métodos mais usuais são as pontes simples, I-V e as pontes auto compensadas. Consoante o valor do módulo da impedância, diferentes tipos de ligação estão disponíveis para obter os melhores resultados, entre eles estão as ligações de dois, três, quatro e cinco terminais e pares de quatro terminais. Estes são usados para reduzir os efeitos do ruído e os efeitos do comprimento dos cabos de ligação.

Os dispositivos comerciais incluem habitualmente complexos procedimentos de calibração para assegurar a correcta operacionalidade do instrumento e manter a sua precisão. A necessidade de um procedimento complexo deriva da estrutura da interface electrónica do instrumento. Estes módulos são dependentes da frequência e exigem frequentes calibrações para corrigir os erros que advêm desta dependência e os erros de desvio e de ganho. Os sistemas de medida de impedâncias disponíveis no mercado são ou de custo reduzido, mas de alcance muito limitado em termos de frequências, ou dispendiosos e precisos. A *Agilent Technologies* é uma das empresas de ponta para sistemas dispendiosos. O seu sistema mais simples, com alcance no domínio da frequência entre 40 Hz e 110 MHz, usa uma ponte auto compensada com um erro relativo de 0,08 % [9]. No entanto, o seu preço que ronda os 30 000€ coloca este sistema muito acima das capacidades orçamentais de muitas empresas e institutos de investigação. Sistemas mais baratos são menos precisos e a gama de frequências onde operam é extremamente curta (dispondo por vezes de menos de dez valores fixos de frequência à escolha do utilizador).

A tendência mais recente em instrumentação e medida é baseada na utilização de conversores analógico digitais (ADCs – *Analog to Digital Converters*), graças ao seu

notável progresso, nos últimos anos, em termos de resolução e frequência de amostragem. Os actuais conversores analógico digitais são mais baratos, mais rápidos e melhores devido aos grandes investimentos levados a cabo pela indústria da electrónica de consumo. Depois da digitalização é possível implementar algoritmos em processadores digitais de sinal que, até há poucos anos, estavam limitados pelas capacidades de cálculo dos computadores pessoais. Novamente, desenvolvimentos recentes nesta área tornaram os processadores digitais de sinal mais baratos, mais rápidos, com maior poder de processamento e com mais capacidades: portas de entrada e saída, memória, ADCs e conversores digitais analógicos (DACs – *Digital to Analog Converters*). Esta combinação está a provocar uma revolução na instrumentação e medida que está a desenvolver instrumentos mais baratos e versáteis. A base desta evolução são os algoritmos de processamento de sinal. Uma grande variedade de algoritmos no domínio do tempo, da frequência, no domínio misto do tempo e da frequência e de correcção, estão disponíveis para implementação em dispositivos baseados em processadores digitais de sinal [4], [5], [10], [11]. Entre estes, os algoritmos de optimização usando o critério dos mínimos quadrados, são robustos e frequentemente usados em muitos campos da instrumentação e medida, incluindo medidas de impedância.

Uma maneira de aumentar o desempenho dos medidores de impedância é reduzir a quantidade de componentes da electrónica analógica afim de reduzir a dependência do instrumento em relação às diferentes variações da frequência e da influência do ruído, da temperatura, etc..., é melhorar os algoritmos de processamento de sinal [12].

Neste trabalho é apresentado um método original de medição de impedâncias baseado num circuito eléctrico simples que associa dois conversores analógico digitais

associados a um computador pessoal, permitindo a utilização de um novo algoritmo de processamento de sinal.

Neste contexto, foram concebidas técnicas inovadoras com o objectivo de melhorar o desempenho dos algoritmos de processamento de sinal e, por consequência, dos instrumentos digitais que os incluam. Essas técnicas permitem dispensar o conhecimento exacto da frequência a que é feita a medida e reduzir substancialmente o tempo da medida.

Assim, neste trabalho, estuda-se um conjunto de algoritmos numéricos para a adaptação de sinusóides a um conjunto de dados adquiridos por um canal de medida e por dois canais de medida [13-18].

Para um canal de medida estudam-se os métodos de adaptação de sinusóides, que consistem na procura dos parâmetros da sinusóide que melhor se adapta, segundo o critério dos mínimos quadrados, a um conjunto de dados adquiridos por um conversor ADC. O primeiro método tem por objectivo determinar a amplitude, a fase e a componente contínua de um sinal sinusoidal num só passo (sem iterações), pressupondo o conhecimento prévio da frequência. Este método é tradicionalmente designado por método de três parâmetros. O segundo método aplicado a um canal é o método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros, onde uma primeira estimativa da frequência permite uma estimativa inicial da amplitude, da fase e da componente contínua da sinusóide. Ao contrário do método de três parâmetros, este método permite estimar o valor da frequência [19], [20].

A existência de dois canais de medida para dois sinais sinusoidais, no caso da medição de uma amostra de tensão e de uma amostra de corrente para a determinação de uma impedância, implica a determinação dos parâmetros de duas sinusóides. Neste caso, pode-se aplicar o método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros a cada

um dos conjuntos de amostras adquiridas nos dois canais de medida (método designado por método de 4+4), ou aplicar o método de quatro parâmetros a um dos canais de medida e aplicar o método de três parâmetros ao outro canal de medida (designando-se neste caso por método de 4+3). No entanto, estes métodos não usam as amostras dos dois canais para estimar a frequência comum. Para ter em conta esta situação introduz-se o método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros onde se estimam os parâmetros de duas sinusóides de igual frequência, entrando em conta com as amostras adquiridas nos dois canais de medida. Os sete parâmetros são: duas amplitudes, duas fases, duas componentes contínuas e a frequência comum aos dois sinais.

As contribuições originais deste trabalho consistem na introdução de um novo método para a determinação das amplitudes, componentes contínuas e diferença de fases entre dois sinais sinusoidais. Este método aqui denominado como método de adaptação de elipses dispensa a estimativa da frequência [18].

No Capítulo II estudam-se os algoritmos de adaptação de sinusóides de três, quatro, 4+4, 4+3 e sete parâmetros. Analisa-se o desempenho destes algoritmos em relação ao número de bits do ADC, à frequência do sinal e ao ruído aditivo do sinal.

No Capítulo III procede-se à medida de impedâncias, pelo método do amperímetro – voltímetro, melhorada pela utilização de conversores analógico digitais e pela aplicação de algoritmos de adaptação de sinusóides descritos no Capítulo II.

No Capítulo IV apresenta-se um novo algoritmo, não iterativo, designado por método de adaptação de elipses [18], [20] e [21], para determinar as amplitudes e a diferença de fase entre duas sinusóides sem recorrer à estimativa da frequência.

No Capítulo V é efectuada a aplicação do algoritmo de adaptação de elipses para a medição de impedâncias nas mesmas condições experimentais descritas no Capítulo

III. Procede-se por fim à comparação entre o desempenho do algoritmo de 7 parâmetros e o algoritmo de adaptação de elipses.

O Capítulo VI inclui as conclusões sobre o trabalho desenvolvido e perspectiva futuras evoluções sobre os assuntos tratados [18-22].

Referências

- [1] Henry P. Hall, “How electronics changed impedance measurement”, *IMTC 2004 - Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Como, Itália, vol. 1, pp. 2-8, Maio 2004.
- [2] A. Serra, “Sistemas de Medida”, AEIST 1999.
- [3] S. S. Awad, N. Narasimhamurti e H. S Ward, “Analysis, design and implementation of an AC bridge for impedance measurements”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 46, n. 6, pp. 894-899, Dezembro 1994.
- [4] H. Schollmeyer, “A digital AC bridge as an impedance to frequency converter”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 34 n. 3, pp. 389-392, Setembro 1985.
- [5] L. Angrisani, A. Bacciagalupi e A. Pietrosanto, “A digital signal processing instrument for impedance measurement”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 45, n. 6, pp. 930-934, Dezembro 1996.
- [6] J. Kaczmarek, R. Rybski e D. Ucisnski, “A recursive DSP approach to impedance measurements”, *IMEKO TC4 International Symposium – Proceeding*, Nápoles, Itália, pp. 671-675, Setembro 1998.
- [7] W. Q. Yang, “A self-balancing circuit to measure capacitance and loss conductance for industrial transducer applications”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 45, n. 6, pp. 955-958, Dezembro 1996.
- [8] M. Fonseca da Silva, “Sistema Automático de Medida de Impedâncias”, Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Outubro de 2002.
- [9] Agilent 4294A Precision Impedance Analyzer, Data Sheet, disponível em www.agilent.com Janeiro 2003.
- [10] L. Angrisani e L. Ferrigno, “Reducing the uncertainty in real-time impedance measurements”, *Measurement*, vol. 30, n. 4, pp. 307-315, Dezembro 2001.
- [11] Tomáš Radil, Pedro M. Ramos e A. Cruz. Serra, “DSP based portable impedance measurement instrument using sine-fitting algorithms”, *IEEE IMTC 2005 - Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Ottawa, Canadá, vol. 2, pp. 1018-1022, Maio 2005.
- [12] J. Augustyn, “A comparative evaluation of some LMS-based algorithms for calculating of impedance components in the sampling sensor instrument”, *XVII IMEKO World Congress*, Dubrovnik, Croácia, pp. 778-782, Junho 2003.
- [13] MATLAB Manual, The MathWorks, Inc.

- [14] M. Fonseca da Silva, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameter sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [15] Pedro Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [16] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz. Serra, “Improving sine-fitting algorithms for amplitude and phase measurements”, *XVII IMEKO World Congress*, Dubrovnik, Croácia, pp. 614-619, Junho 2003.
- [17] Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “Tailored multi-harmonic signals for impedance measurements with waveform fitting algorithms”, *IEEE International Conference on Signals, Systems, Devices-SSD*, Sousse, Tunísia, vol. 4, Março 2005.
- [18] Mouhaydine Tlemçani, Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “Impedance Measurements using Analog to Digital Converters and Ellipse Fitting Signal Processing Algorithms”. *6th Conference on Telecommunications Conftele2007*, Peniche, Portugal, Maio 2007.
- [19] J. Shoukens, R. Pintelon e H. Van Hamme, “The interpolated Fast Fourier Transform: A comparative study”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, n. 2, pp. 226-232, Abril 1992.
- [20] T. Grandke, “Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, n. 32, pp. 350-355, Junho 1983.
- [21] Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos, Mouhaydine Tlemçani e A. Cruz Serra, “Analysis of a non-iterative algorithm for the amplitude and phase difference estimation of two acquired sinewaves”, *XVIII IMEKO World Congress*, Rio de Janeiro, Brasil, Setembro 2006.
- [22] Pedro M. Ramos, Fernando M. Janeiro, Mouhaydine Tlemçani e A. Cruz Serra, “Implementation of a DSP Based Impedance Measurement Instrument Using ellipse Fitting Algorithms”, *15th IMEKO TC4 Symposium on Novelty in Electrical Measurements and Instrumentation*, Iasi, Roménia, Setembro 2007.

II. Método de adaptação de sinusóides

2.1 Introdução

Um método comum para determinar a resposta em frequência de um sistema linear, consiste na variação da frequência de entrada de um sinal sinusoidal, medindo a relação entre as amplitudes do sinal de entrada e de saída e a diferença de fase entre os dois sinais [1]. Para a medida de impedâncias a diferentes frequências, é necessário medir as mesmas relações. O recurso a sistemas de aquisição baseados em computadores pessoais permite a utilização de algoritmos numéricos de processamento de sinal que melhoram a exactidão e a precisão das medidas. Neste capítulo, estudam-se um conjunto de algoritmos numéricos para a adaptação de sinusóides a um conjunto de dados adquiridos por um canal de medida ou por dois canais de medida [2].

Para um canal de medida estudam-se os métodos de adaptação de sinusóides, que consistem na procura dos parâmetros da sinusóide que melhor se adapta, segundo o critério dos mínimos quadrados, a um conjunto de dados adquiridos por um conversor ADC. O primeiro método consiste em determinar a amplitude, a fase e a componente contínua de um sinal sinusoidal num só passo (ie., sem iterações), pressupondo o conhecimento prévio da frequência. Este método é tradicionalmente designado por método de três parâmetros. Na maioria das aplicações, a frequência do sinal não é conhecida com exactidão suficiente e tem que ser estimada. Para tal pode utilizar-se a FFT (*Fast Fourier Transform*). No entanto, para uma melhor estimativa da frequência do sinal, a FFT requer a amostragem de um número inteiro de períodos do sinal. Para ultrapassar esta limitação utiliza-se a IpDFT (*Interpolated Discrete Fourier Transform*) [3], Apêndice [A].

O segundo método aplicado a um só canal é o método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros, onde uma primeira estimativa da frequência permite uma estimativa inicial da amplitude, da fase e da componente contínua da sinusóide. Não sendo linear a relação entre os parâmetros do sinal, é efectuada uma linearização através de um desenvolvimento em série de Taylor e, iterativamente, corrige-se o valor da frequência. Ao contrário do método de três parâmetros, este método permite estimar o valor da frequência.

A existência de dois canais de medida que adquirem dois sinais sinusoidais, para a medição de impedâncias – um sinal correspondente à tensão aos terminais da impedância e outro proporcional à corrente na impedância – implica a determinação dos parâmetros de duas sinusóides. Neste caso, pode-se aplicar o método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros [4] a cada um dos conjuntos de amostras adquiridas nos dois canais de medida (método designado por método de 4+4), ou aplicar o método de quatro parâmetros a um dos canais de medida e aplicar o método de três parâmetros ao outro canal de medida (designando-se neste caso por método de 4+3). No entanto, estes métodos não usam as amostras dos dois canais para estimar a frequência comum. No método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros [5] estimam-se os parâmetros de duas sinusóides de igual frequência, entrando em conta com as amostras adquiridas nos dois canais de medida. Os sete parâmetros são: duas amplitudes, duas fases, duas componentes contínuas e a frequência comum aos dois sinais. Nas secções seguintes analisam-se em detalhe estes algoritmos.

2.2 Método de adaptação de sinusóides de três parâmetros

Nesta secção apresenta-se o estudo do método de adaptação de sinusóides de três parâmetros, como descrito em [2], aplicado a um conjunto de amostras adquiridas através de um conversor analógico digital.

Considera-se um sinal sinusoidal descrito por

$$u(t) = D \cos(2\pi ft + \varphi) + C, \quad (1.1)$$

em que D é a amplitude da sinusóide, C é a componente contínua do sinal, φ é a fase e f é a frequência do sinal.

O sinal sinusoidal (1.1) pode também ser escrito sob a forma

$$u(t) = A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft) + C, \quad (1.2)$$

com

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (1.3)$$

e

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1} \left[-\frac{B}{A} \right] & , \text{ se } A \geq 0 \\ \tan^{-1} \left[-\frac{B}{A} \right] + \pi & , \text{ se } A < 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

O sinal de entrada, cuja frequência f é conhecida, é digitalizado com uma frequência de amostragem f_s nos instantes $t_1, \dots, t_k, \dots, t_N$, correspondentes a N amostras $u_1, \dots, u_k, \dots, u_N$ que constituem o vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

A escolha adequada da frequência de amostragem f_s permite evitar uma amostragem coerente, isto é a repetição das amostras ao longo dos períodos do sinal adquirido. Esta situação acontece quando a frequência de amostragem é um múltiplo inteiro da frequência do sinal de entrada ou seja $f_s = n f$, sendo n um número inteiro.

Na Figura 2.1 apresenta-se um exemplo de um sinal adquirido com um intervalo de amostragem de $\Delta t_s = 1/f_s = t_k - t_{k-1} = 41\mu s$, amplitude $D = 1V$, frequência de 1000Hz e uma fase inicial de 80° .

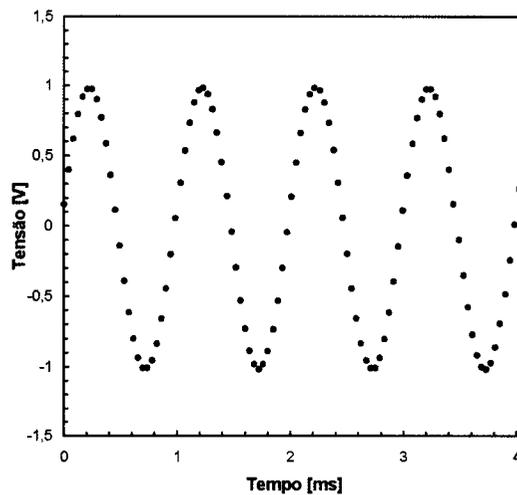


Figura 2.1 – Representação gráfica de um sinal sinusoidal com uma frequência de 1 kHz, resultante de 100 amostras adquiridas com um intervalo de amostragem $\Delta t_s = 41\mu s$.

No algoritmo de três parâmetros, após a recolha das N amostras do sinal de entrada, determinam-se os parâmetros \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , elementos do vector

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

que definem, nos instantes

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

a sinusóide $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{u}_k = \hat{A} \cos(2\pi f t_k) + \hat{B} \sin(2\pi f t_k) + \hat{C}, \quad (1.8)$$

de modo a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos

$$\mathbf{r}^T \mathbf{r} = \sum_{k=1}^N r_k^2. \quad (1.9)$$

Os resíduos r_k são os elementos do vector \mathbf{r} definidos por

$$r_k = u_k - \hat{u}_k. \quad (1.10)$$

A relação entre a sinusóide, descrita em (1.8), e os parâmetros a estimar é linear.

Neste caso, a relação (1.8) pode ser escrita sob a forma vectorial

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}, \quad (1.11)$$

em que a matriz \mathbf{D} é

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f t_1) & \sin(2\pi f t_1) & 1 \\ \cos(2\pi f t_2) & \sin(2\pi f t_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(2\pi f t_N) & \sin(2\pi f t_N) & 1 \end{bmatrix} = [\cos(2\pi f t) \quad \sin(2\pi f t) \quad \mathbf{1}]. \quad (1.12)$$

Atendendo a (1.10) e (1.11), o vector dos resíduos \mathbf{r} é

$$\mathbf{r} = (\mathbf{u} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{u} - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}). \quad (1.13)$$

Define-se \mathbf{D}^\dagger como a matriz pseudo inversa de \mathbf{D}

$$\mathbf{D}^\dagger = (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T. \quad (1.14)$$

A solução que minimiza (1.13) é o vector $\hat{\mathbf{x}}$ dos parâmetros estimados que se obtém anulando o gradiente $\nabla(\mathbf{r}^T \mathbf{r})$.

Este vector é determinado por

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^\dagger \mathbf{u}. \quad (1.15)$$

O erro quadrático é dado por

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k^2}. \quad (1.16)$$

Este parâmetro é o valor eficaz dos resíduos e pode ser utilizado como medida da exactidão do método, quando aplicado à estimativa dos parâmetros duma sinusóide pura digitalizada por um conversor ideal.

2.3 Método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros

No caso em que a frequência do sinal é desconhecida, utiliza-se o algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros. Este estima a amplitude, a fase, a componente contínua e a frequência do sinal. Neste caso

$$\hat{u}(t) = \hat{A} \cos(2\pi \hat{f} t) + \hat{B} \sin(2\pi \hat{f} t) + \hat{C}. \quad (1.17)$$

De (1.17) constata-se que a relação entre a função estimada e a frequência não é linear. Uma abordagem comum neste tipo de problemas passa por uma linearização da função estimada em relação à frequência, através do desenvolvimento em série de Taylor de primeira ordem.

Para uma função $u(f)$, numa vizinhança de f_0 , o desenvolvimento em série de Taylor de primeira ordem é

$$u(f_0 + \Delta f) \approx u(f_0) + \Delta f \left. \frac{\partial u}{\partial f} \right|_{f=f_0} \quad (1.18)$$

Aplicando (1.18) a (1.17) e efectuando a substituição

$$\omega = 2\pi f, \quad (1.19)$$

obtem-se

$$u(t, \omega_0 + \Delta\omega) \simeq A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + C + [-At \sin(\omega_0 t) + Bt \cos(\omega_0 t)] \Delta\omega. \quad (1.20)$$

Mesmo com a linearização, o termo que multiplica $\Delta\omega$ continua a depender de A , B e ω_0 . Assim não é possível desacoplar os termos A , B , C e $\Delta\omega$ de (1.20). Uma forma de ultrapassar este problema é o uso de um método iterativo. Assumindo que os coeficientes $[-At \sin(\omega_0 t) + Bt \cos(\omega_0 t)]$ são independentes das variáveis A e B e separando os coeficientes de cada variável, a iteração de ordem i pode ser escrita como

$$\hat{\mathbf{u}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos(\omega^{(i-1)} \mathbf{t}) & \sin(\omega^{(i-1)} \mathbf{t}) & 1 & -A^{(i-1)} \mathbf{t} \sin(\omega^{(i-1)} \mathbf{t}) + B^{(i-1)} \mathbf{t} \cos(\omega^{(i-1)} \mathbf{t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}^{(i)} \\ \hat{B}^{(i)} \\ \hat{C}^{(i)} \\ \Delta\hat{\omega}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

sendo o índice (i) referente à iteração actual e o índice $(i-1)$ referente à iteração anterior.

Assim, a matriz $\mathbf{D}^{(i)}$ da iteração (i) de dimensão $[N \times 4]$ é determinada por

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_1) & \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_1) & 1 & -A^{(i-1)} t_1 \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_1) + B^{(i-1)} t_1 \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_1) \\ \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_2) & \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_2) & 1 & -A^{(i-1)} t_2 \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_2) + B^{(i-1)} t_2 \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_N) & \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_N) & 1 & -A^{(i-1)} t_N \sin(\hat{\omega}^{(i-1)} t_N) + B^{(i-1)} t_N \cos(\hat{\omega}^{(i-1)} t_N) \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

O vector solução para a iteração i ,

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{A}^{(i)} \\ \hat{B}^{(i)} \\ \hat{C}^{(i)} \\ \Delta\hat{\omega}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

é determinado por

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = (\mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{D}^{(i)})^{-1} (\mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{u}) = [\mathbf{D}^{(i)}]^\dagger \mathbf{u}. \quad (1.24)$$

Na iteração i os resultados $\hat{A}^{(i-1)}$, $\hat{B}^{(i-1)}$ e $\hat{\omega}^{(i-1)}$ da iteração anterior são utilizados para determinar $\mathbf{D}^{(i)}$ e $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$. De $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ são retiradas as estimativas $\hat{A}^{(i)}$, $\hat{B}^{(i)}$, $\hat{C}^{(i)}$ e $\Delta\hat{\omega}^{(i)}$. A frequência angular para a iteração seguinte é ajustada por

$$\hat{\omega}^{(i)} = \hat{\omega}^{(i-1)} + \Delta\hat{\omega}^{(i)}. \quad (1.25)$$

O processo iterativo acaba quando a correção relativa da frequência angular é inferior a um determinado limite, isto é, quando

$$\left| \frac{\Delta\omega^{(i)}}{\omega^{(i)}} \right| < \varepsilon. \quad (1.26)$$

A amplitude e a fase são calculadas usando (1.3) e (1.4). As componentes do vector $\hat{\mathbf{u}}$ são calculadas através da relação (1.17). O vector dos resíduos \mathbf{r} de componentes r_k e o erro quadrático eficaz são determinados como em (1.10) e (1.16).

2.4 Método de adaptação de sinusóides de 4+4 parâmetros

Nos algoritmos de adaptação de sinusóides de três e quatro parâmetros, os parâmetros estimados da sinusóide são calculados tendo em conta o conjunto de amostras de um canal. Numa situação em que existam dois canais de medida, como no caso da medição de uma impedância, em que é preciso determinar um sinal correspondente à tensão de uma impedância e um sinal proporcional à corrente da impedância, é possível aplicar individualmente à cada canal de medida o método de quatro parâmetros. Sendo o processo numérico iterativo, apesar de a frequência ser a mesma, ao aplicar o método de 4+4, estimam-se duas frequências diferentes, que correspondem a cada canal.

2.5 Método de adaptação de sinusóides de 4+3 parâmetros

No algoritmo de 4+4 parâmetros estima-se uma frequência para cada canal. Uma forma de estimar a mesma frequência é aplicar o algoritmo de quatro parâmetros a um

canal e com a frequência resultante deste método, aplicar o algoritmo de três parâmetros ao outro canal. Como a incerteza experimental da frequência estimada depende da amplitude do sinal, uma forma de melhorar as estimativas dos parâmetros é aplicar o método de quatro parâmetros ao conjunto de amostras de maior amplitude. A frequência resultante do método de quatro parâmetros é utilizada no método de três parâmetros aplicado ao outro canal (de menor amplitude). Desta forma, garante-se que a estimativa dos parâmetros das sinusóides é feita com a mesma frequência.

2.6 Método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros

Os métodos de adaptação de sinusóides de 4+4 e de 4+3, descritos sucintamente nas secções anteriores, permitem a determinação dos parâmetros de dois sinais sinusoidais adquiridos em dois canais de medida. No entanto, o algoritmo de 4+4 não tem em conta a restrição da existência de uma frequência comum aos dois sinais. E o algoritmo de 4+3 leva em conta só os dados de um canal – o de maior amplitude. Levando em conta a restrição de uma só frequência e os dados dos dois canais de medida, pode-se reduzir o erro sobre a estimativa da frequência e melhorar a exactidão da medida. O método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros recorre às amostras dos dois canais em conjunto para determinar a frequência, comum aos dois sinais, e os seis parâmetros restantes (as duas amplitudes, as duas fases e as duas componentes contínuas).

Considera-se um conjunto de amostras $u_{1,1}, \dots, u_{1,k}, \dots, u_{1,N}$, adquiridas através do primeiro canal e um conjunto $u_{2,1}, \dots, u_{2,k}, \dots, u_{2,N}$ de amostras adquiridas através do segundo canal, em que N é o número de amostras adquiridas em cada canal. Cada

amostra é adquirida no instante $t_{p,k}$ em que $p = 1, 2$ é o número do canal de medida e $k = 1, \dots, N$ é o número da amostra¹.

O procedimento é semelhante ao algoritmo dos quatro parâmetros. Difere, no entanto, na construção da matriz $\mathbf{D}^{(i)}$ usada na iteração i . Esta tem que reflectir as amostras dos dois canais de aquisição e a sua contribuição para a estimativa da correcção da frequência.

A matriz $\mathbf{D}^{(i)}$ é determinada por

$$\mathbf{D}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^{(i)} & \mathbf{R}_1^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{(i)} & \mathbf{Q}_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

em que

$$\mathbf{Q}_p^{(i)} = \begin{bmatrix} w(\omega^{(i-1)}, t_{p,1}) & g(\omega^{(i-1)}, t_{p,1}) & 1 \\ w(\omega^{(i-1)}, t_{p,2}) & g(\omega^{(i-1)}, t_{p,2}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w(\omega^{(i-1)}, t_{p,N}) & g(\omega^{(i-1)}, t_{p,N}) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

e

$$\mathbf{R}_p^{(i)} = \begin{bmatrix} h(A_p^{(i-1)}, B_p^{(i-1)}, \omega^{(i-1)}, t_{p,1}) \\ h(A_p^{(i-1)}, B_p^{(i-1)}, \omega^{(i-1)}, t_{p,2}) \\ \vdots \\ h(A_p^{(i-1)}, B_p^{(i-1)}, \omega^{(i-1)}, t_{p,N}) \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

As funções $w(\omega, t)$, $g(\omega, t)$ e $h(A, B, \omega, t)$ são definidas como

$$w(\omega, t) = \cos(\omega t), \quad (1.30)$$

$$g(\omega, t) = \sin(\omega t), \quad (1.31)$$

e

¹ No caso de ocorrer saturação de amplitude no canal de aquisição do ADC, o número de amostras poderá não ser igual para cada canal de medida e é possível adaptar o método para esta situação.

$$h(A, B, \omega, t) = -At \sin(\omega t) + Bt \cos(\omega t). \quad (1.32)$$

A matriz $\mathbf{D}^{(i)}$ é de dimensão $[2N \times 7]$ e tem pelo menos $6N$ elementos nulos.

O vector composto das amostras adquiridas \mathbf{u} , tem $2N$ linhas

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,N} & u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,N} \end{bmatrix}^T. \quad (1.33)$$

O vector solução, $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$, é calculado por

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{D}^{(i)} \right)^{-1} \left(\mathbf{D}^{(i)T} \mathbf{u} \right) = \left[\mathbf{D}^{(i)} \right]^\dagger \mathbf{u}, \quad (1.34)$$

com

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1^{(i)} & \hat{B}_1^{(i)} & \hat{C}_1^{(i)} & \Delta\omega^{(i)} & \hat{A}_2^{(i)} & \hat{B}_2^{(i)} & \hat{C}_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

em que $\hat{A}_1^{(i)}$, $\hat{B}_1^{(i)}$ e $\hat{C}_1^{(i)}$ são os parâmetros estimados do canal 1 e $\hat{A}_2^{(i)}$, $\hat{B}_2^{(i)}$ e $\hat{C}_2^{(i)}$ são os parâmetros estimados do canal 2 todos na iteração i . O coeficiente $\Delta\omega^{(i)}$ corresponde à correcção da frequência angular comum.

O erro quadrático é

$$\varepsilon_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[u_{1,k} - \hat{A}_1 \cos(2\pi \hat{f}_{1,k}) - \hat{B}_1 \sin(2\pi \hat{f}_{1,k}) - \hat{C}_1 \right]^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[u_{2,k} - \hat{A}_2 \cos(2\pi \hat{f}_{2,k}) - \hat{B}_2 \sin(2\pi \hat{f}_{2,k}) - \hat{C}_2 \right]^2}. \quad (1.36)$$

O critério de convergência é atingido quando a correcção relativa da frequência angular é inferior a um determinado limite tal como descrito em (1.26). À semelhança dos métodos de três e quatro parâmetros, o termo ε_{RMS} calculado em (1.36) representa a soma dos valores eficazes dos resíduos devidos às diferenças entre os sinais adquiridos e os sinais reconstruídos a partir dos parâmetros estimados pelo algoritmo.

2.7 Simulação numérica

Nesta secção são apresentados os resultados de simulações numéricas dos algoritmos de adaptação de sinusóides. Analisa-se o desempenho dos algoritmos em função da frequência inicial e da fase dos sinais e a dependência do desvio padrão da fase estimada em relação às amplitudes dos sinais. Os sinais considerados são sinusóides, sem componentes contínuas e com uma frequência de 1 kHz. Salvo outra indicação, cada aquisição contém 122 amostras por canal, adquiridas com um intervalo de amostragem de $\Delta t_s = 41\mu\text{s}$ (estes valores correspondem a cinco períodos), por um ADC ideal de alcance $\pm 1\text{ V}$ ¹. Para simular as condições reais de um processo de medidas experimentais desenvolveu-se um programa de simulação em ambiente Matlab que permite considerar todos os parâmetros atrás referidos e simular a digitalização dos sinais, com ADCs de diferentes números de bits, onde há uma presença permanente de ruído. Aos dois sinais é somado ruído gaussiano com valor médio nulo.

2.7.1 Método de três parâmetros

O algoritmo de adaptação de sinusóides de três parâmetros pressupõe o conhecimento prévio da frequência do sinal de entrada. A existência de um erro na frequência conduz a erro sobre na estimativa dos parâmetros do sinal e o resultado é uma sinusóide diferente do sinal de entrada. Na Figura 2.2 apresenta-se uma situação em que a sinusóide é estimada pelo método de três parâmetros, usando a frequência exacta do sinal amostrado (1 kHz) e outra em que a frequência utilizada no método difere 10% da frequência do sinal amostrado (900 Hz).

¹ Estes valores correspondem a uma frequência de amostragem $f_s = 24,39\text{ kS/s}$ e foram escolhidos para corresponderem aos parâmetros de uma placa de aquisição que será usada nos resultados experimentais.

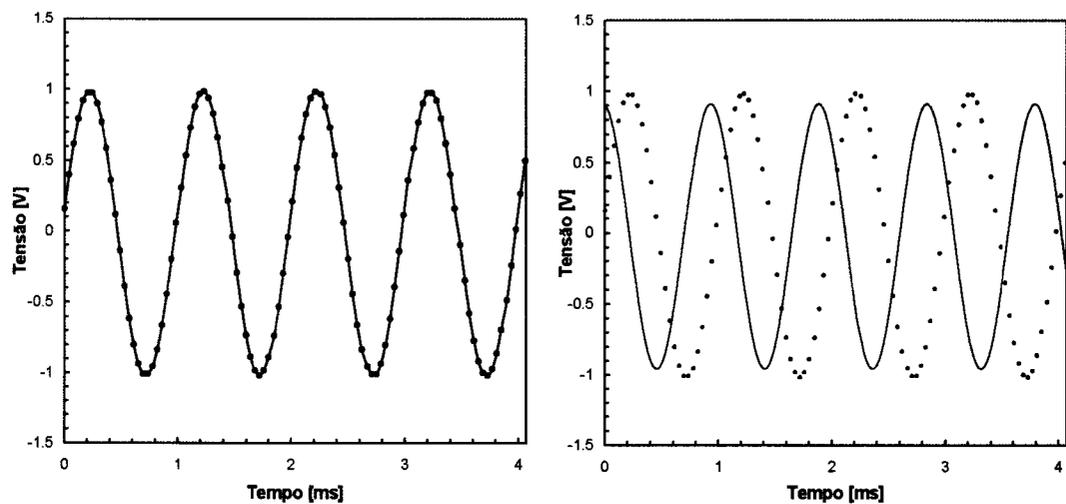


Figura 2.2 – À esquerda uma sinusóide estimada pelo método dos 3 parâmetros com a frequência igual à frequência exacta do sinal de entrada. À direita a mesma sinusóide calculada com uma frequência de 10% superior ao valor da frequência do sinal de entrada. As linha em cheio representam o sinal estimado e os pontos as amostras consideradas para o sinal adquirido.

Da Figura 2.2 constata-se uma diferença significativa entre as sinusóides determinadas pelo método dos três parâmetros a partir da frequência exacta e de uma que difere 10% da frequência exacta. O erro quadrático é uma medida desta diferença e, por consequência, da exactidão da medida. Nesta secção analisa-se a dependência do erro quadrático em relação ao erro na estimativa da frequência de entrada. Avalia-se também este erro em função do número das amostras adquiridas e analisa-se a influência do número de bit do conversor ADC, bem como do efeito do ruído gaussiano aditivo.

A Figura 2.3 e a Figura 2.4 apresentam os resultados obtidos para a dependência do erro quadrático em relação à frequência normalizada que varia numa gama de $\pm 10\%$ em relação à frequência de entrada, para um conversor ADC ideal (número de bits infinito), sem ruído gaussiano e para um conversor ADC ideal com um ruído gaussiano de valor eficaz 10 mV. O sinal considerado tem uma amplitude de 1 V.

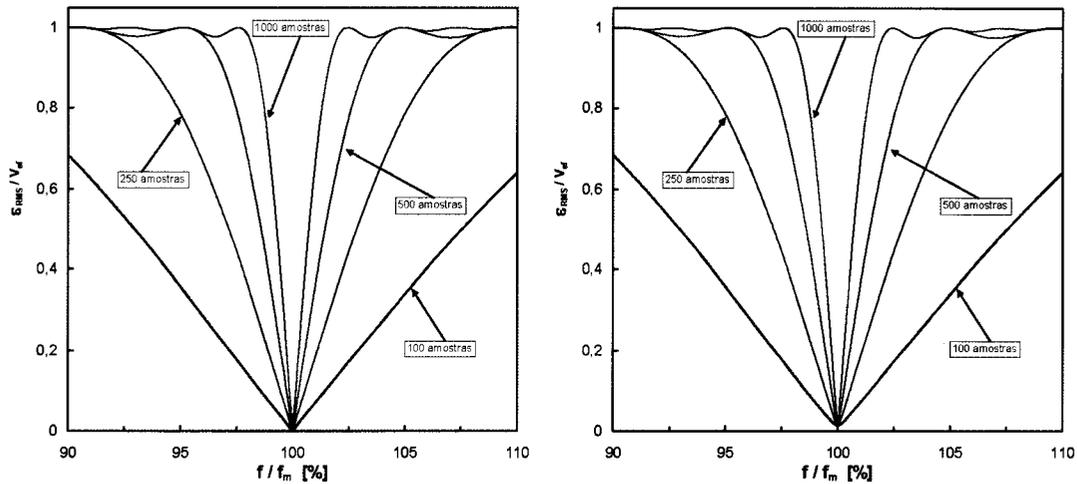


Figura 2.3 – Erro quadrático normalizado ao valor eficaz do sinal de entrada, do método de adaptação de sinusóides de três parâmetros, em função da frequência do sinal de entrada para vários números de amostras e para um conversor ADC ideal. À esquerda para um ruído de valor eficaz nulo e à direita para ruído de valor eficaz 10mV.

Da Figura 2.3 verifica-se que o erro quadrático médio é mínimo quando a frequência usada no algoritmo dos três parâmetros é igual à frequência do sinal de entrada. Para este valor, a sinusóide calculada pelo método de adaptação de sinusóides de três parâmetros é a que melhor se ajusta às amostras adquiridas. À medida que a frequência usada no algoritmo dos três parâmetros se afasta da frequência exacta, o erro quadrático aumenta.

Na ausência de ruído e para um conversor ideal este mínimo é igual a zero (Figura 2.3 à esquerda). Na presença de ruído aditivo o valor mínimo do erro quadrático é diferente de zero (em condições ideais não é igual ao valor eficaz do ruído aditivo).

Constata-se que a função que descreve a dependência do erro quadrático da frequência usada tem vários mínimos locais. O aparecimento dos mínimos locais perto da frequência exacta do sinal depende do número das amostras. Verifica-se que, no mesmo intervalo de frequência, à medida que o número das amostras aumenta, aumenta também o número dos mínimos locais. Conclui-se, assim, que o conhecimento da frequência é determinante para o desempenho do algoritmo. A aplicação da FFT ao conjunto das amostras adquiridas permite obter uma estimativa da frequência. No

entanto, quando o conjunto das amostras adquiridas não corresponde a um número inteiro de períodos, o algoritmo da FFT não é adequado para a estimativa da frequência devido ao espalhamento espectral. Esta pode ser determinada com mais exactidão através da aplicação da IpDFT ao conjunto das amostras adquiridas [3]. A utilização da IpDFT permite uma estimativa da frequência inicial com uma maior exactidão.

Na Figura 2.4 apresenta-se o erro quadrático em função da frequência, calculado para um sinal amostrado por dois ADCs de 12 e 16 bit.

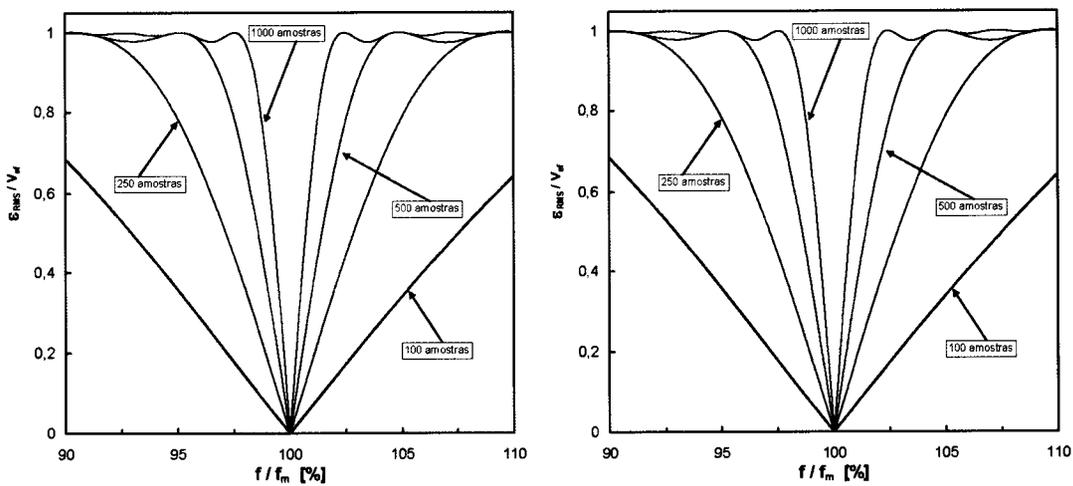


Figura 2.4 – Erro quadrático normalizado ao valor eficaz do sinal de entrada, do método de adaptação de sinusóides de três parâmetros, em função da frequência do algoritmo para vários números de amostras adquiridas e para um conversor ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita. Em ambos os casos o ruído aditivo é nulo (Após digitalização o ruído não é nulo porque tem ruído de quantificação).

Constata-se que o erro quadrático não varia significativamente com a variação do número de bit do conversor ADC entre 12 e 16.

Para o mesmo conversor ADC de 12 bit e variando o valor eficaz do ruído aditivo, constata-se uma variação no valor mínimo do erro quadrático em função da frequência usada (Figura 2.5).

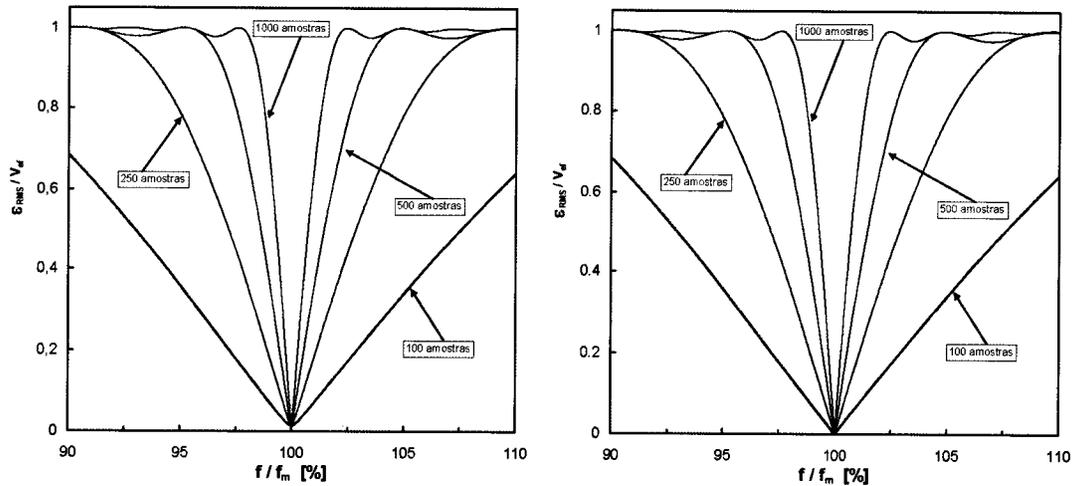


Figura 2.5 – Erro quadrático normalizado ao valor eficaz do sinal de entrada, do método de adaptação de sinusóides de três parâmetros, em função da frequência do algoritmo para diferentes números de amostras adquiridas e para um conversor ADC de 12 bit com ruído aditivo de 10 mV à esquerda e 0,1 mV à direita.

2.7.2 Método de quatro parâmetros

O algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros procura soluções de um sistema de equações não lineares de modo iterativo. Nesta secção estuda-se o desempenho do algoritmo em função da frequência inicial, bem como em função do ruído aditivo do sinal e do número de bit do conversor ADC.

Dos resultados da Figura 2.4 e da Figura 2.5 demonstra-se que o erro quadrático do ajuste de uma sinusóide em função da frequência, possui múltiplos mínimos locais à volta do mínimo absoluto. A convergência do processo iterativo para o mínimo absoluto depende portanto da frequência inicial. É por isso fundamental a estimativa da frequência inicial com elevada exactidão. Um algoritmo simples e exacto para estimar a frequência inicial é o algoritmo da IpDFT.

Como se disse anteriormente, o algoritmo de quatro parâmetros é um processo iterativo. A partir da estimativa inicial dos quatro parâmetros produz-se o conjunto de valores A_i , B_i , C_i e uma correcção Δf_i , a fazer à frequência na iteração seguinte. O

factor de correcção Δf_i é dependente da frequência inicial e do número de amostras adquiridas.

Na Figura 2.6 apresenta-se a análise da correcção $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ em função da frequência inicial considerada para as três iterações e para 100 amostras do sinal.

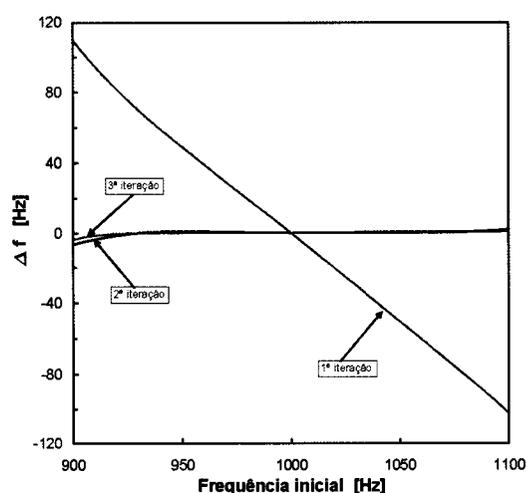


Figura 2.6 – Correção da frequência Δf em função da frequência inicial f considerando a 1ª iteração do algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros para as três primeiras iterações, com 100 amostras adquiridas de um sinal sinusoidal de 1 kHz.

Constata-se que, para a primeira iteração, a correcção Δf cresce em valor absoluto à medida que a frequência inicial se afasta da frequência exacta do sinal de entrada. Isto é, quanto mais a frequência inicial se afasta da frequência exacta, maior é a correcção em valor absoluto a efectuar. Nesta situação o algoritmo converge.

A Figura 2.7 apresenta as correcções no caso da 2ª e da 3ª iteração com ampliação vertical da Figura 2.6.

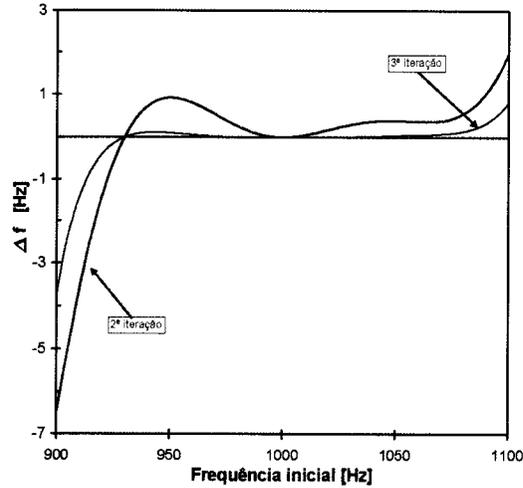


Figura 2.7 – Correção da frequência Δf em função da frequência inicial f do algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros considerando as 2ª e 3ª iterações, com 100 amostras adquiridas de um sinal sinusoidal de 1 kHz.

Na Figura 2.7 observa-se que a correção na 2ª iteração é superior, em valor absoluto, à correção na terceira iteração o que indicia um processo de convergência do algoritmo.

O factor de correção da frequência Δf depende também do número de amostras. Efectuou-se o estudo da dependência do factor de correção da frequência em função da frequência inicial para 500 amostras do sinal. Na Figura 2.8 apresenta-se a comparação entre Δf e a correção ideal para atingir a convergência com esse número de amostras na Figura. 2.6 não se apresentou a curva idêntica, já que a curva ideal coincide quase totalmente com o valor da correção para a 1ª iteração, o que à escala das figuras não permite distinguir as duas curvas.

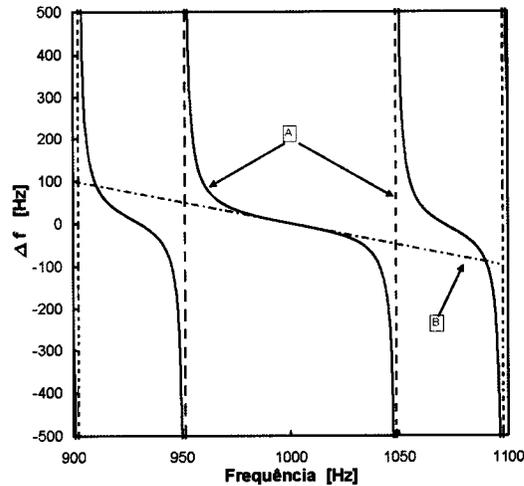


Figura 2.8 – (A) Correção da frequência Δf em função da frequência inicial f do algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros para a 1ª iteração. (B) Correção ideal para atingir a convergência. Sinal sinusoidal de 1 kHz com 500 amostras adquiridas.

Constata-se que a correção da frequência depende fortemente da estimativa inicial como do número de amostras. Essa dependência reflecte-se, no erro do algoritmo pela presença de múltiplos extremos locais à volta do mínimo absoluto. Em alguns casos o algoritmo gera correções da frequência que conduzem a situações em que os resultados das iterações “caiem” num mínimo local.

Conclui-se que a convergência do algoritmo dos 4 parâmetros não é garantida e que, devido a existência de extremos locais na função de erro, a escolha da frequência inicial é fundamental para a convergência. A localização dos extremos locais depende do número de amostras. Um maior número de amostras aumenta o número de extremos locais mínimos e máximos dentro do mesmo intervalo de frequência. No caso específico ilustrado na Figura 2.8, se a escolha da frequência inicial cair fora dos limites do intervalo de $\pm 5\%$ (estes limites correspondem aos máximos locais na Figura 2.3) da frequência do sinal, o algoritmo não converge.

A existência de ruído gaussiano aditivo e da quantificação do conversor ADC introduz uma incerteza sobre a amplitude estimada do sinal. Esta incerteza pode ser também caracterizada pelo erro quadrático. Para verificar a dependência do erro

quadrático em relação à amplitude estimada pelo método de quatro parâmetros, aplicou-se o algoritmo com uma frequência inicial estimada pela IpDFT e calculou-se o erro quadrático com um sinal reconstruído a partir de uma amplitude diferente, mantendo os restantes parâmetros calculados pelo algoritmo. Na Figura 2.9 apresenta-se a dependência do erro quadrático, normalizado ao valor eficaz da amplitude nominal D_0 em função da variação relativa da amplitude imposta $(D/D_0) \times 100\%$ e em que D é a amplitude estimada do sinal de entrada. Na Figura 2.9 Encontram-se representadas duas situações correspondentes à um ruído aditivo nulo e à um ruído aditivo de valor eficaz 10 mV.

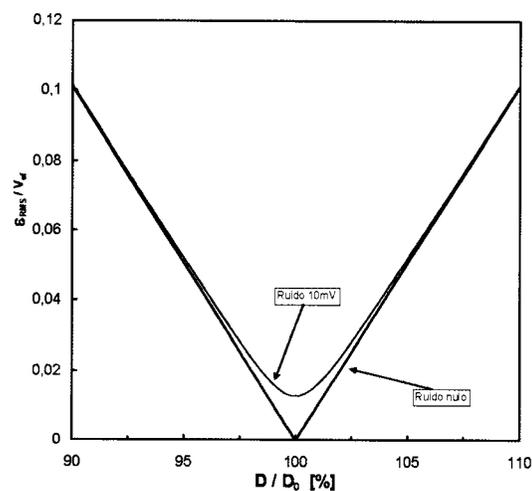


Figura 2.9 – Erro quadrático normalizado ao valor eficaz da sinusóide de entrada do algoritmo de quatro parâmetros em função da amplitude do sinal de entrada com uma fase de 100° para ruído de valor eficaz 10 mV e sem ruído aditivo.

Na Figura 2.10 apresenta-se a dependência do erro quadrático, normalizado ao valor eficaz da amplitude em função da fase estimada do sinal de entrada para um ruído aditivo nulo e um ruído aditivo de valor eficaz 10 mV.

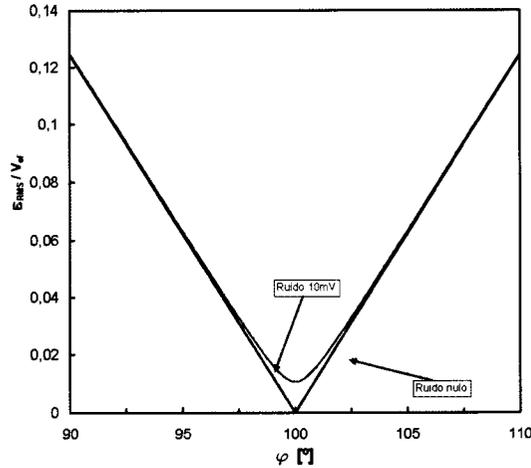


Figura 2.10 – Erro quadrático normalizado ao valor eficaz da sinusóide de entrada do algoritmo de quatro parâmetros em função da fase do sinal de entrada para ruído aditivo de valor eficaz 10 mV e sem ruído aditivo.

Da Figura 2.9 e da Figura 2.10 verifica-se que o erro quadrático aumenta à medida que a amplitude ou a fase se afastam dos seus valores exactos. O erro é mínimo quando o valor da amplitude ou da fase coincide com o valor exacto da sinusóide. Dos resultados apresentados conclui-se que o valor mínimo do erro quadrático depende do valor eficaz do ruído aditivo como se verifica no caso da variação da frequência.

A avaliação do desempenho do algoritmo em relação à frequência passa também pelo estudo do erro relativo da estimativa da frequência. Na Figura 2.11 apresenta-se o desvio padrão relativo da frequência estimada em função da amplitude do sinal com 122 amostras adquiridas por um ADC ideal¹.

¹ Considerou-se um ADC ideal e um sinal afectado por ruído aditivo de valor eficaz: 0,1 mV; 1 mV e 10 mV

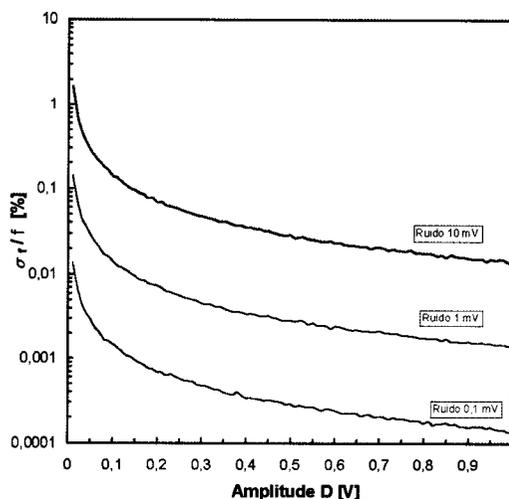


Figura 2.11 – Desvio padrão relativo da frequência estimada em função da amplitude do sinal para um conversor ADC ideal e para vários valores eficazes do ruído aditivo. Os resultados correspondem à 10000 ensaios.

Verifica-se que o desvio padrão relativo da frequência decresce à medida que a amplitude do sinal aumenta e que depende também do valor eficaz do ruído gaussiano aditivo. Constata-se, como era de esperar, que se obtém uma melhor estimativa da frequência quando o ruído é menor.

Analisou-se a dependência do desvio padrão da frequência em relação ao número de bit do conversor ADC e à amplitude do sinal de entrada. Na Figura 2.12 apresentam-se os resultados obtidos no caso de dois ADCs de 12 e 16 bit com o mesmo número de amostras por aquisição que o caso anterior.

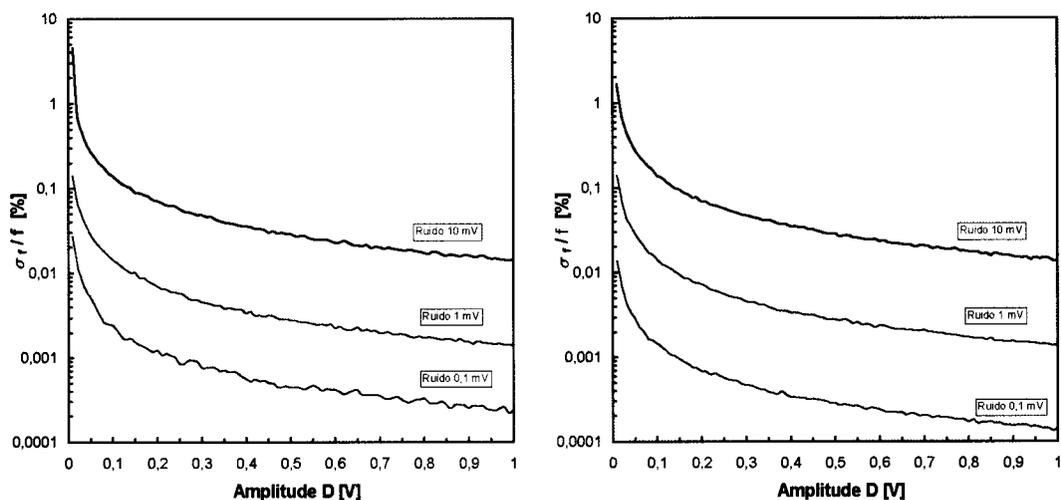


Figura 2.12 – Desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude do sinal para um conversor ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita e para vários valores eficazes do ruído aditivo. Os resultados correspondem à 10000 ensaios.

Tal como para o conversor ideal, o desvio padrão relativo da frequência decresce à medida que aumentam as amplitudes das sinusóides. Para um ruído aditivo de 10 mV não se nota qualquer diferença entre os resultados obtidos com ADCs de 12 e 16 bit. Isto é devido ao ruído gaussiano aditivo de 10 mV ser muito superior ao ruído de quantificação do ADC. No caso de um conversor de 12 bit, o passo de quantificação é de $1 \text{ LSB} = 0,5 \text{ mV}$ e, no caso de um conversor de 16 bit, $1 \text{ LSB} = 0,03 \text{ mV}$. O ruído de quantificação, considerando que o sinal tem uma distribuição uniforme dentro de cada intervalo de quantificação¹ do ADC é $1 \text{ LSB} / \sqrt{12}$ [6]. Assim, o ruído de quantificação deste conversor de 12 bit é de $144 \mu\text{V}$ e de $9 \mu\text{V}$ para o conversor de 16 bit.

2.7.3 Método de 4+4 parâmetros

Nesta secção estuda-se o desempenho do algoritmo de adaptação de sinusóides de 4+4 parâmetros. Para determinar as fases e as amplitudes de dois sinais sinusoidais, aos dois conjuntos de amostras adquiridas por dois canais de medida, aplica-se o algoritmo de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros. Foram geradas $M = 10000$

¹ O passo de quantificação é usualmente designado por LSB (*Least Significant Bit*), i.e., o valor em tensão correspondente ao bit menos significativo do conversor.

fases, em cada canal, aleatoriamente no intervalo $(-180^\circ, +180^\circ)$ com uma função de distribuição de probabilidade uniforme. Para cada conjunto de fases geradas, foram calculadas as diferenças de fase, φ_i e a diferença de fase estimada $\hat{\varphi}_i$, como o erro respectivo

$$\delta_{\varphi_i} = \varphi_i - \hat{\varphi}_i. \quad (1.37)$$

O desvio padrão desse erro é determinado por

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\varphi_i - \hat{\varphi}_i)^2}. \quad (1.38)$$

Para os restantes parâmetros foi efectuado o mesmo número M de testes e foi também calculado o valor médio de cada parâmetro e o respectivo desvio padrão. Na Figura 2.13 apresenta-se a dependência do desvio padrão do erro da diferença de fase entre os dois sinais em relação às amplitudes dos dois sinais (para três valores de D_2 com D_1 em abcissas) para ADCs de 12 e 16 bit e um ruído gaussiano aditivo de valor eficaz 0,1 mV. Os testes foram efectuados considerando 122 amostras adquiridas por canal e por ensaio.

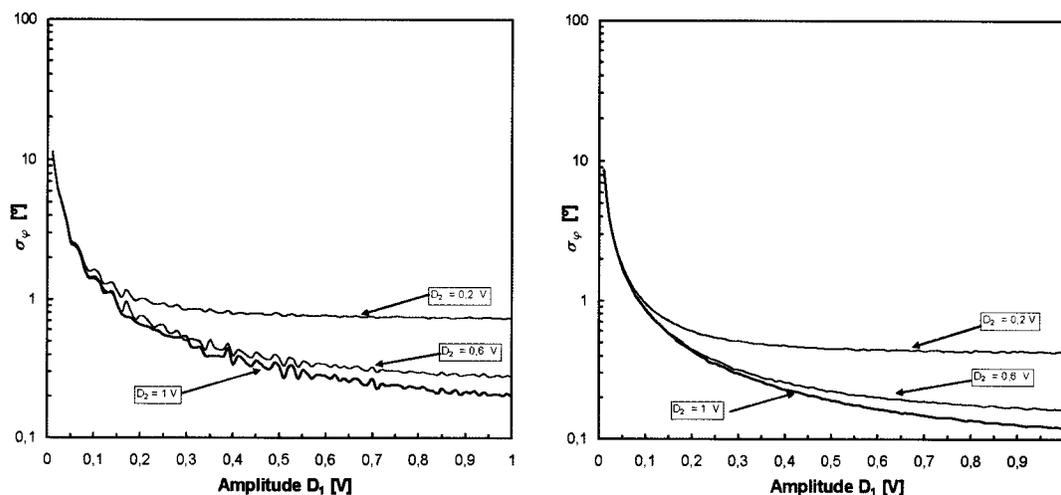


Figura 2.13 – Desvio padrão do erro da fase em função da amplitude do sinal no segundo canal para um ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita e ruído gaussiano aditivo de 0,1 mV.

O desvio padrão da fase diminui à medida que a amplitude dos sinais aumenta. Para o mesmo ruído aditivo de 0,1 mV obtém-se uma melhor estimativa da fase usando um ADC de 16 bit em vez de 12 bit. Esta diferença acentua-se à medida que aumentam as amplitudes dos sinais. Isto é devido ao aumento da relação sinal ruído e do aumento da amplitude do sinal em relação ao passo de quantificação do ADC. O valor eficaz do ruído aditivo, 0,1 mV, é da mesma ordem de grandeza que o valor do ruído de quantificação do ADC de 12 bit que é 144 μV e que é consideravelmente superior ao ruído de quantificação do ADC de 16 bit, 9 μV .

Na Figura 2.14 apresenta-se a dependência do desvio padrão do erro da diferença de fase entre os dois sinais em relação às amplitudes dos dois sinais para ADCs de 12 e 16 bit e ruído gaussiano aditivo de 10 mV.

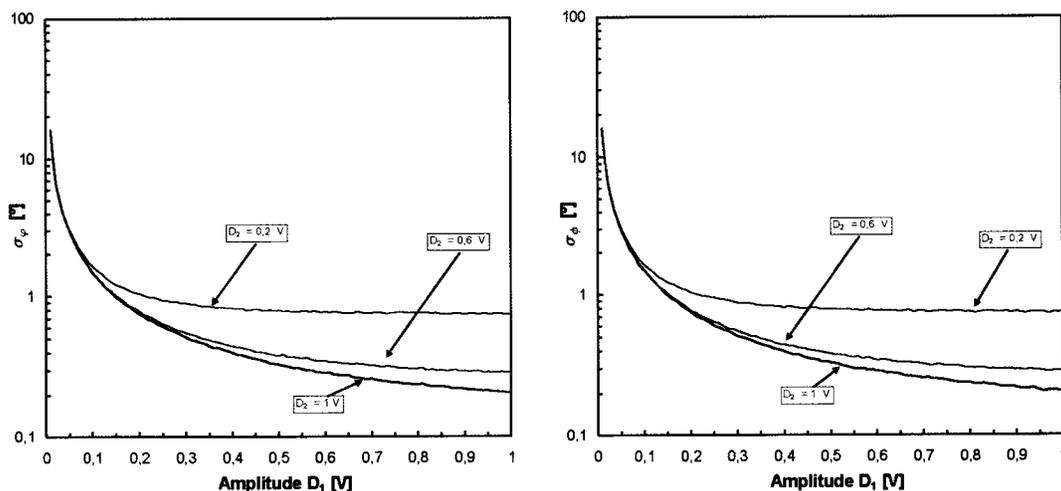


Figura 2.14 – Desvio padrão do erro da fase em função da amplitude do sinal no segundo canal para um ADC de 12 bit a esquerda e 16 bit a direita e ruído gaussiano aditivo de 10 mV.

Tal como no caso anterior, constata-se que o desvio padrão da fase diminui à medida que a amplitude dos sinais aumenta. No entanto, observa-se que, para um ruído aditivo de 10 mV, não se nota uma diferença no desvio padrão do erro da fase usando ADCs com 12 bit ou 16 bit. Isto é devido ao ruído gaussiano de 10 mV ser muito superior ao ruído de quantificação dos conversores ADCs.

2.7.4 Método de 4+3 parâmetros

Na Figura 2.15 e na Figura 2.16 apresenta-se o resultado do estudo do desempenho do algoritmo em relação à fase, variando a resolução do conversor e o valor eficaz do ruído aditivo.

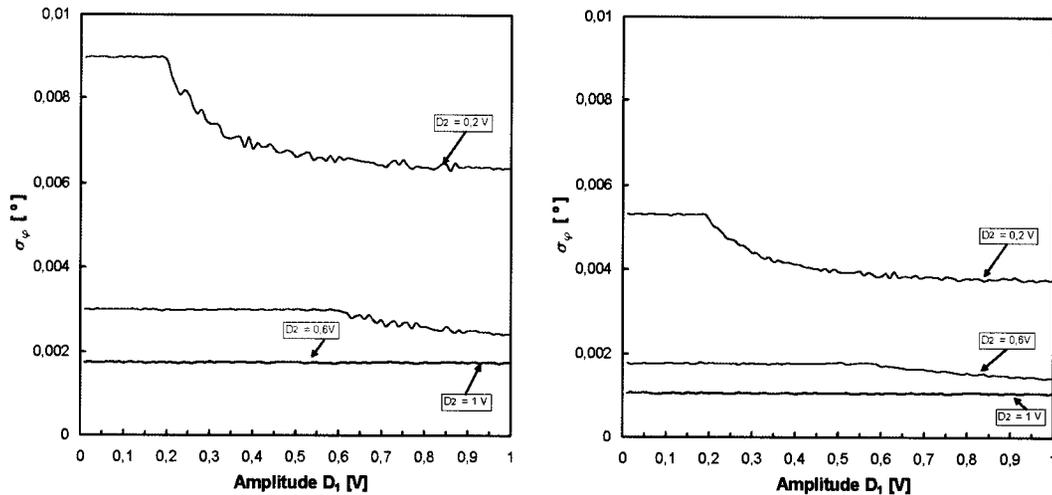


Figura 2.15 – Desvio padrão da fase em função da amplitude dos sinais para um ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita e ruído gaussiano aditivo de 0,1 mV.

É possível ver na Figura 2.15 que o desvio padrão da fase diminui à medida que a amplitude dos sinais aumenta. Esse decréscimo não é uniforme, observando-se patamares de valores quase constantes, que correspondem à situação onde a amplitude escolhida para a aplicação do método de quatro parâmetros é constante e corresponde à amplitude do segundo canal ($D_2 > D_1$), i.e. nos patamares, o algoritmo dos quatro parâmetros é aplicado ao segundo canal.

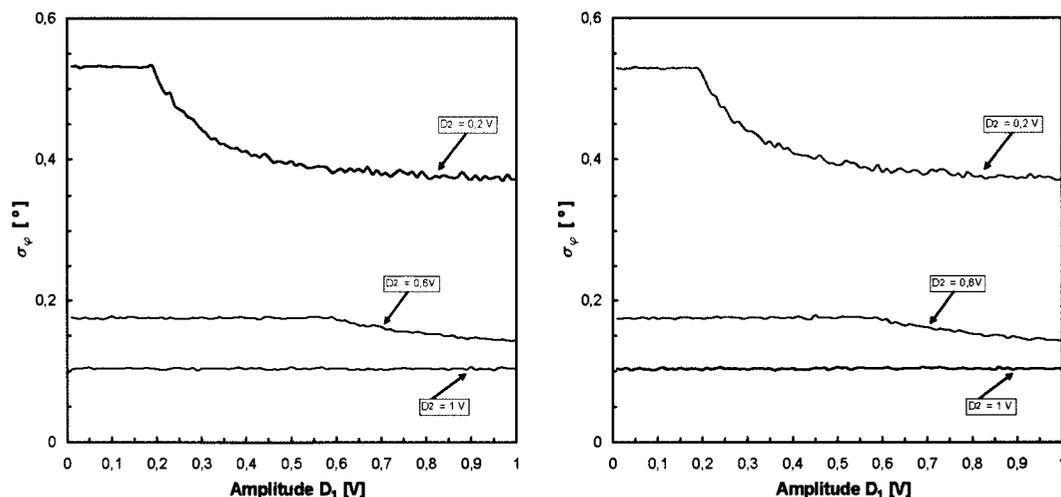


Figura 2.16 – Desvio padrão da fase em função da amplitude dos sinais para um ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita e ruído gaussiano aditivo de 10 mV.

À semelhança da Figura 2.15, os resultados da Figura 2.16 demonstram que o desvio padrão da fase diminui à medida que as amplitudes dos sinais aumentam. Observa-se que, ao contrário da situação ilustrada na Figura 2.15, não se nota uma diferença no desvio padrão usando diferentes ADCs. Isto deve-se ao ruído aditivo do sinal ter um valor eficaz de 10 mV muito superior ao ruído de quantificação dos ADCs.

A par da medição da fase, a medição da amplitude do sinal é igualmente importante no processo de medida relativo à caracterização de circuitos ou sistemas. Assim, a avaliação do desempenho do algoritmo em relação à amplitude é também importante. Apresenta-se na Figura 2.17 o desvio padrão relativo da amplitude do segundo canal em função das amplitudes dos dois sinais. Pode ver-se que o desvio padrão da amplitude decresce à medida que aumenta a amplitude dos sinais. Esse decréscimo é mais acentuado no caso do conversor de 16 bit.

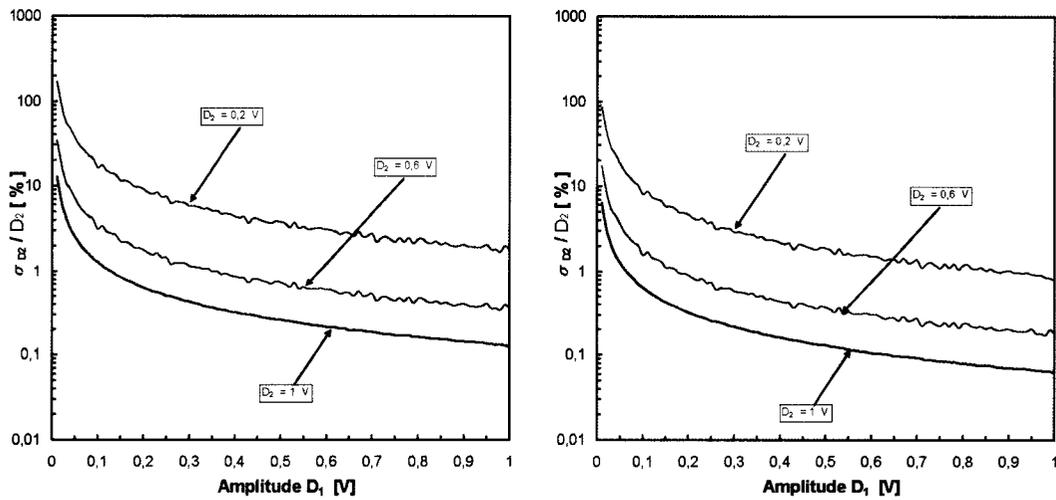


Figura 2.17 – Desvio padrão da amplitude no segundo canal em função da amplitude dos dois sinais para ruído aditivo de 1 mV e um ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita.

Na Figura 2.18 apresenta-se o gráfico do desvio padrão relativo da frequência em função das amplitudes dos sinais.

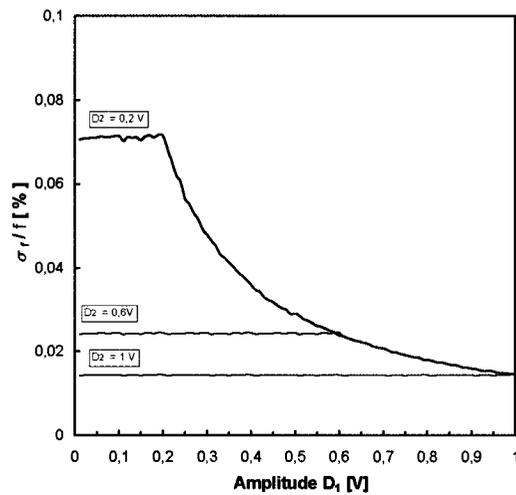


Figura 2.18 – Desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude para ruído aditivo de 10 mV e um conversor de 16 bit.

Observa-se um decréscimo em patamares do desvio padrão da frequência em relação às amplitudes. Novamente, estes patamares correspondem à situação onde a amplitude escolhida para a aplicação do método de quatro parâmetros é a amplitude do segundo canal. Os níveis de transição dos patamares correspondem às amplitudes iguais (i.e., $D_1 = D_2$).

2.7.5 Método de sete parâmetros

Nesta secção analisa-se o desempenho do algoritmo de sete parâmetros em relação à fase e à frequência e verifica-se ainda a independência em relação à fase.

Na Figura 2.19 apresenta-se a dependência do desvio padrão do erro da diferença de fase entre os sinais em relação às suas respectivas amplitudes para ADCs de 12 e 16 bit e ruído gaussiano aditivo de 0,1 mV.

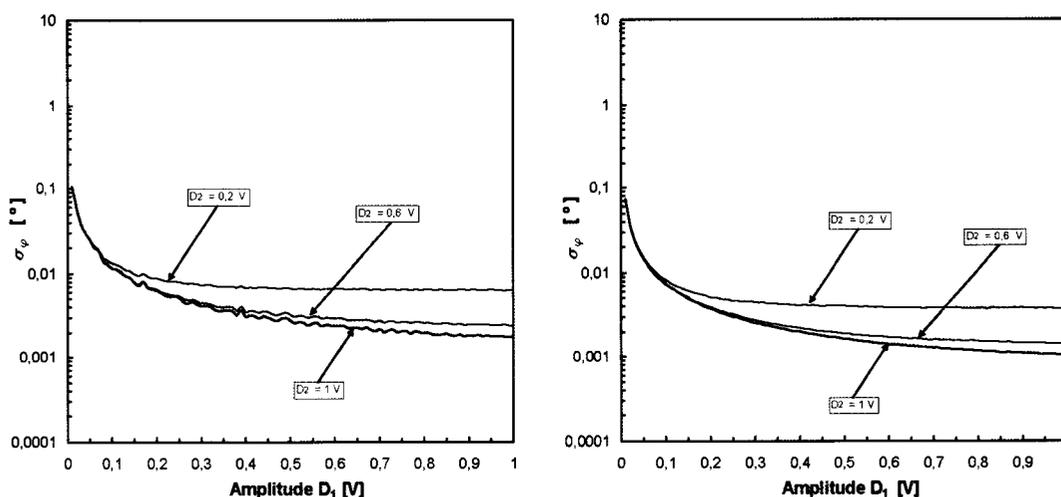


Figura 2.19 – Desvio padrão do erro da fase em função da amplitude do sinal no segundo canal para um ADC de 12 bit a esquerda e 16 bit a direita e ruído gaussiano aditivo de 0,1 mV

Como se pode observar, o desvio padrão do erro da fase decresce com o aumento das amplitudes dos sinais. Este decrescimento, que se verifica para os métodos descritos anteriormente, aqui é mais acentuado.

Na Figura 2.20 e na Figura 2.21 apresenta-se o desvio padrão relativo da frequência comum aos dois sinais para um ruído de 0,1 mV e 1 mV, respectivamente, para ADCs de 12 e 16 bit.

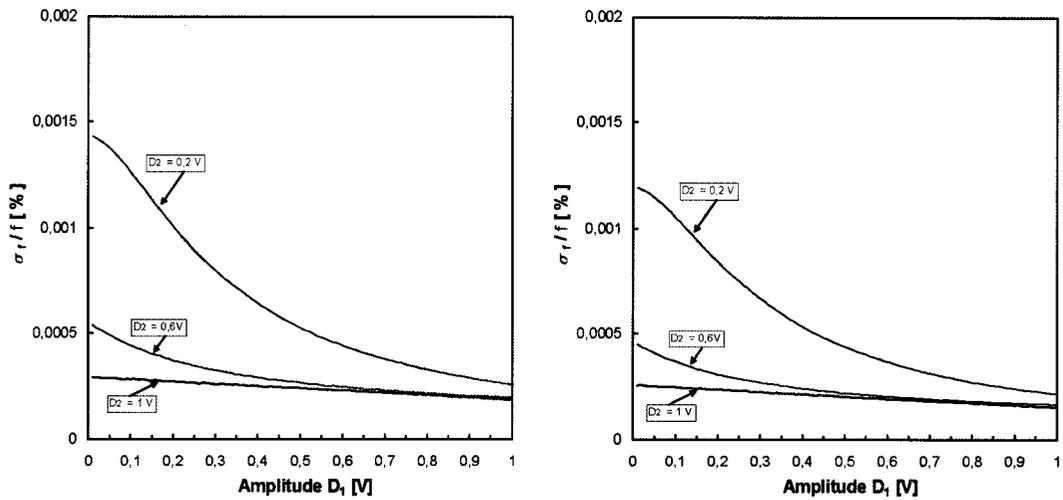


Figura 2.20 – Desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude no segundo canal para ruído aditivo de 0,1 mV e um ADC de 12 bit a esquerda e 16 bit a direita.

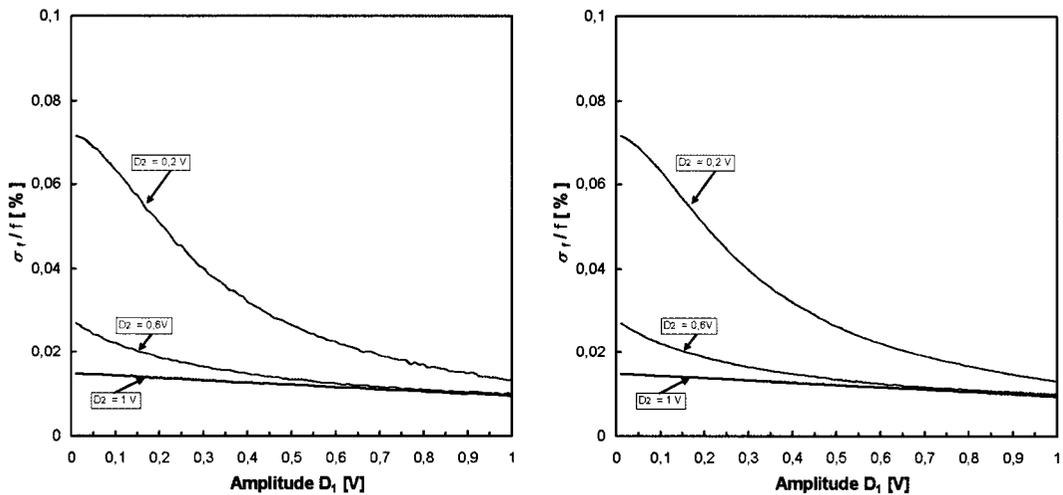


Figura 2.21 – Desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude no segundo canal para ruído aditivo de 10 mV e um ADC de 12 bit a esquerda e 16 bit a direita.

Como se pode observar, o desvio padrão relativo da frequência estimada decresce com o aumento das amplitudes e não apresenta os patamares onde é constante como acontecia no caso do algoritmo de 4+3. Observa-se uma influência do número de bit do conversor ADC no desvio padrão da frequência. Esta situação nota-se na Figura 2.20, em que o valor eficaz do ruído aditivo do sinal é 0,1 mV. Neste caso o ruído devido à quantificação pelo conversor ADC ($144 \mu\text{V}$) é superior ao ruído aditivo, por consequência a influência da resolução do conversor ADC é mais evidente.

Para testar a dependência do algoritmo em relação à fase, variando o número de bit do ADC e o valor eficaz do ruído gaussiano aditivo, foram efectuados 10000 ensaios para cada diferença de fase de valor inteiro no intervalo $]-180^\circ ; +180^\circ]$. Para cada valor, das 360 diferenças de fase impostas, foi calculado o valor médio da diferença de fase estimada entre os dois canais.

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\varphi}_i \quad (1.39)$$

e o desvio padrão

$$\delta_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\varphi}_i - \bar{\varphi})^2}. \quad (1.40)$$

Os testes foram efectuados para um ADC ideal, para dois conversores ADCs de 12 e 16 bit, uma amplitude do sinal de 1 V e para valores eficazes do ruído de 0,1 mV e 1 mV. Na Figura 2.22 apresenta-se a dependência do desvio padrão do erro da diferença de fase em função do valor da diferença de fase imposta.

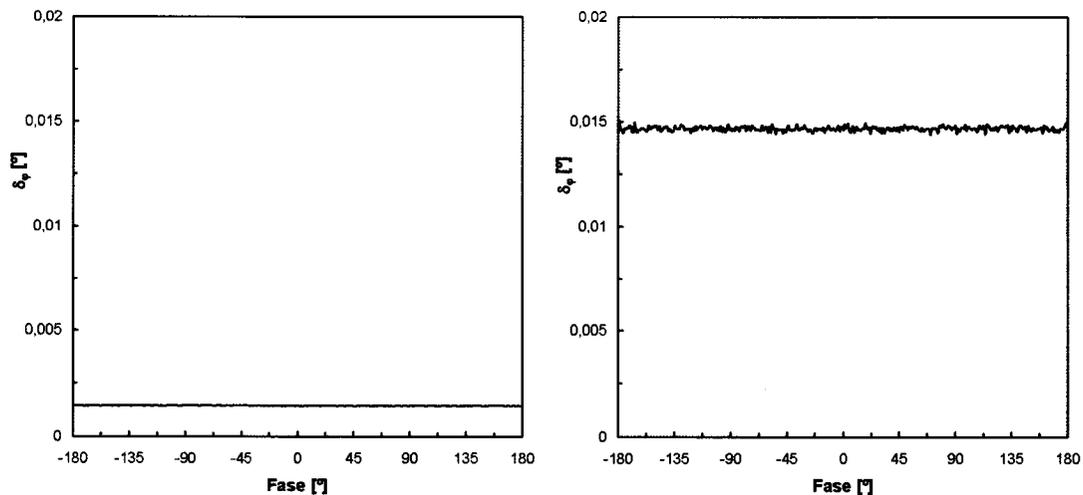


Figura 2.22 – Desvio padrão do erro da diferença de fase em função da diferença de fase gerada, para um conversor ADC ideal, com um numero de bit infinito e um valor eficaz do ruído de 0,1 mV à esquerda e 1 mV à direita.

Conclui-se que não há dependência do algoritmo em relação à diferença de fase. O desvio padrão do erro da fase depende do número de bit do conversor, do valor eficaz do ruído gaussiano, mas não depende da diferença de fase imposta.

Para o estudo comparativo dos algoritmos 4+3 e sete parâmetros fixou-se uma amplitude de 1V no segundo canal e estudou-se a dependência do desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude do primeiro canal. Na Figura 2.23 pode ver-se que a estimativa da frequência comum aos dois canais é melhor no algoritmo dos sete parâmetros. A diferença no desempenho em relação à frequência nos dois algoritmos é mais notável à medida que cresce a amplitude no primeiro canal.

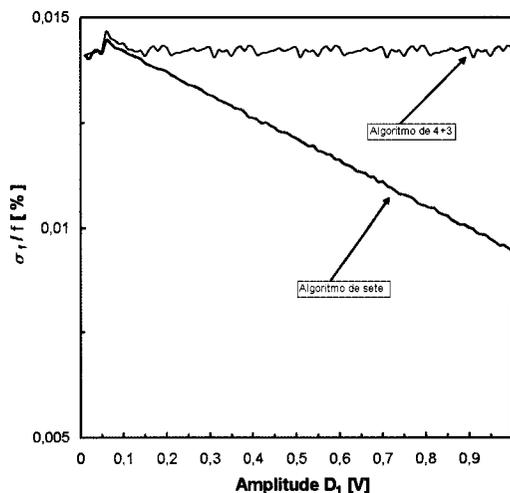


Figura 2.23 – Desvio padrão relativo da frequência em função da amplitude do primeiro canal para uma amplitude de 1 V no segundo canal, calculado pelo método de 4+3 e o método de sete parâmetros. Os sinais têm ruído aditivo eficaz de 10 mV e foram amostrados por um ADC de 16 bit.

Na Figura 2.24 apresenta-se o gráfico do desvio padrão relativo da frequência no primeiro canal calculado pelo método de 4+4 parâmetros. Constata-se que valor do desvio padrão relativo da frequência decresce à medida que a amplitude aumenta. No entanto, da observação da Figura 2.23 e da Figura 2.24 conclui-se que o algoritmo de sete parâmetros é o que tem o melhor desempenho em relação à frequência.

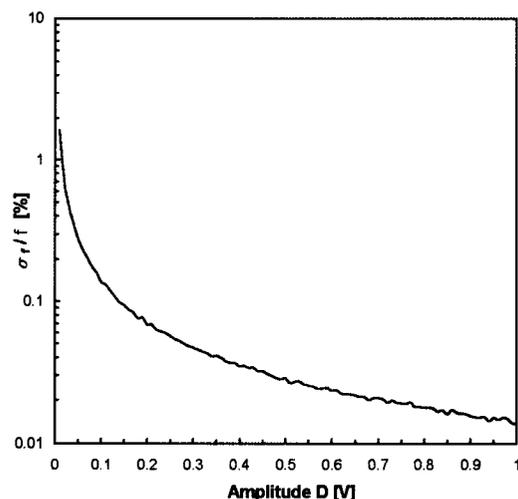


Figura 2.24 – Desvio padrão relativo da frequência no primeiro canal, à escala logarítmica, calculado pelo método de 4+4, em função da amplitude. O sinal tem ruído aditivo eficaz de 10 mV e foi amostrado por um ADC de 16 bit.

2.7.6 Dependência do Método de sete parâmetros do número de pontos adquiridos

Nesta secção analisa-se o desempenho do algoritmo de sete parâmetros em relação ao número de pontos adquiridos. Consideram-se sinais sinusoidais como descrito em (1.1) amostrados por um ADC ideal com a mesma frequência de amostragem referida anteriormente. Os sinais considerados têm amplitudes de 0,5 V e 0,25 V, e uma diferença de fase de 30°. Estudou-se a dependência dos desvios padrões, em relação ao número de amostras adquiridas, das amplitudes consideradas e da diferença de fase entre os dois sinais. Na Figura (2.25) apresenta-se o desvio padrão das amplitudes estimadas em função do número de amostras.

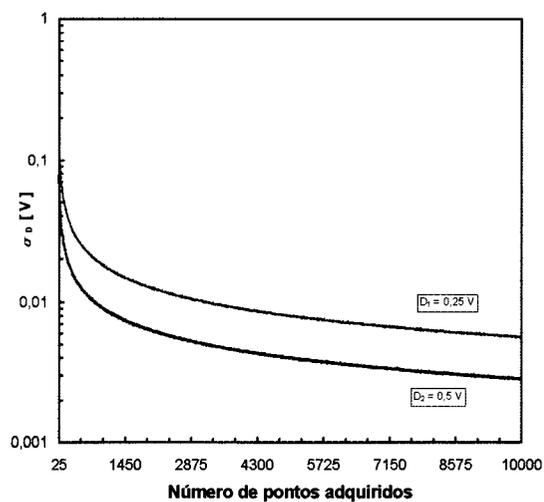


Figura 2. 25 – Desvio padrão das amplitudes D_1 e D_2 , calculado pelo método de sete parâmetros, em função do número de amostras adquiridas. Os sinais têm ruído aditivo eficaz de 1 mV e foram amostrados por um ADC ideal.

Uma análise da Figura 2.25 mostra que o desvio padrão das amplitudes decresce à medida que aumenta o número de amostras adquiridas.

Na Figura 2.26 apresenta-se o mesmo estudo para a fase. Como era de esperar o desvio padrão da fase apresenta o mesmo comportamento que o das amplitudes.

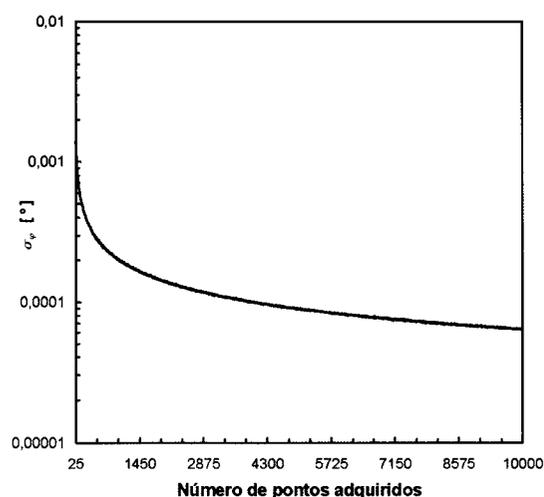


Figura 2.26 – Desvio padrão da diferença de fase entre os dois sinais adquiridos, calculado pelo método de sete parâmetros, em função do número de amostras adquiridas. Os sinais têm ruído aditivo eficaz de 1 mV e foram amostrados por um ADC ideal.

2.8 Conclusões

Estudaram-se neste capítulo vários métodos de adaptação de sinusóides, tanto para aquisição por um só canal de medida como por dois canais de medida. Os métodos de três e quatro parâmetros servem para a aquisição por um só canal. Estes métodos diferem pelo facto de o método dos três parâmetros não estimar a frequência e o dos quatro parâmetros, sim. O primeiro método, apesar de mais rápido, por não ser iterativo, não estima a frequência do sinal. Isto faz com que só seja eficaz quando se tem o conhecimento exacto da frequência. O segundo método é mais lento, mas permite estimar a frequência. Verificou-se que quanto mais exacta for a frequência inicial melhores são os resultados.

No caso de dois canais de medida estudaram-se três métodos de adaptação de sinusóides: 4+4 parâmetros, 4+3 parâmetros e o de sete parâmetros. O método de 4+3 parâmetros, em relação ao de 4+4, tem a vantagem de usar apenas um processo iterativo, respeitando a restrição física de uma frequência comum aos dois canais. O método de sete parâmetros, não só tem em conta essa restrição física, mas, ao usar todas as amostras dos dois canais para estimar todos os parâmetros, reduz significativamente o desvio padrão do erro sobre os resultados obtidos. Este método permite, por apenas um procedimento iterativo, estimar com mais precisão em relação aos outros métodos aqui estudados, os parâmetros de duas sinusóides: amplitudes, fases e a frequência comum, verificando-se ainda a independência do algoritmo em relação à fase.

Referências

- [1] Christine Podilchuk, “Signal recovery from partial information”, *The Digital Signal Processing Handbook*. Editado por Vijak K. Madisetti e Douglas B. Williams, IEEE Press 1998.
- [2] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine-fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [3] J. Shoukens, R. Pintelon e H. Van Hamme, “The interpolated Fast Fourier Transform: A comparative study”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, n. 2, pp. 226-232, Abril 1992.
- [4] M. Fonseca da Silva, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameter sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [5] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Improving sine-fitting algorithms for amplitude and phase measurements”, *XVII IMEKO World Congress*, pp. 614-619, Dubrovnik, Croácia, Junho 2003.
- [6] Mouhaydine Tlemçani e António Cruz Serra, “Caracterização de um Conversor Analógico Digital”, *VII Congresso de Mecânica Aplicada e computacional*, vol. 3 pp. 1313-1320, Évora, Abril 2003

III. Medição de impedâncias

3.1 Introdução

As medidas de impedância são tradicionalmente efectuadas utilizando pontes equilibradas por impedâncias padrão, por medidores vectoriais analógicos de impedâncias ou ainda por medidores de factores de qualidade (Q meters) [1]. Existe no mercado uma larga gama destes instrumentos e os seus preços variam consoante as larguras de banda de funcionamento e das especificações de erro máximo das medidas.

O desenvolvimento dos conversores analógico digitais (ADCs), bem como a utilização de mais e cada vez melhores técnicas de processamento de sinal, integradas em algoritmos numéricos e implementadas em computadores pessoais, permite a concepção de novos métodos de medidas de impedâncias que podem atingir, ou até ultrapassar, o desempenho dos instrumentos tradicionais recorrendo a instrumentação electrónica de baixo custo [2-6]. Neste capítulo procede-se à medida de impedâncias, pelo método do amperímetro – voltímetro, melhorada pela utilização de conversores analógico digitais e pela aplicação dos algoritmos de adaptação de sinusóides descritos no Capítulo II.

3.2 Montagem experimental

O princípio de medida baseia-se no circuito apresentado na Figura 3.1 e inclui um gerador de sinal SONY Tektronix AFG320, dois conversores ADCs de entrada diferencial integrados na placa de aquisição (DAQ), sendo as suas impedâncias de entrada são designadas por \bar{Z}_{ADC1} e \bar{Z}_{ADC2} e pela impedância de referência \bar{Z}_R , que consiste numa década de resistências cujos valores foram determinados pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A.

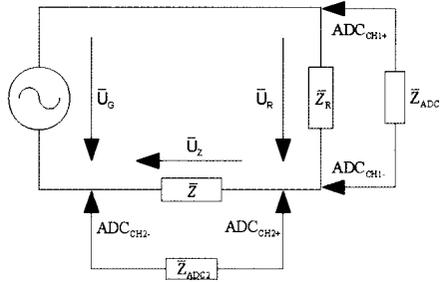


Figura 3.1 – Circuito de medida onde \bar{Z} é a impedância a medir, \bar{Z}_R é a impedância de referência e \bar{Z}_{ADC_i} é a impedância de entrada do canal i da DAQ.

As medidas foram efectuadas a uma frequência de 1 kHz, a placa de aquisição de dados contém quatro canais de entrada diferenciais, tendo cada conversor analógico digital 16 bit de resolução, com uma escala de ± 10 V e com uma frequência de amostragem máxima de 100 kS/s. A arquitectura da DAQ permite a recolha simultânea das amostras nos diversos canais.

Na Figura 3.1, \bar{Z} representa a impedância desconhecida (DUT- Device under test) a medir. Para este trabalho foram constituídos diversas impedâncias a medir \bar{Z}_i através de associações de componentes resistivos, capacitivos e indutivos. Com o medidor de impedâncias Agilent 4294A efectuou-se a medida dos valores dos módulos e das fases das impedâncias Z_1 a Z_{20} descritas na Tabela 1, a diferentes frequências para comparação com os métodos de medida propostos. Os resultados destas medições encontram-se no Apêndice C.

Na Tabela 3.1 apresenta-se esse conjunto de impedâncias, $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ a medir, os seus módulos $|\bar{Z}_i|$ e fases φ_{z_i} medidos pelo instrumento Agilent 4294A para $f = 1$ kHz. A Tabela 3.1 contém também as descrições das componentes R, C e L. O símbolo “+” designa a associação em série entre os componentes. Apresentam-se ainda os valores dos módulos e das fases das impedâncias de referência \bar{Z}_R que foram usadas

para cada medição de cada uma das impedâncias utilizando o método que por aqui se apresenta.

Designação	Descrição	R [Ω]	C [μF]	L [H]	$ \bar{Z}_i $ [Ω]	φ_Z [$^\circ$]	$ \bar{Z}_R $ [Ω]	φ_R [$^\circ$]
Z_1	R	200	-	-	199,98	0,0001	199,66	0,0047
Z_2	R	900	-	-	899,71	0,0020	898,44	-0,0011
Z_3	$R+C$	300	0,2	-	869,04	-65,476	848,52	-0,0044
Z_4	$R+C$	900	0,2	-	1244,14	-39,450	1198,18	-0,0033
Z_5	$R+C$	600	0,2	-	1030,25	-50,123	999,03	-0,0092
Z_6	$R+C$	800	0,4	-	901,32	-26,759	888,51	-0,0069
Z_7	$R+C$	200	0,4	-	459,53	-62,776	449,24	-0,0068
Z_8	$R+C$	400	0,1	-	1619,99	-75,315	1637,90	-0,0015
Z_9	$R+C$	800	0,1	-	1764,14	-62,647	1777,52	-0,0018
Z_{10}	C	-	0,1	-	1567,17	-89,610	1588,05	-0,0003
Z_{11}	C	-	0,2	-	792,88	-86,612	798,43	-0,0064
Z_{12}	L	-	-	0,06	376,23	86,249	379,56	0,0056
Z_{13}	$R+L$	300	-	0,06	496,32	49,170	479,22	0,0053
Z_{14}	$R+L$	900	-	0,05	973,60	18,740	948,41	-0,0028
Z_{15}	$R+L$	50	-	0,02	138,72	62,869	139,86	0,0011
Z_{16}	$R+L$	500	-	0,1	818,19	50,553	798,43	-0,0064
Z_{17}	$R+L$	800	-	0,1	1037,73	37,628	1019,05	-0,0028
Z_{18}	$R+L$	700	-	0,2	1461,91	60,045	1438,26	-0,0039
Z_{19}	$R+L$	300	-	0,2	1309,15	75,405	1288,68	0,0001
Z_{20}	L	-	-	0,2	1267,51	88,643	1258,67	-0,0019

Tabela 3.1 – Descrição das impedâncias a medir com os valores dos módulos, das fases e das respectivas impedâncias de referência, medidos pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A para $f = 1$ kHz.

Considerando o circuito da Figura 3.1, a corrente do gerador de sinal é a mesma que provoca as quedas de tensão \bar{U}_R e \bar{U}_Z e portanto

$$\bar{U}_R \frac{(\bar{Z}_R + \bar{Z}_{ADC1})}{(\bar{Z}_R \bar{Z}_{ADC1})} = \bar{U}_Z \frac{(\bar{Z} + \bar{Z}_{ADC2})}{(\bar{Z} \bar{Z}_{ADC2})}. \quad (1.41)$$

Sabendo que os módulos das impedâncias de entrada dos ADCs são de 1 GΩ, [2] muito superiores aos módulos das impedâncias a medir e sendo conhecidos os módulos das respectivas impedâncias de referência, a relação (1.41) pode ser escrita sob a forma

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}_Z}{\bar{U}_R} \bar{Z}_R. \quad (1.42)$$

Sendo $\bar{Z} = |\bar{Z}|e^{j\varphi}$, $\bar{U}_R = |\bar{U}_R|e^{j\varphi_{U_R}}$, $\bar{U}_Z = |\bar{U}_Z|e^{j\varphi_{U_Z}}$ e $\bar{Z}_R = |\bar{Z}_R|e^{j\varphi_R}$, (1.42) pode ser dividida em duas equações

$$|\bar{Z}| = \frac{|\bar{U}_Z|}{|\bar{U}_R|} |\bar{Z}_R| \quad (1.43)$$

e

$$\varphi = (\varphi_{U_Z} - \varphi_{U_R}) + \varphi_R. \quad (1.44)$$

Para a realização do estudo experimental escolheu-se o conjunto de vinte impedâncias \bar{Z}_i , atrás referido, que tomarão o lugar de \bar{Z} no circuito da Figura 3.1, de forma a varrer representativamente o plano de Argand para uma frequência $f = 1$ kHz. Na Figura 3.2. encontram-se representados os valores das impedâncias para $f = 1$ kHz.

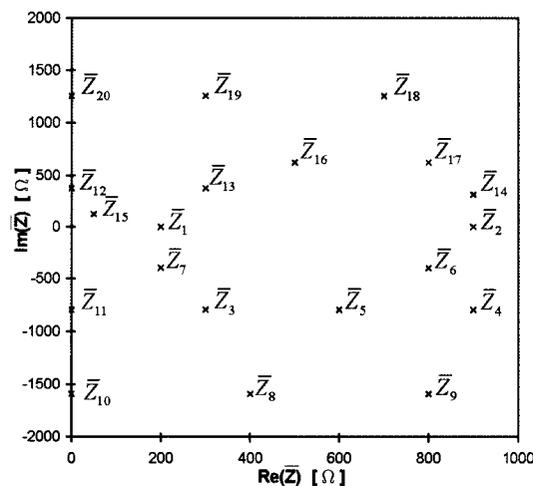


Figura 3.2 – Posição no plano de Argand das impedâncias a medir para $f = 1$ kHz.

O procedimento genérico de medida consiste nos seguintes passos: (i) o gerador de sinal é ajustado, de modo a produzir um sinal sinusoidal, à frequência de medição desejada. A amplitude do sinal sinusoidal é ajustada de forma a maximizar a amplitude dos sinais adquiridos nos ADCs e assim utilizar a escala inteira de conversão. São utilizados dois canais que adquirem simultaneamente um certo número de amostras; (ii) a estes dois conjuntos de dados adquiridos aplicam-se os algoritmos de adaptação de sinusóides descritos no Capítulo II, para determinar as amplitudes e fases das sinusóides, \bar{U}_Z e \bar{U}_R , que melhor se lhes adaptam; (iii) o módulo e a fase da impedância são calculados recorrendo a (1.43) e (1.44).

Para cada impedância, \bar{Z}_i , medida, foram calculados os valores médios $\langle |\bar{Z}_i| \rangle$ e $\langle \varphi_i \rangle$ bem como os respectivos desvios padrões $\sigma_{|\bar{Z}_i|}$ e σ_{φ_i} a partir de um conjunto de 1000 aquisições com N amostras do sinal adquirido por canal. Além do estudo do desempenho dos diferentes métodos em relação ao número de períodos dos sinais adquiridos, analisou-se a sensibilidade dos métodos em relação à resolução do conversor analógico digital. Como a aquisição é efectuada com um conversor analógico digital de 16 bit, para estudar a influência do número de bit do conversor sobre os resultados, retiram-se os quatro bit menos significativos dos ADCs, simulando assim uma aquisição com um conversor analógico digital de 12 bit (ADC de 12 bit)¹ com uma frequência de amostragem $f_s = 1/41\mu s$.

3.3 Aplicação do método de 4+4 parâmetros

Nesta secção determinam-se os módulos e as fases das impedâncias e os respectivos desvios padrões, aplicando o método de adaptação de sinusóides de quatro

¹ A redução do número de bit do ADC faz com que o conversor de 12 bit seja ideal, sem Não Linearidades Diferenciais (DNL – *Diferencial Non Linearity*) nem Não Linearidades Integrais (INL – *Integral Non Linearity*).

parâmetros a cada canal de medida. A aplicação do método de 4+4 parâmetros leva à estimativa de duas frequências, uma por cada canal de medida.

Os ensaios cujos resultados se apresentam nas Figuras 3.3 a 3.7 referem-se à determinação do valor médio e do desvio padrão do módulo das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} em função do número de períodos do sinal adquirido para ADCs de 12 e 16 bit.

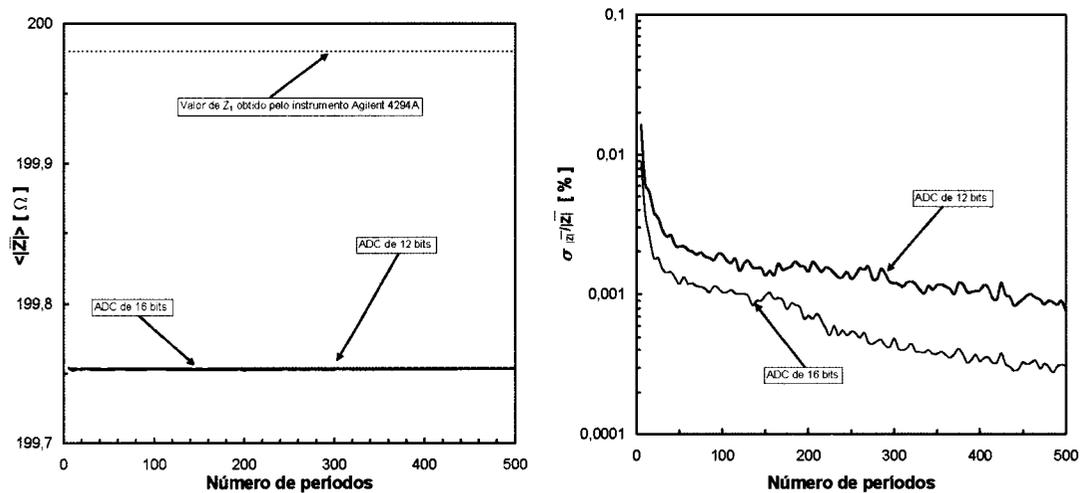


Figura 3.3 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 199,66 \Omega$.

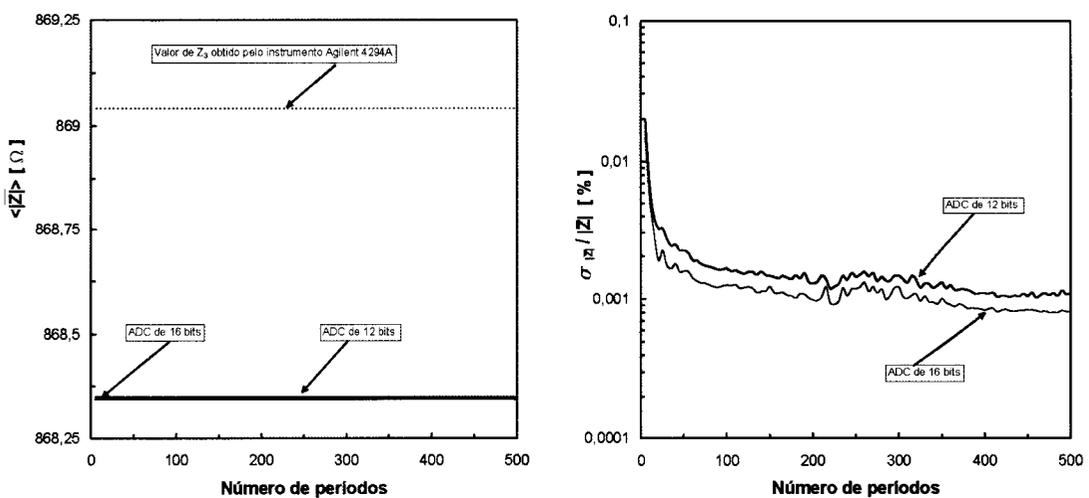


Figura 3.4 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_3 à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 848,52 \Omega$.

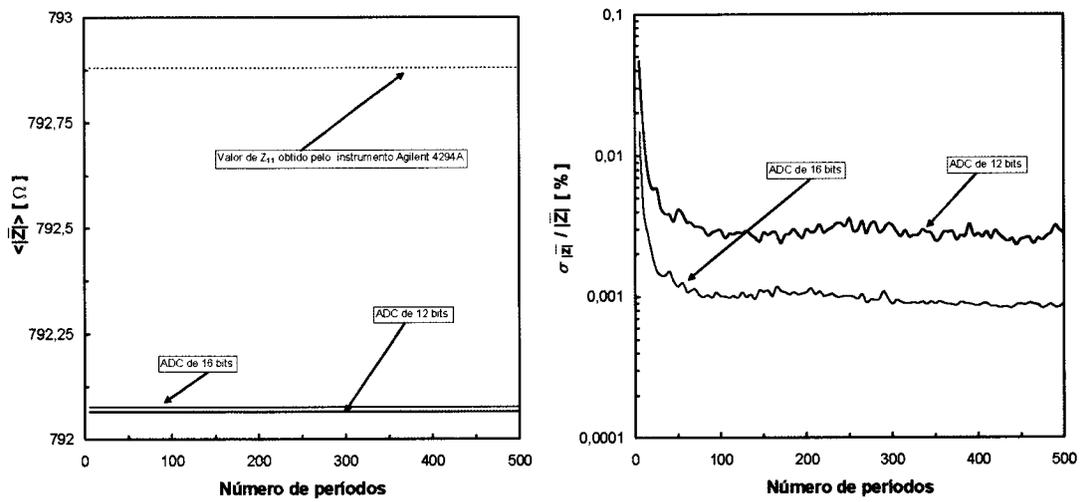


Figura 3.5 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{11} à direita para conversores ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

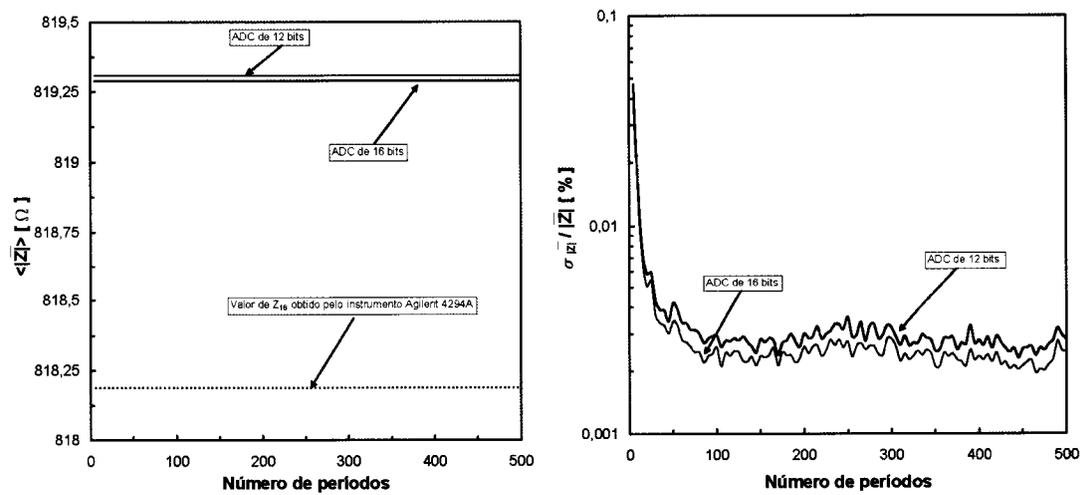


Figura 3.6 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{16} à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

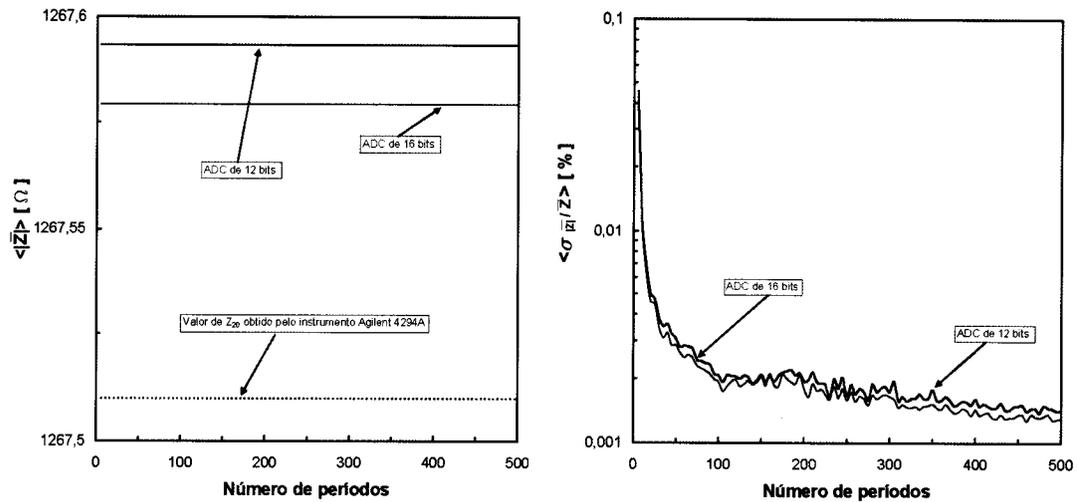


Figura 3.7 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{20} à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 1258,67 \Omega$.

Constata-se que o desvio padrão do módulo da impedância decresce à medida que se utilizam mais amostras no algoritmo da adaptação de sinusóides. Nota-se ainda a influência da resolução do ADC. Como era de esperar, obtém-se um melhor resultado com um ADC de maior resolução.

Os resultados do estudo da fase são semelhantes aos da amplitude. Constata-se, a partir das Figuras 3.8 a 3.12, que o desvio padrão da fase também decresce com o aumento do número de períodos do sinal adquirido. O valor médio da fase está mais próximo do valor obtido pelo Agilent 4294A à medida que aumenta o número de períodos adquiridos do sinal. Obtém-se também melhores resultados com um conversor de maior resolução.

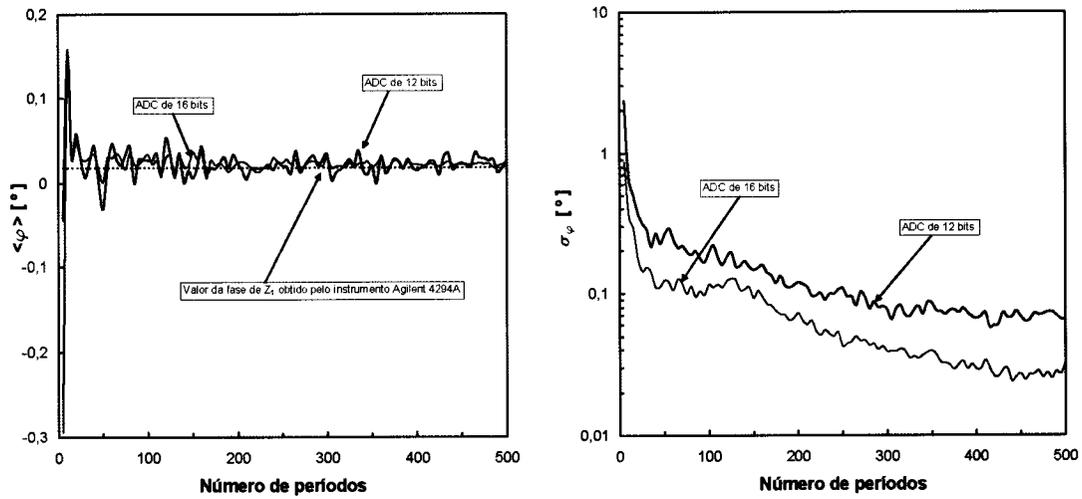


Figura 3.8 – Valores médios da fase de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 199,66 \Omega$.

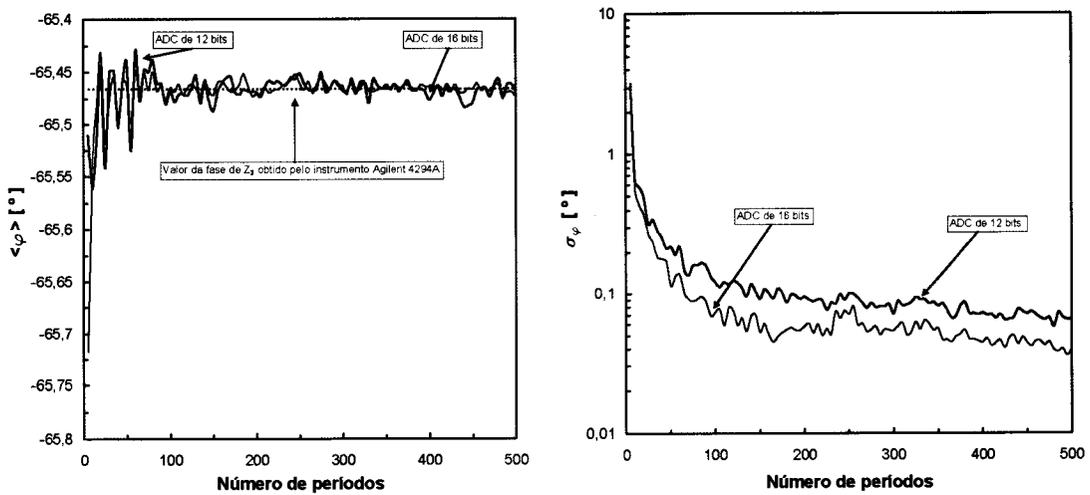


Figura 3.9 – Valores médios da fase de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_3 à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 848,52 \Omega$.

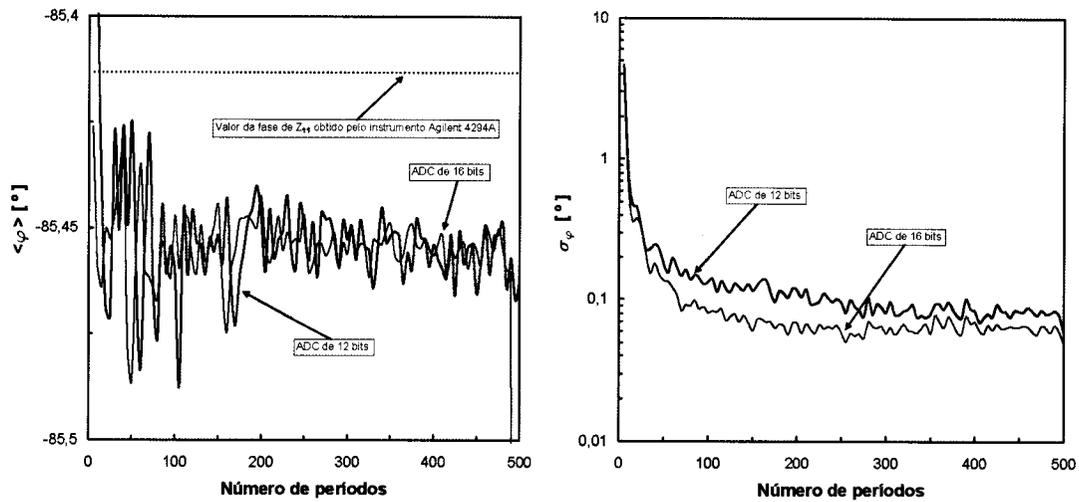


Figura 3.10 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{11} à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

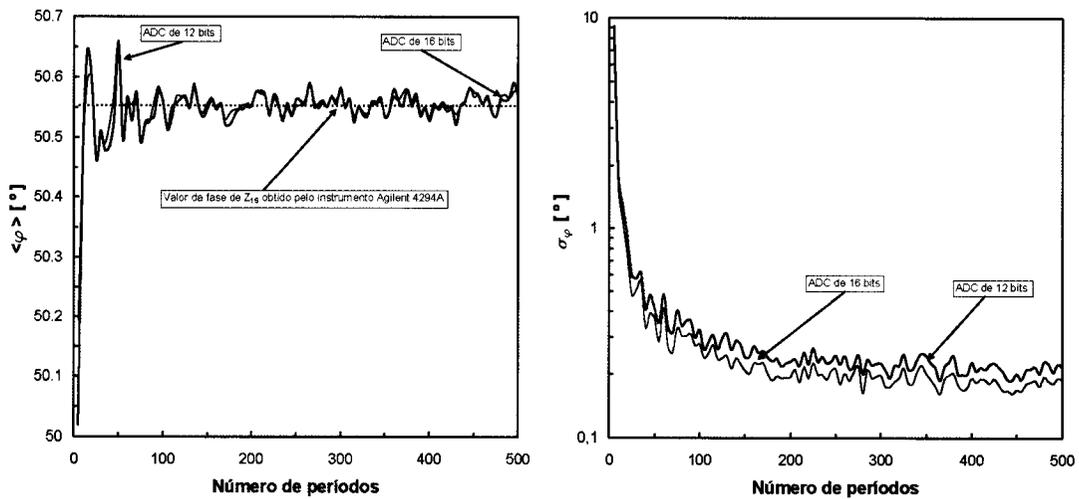


Figura 3.11 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{16} à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

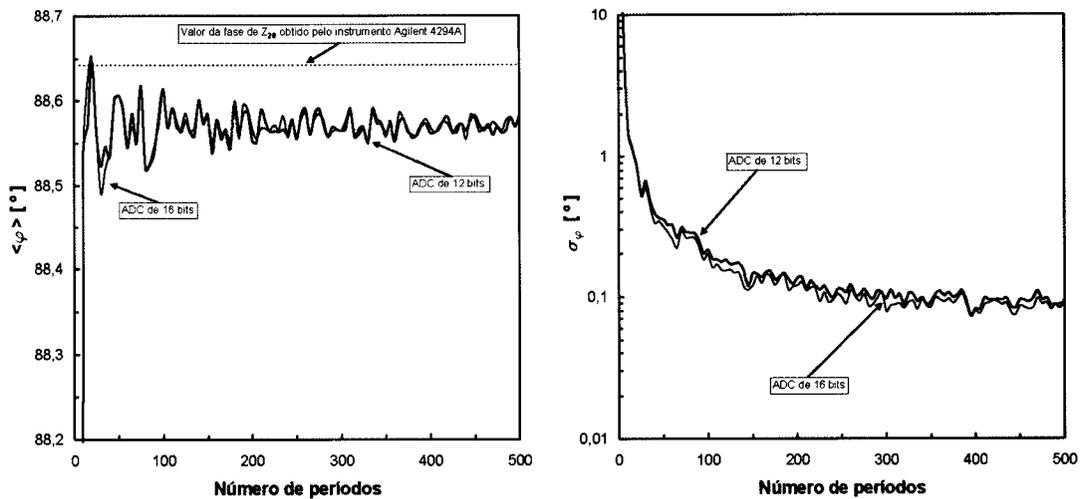


Figura 3.12 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{20} à direita para ADCs de 12 e 16 bit. As medidas foram efectuadas com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 1258,67 \Omega$.

A aplicação do algoritmo de 4+4 leva à estimativa de duas frequências (uma por cada canal). Nas Figuras 3.13 e 3.14 apresenta-se o estudo da dependência dessas frequências em relação ao número de períodos adquiridos para dois ADCs de 12 e 16 bit. Verifica-se que o desvio padrão das estimativas das frequências diminui à medida que o número de períodos adquiridos (e conseqüentemente o número de amostras) aumenta. O decréscimo do desvio padrão da frequência estimada é mais acentuado no caso do conversor de 16 bit do que no de 12 bit. A utilização de um ADC de maior resolução permite uma melhor estimativa das frequências em cada canal.

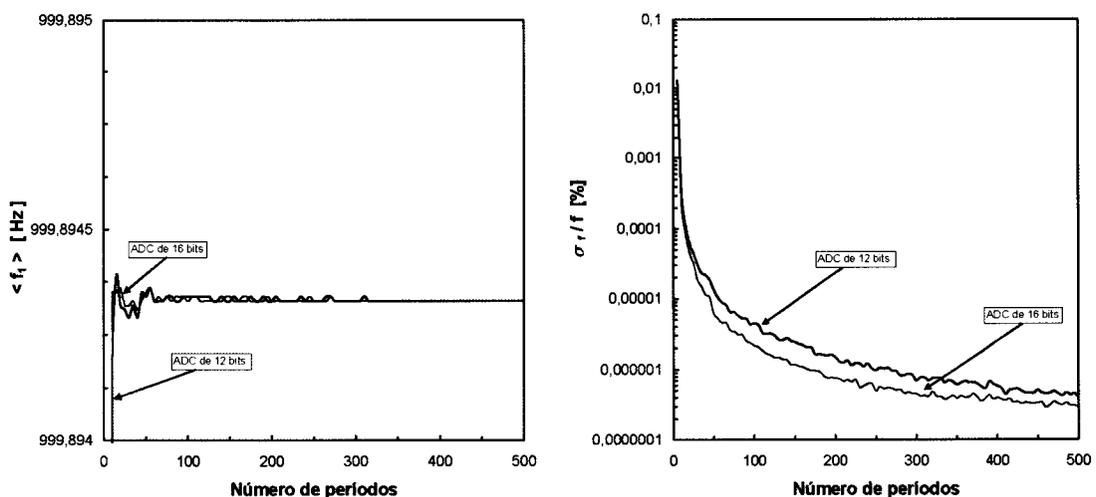


Figura 3.13 – Valores médios da frequência estimada no primeiro canal para a impedância \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão relativo da frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

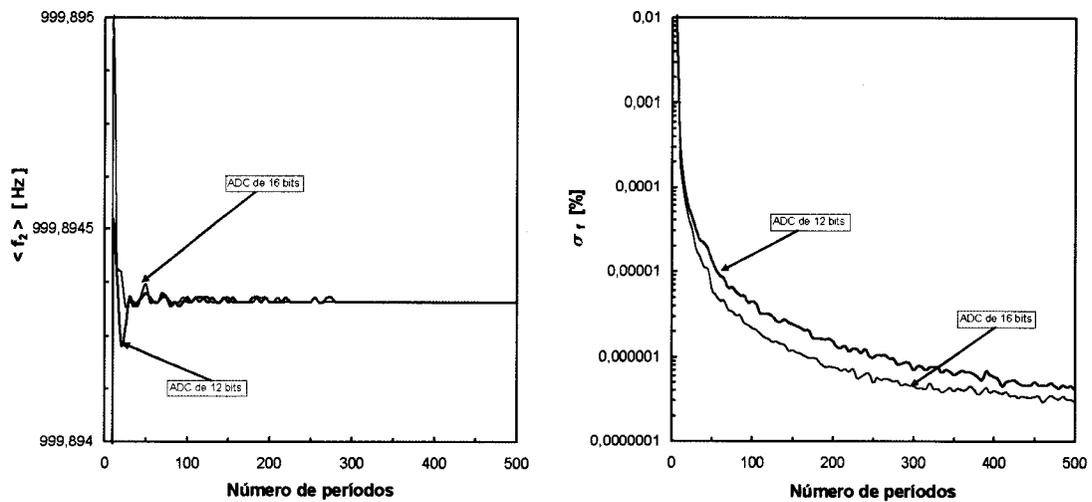


Figura 3.14 – Valores médios da frequência estimada no segundo canal para a impedância \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão relativo da frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

Na secção 3.3 verificou-se que o desempenho do algoritmo de 4+4 parâmetros depende do número de amostras adquiridas. Obteve-se uma melhor estimativa das impedâncias à medida que o número de amostras adquiridas era maior. Verificou-se também uma dependência dos erros relativos da amplitude e fases das impedâncias testadas em relação à resolução dos ADCs.

3.4 Aplicação do método de 4+3 parâmetros

Nesta secção aplica-se o algoritmo de 4+3 parâmetros à estimativa das impedâncias. Nas Figuras 3.15 a 3.19 apresentam-se os resultados das medidas do valor médio e do desvio padrão dos módulos das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} em função do número de períodos do sinal adquirido para (ADCs) de 12 e 16 bit.

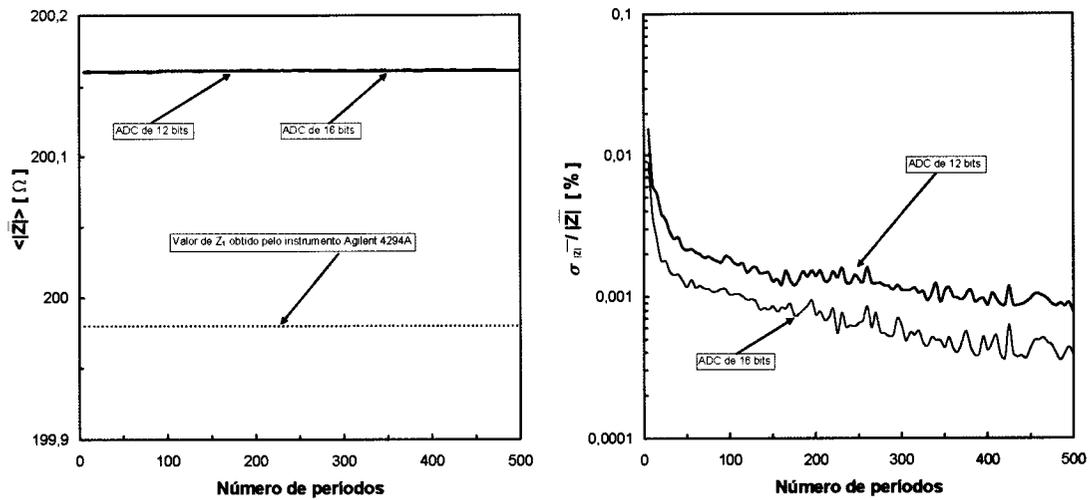


Figura 3.15 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão relativo do módulo de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

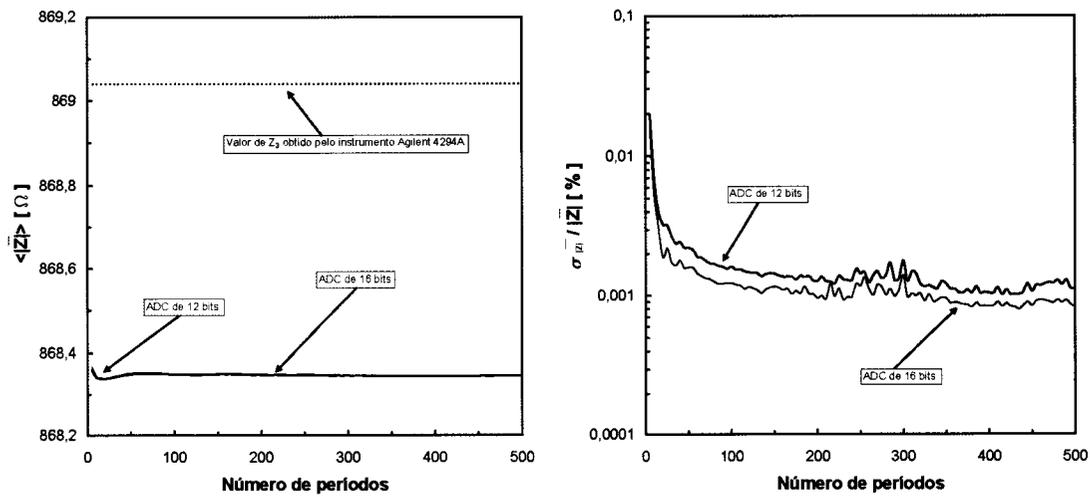


Figura 3.16 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_3 à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

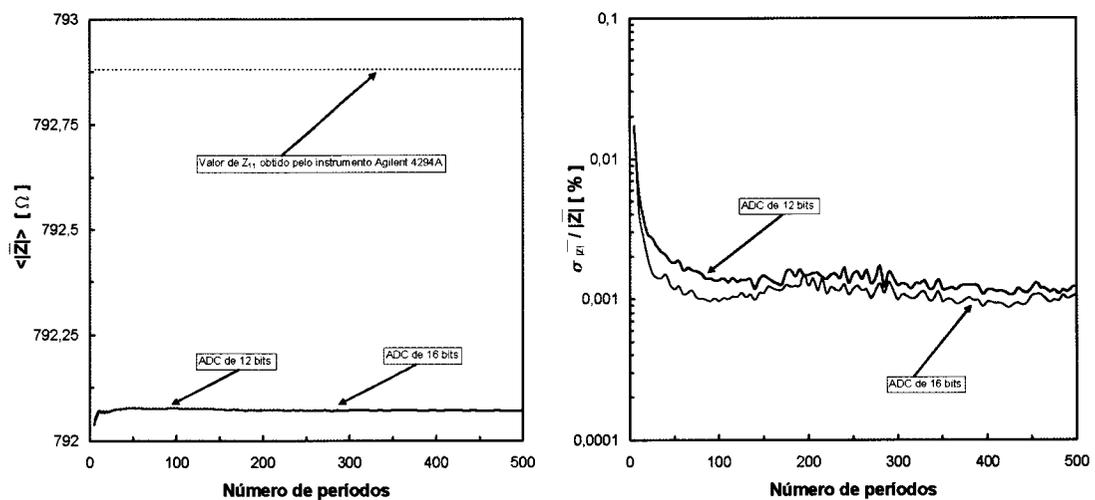


Figura 3.17 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{11} à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

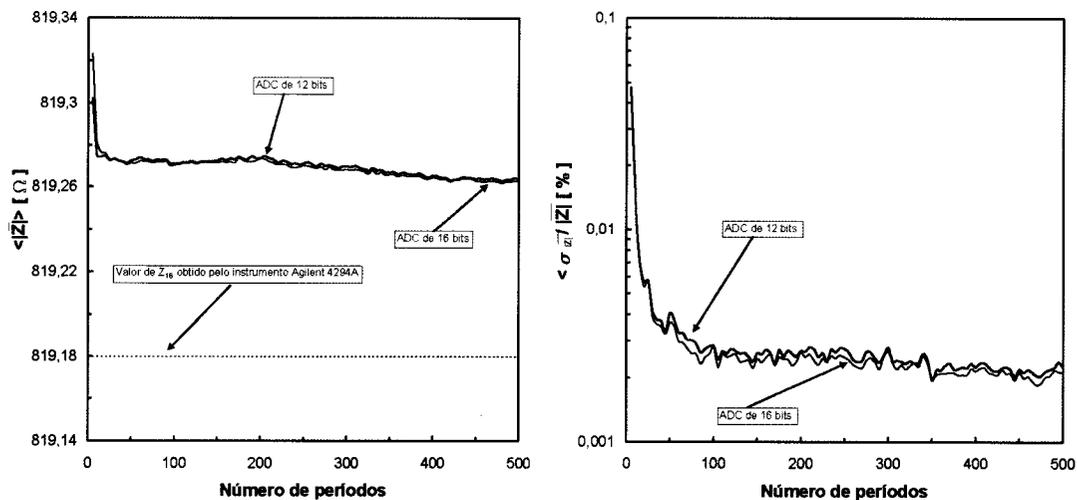


Figura 3.18 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{16} à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

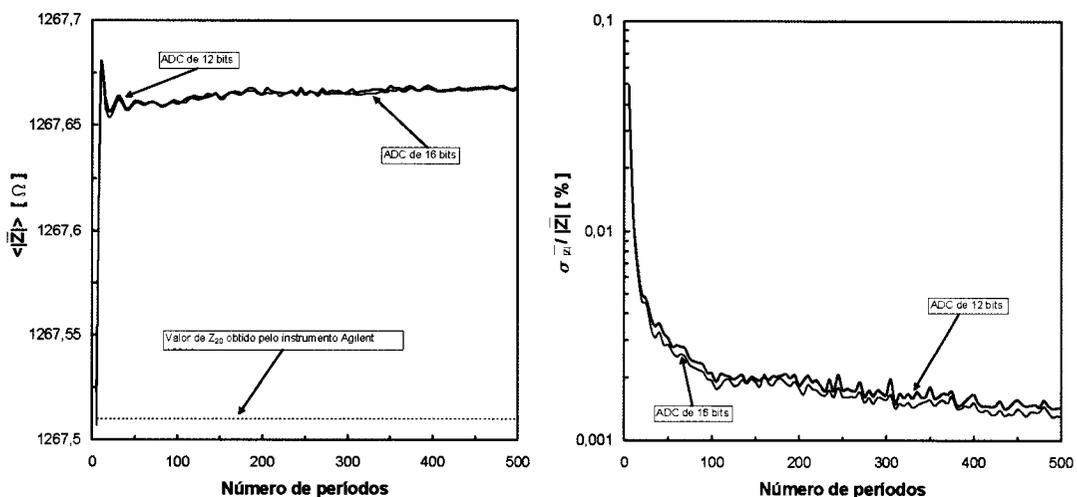


Figura 3.19 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{20} à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

Constata-se que o desvio padrão da amplitude diminui à medida que o número de amostras adquiridas aumenta. Verifica-se um melhor desempenho do algoritmo usando um conversor de maior resolução. Os mesmos resultados são constatados no caso da determinação das fases e respectivos desvios padrões das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} apresentadas nas Figuras 3.20 a 3.24.

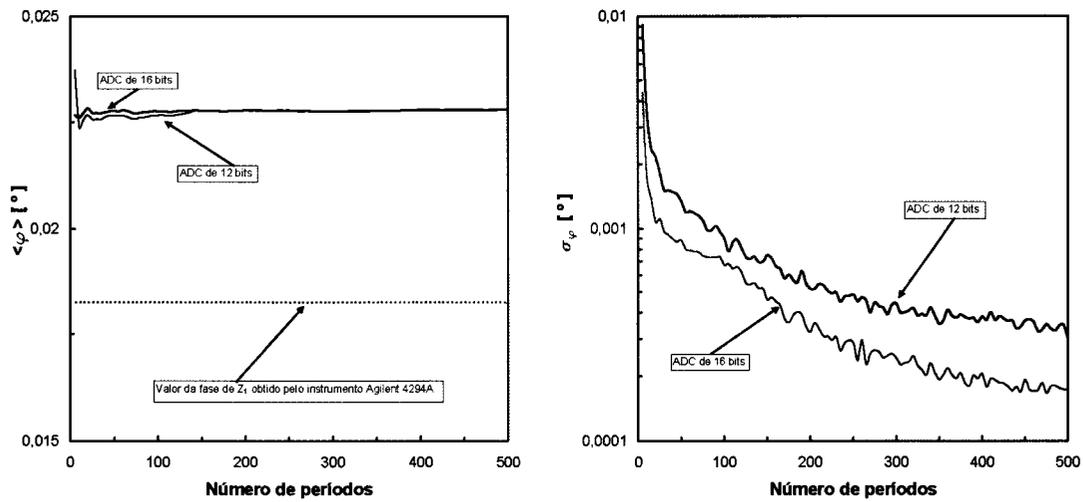


Figura 3.20 – Valores médios da fase de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_1 à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

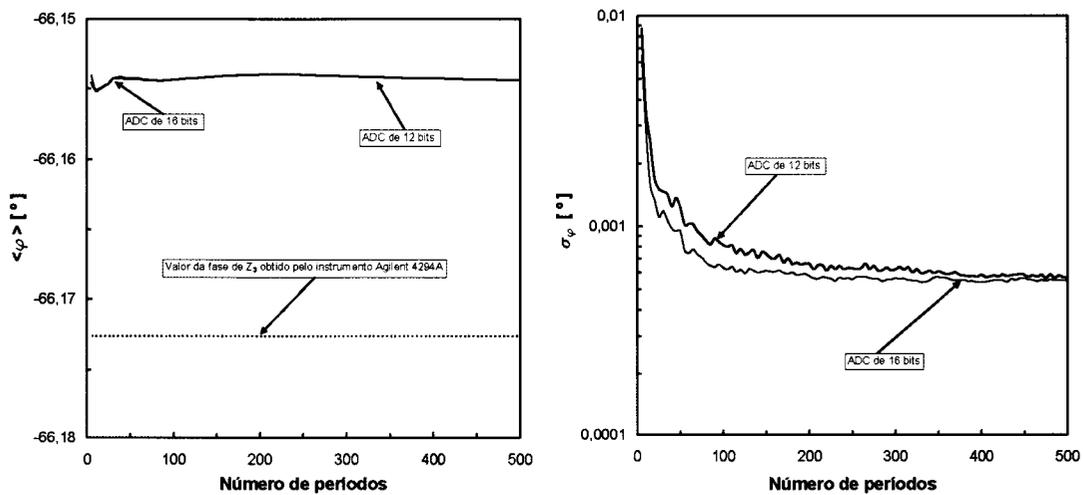


Figura 3.21 – Valores médios da fase de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_3 à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

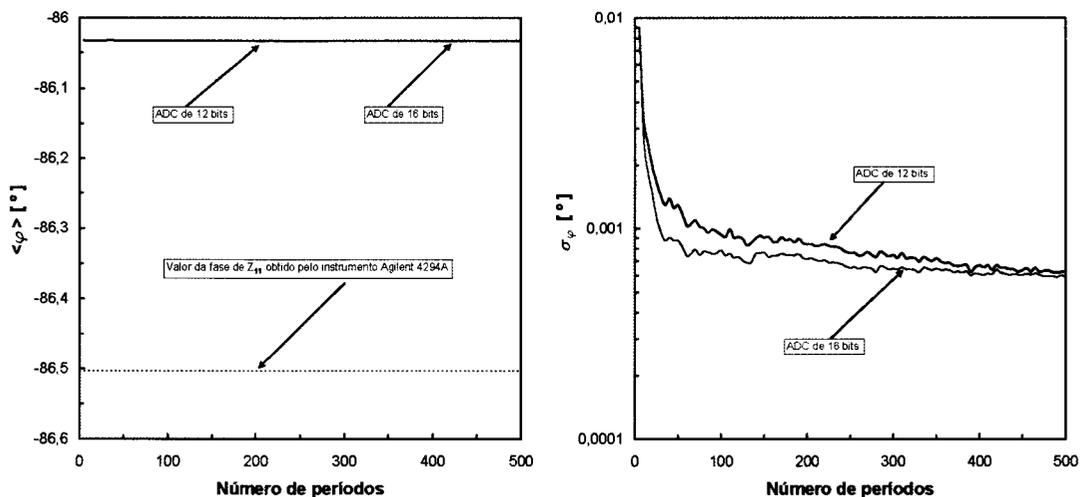


Figura 3.22 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{11} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

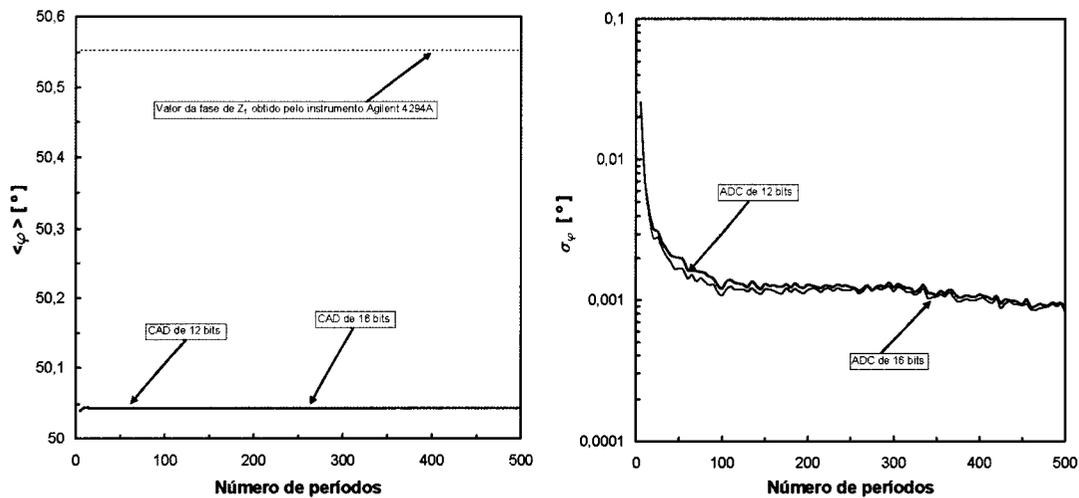


Figura 3.23 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{16} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

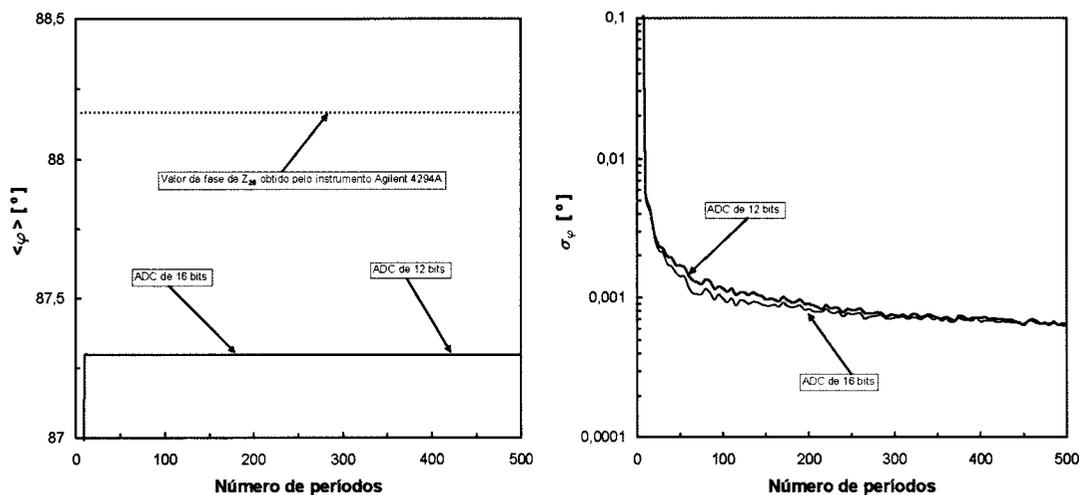


Figura 3.24 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{20} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

Analisando as Figuras 3.15 – 3.24 e as Figuras 3.3 – 3.12, verifica-se que, entre os algoritmos de 4+4 parâmetros e de 4+3 parâmetros, este último tem o melhor desempenho na estimativa das fases e das amplitudes das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} . Esta situação deve-se ao facto do algoritmo de 4+3 estimar uma única frequência, ao contrário do algoritmo de 4+4 que, ao estimar duas frequências (uma por cada canal) aumenta a incerteza sobre a estimativa dos restantes parâmetros. Em relação à amplitude, a diferença no desempenho entre o algoritmo de 4+4 e 4+3 não é facilmente visível à escala utilizada nas figuras, mas existe uma ligeira melhoria na estimativa da

amplitude pelo algoritmo de 4+3 em relação ao 4+4. Nas Figuras 3.25 a 3.29 apresentam-se os resultados referentes a estimativa da frequência.

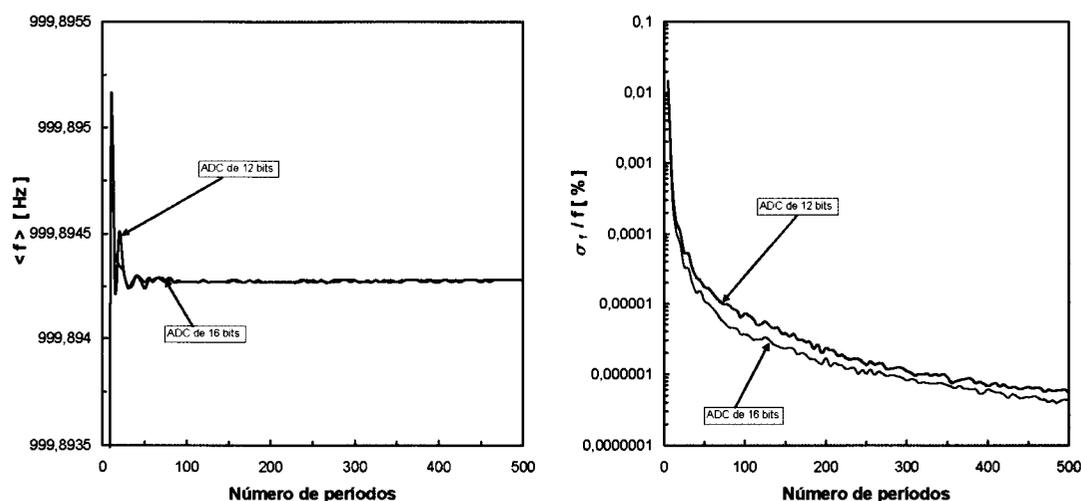


Figura 3.25 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

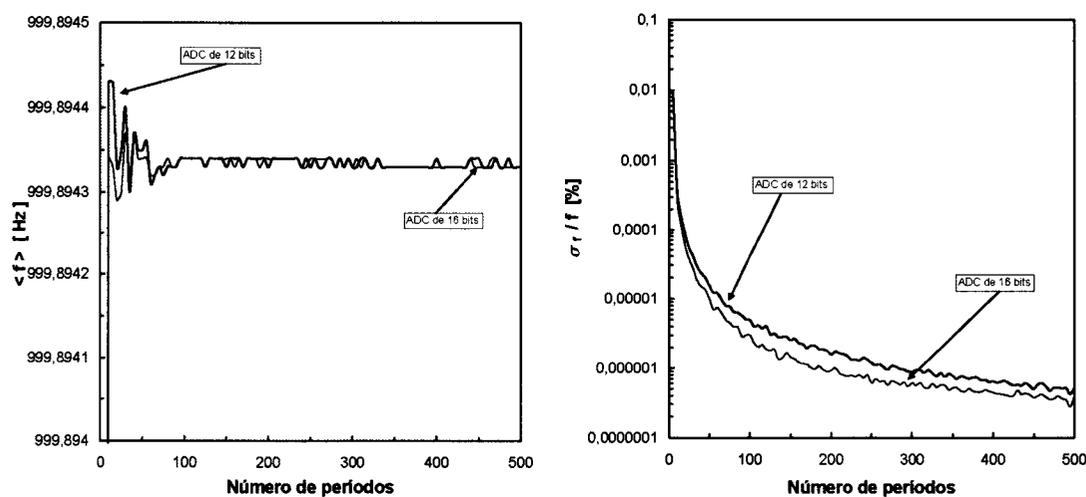


Figura 3.26 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

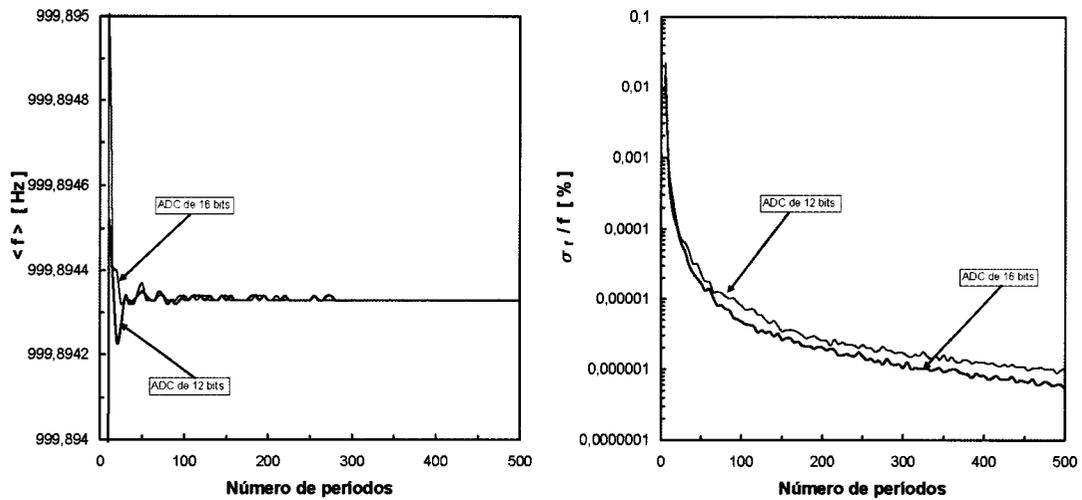


Figura 3.27 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

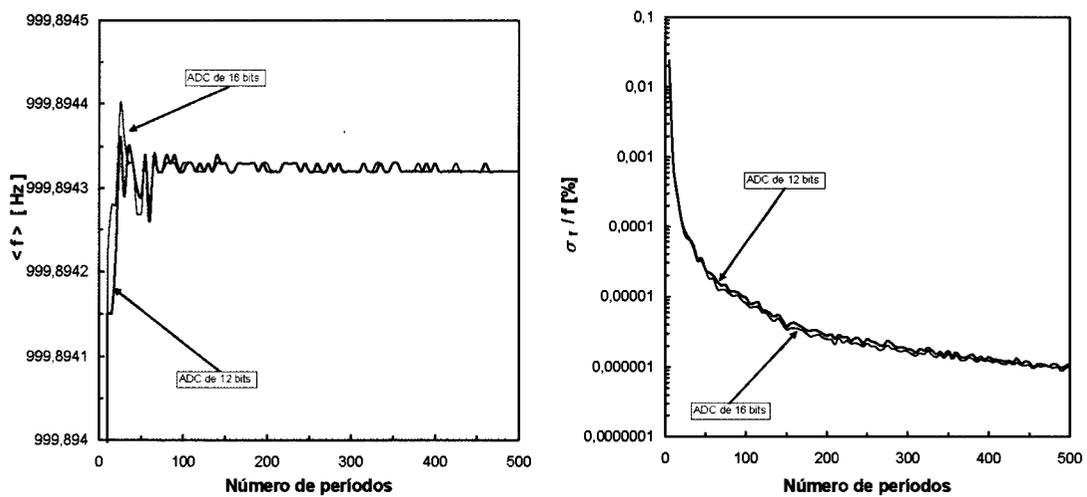


Figura 3.28 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

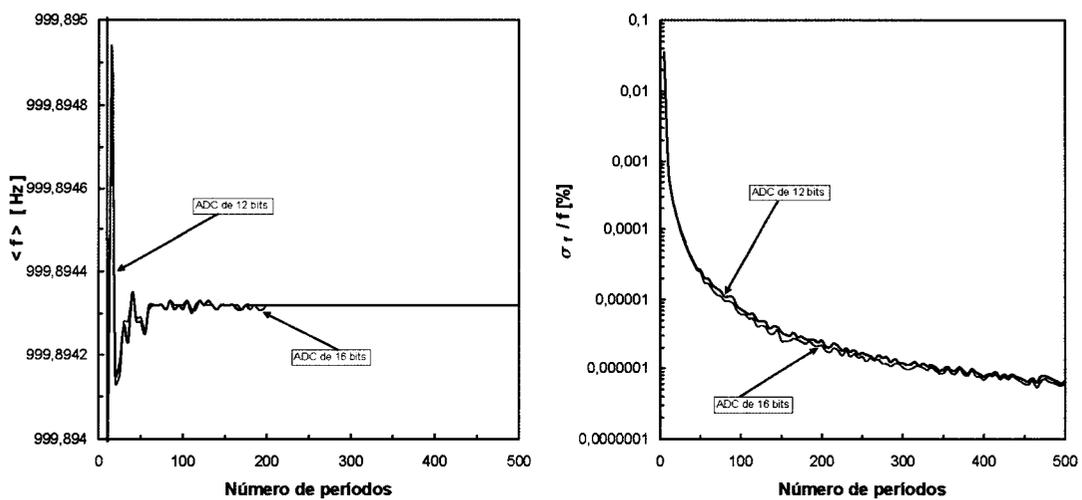


Figura 3.29 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

Verifica-se que o desvio padrão da frequência diminui à medida que aumenta o número das amostras adquiridas ou para conversores de melhor resolução. Com o aumento das amostras adquiridas esta variação vai diminuindo. Considera-se que a partir de um número de amostras correspondentes a 300 períodos do sinal adquirido esta variação deixa de ser significativa.

Comparando o desempenho do algoritmo em relação à frequência, não se nota nenhuma diferença na estimativa da frequência em relação ao algoritmo de 4+4. Esta situação deve-se ao facto de a estimativa da frequência pela IpDFT ser muito exacta e ser pouco melhorada pelo processo iterativo. Na Tabela 3.2 são apresentados alguns valores para comparação entre os algoritmos de 4+4 e 4+3, considerando um número de amostras correspondentes a 300 períodos do sinal adquirido com um conversor analógico digital de 16 bit.

	Algoritmo 4+4				Algoritmo 4+3		
	σ_{f_1}/f_1 [%]	σ_{f_2}/f_2 [%]	σ_φ [°]	$\sigma_{ \bar{z} }/ \bar{Z} $ [%]	σ_f/f [%]	σ_φ [°]	$\sigma_{ \bar{z} }/ \bar{Z} $ [%]
\bar{Z}_1	$8,19 \times 10^{-7}$	$8,19 \times 10^{-7}$	$3,90 \times 10^{-2}$	$4,91 \times 10^{-3}$	$8,19 \times 10^{-7}$	$2,44 \times 10^{-3}$	$4,82 \times 10^{-3}$
\bar{Z}_3	$6,10 \times 10^{-7}$	$6,10 \times 10^{-7}$	$5,41 \times 10^{-2}$	$1,21 \times 10^{-2}$	$6,10 \times 10^{-7}$	$5,64 \times 10^{-3}$	$9,73 \times 10^{-3}$
\bar{Z}_{11}	$4,51 \times 10^{-7}$	$4,51 \times 10^{-7}$	$5,79 \times 10^{-2}$	$9,93 \times 10^{-3}$	$4,51 \times 10^{-7}$	$6,45 \times 10^{-3}$	$9,46 \times 10^{-3}$
\bar{Z}_{16}	$1,69 \times 10^{-6}$	$1,69 \times 10^{-6}$	$1,97 \times 10^{-1}$	$2,74 \times 10^{-2}$	$1,69 \times 10^{-6}$	$1,16 \times 10^{-2}$	$2,36 \times 10^{-2}$
\bar{Z}_{20}	$1,04 \times 10^{-6}$	$1,04 \times 10^{-6}$	$7,89 \times 10^{-2}$	$1,65 \times 10^{-2}$	$1,04 \times 10^{-6}$	$7,18 \times 10^{-3}$	$1,56 \times 10^{-2}$

Tabela 3.2 – Comparação entre o método de 4+4 e o método de 4+3 parâmetros. Os resultados foram obtidos com um conversor de 16 bit e um número de amostras adquiridas por canal correspondente à 300 períodos

3.5 Aplicação do método de sete parâmetros

Ao contrário dos algoritmos de 4+4 e 4+3, o algoritmo de sete parâmetros estima os parâmetros das duas sinusóides tendo em conta os dois conjuntos de amostras, respeitando assim a restrição da frequência comum aos dois sinais. À semelhança dos algoritmos de 4+4 e de 4+3 verifica-se nas Figuras 3.30 a 3.34 um decréscimo nos desvios padrões da amplitude à medida que o número de amostras aumenta. Obtém-se também melhor desempenho do algoritmo utilizando um ADC de maior resolução.

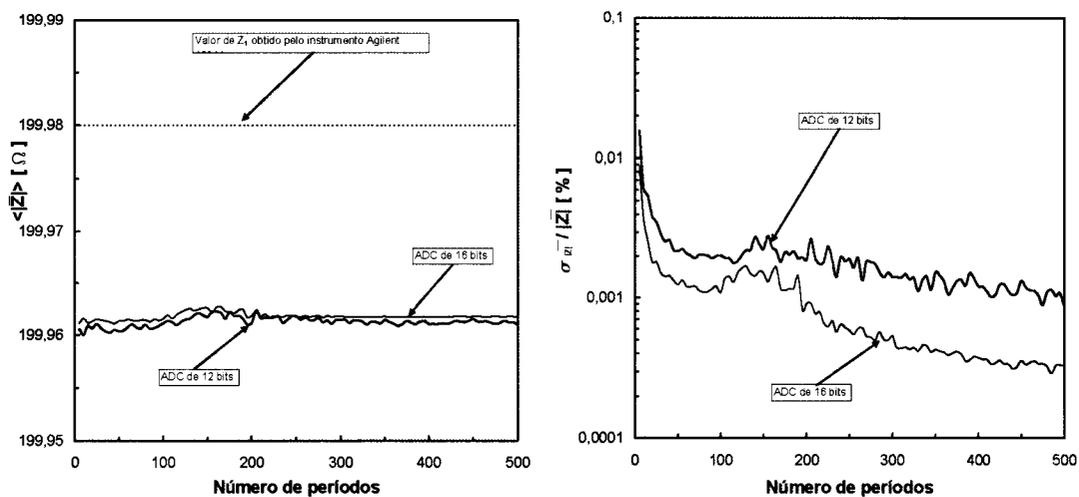


Figura 3.30 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

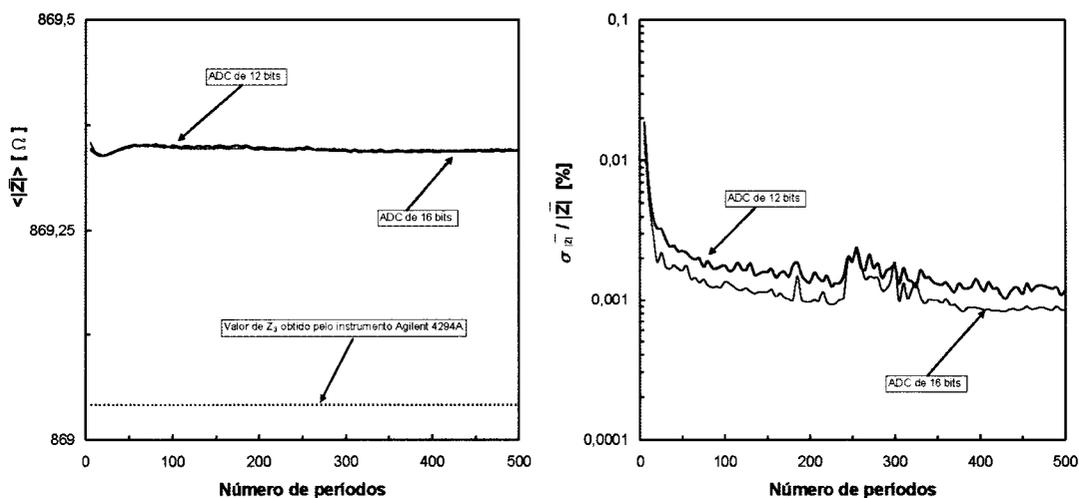


Figura 3.31 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_3 à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

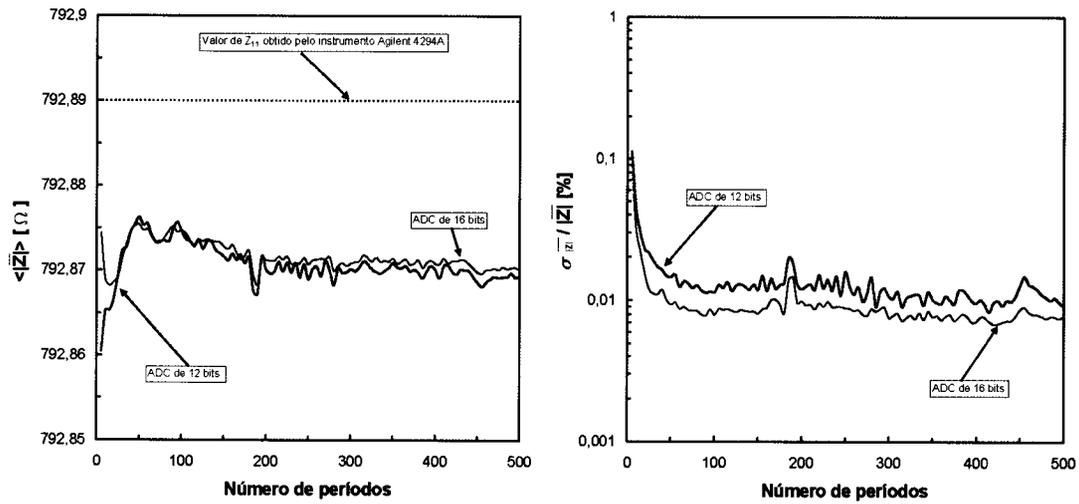


Figura 3.32 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{11} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

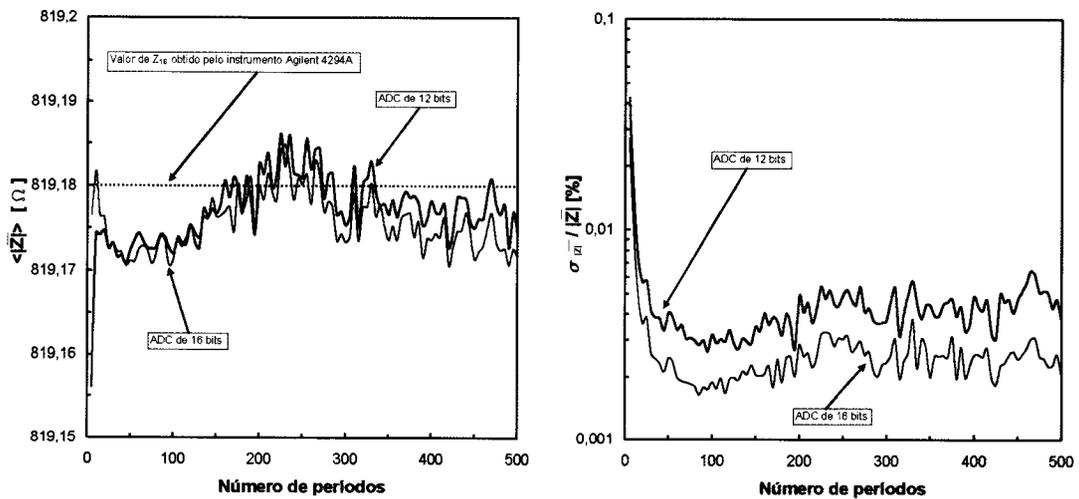


Figura 3.33 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{16} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

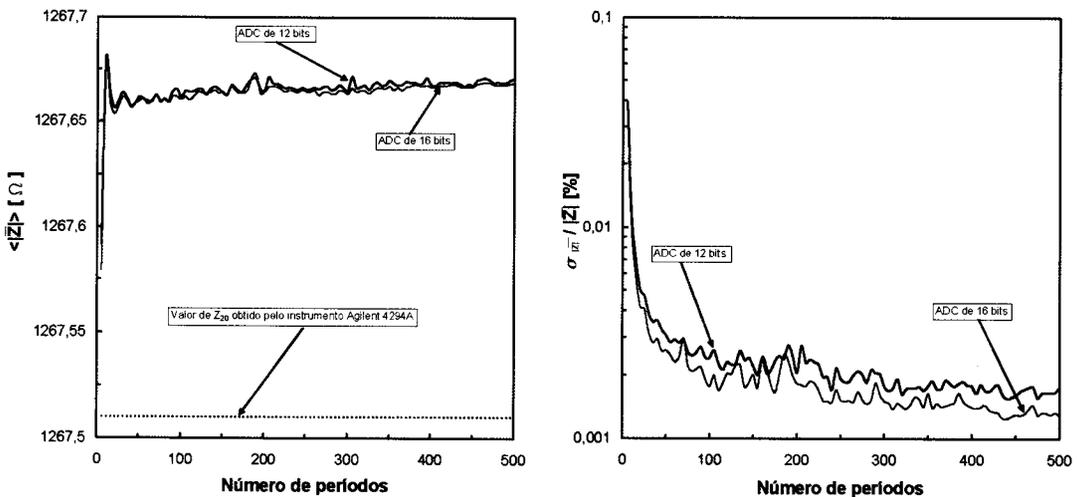


Figura 3.34 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{20} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

Em relação aos algoritmos de 4+4 e 4+3 o algoritmo de sete parâmetros apresenta melhor desempenho em relação à estimativa dos módulos das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} . Esta situação verifica-se confrontando as Figuras 3.30 a 3.34 (sete parâmetros) com as Figuras 3.15 a 3.19 (4+3) e as Figuras 3.3 a 3.7 (4+4). A mesma conclusão pode ser retirada em relação à fase analisando as Figuras 3.35 a 3.39 e comparando-as com as Figuras 3.9 a 3.13 e as Figuras 3.20 a 3.24.

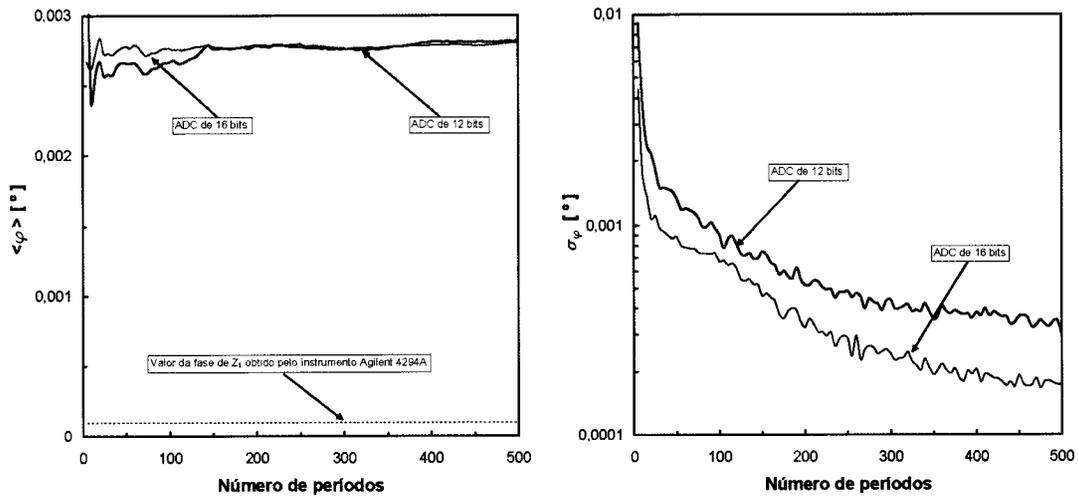


Figura 3.35 – Valores médios da fase de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_1 à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

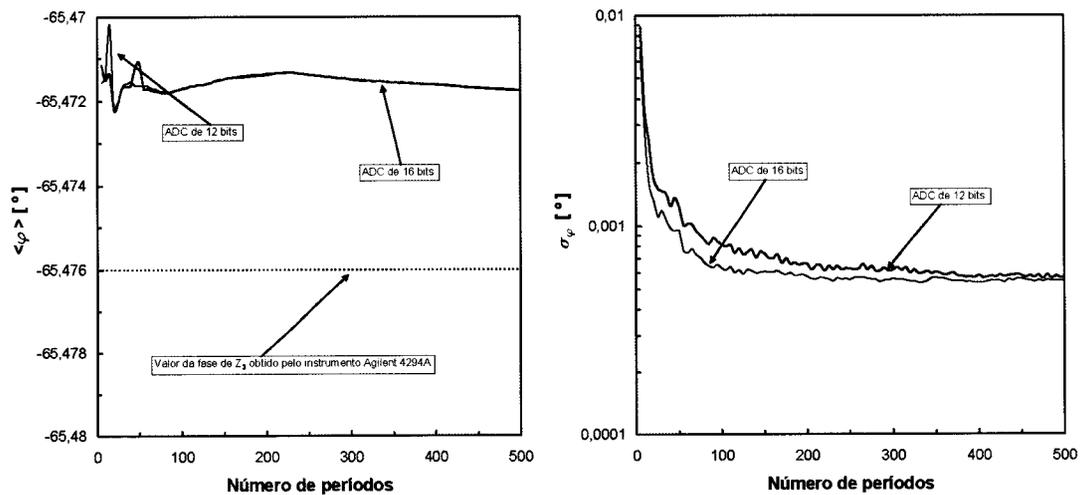


Figura 3.36 – Valores médios da fase de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_3 à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

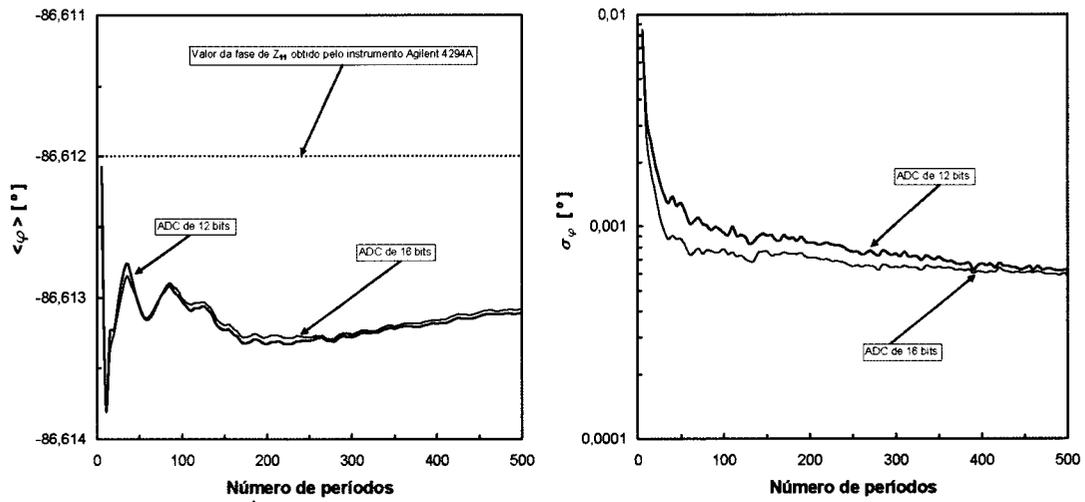


Figura 3.37 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{11} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

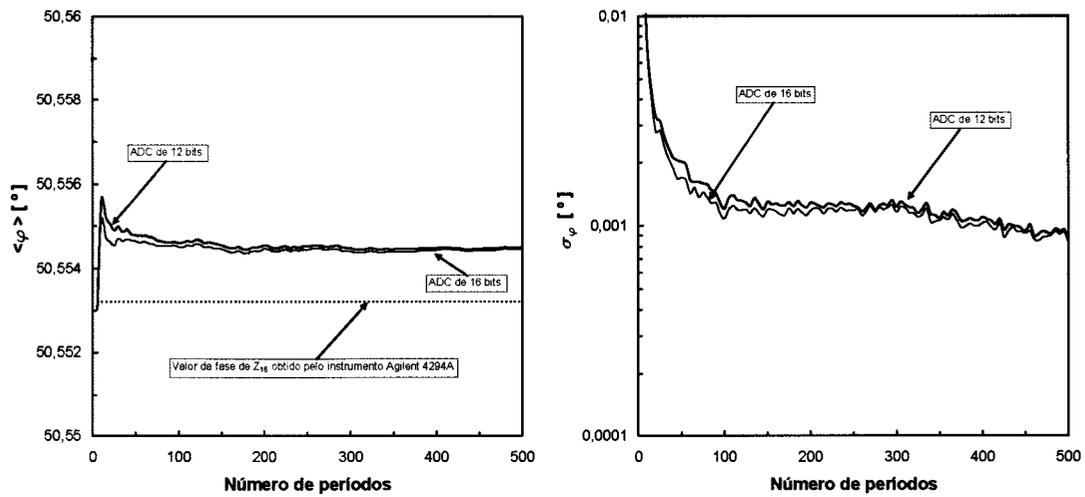


Figura 3.38 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{16} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

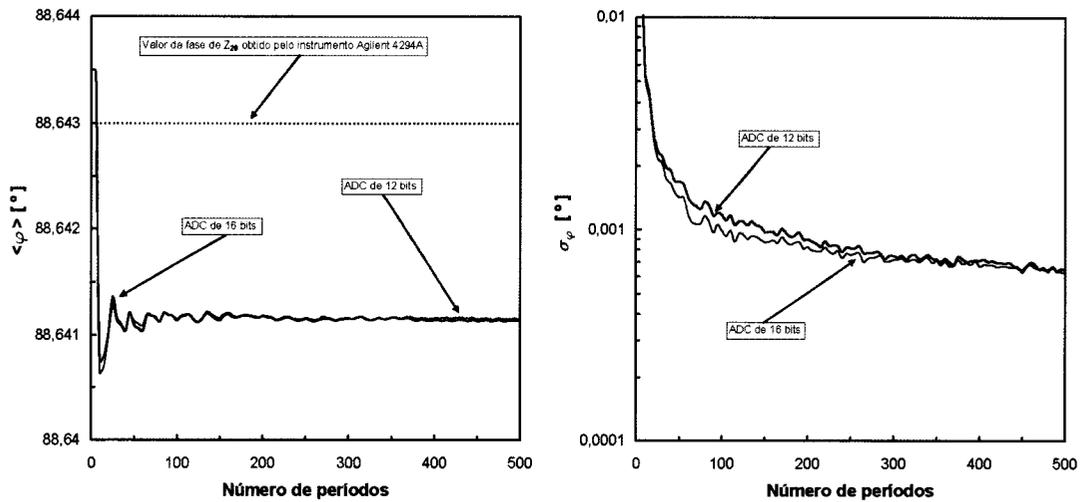


Figura 3.39 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{20} à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

O estudo da fase apresentado nas Figuras 3.35 a 3.39 mostra que o desvio padrão da fase decresce à medida que aumenta o número de amostras adquiridas. Constata-se também uma descida do desvio padrão da fase aumentando a resolução do conversor de 12 para 16 bit.

Nas Figuras 3.40 a 3.44, como era de esperar, o desvio padrão da frequência diminui à medida que aumenta o número de amostras. Nota-se também um maior decréscimo do desvio padrão da frequência usando um conversor ADC de maior resolução.

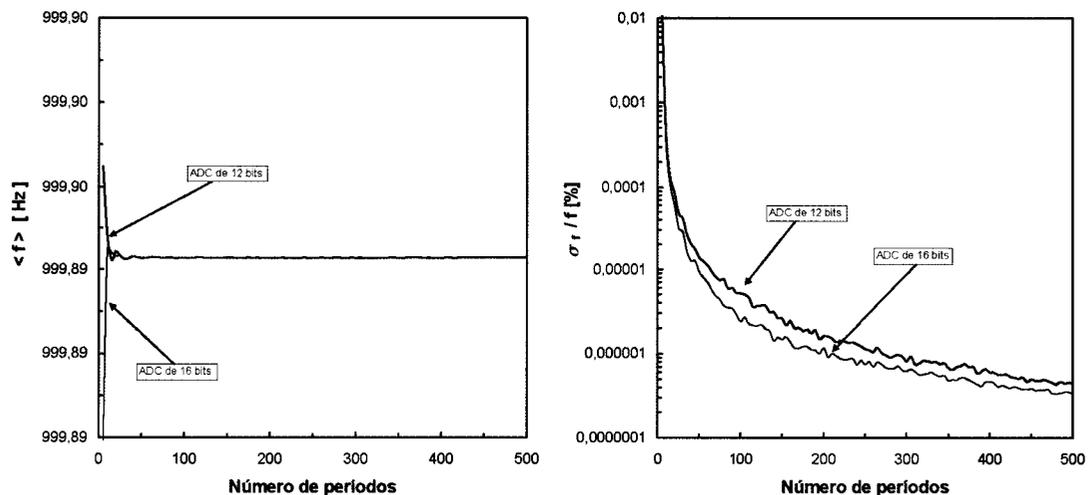


Figura 3.40 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

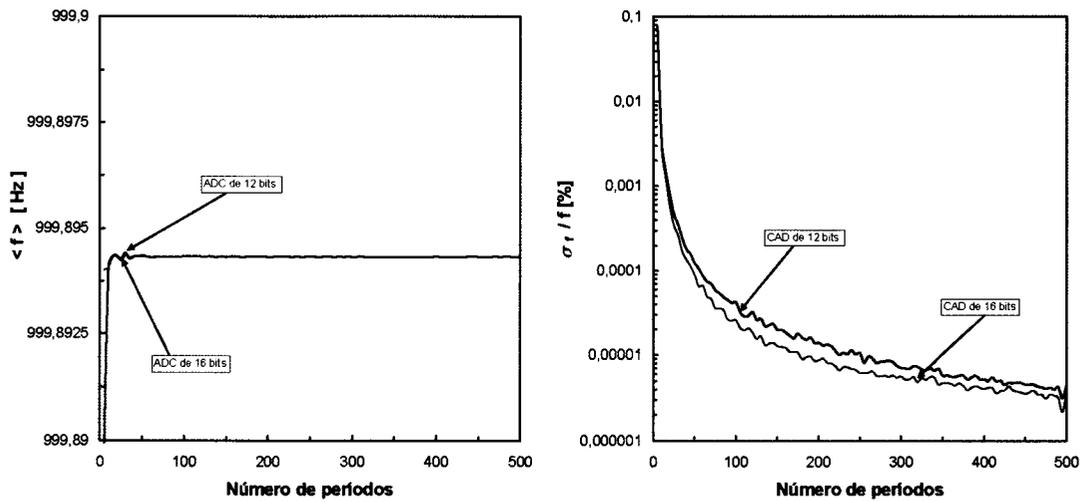


Figura 3.41 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

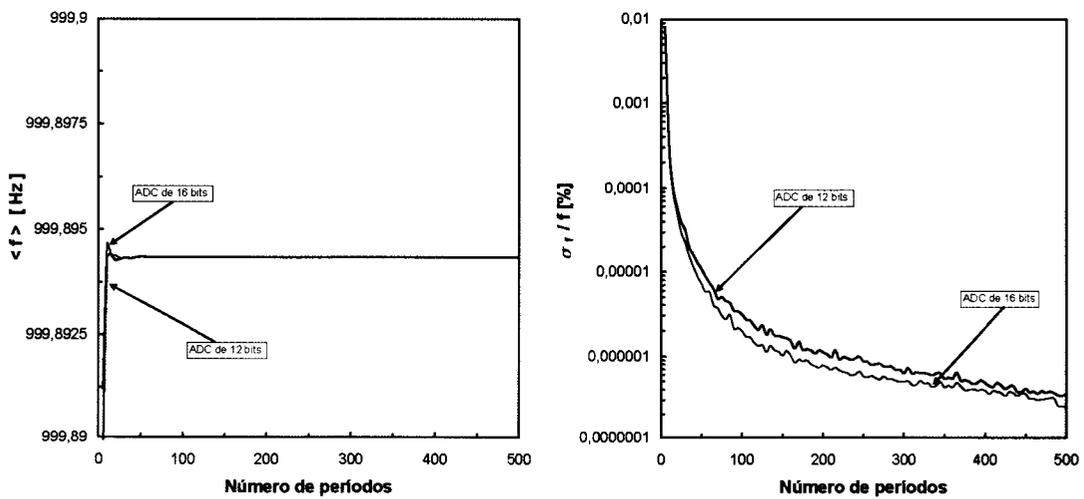


Figura 3.42 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

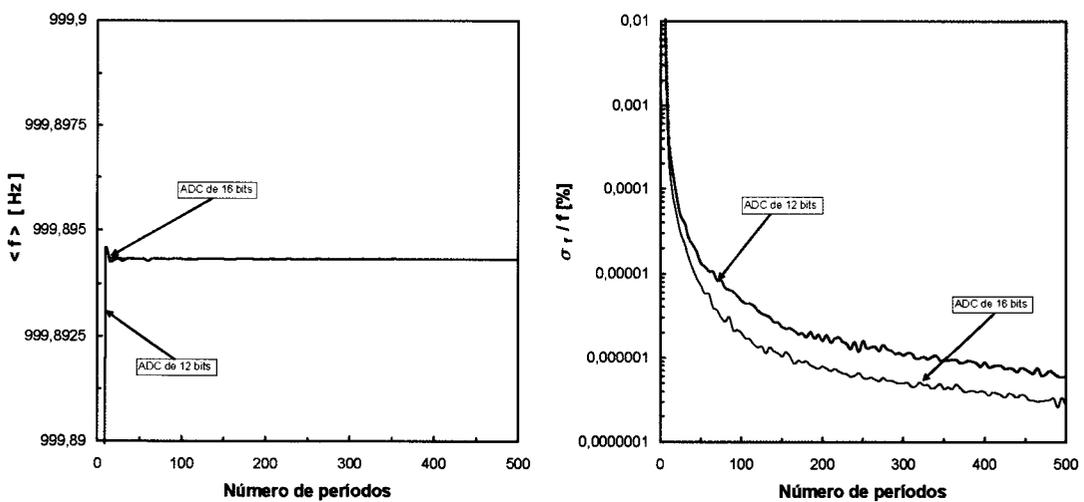


Figura 3.43 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

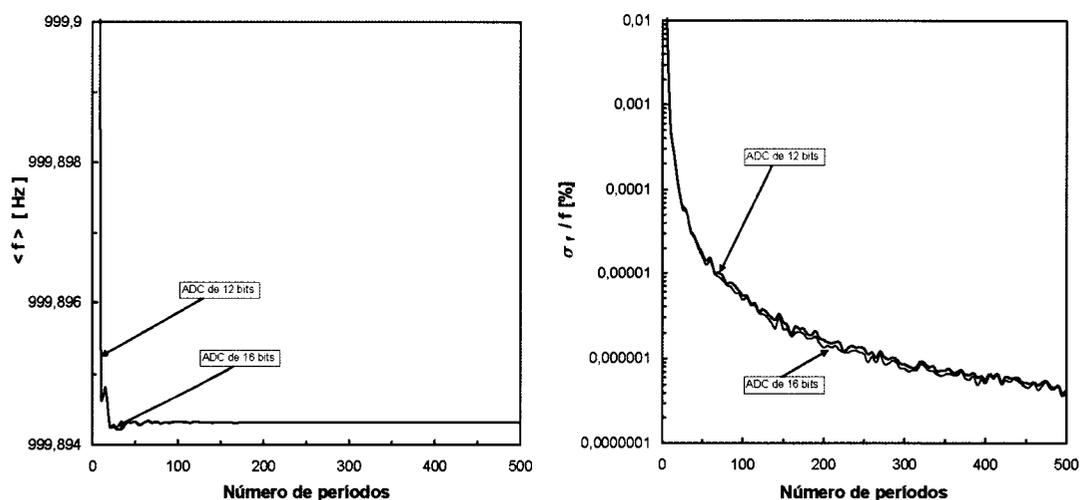


Figura 3.44 – Valores médios da frequência estimada para a impedância \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da mesma frequência à direita, para ADCs de 12 e 16 bit.

Da análise das figuras apresentadas, constata-se que o método de sete parâmetros é o que apresenta o melhor desempenho. Verifica-se que o desvio padrão dos parâmetros estimados não varia significativamente a partir de um número de amostras que corresponde a aproximadamente 300 períodos.

Procedeu-se à medição de todas as impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ por aplicação do método de sete parâmetros. Para os resultados obtidos, procedeu-se ao cálculo da incerteza total da medida. Para o efeito estimam-se as componentes que contribuíam para a incerteza total com os desvios padrões estimados. A incerteza final combina todas as incertezas de todas as componentes que afectam os resultados recorrendo à lei da propagação das incertezas.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.45)$$

$$u_c^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (1.46)$$

O termo $u(x_i, x_j)$ corresponde à estimativa da co-variância associada à x_i e à x_j que no caso serem independentes é nulo.

No caso das medidas efectuadas, a função f corresponde às expressões do módulo da impedância medida, em função das amplitudes D_1 , D_2 e do módulo da impedância de referência $|\bar{Z}_R|$. Como também corresponde à expressão da fase da impedância medida.

Estas expressões são dadas por

$$|\bar{Z}| = \frac{D_2}{D_1} |\bar{Z}_R| \quad (3.7)$$

e

$$\varphi_z = \Delta\varphi + \varphi_{\bar{Z}_R} \quad (3.8)$$

A incerteza total sobre $|\bar{Z}|$ e φ_z é dada utilizando (3.6)

$$u_{|\bar{Z}|} = \sqrt{u_{D_2/D_1}^2 |\bar{Z}_R|^2 + u_{|\bar{Z}_R|}^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2} \quad (3.9)$$

$$u_{\varphi_z} = \sqrt{u_{\Delta\varphi}^2 + u_{\varphi_{\bar{Z}_R}}^2} \quad (3.10)$$

Os termos $u_{|\bar{Z}_R|}$ e $u_{\varphi_{\bar{Z}_R}}$ são calculados em função do erro máximo do instrumento dado pelo construtor como

$$u_{|\bar{Z}_R|} = \frac{E_{\max}(|\bar{Z}_R|)}{\sqrt{3}} \quad (3.11)$$

e

$$u_{\varphi_{\bar{Z}_R}} = \frac{E_{\max}(\varphi_{\bar{Z}_R})}{\sqrt{3}} \quad (3.12)$$

Quanto aos termos u_{D_2/D_1} e $u_{\Delta\varphi}$ são os desvios padrões de D_2/D_1 e $\Delta\varphi$ respectivamente.

Não considerando a influencia da incerteza sobre a impedância \bar{Z}_R as expressões (3.9) e (3.10) passam a ser

$$u_{|\bar{Z}|} = \sqrt{u_{D_2/D_1}^2 |\bar{Z}_R|} \quad (3.13)$$

e

$$u_{\varphi_z} = u_{\Delta\varphi} \quad (3.14)$$

Na Tabela 3.3 apresenta-se o estudo comparativo entre as medidas efectuadas pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e o método de sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com o conversor analógico digital de 16 bit.

	Agilent 4294A				Método de sete parâmetros			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [$^\circ$]	Δ_φ [$^\circ$]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [$^\circ$]	Δ_φ [$^\circ$]
\bar{Z}_1	199,98	0,08	0,0001	0,026	199,96	0,0025	0,0028	0,0019
\bar{Z}_2	899,71	0,08	0,002	0,025	899,68	0,0332	-0,010	0,0021
\bar{Z}_3	869,04	0,08	-65,476	0,025	869,34	0,0012	-65,472	0,0011
\bar{Z}_4	1244,14	0,08	-39,450	0,025	1244,19	0,0371	-39,440	0,0221
\bar{Z}_5	1030,25	0,08	-50,123	0,025	1030,05	0,0392	-50,113	0,0211
\bar{Z}_6	901,32	0,08	-26,759	0,025	901,34	0,0022	-26,749	0,0011
\bar{Z}_7	459,53	0,08	-62,776	0,025	459,57	0,0015	-62,769	0,0006
\bar{Z}_8	1619,99	0,08	-75,315	0,025	1619,97	0,0031	-75,320	0,0039
\bar{Z}_9	1764,14	0,08	-62,647	0,025	1714,21	0,0046	-62,639	0,0021
\bar{Z}_{10}	1567,17	0,08	-89,610	0,025	1567,27	0,0032	-89,618	0,0021
\bar{Z}_{11}	792,88	0,08	-86,612	0,025	792,87	0,0013	-86,614	0,0011
\bar{Z}_{12}	376,23	0,08	86,249	0,025	376,32	0,0027	86,251	0,0012
\bar{Z}_{13}	496,32	0,08	49,170	0,025	496,27	0,0040	49,162	0,0013
\bar{Z}_{14}	973,60	0,08	18,740	0,025	973,84	0,0031	18,736	0,0021
\bar{Z}_{15}	138,72	0,08	62,869	0,026	138,84	0,0014	62,867	0,0007
\bar{Z}_{16}	818,19	0,08	50,553	0,025	819,17	0,0085	50,555	0,0022
\bar{Z}_{17}	1037,73	0,08	37,628	0,025	1037,81	0,0039	37,628	0,0011
\bar{Z}_{18}	1461,91	0,08	60,045	0,025	1461,87	0,0034	60,029	0,0017
\bar{Z}_{19}	1309,15	0,08	75,405	0,025	1309,14	0,0053	75,406	0,0021
\bar{Z}_{20}	1267,51	0,08	88,643	0,025	1267,66	0,0031	88,637	0,0021

Tabela 3.3 – Determinação das impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

Da Tabela 3.3 conclui-se que o método dos sete parâmetros tem um melhor desempenho que o instrumento Agilent 4294A na determinação das impedâncias \bar{Z}_i . A comparação entre os dois procedimentos de medida mostra que o método dos sete parâmetros apresenta um intervalo de incerteza máximo para a fase das impedâncias com uma largura de $0,026^\circ$ e para a amplitude das impedâncias de $0,075\%$. Para o

Agilent 4294A a largura máxima dos correspondentes intervalos de incerteza são de $0,06^\circ$ de incerteza para a fase e $0,1\%$ para a amplitude da impedância [Apêndice B]. Nas Figuras 3.45 a 3.49 são apresentadas as medidas experimentais no plano de Argand de \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} e respectivos intervalos de incerteza. O círculo, “o”, na figura indica o valor obtido pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A enquanto o sinal “x” representa o valor obtido pelo método de sete parâmetros. Nas figuras estão também representados os intervalos de incerteza referentes ao instrumento Agilent 4294A e ao método de sete parâmetros. O intervalo de incerteza expandido correspondente ao método dos sete parâmetros (linha grossa), não se consegue distinguir, à escala da figura, do valor médio correspondente. Esta situação deriva da reduzida incerteza do método, e repete-se nas figuras seguintes.

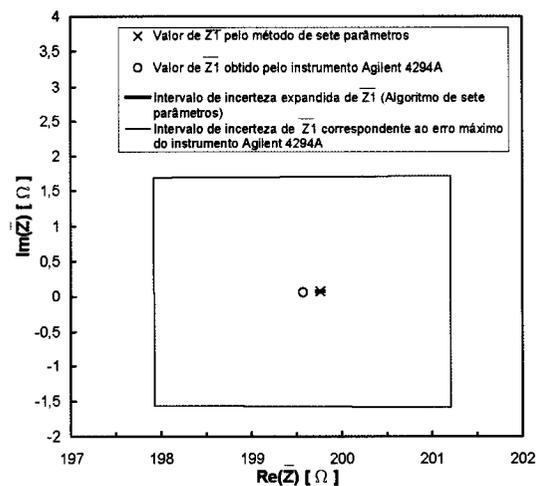


Figura 3.45 – Resultados experimentais e incertezas relativas à impedância \bar{Z}_1 pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com ADC de 16 bit.

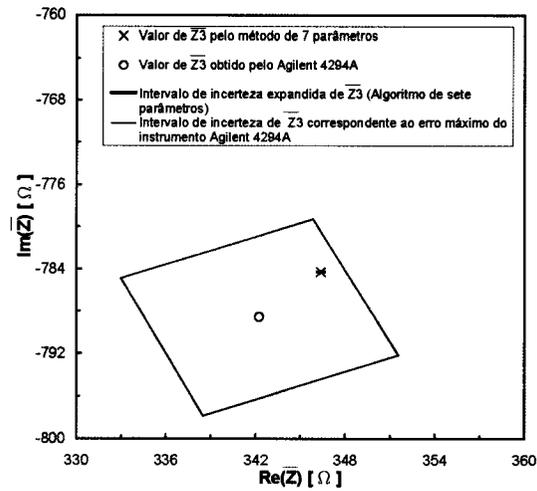


Figura 3.46 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_3 pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

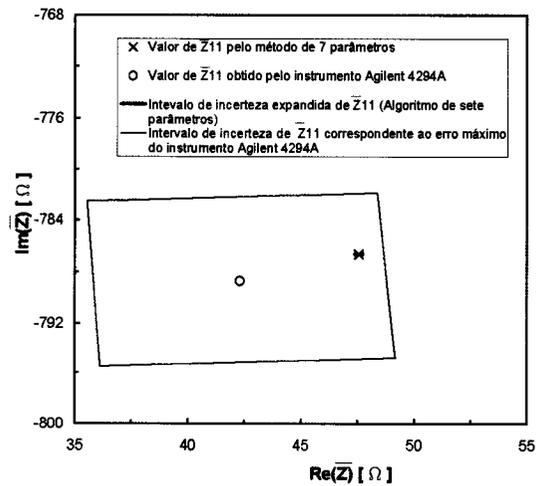


Figura 3.47 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{11} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

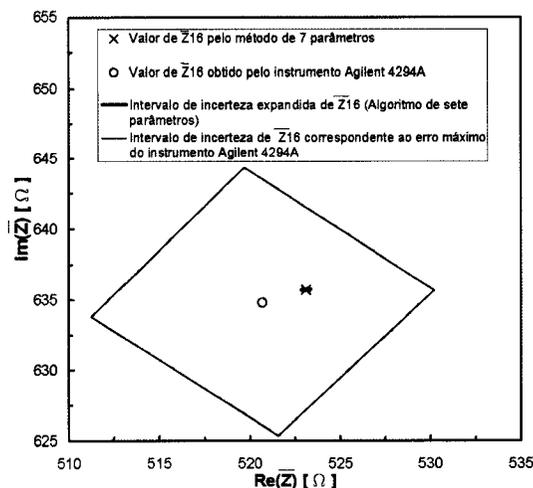


Figura 3.48 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{16} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

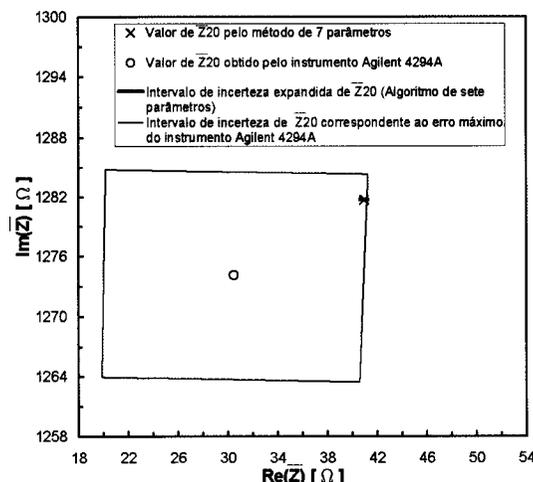


Figura 3.49 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{20} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos sete parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

3.6 Influência da incerteza da impedância de referência

Como os valores das impedâncias medidas dependem da exactidão dos valores das impedâncias de referência, a incerteza sobre a impedância de referência vai reflectir-se na incerteza da estimativa final das impedâncias medidas. As incertezas sobre as medidas efectuadas são dadas pelas equações (3.9) e (3.10).

Na Tabela 3.4 apresentam-se os valores das impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ obtidos com o instrumento Agilent 4294A e as respectivos incertezas, ver anexo [B] e os valores de $\bar{Z}_i, i = 1, \dots, 20$, obtidos pelo método de sete parâmetros com os respectivos intervalos de incerteza expandida devida a impedância de referência.

	Agilent 4294A				Algoritmo dos sete parâmetros com a incerteza devida à impedância de referência			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ_φ [°]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta'_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ'_φ [°]
\bar{Z}_1	199,98	0,08	0,0001	0,026	199,96	0,08	0,0028	0,026
\bar{Z}_2	899,71	0,08	0,002	0,025	899,68	0,08	-0,010	0,025
\bar{Z}_3	869,04	0,08	-65,476	0,025	869,34	0,08	-65,472	0,025
\bar{Z}_4	1244,14	0,08	-39,450	0,025	1244,19	0,08	-39,440	0,025
\bar{Z}_5	1030,25	0,08	-50,123	0,025	1030,05	0,08	-50,113	0,025
\bar{Z}_6	901,32	0,08	-26,759	0,025	901,34	0,08	-26,749	0,025
\bar{Z}_7	459,53	0,08	-62,776	0,025	459,57	0,08	-62,769	0,025
\bar{Z}_8	1619,99	0,08	-75,315	0,025	1619,97	0,08	-75,320	0,025
\bar{Z}_9	1764,14	0,08	-62,647	0,025	1714,21	0,08	-62,639	0,025
\bar{Z}_{10}	1567,17	0,08	-89,610	0,025	1567,27	0,08	-89,618	0,025
\bar{Z}_{11}	792,88	0,08	-86,612	0,025	792,87	0,08	-86,614	0,025
\bar{Z}_{12}	376,23	0,08	86,249	0,025	376,32	0,08	86,251	0,025
\bar{Z}_{13}	496,32	0,08	49,170	0,025	496,27	0,08	49,162	0,025
\bar{Z}_{14}	973,60	0,08	18,740	0,025	973,84	0,08	18,736	0,025
\bar{Z}_{15}	138,72	0,08	62,869	0,026	138,84	0,08	62,867	0,026
\bar{Z}_{16}	818,19	0,08	50,553	0,025	819,17	0,08	50,555	0,025
\bar{Z}_{17}	1037,73	0,08	37,628	0,025	1037,81	0,08	37,628	0,025
\bar{Z}_{18}	1461,91	0,08	60,045	0,025	1461,87	0,08	60,029	0,025
\bar{Z}_{19}	1309,15	0,08	75,405	0,025	1309,14	0,08	75,406	0,025
\bar{Z}_{20}	1267,51	0,08	88,643	0,025	1267,66	0,08	88,637	0,025

Tabela 3.4 – Resultados das medidas obtidas pela aplicação do método de sete parâmetros e as obtidas pelo instrumento Agilent 4294A. A tabela inclui o valor do intervalo da incerteza expandida devido à incerteza sobre a impedância de referência. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

Nas Figuras 3.50 a 3.54 são representados os valores imaginários e reais de \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} e respectivos erros. O círculo “o”, indica o valor obtido pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A enquanto o sinal “x” representa o valor obtido pelo método de sete parâmetros. As medidas foram efectuadas nas mesmas condições da Tabela 3.4.

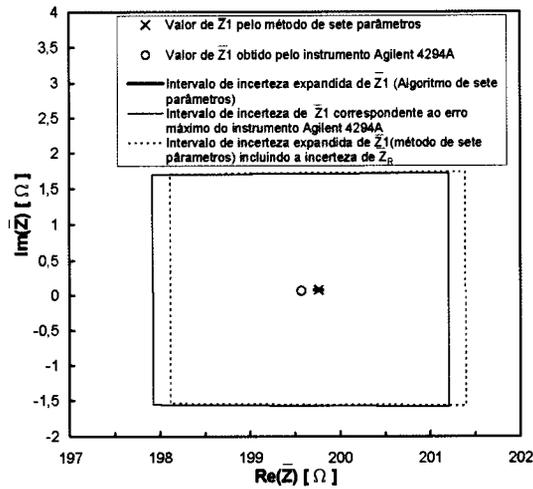


Figura 3.50 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_1 . A medida foi efectuada com impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 199,66 \Omega$.

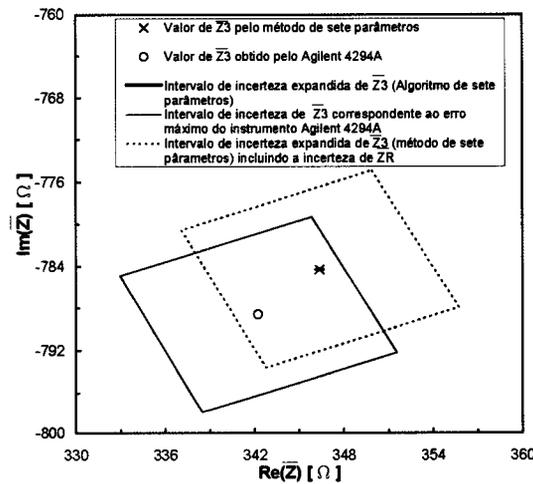


Figura 3.51 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_3 . A medida foi efectuada com impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 848,52 \Omega$.

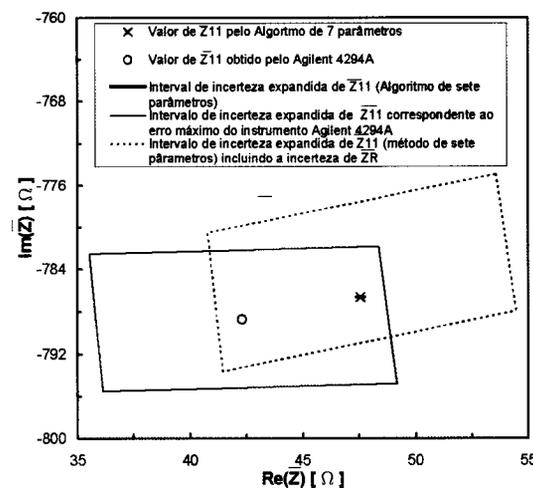


Figura 3.52 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{11} . A medida foi efectuada com uma impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

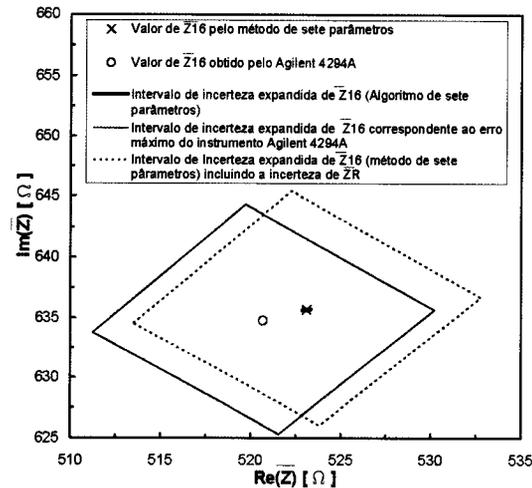


Figura 3.53 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{16} . A medida foi efectuada com impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

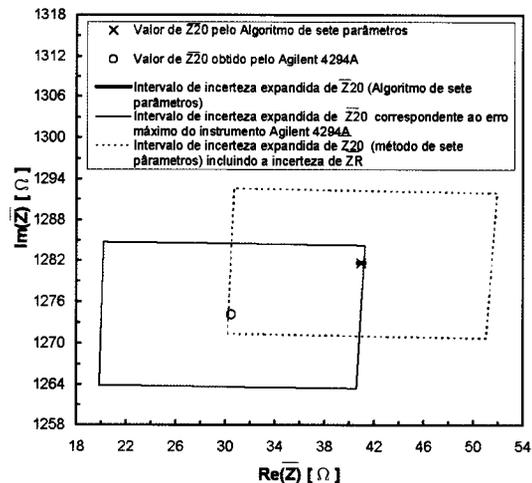


Figura 3.54 – Resultados experimentais e incertezas relativos à impedância \bar{Z}_{20} . A medida foi efectuada com impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 1258,67 \Omega$.

Constata-se das Figuras 3.50 a 3.54 que os intervalos das incertezas representados pelas secções de discos se sobrepõem, mostrando uma concordância entre os resultados obtidos pela aplicação do método dos sete parâmetros e os resultados obtidos pelo instrumento Agilent 4294A. Na escala apresentada é difícil distinguir a incerteza expandida sobre o valor da impedância, por esta ser muito pequena em relação a incerteza máxima do instrumento Agilent 4294A. Quando a incerteza devida à

impedância de referência é tido em conta, a incerteza total sobre a impedância é comparável à do instrumento Agilent 4294A.

3.7 Conclusões

Neste capítulo estudou-se a aplicação dos métodos de adaptação de sinusóides de 4+4, 4+3 e sete parâmetros à medição de impedâncias. Constatou-se que o desempenho dos três métodos depende da resolução do conversor analógico digital e do número de amostras adquiridas. Os desvios padrões experimentais dos parâmetros estimados decrescem à medida que aumenta o número de amostras adquirido embora este decréscimo deixe de ser significativo a partir de um número de amostras correspondente à aquisição de 300 períodos do sinal. Dos três algoritmos estudados o método dos sete parâmetros é o que apresenta o melhor desempenho em relação aos parâmetros estimados.

Comparando com o instrumento de medição de impedâncias Agilent 4294A, os resultados experimentais mostram que também aqui o método de sete parâmetros tem um melhor desempenho a muito menor custo, atendendo ao valor comercial do Agilent 4294A. Constatou-se que a incerteza das medidas depende também da incerteza da impedância de referência. No entanto, esta incerteza não é uma característica do método. A utilização de resistências de precisão com exactidão relativa de (0,01%) disponíveis no mercado ou a calibração de impedâncias de referência com instrumentos com melhor desempenho pode reduzir em muito o valor da incerteza total.

Referências

- [1] Christine Podilchuk, “Signal recovery from partial information”. *The Digital Signal Processing Handbook*. Editado por Vijak K. Madisetti e Douglas B. Williams, IEEE Press 1998.
- [2] NI USB-9215A, Portable USB-Based DAQ with Simultaneous Sampling. Data Sheet. *National Instruments*.
- [3] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine-fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [4] A. Cruz Serra, Pedro M. Ramos e M. Fonseca da Silva, “New impedance measurement technique”, *TELEC '02 International Conf.*, Santiago de Cuba, Julho 2002.
- [5] M. Fonseca da Silva, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameter sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [6] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Improving sine-fitting algorithms for amplitude and phase measurements”, *XVII IMEKO World Congress*, pp. 614-619, Dubrovnik, Croácia, Junho 2003.

IV. Método de adaptação de elipses

4.1 Introdução

As medidas de fase e de amplitude de duas sinusóides são fundamentais para a caracterização de um circuito linear [1]. Estas medidas também podem ser utilizadas para medir impedâncias com elevada exactidão, tal como analisado no Capítulo III. Os métodos numéricos apresentados no capítulo anterior, para a determinação da impedância, baseiam-se em métodos que requerem a determinação precisa da frequência comum às duas sinusóides. Esta frequência foi estimada no domínio da frequência com a FFT, IpDFT [2] e recorrendo à adaptação de sinusóides no domínio do tempo [3]. A determinação da frequência comum, nestes algoritmos, é fundamental para a exactidão da determinação dos outros parâmetros das sinusóides: amplitudes, diferenças de fase e componentes contínuas [4]. Com excepção do método de adaptação de sinusóides de três parâmetros, os restantes métodos de adaptação (de quatro e sete parâmetros) não são lineares em relação a um dos parâmetros a estimar. Para linearizar o modelo é necessário recorrer a um desenvolvimento em série de Taylor, o que leva a múltiplas iterações até à convergência. O número de iterações necessárias até à convergência depende da estimativa da frequência inicial [5]. A existência de múltiplos mínimos e máximos locais da função de custo dos mínimos quadrados, impõe uma determinação com elevada exactidão da frequência inicial. No entanto, na maioria dos casos, a frequência é imposta pelo utilizador e aplicada ao circuito sob teste e a determinação da frequência por si só torna-se desnecessária.

Neste capítulo é apresentado um algoritmo não iterativo para determinar as amplitudes e a diferença de fase entre duas sinusóides sem recorrer à estimativa da frequência.

A representação gráfica de duas sinusóides no plano xy é uma curva de Lissajous que, se as duas sinusóides tiverem uma frequência comum, corresponde a uma elipse [6-7]. Ao conjunto de pontos adquiridos com dois canais adapta-se uma forma quadrática cónica segundo o critério dos mínimos quadrados. Dadas as condições impostas, a cónica estimada é uma elipse, cujos parâmetros permitem calcular directamente as amplitudes e componentes contínuas de cada sinusóide e ainda a diferença de fase entre as duas sinusóides. O método é linear e não iterativo, dispensa ainda o conhecimento prévio da frequência do sinal, da frequência de amostragem e, consequentemente, dos instantes de recolha das amostras. Contudo, na selecção da frequência de amostragem, opta-se por uma amostragem não coerente com uma escolha adequada da frequência de amostragem de modo a não repetir pontos na elipse [8].

4.2 Descrição do método

Nesta secção apresenta-se um algoritmo numérico de adaptação de duas sinusóides a dois conjuntos de amostras adquiridos simultaneamente através de dois canais. O problema consiste em encontrar a forma quadrática, neste caso uma elipse, que melhor se adapta ao conjunto de dados experimentais.

Consideram-se dois sinais sinusoidais descritos por

$$\begin{aligned} u_1(t) &= D_1 \cos(2\pi ft + \varphi_1) + C_1 \\ u_2(t) &= D_2 \cos(2\pi ft + \varphi_2) + C_2 \end{aligned} \quad (1.47)$$

em que D_i é a amplitude da sinusóide no canal i , C_i é a componente contínua do sinal do canal i , $f = 1/T$ é a frequência comum aos dois sinais e $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ é a diferença de fase entre os dois sinais.

Na Figura 4.1 apresenta-se um exemplo de dois sinais adquiridos com um intervalo de amostragem de $\Delta t_s = 41\mu s$, amplitudes $D_1 = 1,1V$ e $D_2 = 0,7V$, frequência de 1000Hz e uma diferença de fase de 10° .

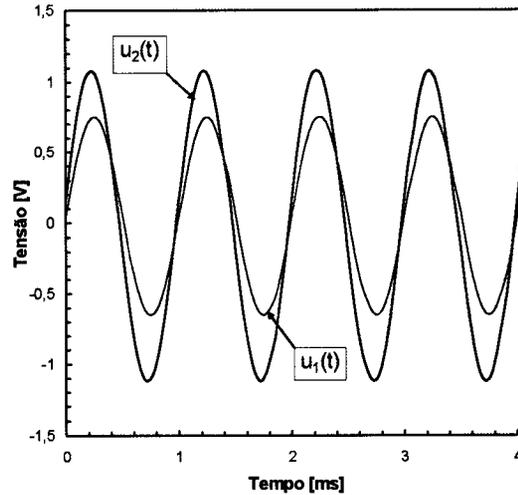


Figura 4.1 – Representação gráfica dos sinais sinusoidais $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Os dois sinais sinusoidais são digitalizados com a mesma frequência de amostragem f_s simultaneamente. Para evitar amostragem coerente seleccionam-se os valores das frequências f e f_s de modo que as repetições só ocorrem ao fim de 1000 amostras. São adquiridas N amostras por canal, sendo $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,k}, \dots, u_{1,N}$ as amostras do sinal $u_1(t)$ e $u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,k}, \dots, u_{2,N}$ as amostras do sinal $u_2(t)$.

De (1.47) tem-se

$$\begin{aligned} u_{1,k} &= D_1 \cos \left[2\pi \frac{f}{f_s} (k-1) + \varphi_1 \right] + C_1 \\ u_{2,k} &= D_2 \cos \left[2\pi \frac{f}{f_s} (k-1) + \varphi_2 \right] + C_2 \end{aligned} \quad (1.48)$$

sendo k um inteiro entre 1 e N .

A partir das amostras recolhidas, os parâmetros \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{C}_1 , \hat{C}_2 e $\hat{\varphi}$ das sinusóides descritas em (1.47) são determinados pelo cálculo dos coeficientes da elipse

que melhor se adapta aos dados, recorrendo à minimização da soma do quadrado dos resíduos, entre os pontos adquiridos e a elipse.

Efectuando a substituição,

$$\begin{aligned} U_1(t) &= u_1(t) - C_1 \\ U_2(t) &= u_2(t) - C_2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

É possível eliminar o tempo e a frequência de (1.47)

$$\left(\frac{U_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{U_2}{D_2}\right)^2 - 2\left(\frac{U_1 U_2}{D_1 D_2}\right) \cos(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 0. \quad (1.50)$$

Esta equação corresponde a uma forma quadrática cónica, cuja forma geral é

$$au_1^2 + bu_1u_2 + cu_2^2 + du_1 + eu_2 + 1 = 0. \quad (1.51)$$

A cónica (1.51) corresponde a uma elipse quando

$$b^2 - 4ac < 0. \quad (1.52)$$

A equação (1.50), resultante da representação xy das duas sinusóides, corresponde sempre a uma elipse desde que $\varphi \neq n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$. Quando $\varphi = n\pi$, (i.e., quando os dois sinais estão em fase ou em oposição de fase) a representação gráfica no plano xy de (1.50) é um segmento de recta.

Na Figura 4.2 apresentam-se elipses obtidas, por simulação numérica, para dois sinais sinusoidais sem ruído e na Figura 4.3 com ruído aditivo gaussiano. Os resultados apresentados correspondem a diversas diferenças de fase.

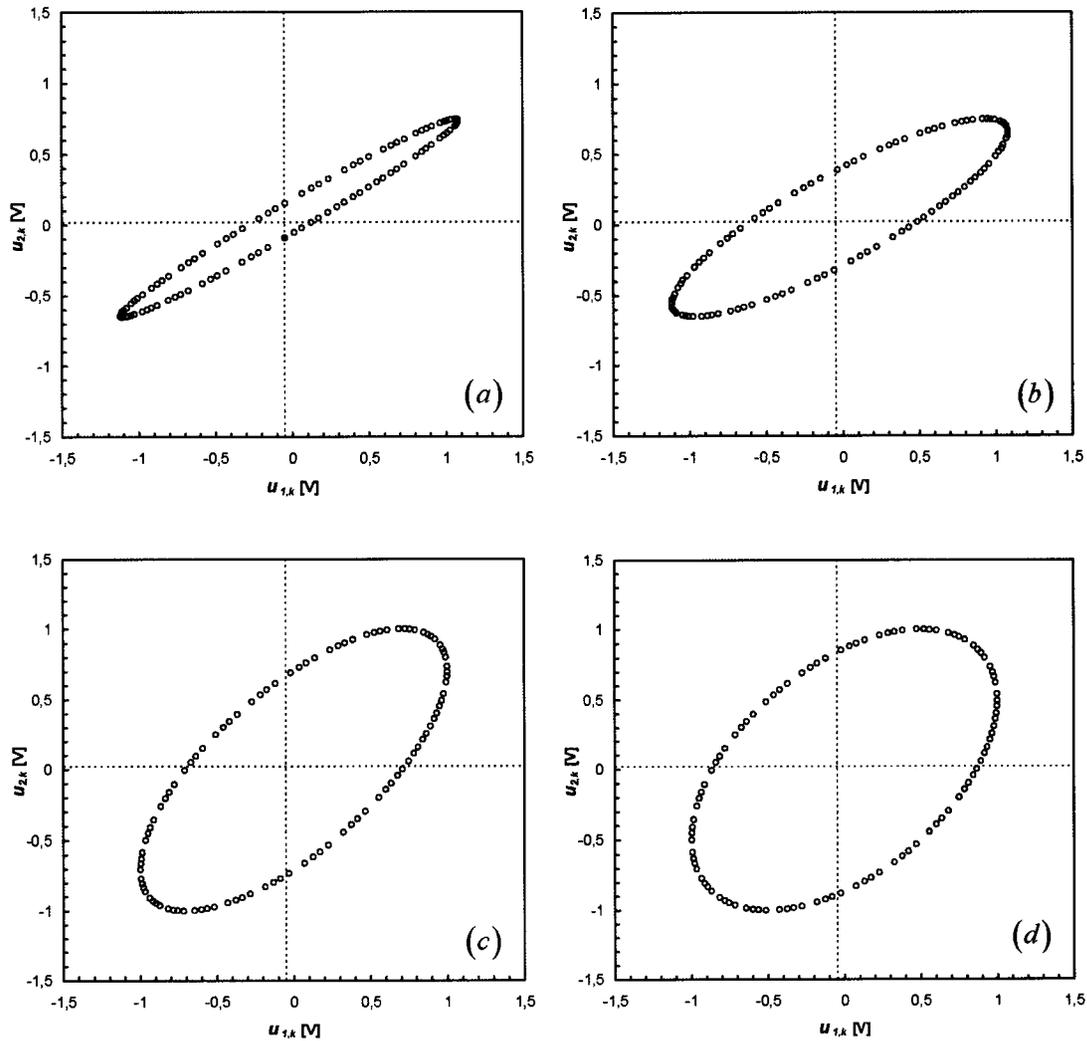


Figura 4.2 – Representação gráfica no plano xy de duas sinusóides com amplitudes $D_1 = 1,1V$, $D_2 = 0,7V$ (a) e (b) e $D_2 = 1V$ (c) e (d). As diferenças de fase são (a). $\varphi = 10^\circ$; (b) $\varphi = 30^\circ$; (c) $\varphi = 45^\circ$; (d) $\varphi = 60^\circ$. Foi simulada a aquisição de 122 amostras em cada canal de medida a uma frequência de amostragem $f_s = 1/41\mu s$.

A cónica (1.51) pode ser reescrita sob a forma vectorial

$$F(u_1, u_2) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (1.53)$$

com o vector de parâmetros da elipse

$$\mathbf{a} = [a \ b \ c \ d \ e \ 1]^T \quad (1.54)$$

e \mathbf{x} é o vector

$$\mathbf{x} = [u_1^2 \ u_1 u_2 \ u_2^2 \ u_1 \ u_2 \ 1]. \quad (1.55)$$

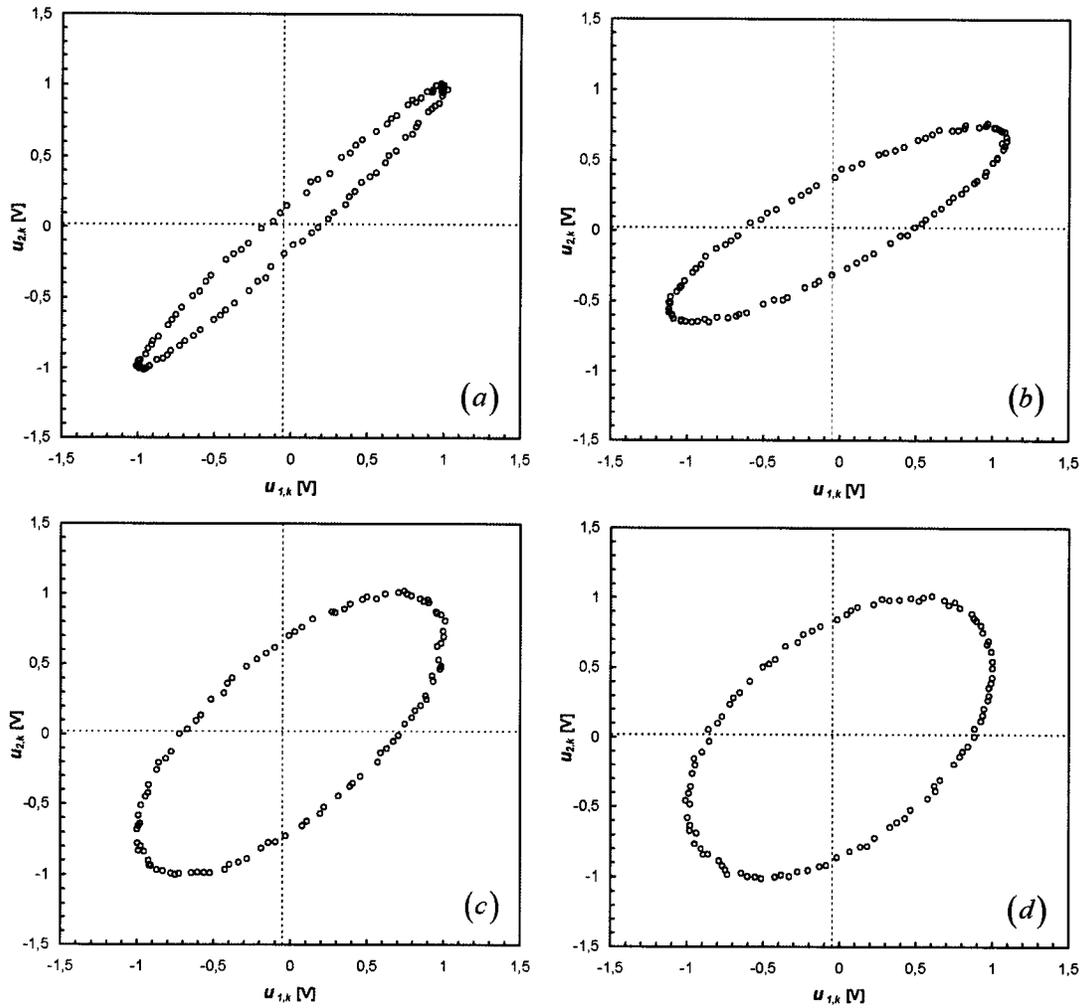


Figura 4.3 – Representação gráfica no plano xy de duas sinusóides com amplitudes $D_1 = 1,1V$, $D_2 = 0,7V$ (a) e (b) e $D_2 = 1V$ (c) e (d). As diferenças de fase são (a) $\varphi = 10^\circ$; (b) $\varphi = 30^\circ$; (c) $\varphi = 45^\circ$; (d) $\varphi = 60^\circ$. Foi simulada a aquisição de 122 amostras em cada canal de medida a uma frequência de amostragem $f_s = 1/41\mu s$. Aos sinais foi somado ruído gaussiano com valor eficaz de 10 mV.

Encontrar a elipse que melhor se adapta ao conjunto das amostras $u_{1,k}$ e $u_{2,k}$

corresponde a encontrar o vector $\hat{\mathbf{a}}$ que minimiza

$$S_a = \sum_{k=1}^M F^2(u_{1,k}, u_{2,k}). \quad (1.56)$$

A condição de existência de um mínimo para (1.56) corresponde a

$$\nabla S_a \Big|_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{0} \quad (1.57)$$

o que corresponde a um sistema algébrico de equações lineares

$$\mathbf{D}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (1.58)$$

A matriz \mathbf{D} é determinada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n u_{1,k}^4 & 2 \sum_{i=1}^n u_{1,k}^3 & \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k}^2 & 2 \sum_{i=1}^n u_{1,k}^3 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k}^2 \\ \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k}^3 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k}^2 & \sum_{i=1}^n u_{2,k}^3 u_{1,k} & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k}^2 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k} \\ \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k}^2 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^3 u_{1,k} & \sum_{i=1}^n u_{2,k}^4 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k} & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^3 \\ \sum_{i=1}^n u_{1,k}^3 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k}^2 & \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k} & 2 \sum_{i=1}^n u_{1,k}^2 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k} \\ \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k}^2 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k}^2 u_{1,k} & \sum_{i=1}^n u_{2,k}^3 & 2 \sum_{i=1}^n u_{2,k} u_{1,k} & 2 \sum_{i=1}^n u_{1,k}^2 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

e o vector \mathbf{z} é

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M u_{1,k}^2 & \sum_{k=1}^M u_{1,k} u_{2,k} & \sum_{k=1}^M u_{2,k}^2 & \sum_{k=1}^M u_{1,k} & \sum_{k=1}^M u_{2,k} \end{bmatrix}^T. \quad (1.60)$$

O vector $\hat{\mathbf{a}}$ que contém os parâmetros da elipse que melhor se adapta às amostras $u_{1,k}$ e

$u_{2,k}$

$$\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a} \quad \hat{b} \quad \hat{c} \quad \hat{d} \quad \hat{e} \quad 1]^T \quad (1.61)$$

é determinado por

$$\hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{z}. \quad (1.62)$$

Os parâmetros \hat{D}_1 , \hat{D}_2 , \hat{C}_1 , \hat{C}_2 e $\hat{\phi}$ são determinados a partir do vector $\hat{\mathbf{a}}$ obtido por

(1.62). As componentes contínuas estimadas dos dois sinais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são

$$\hat{C}_1 = \frac{\hat{b}\hat{e} - \hat{c}\hat{d}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2} \quad (1.63)$$

e

$$\hat{C}_2 = \frac{\hat{b}\hat{d} - \hat{a}\hat{e}}{\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2}. \quad (1.64)$$

As amplitudes estimadas são

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &= \max(\alpha_1, \alpha_2) - \hat{C}_1 \\ \hat{D}_2 &= \max(\beta_1, \beta_2) - \hat{C}_2,\end{aligned}\tag{1.65}$$

sendo os parâmetros α_i e β_i as soluções das equações

$$(\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2)\alpha^2 + 2(\hat{c}\hat{d} - \hat{b}\hat{e})\alpha + (\hat{c} - \hat{e}^2) = 0\tag{1.66}$$

e

$$(\hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2)\beta^2 + 2(\hat{a}\hat{e} - \hat{b}\hat{d})\beta + (\hat{a} - \hat{d}^2) = 0.\tag{1.67}$$

O modulo da diferença de fase estimada, $|\hat{\phi}|$, obtém-se através de

$$|\hat{\phi}| = \cos^{-1}\left(\frac{\hat{b}\hat{D}_2 + \hat{d}\hat{C}_1}{\hat{a}\hat{D}_1 + \hat{D}_1}\right).\tag{1.68}$$

A estimativa da fase $\hat{\phi}$ pode ser positiva ou negativa consoante o sentido de rotação da elipse. O sentido de rotação da elipse é determinado através da variação do argumento do número complexo cujas componentes reais e imaginárias são as amostras dos sinais $u_1(t)$ e $u_2(t)$ no plano de Argand

$$z_k = u_{1,k} + u_{2,k}i.\tag{1.69}$$

Define-se o vector \mathbf{s} de rotação da elipse como

$$\mathbf{s} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_{N-1}]\tag{1.70}$$

em que

$$\delta_k = \text{sign}[\text{Arg}(z_{k+1}) - \text{Arg}(z_k)].\tag{1.71}$$

Assim, o vector \mathbf{s} tem como componentes $\delta_k \in \{-1, 0, 1\}$. Na ausência de ruído, os complexos z_k têm o mesmo sentido de rotação da elipse no plano xy . Quando o rácio $D_1/D_2 \ll 1$ ou $D_2/D_1 \ll 1$ e o ruído do sinal é próximo do passo de quantificação do conversor ADC (1 LSB), pode ocorrer uma oscilação no sentido da variação do $\text{Arg}(z)$.

Isto deve-se o facto de a resolução do ADC não permitir detectar com exactidão suficiente a variação do sentido do sinal.

Define-se o sentido de rotação da elipse, s_r , como o sinal do valor médio das rotações dos complexos z_k no plano de Argand

$$s_r = \text{sign} \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \right). \quad (1.72)$$

A estimativa final de $\hat{\phi}$ obtém-se, combinando (1.68) e (1.72)

$$\hat{\phi} = s_r \cos^{-1} \left(\frac{\hat{b} \hat{D}_2 + \hat{d}}{\hat{a} \hat{D}_1} + \frac{\hat{C}_1}{\hat{D}_1} \right). \quad (1.73)$$

Na Figura 4.4 apresenta-se uma adaptação do método descrito às amostras adquiridas correspondentes à Figura 4.1.

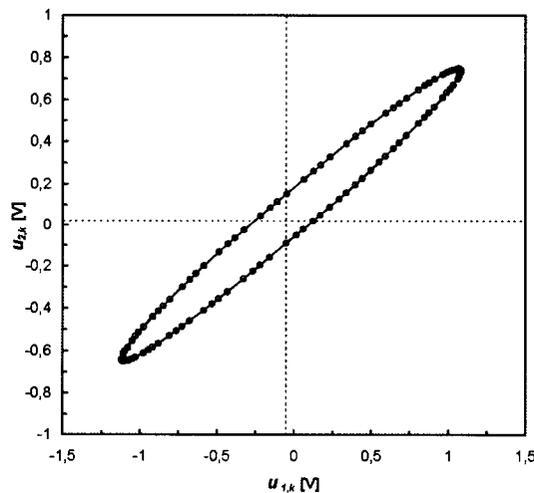


Figura 4.4 – Representação gráfica da elipse adaptada aos pontos adquiridos correspondentes à situação da Figura 4.2-(a). Foram adquiridas 122 amostras em cada canal de medida a uma frequência de amostragem $f_s = 1/41 \mu\text{s}$.

4.3 Simulação numérica

Nesta secção são apresentados os resultados de simulações numéricas do algoritmo de adaptação de elipses. Analisa-se a dependência do algoritmo em relação à fase e a dependência do desvio padrão da fase em relação às amplitudes D_1 e D_2 . Os

sinais considerados são sinusóides, sem componentes contínuas e com uma frequência de 1 kHz. Os sinais foram amostrados com um tempo de amostragem de $\Delta t_s = 41 \mu\text{s}$ por um conversor ADC com uma escala de $\pm 1 \text{ V}$. Para simular as condições reais de um processo de medidas experimentais onde há uma presença permanente de ruído, aos dois sinais é somado um ruído gaussiano com um valor médio nulo e um valor eficaz correspondente ao desvio padrão σ . A função de distribuição do ruído é

$$r(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.74)$$

4.3.1 Desempenho do algoritmo em função da diferença de fase.

Nesta secção analisa-se a dependência do algoritmo em relação à fase, variando a resolução do ADC e o valor eficaz do ruído gaussiano aditivo. Foram efectuados $M = 10000$ ensaios para cada diferença de fase no intervalo $(-180^\circ, +180^\circ)$. Para cada valor da diferença de fase imposta foi calculado o valor médio da diferença de fase estimada

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\varphi}_i \quad (1.75)$$

e o correspondente desvio padrão

$$\delta_\varphi = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\varphi}_i - \bar{\varphi})^2}. \quad (1.76)$$

Os testes foram efectuados simulando um ADC ideal e para ADCs de 12 e 16 bit para valores eficazes de ruído de 0,1 mV e 1mV. Nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 apresentadas, verifica-se que o erro da fase depende do ruído do sinal e do número de bit do conversor ADC. O erro é máximo quando os dois sinais estão em fase ou em oposição de fase.

Neste caso a elipse degenera num segmento de recta o que dificulta a estimativa da fase especialmente na presença do ruído.

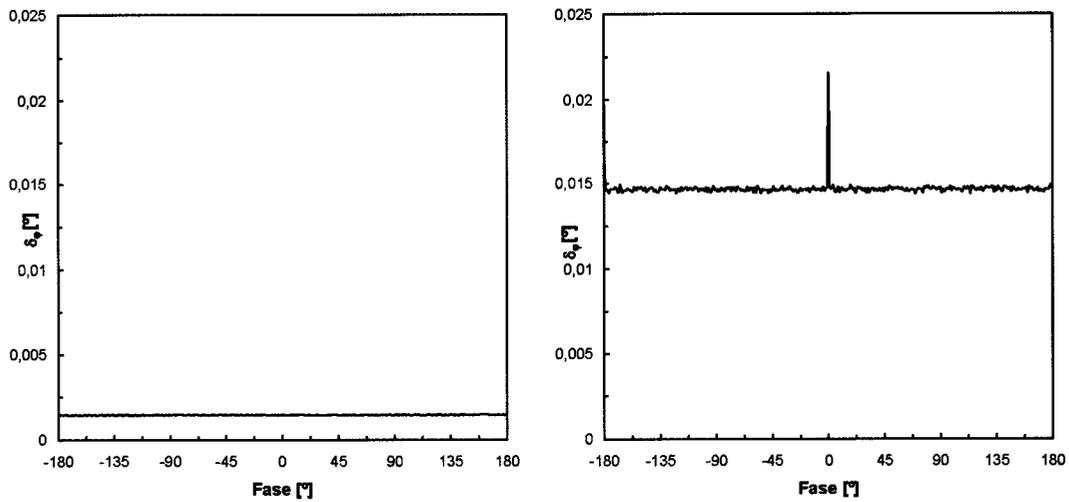


Figura 4.5 – Desvio padrão da fase em função da fase gerada, para um ADC de 12 bit, e um valor eficaz do ruído de 0,1 mV (à esquerda) e 1 mV (à direita).

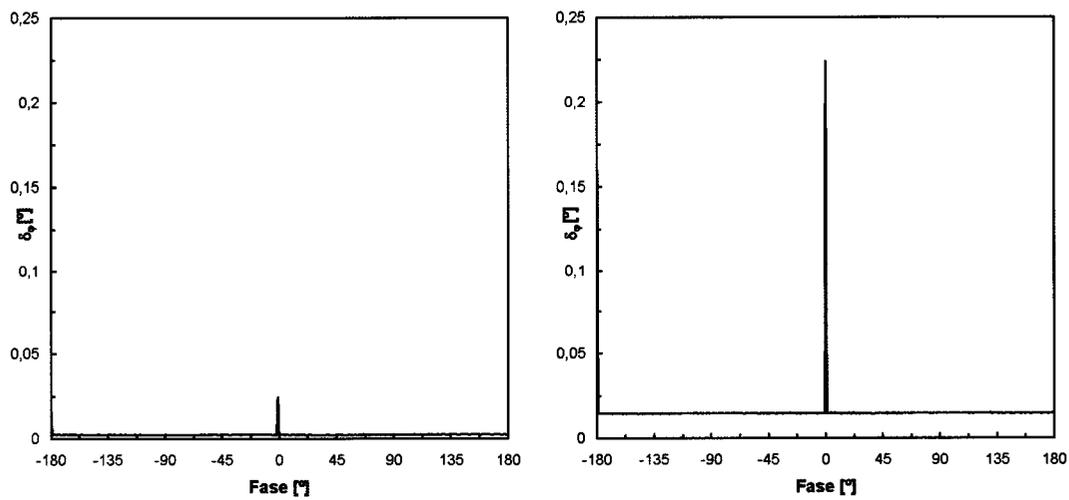


Figura 4.6 – Desvio padrão do erro da fase em função da fase gerada, para um ADC ideal e um valor eficaz do ruído de 0,1 mV (à esquerda) e 1 mV (à direita).

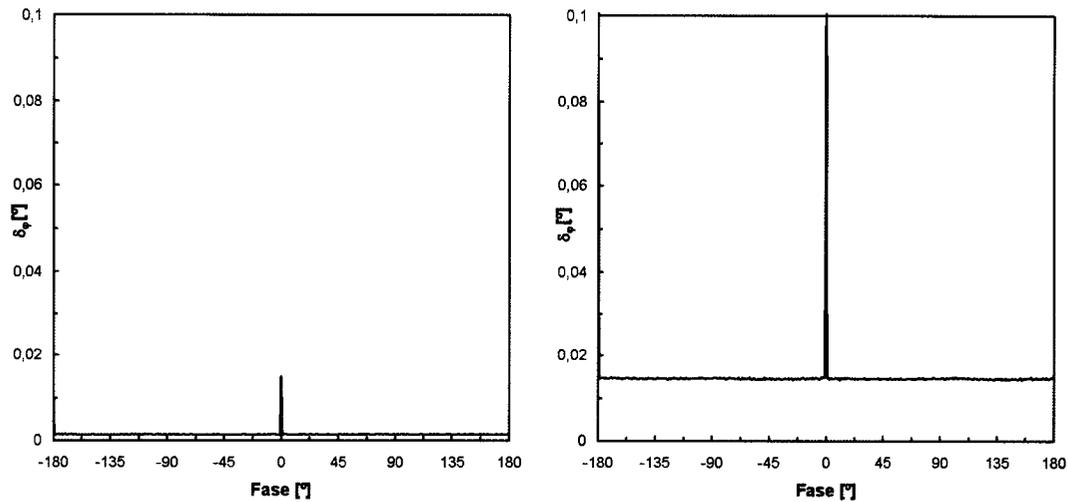


Figura 4.7 – Desvio padrão do erro da fase em função da fase gerada, para um ADC de 16 bit e um valor eficaz do ruído de 0,1 mV (à esquerda) e 1 mV (à direita).

4.3.2 Dependência do desvio padrão da fase em relação às amplitudes.

Nesta secção analisa-se o desempenho do algoritmo em relação à estimativa da fase, calculando o desvio padrão do erro da fase para diferentes amplitudes dos sinais sinusoidais. Apresentam-se também os histogramas do erro de fase e uma caracterização deste. Os testes são executados para ADCs de 12 e 16 bit e para valores eficazes do ruído aditivo gaussiano de 0,1 mV, 1 mV e 10 mV. A título de comparação é também apresentado um teste para um conversor ADC ideal. As simulações consistem em fixar a amplitude do sinal $u_1(t)$ fazendo variar a amplitude da sinusóide do canal 2 de 0,01V até 1V. Para cada valor da amplitude são efectuados 10000 testes, que correspondem a diferentes valores da diferença de fase φ_i , gerados aleatoriamente com uma distribuição uniforme no intervalo $(-180^\circ, 180^\circ)$. Para cada combinação das amplitudes determina-se o do erro da fase

$$\delta_{\varphi_i} = \hat{\varphi}_i - \varphi_i \quad (1.77)$$

e a probabilidade p do erro de fase

$$p = \frac{n_{\Delta\varphi}}{M} \quad (1.78)$$

Em que $n_{\Delta\varphi}$ é o número de ocorrências de δ_{φ_i} em M ensaios.

A estimativa do desvio padrão do erro de fase é

$$\sigma_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\varphi}_i - \varphi_i)^2} \quad (1.79)$$

Nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 analisa-se a influência da resolução dos ADCs no desvio padrão da fase em função da amplitude D_2 do sinal adquirido no segundo canal. Foram simuladas a obtenção de 122 amostras em cada aquisição e em cada canal o que corresponde aproximadamente a 5 períodos por aquisição. O alcance do ADC nas três situações é de ± 1 V. Na Figura 4.8, apresentam-se os resultados do desvio padrão da fase para um ruído aditivo gaussiano com desvio padrão de 10 mV.

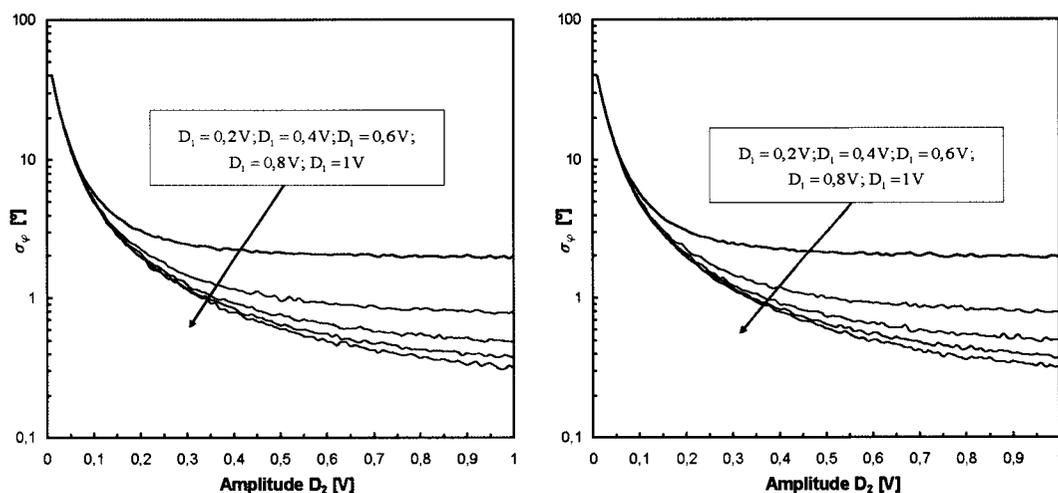


Figura 4.8 – Desvio padrão do erro da fase para um ADC de 12 bit (à esquerda) e de 16 bit (à direita) e valor eficaz do ruído de 10 mV em função das amplitudes dos dois canais.

Verifica-se que o desvio padrão do erro da fase decresce à medida que aumentam as amplitudes das sinusóides. Para ruído aditivo de 10 mV não se nota qualquer diferença entre os resultados obtidos com os dois conversores de 12 e 16 bit. Isto é devido ao facto de o ruído gaussiano de 10 mV ser muito superior ao passo de quantificação do ADC ($1 \text{ LSB} = 0,5 \text{ mV}$) no caso de um conversor de 12 bit e

1 LSB=0,03mV no caso de um conversor de 16 bit. O ruído de quantificação, considerando que o sinal tem uma distribuição uniforme dentro de cada intervalo de quantificação do conversor ADC, é dado por $1\text{LSB}/\sqrt{12}$. Esta é a razão porque na Figura.9 ainda não se nota uma diferença entre os resultados obtidos para um conversor de 12 bit e para o conversor de 16 bit.

Na Figura 4.9 apresentam-se os resultados das simulações feitas para ruído gaussiano de 1 mV.

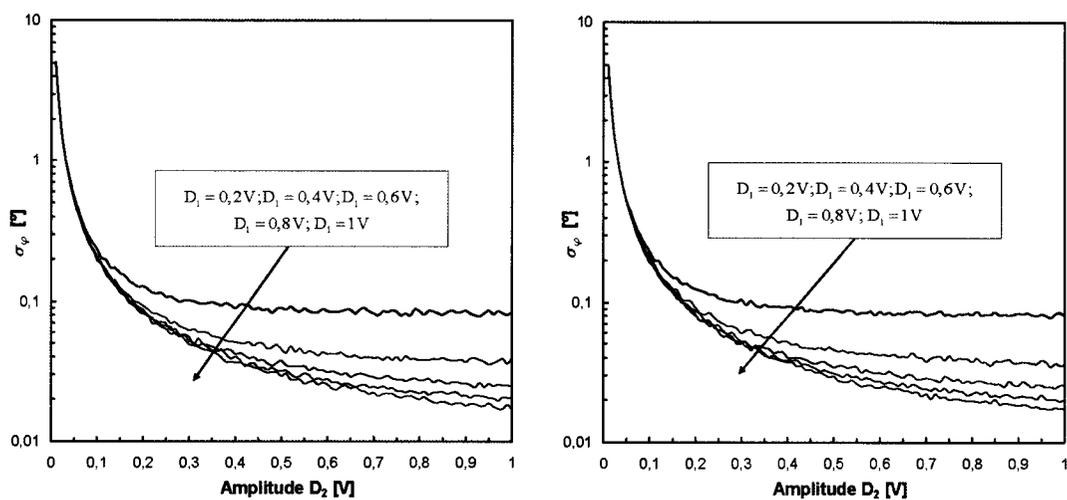


Figura 4.9 – Desvio padrão do erro da fase para um ADC de 12 bit (à esquerda) e de 16 bit (à direita) e valor eficaz do ruído de 1mV em função das amplitudes dos dois canais.

Verifica-se que, à semelhança da Figura 4.8, o desvio padrão do erro da fase decresce à medida que aumentam as amplitudes das sinusóides. Para um ruído aditivo de 1 mV não se nota uma diferença significativa entre os conversores de 12 e 16 bit. Pois, o valor do desvio padrão do ruído gaussiano (1 mV) é ainda superior ao ruído oriundo da quantificação do ADC.

Na Figura 4.10 apresentam-se os resultados das simulações obtidas para um ruído gaussiano com um valor eficaz de 0,1 mV.

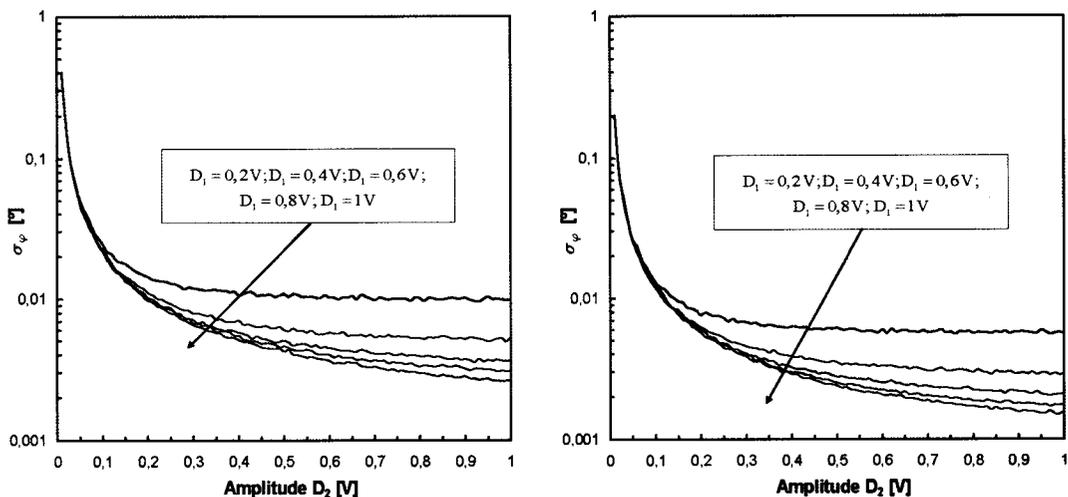


Figura 4.10 – Desvio padrão do erro da fase para um ADC 12 bit (à esquerda) e de 16 bit (à direita) e valor eficaz do ruído de 0,1 mV em função das amplitudes dos dois canais.

Dos resultados apresentados pode concluir-se que a influência da resolução dos conversores ADCs só é visível quando o ruído gaussiano é da mesma ordem de grandeza que o ruído equivalente originado pelo processo de quantificação dos ADCs de 12 e 16 bit.

Na Figura 4.11 apresenta-se o resultado da simulação com um ADC ideal com alcance de $\pm 1V$. Aos dois sinais de entrada foi adicionado ruído gaussiano de 1 mV e 10 mV.

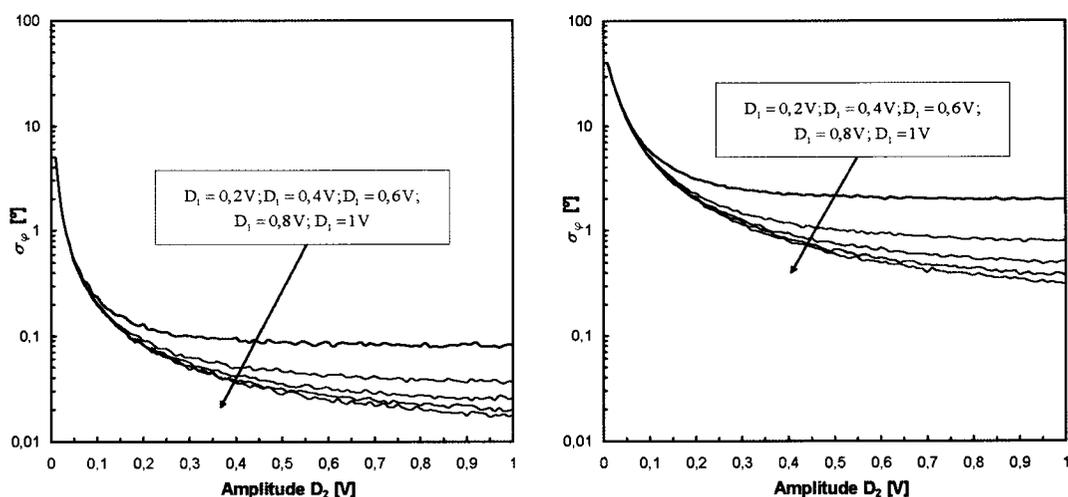


Figura 4.11 – Desvio padrão do erro da fase para um ADC ideal e para valor eficaz do ruído de 1 mV (à esquerda) e 10 mV (à direita) em função das amplitudes dos dois canais.

As Figuras 4.8 a 4.11 mostram que o desvio padrão do erro da fase decresce significativamente à medida que a amplitude do segundo sinal aumenta. Esta situação é previsível na medida em que a estimativa da fase pelo método da adaptação da elipse assenta na relação entre as duas amplitudes. O desvio padrão do erro de fase depende também do valor eficaz do ruído gaussiano. Verifica-se que o desvio padrão do erro de fase depende da resolução do conversor, sempre que o ruído gaussiano não é suficientemente superior ao desvio padrão do ruído de quantificação.

Nas Figuras 4.12 e 4.13 apresentam-se os histogramas normalizados dos erros de fase de dois sinais de amplitude $D_1 = 1V$ e $D_1 = 0,2V$, com $D_2 = 0,5V$. Aos sinais foi adicionado ruído gaussiano de 10 mV e foram simulados amostragens por dois ADCs de 12 bit (Figura 4.12) e 16 bit (Figura 4.13).

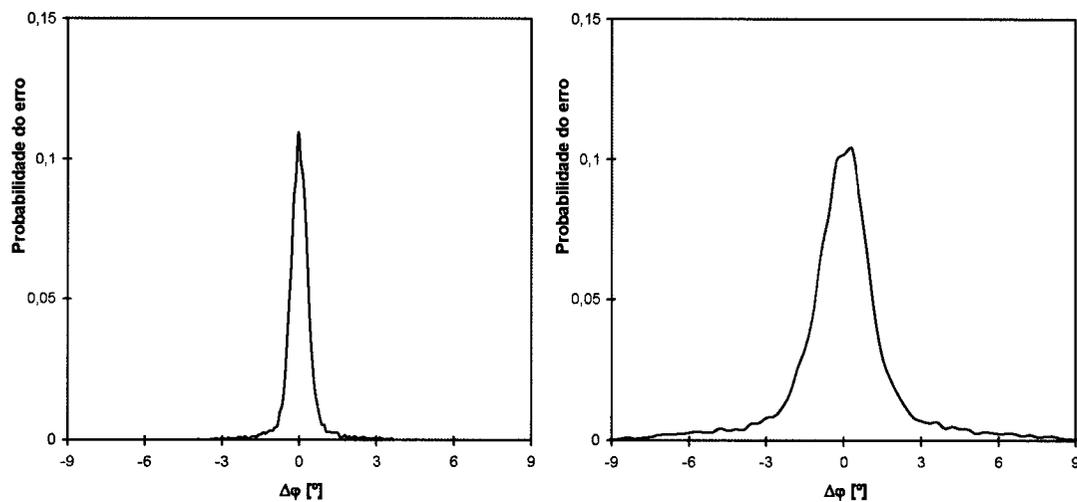


Figura 4.12 – Histograma normalizado do erro de fase $\Delta\varphi$ para um ADC de 12 bit, ruído gaussiano do sinal de 10 mV e $D_2 = 0,5V$. Com $D_1 = 1V$ à esquerda e $D_1 = 0,2V$ à direita.

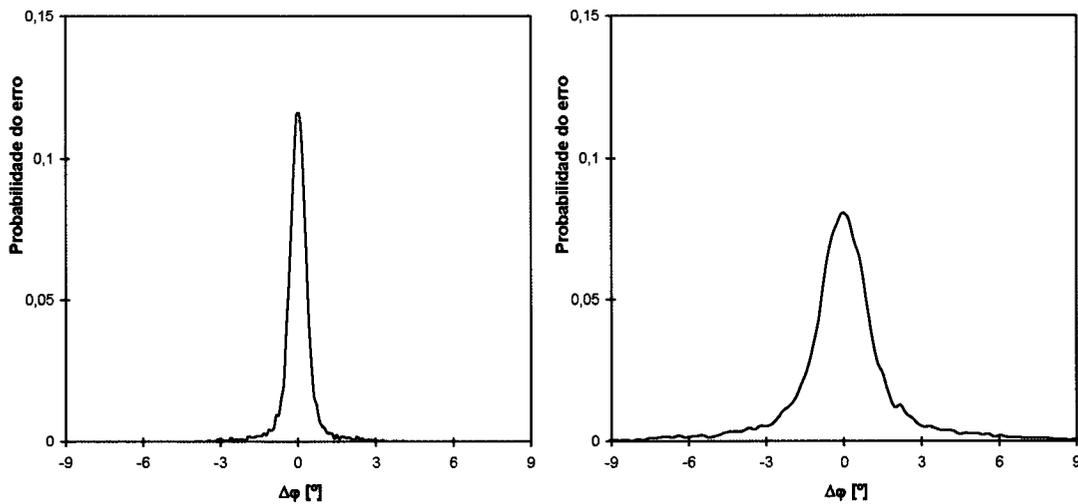


Figura 4.13 – Histograma normalizado do erro de fase $\Delta\varphi$ para um ADC de 16 bit, um ruído gaussiano do sinal de 10 mV e $D_2 = 0,5V$. Com $D_1 = 1V$ à esquerda e $D_1 = 0,2V$ à direita.

O histograma do erro de fase apresenta uma forma gaussiana. O desvio padrão aumenta à medida que a amplitude D_1 diminui. Este resultado está de acordo com os resultados apresentados nas Figuras 4.8 a 4.11. Nota-se a diferença entre os histogramas e respectivo desvio padrão do erro de fase para ADCs de 12 e 16 bit.

Os mesmos testes foram realizados com ruído gaussiano de desvio padrão de 0,1 mV. Nas Figuras 4.14 e 4.15 apresentam-se os histogramas normalizados dos erros da fase de dois sinais de amplitude $D_1 = 1V$ e $D_1 = 0,2V$ com $D_2 = 0,5V$. Os testes foram efectuados para conversores ADCs de 12 bit (Figura 4.14) e 16 bit (Figura 4.15).

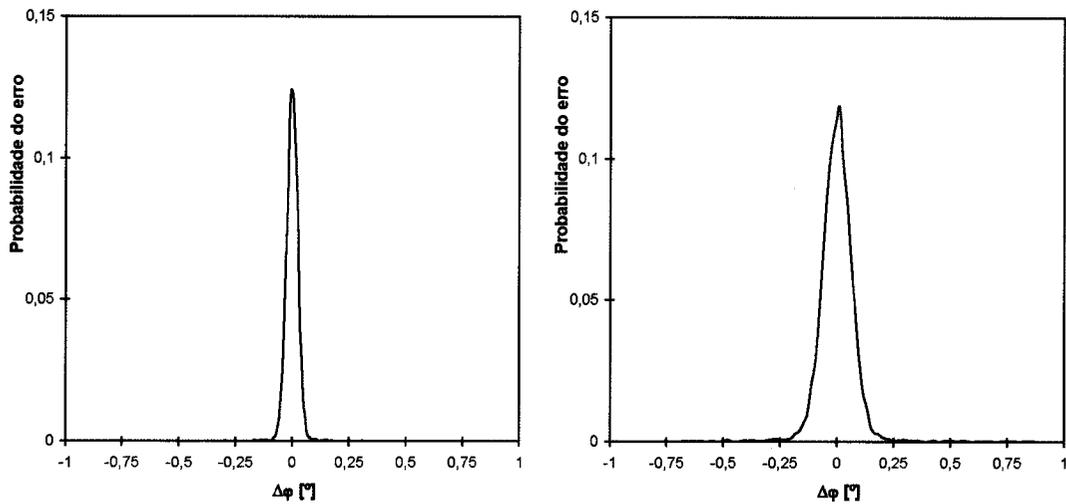


Figura 4.14 – Histograma normalizado do erro da fase $\Delta\varphi$ para um conversor ADC de 12 bit, ruído gaussiano do sinal de 0,1 mV e $D_2 = 0,5V$. Com $D_1 = 1V$ à esquerda e $D_1 = 0,2V$ à direita.

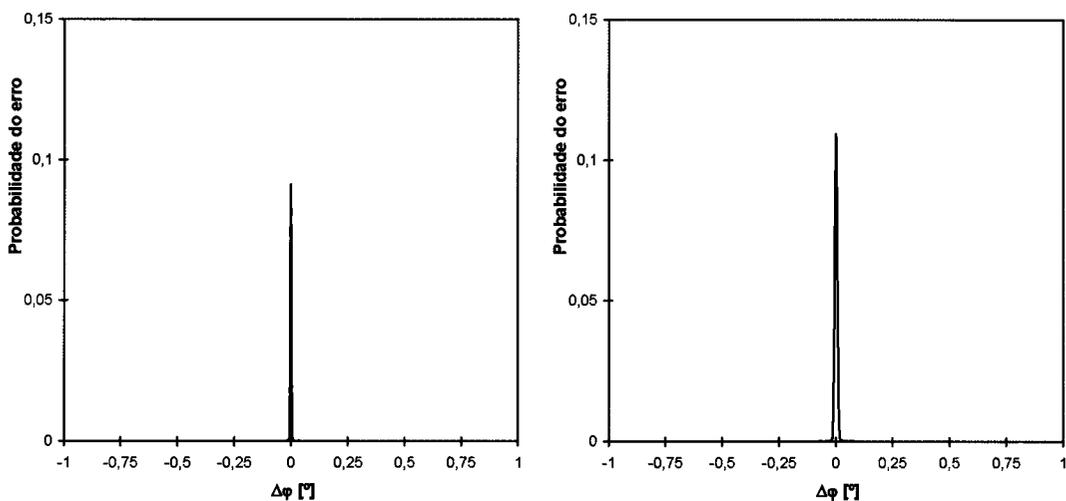


Figura 4.15 – Histograma normalizado do erro de fase $\Delta\varphi$ para um ADC de 16 bit, ruído gaussiano do sinal de 0,1 mV e $D_2 = 0,5V$. Com $D_1 = 1V$ à esquerda e $D_1 = 0,2V$ à direita.

O histograma do erro de fase apresenta uma forma gaussiana. à semelhança das Figuras 4.12 e 4.13. O desvio padrão aumenta à medida que a amplitude D_1 diminui. Este resultado está de acordo com os resultados apresentados nas Figuras 4.8 a 4.11. É visível a diferença entre os histogramas e respectivo desvio padrão do erro de fase para conversores de 12 bit e 16 bit

Os histogramas normalizados dos erros de fase têm a forma de uma função de distribuição de Gauss. As Figuras 4.12 a 4.15 estão em sintonia com as anteriores, demonstrando, pela forma dos histogramas, que o desvio padrão do erro de fase decresce à medida que a amplitude do segundo sinal aumenta.

4.3.3 Estimativa das amplitudes.

Os mesmos testes que foram efectuados sobre a estimativa da fase foram aplicados à estimativa das amplitudes. Do conjunto de M estimativas de cada amplitude foi calculado o desvio padrão e o erro relativo em percentagem

$$\delta_{D_i} = \left(\frac{\sigma_{D_i}}{D_i} \right) \times 100\%. \quad (1.80)$$

A simulação considera dois ADCs de 12 e 16 bit com amplitudes do sinal D_1 de 1V, 0,6 V e 0,2 V.

Na Figura 4.16 apresentam-se os resultados das simulações obtidos com dois conversores ADCs de 12 bit e 16 bit com um alcance de $\pm 1V$. Aos dois sinais é adicionado ruído gaussiano com desvio padrão de 10 mV.

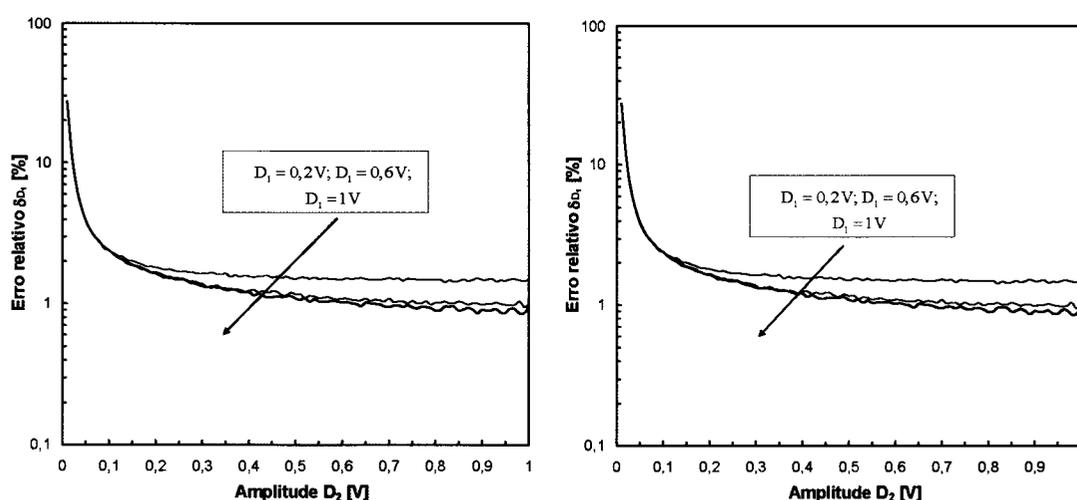


Figura 4.16 – Erro relativo da amplitude D_1 em função da amplitude D_2 , para um ADC de 12 bit à esquerda e 16 bit à direita para valor eficaz do ruído de 10 mV e para valores de D_1 de 1V, 0,6V e 0,2V

Na Figura 4.17 apresentam-se os resultados quando aos dois sinais é adicionado ruído gaussiano de 1 mV.

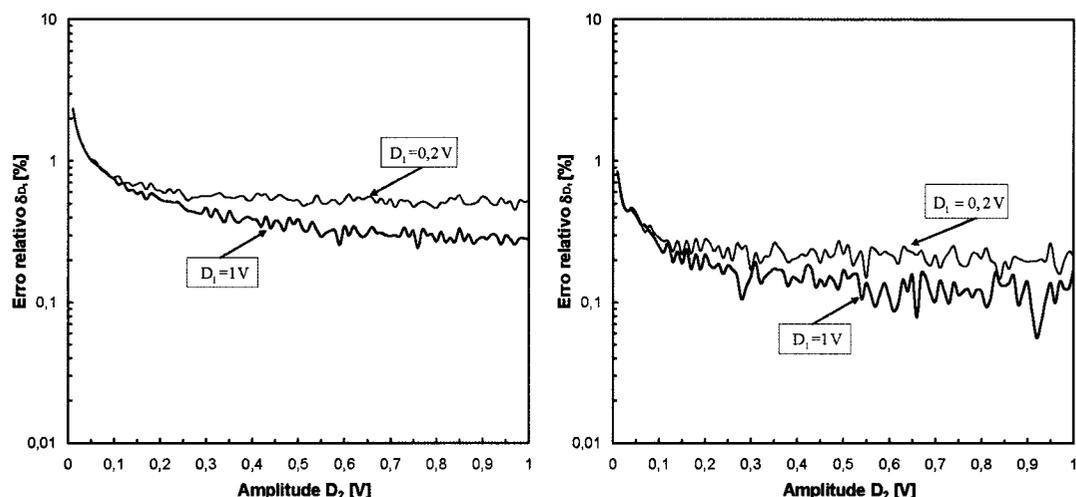


Figura 4.17 – Erro relativo da amplitude D_1 em função da amplitude D_2 , para um ADC de 12 bit à esquerda e de 16 bit à direita para valor eficaz do ruído de 1 mV e para valores de D_1 de 1V e 0,2V

As Figuras 4.16 e 4.17 demonstram que o erro relativo da amplitude, δ_{D_1} , decresce à medida que a amplitude aumenta. O valor de δ_{D_1} depende também do valor eficaz do ruído gaussiano. À semelhança das Figuras 4.8 e 4.9 não se nota uma diferença significativa entre os testes efectuados com os conversores de 12 bit e 16 bit para ruído de 10 mV. Na Figura 4.17 verificou-se que o erro relativo δ_{D_1} depende da resolução do conversor, para ruído gaussiano de valor eficaz inferior a 1 LSB.

4.3.4 Dependência do algoritmo das elipses do número de pontos adquiridos

À imagem do que foi feito na secção 2.7.6 procede-se nesta secção ao estudo da dependência do algoritmo em relação ao número de amostras adquiridas. As Figuras 4.18 e 4.19 mostram a dependência dos desvios padrões das amplitudes dos sinais e o desvio padrão do erro da fase em relação ao número de amostras adquiridas.

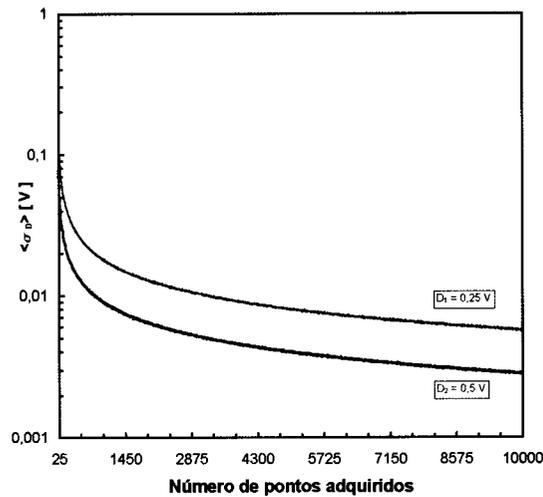


Figura 4.18 – Desvio padrão das amplitudes D_1 e D_2 calculado pelo método de adaptação de elipses, em função do número de amostras adquiridas. Os sinais têm ruído aditivo eficaz de 1 mV e foram amostrados por um ADC ideal.

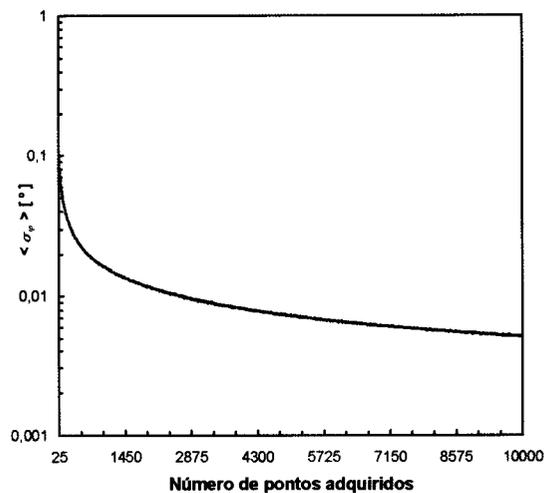


Figura 4.19 – Desvio padrão do erro de fase, calculado pelo método de adaptação de elipses, em função do número de amostras adquiridas. Os sinais têm ruído aditivo eficaz de 1 mV e foram amostrados por um ADC ideal.

As curvas que caracterizam o desvio padrão da amplitude e da fase em relação ao número de amostras, mostram que o desempenho do algoritmo de adaptação de elipses depende do número de amostras. À semelhança do algoritmo de sete parâmetros, o desempenho do algoritmo de adaptação de elipses melhora à medida que cresce o número de amostras. Esta melhoria deixa de ser significativa a partir de 7000 amostras adquiridas nas condições descritas. Em termos da frequência do sinal esta situação corresponde a 300 períodos do sinal adquirido.

4.4 Conclusões

À semelhança do algoritmo de adaptação de sinusóides de sete parâmetros, o desvio padrão dos parâmetros estimados diminui com o aumento da amplitude da sinusóide de entrada e com a diminuição do valor eficaz do ruído do sinal (Figuras 4.8 a 4.11). Verifica-se pelos histogramas (Figuras 4.12 a 4.15) que as fases estimadas correspondem a uma distribuição de Gauss. Constata-se ainda que o erro relativo da estimativa da amplitude segue o mesmo padrão que o erro da fase (Figuras 4.16 e 4.17). Para valores eficazes do ruído gaussiano superiores a $1 \text{ LSB}/\sqrt{12}$, não se nota a dependência do desvio padrão do erro de fase e o erro relativo da amplitude, em relação à resolução do conversor.

Não sendo iterativo, o método proposto é mais rápido que o de adaptação de sinusóides de sete parâmetros e dispensa o conhecimento prévio da frequência. O método tem o inconveniente de apresentar erros mais elevados quando os dois sinais estão em fase ou em oposição de fase (Figuras 4.5 a 4.7).

Referências

- [1] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine-fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [2] J. Shoukens, R. Pintelon e H. Van Hamme, “The interpolated Fast Fourier Transform: A comparative study”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, n. 2, pp. 226-232, Abril 1992.
- [3] M. Fonseca da Silva, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameters sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [4] Francis Scheid “Theory and Problems of Numerical Analysis”. *Schaum's outline series. McGraw-Hill Book Company* 1968.
- [5] Monson H. Hayes. “Statistical Digital Signal Processing and Modeling”. *John Wiley & Sons, Inc.* 1996.
- [6] A. Fitzgibbon, M. Pilu e R. Fischer, “Direct least squares fitting of ellipses”, *Proc. of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 253-257, Viena, Setembro 1996.
- [7] Tomáš Radil, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “DSP based portable instrument using sine-fitting algorithm”, *IMTC 2005- Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Ottawa, Canadá, vol. 2, pp. 1018-1022, Maio 2005.
- [8] Christine Podilchuk, “Signal recovery from partial information”, *The Digital Signal Processing Handbook*. Editado por Vijak K. Madisetti e Douglas B. Williams IEEE Press 1998.

V. Medição de impedâncias pelo método de adaptação de elipses

5.1 Introdução

No Capítulo III foi apresentado um método de medição de impedâncias baseado algoritmos de adaptação de sinusóides (e.g., de sete parâmetros) [1-4]. A exactidão deste método depende da resolução do ADC, do valor eficaz do ruído aditivo, do número de amostras e de períodos adquiridos e da incerteza da medição da impedância de referência. O conhecimento com elevado grau de exactidão da frequência comum das sinusóides é fundamental para a aplicação deste método para que a exactidão da estimativa seja boa. Por outro lado o facto de não se conhecer a frequência faz com que o método é não linear e iterativo e a convergência do algoritmo para uma solução óptima não pode sempre ser assegurado. No Capítulo IV foi introduzido o método de adaptação de elipses [5-6], um algoritmo não iterativo para determinar as amplitudes e a diferença de fase entre duas sinusóides sem recorrer à estimativa da frequência. Neste capítulo, propõe-se a aplicação do algoritmo de adaptação de elipses para a medição de impedâncias [7]. Mediu-se o mesmo conjunto de impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$, utilizando (3.3) e (3.4). Para cada impedância \bar{Z}_i medida procedeu-se à determinação dos valores médios da fase $\langle \varphi_i \rangle$ e do módulo $\langle |\bar{Z}_i| \rangle$, bem como os respectivos desvios padrões experimentais σ_{φ_i} e $\sigma_{|\bar{Z}_i|}$ a partir de um conjunto de 1000 aquisições com N amostras por canal. O circuito de medida e o procedimento é o mesmo do usado nos métodos de adaptação de sinusóides mas recorreu-se agora à aplicação do método de adaptação de elipses descrito no Capítulo IV.

5.2 Montagem experimental

As condições experimentais, o procedimento de medida e o circuito eléctrico apresentado na Figura 5.1 são idênticos aos descritos na Secção 3.2.

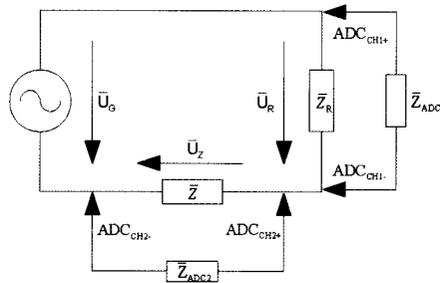


Figura 5.1 – Circuito de medição onde \bar{Z} é a impedância a medir, \bar{Z}_R é a impedância de referência e \bar{Z}_{ADC_i} é a impedância de entrada do canal i da DAQ.

Procede-se à aquisição simultânea de amostras das sinusóides correspondentes às tensões \bar{U}_R e \bar{U}_Z . A representação das amostras adquiridas no plano xy é uma curva de Lissajous que, no caso de uma frequência comum, corresponde a uma elipse. Aos dois conjuntos de amostras adquiridas aplica-se o método de adaptação de elipses.

Na Figura 5.2 apresentam-se exemplos de aquisições de duas sinusóides desfasadas, geradas pelo gerador de sinal SONY Tektronix AFG320 com uma frequência comum de 1 kHz e com a mesma amplitude de 1 V para quatro valores da diferença de fase, com a elipse que melhor se adapta ao conjunto de amostras. Nota-se que estes resultados não foram obtidos com o circuito da Figura 5.1, mas sim medidos directamente nas duas saídas do gerador com uma placa de aquisição a um ritmo de amostragem de 41 μ s.

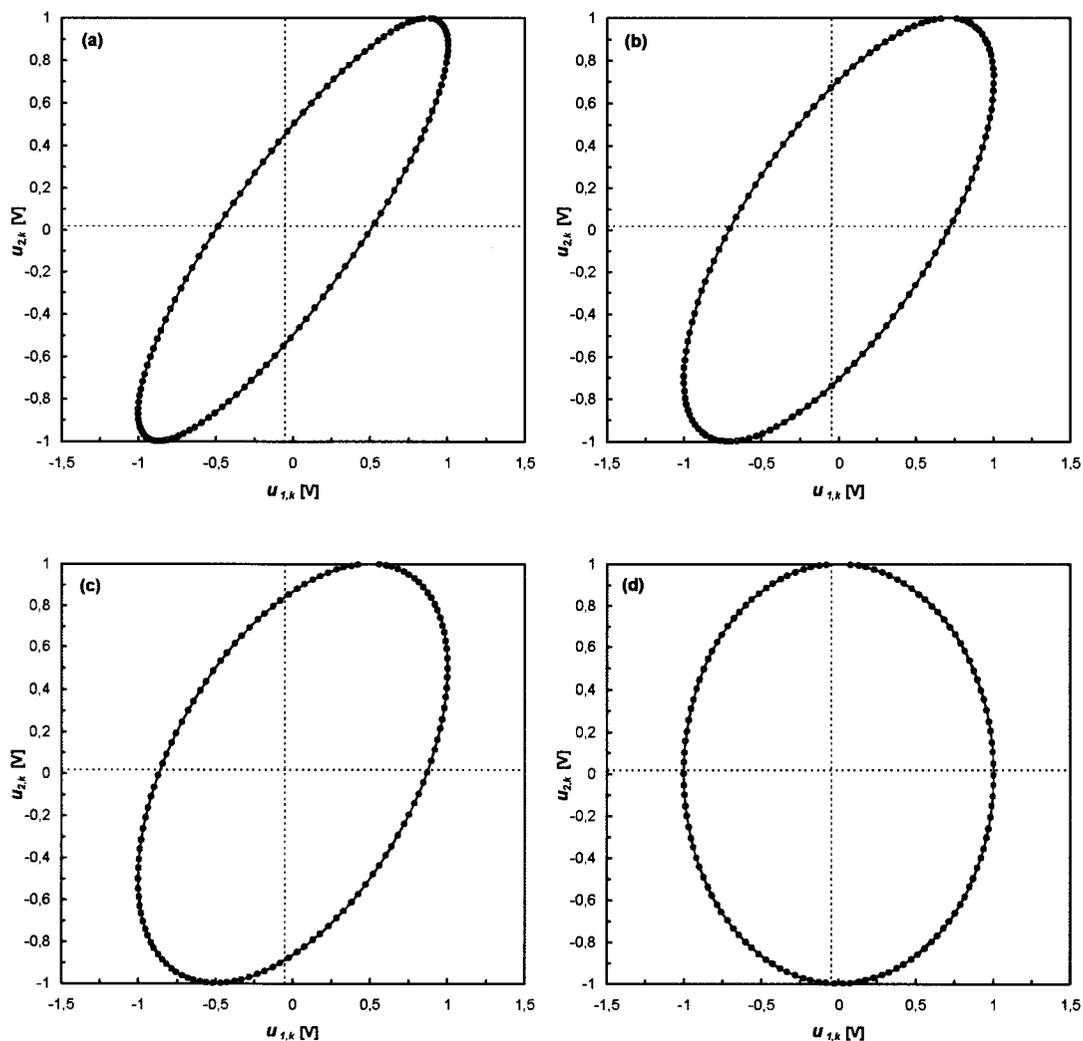


Figura 5.2 – Representação gráfica de elipses adquiridas para sinais de amplitudes $D_1 = 1 \text{ V}$, $D_2 = 1 \text{ V}$ e para diferenças de fase de (a) $\varphi = 30^\circ$; (b) $\varphi = 45^\circ$; (c) $\varphi = 60^\circ$ e (d) $\varphi = 90^\circ$

Além do estudo do desempenho do método em relação ao número de períodos do sinal adquirido, analisou-se a sensibilidade do método em relação à resolução do conversor analógico digital. Como a aquisição é efectuada com um conversor analógico digital de 16 bit, para estudar a influência da resolução do conversor sobre os resultados, retiram-se os quatro bit menos significativos do conversor ADC, simulando assim uma aquisição com um conversor analógico digital de 12 bit. Por fim procede-se a um estudo comparativo entre o método de adaptação de elipses e o método de sete parâmetros.

5.3 Aplicação do método de adaptação de elipses

Nesta secção determinam-se os módulos, as fases, e os respectivos desvios padrões das impedâncias, aplicando o método de adaptação de elipses descrito no Capítulo IV. Não se procedeu à análise da frequência porque o método utilizado dispensa o seu conhecimento prévio e não estima o seu valor.

Os testes cujos resultados se apresentam nas Figuras 5.3 a 5.7 referem-se ao cálculo do valor médio e do desvio padrão do módulo das impedâncias \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} , a frequência $f = 1\text{kHz}$, em função do número de períodos do sinal adquirido para ADCs de 12 e 16 bit com uma frequência de amostragem correspondente à um ritmo de amostragem de $\Delta t_s = 41\mu\text{s}$.

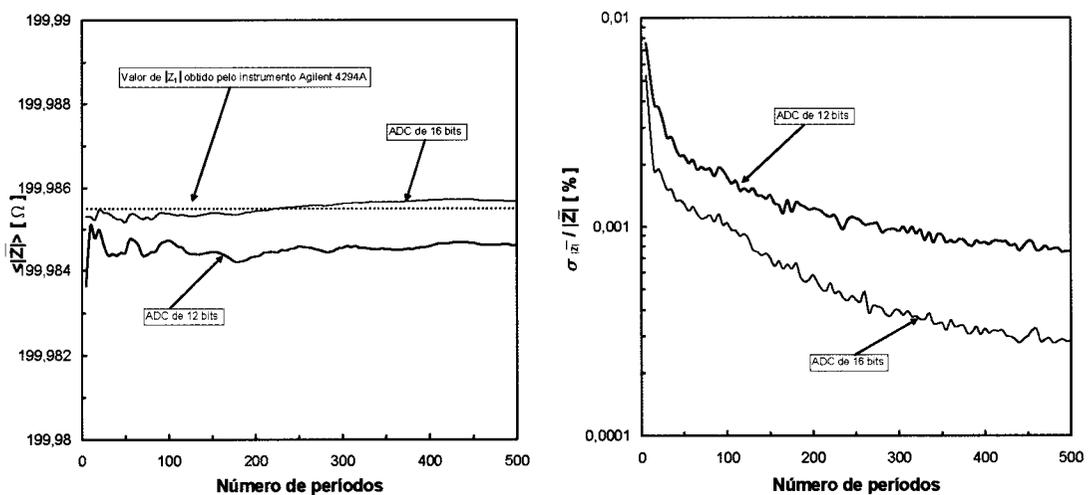


Figura 5.3 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit e impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 199,66 \Omega$.

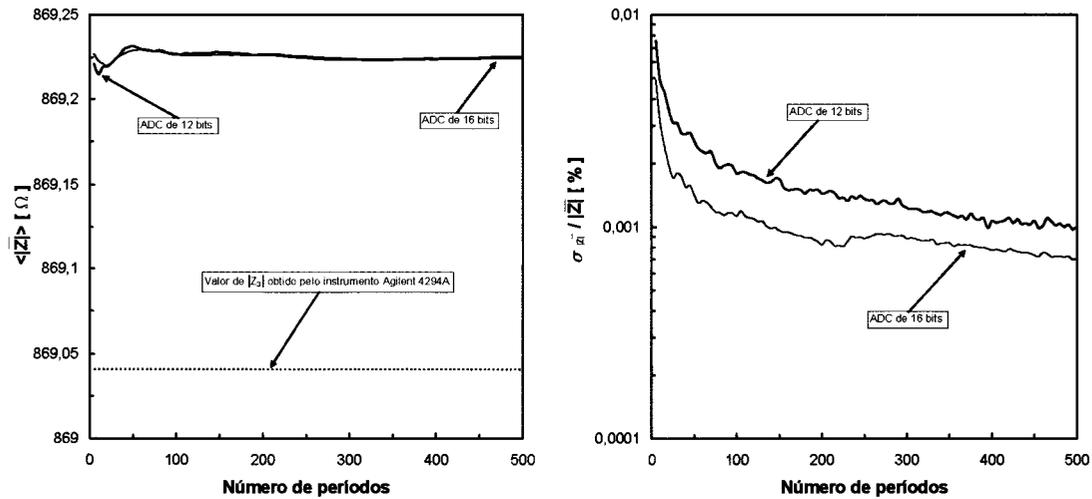


Figura 5.4 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_3 à direita para ADCs de 12 e 16 bit e impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 848,52 \Omega$.

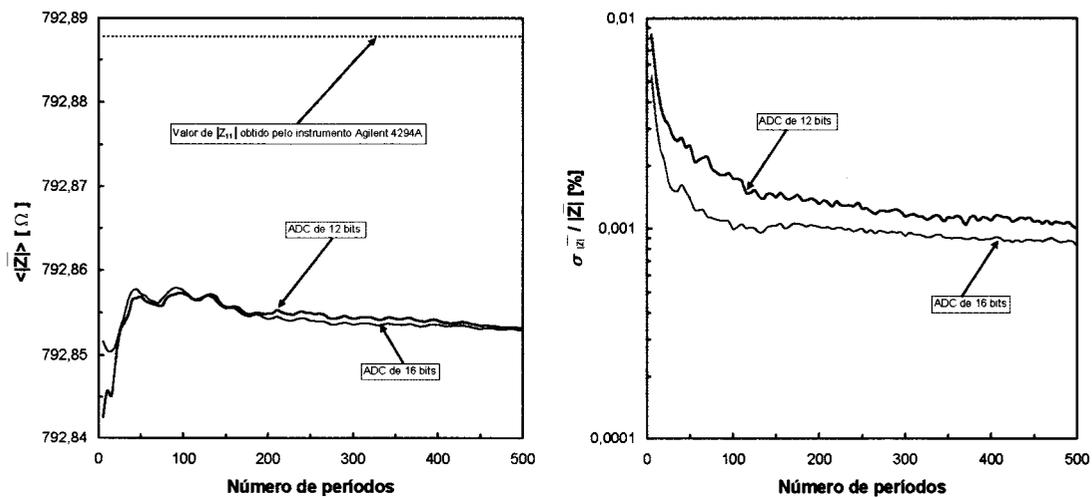


Figura 5.5 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{11} à direita para ADCs de 12 e 16 bit e impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

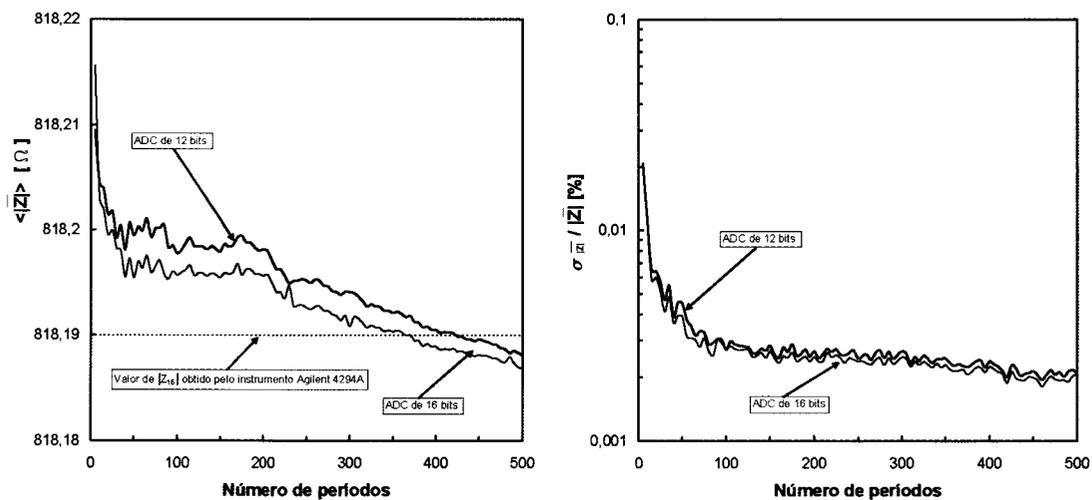


Figura 5.6 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{16} à direita para ADCs de 12 e 16 bit e impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,43 \Omega$.

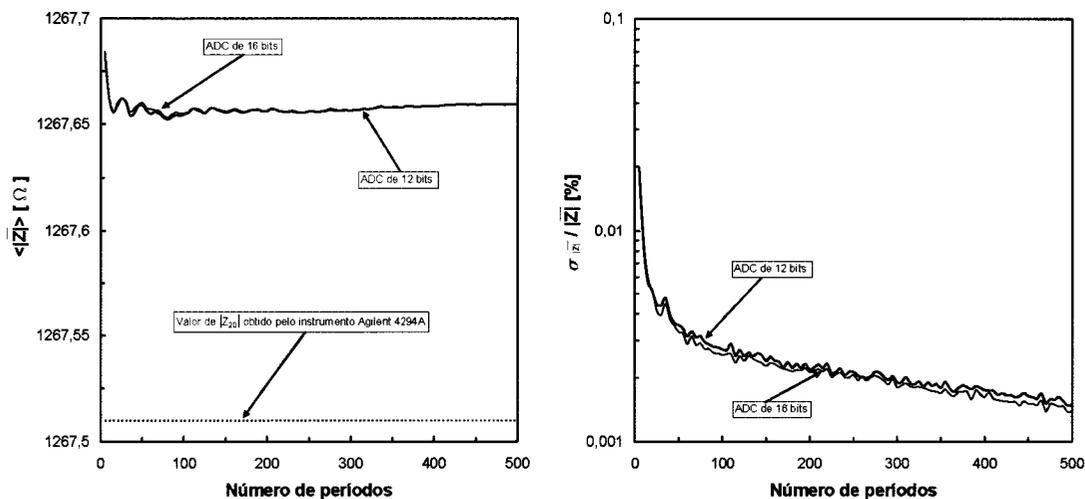


Figura 5.7 – Valores médios do módulo de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão do módulo de \bar{Z}_{20} à direita para ADCs de 12 e 16 bit e impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 1258,67 \Omega$.

À semelhança do método de sete parâmetros é visível o decréscimo do desvio padrão das amplitudes à medida que aumenta o número das amostras utilizadas pelo algoritmo. No entanto, a curva do desvio padrão das amplitudes das impedâncias em função do número de amostras considerado tem tendência a estabilizar a partir de um certo número de amostras adquiridas. A semelhança do que já foi considerado no Capítulo III para o caso do algoritmo dos sete parâmetros. Considerou-se que a variação do desvio padrão das amplitudes deixa de ser significativo a partir de um número de amostras correspondentes a 300 períodos do sinal adquirido. O estudo mostra a dependência do algoritmo em relação à resolução do conversor analógico digital. Obtém-se um melhor desempenho do algoritmo com o conversor de maior resolução (16 bit).

O estudo do desempenho do método de adaptação de elipses em relação à fase (Figuras 5.8 a 5.12) demonstra a mesma tendência que a dependência em relação à amplitude.

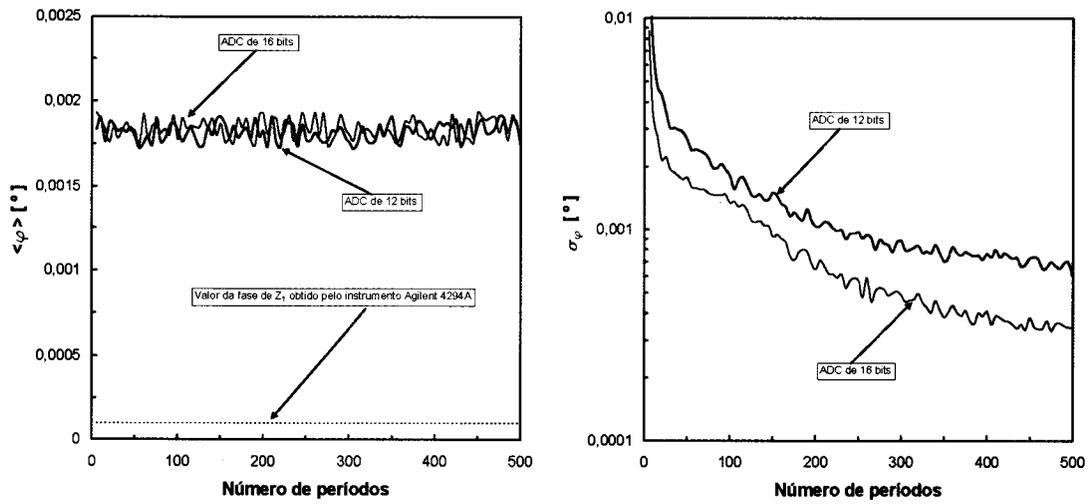


Figura 5.8 – Valores médios da fase de \bar{Z}_1 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_1 à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

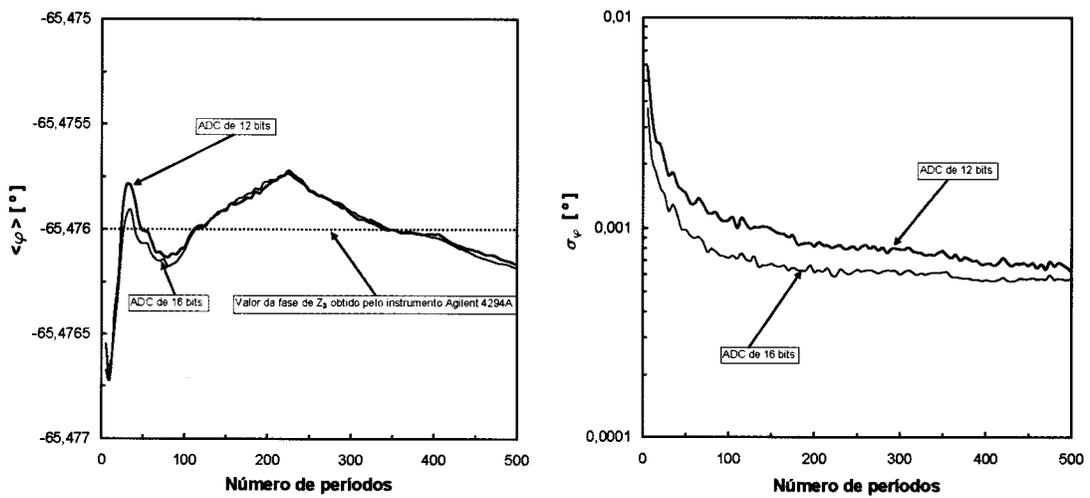


Figura 5.9 – Valores médios da fase de \bar{Z}_3 à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_3 à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

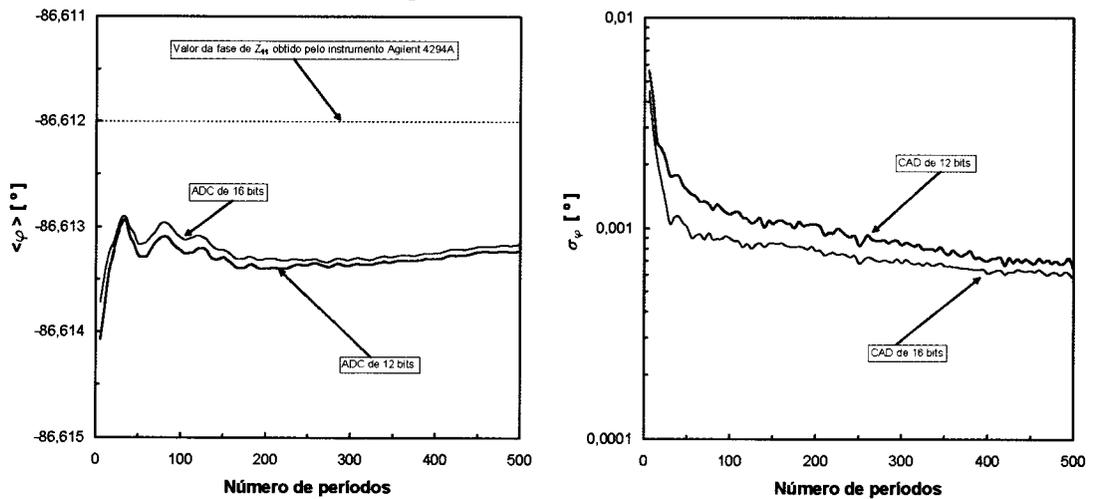


Figura 5.10 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{11} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{11} à direita para conversores de 12 e 16 bit.

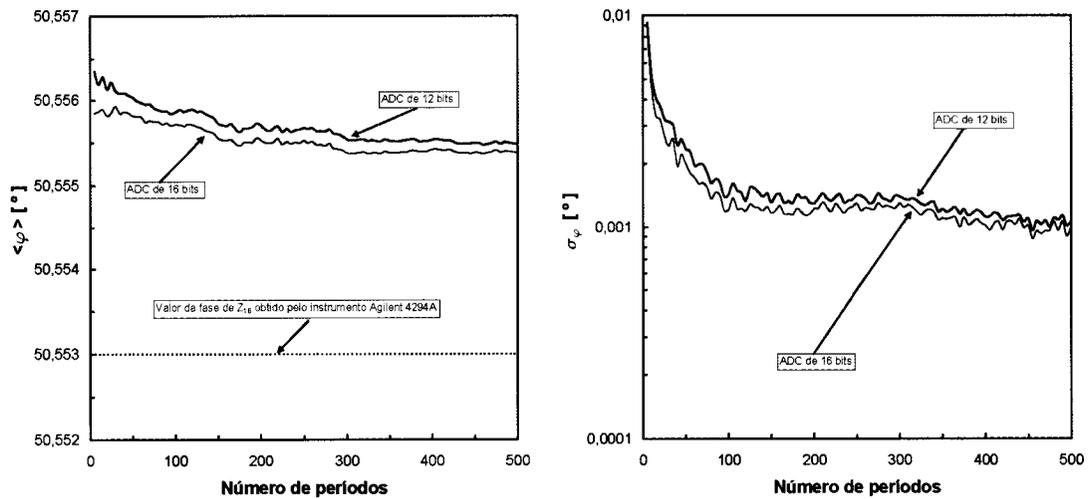


Figura 5.11 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{16} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{16} à direita para ADCs de 12 e 16 bit

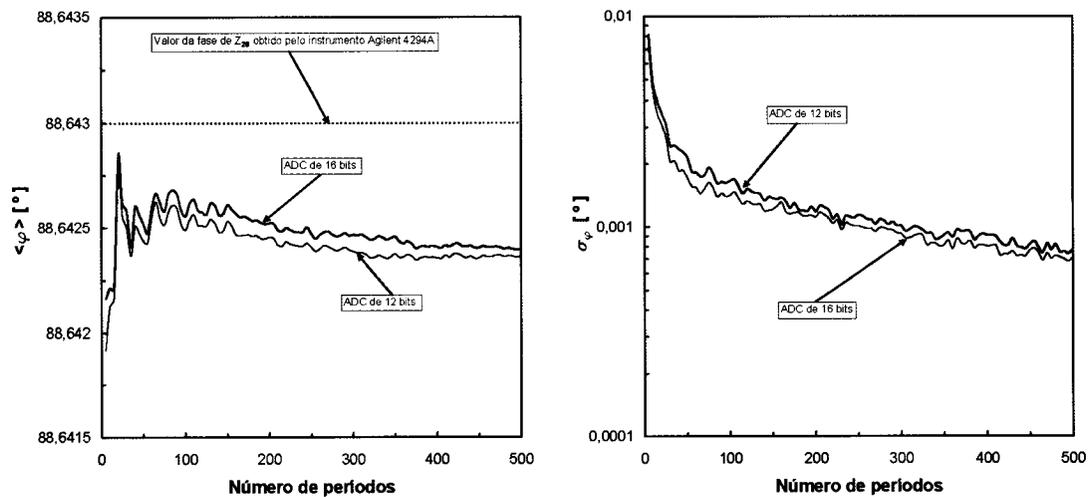


Figura 5.12 – Valores médios da fase de \bar{Z}_{20} à esquerda e desvio padrão da fase de \bar{Z}_{20} à direita para ADCs de 12 e 16 bit.

A análise das Figuras 8 a 12 mostra que, à semelhança do estudo sobre a amplitude, o desvio padrão das fases diminui com o aumento das amostras adquiridas. Esta variação também tem tendência a estabilizar a partir de um certo número de amostras. À semelhança do caso da amplitude, considerou-se que o decréscimo do desvio padrão da fase em função do número de amostras adquiridas deixa de ser significativo a partir de um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal adquirido.

Para calcular o intervalo de confiança de 95%, relativamente ao módulo e à fase de \bar{Z}_i , utilizam-se os valores do desvio padrão dos ensaios respectivos. Assim, à semelhança do Capítulo III, a incerteza expandida obtida experimentalmente é

$$\Delta_{|\bar{Z}_i|} = 2\sigma_{|\bar{Z}_i|} \quad (1.81)$$

e

$$\Delta_{\varphi_i} = 2\sigma_{\varphi_i}, \quad (1.82)$$

sendo $\sigma_{|\bar{Z}_i|}$ o desvio padrão do módulo da impedância \bar{Z}_i e σ_{φ_i} o desvio padrão da fase de \bar{Z}_i . Na Tabela 5.1 apresenta-se o estudo comparativo entre as medidas efectuadas pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e o método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos dos sinais amostrados com um conversor analógico digital de 16 bit. A Tabela 5.1 mostra, para fins comparativos, os valores de $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$, obtidos pelo método de adaptação de elipses, os respectivos valores de incerteza expandidos e os valores obtidos pelo instrumento Agilent 4294A.

	Agilent 4294A				Método de adaptação de elipses			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [$^\circ$]	Δ_φ [$^\circ$]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [$^\circ$]	Δ_φ [$^\circ$]
\bar{Z}_1	199,98	0,08	0,0001	0,026	199,98	0,0008	0,0029	0,0041
\bar{Z}_2	899,71	0,08	0,002	0,025	899,71	0,0023	0,011	0,0044
\bar{Z}_3	869,04	0,08	-65,476	0,025	869,04	0,0018	-65,473	0,0006
\bar{Z}_4	1244,14	0,08	-39,450	0,025	1244,14	0,0029	-39,440	0,0007
\bar{Z}_5	1030,25	0,08	-50,123	0,025	1030,25	0,0030	-50,112	0,0019
\bar{Z}_6	901,32	0,08	-26,759	0,025	901,31	0,0027	-26,749	0,0009
\bar{Z}_7	459,53	0,08	-62,776	0,025	459,57	0,0015	-62,769	0,0008
\bar{Z}_8	1619,99	0,08	-75,315	0,025	1619,89	0,0031	-75,320	0,0026
\bar{Z}_9	1764,14	0,08	-62,647	0,025	1764,15	0,0041	-62,639	0,0016
\bar{Z}_{10}	1567,17	0,08	-89,610	0,025	1567,17	0,0029	-89,618	0,0015
\bar{Z}_{11}	792,88	0,08	-86,612	0,025	792,88	0,0019	-86,614	0,0016
\bar{Z}_{12}	376,23	0,08	86,249	0,025	376,31	0,0025	86,251	0,0015
\bar{Z}_{13}	496,32	0,08	49,170	0,025	496,27	0,0032	49,162	0,0019
\bar{Z}_{14}	973,60	0,08	18,740	0,025	973,64	0,0050	18,736	0,0026
\bar{Z}_{15}	138,72	0,08	62,869	0,026	138,71	0,0015	62,867	0,0011
\bar{Z}_{16}	818,19	0,08	50,553	0,025	819,19	0,0050	50,555	0,0026
\bar{Z}_{17}	1037,73	0,08	37,628	0,025	1037,64	0,0037	37,628	0,0024
\bar{Z}_{18}	1461,91	0,08	60,045	0,025	1461,81	0,0041	60,029	0,0027
\bar{Z}_{19}	1309,15	0,08	75,405	0,025	1309,14	0,0038	75,406	0,0026
\bar{Z}_{20}	1267,51	0,08	88,643	0,025	1267,64	0,0036	88,637	0,0016

Tabela 5.1 – Determinação das impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

Da Tabela 5.1 conclui-se que o método de adaptação de elipses tem um melhor desempenho que o instrumento Agilent 4294A na determinação das impedâncias \bar{Z}_i . A comparação entre as incertezas dos dois procedimentos de medida mostra que o método de adaptação de elipses apresenta um intervalo de incerteza com a largura máxima de $0,0027^\circ$ em relação à fase e um intervalo de incerteza relativa $(2 \times \Delta_{|\bar{Z}|} / |\bar{Z}|)$ máximo da amplitude máximo de 0,01%. O instrumento Agilent 4294A apresenta $0,02^\circ$ de incerteza

máxima de fase e 0,1% para a amplitude relativa. Nas Figuras 5.13 – 5.17 são apresentadas as medidas experimentais no plano de Argand de \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} e respectivos erros. Nestas figuras, o círculo “o” indica o valor obtido pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A enquanto o sinal “x” representa o valor obtido pelo método de adaptação de elipses. Nas Figuras encontram-se representados os erros de medida do instrumento Agilent 4294A e os intervalos de incerteza do método de adaptação de elipses.

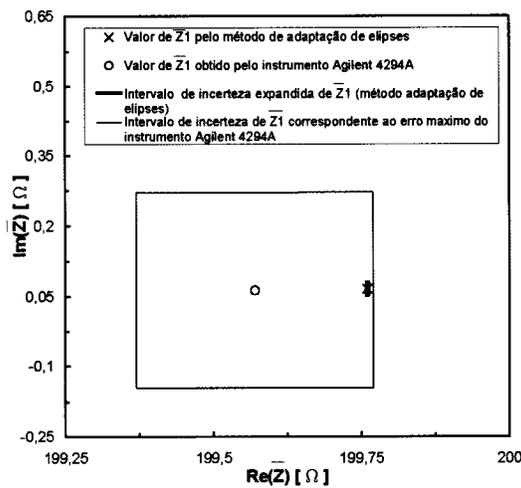


Figura 5.13 – Resultados experimentais e erro relativos à impedância \bar{Z}_1 pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

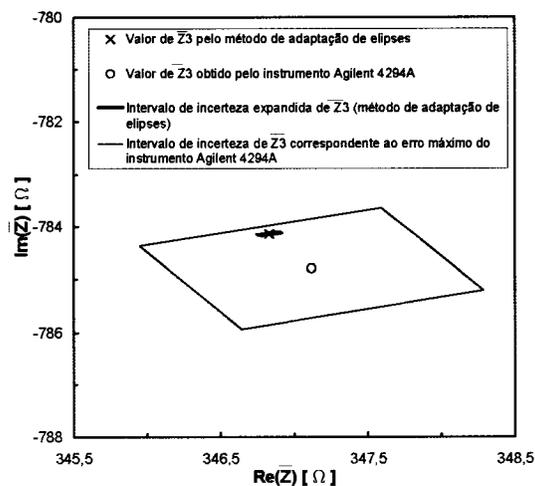


Figura 5.14 – Resultados experimentais e erro relativos à impedância \bar{Z}_3 pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

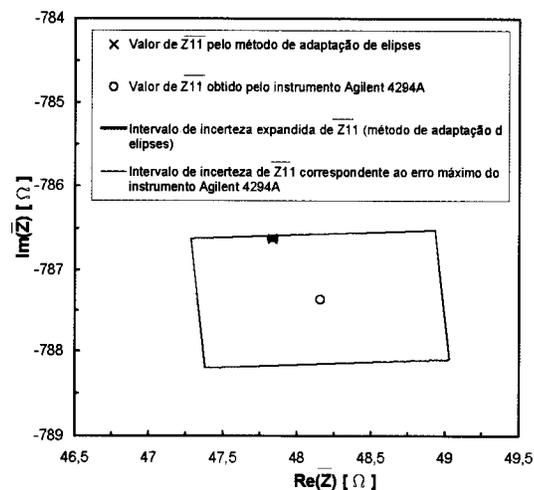


Figura 5.15 – Resultados experimentais e erro relativos à impedância \bar{Z}_{11} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

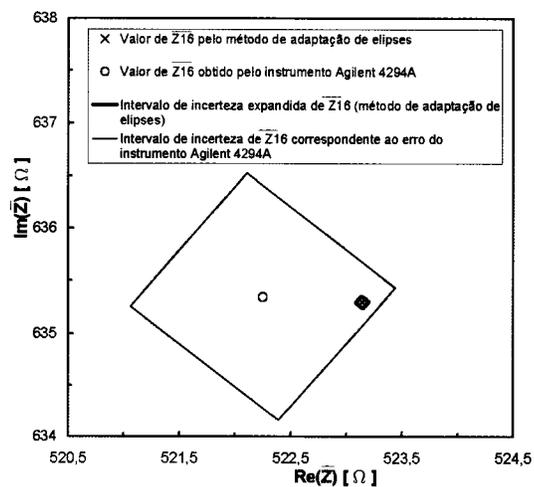


Figura 5.16 – Resultados experimentais e erro relativos à impedância \bar{Z}_{16} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC de 16 bit.

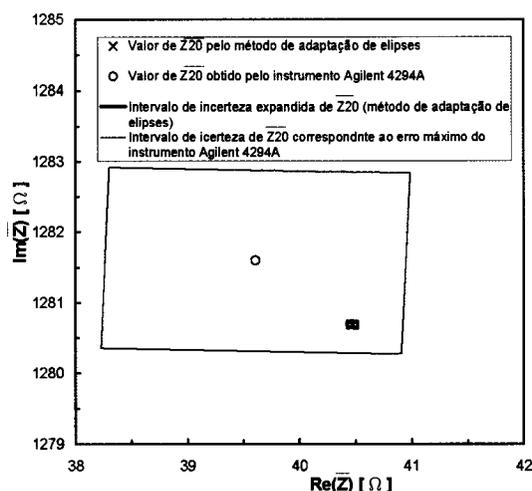


Figura 5.17 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_{20} pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A e pelo método dos 7 parâmetros. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um ADC 16 bit.

5.4 Influência da incerteza da impedância de referência

Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores das impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ obtidos com o instrumento Agilent 4294A e respectivos erros de medida, ver Apêndice [B] e os valores de $\bar{Z}_i, i = 1, \dots, 20$, obtidos pelo método de adaptação de elipses incluindo a incerteza sobre a impedância de referência tal como foi analisado na Seção 3.6.

	Agilent 4294A				Método de adaptação de elipses com a incerteza devida à impedância de referência			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ_φ [°]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ'_φ [°]
\bar{Z}_1	199,98	0,08	0,0001	0,026	199,98	0,08	0,0029	0,024
\bar{Z}_2	899,71	0,08	0,002	0,025	899,71	0,08	0,011	0,024
\bar{Z}_3	869,04	0,08	-65,476	0,025	869,04	0,08	-65,473	0,024
\bar{Z}_4	1244,14	0,08	-39,450	0,025	1244,14	0,08	-39,440	0,024
\bar{Z}_5	1030,25	0,08	-50,123	0,025	1030,25	0,08	-50,112	0,024
\bar{Z}_6	901,32	0,08	-26,759	0,025	901,31	0,08	-26,749	0,024
\bar{Z}_7	459,53	0,08	-62,776	0,025	459,57	0,08	-62,769	0,024
\bar{Z}_8	1619,99	0,08	-75,315	0,025	1619,89	0,08	-75,320	0,024
\bar{Z}_9	1764,14	0,08	-62,647	0,025	1764,15	0,08	-62,639	0,024
\bar{Z}_{10}	1567,17	0,08	-89,610	0,025	1567,17	0,08	-89,618	0,024

	Agilent 4294A				Método de adaptação de elipses com a incerteza devida à impedância de referência			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ_{φ} [°]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} } / \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ'_{φ} [°]
\bar{Z}_{11}	792,88	0,08	-86,612	0,025	792,88	0,08	-86,614	0,024
\bar{Z}_{12}	376,23	0,08	86,249	0,025	376,31	0,08	86,251	0,024
\bar{Z}_{13}	496,32	0,08	49,170	0,025	496,27	0,08	49,162	0,024
\bar{Z}_{14}	973,60	0,08	18,740	0,025	973,64	0,08	18,736	0,024
\bar{Z}_{15}	138,72	0,08	62,869	0,026	138,71	0,08	62,867	0,022
\bar{Z}_{16}	818,19	0,08	50,553	0,025	819,19	0,08	50,555	0,023
\bar{Z}_{17}	1037,73	0,08	37,628	0,025	1037,64	0,08	37,628	0,024
\bar{Z}_{18}	1461,91	0,08	60,045	0,025	1461,81	0,08	60,029	0,025
\bar{Z}_{19}	1309,15	0,08	75,405	0,025	130914	0,08	75,406	0,025
\bar{Z}_{20}	1267,51	0,08	88,643	0,025	1267,64	0,08	88,637	0,023

Tabela 5.2 – Resultados das medidas obtidas pela aplicação do método de adaptação de elipses e as obtidas pelo instrumento Agilent 4234A. A tabela inclui a incerteza sobre a impedância de referência. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um conversor analógico digital de 16 bit.

Nas Figuras 5.18 a 5.22 são representados os valores imaginários e reais de \bar{Z}_1 , \bar{Z}_3 , \bar{Z}_{11} , \bar{Z}_{16} e \bar{Z}_{20} e respectivos intervalos de incerteza. O círculo, “o”, na figura indica o valor obtido pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A enquanto o sinal “x” representa o valor obtido pelo método de adaptação de elipses. As medidas foram efectuadas nas condições da Tabela 5.2.

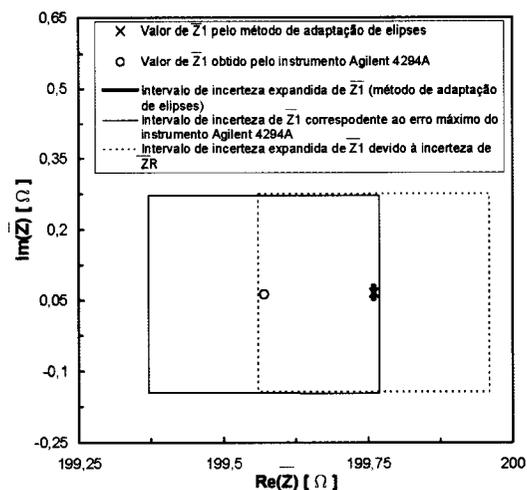


Figura 5.18 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_1 . A medida foi efectuada com a impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 199,62 \Omega$.

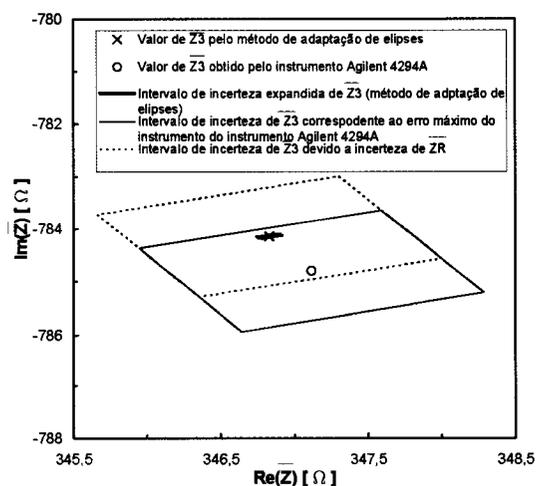


Figura 5.19 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_3 . A medida foi efectuada com a impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 848,26 \Omega$.

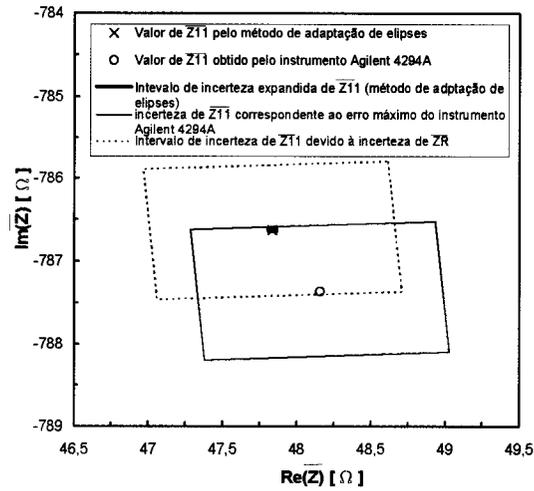


Figura 5.20 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_{11} . A medida foi efectuada com a impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,33 \Omega$.

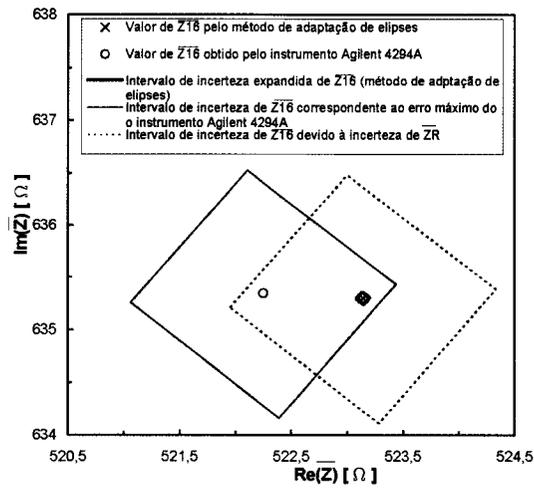


Figura 5.21 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_{16} . A medida foi efectuada com a impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 798,33 \Omega$.

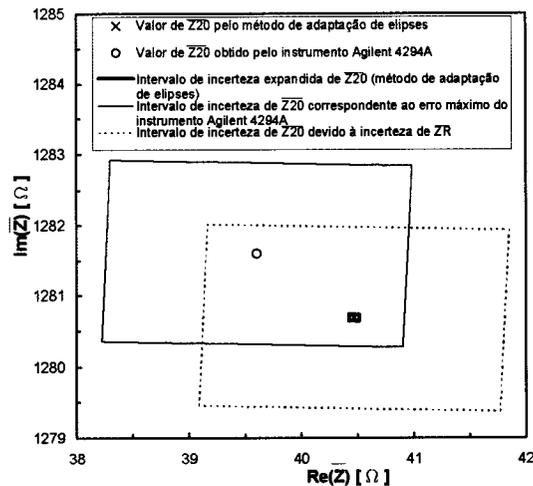


Figura 5.22 – Resultados experimentais e erro relativo à impedância \bar{Z}_{20} . A medida foi efectuada com a impedância de referência $|\bar{Z}_R| = 1258,07 \Omega$.

Constata-se das Figuras 5.18 a 5.22 que os intervalos de incerteza representados pelas secções de toros se sobrepõem, demonstrando uma forte concordância entre os resultados obtidos pela aplicação do método de adaptação de elipses e os resultados obtidos pelo Agilent 4294A. Na escala apresentada é difícil distinguir o valor da incerteza da impedância pelo método de elipses, por este ser muito pequeno em relação à incerteza do Agilent 4294A. Quando a incerteza da impedância de referência é tida em conta, a incerteza total da impedância é comparável à do instrumento Agilent 4294A, porque \bar{Z}_R foi medida com este aparelho.

5.5 Comparação com o método de sete parâmetros

Nesta secção procede-se à comparação entre a aplicação do método de sete parâmetros analisada no Capítulo III e a aplicação do método de adaptação de elipses estudada neste capítulo. A Tabela 5.3 apresenta os resultados experimentais da aplicação do método de sete parâmetros obtidos no Capítulo III e os resultados experimentais obtidos pelo método de adaptação de elipses.

	Método de sete parâmetros				Método de adaptação de elipses			
	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} }/ \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ_{φ} [°]	$ \bar{Z} $ [Ω]	$\Delta_{ \bar{Z} }/ \bar{Z} $ [%]	φ [°]	Δ_{φ} [°]
\bar{Z}_1	199,96	0,0025	0,0028	0,0019	199,76	0,0008	0,0029	0,0041
\bar{Z}_2	899,68	0,0332	-0,010	0,0021	903,68	0,0023	0,011	0,0044
\bar{Z}_3	869,34	0,0012	-65,472	0,0011	857,42	0,0018	-65,473	0,0006
\bar{Z}_4	1244,19	0,0371	-39,440	0,0221	1222,73	0,0029	-39,440	0,0007
\bar{Z}_5	1030,05	0,0392	-50,113	0,0211	1013,55	0,0030	-50,112	0,0019
\bar{Z}_6	901,34	0,0022	-26,749	0,0011	900,79	0,0027	-26,749	0,0009
\bar{Z}_7	459,57	0,0015	-62,769	0,0006	457,77	0,0015	-62,769	0,0008
\bar{Z}_8	1619,97	0,0031	-75,320	0,0039	1615,49	0,0031	-75,320	0,0026
\bar{Z}_9	1714,21	0,0046	-62,639	0,0021	1754,75	0,0041	-62,639	0,0016
\bar{Z}_{10}	1567,27	0,0032	-89,618	0,0021	1566,67	0,0029	-89,618	0,0015
\bar{Z}_{11}	792,87	0,0013	-86,614	0,0011	788,08	0,0019	-86,614	0,0016
\bar{Z}_{12}	376,32	0,0027	86,251	0,0012	376,82	0,0025	86,251	0,0015
\bar{Z}_{13}	496,27	0,0040	49,162	0,0013	496,27	0,0032	49,162	0,0019
\bar{Z}_{14}	973,84	0,0031	18,736	0,0021	969,84	0,0050	18,736	0,0026
\bar{Z}_{15}	138,84	0,0014	62,867	0,0007	138,91	0,0015	62,867	0,0011
\bar{Z}_{16}	819,17	0,0085	50,555	0,0022	822,97	0,0050	50,555	0,0026
\bar{Z}_{17}	1037,81	0,0039	37,628	0,0011	1036,14	0,0037	37,628	0,0024
\bar{Z}_{18}	1461,87	0,0034	60,029	0,0017	1469,01	0,0041	60,029	0,0027
\bar{Z}_{19}	1309,14	0,0053	75,406	0,0021	1320,44	0,0038	75,406	0,0026
\bar{Z}_{20}	1267,66	0,0031	88,637	0,0021	1281,33	0,0036	88,637	0,0016

Tabela 5.3 – Determinação das impedâncias $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{20}$ pelo método de sete parâmetros e pelo método de adaptação de elipses. Considerou-se um número de amostras correspondente a 300 períodos do sinal amostrado com um conversor analógico digital de 16 bit.

O desempenho do método de sete parâmetros é melhor que o do método de adaptação de elipses em relação à estimativa da fase com a largura máxima do intervalo de incerteza de $0,006^\circ$ contra os $0,008^\circ$ do método de adaptação de elipses. Em relação à estimativa da amplitude o método de adaptação de elipses apresenta um melhor desempenho com uma largura máxima do intervalo de incerteza relativa de $5 \times 10^{-3} \%$

contra os $8,5 \times 10^{-3} \%$ do método de sete parâmetros. No entanto o desempenho dos dois algoritmos é muito similar e ambos, como demonstrado a Figura 5.23 apresentam um desempenho consideravelmente melhor que o instrumento Agilent 4294A.

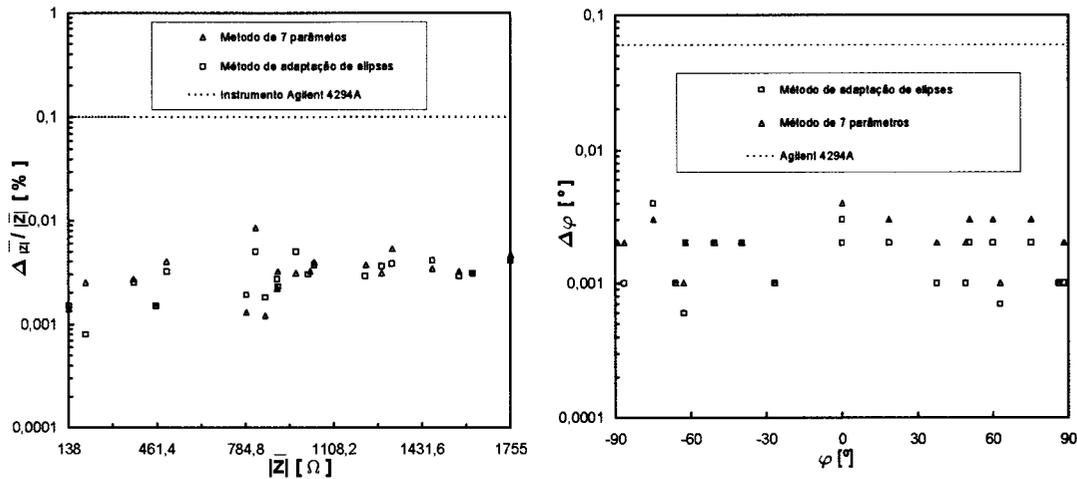


Figura 5.23 – Largura $\left(2 \frac{\Delta|Z|}{|Z|}\right)$ do intervalo de incerteza relativo da amplitude em função do valor do módulo da amplitude em escala logarítmica (à esquerda) e largura do intervalo de incerteza da fase em função da fase $2\Delta\varphi$ (à direita) para todas as impedâncias do teste.

5.6 Conclusões

Neste capítulo estudou-se a aplicação do método de adaptação de elipses à medição de impedâncias. Constatou-se que o desempenho do método depende da resolução do conversor analógico digital e do número de amostras adquiridas. O desvio padrão dos parâmetros estimados decresce à medida que aumenta o número de amostras adquiridas, embora este decréscimo deixe de ser significativo a partir de um número de amostras correspondente a uma aquisição de 300 períodos do sinal, razão pela qual os resultados experimentais apresentados correspondem a este número de períodos.

Comparando com o instrumento de medição de impedâncias Agilent 4294A, os resultados experimentais mostram que o método de adaptação de elipses tem um melhor desempenho a muito menor custo, atendendo ao valor comercial do Agilent 4294A.

Constatou-se que a incerteza das medidas depende também da incerteza da impedância de referência. No entanto, esta incerteza não é uma característica do método. A utilização de resistências de precisão com uma exactidão relativa de (0,01%) disponíveis no mercado ou a calibração de impedâncias de referência com instrumentos com melhor desempenho pode reduzir em muito o valor da incerteza total [7].

O desempenho do método de adaptação de elipses é comparável ao do método de sete parâmetros. A incerteza máxima da fase no método de sete parâmetros é inferior ao do método de adaptação de elipses que é de $0,006^\circ$ na pior das situações contra os $0,008^\circ$ para o método de adaptação de elipses. Em relação à amplitude o método de adaptação de elipses tem um melhor desempenho, apresentando uma incerteza relativa máxima de amplitude de $5 \times 10^{-3} \%$ contra os $8,5 \times 10^{-3} \%$ do método de sete parâmetros.

Por não ser iterativo e não necessitar da estimativa da frequência, o método de adaptação de elipses não apresenta problemas de convergência e tem um tempo de execução mais rápido. De facto o método de adaptação de elipses é aproximadamente 50 % mais rápido ao ser implementado nas mesmas condições no programa Matlab que o algoritmo de sete parâmetros. O método de adaptação de elipses apresenta um tempo de execução médio de 3,5 s contra 6,5 s para o método de sete parâmetros, considerando 300 períodos do sinal.

Referências

- [1] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine-fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [2] A. Cruz Serra, Pedro M. Ramos e M. Fonseca da Silva, “New impedance measurement technique”, *TELEC'02 International Conf.*, Santiago de Cuba, Julho 2002.
- [3] M. Fonseca da Silva, Pedro Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameters sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [4] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Improving sine-fitting algorithms for amplitude and phase measurements”, *XVII IMEKO World Congress*, Dubrovnik, Croácia, pp.614-619, Junho 2003.
- [5] A. Fitzgibbon, M. Pilu e R. Fischer, “Direct least squares fitting of ellipses”, *Proc. of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 253-257, Viena, Setembro 1996.
- [6] Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos, Mouhaydine Tlemçani e A. Cruz Serra, “Analysis of a non-iterative algorithm for the amplitude and phase difference estimation of two acquired sinewaves”, *XVIII IMEKO World Congress*, Rio de Janeiro, Brasil, Setembro 2006.
- [7] Mouhaydine Tlemçani, Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “Impedance Measurements using Analog to Digital converters and Elipse Fitting Signal Processing Algorithms”. *6th Conference on Telecommunications Confele2007*, Peniche, Portugal, Maio 2007.

VI. Conclusões

Neste capítulo apresenta-se uma síntese das conclusões obtidas nos capítulos anteriores. São realçados os aspectos importantes deste estudo e os que pela sua originalidade foram incluídos nesta tese e perspectivam um desenvolvimento substancial no futuro [1].

No Capítulo I foi feita uma introdução à medida de impedâncias e uma breve descrição dos métodos existentes [1-8]. No Capítulo II descreveu-se o método de medida de impedâncias proposto e fez-se o estudo de vários métodos de adaptação de sinusóides, tanto para a aquisição por um só canal de medida como por dois canais de medida [6-9]. Para um canal de medida estudaram-se dois métodos de adaptação de sinusóides, que consistem na procura dos parâmetros da sinusóide que melhor se adapta, segundo o critério dos mínimos quadrados a um conjunto de dados adquiridos por um ADC. O primeiro método aplicado a um canal de medida consiste em determinar a amplitude, a fase e a componente contínua de um sinal sinusoidal num só passo (sem iterações), partindo do conhecimento prévio da frequência. Este é o método de adaptação de sinusóides de três parâmetros (estimação da amplitude, da fase e a componente contínua). O segundo método aplicado a um só canal é o método de adaptação de sinusóides de quatro parâmetros, onde uma primeira estimativa da frequência [10-13] permite uma estimativa inicial da amplitude, da fase e da componente contínua da sinusóide. Não sendo linear a relação entre os parâmetros do sinal, efectua-se uma linearização através do desenvolvimento em série de Taylor e procede-se iterativamente para corrigir o valor da frequência. Ao contrário do método de três parâmetros, este método permite estimar o valor da frequência. No entanto, o algoritmo de quatro parâmetros é um processo iterativo. Parte-se de uma estimativa

inicial dos quatro parâmetros: amplitude, fase, componente contínua e frequência. Cada iteração produz um novo conjunto de valores A_i , B_i , C_i e uma correção $\Delta\omega_i$ a fazer à frequência f na iteração seguinte. A convergência do algoritmo depende do número de amostras e dos valores iniciais estimados incluindo a frequência [12]. Esta dependência é visível na presença de múltiplos extremos locais para os quais o algoritmo pode convergir dependendo das condições iniciais. Por consequência a convergência não é garantida.

No caso de dois canais de medida que adquirem dois sinais sinusoidais com a mesma frequência, estudaram-se três métodos de adaptação de sinusóides: 4+4 parâmetros, 4+3 parâmetros e sete parâmetros [6-7]. O método de 4+4 consiste na aplicação do método de quatro parâmetros individualmente à cada canal. Sendo o processo numérico e iterativo, apesar de a frequência ser a mesma, o método de 4+4 estima duas frequências diferentes (uma por canal) daqui advém um aumento da incerteza da fase estimada. O método de 4+3 parâmetros, em relação ao de 4+4, tem a vantagem de usar apenas um processo iterativo, respeitando a restrição física de uma frequência comum aos dois canais. O método de sete parâmetros, não só tem em conta essa restrição física, mas, ao usar as amostras dos dois canais para estimar todos os parâmetros, reduz significativamente o desvio padrão dos parâmetros estimados. Este método permite, com apenas um procedimento iterativo, estimar com mais precisão em relação aos outros métodos até aqui estudados, os parâmetros de duas sinusóides: amplitudes, fases, componentes contínuas e a frequência comum, verificando-se ainda a independência do algoritmo em relação à fase. Quanto a sensibilidade dos métodos em relação à resolução dos ADCs, verificou-se que para um ruído aditivo do sinal inferior ao ruído de quantificação do ADC, o desempenho dos métodos estudados melhora com uma maior resolução do conversor. Para ambos os métodos analisou-se o desempenho

em relação à resolução do conversor na presença de ruído de sinal. Quando o valor eficaz do ruído aditivo é próximo do ruído de quantificação do ADC não se nota uma melhoria no desempenho do algoritmo com diferentes resoluções do ADC, uma vez que o ruído predominante corresponde ao termo aditivo e não ao ruído de quantificação.

No Capítulo III estudou-se a aplicação destes métodos de adaptação de sinusóides à medição de impedâncias. Constatou-se que, tal como esperado, o desempenho dos três métodos depende da resolução do conversor analógico digital e do número de amostras adquiridas. A largura do intervalo de incerteza dos parâmetros estimados decresce à medida que aumenta o número de amostras adquiridas embora este decréscimo deixe de ser significativo a partir de um número de amostras correspondente à aquisição de 300 períodos do sinal. Dos três algoritmos estudados o método dos sete parâmetros é o que apresenta o melhor desempenho em relação aos parâmetros estimados.

Comparando com o instrumento de medição de impedâncias Agilent 4294A [5], os resultados experimentais mostram que também aqui o método de sete parâmetros tem um melhor desempenho a muito menor custo (3 000€), atendendo ao valor comercial do Agilent 4294A que ronda os 30 000€. Verifica-se que a incerteza das medidas depende também da incerteza da impedância de referência. No entanto, esta incerteza não é uma característica do método proposto. A utilização de resistências de precisão com uma exactidão relativa de 0,01% disponíveis no mercado ou a calibração de impedâncias de referência com instrumentos com melhor desempenho pode reduzir em muito o valor da incerteza total.

No Capítulo IV estudou-se um novo algoritmo, designado por método de adaptação de elipses, para a determinação dos parâmetros de duas sinusóides que dispensa a estimativa da frequência. Não sendo iterativo, o método proposto é mais

rápido que o de adaptação de sinusóides de sete parâmetros e dispensa a estimativa da frequência.

À semelhança do algoritmo de adaptação de sinusóides de sete parâmetros, o desvio padrão dos parâmetros estimados diminui com o aumento da amplitude da sinusóide de entrada e depende do valor eficaz do ruído aditivo. Verifica-se que as fases estimadas correspondem a uma distribuição de Gauss. Constata-se ainda que a incerteza relativa da estimativa da amplitude segue o mesmo padrão que a incerteza da fase. Para valores eficazes do ruído gaussiano aditivo superiores a 1 LSB, não se nota nenhuma variação da incerteza da fase e da incerteza relativa da amplitude, em relação à resolução do ADC.

No Capítulo V analisou-se a aplicação do método de adaptação de elipses à medição de impedâncias. Constata-se que, à semelhança do método de sete parâmetros, o desempenho do método depende da resolução do conversor analógico digital e do número de amostras adquiridas. O desvio padrão dos erros sobre os parâmetros estimados decresce à medida que aumenta o número de amostras adquiridas, embora este decréscimo deixe de ser significativo a partir de um número de amostras correspondente a uma aquisição de 300 períodos do sinal, razão pela qual os resultados experimentais apresentados correspondem a este número de períodos.

Comparando com o instrumento de medição de impedâncias Agilent 4294A, os resultados experimentais mostram que o método de adaptação de elipses tem um melhor desempenho a muito menor custo. Constata-se que a incerteza das medidas depende também da incerteza da impedância de referência. No entanto, esta incerteza não é uma característica do método. Tal como foi sugerido para o método de sete parâmetros, a utilização de resistências de precisão ou a calibração de impedâncias de referência com

instrumentos com melhor desempenho pode reduzir em muito o valor da incerteza final total.

O desempenho do método de adaptação de elipses é comparável ao do método de sete parâmetros [14]. A incerteza da fase no método de sete parâmetros é inferior ao do método de adaptação de elipses que é de $0,006^\circ$ na pior das situações contra os $0,008^\circ$ para o método de adaptação de elipses. Em relação à amplitude, o método de adaptação de elipses tem um melhor desempenho, apresentando uma incerteza relativa de amplitude de 0,005 % contra os 0,0085 % do método de sete parâmetros [14]. Por não ser iterativo e não necessitar da estimativa da frequência, o método de adaptação de elipses tem um tempo de execução mais reduzido. De facto, o método de adaptação de elipses é 50 % mais rápido ao ser implementado nas mesmas condições (em Matlab) que o algoritmo de sete parâmetros [14].

Os resultados experimentais obtidos com o método de adaptação de elipses são comparáveis aos do método de sete parâmetros tendo revelado um desempenho superior à obtida por instrumentos de custo muito elevado [14]. O algoritmo proposto, mediante programas adequados pode ser implementado num instrumento com um DSP (*Digital Signal Processing*) estendendo as aplicações das medidas a outras grandezas físicas além das impedâncias como as medidas de potência e energia eléctrica, determinando a tensão numa carga e a corrente que a atravessa mediante a colocação de uma resistência padrão ou um sensor de Hall em série com a carga [15-16].

Referências

- [1] Henry P. Hall, “How electronics changed impedance measurements”, *IMTC 2004 - Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Como, Itália, vol. 1, pp. 2-8, Maio 2004.
- [2] MATLAB Manual, The MathWorks, Inc.
- [3] L. Angrisani, A. Bacciagalupi e A. Pietrosanto, “A digital signal processing Instrument for Impedance Measurement”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 45, n. 6, pp. 930-934, Dezembro 1996.
- [4] J. Kaczmarek, R. Rybski e D. Ucinski, “A recursive DSP approach to impedance measurement”, *IMEKO TC4 International Symposium – Proceeding*, Naples, Itália, pp. 671-675, Setembro. 1998.
- [5] Agilent 4294A Precision Impedance Analyser, Data Sheet, disponível em www.agilent.com, Janeiro 2003.
- [6] M. Fonseca da Silva, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “A new four parameter sine fitting procedure”, *Measurement*, vol. 35, n. 2, pp. 131-137, Março 2004.
- [7] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Low frequency impedance measurement using sine fitting”, *Measurement*, vol. 35, n. 1, pp. 89-96, Janeiro 2004.
- [8] M. Fonseca da Silva, “Sistema Automático de Medida de Impedâncias”, Tese de Doutorado, Instituto Superior Técnico, Outubro de 2002.
- [9] Pedro M. Ramos, M. Fonseca da Silva e A. Cruz Serra, “Improving sine-fitting algorithms for amplitude and phase measurements”, *XVII IMEKO World Congress*, Dubrovnik, Croácia, pp. 614-619, Junho 2003.
- [10] Pedro M. Ramos, A. Cruz Serra, “Tailored multi-harmonic signals for impedance measurements with waveform fitting algorithms”, *IEEE International Conference on Signals, Systems, Devices-SSD*, Sousse, Tunísia, vol. 4, Março 2005.
- [11] Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos, Mouhaydine Tlemçani e A. Cruz Serra, “Analysis of a non-iterative algorithm for the amplitude and phase difference estimation of two acquired sinewaves”, *XVIII IMEKO World Congress*, Rio de Janeiro, Brasil, Setembro 2006.
- [12] J. Shoukens, R. Pintelon e H. Van Hamme, “The interpolated Fast Fourier Transform: A comparative study”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, n. 2, pp. 226-232, Abril 1992.
- [13] T. Grandke, “Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 32, pp. 350-355, Junho 1983.

- [14] Mouhaydine Tlemçani, Fernando M. Janeiro, Pedro M. Ramos e A. Cruz Serra, “Impedance measurements using analog to digital converters and ellipse fitting signal processing algorithms”. *6^o Conference on Telecommunication Conftele2007*, Peniche, Portugal, Maio 2007.
- [15] Tomáš Radil, Pedro M. Ramos e A. Cruz. Serra, “DSP based portable impedance measurement instrument using sine-fittings algorithms”, *IEEE IMTC 2005- Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Ottawa, Canadá, vol. 2, pp. 1018-1022, Maio 2005.
- [16] Pedro M. Ramos, Nuno B. Brás e A. Cruz Serra, “ A New calibration method for current and voltage sensor used in power quality measurement”, *IEEE IMTC 2006 – Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Sorrento, Itália, pp. 2283-2288, Abril 2006.

Apêndice A. Transformada Discreta de Fourier

Nos métodos de adaptação de sinusóides descritos no Capítulo II deste trabalho, a primeira estimativa da frequência do sinal de entrada é fundamental para o desempenho dos algoritmos iterativos.

Considerando um sinal sinusoidal descrito por

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi), \quad (\text{A.83})$$

este sinal é amostrado sendo

$$x(k\Delta t) = A \cos(2\pi fk\Delta t + \varphi) \quad (\text{A.84})$$

a amostra de ordem k no instante $k\Delta t_s$ e N o número total de amostras. A transformada discreta de Fourier (DFT) do conjunto de N amostras $x(k)$ é definida como

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N}, \quad (\text{A.85})$$

com $n = 0, \dots, N-1$.

O número de amostras recolhidas e as frequências de amostragem e do sinal em estudo devem ser escolhidos com algum critério [1]. O número de amostras, correspondentes a fases distintas da sinusóide aplicada deve ser maximizado, evitando a repetição de fases amostradas. Isto acontece quando a relação entre as frequências de amostragem e de entrada obedece à relação

$$f = \frac{p}{N} f_s \quad (\text{A.86})$$

onde p é um número inteiro, primo relativamente a N . Assim, N e p não têm factores comuns entre si, existindo exactamente p períodos do sinal de entrada com N amostras recolhidas.

Como, em geral, se utiliza a FFT, N será uma potência de 2, pelo que qualquer p impar assegurara uma amostragem sem que haja repetição de fases.

Sempre que as amostras recolhidas não contêm um número exacto de períodos do sinal de entrada, o resultado da DFT apresentará componentes que não estão presentes no sinal de entrada e que resultam do aparecimento do fenómeno de espalhamento espectral [2-4].

A origem deste fenómeno explica-se pelo facto de transformada de Fourier duma onda sinusoidal de frequência f_{in} ser constituída por dois impulsos de Dirac em $+f_{in}$ e $-f_{in}$ – Figura A.1.

$$TF \{ A \cos(2\pi f_{in}t + \varphi) \} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_{in}) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_{in}) \quad (A.87)$$

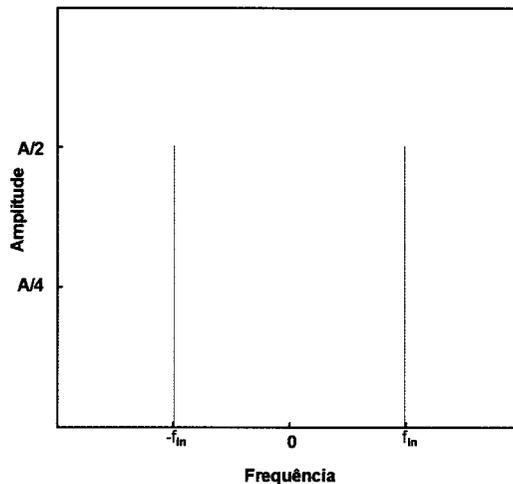


Figura A.1 – Espectro de uma senoide pura como descrita em A.1

O processo de recolha de amostras num intervalo finito de tempo pode ser representado como uma multiplicação da senoide por uma função com um valor unitário durante o intervalo de tempo em que se procede à recolha das amostras e com valor zero nos restantes casos. Esta função é designada, neste contexto, por janela rectangular, sendo definida por

$$w_{rect} = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < N \times \Delta t_s \\ 0 & t < 0 \text{ e } t \geq N \times \Delta t_s, \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

onde N é o número de amostras recolhidas e $\Delta t_s = 1/f_s$ é o intervalo de tempo entre amostras. A transformada de Fourier desta função, cuja amplitude se apresenta na Figura A.2 é

$$W_{rect}(f) = e^{j\pi f N \Delta t_s} N \Delta t_s \frac{\sin(\pi f N \Delta t_s)}{\pi f N \Delta t_s}. \quad (\text{A.89})$$

Como a multiplicação no domínio do tempo corresponde a uma convolução no domínio da frequência [5], a transformada de Fourier do produto das duas ondas, Figura A.3, é

$$TF \{w_{rect} A \cos(2\pi f_{in} t + \varphi)\} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} W_{rect}(f - f_{in}) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} W_{rect}(f + f_{in}), \quad (\text{A.90})$$

ou seja, o espectro da janela rectangular foi desdobrado e deslocado de modo a ficar centrado em cada uma das riscas da sinusóide.

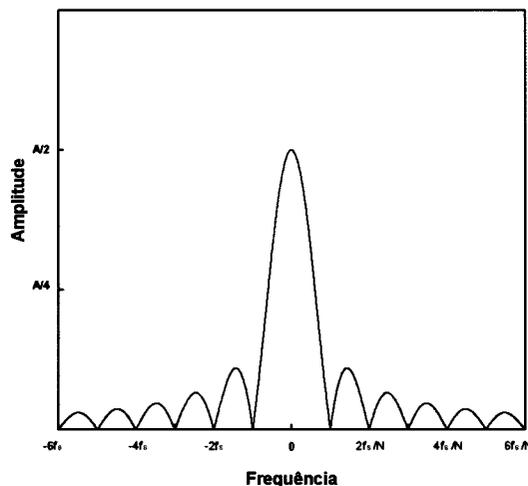


Figura A.2 – Espectro de uma janela rectangular de largura $N \times \Delta t_s$.

Uma consequência negativa é o aparecimento da sobreposição espectral, já que a soma das duas parcelas de (A.90) modifica inevitavelmente o espectro original, como se verifica facilmente na zona em torno da frequência zero na Figura A.3.

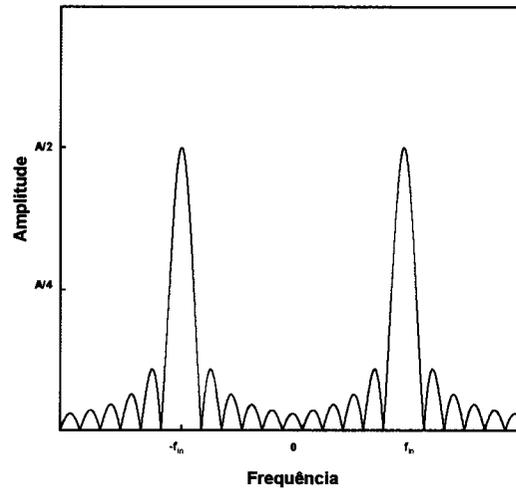


Figura A.3 – Espectro do produto do sinal sinusoidal com uma janela rectangular.

Como a transformada é periódica com período igual a Δt_s , a sobreposição espectral será tanto mais grave quanto mais próximo de zero ou de $f_s = 1/\Delta t_s$ estiver f .

Como as frequências do espectro calculado pela DFT são múltiplos inteiros de $\Delta f = f_s/N$, só no caso de N conter um número inteiro de períodos é que as frequências calculadas podem coincidir com as riscas do sinal de entrada. Se as N amostras corresponderem à um número inteiro de períodos, então as frequências que resultam da DFT correspondem aos zeros de

$$\frac{\sin(\pi f N \Delta t_s)}{\pi f N \Delta t_s} \quad (\text{A.91})$$

em todos os casos, excepto para a $f = f_{in}$, situação em que a transformada toma o valor que corresponde ao da transformada da sinusóide. Tem-se portanto um espectro sem erros de espalhamento espectral, tal como representado na Figura A.4.

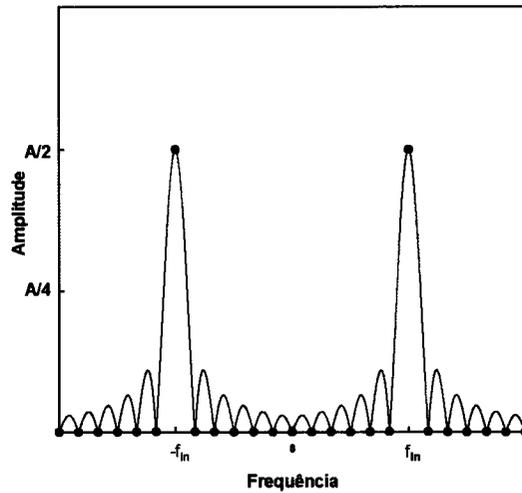


Figura A.4 – Espectro do produto do sinal sinusoidal descrito em A.1, com uma janela rectangular de largura $N \times \Delta t_s$. Os círculos são o resultado da transformada discreta de Fourier de um sinal sinusoidal de frequência f amostrado com uma frequência de amostragem

$$f_s = 11 f_s.$$

A.1 Descrição da DFT interpolada (IpDFT)

Aquando se recolhe N amostras de uma sinusóide, num intervalo de tempo finito Δt , a operação que se está à realizar é a da multiplicação da sinusóide por uma janela rectangular e as frequências do espectro calculado pela DFT são múltiplos inteiros de $\Delta f = f_s/N$. Se as N amostras não corresponderem à um número inteiro de períodos, isso manifesta-se com as consequências para o resultado da DFT que se observa na Figura A.5.

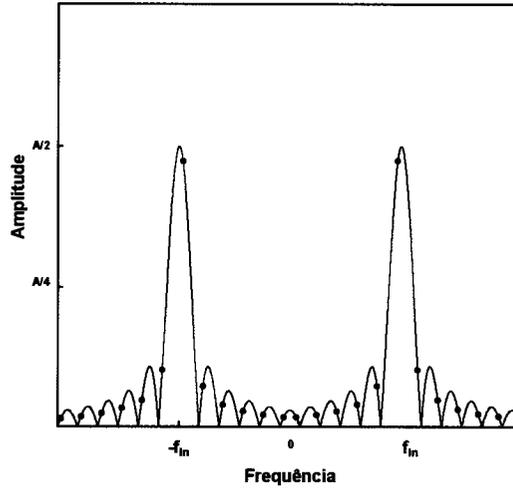


Figura A.5 – Espectro do produto do sinal sinusoidal, referido na Figura-A.1, com uma janela rectangular de largura $N \times \Delta t_s$. As marcas são o resultado da transformada discreta de Fourier para uma situação em que $f = 8,4 f_s / N$ ou seja em que o intervalo amostrado corresponde a 8,4 períodos do sinal de entrada.

Da Figura A.5 constata-se que a amplitude mais elevada não ocorre para o valor da frequência correcta e as restantes amplitudes não são nulas [4].

Uma solução para uma melhor determinação da frequência, é a IpDFT [2-5], DFT interpolada, que utiliza os resultados de uma DFT.

Considerando f a frequência do sinal sinusoidal descrito em (A.83). Por uma questão de simplificação introduz-se o inteiro L e o racional δ tal que $0 \leq \delta < 1$.

Tem-se

$$f = (L + \delta) f_0, \quad (\text{A.92})$$

sendo

$$f_0 = \frac{1}{N \Delta t_s} \quad (\text{A.93})$$

e

$$\lambda = L + \delta. \quad (\text{A.94})$$

A Transformada Discreta de Fourier de (A.83) pode ser escrita como [A].

$$X(n) = \frac{1}{2} \left\{ A e^{j\varphi} W_{rect} [(\lambda - n) f_0] + A e^{-j\varphi} W_{rect} [(\lambda + n) f_0] \right\}. \quad (\text{A.95})$$

Utilizando (A.89) e (A.92), obtém-se

$$X(L) = j \frac{A}{2} \left\{ e^{-j[\alpha(\lambda-L)+\varphi]} \frac{\text{sen}(\pi(\lambda-L))}{\text{sen}(\pi(\lambda-L)/N)} \right\} - j \frac{A}{2} \left\{ e^{j[\alpha(\lambda-L)+\varphi]} \frac{\text{sen}(\pi(\lambda-L))}{\text{sen}(\pi(\lambda-L)/N)} \right\}, \quad (\text{A.96})$$

sendo $\alpha = \pi(N-1)/N$.

O termo complexo $X(L)$ e o termo seguinte $X(L+1)$, que são o termo de maior amplitude e respectivo vizinho, podem ser escritos sob a forma de

$$X(L) = U_L + jV_L \quad (\text{A.97})$$

e

$$X(L+1) = U_{L+1} + jV_{L+1} \quad (\text{A.98})$$

Então, segundo [3],

$$\lambda = a \cos \left(\frac{Z_2 \cos(n(L+1)) - Z_1 \cos(nL)}{Z_2 - Z_1} \right) / n, \quad (\text{A.99})$$

com

$$Z_1 = \frac{V_L (K_{opt} - \cos(nL))}{\sin(nL)} + U_L \quad (\text{A.100})$$

e

$$Z_2 = \frac{V_{L+1} (K_{opt} - \cos(n(L+1)))}{\sin(n(L+1))} + U_{L+1}, \quad (\text{A.101})$$

sendo o termo K_{opt} dado por

$$K_{opt} = \frac{(V_{L+1} - V_L) \sin(nL) + (U_{L+1} - U_L) \cos(nL)}{(U_{L+1} - U_L)}, \quad (\text{A.102})$$

onde

$$n = \frac{2\pi}{N}. \quad (\text{A.103})$$

A estimativa da frequência assim obtida pelo método de adaptação de sinusóides de sete parâmetros é bastante melhor do que a da DFT ou FFT simples. Quando o número de períodos não é inteiro, a IpDFT consegue determinar com maior exactidão a frequência do sinal amostrado. Neste caso a aplicação do método de sete parâmetros leva a um número mais reduzido de iterações.

Referências

- [1] F. J. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with Discrete Fourier Transform”, *Proc. of the IEEE*, vol. 66, pp. 51-83, 1978
- [2] J. Shoukens, R. Pintelon e H. Van Hamme, “The interpolated Fast Fourier Transform: A comparative study”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, n. 2, pp. 226-232, Abril 1992.
- [3] T. Grandke, “Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals”, *IEEE Transactions on instrumentation and Measurement*, n. 32, pp. 350-355, Junho 1983.
- [4] Mouhaydine Tlemçani e António Cruz Serra, “Caracterização de um Conversor Analógico Digital”, *VII Congresso de Mecânica Aplicada e computacional*, vol. 3 pp. 1313-1320, Évora, Abril 2003.
- [5] A. Serra, “Sistemas Automáticos de Medida”, AEIST 1999.

Apêndice B. Configuração das medidas de impedância pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A

Nesta secção procede-se a descrição do instrumento Agilent 4294A [1] e a configuração adoptada para as medidas de impedâncias efectuadas [2-3].

O esquema da Figura B.1 ilustra a configuração adoptada para medir impedâncias pelo instrumento Agilent 4294A.

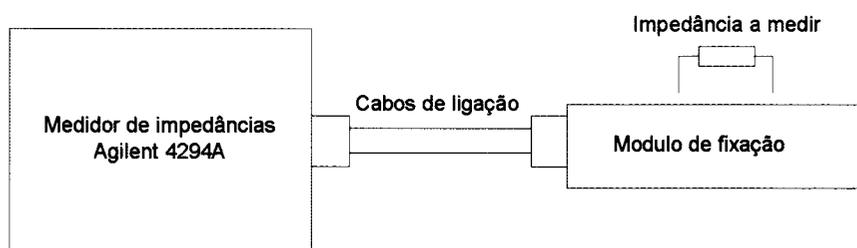


Figura B.1 – Configuração de um sistema de medidas de impedâncias pelo instrumento Agilent 4294A.

A precisão relativa do medidor de impedâncias Agilent 4294A é definida como

$$E = E'_p + \left(\frac{Z'_s}{|Z_X|} + Y'_0 \cdot |Z_X| \right) \times 100, \quad (\text{A.104})$$

sendo $|Z_X|$ o módulo da impedância a medir e

$$E'_p = E_{PL} + E_{PBW} + E_{POSC} + E_P \quad [\%], \quad (\text{A.105})$$

$$Y'_0 = Y_{OL} + K_{BW} \times K_{Y_{osc}} \times (Y_{ODC} + Y_O) \quad [\text{S}] \quad (\text{A.106})$$

e

$$Z'_s = Z_{SL} + K_{BW} \times K_{Z_{osc}} \times Z_S \quad [\Omega] \quad (\text{A.107})$$

são dependentes da frequência e são indicados no manual do instrumento Agilent 4294A.

Não havendo uma explicitação clara sobre a função de distribuição do erro máximo do instrumento assume-se que este tem uma distribuição uniforme. Neste caso a incerteza máxima é do tipo B e é dada por

$$E_{\max} = \frac{E}{\sqrt{3}} \quad (\text{A.108})$$

Referências

- [1] Agilent 4294A Precision Impedance Analyser, Data Sheet. Disponível em www.agilent.com January 2003.

Apêndice C. Medição das impedâncias, pelo medidor de impedâncias Agilent 4294A

Nesta secção apresentam-se os resultados das medidas, das impedâncias, efectuadas pelo instrumento Agilent 4294A (Figuras C.1 a C.10). As medidas referem-se as impedâncias utilizadas neste trabalho e apresentadas na Tabela 3.1. numa gama de frequência de 10 Hz a 25 kHz. Verifica-se que a resposta em frequência das impedâncias não corresponde à que se esperava não considerando a constituição das impedâncias e admitindo que todos os componentes tenham comportamento ideal. O módulo e o carácter da impedância varia muito com a frequência. Esta situação é devida a existência de impedâncias parasitas.

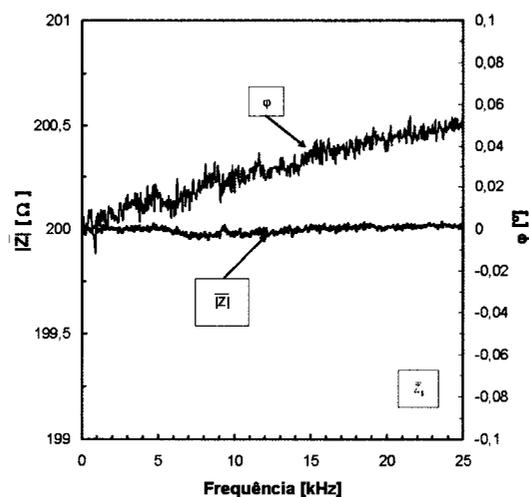


Figura C.1 – Módulo e fase da impedância \bar{Z}_1 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

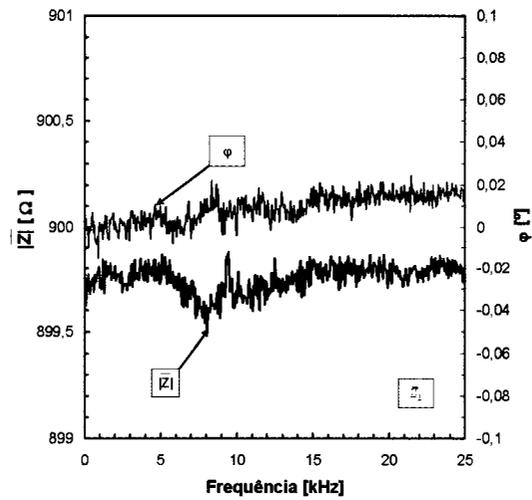


Figura C.2 – Módulo e fase da impedância \bar{Z}_2 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

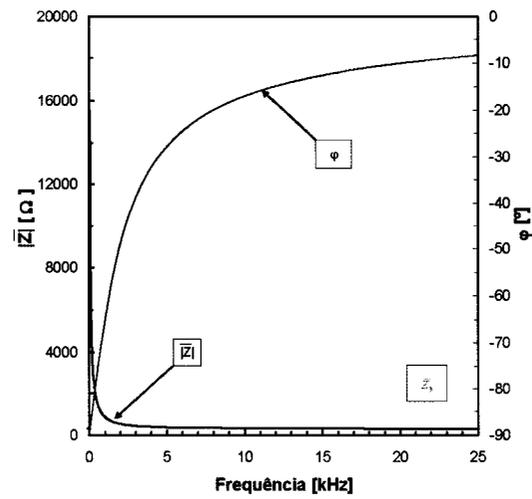


Figura C.3 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_3 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

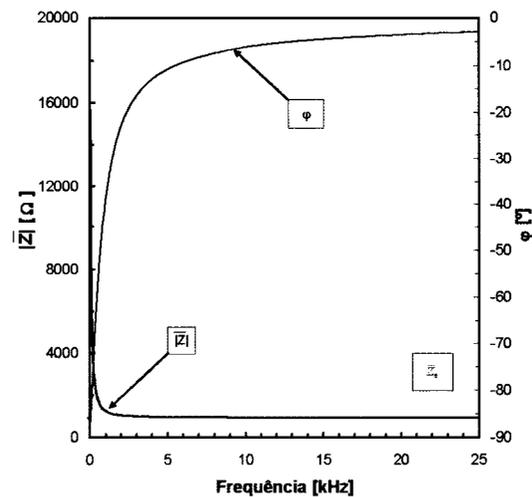


Figura C.4 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_4 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

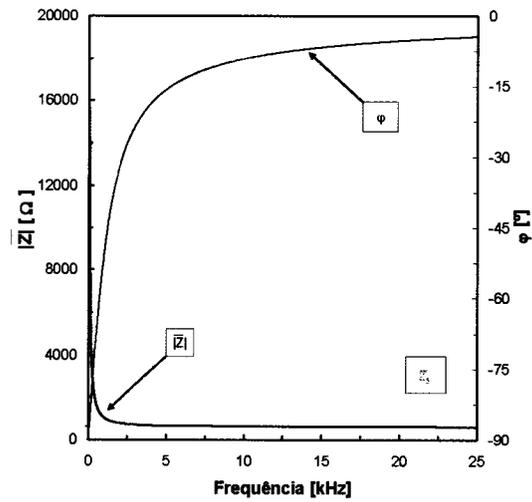


Figura C.5 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_5 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

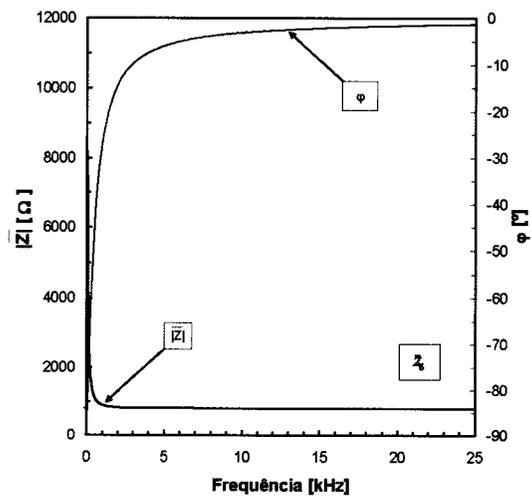


Figura C.6 – Espectro da impedância \bar{Z}_6 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

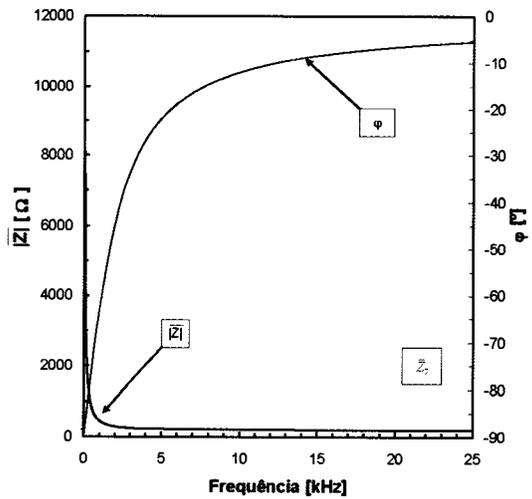


Figura C.7 – Espectro da impedância \bar{Z}_7 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

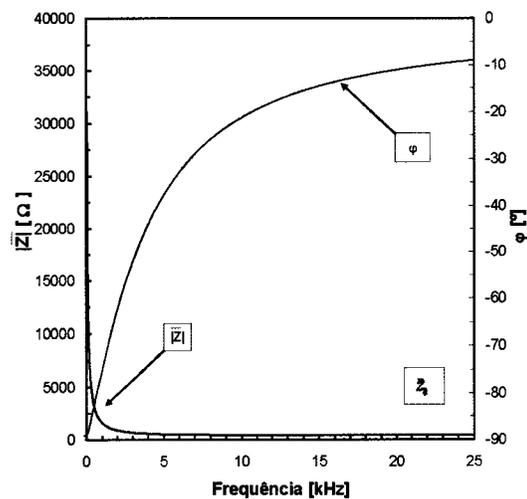


Figura C.8 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_8 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

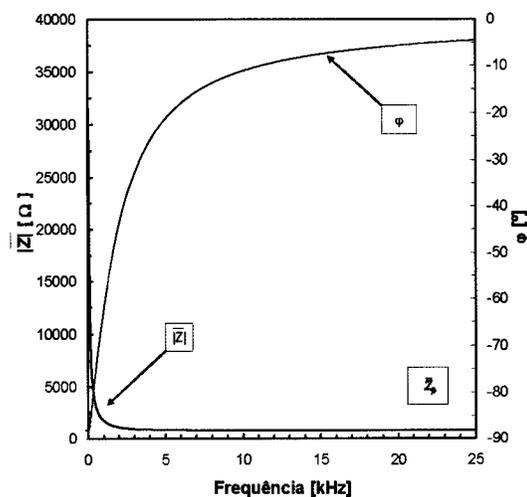


Figura C.9 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_9 obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

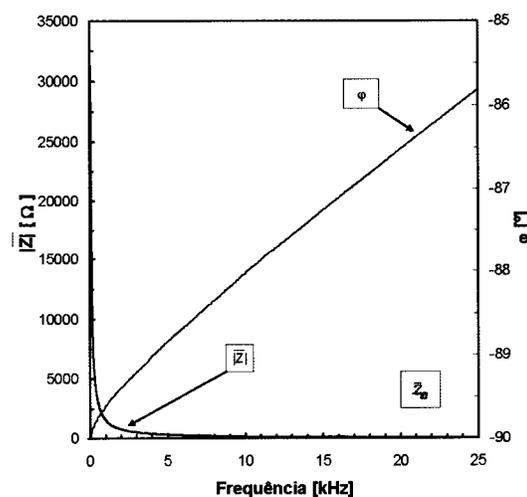


Figura C.10 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{10} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

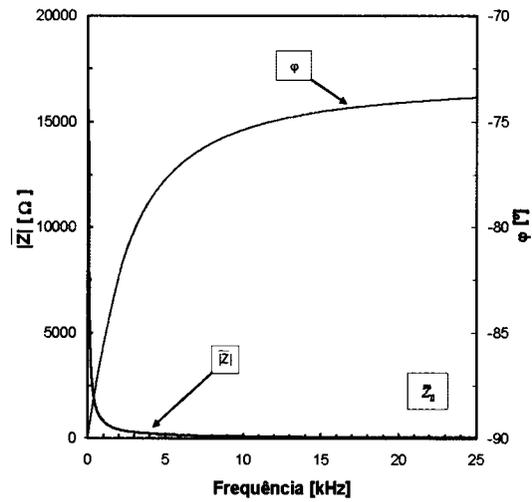


Figura C.11 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{11} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

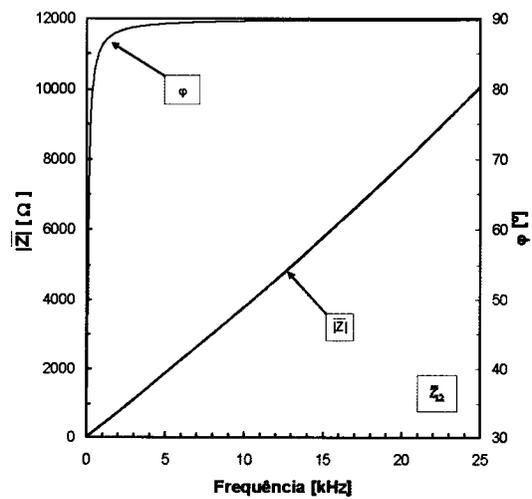


Figura C.12 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{12} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

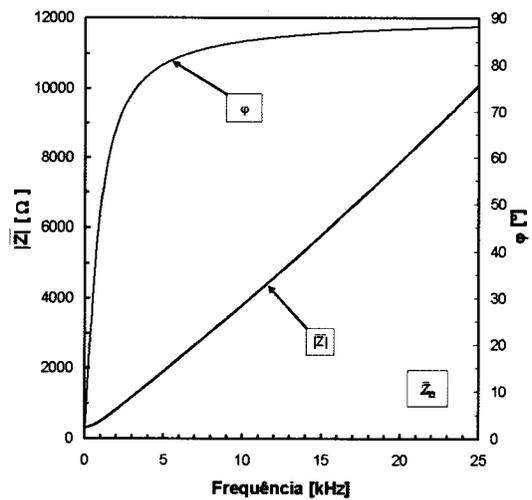


Figura C.13 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{13} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

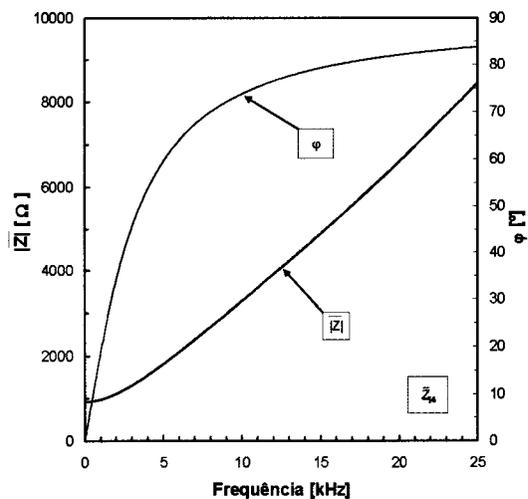


Figura C.14 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{14} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

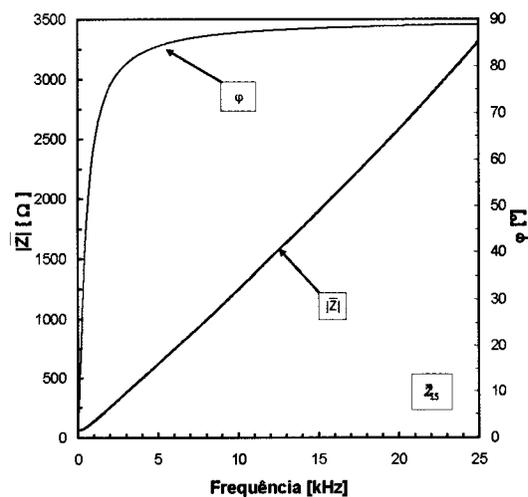


Figura C.15 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{15} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

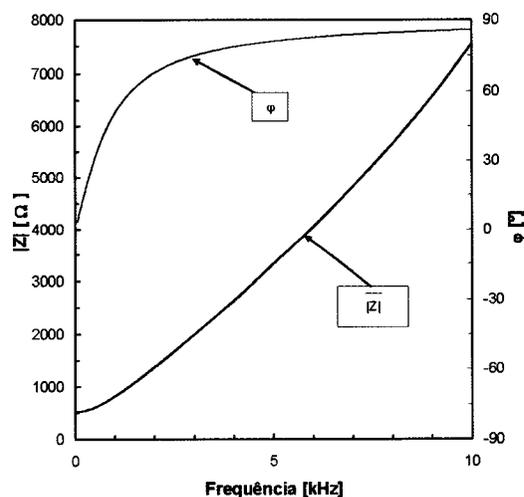


Figura C.16 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{16} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

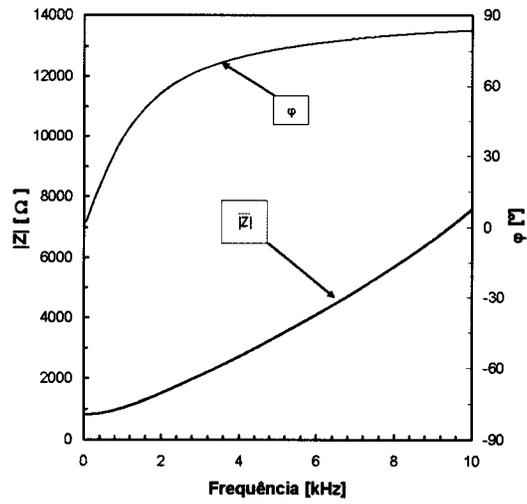


Figura C.17 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{17} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

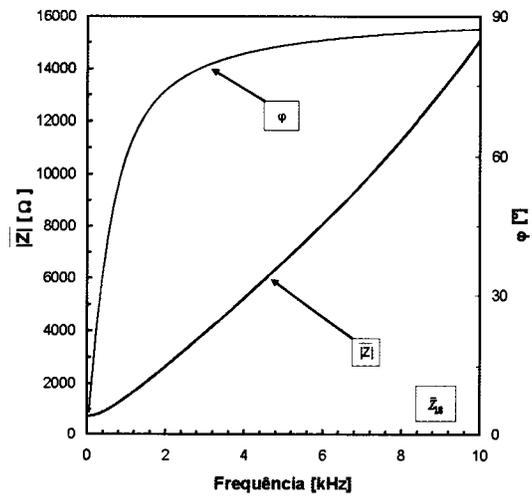


Figura C.18 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{18} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

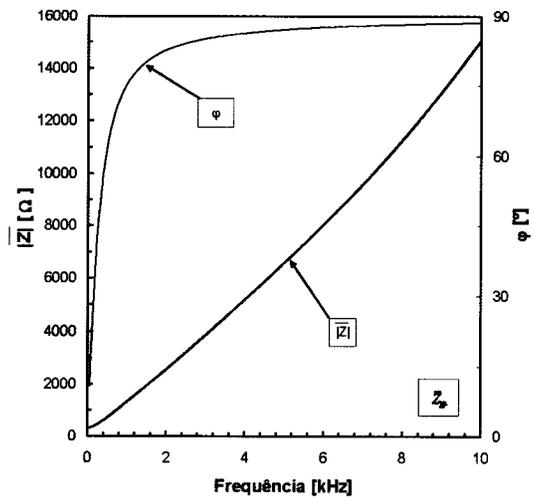


Figura C.19 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{19} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

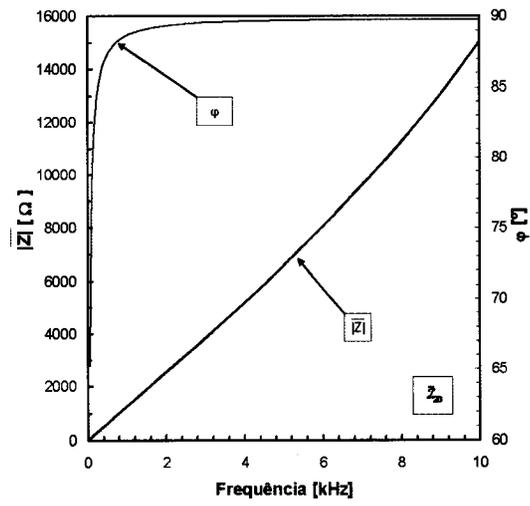


Figura C.20 – Espectro das impedâncias \bar{Z}_{20} obtido pelo instrumento Agilent 4294A na gama 10 Hz a 25 kHz.

Lista de Acrónimos

ADC	Analog to Digital Converter
DAC	Digital to Analog Converter
FFT	Fast Fourier Transform
IpDFT	Interpolated Discrete Fourier Transform
DFT	Discrete Fourier Transform
DUT	Device Under Test
LSB	Least Significant Bit
RMS	Root Mean Square
DAQ	Data Acquisition
DNL	Diferential Non Linearity
INL	Integral Non Linearity

Lista de Símbolos

Capítulo 2

u	Sinal sinusoidal
D	Amplitude
f	Frequência
C	Componente contínua
ω	Frequência angular
t	Tempo
N	Número de amostras adquiridas por canal
φ	Fase
f_s	Frequência de amostragem
\mathbf{r}	Vector dos resíduos
ε_{RMS}	Erro Quadrático Médio
Δt_s	Intervalo de tempo de amostragem
δ_{φ_i}	Erro de fase
σ_{φ}	Desvio padrão do erro de fase
$\bar{\varphi}$	Valor médio da diferença de fase

Capítulo 3

\bar{Z}_i	Impedância à medir
\bar{Z}_R	Impedância de referência
\bar{Z}_{ADC}	Impedância de entrada do conversor analógico digital
\bar{U}_R	Tensão na impedância \bar{Z}_R
\bar{U}_Z	Tensão na impedância \bar{Z}
$\langle \bar{Z}_i \rangle$	Valor médio do módulo da impedância \bar{Z}_i
$\langle \varphi_i \rangle$	Valor médio da fase da impedância \bar{Z}_i
N	Número de amostras adquiridas
$\sigma_{ \bar{Z}_i }$	Desvio padrão do módulo da impedância \bar{Z}_i
σ_{φ_i}	Desvio padrão da fase da impedância \bar{Z}_i
$u_{ \bar{Z}_i }$	Incerteza sobre o módulo da impedância \bar{Z}_i
u_{φ_i}	Incerteza sobre a fase da impedância \bar{Z}_i
E_{\max}	Erro máximo do instrumento

Capítulo 4

$u(t)$	Sinal sinusoidal
D	Amplitude do sinal
f	Frequência do sinal
t	Tempo
φ	Fase
C	Componente contínua
Δt_s	Intervalo de tempo de amostragem
f_s	Frequência de amostragem
N	Número de amostras
F	Forma quadrática
∇	Gradiente
s_r	Sentido de rotação médio da elipse
$r(u)$	Função de distribuição do ruído
$\bar{\varphi}$	Valor médio da fase
δ_φ	Desvio padrão da fase
p	Probabilidade de erro de fase
M	Número de ensaios
δ_D	Desvio padrão relativo da amplitude

Capítulo 5

\bar{Z}_i	Impedância à medir
\bar{Z}_R	Impedância de referência
$\langle \bar{Z}_i \rangle$	Valor médio do módulo da impedância \bar{Z}_i
$\langle \varphi_i \rangle$	Valor médio da fase da impedância \bar{Z}_i
σ_{φ_i}	Desvio padrão da fase da impedância \bar{Z}_i
N	Número de amostras adquiridas por canal

Apêndice A

$u(t)$	Sinal sinusoidal
$x(k\Delta t)$	Amostra de ordem k
N	Número de amostras adquiridas
$X(n)$	Transformada de Fourier de $x(t)$
δ	Função de Dirac
TF	Transformada de Fourier
A	Amplitude do sinal
Δt_s	Intervalo de tempo de amostragem
f_{in}	Frequência fundamental
f_s	Frequência de amostragem

Apêndice B

Z_x	Impedância à medir
E_{\max}	Incerteza máxima do instrumento

of