



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS DE BAIXA DIMENSÃO

**Cristina Isabel Caetano Ferreira Januário**  
(Mestre)

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Matemática

Orientador: Professora Doutora Maria Clara Canotilho Grácio  
Co-orientador: Professora Doutora Diana Aldea Mendes

Junho de 2009

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS DE BAIXA DIMENSÃO

**Cristina Isabel Caetano Ferreira Januário**  
(Mestre)

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em Matemática



171322

Orientador: Professora Doutora Maria Clara Canotilho Grácio  
Co-orientador: Professora Doutora Diana Aldea Mendes

Junho de 2009

## RESUMO

Neste trabalho estudamos, através da teoria da dinâmica não-linear, o comportamento de modelos em dois domínios do conhecimento: a economia e a ecologia.

Utilizando a teoria da dinâmica simbólica, pretendemos contribuir para uma análise rigorosa de modelos. Em particular, caracterizamos o comportamento caótico de certas aplicações através do cálculo de invariantes topológicos, estudamos a sua variação com alguns parâmetros importantes e apresentamos considerações relevantes a partir dos resultados obtidos. A propósito do comportamento caótico dos modelos, aplicamos técnicas para controlo do caos.

Primeiramente analisamos um modelo caótico que governa os lucros de uma empresa. O estudo deste sistema revelou a existência de aplicações iteradas unidimensionais que permitem caracterizar a dinâmica e exibir uma aplicação do controlo do comportamento caótico.

No contexto da economia, apresentamos também um estudo analítico relativo a um método para controlo do caos num modelo para a acumulação de capital.

Seguidamente é dedicada atenção a um modelo discreto de ciclos económicos do tipo Kaldor, de dimensão dois e estrutura triangular, com ênfase nas dinâmicas isentrópicas.

A última parte deste trabalho é dedicada aos sistemas dinâmicos aplicados à ecologia. Atendendo à importância dos mecanismos geradores do caos, analisamos um modelo de cadeias alimentares tritróficas particularmente significativo neste domínio.

Concluimos a incursão nas aplicações à ecologia com a construção de um modelo de predação com cooperação. Devido à existência de caos transiente, que tem como consequência a extinção de uma das espécies, caracterizamos a dinâmica em direcção à crise e aplicamos um método para controlo do comportamento caótico.

Finalmente, tecemos considerações relativas à importância da teoria dos sistemas dinâmicos como um instrumento de análise que contribui para o conhecimento profundo do comportamento dinâmico de modelos, desvendando um carácter estruturado por detrás da complexidade.

**PALAVRAS-CHAVE:** modelos na economia, modelos na ecologia, aplicações no intervalo, dinâmica simbólica, invariantes topológicos, caos, dinâmica isentrópica, controlo do caos.

## AGRADECIMENTOS

As minhas primeiras palavras são à memória do Professor José Rodrigues Santos de Sousa Ramos. Com ele iniciei esta viagem... e com ele não foi possível terminá-la... Contudo, os mais de treze anos de convivência deixaram marcas de profunda admiração pela pessoa humana e pelo cientista. É com imenso respeito e humildade que desejo que tivesse orgulho nesta tese.

Às Professoras Maria Clara Canotilho Grácio e Diana Aldea Mendes agradeço a simpatia e o constante incentivo ao longo destes anos assim como a pertinência das suas observações científicas.

Agradeço aos meus colegas da Secção de Matemática do Departamento de Engenharia Química do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa (ISEL) a amizade e toda a disponibilidade e incentivos para poder usufruir de dispensas de serviço docente. Agradeço igualmente ao ISEL todo o apoio institucional dado.

Ao Jorge um agradecimento especial... pela amizade, pela confiança em mim depositada, pela auto-estima que me devolveu... sem ele este trabalho não seria certamente possível.

À minha família...que mais não poderia ter dado...

Finalmente, aos meus três tesouros, Rui, Mariana e Miguel, obrigada pelos sorrisos...

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução e preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	A teoria dos sistemas dinâmicos discretos: invariantes topológicos e controlo do caos . . . . .	5
1.1.1	A teoria de <i>kneading</i> . . . . .	16
1.1.2	A teoria das partições de Markov . . . . .	23
1.1.3	Um outro invariante topológico . . . . .	25
1.1.4	Aplicações triangulares e caos . . . . .	28
1.1.5	Controlo de sistemas caóticos . . . . .	29
<b>I</b>	<b>A teoria dos sistemas dinâmicos discretos e a economia</b>	<b>33</b>
<b>2</b>	<b>Medição e controlo do comportamento caótico dos lucros de uma empresa<sup>1</sup></b>	<b>35</b>
2.1	Descrição do modelo . . . . .	38
2.2	Aplicações unimodais, entropia topológica e caos no modelo empresarial de Bouali . . . . .	40

---

<sup>1</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação do artigo científico [22] com o título *Measuring and controlling the chaotic motion of profits*.

2.3	Controlo do comportamento caótico do modelo de Bouali . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Controlo do comportamento caótico num modelo económico para a acumulação de capital<sup>2</sup></b>	<b>53</b>
3.1	Descrição do modelo . . . . .	54
3.2	Controlo do modelo para a acumulação de capital . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Medindo a complexidade num modelo de ciclos económicos do tipo Kaldor<sup>3</sup></b>	<b>63</b>
4.1	Descrição do modelo . . . . .	64
4.2	Dinâmica caótica da aplicação triangular . . . . .	66
4.3	Aplicações isentrópicas . . . . .	72
<b>II</b>	<b>A teoria dos sistemas dinâmicos discretos e a ecologia</b>	<b>81</b>
<b>5</b>	<b>Invariantes topológicos no estudo de um modelo para uma cadeia alimentar tritrófica<sup>4</sup></b>	<b>83</b>
5.1	Descrição do modelo . . . . .	85
5.2	Aplicações de Poincaré e aplicações unidimensionais . . . . .	88
5.2.1	Aplicações unimodais . . . . .	91
5.2.2	Aplicações bimodais . . . . .	95

<sup>2</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na submissão para publicação do artigo científico [29] com o título *Isentropic dynamics and control in an economic model for capital accumulation*.

<sup>3</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação do artigo científico [35] com o título *Measuring complexity in a business cycle model of the Kaldor type*.

<sup>4</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação dos artigos científicos [46] e [47] com os títulos *Topological invariants in the study of a chaotic food chain system* e *Chaos in ecology: the topological entropy of a tritrophic food chain model*.

5.3	Dinâmicas isentrópicas e segundo invariante topológico . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Caos e crises num modelo de predação com cooperação<sup>5</sup></b>	<b>103</b>
6.1	Descrição do modelo . . . . .	107
6.2	Dinâmica caótica . . . . .	113
6.3	Crise e controlo do comportamento caótico na predação com cooperação . .	119
6.3.1	Descrição do método de controlo . . . . .	120
6.3.2	Análise das regiões alvo . . . . .	124
	<b>Considerações finais</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>133</b>

---

<sup>5</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na submissão para publicação do artigo científico [55] com o título *Chaos and crises in a model for cooperative hunting: a symbolic dynamics approach*. O trabalho foi efectuado inteiramente em colaboração com o Instituto de Investigação Biomédica de Barcelona.

# Capítulo 1

## Introdução e preliminares

*“Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência.”*

José Sebastião e Silva

A aplicação de conceitos e métodos matemáticos é considerada fundamental no progresso de diversas áreas do conhecimento, como por exemplo a engenharia, a química, a física, a economia, a biologia, a ecologia, entre outras. As questões suscitadas por estes domínios revelam-se verdadeiramente estimulantes, exercendo um papel determinante no desenvolvimento de teorias e novos ramos da própria matemática.

Um domínio da matemática privilegiado no que diz respeito à sua riqueza conceptual e aplicabilidade é a teoria dos sistemas dinâmicos (discretos e contínuos), em particular a chamada ciência não-linear. A teoria dos sistemas dinâmicos integra de um modo

harmonioso e indispensável três grandes áreas da matemática: a análise, a álgebra e a geometria. A dinâmica não-linear diz respeito ao estudo de sistemas onde uma pequena variação num parâmetro pode conduzir a súbitas e drásticas mudanças nos comportamentos quantitativo e qualitativo do sistema. A análise das interações não-lineares revela o modo como surgem estruturas qualitativamente novas e como elas se relacionam com a teoria já estabelecida. A utilização de técnicas computacionais é usualmente identificada como o principal catalisador do desenvolvimento da ciência não-linear, desvendando um carácter estruturado por detrás da complexidade. Surpreendentemente, os modelos construídos em diversas áreas do conhecimento, considerando os princípios fundamentais da complexidade, revelam partilhar um conjunto de importantes propriedades. A notável aplicabilidade da ciência não-linear em domínios tão distintos e aparentemente desconexos, confere-lhe o estatuto de um possível factor de unificação metodológica nas diversas áreas do conhecimento. Ao explorar estruturas comuns em diferentes sistemas, os cientistas estudam e modelam interdisciplinarmente a complexidade da natureza e da sociedade. As novas técnicas e conceitos proporcionam métodos eficazes para a modelação e simulação de alterações súbitas e irreversíveis nos sistemas naturais e sociais.

Historicamente, a teoria não-linear moderna teve o seu início com o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). Poincaré revolucionou o estudo das equações não-lineares, introduzindo técnicas qualitativas ou geométricas e conceitos topológicos, para discutir propriedades globais das soluções dos sistemas, especialmente para aqueles em que os métodos estritamente analíticos não se revelavam eficazes. Com a emergência da teoria qualitativa é atribuída maior importância à compreensão do comportamento global das soluções, em detrimento do comportamento local de soluções analíticas particulares. Nos

---

anos que se seguiram, o estudo dos sistemas dinâmicos foi grandemente enriquecido com as contribuições de matemáticos como Liapunov, Kolmogorov, Arnold, Sinai, Birkhoff, Cartwright, Littlewood, Smale, entre outros. Por volta de 1975, muitos cientistas em todo o mundo aperceberam-se da existência de um novo tipo de movimento nos sistemas dinâmicos - designado por *caos*. Este termo foi introduzido para designar um comportamento dinâmico aperiódico, que ocorre num sistema determinístico e que exhibe sensibilidade às condições iniciais. O que é verdadeiramente surpreendente é que este tipo de comportamento pode ocorrer em sistemas aparentemente muito simples. Nas aplicações da teoria do caos são usados conceitos como catástrofes, bifurcações, atractores estranhos, periodicidades e aplicações no intervalo. Todos estes tópicos não podem ser efectivamente estudados por métodos analíticos tradicionais, os quais estão essencialmente relacionados com a linearidade, a estabilidade.

O trabalho que seguidamente se apresenta, constitui uma incursão em dois domínios: *sistemas dinâmicos discretos aplicados à economia e sistemas dinâmicos discretos aplicados à ecologia*. Com a utilização da teoria da dinâmica não-linear pretende-se contribuir para uma análise rigorosa de modelos e para uma nova visão da dinâmica que inclui a complexidade. Uma razão plausível e incontornável para aplicar a teoria do caos a estas áreas da ciência é devida ao facto do comportamento caótico não ser de forma alguma uma ocorrência rara ou patológica, e devido ao facto dos resultados obtidos poderem ser relevantes tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista da economia e das ciências da vida. Neste contexto, concluiremos este primeiro capítulo com a apresentação de definições e resultados que serão fundamentais na caracterização da dinâmica dos modelos, no âmbito dos sistemas dinâmicos discretos, no que diz respeito a dinâmica

simbólica, teoria de *kneading*, partições de Markov, invariantes topológicos, comportamento caótico e controlo do caos.

A primeira parte deste trabalho, dedicada aos sistemas dinâmicos discretos e a economia, compreende três capítulos. No capítulo dois estudamos um modelo caótico que governa os lucros de uma empresa. O estudo deste sistema, constituído por três equações diferenciais ordinárias, revelou a existência de aplicações iteradas unidimensionais que permitem apresentar uma caracterização da dinâmica e exibir uma aplicação do controlo do comportamento caótico. No terceiro capítulo é apresentado um estudo analítico relativamente a um método clássico de controlo do caos, baseado em pulsos periódicos, num modelo económico para a acumulação de capital. O capítulo quatro é dedicado à análise da complexidade de um modelo de ciclos económicos do tipo Kaldor. Este modelo discreto de dimensão dois e estrutura triangular permite um estudo particularmente interessante em termos de dinâmicas isentrópicas.

A segunda parte, consignada aos sistemas dinâmicos discretos e a ecologia, inclui dois capítulos. O quinto capítulo versa sobre a análise de um modelo de cadeias alimentares tritróficas que, recentemente, se revelou de importância singular no estudo dos mecanismos geradores do caos. A redução da dimensão da dinâmica, com o aparecimento de aplicações iteradas unimodais e bimodais, possibilita uma compreensão mais detalhada do comportamento das variáveis intervenientes. Finalmente, no capítulo seis construímos um novo modelo representativo de predação com cooperação numa cadeia alimentar. O comportamento deste sistema é caracterizado pela existência de caos transiente que, neste caso, tem como consequência a extinção de uma das espécies. Neste contexto é apresentado um método de controlo do caos, que actua sobre as variáveis dinâmicas e permite

manter o comportamento caótico do modelo, que significa a preservação da espécie. É também efectuada uma análise exaustiva de certas estruturas inerentes ao procedimento de controlo.

É importante salientar que subjacente às investigações desenvolvidas existe um exaustivo trabalho computacional de programação e de simulações numéricas que foram inteiramente realizadas pelos intervenientes nesta dissertação. O *software* utilizado corresponde ao programa Mathematica 6 da Wolfram Research.

Concluiremos este trabalho com algumas considerações relativas à importância da teoria dos sistemas dinâmicos como instrumento de análise e suporte conceptual para o conhecimento profundo da estrutura dinâmica dos modelos. A utilização da dinâmica simbólica surge como um factor de unificação metodológica no estudo do comportamento caótico e confere-lhe um carácter surpreendentemente estruturado, desvendando propriedades dissimuladas pela complexidade.

## 1.1 A teoria dos sistemas dinâmicos discretos: invariantes topológicos e controlo do caos

Nesta secção apresentamos definições e resultados fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos discretos necessários para as investigações desenvolvidas nos capítulos seguintes. Em particular, exibiremos conceitos e métodos que integram a teoria da dinâmica simbólica - central na análise quantitativa e qualitativa que nos propomos empreender. As ideias subjacentes à dinâmica simbólica remontam aos finais do século XIX, quando o matemático

francês Jacques Hadamard, publicou em 1898 um artigo sobre geodésicas de uma família de superfícies com curvatura negativa. Neste contexto surgiram igualmente trabalhos realizados por Emil Artin em 1924, Myrberg, Hedlund, entre outros autores. A primeira abordagem formal da teoria da dinâmica simbólica foi desenvolvida pelos matemáticos norte-americanos Marston Morse e Gustav Hedlund no seu trabalho, em 1938 [1]. Esta teoria conheceu um notável desenvolvimento nas décadas de 60 e 70 com as investigações dos matemáticos norte-americanos Rufus Bowen e Stephen Smale e da sua escola assim como através das contribuições do matemático russo Yakov Sinai e da escola soviética de teoria ergódica.

A dinâmica simbólica surge como um método prático para estudar sistemas dinâmicos, de tal forma que o estado de um sistema é observado apenas em momentos discretos. Este procedimento conduz ao estudo das iteradas de uma dada aplicação. Além da discretização do tempo surge simultaneamente a discretização do espaço. A ideia é dividir o conjunto de estados possíveis num determinado número de fracções e seguir a evolução de cada uma delas em cada unidade de partição do tempo. A cada fracção é associado um símbolo e, deste modo, a evolução do sistema é descrita por uma sequência de símbolos de um determinado alfabeto. Este procedimento conduz a um sistema dinâmico simbólico que nos ajuda a compreender o comportamento dinâmico do sistema original.

A dinâmica simbólica foi desenvolvida e utilizada com um notável sucesso no estudo de sistemas dinâmicos discretos, em particular nas aplicações de um intervalo real nele próprio (ver por exemplo as contribuições de Milnor e Thurston [2], Lampreia e Sousa Ramos [3] entre outros). O seu carácter unidimensional confere-lhe um contexto especialmente adequado para o estudo de propriedades dinâmicas, para o desenvolvimento de conceitos e para a

construção de invariantes essenciais na sua classificação topológica. A codificação simbólica dos intervalos de monotonia e o estudo das sequências simbólicas associadas às órbitas dos intervalo permitem-nos estudar aspectos qualitativos das aplicações unidimensionais sob duas perspectivas distintas: a teoria de *kneading* e a teoria das cadeias de Markov topológicas.

No estudo dos modelos caóticos apresentados nos capítulos seguintes surgem transversalmente as aplicações unidimensionais seccionalmente monótonas, com dois ou três intervalos de monotonia, o que significa, respectivamente, a ocorrência de um ou dois pontos críticos no intervalo (o conceito de ponto crítico refere-se a um ponto onde se dá uma inversão da monotonia, exigindo apenas a continuidade e não a diferenciabilidade das funções em estudo). Por conseguinte, da teoria estabelecida para as aplicações  $m$ -modais (família de aplicações contínuas no intervalo, com  $m$  pontos críticos e  $m + 1$  intervalos de monotonia) dar-se-á, no que segue, especial relevo às aplicações unimodais e bimodais. A propósito do carácter caótico dos modelos, e atendendo à importância dos comportamentos periódicos em determinados contextos, são apresentados os fundamentos do método de controlo do caos desenvolvido pelos matemáticos Ott, Grebogy e Yorke [4] em 1990. É importante salientar que este método, que encontra uma forma de suprimir o caos através da actuação sobre um parâmetro de controlo, apesar da sua eficiência só muito recentemente foi objecto de aplicação em algumas ciências, em particular nas ciências da vida. Para consulta de algumas contribuições fundamentais relacionadas com métodos de controlo do caos, quer seja, por exemplo, através da aplicação de um amortecedor, do método de Pyragas ou de controlo proporcional com *feedback* pode ver-se o livro de Kapitaniak [5].

**Definição 1** Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um espaço métrico compacto. Seja ainda  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação e  $x_0$  um ponto do domínio de  $f$ . Então, se  $n \in \mathbb{N}$ , designa-se por  $f^n(x_0)$  a  $n$ -ésima iterada de  $f$  em  $x_0$ , ou seja,

$$f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\dots f(x_0)))}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x_0).$$

O conjunto de todas as iteradas de  $x_0$ ,  $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ , chama-se órbita de  $x_0$ . O par  $(X, f)$  designa-se por sistema dinâmico discreto definido pelas iteradas da aplicação  $f$ .

Um ponto cujas iteradas correspondem sempre ao mesmo ponto é designado ponto fixo. Os pontos fixos são muito importantes no estudo da dinâmica das funções.

**Definição 2** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $x_0$  um ponto do domínio de  $f$ . Então,  $x_0$  é um ponto fixo de  $f$  se  $f(x_0) = x_0$ .

**Definição 3** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $x_0 \in X$ . O ponto  $x_0$  é um ponto periódico de  $f$  de período  $k$  se  $f^k(x_0) = x_0$ . O menor valor de  $k$  que satisfaz a condição anterior chama-se período de  $x_0$ . Assim, um ponto é um ponto periódico de  $f$  de período  $k$  se é um ponto fixo de  $f^k$ . Se  $x_0$  é um ponto periódico, então ele próprio e as respectivas iteradas designam-se por órbita periódica ou por ciclo periódico. Um ponto  $x_0$  diz-se aperiódico se  $f^{k_1}(x_0) \neq f^{k_2}(x_0)$ ,  $\forall k_1 \neq k_2$ .

Seguidamente, descrevemos quais as implicações da presença de um ponto de período 3, ou de qualquer outro ponto de período  $n$ , na existência de outros pontos periódicos. A resposta decorrerá de dois teoremas famosos, o teorema de Li e Yorke (1975) e o teorema de Sharkovsky (1964).

**Teorema 1** (Li-Yorke). *Suponhamos que  $f$  é contínua no intervalo real fechado  $J$ , com  $J \supseteq f(J)$ . Se  $f$  tem um ponto de período 3, então  $f$  tem pontos de todos os outros períodos.*

**Demonstração** Para uma prova deste resultado pode consultar-se [6].

Mas, se considerarmos agora que apenas conseguimos mostrar que  $f$  tem um ponto periódico de período 5, terá a aplicação  $f$  de ter pontos de todos os períodos? O teorema notável do matemático ucraniano A. N. Sharkovsky responde completamente a esta questão. Com o propósito de apresentar o teorema de Sharkovsky é necessário definir *ordem de Sharkovsky* dos inteiros positivos:

$$\begin{aligned}
 & 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \\
 & \text{inteiros ímpares} \qquad \qquad \qquad \text{2} \cdot (\text{inteiros ímpares}) \qquad \qquad \qquad \text{2}^2 \cdot (\text{inteiros ímpares}) \\
 & \qquad \qquad \qquad \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \\
 & \qquad \text{2}^n \cdot (\text{inteiros ímpares}) \qquad \qquad \qquad \text{potências de 2}
 \end{aligned}$$

A relação  $a \succ b$  indica que  $a$  precede  $b$  na ordem. Todo o número natural pode ser encontrado exactamente uma vez na ordem de Sharkovsky.

**Teorema 2** (Sharkovsky). *Suponhamos que  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$  e que  $f$  tem um ponto periódico de período  $n$ . Se  $n \succ m$  na ordem de Sharkovsky, então  $f$  também tem um ponto periódico de período  $m$ .*

**Demonstração** Ver [7] e [8].

Note-se que, considerando  $m = 3$  no Teorema de Sharkovsky obtém-se o Teorema de Li-Yorke como um seu corolário. Os dois teoremas dão-nos informação acerca das órbitas. Foi precisamente a informação acerca das órbitas que deu origem à noção de caos.

A noção de caos que usaremos neste trabalho está associada a um importante invariante topológico relacionado com o crescimento orbital - a entropia topológica. Este invariante numérico, primeiramente introduzido por Adler, Konheim e McAndrew [9] em 1965, representa a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas distinguíveis. A entropia topológica descreve, de um modo sugestivo, a complexidade orbital através de um único número, não-negativo, que pode ser definido de diversas formas.

**Definição 4** *Sejam  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  um espaço métrico compacto, com métrica  $d$  e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defina-se uma nova métrica  $d_n$ , em  $X$ , por*

$$d_n = \max \{ d(f^i(x), f^i(y)) : 0 \leq i < n \}.$$

Dados  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$ , o subconjunto  $E$  de  $X$  diz-se  $(n, \varepsilon)$ -separado se cada par de pontos distintos de  $E$  está a uma distância de pelo menos  $\varepsilon$  com a métrica  $d_n$ . Designando por  $N(n, \varepsilon)$  a cardinalidade máxima de um conjunto  $(n, \varepsilon)$ -separado, a entropia topológica de  $f$  é definida por

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log N(n, \varepsilon) \right).$$

**Definição 5** *Nas condições anteriores, considerando  $n = 1$ , a aplicação  $f$  diz-se topologicamente caótica se a sua entropia topológica for positiva.*

É interessante salientar que, a existência de caos topológico não implica que *todas* as órbitas do sistema tenham comportamento assintótico complexo. Em particular, uma aplicação pode ter uma órbita periódica estável que atraia as órbitas de quase todos os pontos e possuir entropia topológica positiva devido a comportamento complexo num conjunto de medida de Lebesgue nula.

Na sequência dos Teoremas de Li-Yorke e de Sharkovsky e, de acordo com a definição de caos adoptada, enunciamos o teorema seguinte:

**Teorema 3 (Bowen-Franks)** *Seja  $(X, f)$  um sistema dinâmico topológico no intervalo. Se  $f$  tem um ponto periódico de algum período  $p$ , que não é potência de 2, então a entropia topológica é estritamente positiva.*

**Demonstração** Para uma demonstração consultar, por exemplo, [10].

Tal como foi referido anteriormente estaremos interessados em estudar famílias de aplicações unidimensionais seccionalmente monótonas de um intervalo fechado de números reais nele próprio.

**Definição 6** *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua tal que  $\partial I$  corresponde à fronteira de  $I$ . A aplicação  $f$  diz-se  $m$ -modal se  $f(\partial I) \subset \partial I$  e  $I$  admite uma partição em  $m + 1$  subintervalos,  $I_1, \dots, I_{m+1}$ , com  $f|_{I_j}$  monótona para qualquer  $j = 1, \dots, m + 1$  sendo  $m$  o menor inteiro com esta propriedade. Nestas condições, uma aplicação  $m$ -modal tem  $m$  pontos críticos.*

Nesta perspectiva daremos crucial importância à chamada teoria de *kneading* de Milnor e Thurston [2] e à teoria das partições de Markov cujo ponto de partida é a teoria da dinâmica simbólica para o estudo das aplicações do intervalo no intervalo. A dinâmica simbólica permite uma abordagem das órbitas de um sistema dinâmico através de uma sequência de símbolos. Assim, vamos designar o conjunto finito de símbolos a considerar, o alfabeto  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ . Por conseguinte, o domínio do sistema dinâmico  $(X, f)$ , dá lugar ao espaço de todas as sequências infinitas de elementos de  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \left\{ A = (A_i)_{i=0,1,\dots} : A_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Deste modo associaremos a uma órbita de um ponto  $x_0$  uma sequência  $A = A_0A_1\dots A_n\dots$  de símbolos deste alfabeto.

**Definição 7** *Se para a sequência  $A = A_0A_1\dots A_k\dots$  existe um  $p \geq 0$  tal que  $A_k = A_{k+p}$ , para todo o inteiro  $k$  superior a um dado inteiro  $m$ , dizemos que a sequência é eventualmente periódica e  $p$  o período eventual. Se  $m = 0$  dizemos que a sequência é periódica de período  $p$ .*

Seja  $f : I \rightarrow I$ , com  $I$  um intervalo fechado de números reais, uma aplicação contínua seccionalmente monótona, isto é, existe uma partição  $P^{(k)} = \{I_1, \dots, I_k\}$  finita de  $I$  em subintervalos maximais fechados tal que  $f|_{I_j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) é estritamente monótona e alternadamente crescente e decrescente em intervalos consecutivos.

**Definição 8** *Chama-se lap de  $f$  a cada um dos intervalos maximais de monotonia de  $I$ . O número de laps de  $f$  representa-se por  $\ell = \ell(f)$ .*

Os  $(k - 1)$  pontos críticos de  $f$ ,  $c_1, \dots, c_{k-1}$ , que correspondem a máximos ou mínimos locais de  $f$ , separam os referidos intervalos. Os pontos  $c_0$  e  $c_k$  são, respectivamente, os extremos inferior e superior do intervalo  $I$ . Assim,

$$I_1 = [c_0, c_1], I_2 = [c_1, c_2], \dots, I_k = [c_{k-1}, c_k],$$

sendo  $f$  estritamente monótona em cada  $I_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ).

A teoria de *kneading* permite o cálculo efectivo de invariantes numéricos necessários para a descrição do comportamento qualitativo das iteradas de uma aplicação  $f$  seccionalmente monótona, nas condições anteriores, utilizando unicamente a dinâmica simbólica associada aos laps.

**Lema 1** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua seccionalmente monótona no intervalo  $I$ . A sequência de laps das sucessivas iteradas de  $f$*

$$\text{laps}(f) = (\ell(f), \ell(f^2), \dots, \ell(f^n), \dots),$$

*é um invariante topológico.*

**Demonstração** Ver [2].

A partir deste invariante será possível construir um outro invariante topológico já apresentado anteriormente - a entropia topológica.

**Definição 9** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação seccionalmente monótona. Chama-se número de crescimento de  $f$  ao número real*

$$s(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(f^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Relativamente ao número de crescimento de  $f$ , Misiurewicz e Szlenk [11] demonstraram a existência de tal limite e Milnor e Thurston [2] estabeleceram igualmente o seu intervalo de variação:

**Lema 2** *Qualquer que seja a aplicação seccionalmente monótona  $f$  no intervalo, existe sempre o limite*

$$s(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(f^n)^{\frac{1}{n}},$$

*o qual satisfaz a condição  $s(f) \in [1, \ell(f)]$ .*

**Demonstração** Ver [11] e [2].

A relação entre o modo como cresce o número de *laps* de  $f$  e a complexidade da estrutura das órbitas por  $f$ , mais precisamente a relação entre o número de crescimento e

a entropia topológica de uma aplicação no intervalo foi estabelecida por Rothschild [12] e Misiurewicz e Szlenk [11].

**Proposição 1** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua seccionalmente monótona e  $s(f)$  o número de crescimento de  $f$ . Então a entropia topológica de  $f$ ,  $h_{top}(f)$ , é dada por*

$$h_{top}(f) = \log s(f).$$

**Demonstração** Para uma prova deste resultado pode consultar-se [11].

Recordemos que, uma aplicação contínua  $f$  é topologicamente caótica se a respectiva entropia topológica é positiva. Por conseguinte, o resultado anterior permite-nos concluir se uma aplicação seccionalmente monótona no intervalo é, ou não, caótica. De facto, os subintervalos de monotonia de uma aplicação seccionalmente monótona no intervalo encerram informações importantes de carácter topológico sobre a dinâmica dessa aplicação.

Neste momento é oportuno enunciar um teorema central relacionado com o número de órbitas periódicas atractivas de uma aplicação  $f$ . Este resultado foi apresentado pelo matemático americano David Singer [13] em 1978. Uma hipótese crucial neste teorema envolve a chamada derivada de Schwarz.

**Definição 10** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação tal que  $f \in C^3(I)$ . Define-se derivada de Schwarz de  $f$  em  $x$ ,  $S(f)(x)$ , por*

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

A derivada de Schwarz tem duas importantes propriedades relevantes para o Teorema de Singer: (i) a composição de funções com derivada de Schwarz negativa também tem

derivada de Schwarz negativa; (ii) se uma função  $f$  tem derivada de Schwarz negativa e um determinado número de pontos fixos, então  $f$  tem um ponto crítico.

**Teorema 4 (Singer)** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação seccionalmente monótona. Se a derivada de Schwarz,  $S(f)$ , for negativa em cada intervalo de monotonia e se  $f$  tiver  $m$  pontos críticos, então,  $f$  tem, no máximo,  $m + 2$  órbitas periódicas  $\mathcal{O}_j$  ( $j = 1, \dots, m + 2$ ) atractivas ou semi-tractivas, ou seja,*

$$\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right| \leq 1, x \in \mathcal{O}_j.$$

*Cada uma dessas órbitas contém pelo menos um dos pontos críticos ou um dos extremos do intervalo  $I$  na sua bacia de atracção imediata.*

**Demonstração** Ver [13].

Este resultado atribui uma crucial importância aos extremos locais no estudo da dinâmica de uma aplicação seccionalmente monótona no intervalo, com derivada de Schwarz negativa. Mais precisamente, estes pontos serão fundamentais na codificação simbólica do intervalo, conjuntamente com os subintervalos de monotonia.

Consideremos uma aplicação  $m$ -modal no intervalo e o alfabeto

$$\mathcal{A} = \{S_1, C_1, S_2, C_2, \dots, S_m, C_m, S_{m+1}\}.$$

**Definição 11** *Sejam  $f$  uma aplicação  $m$ -modal no intervalo  $I = [a, b]$ ,  $I_j$  ( $j = 1, \dots, m + 1$ ) os seus subintervalos de monotonia e  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , os seus pontos críticos. Chama-se endereço de um ponto  $x$  no intervalo  $I$ ,  $ad(x)$ , ao símbolo  $S_j$ , se  $x$  pertence ao interior do subintervalo  $I_j$ , ou ao símbolo  $C_i$ , caso  $x$  seja igual ao ponto crítico  $c_i$  de  $f$ . Para os dois extremos do intervalo,  $c_0 = a$  e  $c_{m+1} = b$ , tem-se  $ad(c_0) = S_1$  e  $ad(c_{m+1}) = S_{m+1}$ .*

Deste modo, a sequência de símbolos  $A = A_0A_1\dots A_n\dots$  correspondente à órbita do ponto  $x$  pode escrever-se considerando a aplicação endereço do ponto  $x$ , ou seja,  $A = ad(x)ad(f(x))ad(f^2(x))\dots$ . À sequência  $A$  chamamos itinerário de  $x$  por  $f$ ,  $it_f(x)$ .

Desta forma, mediante um alfabeto de  $2m + 1$  símbolos, conseguimos discriminar a dinâmica dos pontos de  $I$ , identificando em qual dos *laps*, ou pontos críticos, cai cada uma das suas iteradas por  $f$ .

Um conceito importante para a teoria de *kneading* é o problema da *admissibilidade de sequências simbólicas*, isto é, o problema de, dada uma função  $f$  nas condições acima, determinar qual o subconjunto de  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  que é efectivamente realizado pelo itinerário simbólico de algum ponto  $x \in I$ .

**Definição 12** *Uma sequência  $S \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  diz-se admissível para a dinâmica de  $f$  se existir um ponto  $x \in I$  tal que  $S$  é o itinerário de  $x$  por  $f$ , isto é,  $S = it_f(x)$ .*

### 1.1.1 A teoria de *kneading*

Já salientámos a crucial importância dos pontos críticos no estudo da dinâmica de uma aplicação seccionalmente monótona no intervalo. Como veremos, esta importância é justificada pelo facto dos pontos críticos determinarem os itinerários de todos os pontos do intervalo.

**Definição 13** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $m$ -modal. A cada ponto crítico  $c_i$  de  $f$ , associamos uma sequência de *kneading* da aplicação  $f$ ,  $\mathcal{K}_i(f)$ , dada por*

$$\mathcal{K}_i(f) = it_f(f(c_i)), \quad i = 0, \dots, m - 1.$$

*Ao  $m$ -tuplo ordenado  $\mathcal{K}(f) = (\mathcal{K}_1(f), \dots, \mathcal{K}_m(f))$  de todas as sequências de *kneading* de  $f$  chamamos invariante de *kneading* da aplicação  $f$ .*

**Definição 14** Seja  $A = A_0A_1\dots A_n$  uma sequência de símbolos finita. Chama-se *paridade da sequência A*, e representa-se por  $\rho(A)$ , a

$$\rho(A) = (-1)^{\#(A)},$$

com  $\#(A)$  o número de símbolos de  $A$  correspondentes a subintervalos de monotonia onde a aplicação é decrescente. A paridade da sequência  $A$  diz-se *par* se  $\rho(A) = +1$  e *diz-se ímpar* se  $\rho(A) = -1$ .

A ordem na recta real induz naturalmente uma ordem no alfabeto  $\mathcal{A}$ ,

$$S_1 \prec C_1 \prec S_2 \prec C_2 \prec \dots \prec C_{m-1} \prec S_m \prec C_m \prec S_{m+1}.$$

A paridade de uma sequência  $A \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  permite estabelecer uma relação de ordem entre sequências simbólicas.

**Definição 15** Sejam  $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$  duas sequências tais que  $P_1\dots P_k = Q_1\dots Q_k$  e  $P_{k+1} \neq Q_{k+1}$  ( $k \geq 0$ ). Diz-se que  $P \prec Q$  se e só se  $P_{k+1} \prec Q_{k+1}$  e  $\rho(P_1\dots P_k) = +1$ , ou  $Q_{k+1} \prec P_{k+1}$  e  $\rho(P_1\dots P_k) = -1$ .

Assim, pode estabelecer-se uma ligação entre a relação de ordem de duas sequências simbólicas e a relação de ordem de dois pontos no intervalo [14]:

$$x < y \implies it_f(x) \preceq it_f(y)$$

$$it_f(x) \prec it_f(y) \implies x < y.$$

Nos exemplos que se seguem ilustramos a aplicação de alguns dos conceitos apresentados nos casos das aplicações unimodal e bimodal.

**Exemplo 1** Seja  $f$  uma aplicação unimodal no intervalo  $I = [a, b]$ . Esta aplicação é seccionalmente monótona em dois subintervalos e tem um ponto crítico,  $c$ . Assim, o intervalo  $I$  está subdividido nos seguintes conjuntos:

$$I_L = [a, c[, \quad I_C = \{c\}, \quad I_R = ]c, b],$$

de tal modo que a restrição de  $f$  ao subintervalo  $I_L$  é estritamente crescente e a restrição de  $f$  ao subintervalo  $I_R$  é estritamente decrescente. Cada um dos intervalos maximais onde  $f$  é monótona é um lap de  $f$ . Iniciando com o ponto crítico  $c$  (extremo relativo), obtém-se a órbita

$$\mathcal{O}(c) = \{x_i : x_i = f^i(c), i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Seguidamente associamos à órbita  $\mathcal{O}(c)$  uma sequência de símbolos  $S = CS_1S_2\dots S_j\dots$ , onde  $S_j \in \mathcal{A} = \{L, C, R\}$  e

$$ad(f^i(c)) = \begin{cases} L & \text{se } f^i(c) < c \\ C & \text{se } f^i(c) = c \\ R & \text{se } f^i(c) > c \end{cases}.$$

A órbita do ponto crítico  $c$  desempenha um papel muito importante. A dinâmica do intervalo é caracterizada por uma sequência simbólica associada à órbita deste ponto,  $\mathcal{O}(c)$ . Quando  $\mathcal{O}(c)$  é  $k$ -periódica, obtém-se uma sequência de símbolos que pode ser caracterizada por um bloco de comprimento  $k$ , a sequência de kneading  $S^{(k)} = S_1S_2\dots S_{k-1}C$ . O invariante de kneading é  $\mathcal{K}(f) = (it_f(f(c))) = (S^{(k)}) = (S_1S_2\dots S_{k-1}C)$ .

Introduzimos, no conjunto de símbolos  $\mathcal{A} = \{L, C, R\}$ , a relação de ordem  $L < C < R$ . A ordem dos símbolos é estendida para as sequências simbólicas. Portanto, para duas sequências  $P$  e  $Q$  em  $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ , seja  $i$  tal que  $P_i \neq Q_i$  e  $P_j = Q_j$  para  $j < i$ . Considerando a  $R$ -paridade de uma sequência, isto é, o número par ou ímpar de símbolos  $R$  na sequência,

se a  $R$ -paridade do bloco  $P_1 \dots P_{i-1} = Q_1 \dots Q_{i-1}$  é par diz-se que  $P < Q$  se  $P_i < Q_i$ . E se a  $R$ -paridade do mesmo bloco é ímpar, diz-se que  $P < Q$  se  $P_i > Q_i$ . Se tal índice  $i$  não existe, então  $P = Q$ .

A sequência ordenada de elementos  $x_i$  de  $\mathcal{O}(c)$  determina a partição  $P^{(k)}$  do intervalo  $I = [f^2(c), f(c)] = [x_2, x_1]$  num número finito de subintervalos designados por  $I_1, I_2, \dots, I_{k-1}$ .

**Exemplo 2** Seja  $f$  uma aplicação bimodal no intervalo  $I = [a, b]$ . Esta aplicação é seccionalmente monótona em três subintervalos e tem dois pontos críticos,  $c_1$  e  $c_2$ . Assim, o intervalo  $I$  está subdividido nos conjuntos,

$$I_L = [a, c_1[, \quad I_{C_1} = \{c_1\}, \quad I_M = ]c_1, c_2[, \quad I_{C_2} = \{c_2\}, \quad I_R = ]c_2, b],$$

de tal modo que a restrição de  $f$  aos subintervalos  $I_L$  e  $I_R$  é estritamente crescente e a restrição de  $f$  ao subintervalo  $I_M$  é estritamente decrescente. As órbitas dos dois pontos críticos de  $f$  (extremos relativos) são:

$$\mathcal{O}(c_1) = \{x_i : x_i = f^i(c_1), i \in \mathbb{N}_0\} \quad e \quad \mathcal{O}(c_2) = \{y_i : y_i = f^i(c_2), i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Seguidamente associamos às órbitas  $\mathcal{O}(c_1)$  e  $\mathcal{O}(c_2)$  uma sequência de símbolos, respectivamente,  $P = AP_1P_2\dots P_j\dots$  e  $Q = BQ_1Q_2\dots Q_j\dots$  onde  $P_i, Q_i \in \mathcal{A} = \{L, A, M, B, R\}$

e

$$ad(f^i(c_n)) = \begin{cases} L & \text{se } f^i(c_n) < c_1 \\ A & \text{se } f^i(c_n) = c_1 \\ M & \text{se } c_1 < f^i(c_n) < c_2, \quad n = 1, 2. \\ B & \text{se } f^i(c_n) = c_2 \\ R & \text{se } f^i(c_n) > c_2 \end{cases}$$

A dinâmica do intervalo é caracterizada pelas sequências simbólicas associadas às órbitas  $\mathcal{O}(c_1)$  e  $\mathcal{O}(c_2)$  dos pontos críticos. Quando  $\mathcal{O}(c_1)$  é  $p$ -periódica e  $\mathcal{O}(c_2)$  é  $q$ -periódica obtêm-se duas sequências de símbolos caracterizadas, respectivamente por um bloco de comprimento  $p$  e um bloco de comprimento  $q$  e contrói-se o invariante de kneading  $\mathcal{K}(f) = (it_f(f(c_1)), it_f(f(c_2))) = (P^{(p)}, Q^{(q)}) = (P_1 \dots P_{p-1} A, Q_1 \dots Q_{q-1} B)$ .

No conjunto  $\mathcal{A} = \{L, A, M, B, R\}$ , introduzimos a relação de ordem  $L \prec A \prec M \prec B \prec R$ . Considerando a  $M$ -paridade das sequências, isto é, a paridade do número de símbolos  $M$  (que correspondem a intervalos onde a aplicação é decrescente), se a  $M$ -paridade do bloco  $P_1 \dots P_{i-1} = Q_1 \dots Q_{i-1}$  é par diz-se que  $P < Q$  se  $P_i < Q_i$  na ordem  $L \prec A \prec M \prec B \prec R$  e se a  $M$ -paridade do mesmo bloco é ímpar, diz-se que  $P < Q$  se  $P_i < Q_i$  na ordem  $R \prec B \prec M \prec A \prec L$ . Se tal índice  $i$  não existe, então  $P = Q$ .

A sequência ordenada de elementos  $x_i$  de  $\mathcal{O}(c_1)$  e dos elementos  $y_i$  de  $\mathcal{O}(c_2)$  determina a partição  $P^{(p+q)}$  do intervalo  $I = [f(c_2), f(c_1)] = [y_1, x_1]$  num número finito de subintervalos designados por  $I_1, I_2, \dots, I_{p+q}$ .

Consideremos agora o alfabeto  $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$ , dado por  $\mathcal{A}^* = \{S_1, S_2, \dots, S_m, S_{m+1}\}$  e o espaço vectorial  $\mathcal{V}$  de dimensão  $(m+1)$  sobre o corpo dos números racionais  $\mathbb{Q}$  que admite como base os símbolos do alfabeto  $\mathcal{A}^*$ . À sequência de símbolos  $A = A_0 A_1 \dots A_j \dots = it_f(x)$ , de cada ponto  $x$  do intervalo  $I$ , associamos uma sequência de vectores  $\theta(x) = \theta_0(x) \theta_1(x) \dots \theta_j(x) \dots$  de  $\mathcal{V}$ , dada por

$$\theta_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} \varepsilon(A_k) A_j,$$

com  $j > 0$ ,  $\varepsilon(A_0) = +1$  e  $\varepsilon(A_k) = +1$  se a aplicação é crescente no subintervalo correspondente a  $ad(f^k(x))$  e  $\varepsilon(A_k) = -1$  se a aplicação é decrescente no subintervalo correspondente

a  $ad(f^k(x))$ . Os sinais relativos aos subintervalos de monotonia alternam o seu valor, isto é,  $\varepsilon(A_{k+1}) = -\varepsilon(A_k)$ . No que diz respeito aos pontos críticos da aplicação, escrevemos  $\varepsilon(C_i) = 0$  com  $C_j = (S_{j+1} + S_j)/2$ .

A ordem da recta real existente no espaço vectorial  $\mathcal{V}$  permite estabelecer uma relação de ordem nas sequências. Se  $\theta(x)$  e  $\theta^*(x)$  são duas sequências, então

$$\theta \prec \theta^* \quad \text{se e só se} \quad \theta_0 = \theta_0^*, \dots, \theta_{i-1} = \theta_{i-1}^* \quad \text{e} \quad \theta_i \prec \theta_i^* \quad \text{para algum} \quad i \geq 0.$$

**Definição 16** *Seja  $x$  um ponto do intervalo  $I$  e  $\theta(x)$  a sequência de vectores associada. Designa-se por coordenada invariante de  $x$  a série formal  $\theta_x(t)$ , com coeficientes em  $\mathcal{V}$ , dada por*

$$\theta_x(t) = \theta_0(x) + \theta_1(x)t + \theta_2(x)t^2 + \dots + \theta_n(x)t^n + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x)t^j.$$

A convergência da série formal acontece para valores reais de  $t$  positivos menores do que 1.

Atendendo à relevância dos pontos críticos na descrição da dinâmica, as suas coordenadas invariantes serão fundamentais nos conceitos que se seguem.

**Definição 17** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $m$ -modal. Chamam-se incrementos de kneading,  $\nu_i$ , às diferenças*

$$\nu_i = \theta_{c_i^+} - \theta_{c_i^-}, \quad i = 1, \dots, m,$$

onde

$$\theta_{c_i^\pm}(t) = \lim_{x \rightarrow c_i^\pm} \theta_x(t).$$

Se separarmos, nos incrementos de *kneading*, os termos associados aos diferentes símbolos do alfabeto  $\mathcal{A}^*$  obtemos

$$v_i(t) = N_{i1}(t)S_1 + N_{i2}(t)S_2 + \dots + N_{im+1}(t)S_{m+1},$$

para  $i = 1, \dots, m$ . A informação contida nos  $m$  incrementos de *kneading* de uma aplicação seccionalmente monótona  $f$  pode ser organizada numa matriz.

**Definição 18** Dada uma aplicação seccionalmente monótona no intervalo com invariante de *kneading*  $\mathcal{K}(f)$ , chama-se matriz de *kneading* associada à aplicação  $f$ , à matriz

$$N_f(t) = \begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) & \cdots & N_{1m+1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{m1}(t) & N_{m2}(t) & \cdots & N_{mm+1}(t) \end{bmatrix}_{m \times (m+1)}$$

O determinante de *kneading* da matriz  $N_f(t)$  corresponde a

$$D(t) = (-1)^{i+1} \frac{D_i(t)}{1 - \varepsilon(S_i)t}, \quad i = 1, \dots, m + 1$$

com  $D_i(t)$  o determinante da matriz obtida a partir da matriz de *kneading* eliminando a  $i$ -ésima coluna.

Note-se que o determinante de *kneading* não depende da coluna eliminada ([2]). Este importante invariante topológico pode relacionar-se com o número de crescimento  $s(f)$  já definido e, conseqüentemente, com a entropia topológica.

**Proposição 2** Seja  $f$  uma aplicação  $m$ -modal no intervalo com invariante de *kneading*  $\mathcal{K}(f)$  e número de crescimento  $s(f) > 1$ . Então,

$$s(f) = \frac{1}{t^*}$$

onde  $t^*$  corresponde ao menor valor absoluto dos zeros do determinante de kneading correspondente a  $\mathcal{K}(f)$ . Consequentemente,

$$h_{top}(f) = \log s(f) = \log \left( \frac{1}{t^*} \right).$$

**Demonstração** Ver [2].

### 1.1.2 A teoria das partições de Markov

A teoria das partições de Markov apresenta uma nova perspectiva para o estudo da dinâmica de aplicações  $m$ -modais,  $f$ , no intervalo. Nesta segunda perspectiva de análise, o conhecimento dos pontos críticos da aplicação e do invariante de kneading,  $\mathcal{K}(f)$ , associado, é essencial. O invariante de kneading  $\mathcal{K}(f)$  permite-nos construir uma matriz  $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$  de elementos  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ , designada por matriz de transição. A matriz de transição contém toda a informação topológica acerca da dinâmica, ditada pelas sequências simbólicas de  $\mathcal{K}(f)$ .

Considere-se agora a aplicação *shift*  $\sigma : I \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ , tal que  $\sigma(A_0A_1A_2\dots) = A_1A_2\dots$ , isto é,  $it_f(f(x)) = \sigma(it_f(x))$ ,  $\forall x \in I$ .

Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $m$ -modal com invariante de kneading  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ , cujas órbitas dos pontos críticos  $c_1, c_2, \dots, c_m$  são periódicas, respectivamente, de períodos  $p_1, \dots, p_m$ , ou seja,

$$(\mathcal{K}_i)_{p_i} = C_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad \text{e } p_i > 0.$$

Consideremos  $\{X_i\}_{i=1}^{p_1+\dots+p_m}$  o conjunto das sequências determinado pela união dos conjuntos

$$\{\sigma^j(\mathcal{K}_1)\}_{i=1}^{p_1}, \dots, \{\sigma^j(\mathcal{K}_m)\}_{i=1}^{p_m},$$

onde  $\sigma$  representa a aplicação *shift* anteriormente definida e  $\{x_i\}_{i=1}^{p_1+\dots+p_m}$  o conjunto dos pontos no intervalo tais que  $ad(x_i) = X_i$ .

Para construir a matriz de transição, consideramos  $N = p_1 + \dots + p_m$  e  $\beta$  a permutação no conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$  tal que

$$x_{\beta(1)} < x_{\beta(2)} < \dots < x_{\beta(N)}$$

e  $z_i = x_{\beta(i)}$ . A partir dos subintervalos  $J_i = [z_i, z_{i+1}]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), obtemos a partição de Markov  $P^{(N)}$  do intervalo  $I$ . Esta partição é determinada pelas órbitas dos  $m$  pontos críticos da aplicação,  $f$ . A dinâmica de cada um dos subintervalos  $J_i$ , ou seja, o comportamento dos seus pontos pela aplicação  $f$  permite-nos apresentar a definição seguinte. Note-se que a imagem de qualquer subintervalo  $J_i$  é sempre uma união de subintervalos contíguos.

**Definição 19** *Seja  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$  um invariante de kneading tal que  $(\mathcal{K}_i)_{p_i} = C_i$ , para alguns  $p_i > 0$  e  $i = 1, 2, \dots, m$ . Consideremos  $(J_i)$ , com  $i = 1, \dots, p_1 + \dots + p_m$ , a colecção de subintervalos associada a  $\mathcal{K}$ . A matriz de transição,  $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ , associada ao invariante de kneading  $\mathcal{K}$ , corresponde à matriz quadrada de dimensão  $p_1 + \dots + p_m - 1$ , de elementos  $(a_{ij})$  tais que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(J_i) \supseteq J_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Na secção anterior descrevemos um procedimento para calcular a entropia topológica baseada no invariante de *kneading*. Agora, no contexto da teoria das partições de Markov, a entropia topológica pode ser calculada através da matriz de transição.

**Proposição 3** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação  $m$ -modal com invariante de kneading  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f)$  e seja  $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$  a matriz de transição associada a  $\mathcal{K}$ . A entropia topológica é dada*

por

$$h_{top}(f) = \log(\lambda_{\max}(\mathcal{M}_K)),$$

onde  $\lambda_{\max}(\mathcal{M}_K)$  é o raio espectral da matriz  $\mathcal{M}_K$ .

**Demonstração** Ver [3], [15] e [16].

Note-se que as formas de cálculo da entropia topológica apresentadas foram construídas para aplicações contínuas seccionalmente monótonas do intervalo nele próprio. No caso das aplicações definidas num espaço de dimensão superior, o cálculo da entropia topológica, tendo por base a teoria da dinâmica simbólica, encontra algumas dificuldades uma vez que esta teoria não está totalmente compreendida para espaços de dimensão superior a um (alguns avanços nesta matéria podem ser consultados em [17], [18] e [19]).

### 1.1.3 Um outro invariante topológico

Na secção anterior realçámos a importância da entropia topológica na compreensão do comportamento dinâmico de uma determinada aplicação, em particular na detecção do comportamento caótico. A variação da entropia topológica permite também, como veremos adiante, distinguir diferentes regimes caóticos. Contudo, existem famílias de aplicações em que diferentes valores dos parâmetros conduzem a valores coincidentes da entropia topológica (isto é, a dinâmica isentrópica) mas com complexidade diferente. Como distinguir tal complexidade? No caso das aplicações  $m$ -modais, a entropia topológica deixa de ser um invariante completo. Por conseguinte, torna-se necessário obter outros invariantes numéricos que formarão com a entropia topológica uma sequência completa de invariantes topológicos.

No trabalho que a seguir se apresenta estaremos particularmente interessados em



situações de isentropia em aplicações bimodais. Neste caso, consideraremos para um dos invariantes topológicos o número de crescimento  $s(f) = e^{h_{top}(f)}$  e para o outro invariante consideraremos uma quantidade numérica designada por  $r$  e que está associada às posições relativas dos pontos críticos da aplicação.

O invariante topológico  $r(f)$  é introduzido usando a hipótese  $s(f) > 1$  e os resultados de Milnor e Thurston sobre uma semi-conjugação topológica  $\lambda$  entre a aplicação  $f$  e uma aplicação seccionalmente linear  $F_{e,s}$  com declive  $\pm s(f)$  em toda a parte (ver [2], [20]).

Existe uma única aplicação

$$F_{e,s} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad F_{e,s}(\lambda(x)) = \lambda(f(x))$$

para todo o ponto  $x \in I$ , onde a aplicação  $\lambda : I \longrightarrow [0, 1]$  é definida por

$$\lambda(x) = \lim_{t \rightarrow 1/s} \frac{L([0, x], t)}{L(I, t)} \quad \text{com}$$

$$L([0, x], t) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(f^k|_{[0, x]}) t^{k-1}.$$

Intuitivamente, podemos pensar em  $\lambda(x)$  como a probabilidade de um *lap* da função  $f^n$  (com  $n$  grande), arbitrariamente escolhido, estar contido no intervalo  $[0, x]$  ([2]).

A aplicação  $F_{e,s}$  semi-conjugada a uma aplicação bimodal com pontos críticos  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente minimizante e maximizante de  $f$  é definida por

$$F_{e,s}(y) = \begin{cases} s y & \text{se } 0 \leq y < \lambda(c_1) \\ -s y + e & \text{se } \lambda(c_1) \leq y < \lambda(c_2) \\ s y + 1 - s & \text{se } y \geq \lambda(c_2) \end{cases}$$

onde  $\lambda(c_1) = e/(2s)$ ,  $\lambda(c_2) = (e + s - 1)/(2s)$  e  $e = r + (s + 1)/2$ , isto é,  $r = e - (s + 1)/2$ .

Assim, a cada aplicação bimodal  $f$ , caracterizada por um invariante de *kneading*

$(P^{(p)}, Q^{(q)})$ , corresponde um e um só valor de  $r(f)$ , que neste caso pode ser dado por

$$r(f) = \frac{4s\lambda(c_1) - 1 - s}{2} = \frac{4s\lambda(c_2) + 1 - 3s}{2}.$$

Os valores de  $\lambda(c_1)$  e  $\lambda(c_2)$  podem ainda ser obtidos directamente da matriz de transição associada a  $(P^{(p)}, Q^{(q)})$  fazendo

$$\lambda(c_1) = \sum_{i=1}^{n_L+1} v_i \quad \text{e} \quad \lambda(c_2) = \sum_{i=1}^{n_L+n_M+2} v_i,$$

onde  $n_L$  (respectivamente  $n_M$ ) designa o número de símbolos  $L$  (respectivamente símbolos  $M$ ) e o vector  $v = (v_1, \dots, v_{p+q-1})$  é o vector próprio de Perron associado ao valor próprio  $\lambda_{\max} = s$ . Verifica-se a igualdade  $\mathcal{M}v = \lambda_{\max}v$ , onde  $\mathcal{M}$  é a matriz de transição com os intervalos extremos,  $I_0 = [0, z_1]$  e  $I_{p+q} = [z_{p+q}, 1]$ , incluídos (e sem os intervalos cujos pontos não têm imagem noutro intervalo). Note-se que  $r(f)$  é, de facto, um invariante topológico, uma vez que todas as variáveis  $\lambda(c_1)$ ,  $\lambda(c_2)$  e  $s(f)$  correspondem a invariantes topológicos ([20]). Para a aplicação seccionalmente linear  $F_{e,s}$  considerada, verifica-se que  $e \in [s-1, 2]$  e  $r \in [(s-3)/2, (3-s)/2]$ .

**Nota 1** No caso de uma aplicação bimodal com pontos críticos  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente maximizante e minimizante de  $f$ , a aplicação  $F_{e,s}$  corresponde a

$$F_{r,s}(y) = \begin{cases} -s y + 1 & \text{se } 0 \leq y < \lambda(c_1) \\ s y + r - 1 & \text{se } \lambda(c_1) \leq y < \lambda(c_2) \\ -s y + s & \text{se } y \geq \lambda(c_2) \end{cases}$$

onde  $\lambda(c_1) = (2-r)/(2s)$ ,  $\lambda(c_2) = (1+s-r)/(2s)$ . O invariante,  $r(f)$  será dado por  $r(f) = \frac{(3+s)}{2} - s(\lambda(c_1) + \lambda(c_2))$ .

### 1.1.4 Aplicações triangulares e caos

O comportamento caótico induzido pelas aplicações triangulares bidimensionais (*triangular maps* ou *skew maps*, na literatura inglesa), bem como a quantificação de determinadas grandezas, não estão totalmente compreendidos. Apesar dos importantes resultados até agora obtidos, existem ainda diversas questões em aberto, em particular, questões relacionadas com a utilização da teoria da dinâmica simbólica neste contexto. Estas aplicações têm a peculiaridade de uma das suas componentes depender apenas de uma das variáveis. A primeira componente da aplicação chama-se *aplicação base* e a segunda chama-se *aplicação fibra*.

Consideremos então a família de aplicações  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(y, k) = (f(y), g(y, k))$ .

Seja  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  uma órbita periódica de período  $p$  da aplicação  $f$  tal que  $f(x_i) = x_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, p-2$  e  $f(x_{p-1}) = x_0$ . Definimos a aplicação  $g_p : Y \rightarrow Y$  como

$$g_p(y) = g(x_{p-1}, g(x_{p-2}, \dots, g(x_1, g(x_0, y)) \dots)).$$

Se  $Q = \{y_0, y_1, \dots, y_{q-1}\}$  é uma órbita periódica de período  $q$  da aplicação  $g_p$  tal que  $g_p(y_i) = y_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, q-2$  e  $g_p(y_{q-1}) = y_0$ , podemos definir o produto  $P.Q$  como o conjunto contendo os  $p.q$  pares:

$$\begin{array}{cccc} (x_0, y_0) & (x_1, g(x_0, y_0)) & \dots & (x_{p-1}, g(x_{p-2}, \dots, g(x_1, g(x_0, y_0)) \dots)) \\ (x_0, y_1) & (x_1, g(x_0, y_1)) & \dots & (x_{p-1}, g(x_{p-2}, \dots, g(x_1, g(x_0, y_1)) \dots)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_0, y_{q-1}) & (x_1, g(x_0, y_{q-1})) & \dots & (x_{p-1}, g(x_{p-2}, \dots, g(x_1, g(x_0, y_{q-1})) \dots)). \end{array}$$

As órbitas das aplicações unidimensionais  $f$  e  $g_p$  determinam as órbitas da aplicação triangular  $T$ , como enunciamos no Lema seguinte:

**Lema 3** *Seja  $T = (f, g) : X \times Y \rightarrow X \times Y$  uma aplicação triangular contínua. Então:*

(1) Se  $f$  tem uma órbita periódica  $P$  e  $g_p$  tem uma órbita periódica  $Q$ , então  $P.Q$  é uma órbita de  $T$ .

(2) Inversamente, cada órbita periódica de  $T$  pode ser obtida como o produto de uma órbita periódica  $P$  de  $f$  por uma órbita periódica de  $g_p$ .

**Demonstração** Ver [45].

A entropia topológica é uma medida de complexidade de um sistema dinâmico. Seja  $T$  uma aplicação triangular tal como foi definida no Lema anterior. A fórmula de Bowen para os limites inferior e superior da entropia topológica de  $T$ ,  $h_{top}(T)$ , é válida, isto é,

$$\max \{h_{top}(f), h_{top}(g_p)\} \leq h_{top}(T) \leq h_{top}(f) + h_{top}(g_p), \quad (1.1)$$

onde  $h_{top}(f)$  e  $h_{top}(g_p)$  representam, respectivamente, a entropia topológica da aplicação base,  $f$ , e a entropia topológica da aplicação fibra associada à órbita  $P$ ,  $g_p$ .

### 1.1.5 Controlo de sistemas caóticos

O controlo de sistemas caóticos é possível tanto para sistemas discretos como para sistemas contínuos. Quando se diz que o comportamento caótico de um sistema foi controlado, tal pode significar a eliminação do comportamento caótico desse sistema, induzindo-o a comportar-se periodicamente. Nesta secção descreveremos, tal como foi dito anteriormente, o método de controlo do caos desenvolvido pelos investigadores Ott, Grebogy e Yorke (método OGY). A primeira experiência de supressão do comportamento caótico utilizando o método de controlo OGY foi efectuada por Ditto *et al.* [21], em 1990, para o controlo de uma barra magnetoelástica amorfa que apresentava comportamento caótico na presença de um campo magnético variável. Estes autores conseguiram obter comportamento dinâmico de período 1 e de período 2 e o procedimento mostrou ser bastante robusto.

Consideremos uma aplicação  $n$ -dimensional

$$Z_{n+1} = f(Z_n, p), \quad (1.2)$$

onde  $p$  é um parâmetro do sistema que pode ser modificado numa pequena vizinhança do seu valor nominal, designado por  $p_0$ . No caso dos sistemas dinâmicos contínuos, tal aplicação pode ser obtida a partir da utilização de uma secção de Poincaré, cuja construção descreveremos adiante.

O método de OGY baseia-se no facto de que um atractor caótico contém um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis e de que a ergodicidade garante que qualquer pequena região no atractor caótico será visitada por uma órbita. Aplicando pequenas perturbações ao parâmetro de controlo é possível levá-lo na direcção da órbita periódica desejada. Apresentaremos a técnica de controlo de posicionamento de pólos (*pole placement control technique*), inicialmente proposta por Romeiras *et al.* ([27]) como uma extensão do método de OGY

Seja  $Z_S(p)$  um ponto fixo instável da equação (1.2). Para valores do parâmetro  $p$  próximos de  $p_0$  numa vizinhança de  $Z_S(p_0)$ , a aplicação pode ser aproximada pela aplicação linear dada por

$$Z_{n+1} - Z_S(p_0) = J(Z_n - Z_S(p_0)) + C(p - p_0),$$

onde  $J$  representa a matriz jacobiana calculada em  $Z_S(p_0)$  e  $C = \frac{\partial f}{\partial p}$  a matriz de controlo calculada em  $p_0$ .

Suponhamos que a variação,  $p - p_0$ , no parâmetro é linearmente proporcional à mudança da variável  $Z_n$ . Assim,

$$p - p_0 = -K(Z_n - Z_S(p_0)), \quad (1.3)$$

onde  $K$  é um vector constante de dimensão  $n$  determinado de tal forma que a trajectória do sistema a ser controlado se estabilize no ponto fixo  $Z_S(p_0)$ . Substituindo (1.3) na equação (1.2) obtém-se a lei de controlo

$$Z_{n+1} - Z_S(p_0) = (J - CK)(Z_n - Z_S(p_0)).$$

O ponto fixo será estável desde que os valores próprios da matriz  $J - CK$ , chamados pólos reguladores, sejam em módulo menores do que a unidade. A determinação do vector  $K$  de modo a que a matriz  $J - CK$  tenha valores próprios inferiores a um pode ser efectuada através da técnica de posicionamento de pólos da teoria de controlo.

Naturalmente que o método exige um intervalo de tempo para que a equação seja estabilizada, depois de accionado o controlo. A escolha dos pólos pode fazer com que este tempo seja longo ou o menor possível.



## **Parte I**

# **A teoria dos sistemas dinâmicos discretos e a economia**



## Capítulo 2

# Medição e controlo do comportamento caótico dos lucros de uma empresa<sup>1</sup>

Um dos principais objectivos do estudo dos sistemas dinâmicos no contexto da economia diz respeito à caracterização da natureza das flutuações económicas. A maioria das variáveis económicas, tais como o produto interno bruto, as taxas de juro, a produção, o valor de acções assim como os lucros, os investimentos e o fluxo financeiro de empréstimos, exibem flutuações ao longo do tempo, podendo variar de ciclos económicos periódicos a comportamentos caracterizados por flutuações erráticas.

Motivados pelos progressos da teoria do caos, os economistas ([23] e [24]) começaram a desenvolver modelos não-lineares capazes de gerar séries temporais com comportamento irregular semelhante aos padrões observados nos ciclos económicos reais. Esta investigação conduziu a novos sistemas não-lineares no contexto de um paradigma de optimização do comportamento em mercados idealmente competitivos, gerando flutuações económicas caóticas.

---

<sup>1</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação do artigo científico [22] com o título *Measuring and controlling the chaotic motion of profits*.

A aplicação da teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares à análise de uma rede complexa de interacções entre estruturas económicas é particularmente relevante e tem originado vários projectos de investigação. Com o propósito de compreender esta complexidade, é importante estudar cuidadosamente estruturas financeiras básicas. Neste contexto, a análise detalhada do comportamento caótico das variáveis dinâmicas envolvidas na estrutura financeira de uma empresa, é considerada crucial no estudo de importantes sistemas económicos.

Com o objectivo de realçar aspectos essenciais da dinâmica de uma empresa, S. Bouali propôs em [25] um sistema de equações diferenciais ordinárias, extremamente rico dinamicamente, que envolve apenas três variáveis dinâmicas: *lucros*, *reinvestimentos* e *fluxo financeiro de empréstimos*. Com uma relação não-linear nos reinvestimentos, as simulações numéricas realizadas em [25] sugerem que o valor em dívida (isto é, o fluxo financeiro dos empréstimos) introduz perturbações no comportamento dos lucros e parece agir como um mecanismo gerador de caos.

É notável o esforço desenvolvido no estudo sistemático de modelos caóticos. Por exemplo, o controlo, o estabelecimento de mercados-alvo (*targeting*), a sincronização e a previsão do comportamento caótico têm apresentado resultados consistentes em matemática aplicada em áreas como a economia, a física e a engenharia. Em particular, desde a publicação do artigo de Ott, Grebogi e Yorke em 1990 ([4]), considerado um trabalho revolucionário no controlo do caos, têm sido desenvolvidas inúmeras técnicas para o controlo de fenómenos caóticos, com aplicações, por exemplo, à economia, à bioquímica, à cardiologia, às comunicações, à física experimental e à teoria da turbulência.

No contexto da economia, os métodos de controlo do comportamento caótico podem

ser aplicados para mostrar que a presença deste comportamento não necessita obrigatoriamente de ser interpretado como indesejável para a teoria e política económicas ([26]). Mais especificamente, o controlo do comportamento caótico não envolve a alteração de características fundamentais do sistema, sendo apenas necessário impôr pequenas perturbações à dinâmica. A aplicação de pequenas perturbações externas ao modelo deixa as suas principais características inalteradas e torna possível a eliminação de ciclos económicos de longa duração.

O objectivo deste capítulo é proporcionar uma contribuição para a análise detalhada do comportamento caótico do modelo de Bouali através da introdução e estudo de aplicações unidimensionais associadas ao sistema, em termos da teoria da dinâmica simbólica. De facto, o estudo de aplicações de baixa dimensão que incorporam as propriedades dinâmicas do atractor do sistema possibilitam uma melhor compreensão qualitativa dos princípios e mecanismos subjacentes ao comportamento caótico.

Um quantificador da complexidade da estrutura orbital - um atributo usado para definir caos - é a entropia topológica. Este atributo de caos pode ser eficientemente utilizado para exemplificar a aplicação de estratégias de controlo. Apresentaremos uma aplicação da designada técnica de controlo de posicionamento de pólos (*pole placement control technique*), inicialmente proposta por Romeiras *et al.* ([27]) como uma extensão do método de OGY (Ott, Grebogi and Yorke) desenvolvido em [4]. No seu trabalho, estes autores realçam o facto de que um atractor caótico contém um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis. Aplicando pequenas perturbações ao sistema, o objectivo deste processo não é criar novas órbitas com propriedades muito diferentes das já existentes, mas sim utilizar as órbitas periódicas instáveis existentes na ausência de control. O método de control será aplicado

considerando o sistema discreto obtido da dinâmica induzida numa secção de Poincaré na vizinhança da órbita periódica desejada. Esta técnica envolve a construção de uma aplicação linear estabilizadora, obtida através do método dos mínimos quadrados, usando os pontos da secção da Poincaré.

## 2.1 Descrição do modelo

O modelo empresarial de Bouali é constituído por equações diferenciais autónomas de primeira ordem que traduzem a dinâmica de três variáveis endógenas: lucros ( $P$ ), reinvestimentos ( $R$ ) e fluxo financeiro de empréstimos ( $F$ ). Seguidamente, apresentamos alguns detalhes, estabelecidos em [25], para cada uma das equações diferenciais.

### (a) Equação dos lucros

Os reinvestimentos,  $R$ , e o fluxo de empréstimos,  $F$ , estão na origem da criação dos lucros. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{v} (R + F),$$

onde o coeficiente  $1/v$  representa a proporção do lucro.

### (b) Equação dos reinvestimentos

Os reinvestimentos envolvem uma fracção dos lucros, de acordo com a proporção,  $m$ , e a capitalização dos reinvestimentos, os quais são ressarcidos anualmente com a proporção  $n$ ,

$$\frac{dR}{dt} = mP + n(1 - P^2)R.$$

Nesta relação, quando o lucro atinge o valor 1, o termo não-linear  $(1 - P^2)$  torna-se nulo e os reinvestimentos anuais permanecem com uma taxa de variação constante  $m$ . A

quantidade restante dos lucros, assim como o valor de capital adicionado são distribuídos como dividendos. De facto, enquanto os lucros não atingirem o limiar unitário, serão reinjectados no circuito financeiro da empresa. Por outro lado, para além do limiar dos lucros ( $P > 1$ ), a elevada distribuição dos dividendos reduz a capitalização.

(c) Equação do fluxo de empréstimos

A empresa pode escolher aumentar o seu capital contraindo empréstimos de acordo com a proporção de dívida,  $s$ , proporcional ao auto-financiamento e deduzindo uma fracção dos lucros de acordo com a taxa de juro  $r$ , isto é

$$\frac{dF}{dt} = -rP + sR.$$

Assim, resumindo a informação anterior, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{v}(R + F) \\ \frac{dR}{dt} = mP + n(1 - P^2)R \\ \frac{dF}{dt} = -rP + sR \end{cases} \quad (2.1)$$

com  $P$ ,  $R$  e  $F$  as variáveis dinâmicas em estudo e  $v$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $r$  e  $s$  os parâmetros ( $v \geq 1$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ ,  $0.05 \leq r \leq 0.1$  e  $0.2 \leq s \leq 0.4$ ).

É importante salientar que, num contexto económico realista, o sistema heurístico de Bouali pode ser considerado na análise do comportamento assintótico da dinâmica financeira de uma firma onde as unidades de tempo escolhidas poderão ser horas ou dias. Como veremos adiante, a interpretação dada à dinâmica do modelo está em harmonia com as escalas temporais estabelecidas.

## 2.2 Aplicações unimodais, entropia topológica e caos no modelo empresarial de Bouali

Como foi referido anteriormente, neste capítulo pretendemos introduzir e estudar cuidadosamente uma família de aplicações unidimensionais que nos permitem caracterizar, em termos da teoria da dinâmica simbólica, aspectos significativos do comportamento caótico do modelo de Bouali. Nas simulações numéricas seguintes estabelecemos os valores dos parâmetros

$$v = 4.0, \quad m = 0.04, \quad n = 0.02,$$

considerando  $r$  e  $s$  como parâmetros de controlo. Recordemos que o parâmetro  $r$  diz respeito a uma taxa de juro e o parâmetro  $s$  corresponde a uma proporção da dívida ( $0.05 \leq r \leq 0.1$  e  $0.2 \leq s \leq 0.4$ ).

Utilizando um processo de integração numérica do sistema (2.1), podemos construir gráficos que nos permitem visualizar no espaço de fases o comportamento assintótico das trajectórias. Depois de uma parte inicial transiente, uma estrutura surge quando a solução  $(P(t), R(t), F(t))$  é visualizada como uma trajectória no espaço tridimensional (Figura 2.1). Alguns exemplos de projecções da trajectória tridimensional, em dois planos distintos, são apresentados na Figura 2.2.

Com o propósito de compreender as características principais do fluxo tridimensional, podemos construir aplicações unidimensionais registando os sucessivos máximos relativos (locais) da solução numérica,  $P(t)$ , que representa os lucros (ver Figura 2.3).

As aplicações definidas por iteração consistem em pares  $(P_n, P_{n+1})$ , onde  $P_n$  designa o  $n$ -ésimo máximo local (ver Figura 2.4). Como podemos verificar, os dados da série temporal dispõem-se segundo uma curva, com a forma da aplicação logística. De facto, tratar

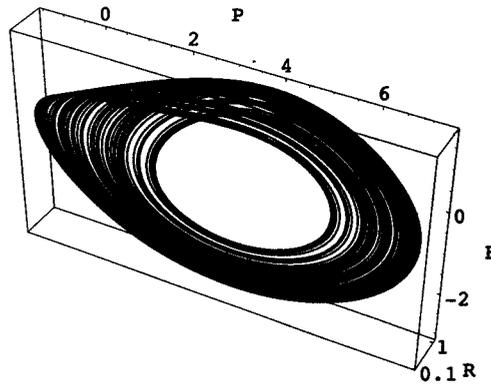


Figura 2.1: Solução visualizada como uma trajectória no espaço tridimensional para  $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ .

o gráfico como uma função  $P_{n+1} = f(P_n)$ , permite-nos revelar características particularmente interessantes da dinâmica do atractor.

As aplicações obtidas comportam-se dinamicamente como uma aplicação unimodal. Nos diagramas de bifurcação da Figura 2.5 são representadas as iteradas assintóticas de  $P_n$  como função de cada um dos parâmetros  $s$  e  $r$ . Valores mais elevados dos parâmetros induzem uma sucessão de duplicações do período na dinâmica dos lucros. Podemos observar que um aumento de  $s$  conduz a um aumento dos lucros (Figura 2.5(a)) enquanto que um crescimento da taxa de juro  $r$  conduz à sua diminuição (Figura 2.5(b)).

Neste momento, parece-nos pertinente estudar o comportamento da entropia topológica e os regimes da dinâmica das aplicações unimodais construídas, com a variação dos parâmetros  $s$  e  $r$ .

No exemplo seguinte exibimos o cálculo da entropia topológica para a sequência de *kneading* realizada pela aplicação unimodal da Figura 2.4.

**Exemplo 3** Consideremos a aplicação da Figura 2.4. A órbita do ponto crítico define a

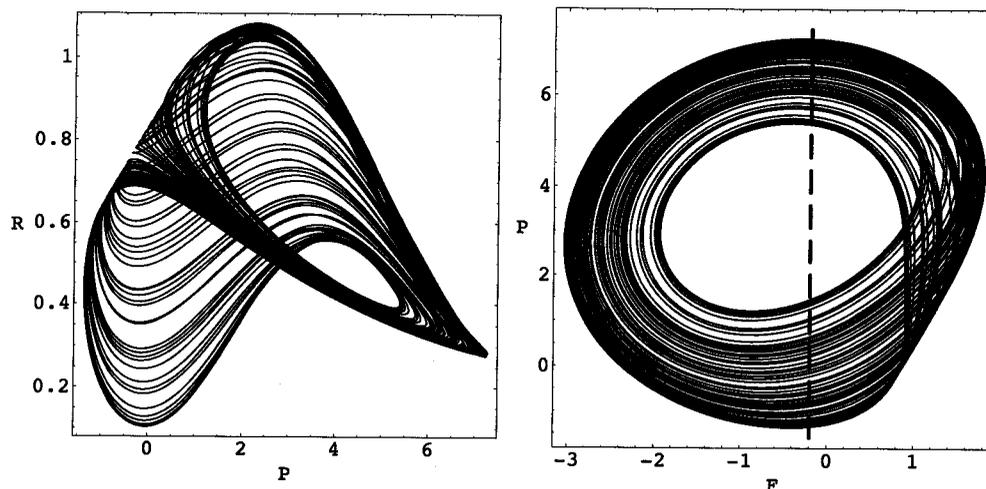


Figura 2.2: À esquerda a projecção da trajectória tridimensional no plano- $PR$  para  $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ . À direita a projecção da trajectória tridimensional no plano- $FP$  para  $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ . O significado da linha a tracejado será revelado posteriormente.

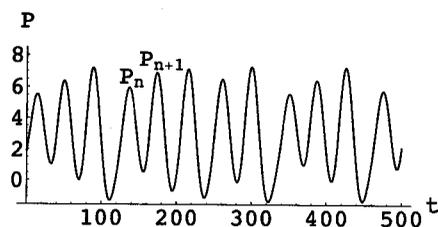


Figura 2.3: Série temporal dos lucros para  $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ .

*sequência de kneading unimodal, de período 5,  $(RLLRC)^\infty$ . Após a ordenação dos pontos da órbita obtemos*

$$x_2 < x_3 < x_0 < x_4 < x_1 .$$

*A matriz de transição correspondente é*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

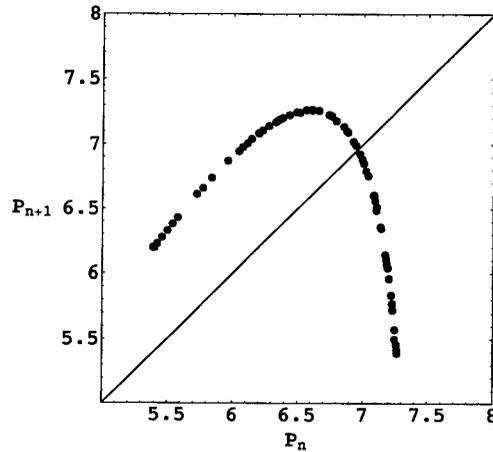


Figura 2.4: A aplicação construída a partir dos máximos relativos (locais) sucessivos da solução numérica,  $P(t)$ , que representa os lucros ( $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ ).

a qual tem o polinómio característico

$$p(\lambda) = \det(M(f) - \lambda I) = 1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^4.$$

O número de crescimento  $s(f)$  (o raio espectral da matriz  $M(f)$ ) é 1.72208.... Portanto, o valor da entropia topológica pode ser dado por

$$h_{top}(f) = \log s(f) = 0.543535... .$$

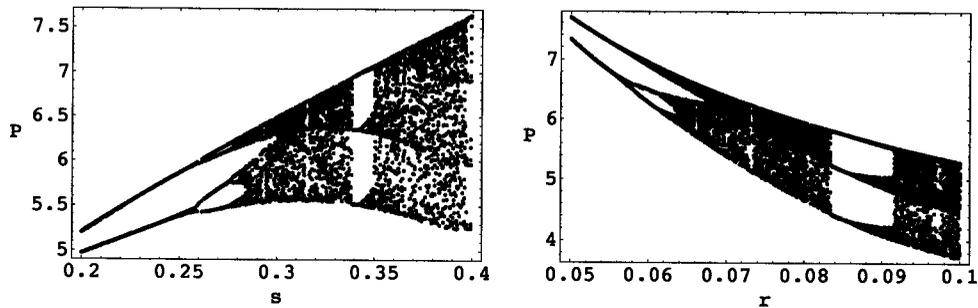


Figura 2.5: À esquerda o diagrama de bifurcação de  $P$  como uma função de  $s$ , com  $r=0.068$  e  $s \in [0.2, 0.4]$ . À direita o diagrama de bifurcação de  $P$  como uma função de  $r$ , com  $s=0.3$  e  $r \in [0.05, 0.1]$ .

Por motivos de clareza e simplicidade, apresentamos na Figura 2.6 a variação da entropia topológica com cada um dos parâmetros. Como podemos observar, a dinâmica do modelo de Bouali é caótica para valores dos parâmetros em intervalos de grande amplitude.

No que diz respeito à interpretação do sistema de Bouali, recordamos que este modelo estuda o comportamento caótico assintótico da dinâmica de uma empresa. O comportamento caótico não ocorre em situações reais num intervalo de tempo de grande amplitude, mas apenas durante horas ou dias. As medidas de carácter financeiro tomadas pelos gestores quebram a instabilidade e o atractor estranho desaparece. O modelo é heurístico e mostra como a conjugação de certos factores pode conduzir, em termos dinâmicos, a atractores caóticos.

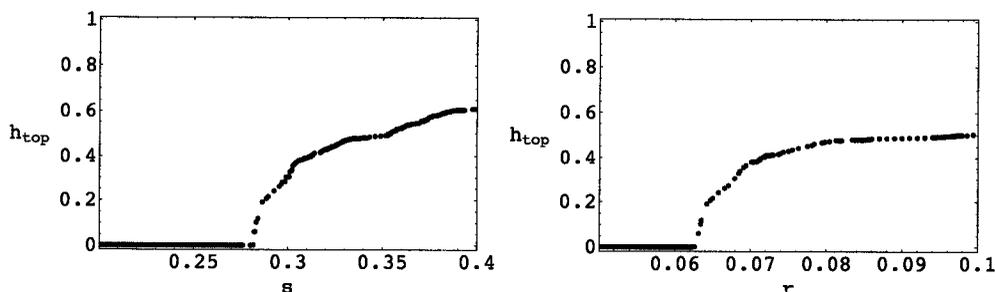


Figura 2.6: (a) Variação da entropia topológica para  $s \in [0.2, 0.4]$  com  $r=0.068$ . (b) Variação da entropia topológica para  $r \in [0.05, 0.1]$  com  $s=0.3$ .

É interessante verificar que com o estudo das sequências de *kneading* é possível representar as curvas, no espaço dos parâmetros, correspondentes a órbitas periódicas do ponto crítico  $C$ . O diagrama da Figura 2.7 mostra como os períodos ( $n \leq 5$ ) estão organizados no espaço dos parâmetros considerado (cujos pares de valores  $(s, r)$  correspondem aplicações iteradas com a forma da curva logística). Da esquerda para a direita na Figura 2.7, as correspondentes órbitas de *kneading* são: período 1 -  $C^\infty$ , período 2 -  $(RC)^\infty$ , período

4 -  $(RLRC)^\infty$ , período 5 -  $(RLRRC)^\infty$ , período 3 -  $(RLC)^\infty$ , período 5 -  $(RLLRC)^\infty$  e período 4 -  $(RLLC)^\infty$ . A ordenação das sequências de *kneading* no espaço dos parâmetros conduz à identificação de diferentes níveis da entropia topológica, que permanece constante em cada uma das curvas. Por conseguinte, com este procedimento, conseguimos identificar valores da proporção de dívida  $s$  e valores da taxa de juro  $r$  que correspondem a diferentes níveis de complexidade. As curvas isentrópicas podem adquirir formas e posições distintas no espaço dos parâmetros. A tabela seguinte mostra algumas sequências de *kneading* e a correspondente entropia topológica.

Sequências de kneading	Polinómio característico	Entropia topológica
$RC$	$1 - t$	0
$RLRC$	$-1 + t + t^2 - t^3$	0
$RLRRC$	$-1 + t - t^2 - t^3 + t^4$	0.414013...
$RLC$	$-1 - t + t^2$	0.481212...
$RLLRC$	$1 - t - t^2 - t^3 + t^4$	0.543535...
$RLLC$	$1 + t + t^2 - t^3$	0.609378...

Este estudo constitui um exemplo de como a compreensão da dinâmica no espaço dos parâmetros pode ser enriquecida com a teoria da dinâmica simbólica.

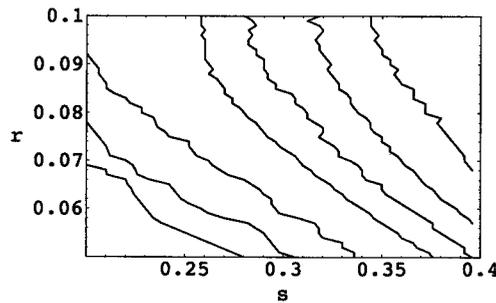


Figura 2.7: Órbitas periódicas ( $n \leq 5$ ) do ponto crítico  $C$  no espaço dos parâmetros. Da esquerda para a direita, as correspondentes sequências de *kneading* são:  $C^\infty$ ,  $(RC)^\infty$ ,  $(RLRC)^\infty$ ,  $(RLRRC)^\infty$ ,  $(RLC)^\infty$ ,  $(RLLRC)^\infty$  e  $(RLLC)^\infty$ .

### 2.3 Controlo do comportamento caótico do modelo de Bouali

Em algumas situações práticas no contexto económico, é desejável obter comportamento regular e previsível a curto prazo, particularmente um ponto de equilíbrio estável em vez de órbitas caóticas. De facto, e como referido anteriormente, os gestores financeiros podem agir sobre parâmetros de controlo adequados de modo a quebrar a instabilidade e a fazer desaparecer o cenário caótico.

Iniciamos esta secção salientando que o modelo contínuo de Bouali pode ser discretizado através de uma secção de Poincaré, a qual reduz, em uma unidade, a dimensão do espaço de fases. De seguida descrevemos sinteticamente a construção de uma aplicação de Poincaré.

Consideremos um sistema  $n$ -dimensional  $dx/dt = f(x)$ . Seja  $V$  uma superfície  $(n - 1)$ -dimensional, transversa ao fluxo, designada por secção de Poincaré. Definimos a aplicação de Poincaré  $T$  de  $V$  para  $V$ , obtida seguindo as intersecções sucessivas das trajectórias com  $V$ . Se  $x_n \in V$  designa a  $n$ -ésima intersecção, então a aplicação de Poincaré é definida por  $x_{n+1} = T(x_n)$ . No nosso caso particular, temos um sistema de três variáveis dinâmicas  $P$ ,  $R$  e  $F$ . Como o controlo é usualmente construído para valores dos parâmetros onde o sistema exhibe comportamento caótico fixamos, a título exemplificativo, os valores dos parâmetros  $r = 0.068$  e  $s = 0.366$ , onde o atractor do sistema tem entropia topológica positiva (ver exemplo anterior). Consideramos um plano de Poincaré da forma  $F = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , nomeadamente,  $F = -0.2$  (ver a linha a tracejado na Figura 2.2). Registamos as intersecções sucessivas da trajectória com o plano, as quais são representadas por duas coordenadas:  $P_n$  e  $R_n$ . Esta é a aplicação discreta que iremos considerar. Seguidamente, ilustraremos a técnica de controlo de posicionamento de pólos (*pole placement control technique*) utilizando a aplicação discreta de Poincaré com o propósito de estabilizar uma órbita

de período 1 instável do atractor caótico do sistema. Aplicando pequenas perturbações escolhidas adequadamente ao sistema dinâmico, a trajectória originalmente caótica pode ser convertida na órbita de período 1 estável desejada a qual corresponde a um ponto fixo estável na secção de Poincaré. Neste nosso estudo vamos considerar os valores dos parâmetros  $v$ ,  $m$ ,  $n$  e  $r$ , estabelecidos anteriormente, e permitir que o parâmetro  $s$  varie em algum intervalo de pequena amplitude,  $|s - s_0| < \delta$ ,  $\delta > 0$ , em torno do valor nominal  $s_0 = 0.366$ , para o qual o sistema tem um atractor caótico.

A técnica de controlo de posicionamento de pólos (ver [28] e [27]), que é um método de controlo com *feedback*, é uma extensão do método de OGY que permite uma escolha mais ampla da chamada matriz de *feedback*.

Na nossa superfície de Poincaré  $F = -0.2$  o ponto fixo instável que se pretende estabilizar está localizado aproximadamente em  $(P^*, R^*) = (7.01449, 0.306068)$ . A estratégia de controlo consiste em determinar uma lei estabilizadora de controlo local, a qual é uma aplicação linear, obtida usando a aproximação através do método dos mínimos quadrados aplicados a uma amostra de dados numa pequena vizinhança do ponto fixo  $(P^*, R^*)$ , dada por

$$\begin{bmatrix} P_{t+1} - P^* \\ R_{t+1} - R^* \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P_t - P^* \\ R_t - R^* \end{bmatrix} + B(\rho - \rho_0) \quad (2.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0.645454 & -4.97596 \\ -0.00694097 & -0.191934 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4.00994 \\ 0.41350 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

e  $(\rho - \rho_0)$  corresponde a um parâmetro que pode ser submetido a pequenas perturbações a aplicar à lei de controlo (2.2). A natureza ergódica da dinâmica caótica assegura que a trajectória entrará eventualmente na vizinhança do ponto fixo. Uma vez nessa vizinhança,

aplicamos a lei estabilizadora de controlo local de modo a conduzir a trajectória para a órbita desejada.

Primeiramente, devemos começar por verificar se o sistema é controlável. Um sistema diz-se controlável se for possível determinar uma matriz  $K_{1 \times n}$  tal que  $A - BK$  tenha determinados valores próprios. Tal é possível se  $\text{rank}(C) = n$ , onde  $n$  corresponde à dimensão do espaço e  $C$  é uma matriz  $(n \times n)$  dada por

$$C = \begin{bmatrix} B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

No nosso caso obtemos

$$C = \begin{bmatrix} B : AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.00994 & \vdots & 0.530674 \\ & \vdots & \\ 0.41350 & \vdots & -0.107198 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

com  $\text{rank}(C) = 2$ , e portanto o sistema é controlável. Esta matriz  $C$  é a matriz de controlabilidade.

Assumimos, numa pequena vizinhança em torno do ponto fixo  $(P^*, R^*)$ ,

$$\rho - \rho_0 = -K \begin{bmatrix} P_t - P^* \\ R_t - R^* \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $K = [k_1 \quad k_2]$  é um vector constante a determinar.

A aplicação linear toma então a forma

$$\begin{bmatrix} P_{t+1} - P^* \\ R_{t+1} - R^* \end{bmatrix} = [A - BK] \begin{bmatrix} P_t - P^* \\ R_t - R^* \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

com  $[A - BK]$  dada por

$$\begin{bmatrix} 0.645454 - 4.00994 k_1 & -4.975956 - 4.00994 k_2 \\ -0.00694097 - 0.41350 k_1 & -0.191934 - 0.41350 k_2 \end{bmatrix},$$

e, por conseguinte, o ponto fixo é estável desde que a matriz  $(2 \times 2)$   $A - BK$  seja assintoticamente estável, isto é, todos os seus valores próprios sejam em módulo inferiores à unidade.

A determinação de  $K$ , tal que os valores próprios da matriz  $A - BK$  tenham valores previamente especificados chama-se, na teoria do controlo de sistemas, técnica de controlo de posicionamento de pólos. Os valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz  $A - BK$  designam-se por pólos reguladores, e o problema que consiste em colocar estes pólos na localização desejada, escolhendo  $K$  com  $A$  e  $B$  dados, corresponde ao problema de posicionamento de pólos.

No nosso caso particular, o polinómio característico, associado à matriz  $A - BK$ , é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (-0.45352 + 4.00994 k_1 + 0.4135 k_2)\lambda + (-0.158423 - 1.28791 k_1 - 0.294728 k_2).$$

Como os valores próprios verificam as equações

$$\lambda_1 \lambda_2 = -0.158423 - 1.28791 k_1 - 0.294728 k_2 \text{ e}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(-0.45352 + 4.00994 k_1 + 0.4135 k_2),$$

as linhas de estabilidade marginal podem ser determinadas resolvendo as equações

$$\lambda_1 = \pm 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Estas condições garantem que os valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm módulo inferior à unidade para  $k_1$  e  $k_2$  no interior de uma certa região. Esta região é definida por três linhas de

estabilidade marginal:

$$k_2 = -3.93048 - 4.36983 k_1,$$

$$k_2 = -3.28725 - 22.9181 k_1,$$

$$k_2 = 1.82865 - 7.48044 k_1.$$

Obtemos valores próprios  $k_1$  e  $k_2$  estáveis no interior da região triangular representada na Figura 2.8. Considerando, por exemplo,  $k_1 = 0.8$  e  $k_2 = -5$  no interior da região triangular,  $\Omega$ , e aplicando a lei linear de controlo (2.2), obtemos a órbita de período 1 desejada (ver Figura 2.9). Neste momento é conveniente salientar que, dependendo

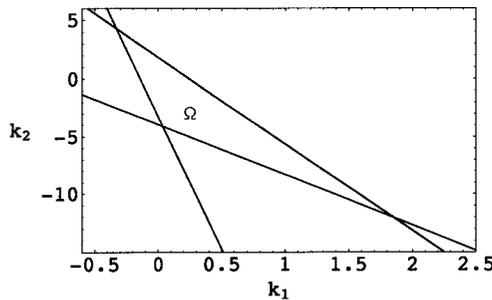


Figura 2.8: A região limitada  $\Omega$  que corresponde aos polos reguladores estáveis.

dos valores de  $k_1$  e  $k_2$  na bacia de atracção de  $\Omega$ , a órbita controlada convergirá para o ponto fixo mas necessitará de diferentes períodos de tempo para concluir o processo de convergência. A trajectória caótica também convergirá para o ponto fixo desejado se considerarmos valores de  $k_1$  e  $k_2$  fixos e escolhermos aleatoriamente condições iniciais na vizinhança de  $(P^*, R^*)$ .

Teoricamente, após a activação do controlo, a órbita continua a exibir comportamento caótico durante algum tempo, tal como no caso não controlado, uma vez que não está suficientemente próxima do ponto fixo. Depois de alguns passos, esta situação é eliminada e a órbita é rapidamente conduzida ao ponto fixo. A estratégia de controlo de posicionamento

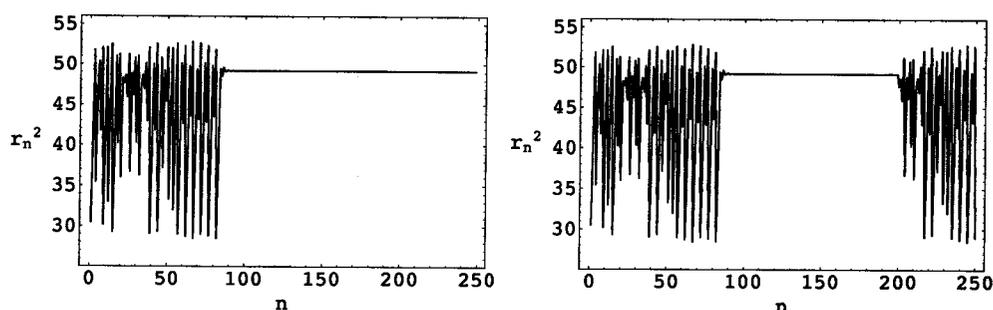


Figura 2.9: À esquerda a série temporal da aplicação de Poincaré discreta sem e com controlo, considerando  $r_n^2 = P_n^2 + R_n^2$ . O controlo é activado depois da iterada 84. À direita a série temporal da aplicação de Poincaré discreta sem e com controlo, considerando  $r_n^2 = P_n^2 + R_n^2$ . O controlo é desactivado depois da iterada 200.

de pólos é muito eficaz quando aplicada ao modelo empresarial de Bouali. De facto, as nossas simulações numéricas revelam uma convergência rápida para diferentes condições iniciais na vizinhança de  $(P^*, R^*)$  e para diferentes valores de  $k_1$  e  $k_2$  no interior da região  $\Omega$ .

Neste capítulo apresentámos algumas contribuições para o estudo detalhado do modelo empresarial proposto por S. Bouali, o qual analisa a dinâmica de três variáveis contínuas: lucros, reinvestimentos e fluxo de empréstimos.

O estudo rigoroso das aplicações iteradas unidimensionais introduzidas, e que estão relacionadas com o comportamento dos lucros, tornou-se possível utilizando a teoria da dinâmica simbólica. No que diz respeito à variação da entropia topológica com os dois parâmetros de controlo  $s$  e  $r$ , a análise revelou que quando a proporção de dívida  $s$  (proporcional ao auto-financiamento) e a taxa de juro  $r$  aumentam, a entropia topológica começa por assumir o valor zero e, uma vez atingindo um valor positivo, cresce. Por conseguinte, valores maiores destes parâmetros de controlo tendem a induzir uma maior complexidade

no modelo.

A representação das curvas isentrópicas (correspondentes às órbitas periódicas do ponto crítico  $C$ ) no espaço dos parâmetros permitiu-nos introduzir a ordem da dinâmica no espaço dos parâmetros. De facto, esta construção revela-se determinante para o conhecimento do comportamento da entropia topológica em todo o espaço dos parâmetros considerado.

A família de aplicações associada ao comportamento dos lucros exhibe entropia topológica positiva, o que demonstra a sua natureza caótica.

Motivados pela natureza caótica do modelo e pelo papel central dos ciclos económicos regulares, aplicámos o método de controlo de posicionamento de pólos de modo a obter um comportamento previsível - a órbita de período 1 estável. Num contexto real, é significativo escolher um parâmetro de controlo que possa ser directamente influenciado pelos gestores financeiros da empresa. Deste modo, considerámos a proporção de dívida  $s$  como o parâmetro de controlo e mostrámos, numericamente, que o comportamento complexo que emerge da dinâmica do modelo pode ser controlado por pequenas perturbações no parâmetro (as quais correspondem às possíveis medidas tomadas pelos gestores) numa aplicação linear de controlo deduzida a partir de uma secção de Poincaré. As características fundamentais do modelo não são alteradas pelo procedimento de controlo, uma vez que o ponto fixo da bacia de atracção permanece o mesmo. Salientamos que, com a aplicação da teoria do controlo do caos, o modelo exhibe uma convergência rápida para diferentes condições iniciais e diferentes valores dos parâmetros de controlo. A dinâmica caótica pôde ser convertida, utilizando apenas um controlo com feedback, na desejada órbita periódica.

## Capítulo 3

# Controlo do comportamento caótico num modelo económico para a acumulação de capital<sup>2</sup>

O estudo da dinâmica de modelos económicos de crescimento considera muitas vezes o modelo standard neoclássico unisectorial de Ramsey (1924) ou o modelo de Solow-Swan (1956). Em ambos os casos os modelos económicos são caracterizados por uma convergência monótona para o estado de equilíbrio, por conseguinte não são observadas flutuações periódicas ou dinâmica complexa. No entanto, foram desenvolvidos outros modelos de crescimento unisectoriais com a capacidade de gerar múltiplos estados de equilíbrio instáveis, particularmente nos modelos introduzidos por Kaldor e Pasinetti. Em 2000, Bohm e Kaas [30], analisaram o comportamento das poupanças, como proposto por Kaldor (1956), e as suas consequências no que diz respeito à estabilidade dos pontos de equilíbrio num modelo discreto de crescimento de Solow. Estes autores constataram um comportamento dinâmico muito rico, caracterizado por pontos de equilíbrio estáveis/instáveis, flutuações e caos topológico, quando a distribuição de rendimento varia suficientemente e

---

<sup>2</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na submissão para publicação do artigo científico [29] com o título *Isentropic dynamics and control in an economic model for capital accumulation*.

quando os accionistas têm poupanças mais elevadas que os trabalhadores. Recentemente, em 2007, Brianzoni *et al* ([31]) estudaram o modelo de Bohm e Kaas considerando uma função de produção diferente e uma força de crescimento do trabalho não constante.

Como sabemos, é possível associar à identificação de estados caóticos o desenvolvimento de estratégias de controlo. Neste contexto, examinamos os efeitos de pulsos periódicos na estabilização de trajectórias caóticas realizadas pelo modelo de crescimento neoclássico unisectorial de poupanças, tal como introduzido no artigo dos autores Bohm e Kaas (ver [30]). Este método de controlo foi apresentado por Chau em [32] e é baseado no trabalho desenvolvido por Matias e Güémez em [33].

### 3.1 Descrição do modelo

Nesta secção consideramos um modelo económico de crescimento unisectorial no sentido de Kaldor e Pasinetti, onde existem dois tipos de agentes: trabalhadores e accionistas. Ambos os agentes podem apresentar diferentes mas constantes intenções de poupança. A função de produção,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , com a propriedade de transformar capital por trabalhador,  $k$ , em trabalho produzido por trabalhador,  $y$ , satisfaz a condição fraca de Inaca, isto é,  $f$  é uma função de classe  $C^2$ , estritamente crescente e côncava, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} = \infty.$$

O número de trabalhadores cresce na proporção  $n \geq 0$  (como é normalmente assumido na teoria de crescimento económico) e o capital decresce na proporção  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq 1$ . A proporção de salários,  $w$ , é caracterizada pela relação

$$w(k) = f(k) - kf'(k),$$

onde  $f'(k)$  corresponde ao capital recebido pelos accionistas e  $kf'(k)$  representa o capital total recebido por trabalhador. As proporções (constantes) de poupança por trabalhadores,  $s_w$ , e por accionistas,  $s_r$ , variam ambas entre 0 e 1.

A função que descreve a acumulação de capital é dada por

$$k_{t+1} = G(k_t) = \frac{1}{n+1} \left( (1-\delta)k_t + s_w w(k_t) + s_r k_t f'(k_t) \right), \quad (3.1)$$

e corresponde a uma aplicação unidimensional continuamente dependente de  $f$  e dos parâmetros  $s_w, s_r, n, \delta$ . Se as intenções de poupança dos trabalhadores e accionistas forem iguais, obtém-se o modelo standard de crescimento de Solow. Neste caso, existe um único ponto de equilíbrio globalmente estável, que não maximiza o consumo *per capita* a longo prazo. Um comportamento dinâmico diferente do ponto fixo estável pode ser obtido considerando diferentes funções de produção  $f$  em (3.1) e variando os parâmetros do modelo.

De entre as funções de produção apresentadas em [30], consideramos a função de produção côncava, que resulta de uma aproximação da tecnologia de Leontief, isto é,

$$f(k) = a \left( k + \alpha \log \left( \frac{1 + e^{-b/(\alpha a)}}{1 + e^{(ak-b)/(\alpha a)}} \right) \right) + c,$$

e, por conseguinte, a aplicação unidimensional da equação (3.1) para a função  $f$  especificada. Os parâmetros  $a, b, c$  e  $\alpha$  são todos números reais positivos. Para uma informação mais detalhada acerca do modelo, o leitor é remetido para o artigo [30] e para as referências no seu interior.

Uma aplicação bimodal  $G$  típica é mostrada na Figura 3.1. No estudo que se segue usaremos os seguintes valores para os parâmetros:

$$n = 0.0, s_w = 0.4, a = 0.2, b = 1, c = 0.01, \alpha = 0.01$$

e consideraremos  $\delta = 0.148$  e  $s_r = 0.87$ , onde o sistema exhibe entropia topológica positiva ( $h_{top}(G) = 0.656256\dots$ ).

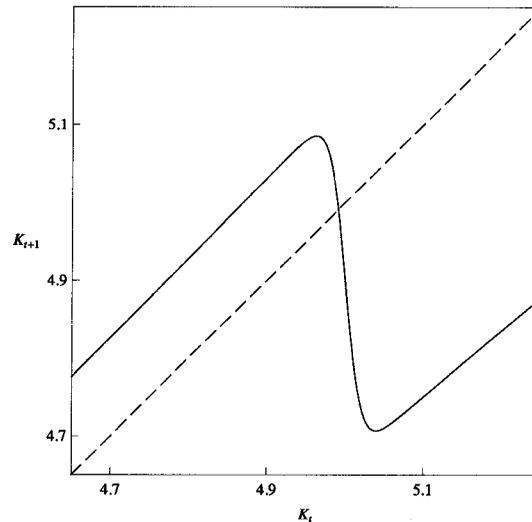


Figura 3.1: Representação gráfica de  $G$ . Neste caso  $\delta = 0.148$  e  $s_r = 0.87$ .

### 3.2 Controlo do modelo para a acumulação de capital

Existem diversos métodos disponíveis para o controlo do comportamento caótico em sistemas dinâmicos unidimensionais como podemos constatar em [32], [34] e [4]. Nesta secção, restringimos a nossa análise e mostramos que pulsos periódicos proporcionais, aplicados à dinâmica caótica do modelo para a acumulação de capital dado pela aplicação (3.1), isto é,

$$k_{t+1} = G(k_t) = \frac{1}{n+1} \left( (1-\delta)k_t + s_w w(k_t) + s_r k_t f'(k_t) \right)$$

podem converter a dinâmica numa órbita periódica estável desejada. Para uma informação mais detalhada sobre este método e algumas das suas aplicações o leitor é remetido para

o artigo [32].

Com o propósito de controlar o comportamento caótico deste sistema dinâmico discreto, serão aplicados pulsos instantâneos à variável da aplicação,  $k_t$ , a cada  $p$  iterações tal que  $k_i \rightarrow q k_i$  ( $i$  é múltiplo de  $p$ ), onde  $q$  é uma constante a ser determinada e  $p$  designa o período da órbita na dinâmica. Um ponto fixo,  $k_s$ , de  $k_{t+1} = G(k_t)$  é tal que  $k_s = G(k_s)$ , e diz-se estável se e só se o módulo da derivada de primeira ordem é menor do que 1, isto é,

$$\left| \frac{dG(k_s)}{dk} \right| < 1.$$

Agora, conduzimos a dinâmica multiplicando os seus valores iterados por um factor  $q$ , a cada  $p$  iterações, considerando

$$G^*(k) = q G^p(k),$$

onde  $G^p$  resulta da composição da aplicação  $G$  com ela própria  $p$  vezes. Um ponto fixo de  $G^*$  satisfaz a equação

$$q G^p(k_s) = k_s, \tag{3.2}$$

onde o ponto fixo  $k_s$  é localmente estável se

$$\left| q \frac{dG^p(k_s)}{dk} \right| < 1. \tag{3.3}$$

Um ponto fixo estável de  $G^*$  é considerado como um ponto periódico estável de período  $p$  da dinâmica original, *conduzida pelo método de controlo*. Considerando valores dos parâmetros para os quais a aplicação (3.1) é caótica e desejando convertê-la numa órbita estável de período  $p$ , devemos encontrar um ponto  $k_s$  e um factor  $q$  satisfazendo (3.2) e (3.3).

Definindo a função  $C^p(k)$  por

$$C^p(k) = q \frac{dG^p(k_s)}{dk},$$

e tomando  $q$  a partir da equação (3.2), isto é,

$$q = \frac{k_s}{G^p(k_s)}, \quad (3.4)$$

obtemos

$$C^p(k) = \frac{k_s}{G^p(k_s)} \frac{dG^p(k_s)}{dk}$$

e a equação (3.3) transforma-se em

$$|C^p(k_s)| < 1 \iff \left| \frac{k_s}{G^p(k_s)} \frac{dG^p(k_s)}{dk} \right| < 1. \quad (3.5)$$

Salientamos a importância da desigualdade anterior: se o ponto fixo  $k_s$  satisfaz (3.5), então através do factor condutor  $q$  definido por (3.4), o controlo é accionado e converterá a dinâmica numa órbita periódica estável de período  $p$ , passando no ponto dado. Para considerações mais detalhadas acerca deste procedimento de controlo ver [32].

No contexto da economia, é de um modo geral aceite que os métodos de controlo do comportamento caótico protagonizam aplicações interessantes quando conduzem a órbitas periódicas estáveis de períodos pequenos, nomeadamente,  $p = 1$  e  $p = 2$ , os quais representam comportamento previsível a curto prazo. A título ilustrativo, fixamos então os valores dos parâmetros  $\delta = 0.148$  e  $s_r = 0.87$ , onde o sistema apresenta entropia topológica positiva,  $h_{top}(G) = 0.656256\dots$ . As funções  $C^1(k)$  e  $C^2(k)$ , para valores entre  $-1$  e  $1$ , são exibidas na Figura 3.2. No que diz respeito à função  $C^1(k)$ , os pontos fixos podem ser estabilizados para todos os valores de  $k_s$  pertencentes a dois intervalos. Quando  $p = 2$ , a órbita de período 2 pode ser estabilizada para valores de  $k_s$  pertencentes a 6 intervalos.

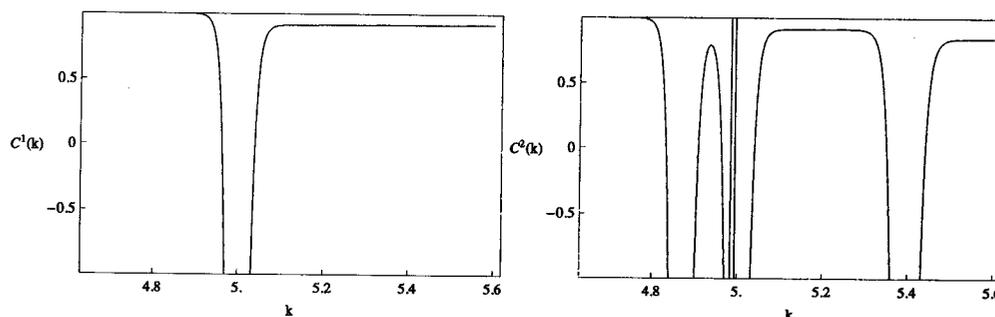


Figura 3.2: As curvas de controlo  $C^p$ ,  $p = 1, 2$ , para a aplicação económica quando  $\delta = 0.148$  e  $s_r = 0.87$ . Em cada caso, consideramos a restrição  $-1 < C^p(k) < 1$ .

De facto, os intervalos de controlo têm menor amplitude à medida que a periodicidade aumenta. A Figura 3.3 ilustra dois exemplos de estabilização da aplicação económica correspondente ao período 1 e ao período 2. Os valores  $k_s$  foram seleccionados depois de analisada a Figura 3.2 e os valores de  $q$  foram calculados utilizando a equação (3.4). Em ambos os exemplos, a convergência foi muito rápida (ver Figura 3.3). É interessante

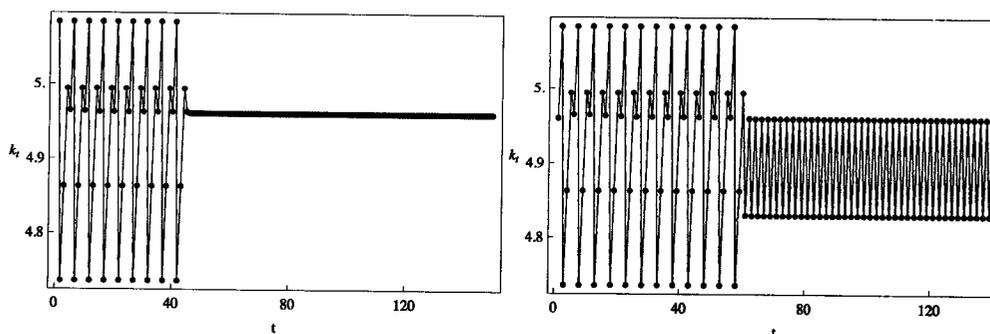


Figura 3.3: Dois exemplos do efeito do controlo da aplicação económica correspondente aos períodos 1 e 2. Para o período 1:  $k_s = 4.96$  e  $q = 0.975502\dots$  (o controlo foi activado em  $t = 45$ ). Para o período 2:  $k_s = 4.83$  e  $q = 0.949952\dots$  (o controlo foi activado em  $t = 60$ ).

observar que para valores de  $k_s$  tais que  $|C^p(k_s)|$  está próximo da unidade a convergência é mais lenta. No que diz respeito aos sistemas económicos, é desejável que a convergência seja

rápida de modo a obter o comportamento mais adequado. Um exemplo de convergência lenta pode ser observada na Figura 3.4.

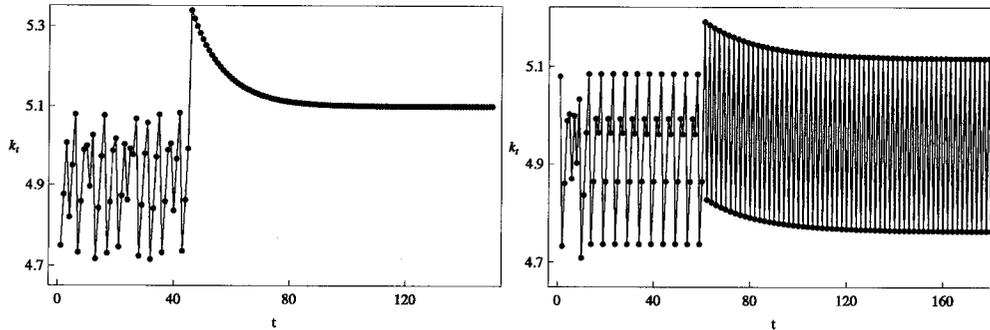


Figura 3.4: Dois exemplos de convergência lenta para os períodos 1 e 2. Para o período 1:  $k_s = 5.1$  e  $q = 1.07386\dots$  (o controlo foi activado em  $t = 45$ ). Para o período 2:  $k_s = 4.95$  e  $q = 1.04608\dots$  (o controlo foi activado em  $t = 60$ ).

Note-se que o sistema pode ser estabilizado para uma diversidade de pontos dentro ou fora da bacia de atracção do atractor (ver o trabalho de Chau [32]).

Neste capítulo, motivados pela estrutura caótica do modelo de crescimento unisectorial (com uma função de produção de Leontief) introduzido por Böhm e Kaas, aplicámos o método de controlo, baseado em pulsos periódicos proporcionais, de modo a obter comportamento previsível - as órbitas de período 1 e 2 estáveis. De facto, se existir alguma forma relevante de não-linearidade numa estrutura económica, o controlo de tais estruturas pode beneficiar bastante do conhecimento inerente ao procedimento de controlo. Mostrámos que o comportamento complexo que emerge da dinâmica do modelo económico para a acumulação de capital pode ser controlado aplicando pulsos periódicos proporcionais instantâneos à variável dinâmica  $k$  do sistema, a cada iteração periódica. A representação analítica das funções de controlo  $C^p(k)$ , permitiram-nos exibir os intervalos de controlo

para a acumulação de capital em cada caso de periodicidade. Salientamos ainda que, com a aplicação desta técnica de controlo do caos, o modelo realiza diferentes tempos de convergência.



## Capítulo 4

# Medindo a complexidade num modelo de ciclos económicos do tipo Kaldor<sup>3</sup>

Uma das teorias mais interessantes acerca dos ciclos económicos, segundo a escola de pensamento de Keynes, continua a ser o trabalho desenvolvido por Nicholas Kaldor [36]. A principal diferença em relação a outros modelos contemporâneos consiste na utilização de funções não-lineares, as quais produzem ciclos endógenos, ao contrário do modelo acelerador-multiplicador o qual preserva ciclos regulares originados por factores exógenos. Os modelos matemáticos que descrevem e simulam o comportamento de economias surgem de relações entre diferentes variáveis, tais como o emprego, as receitas ou as poupanças.

No modelo de Kaldor, os investimentos e as poupanças dependem, de forma não-linear, da actividade económica, apesar da formulação usual do modelo restringir a relação não-linear aos investimentos, mantendo uma relação linear no que diz respeito às poupanças. Os autores Chang e Smyth [37] traduziram o modelo de Kaldor num contexto mais rigoroso: o primeiro numa abordagem em termos de ciclos limite e o segundo numa abor-

---

<sup>3</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação do artigo científico [35] com o título *Measuring complexity in a business cycle model of the Kaldor type*.

dagem em termos da teoria das catástrofes. Um dos factores que dificulta o tratamento matemático dos modelos económicos em geral, resulta do facto destes serem descritos, na maioria dos casos, por modelos com dimensão superior a um. A possibilidade de medir certas quantidades significativas de um modelo torna-se muito difícil. Por conseguinte, uma compreensão qualitativa ou geométrica destes sistemas é, do ponto de vista intuitivo, muito enriquecedora.

No presente capítulo, consideramos um modelo bidimensional discreto do tipo-Kaldor introduzido por Hermann [38] e estudado por diversos autores. Para uma consulta adicional sobre diferentes estudos relacionados com modelos do tipo Kaldor, o leitor é dirigido para a seguinte literatura: [39], [40] [41], [42], [43] e [44].

Iremos concentrar a nossa atenção na análise de um caso particular da versão do modelo de Kaldor escolhida. Mais precisamente, mostramos a influência de diferentes parâmetros do sistema na variação da entropia topológica e introduzimos o segundo invariante topológico,  $r$ , apresentado no Capítulo 1, para distinguir aplicações com a mesma entropia. No estudo relacionado com o segundo invariante veremos como é interessante a relação sugerida pela sua variação com um dos parâmetros de controlo.

## 4.1 Descrição do modelo

O modelo de ciclos económicos de Kaldor consiste em duas equações principais que usam as quatro variáveis seguintes: investimentos, títulos de capital (valor das acções), poupanças e receitas. Consideremos os investimentos designados por  $I$ , os títulos de capital por  $K$ , as poupanças por  $S$  e as receitas por  $Y$ . Assim, temos

$$\begin{cases} Y_{t+1} - Y_t = \alpha(I_t - S_t) \\ K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde  $\alpha$  é um número positivo que representa a velocidade de reacção ao excesso de procura e  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) representa a taxa de desvalorização dos títulos de capital. Um valor de  $\alpha$  menor que a unidade significa uma reacção prudente e um valor elevado de  $\alpha$  traduz reacções bruscas. Uma economia modelada por esta versão discreta do modelo de Kaldor é completamente determinada pelas receitas e pelos títulos de capital.

As poupanças são tais que,

$$S_t = Y_t - C(Y_t), \quad (4.2)$$

onde  $C(Y_t)$ , a função de consumo, tem uma forma sigmoïdal semelhante à função de investimentos de Kaldor:

$$C(Y_t) = c_0 + \frac{20}{\pi} \arctan\left(\frac{c\pi(Y_t - Y^*)}{20}\right), \quad (4.3)$$

com  $c_0$ ,  $c$  e  $Y^*$  constantes. Os parâmetros  $c_0$  e  $c$  estão relacionados pela forma sigmoïdal da função de consumo. A constante  $Y^*$  representa o nível de equilíbrio das receitas. A

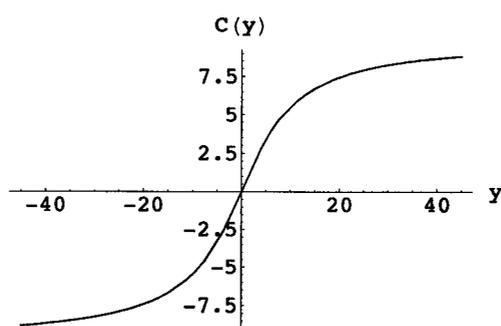


Figura 4.1: A forma da função de consumo,  $C(Y_t)$ , para  $c_0 = 0$  e  $Y^* = 0$ .

rede de investimentos depende proporcionalmente das discrepâncias entre os títulos de capital desejados,  $K_t^d$ , e os títulos de capital actuais

$$I_t = \beta(K_t^d - K_t) + \delta K_t. \quad (4.4)$$

Considerando que os títulos de capital desejados dependem linearmente das receitas,

$$\begin{cases} Y_{t+1} = \alpha(\beta(\gamma Y_t - K_t) + \delta K_t + C(Y_t) - Y_t) + Y_t \\ K_{t+1} = (1 - \beta)K_t + \beta \gamma Y_t \end{cases},$$

onde os parâmetros satisfazem:  $\alpha, c, \gamma > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\beta < 1$  e  $C(Y_t)$  é dada pela Equação (4.3).

No caso particular  $\beta = \delta$ , a aplicação tem a forma:

$$\begin{cases} Y_{t+1} = \alpha \left( \beta \gamma Y_t + c_0 + \frac{20}{\pi} \arctan \left( \frac{c\pi(Y_t - Y^*)}{20} \right) - Y_t \right) + Y_t \\ K_{t+1} = (1 - \beta)K_t + \beta \gamma Y_t \end{cases}.$$

Uma consequência imediata desta estrutura reside no facto da primeira equação se comportar como uma aplicação unidimensional independente, o que significa, do ponto de vista económico, que as receitas dependem unicamente delas próprias. Uma outra consequência desta estrutura triangular é a possibilidade de aplicar métodos matemáticos para calcular quantidades relevantes para caracterizar o sistema como caótico ou não caótico.

## 4.2 Dinâmica caótica da aplicação triangular

Consideremos a família de aplicações  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(y, k) = (f(y), g(y, k))$  dada por

$$F \begin{pmatrix} y \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left( \beta \gamma y + c_0 + \frac{20}{\pi} \arctg \left( \frac{c\pi(y - y^*)}{20} \right) - y \right) + y \\ (1 - \beta)k + \beta \gamma y \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha, \delta, \gamma$  e  $\beta$  são parâmetros reais tais que  $\alpha, \delta, \gamma > 0$ ,  $0 < \beta < 1$ . Nas Figuras 4.2 e 4.3 são representados graficamente os atractores associados à aplicação  $F$  para alguns valores dos parâmetros.

De acordo com (1.1), para calcular a entropia topológica é necessário calcular primeiro a entropia topológica de  $f$ , uma família a quatro parâmetros que representa a aplicação base,

$$f(y) = \alpha \left( \beta \gamma y + c_0 + \frac{20}{\pi} \arctg \left( \frac{c\pi(y - y^*)}{20} \right) - y \right) + y.$$

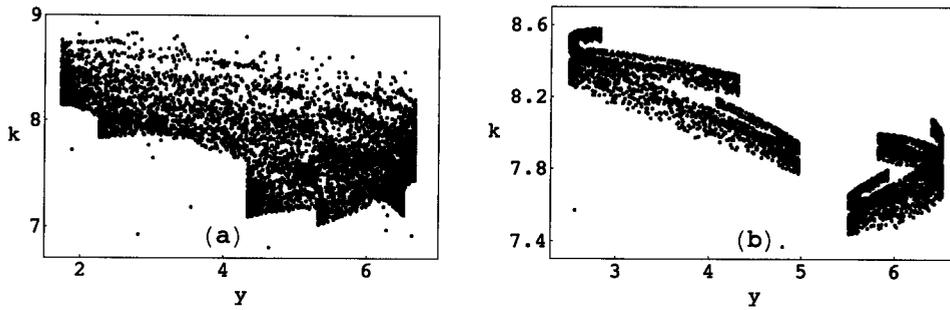


Figura 4.2: Atratores associados à família  $F$  para alguns valores dos parâmetros. Em (a)  $\alpha = 20.3$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$ ,  $\gamma = 1.65$  e em (b)  $\alpha = 21.5$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$ ,  $\gamma = 1.65$ .

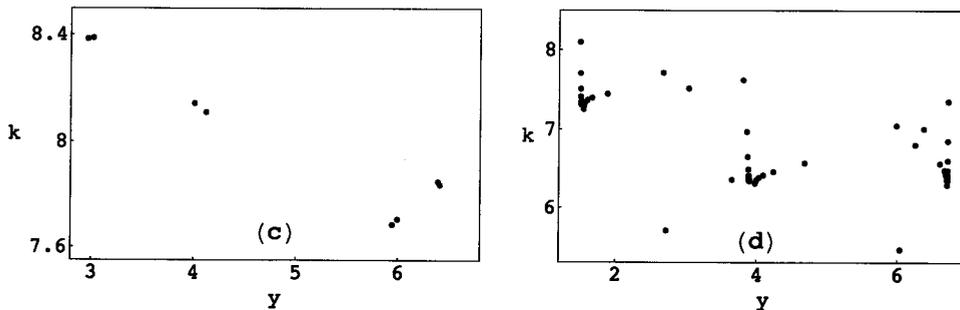


Figura 4.3: Atratores associados à família  $F$  para alguns valores dos parâmetros. Em (c)  $\alpha = 19.5$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$ ,  $\gamma = 1.65$  e em (d)  $\alpha = 21.84$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$ ,  $\gamma = 1.65$ .

Observando as soluções da equação  $f'(y) = 0$  podemos constatar que a aplicação  $f$  é uma aplicação bimodal (ver Figura 4.4), quando  $c > 1 - \beta\gamma - \frac{1}{\alpha} > 0$ . Esta é precisamente a situação que iremos considerar. O mínimo relativo  $c_1$  e o máximo relativo  $c_2$  são dados por:

$$c_1 = y^* - \sqrt{\frac{\frac{20^2 c}{1 - \frac{1}{\alpha} - \beta\gamma} - 20^2}{c^2 \pi^2}} \quad \text{e} \quad c_2 = y^* + \sqrt{\frac{\frac{20^2 c}{1 - \frac{1}{\alpha} - \beta\gamma} - 20^2}{c^2 \pi^2}}.$$

Com o propósito de estudar a variação da entropia topológica da nossa família de

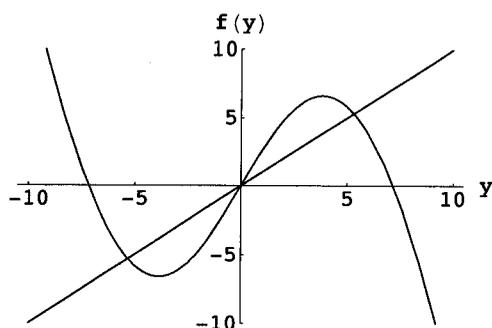


Figura 4.4: Representação gráfica de  $f$  quando  $c > 1 - \beta\gamma - \frac{1}{\alpha}$ . Neste caso  $\alpha = 26.0$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$  e  $\gamma = 1.65$ .

aplicações, é relevante analisar dois casos separadamente:

- (1)  $c_0 = Y^* = 0$
- (2)  $c_0 \neq 0$  e  $Y^* \neq 0$

Primeiramente, consideramos  $c_0 = Y^* = 0$ . Neste caso os dois pontos críticos  $c_1$  e  $c_2$  são simétricos.

A Figura 4.5 mostra a alteração no comportamento da aplicação base quando variamos um parâmetro,  $\alpha$  ou  $c$ , de cada vez. Os outros parâmetros,  $\beta$  e  $\gamma$ , modificam a aplicação bimodal da mesma forma que o parâmetro  $c$ .

A discussão do seguinte exemplo ilustra o cálculo da entropia topológica para uma aplicação base, bimodal, usando a teoria de *kneading* (atendendo às considerações feitas na subsecção 1.1.1 do Capítulo 1).

**Exemplo 4** Fixemos  $\alpha = 21.054$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$  e  $\gamma = 1.65$  (ver a aplicação da Figura 4.4). Para estes valores dos parâmetros as órbitas dos pontos críticos definem o par de sequências (LMLLA, RMRRB). As sequências simbólicas que correspondem às órbitas

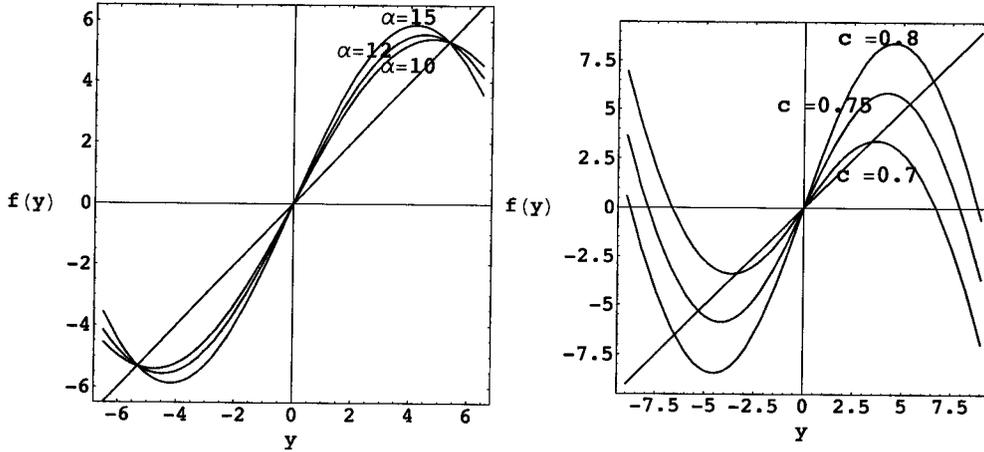


Figura 4.5: O comportamento da aplicação base. No gráfico da esquerda, quando  $\alpha$  varia, os outros parâmetros são:  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$  e  $\gamma = 1.65$ . No gráfico da direita, quando  $c$  varia, os outros parâmetros são:  $\alpha = 15$ ,  $\beta = 0.2$  e  $\gamma = 1.65$ .

dos pontos  $c_1^+$ ,  $c_1^-$ ,  $c_2^+$  e  $c_2^-$  são

$$\begin{aligned} c_1^+ &\longrightarrow M(LMLLL)^\infty \\ c_1^- &\longrightarrow L(LMLLL)^\infty \\ c_2^+ &\longrightarrow R(RMRRR)^\infty \\ c_2^- &\longrightarrow M(RMRRR)^\infty. \end{aligned}$$

Note-se que o bloco  $LMLLL$  corresponde à sequência  $LMLLA$  onde o símbolo  $A$  é substituído por  $L$ , devido à paridade do bloco  $LMLL$  ser ímpar e o bloco  $RMRRR$  corresponde à sequência  $RMRRB$  onde o símbolo  $B$  é substituído por  $R$  devido à paridade do bloco  $RMRR$  ser ímpar. As coordenadas invariantes são

$$\begin{aligned} \theta_{c_1^+}(t) &= M + Lt - Mt^2 - Lt^3 + Lt^4 - Lt^5 + Lt^6 - Mt^7 - \dots \\ &= M + t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4) + t^6(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4) + \dots \\ &= M + t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)(1 + t^5 + t^{10} + \dots) \\ &= M + \frac{t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)}{1 - t^5}, \\ \theta_{c_1^-}(t) &= L - Lt + Mt^2 + Lt^3 - Lt^4 + Lt^5 - Lt^6 + Mt^7 + \dots \\ &= L - t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4) - t^6(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4) - \dots \\ &= L - t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)(1 + t^5 + t^{10} + \dots) \\ &= L - \frac{t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)}{1 - t^5} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{c_2^+}(t) &= R - Rt + Mt^2 + Rt^3 - Rt^4 + Rt^5 - Rt^6 + Mt^7 - \dots \\
&= R - t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4) - t^6(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4) - \dots \\
&= R - t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)(1 + t^5 + t^{10} + \dots) \\
&= R - \frac{t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)}{1 - t^5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{c_2^-}(t) &= M + Rt - Mt^2 - Rt^3 + Rt^4 - Rt^5 + Rt^6 - Mt^7 + \dots \\
&= M + t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4) + t^6(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4) - \dots \\
&= M + t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)(1 + t^5 + t^{10} + \dots) \\
&= M + \frac{t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)}{1 - t^5}.
\end{aligned}$$

Os incrementos de kneading,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , são dados por

$$\begin{aligned}
\nu_1(t) &= \theta_{c_1^+}(t) - \theta_{c_1^-}(t) \\
&= M + \frac{t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)}{1 - t^5} - \left( L - \frac{t(L - Mt - Lt^2 + Lt^3 - Lt^4)}{1 - t^5} \right) \\
&= \left( \frac{-1 + 2t - 2t^3 + 2t^4 - t^5}{1 - t^5} \right) L + \left( \frac{1 - 2t^2 - t^5}{1 - t^5} \right) M
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nu_2(t) &= \theta_{c_2^+}(t) - \theta_{c_2^-}(t) \\
&= R - \frac{t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)}{1 - t^5} - \left( M - \frac{t(R - Mt - Rt^2 + Rt^3 - Rt^4)}{1 - t^5} \right) \\
&= \left( \frac{-1 + 2t^2 + t^5}{1 - t^5} \right) M + \left( \frac{1 - 2t + 2t^3 - 2t^4 + t^5}{1 - t^5} \right) R.
\end{aligned}$$

Atendendo às definições anteriores, a matriz de kneading é

$$N(t) = \begin{bmatrix} \frac{-1 + 2t - 2t^3 + 2t^4 - t^5}{1 - t^5} & \frac{1 - 2t^2 - t^5}{1 - t^5} & 0 \\ 0 & \frac{-1 + 2t^2 + t^5}{1 - t^5} & \frac{1 - 2t + 2t^3 - 2t^4 + t^5}{1 - t^5} \end{bmatrix}.$$

Portanto  $t^* = 0.660992\dots$  e a entropia topológica é dada por

$$h_{top}(f) = \log \left( \frac{1}{t^*} \right) = 0.414012\dots$$

Nos diagramas de bifurcação da Figura 4.6 e da Figura 4.7 são representadas as iteradas assintóticas de  $y_n$  a partir dos pontos iniciais  $c_1$  e  $c_2$ .

Os diagramas de bifurcação ajudam-nos a compreender melhor as Figuras 4.8 e 4.9 as quais ilustram alguns resultados numéricos da variação da entropia topológica com cada um dos parâmetros  $\alpha$  e  $c$ , numa dada região do espaço dos parâmetros. Para estes valores dos parâmetros, estes gráficos sugerem que a entropia topológica  $h_{top}$  é monótona

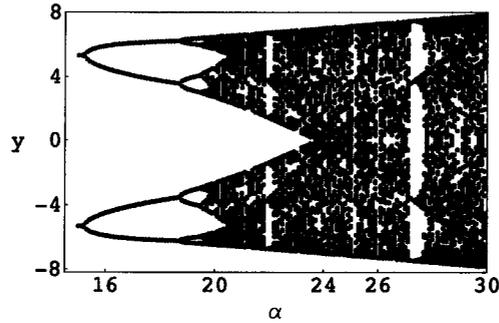


Figura 4.6: Diagrama de bifurcação da aplicação  $f$  para  $\alpha \in [15, 30]$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $c = 0.75$  e  $\gamma = 1.65$ .

crecente. Este comportamento é determinado pela ordem das sequências simbólicas associadas às órbitas sucessivas dos dois pontos críticos e permitem-nos distinguir as aplicações unidimensionais.

No que diz respeito à aplicação base, é importante notar que para valores dos parâmetros correspondentes a órbitas periódicas estáveis da aplicação base  $f(y)$ ,  $g_p(k)$  é dada por

$$\begin{aligned} g_p(k) &= g(y_{p-1}, \dots, g(y_2, g(y_1, g(y_0, k)) \dots)) \\ &= (-1)^p (-1 + \beta)^p k + \\ &\quad + \beta (y_{p-1} - y_{p-2}(-1 + \beta) + y_{p-3}(-1 + \beta)^2 - \dots + (-1)^{p-1} y_0 (-1 + \beta)^{p-1}) \gamma. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note-se que  $g_p(k)$  representa uma linha recta, o que significa que a entropia topológica da aplicação fibra é zero. Nesta situação podemos enunciar que a entropia topológica  $h_{top}(F(y, k))$  da aplicação triangular  $F(y, k)$ , que representa o modelo tipo Kaldor, é tal que

$$h_{top}(F(y, k)) = h_{top}(f(y)).$$

Como sabemos, no que diz respeito ao estudo da entropia topológica, podem ocorrer

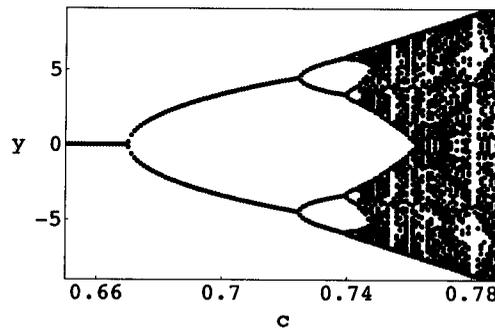


Figura 4.7: Diagrama de bifurcação da aplicação  $f$  para  $c \in [0.63, 0.79]$ ,  $\alpha = 21$ ,  $\beta = 0.2$  e  $\gamma = 1.65$ .

situações de dinâmica isentrópica (isto é, dinâmica com a mesma entropia) as quais suscitam questões interessantes.

### 4.3 Aplicações isentrópicas

Nesta secção, iremos considerar o caso apresentado anteriormente

$$c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad Y^* \neq 0.$$

Para ilustrar a ideia de dinâmica isentrópica, vamos fixar  $Y^* = 0.8$ ,  $\alpha = 22$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 1.6$  e investigar a existência de aplicações com entropia topológica igual a  $\log(2.147899\dots) = 0.764490\dots$ , quando os parâmetros  $c$  e  $c_0$  são variados. No nosso estudo analisamos a restrição da família de aplicações

$$f_{c,c_0}(y) = \alpha \left( \beta\gamma y + c_0 + \frac{20}{\pi} \arctg \left( \frac{c\pi (y - y^*)}{20} \right) - y \right) + y$$

à sua região invariante  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\Omega = \{(c, c_0) \in \mathbb{R}^2 : f_{c,c_0}(f_{c,c_0}(c_1)) < f_{c,c_0}(c_2) \text{ e} \\ f_{c,c_0}(f_{c,c_0}(c_2)) > f_{c,c_0}(c_1) \text{ e } f_{c,c_0}(c_2) > c_2 \text{ e } f_{c,c_0}(c_1) < c_1\},$$

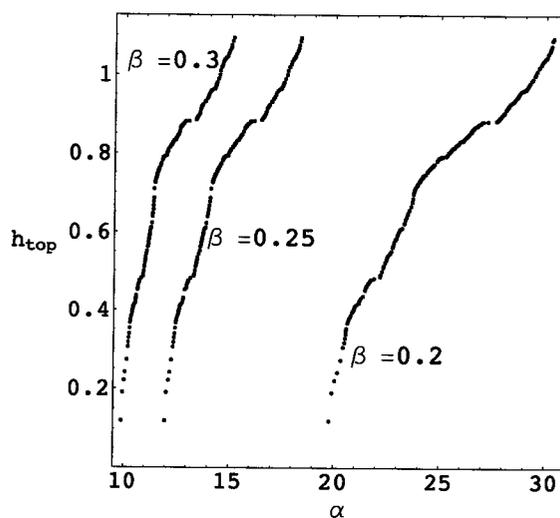


Figura 4.8: Variação da entropia topológica com  $\alpha$ , para  $c = 0.75$ ,  $\gamma = 1.65$  e  $\beta = 0.2$ ,  $\beta = 0.25$  e  $\beta = 0.3$ .

que é o conjunto dos pares de parâmetros  $(c, c_0)$  para os quais a aplicação base é bimodal.

A região  $\Omega$  é representada na Figura 4.10.

Utilizando o procedimento descrito na secção anterior, podemos calcular a entropia topológica destas aplicações. As tabelas seguintes mostram as sequências de *kneading* e o polinómio característico associado a cada aplicação. É importante notar que o factor comum  $(-1 - 2t - t^2 + t^3)$  determina o raio espectral 2.147899... e, por conseguinte, a

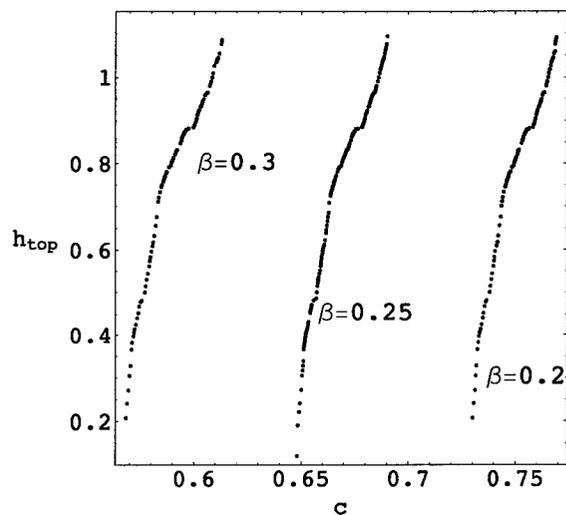


Figura 4.9: Variação da entropia topológica com  $c$ , para  $\alpha = 25.5$ ,  $\gamma = 1.65$  e  $\beta = 0.2$ ,  $\beta = 0.25$  e  $\beta = 0.3$ .

mesma entropia topológica  $h_{top}(f_{c,c_0}) = \log(2.147899\dots) = 0.764490\dots$ ,

$(c, c_0)$ com $Y^* = 0.8$	par de kneading de $f_{c,c_0}$
(0.77505, 0.52026)	$(LB, RM^3A)$
(0.7729695, 0.528732)	$(LMRB, RM^3L^5MR^2MB)$
(0.77092, 0.54465)	$(LM^2R^3B, RM^2L^3M^2R^4MB)$
(0.775037, 0.567662)	$(LM^3B, RA)$
(0.772511, 0.557187)	$(LM^3RB, RML^5M^3R^2MB)$
(0.770934, 0.543232)	$(LM^2RB, RM^2L^5M^2R^2MB)$
(0.77295, 0.55914)	$(LM^3R^3B, RML^3M^3R^4MB)$
(0.7725154, 0.530723)	$(LMR^3B, RM^3L^3MR^4MB)$
(0.7743488, 0.523392)	$(LMRM^3RB, RM^3L^2M^3LM^2RM^3RMRMB)$
(0.771405, 0.5505)	$(LM^2B, RMA)$

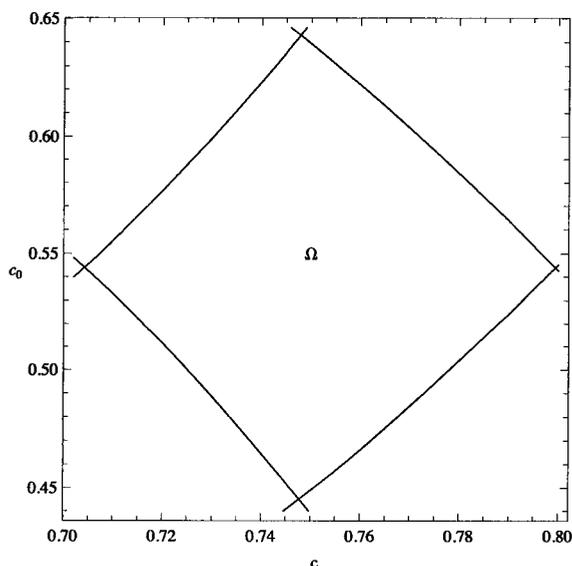


Figura 4.10: A região  $\Omega$  do espaço dos parâmetros.

$(c, c_0)$ com $Y^* = 0.8$	polinómio característico de $M(f_{c,c_0})$
(0.77505, 0.52026)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(-1 + t - 2t^2 + t^3)$
(0.7729695, 0.528732)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(1 - t)t^3$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.77092, 0.54465)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(-1 + t)t^6$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.775037, 0.567662)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(-1 + t)(1 + t)$ $(-1 + t - 2t^2 + t^3)$
(0.772511, 0.557187)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(-1 + t)t^5$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.770934, 0.543232)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(1 - t)t^5$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.77295, 0.55914)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(1 - t)t^7$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.7725154, 0.530723)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(1 - t)t^5$ $(-2 + t - 2t^2 - t^4 - t^5 - t^6 - t^7 - t^9 + t^{10})$
(0.7743488, 0.523392)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)t^7(-2 + 3t - t^2 - 2t^3 + 3t^4 - 4t^5$ $+ 4t^6 - t^8 + t^9 - 2t^{10} + t^{11} - t^{15} + t^{16} - 2t^{17} + t^{18})$
(0.771405, 0.5505)	$(-1 - 2t - t^2 + t^3)(-1 + t - 2t^2 + t^3)$

Neste momento do nosso estudo, é importante salientar que em todas as situações apresentadas o comportamento é caótico e a entropia topológica tem exactamente o

mesmo valor. A cada ponto  $(c_0, c)$  na Figura 4.11 corresponde uma aplicação com entropia topológica  $h_{top}(f_{c,c_0}) = \log(2.147899...) = 0.764490...$ . Representamos igualmente os pontos isentrópicos na região  $\Omega$  (ver Figura 4.12).

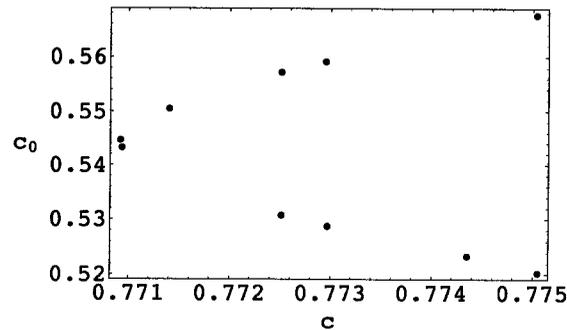


Figura 4.11: Representação dos pontos  $(c, c_0)$ , para  $Y^* = 0.8$ . A cada ponto corresponde uma aplicação com entropia topológica  $h_{top}(f_{c,c_0}) = \log(2.147899...) = 0.764490...$

Com o propósito de distinguir dinâmicas com a mesma entropia, consideramos o invariante topológico  $r$ . O exemplo seguinte ilustra o seu cálculo num dos casos anteriores.

**Exemplo 5** Para o par de kneading  $(LMMMB, RA)$ , a matriz de transição é dada por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

com  $\mathcal{M}v = \lambda_{\max}v$  a equação do vector próprio de Perron. Assim,

$$\lambda(c_1) = \sum_{i=1}^2 v_i = 0.341164... \quad e \quad \lambda(c_2) = \sum_{i=1}^6 v_i = 0.608378...$$

(com  $v$  normalizado ao intervalo unitário). Obtemos então

$$s = 2.147899... \quad e \quad r = 0.534428....$$

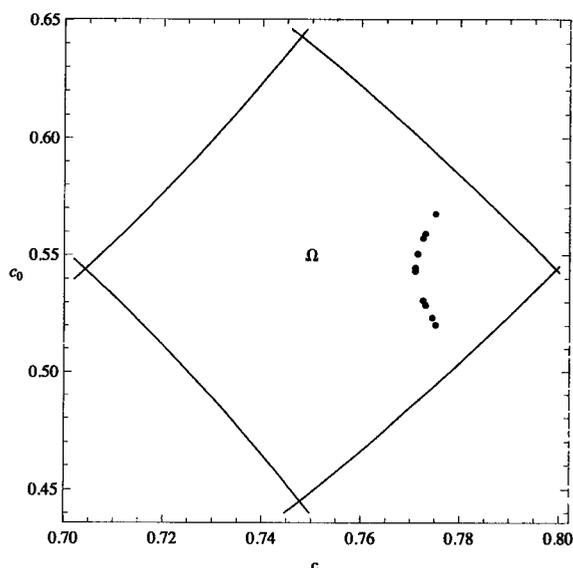


Figura 4.12: Representação dos pontos  $(c, c_0)$  na região  $\Omega$ , para  $Y^* = 0.8$ . A cada ponto corresponde uma aplicação com entropia topológica  $h_{top}(f_{c,c_0}) = \log(2.147899\dots) = 0.764490\dots$

A aplicação seccionalmente linear semi-conjugada associada a este par de kneading é ilustrada na Figura 4.13. Os parâmetros correspondentes à aplicação  $f_{c,c_0}$  são  $c = 0.775037$ ,  $c_0 = 0.567662$  e  $Y^* = 0.8$ .

A cada par de kneading  $(P^{(p)}, Q^{(q)})$  corresponde um e um só valor de  $r$ .

Para o conjunto de pontos estudados, representamos nas Figuras 4.14 e 4.15 alguns resultados numéricos da variação do invariante topológico  $r$  com cada um dos parâmetros  $c$  e  $c_0$ . Os gráficos das Figuras 4.11 e 4.14 têm uma forma semelhante o que está de acordo com a relação entre  $r$  e  $c_0$ . De facto, é central notar que a Figura 4.15 sugere uma relação aproximadamente linear entre as duas grandezas. Mais precisamente, utilizando o método dos mínimos quadrados, obtemos a recta de regressão linear com expressão analítica  $y = 5.036x - 2.3114$ , representada na Figura 4.15, e cujo coeficiente de correlação

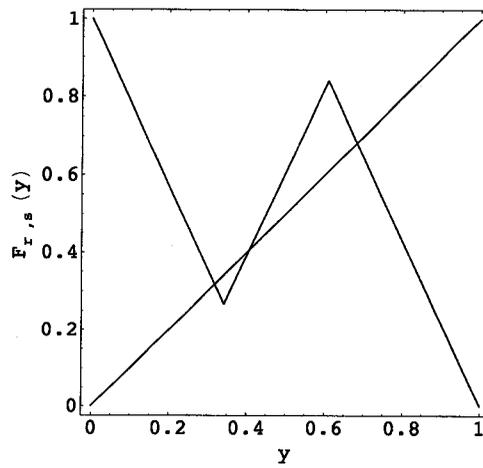


Figura 4.13: Aplicação seccionalmente linear para  $s = 2.147899\dots$  e  $r = 0.534428\dots$

é 0.9939.... Note-se no entanto que a interpretação deste coeficiente exige muito cuidado. O facto de existir uma forte correlação entre duas grandezas não quer dizer que exista uma real correlação entre elas. A correlação é um indicador e não uma prova.

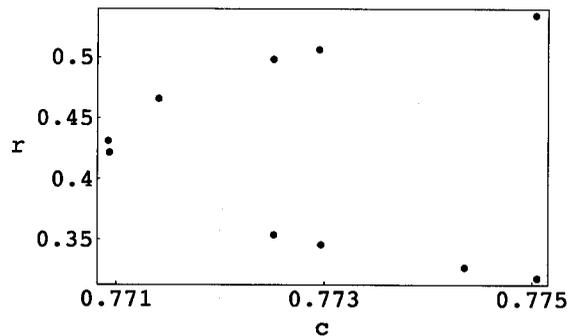


Figura 4.14: Variação do invariante topológico  $r$  com  $c$ .

Devido ao facto da fórmula (4.5) ser válida para todos os valores dos parâmetros, a

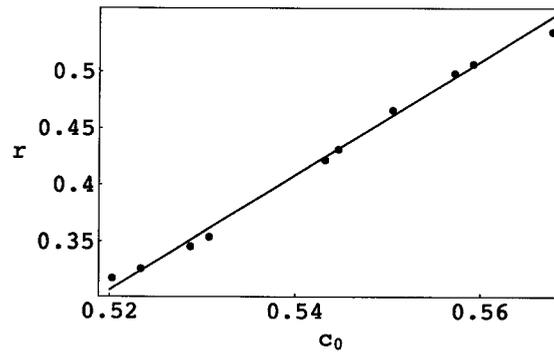


Figura 4.15: Variação do invariante topológico  $r$  com  $c_0$ . A recta representada corresponde à recta de regressão linear  $y = 5.036x - 2.3114$ .

igualdade

$$h_{top}(F(y, k)) = h_{top}(f(y))$$

permanece válida para  $c_0 \neq 0$  e  $Y^* \neq 0$ . Por conseguinte, as situações de isentropia estudadas para  $f(y)$  ocorrem igualmente para a aplicação triangular  $F(y, k)$ .

Nesta secção estudámos a dinâmica caótica de um modelo tipo Kaldor, envolvendo as variáveis receita e títulos de capital, no caso em que a aplicação se reduz a uma aplicação triangular. Na literatura disponível, a análise detalhada deste modelo envolve muitos assuntos diferentes, tanto no domínio da economia como da matemática, e a sua investigação científica continua a ser uma área de trabalho activa.

Uma análise detalhada deste modelo tornou-se possível através do estudo da variação da entropia topológica com o parâmetro  $\alpha$  (que representa a velocidade de reacção ao excesso de procura) e com o parâmetro  $c$  (o qual está directamente relacionado com a forma sigmoidal da função de consumo). De facto, o modelo do tipo Kaldor exhibe entropia

topológica positiva, o que significa que em determinadas condições a economia associada é caótica. A nossa análise revelou que quando o parâmetro  $\alpha$  aumenta (o que significa uma reacção brusca ao excesso de procura) a entropia topológica também aumenta. De forma análoga, quando o parâmetro  $c$  cresce, este invariante numérico também é crescente. Assim, valores elevados destes parâmetros de controlo tendem a introduzir mais complexidade à estrutura económica. A cada par de parâmetros corresponde um valor da entropia topológica, o qual é um quantificador da estrutura orbital complexa e um atributo eficientemente utilizado para identificar diferentes estados caóticos.

Introduzimos o segundo invariante topológico como um instrumento matemático capaz de distinguir aplicações isentrópicas. É significativo notar que um aumento no parâmetro de controlo  $c_0$  significa um aumento no invariante numérico  $r$ , sugerindo uma relação aproximadamente linear entre as duas grandezas. Este facto é muito interessante. Assim, no que diz respeito ao resultado das simulações numéricas, será lícito esperar uma identificação do parâmetro  $c_0$  com o invariante topológico  $r$ ? Esta é ainda uma questão em aberto que será certamente objecto de novas investigações.

## Parte II

# A teoria dos sistemas dinâmicos discretos e a ecologia



## Capítulo 5

# Invariantes topológicos no estudo de um modelo para uma cadeia alimentar tritrófica<sup>4</sup>

Um ecossistema, ou sistema ecológico, é a base funcional da ecologia. A palavra ecossistema diz respeito a um sistema de organismos vivos que interagem não só com o meio físico que os rodeia mas também com a química ambiental e com o meio social e biológico em que estão inseridos. Um ecossistema inclui todos os organismos que aí vivem (componente biótica) e o ambiente físico (componente abiótica) e implica que os organismos e o seu meio formem um todo, apesar de cada um ser um ser individual. Ambas as componentes de um sistema ecológico são essenciais para a manutenção da vida tal como a conhecemos na Terra. Nenhum ecossistema natural é completamente independente, nem tem um tamanho definido ou ideal sendo essencialmente caracterizado pela diversidade de espécies (embora algumas espécies predominem sobre as outras).

Com o propósito de compreender esta *ecocomplexidade*, é importante estudar cuidadosamente o comportamento dinâmico de cadeias alimentares simples (em particular

---

<sup>4</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na publicação dos artigos científicos [46] e [47] com os títulos *Topological invariants in the study of a chaotic food chain system* e *Chaos in ecology: the topological entropy of a tritrophic food chain model*.

$$\begin{aligned}
 t &\longrightarrow c_1 T, & x &\longrightarrow \frac{1}{K} X, & y &\longrightarrow \frac{p_1}{rK} Y, \\
 z &\longrightarrow \frac{p_2 p_1}{c_1 r K} Z, & \zeta &= \frac{c_1}{r}, & \epsilon &= \frac{c_2}{c_1}, \\
 \beta_1 &= \frac{H_1}{K}, & \beta_2 &= \frac{H_2}{Y_0}, & \text{com} \\
 Y_0 &= \frac{rK}{p_1}, & \delta_1 &= \frac{d_1}{c_1}, & \delta_2 &= \frac{d_2}{c_2}.
 \end{aligned}$$

Este procedimento conduz ao sistema adimensional seguinte:

$$\begin{cases}
 \zeta \dot{x} = x \left( 1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} \right) = x f^*(x, y) \\
 \dot{y} = y \left( \frac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = y g^*(x, y, z) \\
 \dot{z} = \epsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \epsilon h^*(y)
 \end{cases} \quad (5.2)$$

No contexto da ecologia, os parâmetros têm as seguintes definições:

- $\zeta = \frac{c_1}{r}$ , onde  $c_1$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* do predador e  $r$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* da presa
- $\epsilon = \frac{c_2}{c_1}$ , onde  $c_2$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* do super-predador e  $c_1$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* do predador
- $\beta_1$  é a constante adimensional de semi-saturação medida na razão inversa da capacidade biótica máxima da presa (valor para o qual cessa o crescimento da população)
- $\beta_2$  é a constante adimensional de semi-saturação do predador medida na razão inversa da sua capacidade de predação.

- $\delta_1 = \frac{d_1}{c_1}$ , onde  $d_1$  é a taxa de mortalidade natural *per capita* do predador e  $c_1$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* do predador
- $\delta_2 = \frac{d_2}{c_2}$ , onde  $d_2$  é a taxa de mortalidade natural *per capita* do super-predador e  $c_2$  é a taxa de crescimento máxima *per capita* do super-predador

Tal como em [50], assumimos no desenvolvimento que se segue as condições

$$0 < \beta_1 < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \beta_2 < 1,$$

as quais podem ser interpretadas como significando que o predador e o super-predador são ambos bons caçadores. Assumimos também que

$$0 < \delta_1 = \frac{d_1}{c_1} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \delta_2 = \frac{d_2}{c_2} < 1.$$

As condições anteriores são na verdade naturais uma vez que a condição  $\delta_i > 1$  ( $i = 1, 2$ ) conduziria ao colapso da cadeia alimentar tritrófica. Mais precisamente, com  $d_1 > c_1$ , o predador morre mais rapidamente do que se reproduz mesmo com taxa de reprodução máxima. Com  $d_2 > c_2$ , o super-predador tende a desaparecer pela mesma razão. Em ambos os casos estaríamos na presença de cadeias alimentares tritróficas triviais, cujo comportamento dinâmico está completamente compreendido.

Sob a “hipótese de diversificação trófica”, a qual estabelece que a taxa de crescimento *per capita* máxima decresce da base para o topo da cadeia alimentar, nomeadamente,

$$r > c_1 > c_2 > 0$$

ou, de forma equivalente,

$$0 < \zeta \ll 1 \quad \text{e} \quad 0 < \epsilon < 1,$$

o sistema (5.2) torna-se um sistema singularmente perturbado de três variáveis. As taxas de variação da presa, do predador e do super-predador são rápida, intermédia e lenta, respectivamente. Do ponto de vista ecológico isto significa que a presa se reproduz mais rapidamente que o predador o qual se reproduz mais rapidamente que o super-predador.

## 5.2 Aplicações de Poincaré e aplicações unidimensionais

Tal como foi anteriormente mencionado, este capítulo tem como objectivo proporcionar um estudo, em termos dos invariantes topológicos, de aplicações unidimensionais associadas ao modelo (5.2) resultantes de aplicações de Poincaré. A existência destas aplicações, numa determinada região dos parâmetros com significado concreto do ponto de vista ecológico, foi demonstrada em [51] usando um método geométrico de perturbações singulares, o qual se tem revelado extremamente eficiente no tratamento de modelos ecológicos (ver [50], [51], [52] e [54]).

Nas simulações numéricas que se seguem usaremos

$$\zeta = 0.1, \quad \beta_1 = 0.3, \quad \beta_2 = 0.1, \quad \delta_1 = 0.2$$

e consideremos  $\epsilon$  e  $\delta_2$  como parâmetros de controlo. Tal como vimos anteriormente, o parâmetro  $\epsilon$  representa a taxa de crescimento máxima *per capita* do super-predador sobre a taxa de crescimento máxima *per capita* do predador e o parâmetro  $\delta_2$  corresponde à taxa de mortalidade natural *per capita* do super-predador sobre a sua própria taxa de crescimento máxima.

A integração numérica do sistema (5.2), proporciona-nos uma melhor compreensão geométrica acerca do comportamento assintótico das trajectórias. Desprezando as trajectórias transientes, uma estrutura emerge quando a solução  $(x(t), y(t), z(t))$  é visualizada

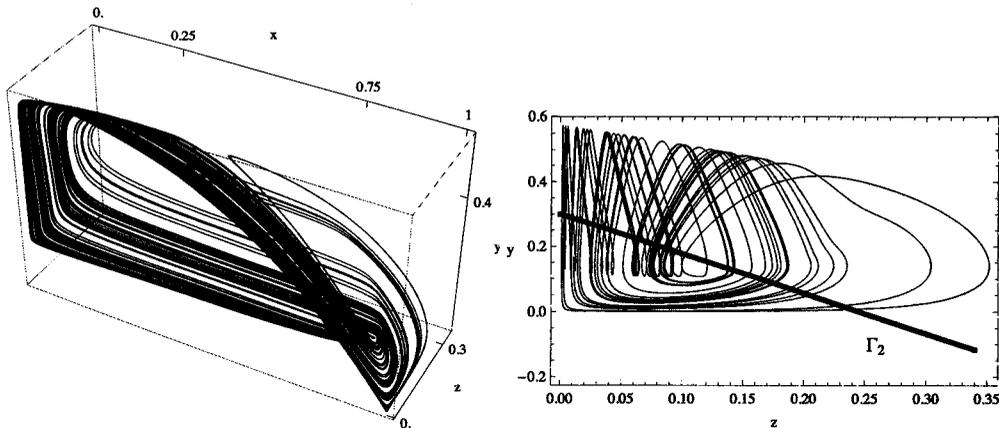


Figura 5.1: (a) Solução visualizada como uma trajectória no espaço tridimensional para  $\epsilon = 0.75$  e  $\delta_2 = 0.583$ . (b) Projecção da trajectória tridimensional no plano- $zy$  para  $\epsilon = 0.75$  e  $\delta_2 = 0.583$ .

como uma trajectória no espaço tridimensional (Figura 5.1(a)) e a sua projecção no plano é exibida na Figura 5.1(b).

Com o propósito de compreender as características principais das trajectórias no espaço tridimensional, podemos utilizar aplicações de Poincaré para reduzir a dimensão do espaço de fases e tornar a análise mais simples. Neste caso particular, temos um sistema com três variáveis dinâmicas e escolhemos a secção de Poincaré definida por

$$\Gamma_2 : y = y_{fix} - m(z - z_{fix})$$

(ver Figura 5.1(b)).  $\Gamma_2$  corresponde a uma semi-recta em  $(y, z)$  desenvolvida a partir do ponto fixo na isocline nula de  $x$  (superfície onde a variável dinâmica  $x$  é constante no tempo):

$$f^*(x, y) = 0 \iff y = (1 - x)(\beta_1 + x).$$

Com  $(x, y, z)$  nesta parábola, o ponto de equilíbrio não trivial  $p_{fix} = (x_{fix}, y_{fix}, z_{fix})$  é

dado por

$$x_{fix} = \frac{1 - \beta_1 + \sqrt{(1 - \beta_1)^2 - 4(y_{fix} - \beta_1)}}{2}$$

$$y_{fix} = \frac{\delta_2 \beta_2}{1 - \delta_2}$$

$$z_{fix} = \frac{(x_{fix} - \delta_1 \beta_1 - \delta_1 x_{fix})(\beta_2 + y_{fix})}{\beta_1 + x_{fix}}$$

e

$$m = \frac{\beta_1 - y_{fix}}{z_{fix}}$$

De facto, a intersecção entre as superfícies correspondentes às isoclinas nulas são pontos de equilíbrio (pontos estacionários), e portanto, a determinação destas isoclinas é particularmente útil na identificação de tais pontos. Para mais detalhes o leitor poderá consultar [50] e [51]. Desprezando a parte transiente, registamos as sucessivas intersecções da trajectória com o plano  $\Gamma_2$ , as quais são especificadas pelas coordenadas  $x_n$  e  $z_n$ . Com este procedimento podemos ter um dos seguintes dois tipos de aplicações iteradas, que consistem em pares de pontos  $(z_n, z_{n+1})$ , obtidos a partir das sucessivas segundas coordenadas dos pontos definidos pela aplicação de Poincaré:

- A aplicação iterada da Figura 5.2(a) que se comporta dinamicamente como uma aplicação *unimodal*. Esta ocorre para valores mais elevados de  $\delta_2$ .
- A aplicação iterada da Figura 5.2(b) que se comporta dinamicamente como uma aplicação *bimodal*. Esta ocorre para valores de  $\delta_2$  menores.

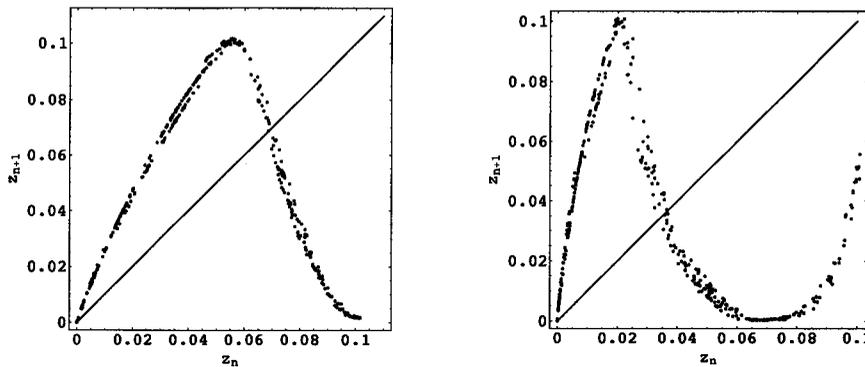


Figura 5.2: (a) A aplicação iterada para  $\epsilon = 0.75$  e  $\delta_2 = 0.594$ . (b) A aplicação iterada para  $\epsilon = 0.86$  e  $\delta_2 = 0.478$ .

Na literatura existente, estes dois tipos de aplicações iteradas são consideradas como uma excelente aproximação de aplicações unidimensionais (ver [50] e [51]).

Seguidamente, apresentamos comportamentos da entropia topológica e regimes da dinâmica que ocorrem para aplicações unimodais e bimodais.

### 5.2.1 Aplicações unimodais

Iniciamos esta subsecção com a apresentação dos diagramas de bifurcação (Figura 5.3) para diferentes valores dos parâmetros  $\delta_2$  e  $\epsilon$ . Estes diagramas contêm informações importantes sobre o comportamento qualitativo das aplicações em estudo. Em particular, revelam bifurcações de duplicação do período invertidas e permitem uma melhor compreensão das Figuras 5.4(a) e 5.4(b) que representam os resultados da variação da entropia topológica com cada um dos parâmetros  $\delta_2$  e  $\epsilon$ .

Salientamos que este tipo de aplicações unidimensionais associadas ao modelo de Rosenzweig-MacArthur para cadeias tritróficas exibem entropia topológica positiva, o que significa que o seu comportamento é caótico. De facto, a secção de Poincaré considerada,

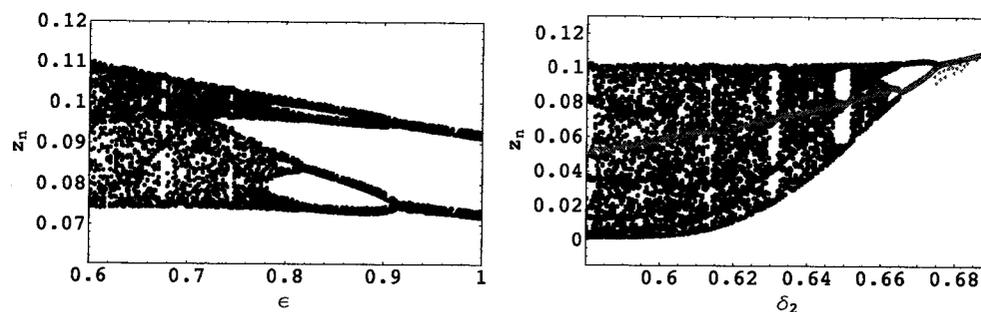


Figura 5.3: (a) Diagrama de bifurcação para  $z_n$  como uma função de  $\epsilon$ , com  $\delta_2 = 0.66$  e  $0.6 \leq \epsilon < 1.0$ . (b) Diagrama de bifurcação para  $z_n$  como uma função de  $\delta_2$ , com  $\epsilon = 0.75$  e  $0.58 \leq \delta_2 \leq 0.69$ .

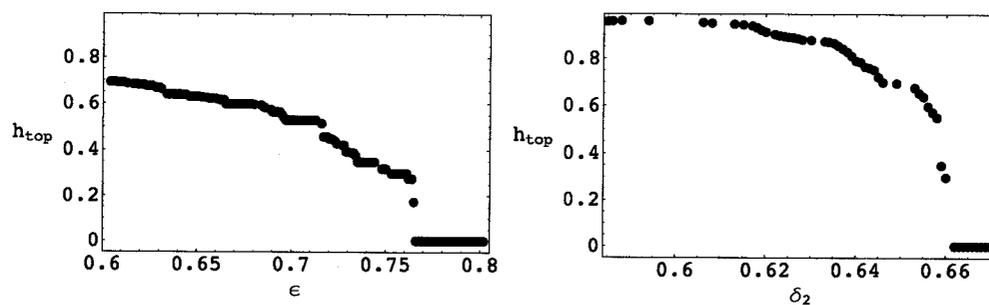


Figura 5.4: (a) Variação da entropia topológica para  $0.6 \leq \epsilon \leq 0.802$ , com  $\delta_2 = 0.66$ . (b) Variação da entropia topológica para  $0.584 \leq \delta_2 \leq 0.672$ , com  $\epsilon = 0.75$ .

$\Gamma_2 : y = y_{fix} - m(z - z_{fix})$ , conduziu à identificação de uma vasta região do espaço dos parâmetros, associada às aplicações unimodais e bimodais, onde o caos ocorre.

Analogamente ao apresentado relativamente ao modelo do Capítulo 2, representamos as curvas construídas a partir das sequências de *kneading*, no espaço dos parâmetros  $\Omega_1$ , correspondentes a órbitas periódicas do ponto crítico  $C$ . O diagrama da Figura 5.5 mostra como os períodos ( $n \leq 5$ ) estão organizados no espaço dos parâmetros considerado (cujos pares de valores  $(\delta_2, \epsilon)$  correspondem aplicações iteradas com a forma da curva logística). Da direita para a esquerda na Figura 5.5, as correspondentes órbitas de *kneading* são: período 1 -  $C^\infty$ , período 2 -  $(RC)^\infty$ , período 4 -  $(RLRC)^\infty$ , período 5 -  $(RLRRC)^\infty$ , período 3 -  $(RLC)^\infty$ , período 5 -  $(RLLRC)^\infty$  e período 4 -  $(RLLC)^\infty$  e período 5 -  $(RLLLC)^\infty$ . A ordenação das sequências de *kneading* no espaço dos parâmetros conduz à identificação de diferentes níveis da entropia topológica, que permanece constante em cada uma das curvas. A tabela seguinte mostra algumas sequências de *kneading* e a correspondente entropia topológica.

Sequências de kneading	Polinómio característico	Entropia topológica
$RC$	$1 - t$	0
$RLRC$	$-1 + t + t^2 - t^3$	0
$RLRRC$	$-1 + t - t^2 - t^3 + t^4$	0.414013...
$RLC$	$-1 - t + t^2$	0.481212...
$RLLRC$	$1 - t - t^2 - t^3 + t^4$	0.543535...
$RLLC$	$1 + t + t^2 - t^3$	0.609378...
$RLLLC$	$-1 - t - t^2 - t^3 + t^4$	0.656256...

Baseado no trabalho desenvolvido em [50] e por razões de clareza de exposição, estudámos separada e preliminarmente uma família de aplicações unimodais, associadas à secção de Poincaré da forma  $y = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ ), nomeadamente  $\Gamma_1 : y = 0.2$  (ver

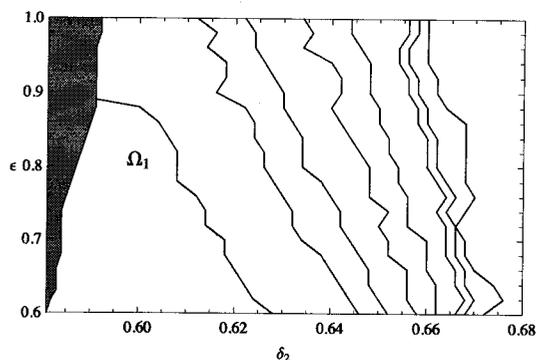


Figura 5.5: Órbitas periódicas ( $n \leq 5$ ) do ponto crítico  $C$ . Da direita para a esquerda, as seqüências de *kneading* são:  $C^\infty$ ,  $(RC)^\infty$ ,  $(RLRC)^\infty$ ,  $(RLRRC)^\infty$ ,  $(RLC)^\infty$ ,  $(RLLRC)^\infty$ ,  $(RLLC)^\infty$  e  $(RLLLC)^\infty$ . A região de cor cinza é parte integrante da região  $\Omega_2$  que será estudada adiante.

Figura 5.6), em termos da teoria da dinâmica simbólica (ver [47]). Como podemos

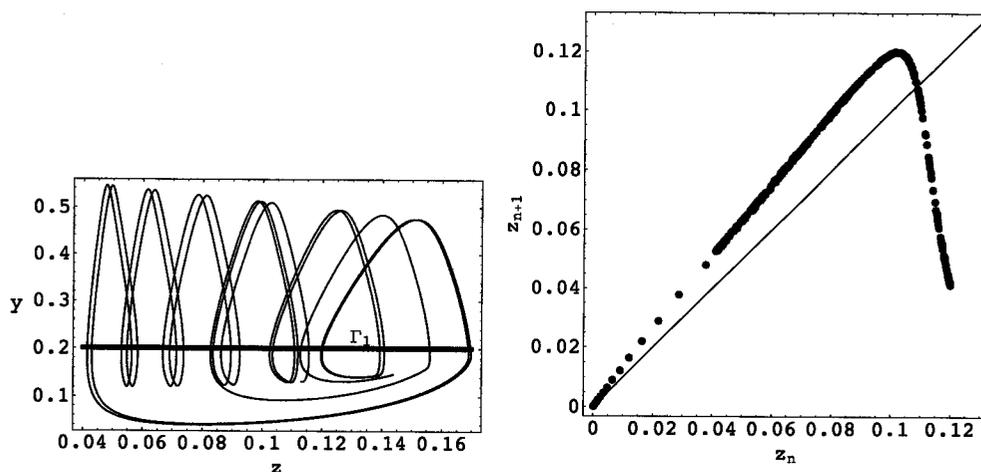


Figura 5.6: (a) Projecção da trajetória tridimensional no plano- $zy$  para  $\epsilon = 0.4$  e  $\delta_2 = 0.65$ . (b) A aplicação iterada para  $\epsilon = 0.4$  e  $\delta_2 = 0.65$ .

constatar no diagrama da Figura 5.7, o comportamento dinâmico destas aplicações é análogo ao apresentado pelas aplicações unimodais decorrentes da secção de Poincaré  $\Gamma_2 : y = y_{fix} - m(z - z_{fix})$ . É importante, no entanto, salientar que a utilização da

secção de Poincaré  $\Gamma_1$  nos possibilitou estudar um intervalo de variação do parâmetro  $\epsilon$  com maior amplitude.

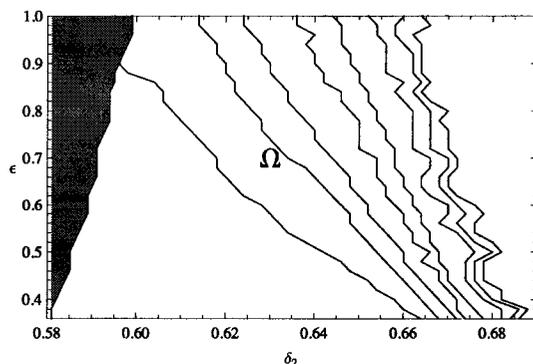


Figura 5.7: Órbitas periódicas ( $n \leq 5$ ) do ponto crítico  $C$  na região  $\Omega$ . Da direita para a esquerda, as seqüências de *kneading* são:  $C^\infty$ ,  $(RC)^\infty$ ,  $(RLRC)^\infty$ ,  $(RLRRC)^\infty$ ,  $(RLC)^\infty$ ,  $(RLLRC)^\infty$ ,  $(RLLC)^\infty$  e  $(RLLLC)^\infty$ . A região de cor cinza não corresponde a aplicações unimodais.

O estudo da secção de Poincaré  $\Gamma_2$  reveste-se de singular importância. O espaço dos parâmetros por ela revelado conduz ao aparecimento de uma família de aplicações bimodais, para valores menores de  $\delta_2$ , permitindo-nos estudar novas propriedades topológicas associadas à dinâmica do modelo ecológico.

### 5.2.2 Aplicações bimodais

No caso das aplicações unimodais apresentadas anteriormente, a entropia topológica é monótona com a variação de cada um dos parâmetros de controlo  $\delta_2$  e  $\epsilon$  e permite-nos apresentar uma classificação topológica completa destas aplicações. Como sabemos, a análise de aplicações bimodais pode permitir identificar situações de isentropia (aplicações com o mesmo valor da entropia topológica). Com o propósito de ilustrar a ocorrência de dinâmica isentrópica no modelo, vamos estudar um conjunto concreto de pontos aos quais corresponde o mesmo valor da entropia. Mais especificamente, o subconjunto do espaço

dos parâmetros  $\Omega_2$ , designado por  $\Lambda$  para o qual as aplicações bimodais,  $f$ , correspondentes têm número de crescimento 2, isto é,  $\Lambda$  corresponde ao conjunto de pontos tais que  $h_{top}(f) = \log 2$ . O exemplo seguinte ilustra o cálculo da entropia topológica de uma dessas aplicações.

**Exemplo 6** Consideremos a aplicação da Figura 5.2(b). As órbitas dos pontos críticos define o par de sequências  $(RMLB, LMLB)^\infty$ . Ordenando os pontos da órbita obtemos

$$y_1 < x_3 = y_3 < x_0 < x_2 = y_2 < y_0 < x_1$$

A matriz de transição correspondente é

$$\mathcal{M}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos polinómio característico é

$$p(\lambda) = \det(\mathcal{M}(f) - \lambda I) = (\lambda - 2)(-1 + \lambda)\lambda(1 + \lambda)^2.$$

O número de crescimento  $s(f)$  (o raio espectral da matriz  $\mathcal{M}(f)$ ) é 2. Por conseguinte, o valor da entropia topológica associada à aplicação da Figura 5.2(b) é

$$h_{top}(f) = \log s(f) = \log 2.$$

As tabelas seguintes mostram os pares de *kneading* e os polinómios característicos associados a cada uma das aplicações isentrópicas. É importante salientar que o factor comum  $(\lambda - 2)$  determina o raio espectral 2 e, portanto, a mesma entropia topológica  $h_{top}(f) = \log 2$ . Assim, todas as aplicações em estudo apresentam comportamento caótico e têm exactamente o mesmo valor da entropia.

$(\delta_2, \epsilon)$	Pares de <i>kneading</i> de $f$
(0.478, 0.86)	( <i>RLMB, LMLB</i> )
(0.4803, 0.901)	( <i>RMA, LMA</i> )
(0.481, 0.92)	( <i>RMMB, LMMB</i> )
(0.4844, 0.94)	( <i>RMMA, LMMA</i> )
(0.496, 0.84)	( <i>RMB, LMB</i> )
(0.501, 0.78)	( <i>RMRA, LMRA</i> )
(0.511, 0.81)	( <i>RLB, LLB</i> )
(0.521, 0.86)	( <i>RLMA, LLMA</i> )
(0.5285, 0.895)	( <i>RLMB, LLMB</i> )
(0.5315, 0.908)	( <i>RLA, LLA</i> )
(0.541, 0.98)	( <i>RLLB, LLLB</i> )

$(\delta_2, \epsilon)$	Polinómio característico de $\mathcal{M}(f)$
(0.478, 0.86)	$(\lambda - 2)(1 - \lambda)\lambda(1 + \lambda)^2$
(0.4803, 0.901)	$(\lambda - 2)\lambda(-1 + \lambda + \lambda^2)$
(0.481, 0.92)	$(\lambda - 2)\lambda(-1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3)$
(0.4844, 0.94)	$(\lambda - 2)\lambda(-1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3)$
(0.496, 0.84)	$(\lambda - 2)\lambda(-1 + \lambda + \lambda^2)$
(0.501, 0.78)	$(\lambda - 2)(1 - \lambda)\lambda(1 + \lambda)^2$
(0.511, 0.81)	$(\lambda - 2)\lambda(1 + \lambda + \lambda^2)$
(0.521, 0.86)	$(\lambda - 2)\lambda(1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3)$
(0.5285, 0.895)	$(\lambda - 2)\lambda(1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^3)$
(0.5315, 0.908)	$(\lambda - 2)\lambda(1 + \lambda + \lambda^2)$
(0.541, 0.98)	$(\lambda - 2)\lambda(-1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3)$

A Figura 5.8 apresenta a região  $\Omega_2$  à qual correspondem aplicações bimodais assim como o subconjunto,  $\Lambda$ , dos pontos do espaço dos parâmetros associados às aplicações isentrópicas em estudo ( $h_{top} = \log 2 = 0.69314\dots$ ).

### 5.3 Dinâmicas isentrópicas e segundo invariante topológico

Como referimos anteriormente, a cada ponto  $(\delta_2, \epsilon)$  representado na região  $\Omega_2$  da Figura 5.8 corresponde uma aplicação com entropia igual a  $\log 2$ . O raio espectral, por si só, já

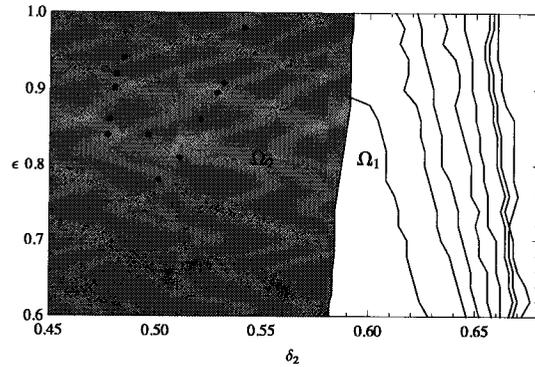


Figura 5.8: Representação dos pontos  $(\delta_2, \epsilon)$  na região  $\Omega_2$ . A cada ponto corresponde uma aplicação com entropia topológica  $h_{top} = \log 2 = 0.69314\dots$

não é suficiente para classificar topologicamente as aplicações introduzidas. Consequentemente, iremos utilizar o invariante  $r$ . Em geral, para uma família de aplicações  $m$ -modais ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ),  $m + 1$ -seccionalmente lineares, a entropia topológica não é um invariante completo para a conjugação topológica. Portanto, é necessário ter outros invariantes numéricos,  $s_i$ , os quais constituirão com a entropia topológica a sequência completa de invariantes topológicos  $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_m)$ , com  $s_1 = e^{h_{top}(f)}$ .

É importante recordar que a classificação topológica é extremamente importante. A cada par  $(\delta_2, \epsilon)$  de valores de parâmetros no modelo da cadeia alimentar corresponde um par de invariantes topológicos  $(s, r)$ . O parâmetro  $s$  identifica um regime caótico e o parâmetro  $r$  identifica um nível de complexidade dentro desse regime caótico. O próximo exemplo ilustra o cálculo dos invariantes topológicos  $s$  e  $r$ .

**Exemplo 7** Para o par de kneading  $(RMLB, LMLB)^\infty$  podemos aplicar o algoritmo anterior para calcular os invariantes topológicos associados a esta sequência. A matriz de

transição é

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

com  $\mathcal{M}v = \lambda_{\max}v$  a equação do vector próprio de Perron. Então

$$\lambda(c) = \sum_{i=1}^2 v_i = 0.416667... ,$$

$$\lambda(c^*) = \sum_{i=1}^6 v_i = 0.666667...$$

(com o vector  $v$  normalizado ao intervalo unitário). Assim, obtemos

$$s = 2 \text{ e } r = 0.166667...$$

A aplicação seccionalmente linear semi-conjugada associada ao par de kneading é exibida na Figura 5.9. Os valores dos parâmetros correspondentes à aplicação bimodal são  $\epsilon = 0.86$  e  $\delta_2 = 0.478$ .

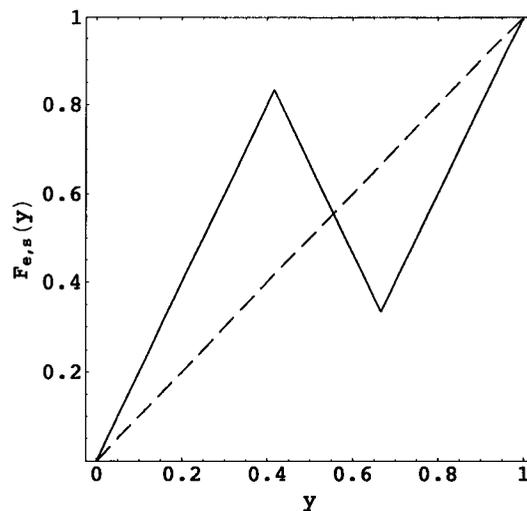


Figura 5.9: Aplicação seccionalmente linear para  $s = 2$  e  $r = 0.166667...$

A cada par de *kneading*  $(P, Q)$  corresponde um e um só valor de  $r$ . Apresentamos na Figura 5.10(a) e na Figura 5.10(b) alguns resultados numéricos da variação do invariante topológico  $r$  com cada um dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta_2$ .

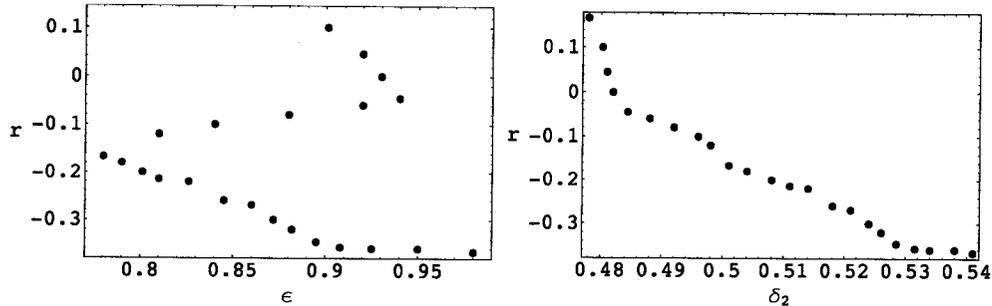


Figura 5.10: (a) Variação do invariante topológico  $r$  com  $\epsilon$ . (b) Variação do invariante topológico  $r$  com  $\delta_2$ .

Com o invariante  $r$  concluímos a classificação topológica das aplicações identificando diferentes níveis de complexidade para o mesmo estado caótico.

Neste capítulo apresentámos algumas contribuições para o estudo do modelo de Rosenzweig-MacArthur para cadeias alimentares tritróficas. Este modelo, extremamente relevante para a ecologia, levanta uma série de questões interessantes relacionadas com a análise do comportamento caótico, em termos da teoria da dinâmica simbólica. De facto, uma abordagem rigorosa das aplicações iteradas, que incorporam as propriedades dinâmicas do sistema, torna-se possível com o cálculo dos dois invariantes topológicos,  $s$  e  $r$ , que permitem classificar diferentes cenários caóticos no espaço- $\epsilon\delta_2$  dos parâmetros.

No que à entropia topológica diz respeito, a nossa análise revelou que quando a taxa de crescimento máxima *per capita* do super-predador e a taxa de crescimento máxima *per capita* do predador se aproximam (o que significa um aumento no valor de  $\epsilon$ ) a entropia

topológica decresce. De forma análoga, quando a taxa de mortalidade natural *per capita* do super-predador se aproxima da sua taxa de reprodução (o que significa um aumento no valor de  $\delta_2$ ) a entropia topológica também decresce. Por conseguinte, valores elevados destes parâmetros de controlo tendem a estabilizar a cadeia alimentar. Considerando o caso unimodal, foi possível introduzir a ordem da dinâmica no espaço dos parâmetros através da representação das curvas isentrópicas (correspondentes às órbitas periódicas do ponto crítico  $c$ ) na região  $\Omega_1$ .

O invariante topológico  $r$ , que surgiu com o estudo das aplicações bimodais, permitiu-nos distinguir dinâmicas isentrópicas. É interessante notar que um aumento no parâmetro de controlo  $\delta_2$  significa um decréscimo no invariante numérico  $r$ . No contexto dos modelos ecológicos, qual o significado deste invariante topológico e o que representa? Esta é uma questão pertinente para a qual não temos ainda resposta, mas esperamos obtê-la numa investigação futura.





## Capítulo 6

# Caos e crises num modelo de predação com cooperação<sup>5</sup>

As múltiplas interacções entre espécies constituem uma importante característica da complexidade nos ecossistemas. Os sistemas predador-presa, modelados por equações diferenciais não-lineares, manifestam um comportamento dinâmico muito rico, podendo apresentar desde órbitas periódicas [56, 57] até atractores estranhos [58, 50, 51, 52, 59, 53, 48, 49]. Outros tipos de interacções ecológicas, as quais têm recebido comparativamente uma menor atenção no contexto dos ecossistemas complexos [57], são as que envolvem *feedback* positivo na reprodução de espécies (que amplifica pequenas flutuações e portanto favorece alterações do sistema), tal como acontece nos sistemas com cooperação.

Tanto quanto nos é permitido conhecer, existem poucas abordagens teóricas dedicadas ao estudo da dinâmica populacional relativa à predação com cooperação. Na literatura, define-se cooperação como a interacção entre dois ou mais indivíduos tendo em vista a realização de um objectivo comum [60]. A cooperação é exercida na sua plenitude quando são satisfeitas duas condições fundamentais: os benefícios da acção comum devem ser

---

<sup>5</sup>A análise que se apresenta neste capítulo resultou na submissão para publicação do artigo científico [55] com o título *Chaos and crises in a model for cooperative hunting: a symbolic dynamics approach*. O trabalho foi efectuado inteiramente em colaboração com o Instituto de Investigação Biomédica de Barcelona.



Figura 6.1: Algumas espécies de aves, mamíferos, peixes ou artrópodes usam a cooperação intra-específica durante o processo de predação, onde alguns dos indivíduos da mesma espécie cooperam para caçar as presas. Estudos experimentais indicam que peixes da espécie *Caranx ignobilis*, exibidos nesta figura, exercem a designada predação com cooperação [61]. A fotografia foi gentilmente cedida por Keoki Stender ([www.marinelifephotography.com](http://www.marinelifephotography.com)).

partilhados mais cedo ou mais tarde pelos indivíduos participantes e devem exceder o esforço da acção mutuamente benéfica. Esta estratégia comportamental, que tem sido descrita em algumas espécies de aves, mamíferos, peixes e aracnídeos [61, 62], revela que indivíduos da mesma espécie cooperam entre si para capturar as presas (ver Figura 6.1). A dinâmica da predação com cooperação e o efeito do grau de cooperação intra-específica entre predadores não estão totalmente compreendidos, uma vez que não existe uma teoria consistente e devidamente fundamentada relativamente a estes sistemas [61]. Neste contexto, algumas questões interessantes surgem naturalmente: qual é o efeito do coeficiente de cooperação na predação em atractores resultantes da dinâmica dos modelos destas cadeias alimentares? Como é que as estratégias comportamentais, durante o processo de predação, influenciam a chamada crise caótica e sugerem causar a extinção dos predadores?

Como foi estudado por McCann e Yodzis [63], a presença de comportamento caótico transiente em modelos de cadeias alimentares sem predação com cooperação, descritos

por equações diferenciais ordinárias autónomas, pode proporcionar uma compreensão mais profunda de como o desaparecimento súbito e inesperado de populações pode ocorrer, sem a necessidade de considerar variações espaciais ou temporais e factores externos. A característica central destes sistemas é a ocorrência de caos transiente, isto é, as variáveis dinâmicas comportam-se caoticamente durante um determinado período de tempo e depois alteram subitamente o seu comportamento ficando restringidas a um ponto fixo, ou a outro comportamento regular (incluindo a densidade populacional nula). Para um ecossistema que exiba caos transiente a implicação pode ser, de certo modo, desastrosa na medida em que a densidade populacional de uma determinada espécie pode apresentar comportamento caótico durante um intervalo de tempo e decrescer para zero num intervalo de tempo relativamente curto. Foi demonstrado por McCann e Yodzis [63] que tal fenómeno catastrófico de caos transiente, o qual é responsável pela extinção das espécies em ecologia, pode de facto ocorrer num modelo de cadeias alimentares com três espécies que incorpora premissas biologicamente significativas sobre a interacção entre espécies.

Tal como descrito por Dhamala e Lai [64] e por Shulenburger *et al.* [65], um princípio fundamental está subjacente aos estudos teóricos acerca de caos transiente no âmbito dos ecossistemas complexos: *se a extinção de espécies é causada pelo caos transiente, então é possível para o ser humano intervir externamente aplicando pequenas perturbações de modo a evitar que as espécies se extingam efectivamente.* Neste contexto, Dhamala e Lai propuseram um esquema para controlar o caos transiente aplicando perturbações pequenas e ocasionais ao sistema [64]. Através deste procedimento, o caos transiente pode ser forçado a converter-se em caos sustentado ou em movimentos periódicos. Assim, a população das espécies ameaçadas pode ser preservada, e além disso, a densidade populacional, embora

ainda tenha um comportamento caótico, nunca tenderá para zero. Neste sentido, as estratégias de controlo podem ser úteis para resolver problemas ambientais relacionados com a extinção de espécies [65].

Neste capítulo, construímos um novo modelo que resulta da extensão do sistema de McCann e Yodzis para ecossistemas, com o propósito de investigar a dinâmica de populações onde a predação é exercida com cooperação. Este modelo descreve a dinâmica de três espécies numa cadeia alimentar envolvendo um predador, uma presa e um recurso trófico. O novo modelo considera que uma dada fracção,  $\sigma$ , dos predadores cooperam na predação da presa, enquanto que para a restante população,  $1 - \sigma$ , a predação é exercida sem cooperação. O enorme interesse, eminentemente prático e real, destes modelos reside no facto de que os parâmetros envolvidos têm um significado biológico relevante e são deduzidos a partir da análise bioenergética do sistema [64, 66]. Atendendo a que a estratégia de predação com cooperação tem sido descrita para diversos grupos taxonómicos [61, 62], a nossa análise pode ter implicações significativas na compreensão da dinâmica de espécies em ecossistemas naturais, onde a predação envolve cooperação intra-específica. Mais precisamente, pode constituir uma base teórica para a interpretação da dependência dessa mesma dinâmica, relativamente aos parâmetros, em dois cenários: preservação de espécies e extinção de espécies. Em particular, estudamos em termos da teoria da dinâmica simbólica o novo modelo de predação com cooperação através da análise de uma família de aplicações do tipo logístico associada ao sistema. A ordenação das sequências simbólicas num espaço dos parâmetros bidimensional permite-nos caracterizar a variação da entropia topológica e identificar o caminho através do qual o caos transiente é criado - a crise. Neste sentido, é construída uma linha, no espaço dos parâmetros, correspondente à fronteira en-

tre duas regiões fundamentais: a região antes da crise - que corresponde à preservação das espécies - e a região depois da crise - que corresponde à extinção das espécies. O método de controlo proposto por Dhamala e Lai em [64] utiliza a informação obtida através de uma aplicação iterada construída a partir dos mínimos locais de uma série temporal experimental. Neste capítulo introduzimos novos desenvolvimentos acerca desta estratégia de controlo, agora no contexto dos sistemas de predação com cooperação. Em particular, adoptamos um procedimento com o objectivo de identificar claramente duas regiões alvo, separadas por uma zona de escape, e concretizamos uma análise profunda dos pontos alvo associados às trajectórias com maior tempo de vida.

## 6.1 Descrição do modelo

Nesta secção construímos e analisamos então o novo modelo para cadeias alimentares tritróficas que descreve o comportamento dinâmico de um recurso trófico,  $R$ , uma presa (ou consumidor),  $C$ , e uma população de predadores,  $P$ , com cooperação intra-específica durante o processo de predação. Usando o modelo de McCann e Yodzis [63] (ver também [66]), introduzimos uma interacção não-linear entre os predadores com o objectivo de modelar a predação com cooperação. O modelo resultante é dado pelo seguinte conjunto de equações diferenciais não-lineares:

$$\frac{dR}{dt} = R \left( 1 - \frac{R}{K} \right) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0}, \quad (6.1)$$

$$\frac{dC}{dt} = x_c C \left( \frac{y_c R}{R + R_0} - 1 \right) - \psi(P) \frac{y_p C}{C + C_0}, \quad (6.2)$$

$$\frac{dP}{dt} = \psi(P) \frac{y_p C}{C + C_0} - x_p P. \quad (6.3)$$

Seguindo uma abordagem teoricamente análoga à estabelecida em [67], definimos a reprodução cinética de predadores como

$$\psi(P) = x_p(1 - \sigma)P + x_i\sigma P^2. \quad (6.4)$$

Note-se que a interacção introduzida,  $\psi(P)$ , inclui um termo não-linear na reprodução associada à cooperação (i.e., autocatálise). Tal termo não-linear traduz o crescimento da densidade populacional dependente da reprodução de predadores que exercem cooperação intra-específica. Observe-se ainda que os termos associados ao consumo de presas, nas Equações (6.2) e (6.3), incluem esta cinética autocatalítica. Como foi anteriormente mencionado, o nosso modelo considera que os predadores podem cooperar durante o processo de predação e durante o consumo. Com o propósito de simular um cenário mais realista, consideramos o caso em que alguns indivíduos cooperaram durante o processo de predação e outros não. Introduzimos o parâmetro  $\sigma \in [0, 1]$ , o qual indica a fracção da população de predadores que realizam predação com cooperação (isto é, uma medida do grau de cooperação na população de predadores). O parâmetro  $x_i$  diz respeito à taxa de reprodução associada à cooperação intra-específica de predadores. Para analisar, de forma clara, o efeito da dependência da densidade populacional nos predadores, associada ao termo não-linear em (6.4), fixamos  $x_i = x_p$ . Assumimos que os outros indivíduos (i.e., a fracção  $1 - \sigma$  da população) não cooperam entre si e que se reproduzem a uma razão constante  $x_p$ . Esta abordagem permite-nos também analisar os dois tipos de comportamento (i.e., predação com e sem cooperação) em termos do grau de cooperação do mesmo grupo de indivíduos, assumindo que as presas sujeitas a predação com cooperação não são consumidas por predadores não-cooperativos. Isto é, não consideramos o indivíduos que não investem em tarefas de cooperação, ou seja, caçam mas apenas para ter acesso aos benefícios.

Note-se que o modelo de McCann e Yodzis [63] (ver também [64]) resulta de um caso particular do nosso modelo (considerando  $\sigma = 0$  i.e., predação sem cooperação). O modelo não considera a estrutura etária, variações individuais, correlações espaciais ou estocacidade. No caso em que  $0 < \sigma \leq 1$ , que corresponde a uma das abordagens mais simples à dinâmica populacional da predação com cooperação, não é considerada a selecção dentro da mesma família. Fixamos os parâmetros

$$x_C = 0.4, y_C = 2.009, x_p = 0.08 \text{ e } y_p = 2.876.$$

Por conseguinte, estudamos o caso em que os consumidores e os predadores podem ser ambos invertebrados ou vertebrados de sangue frio (tal como os anfíbios ou os peixes), com um razoável índice de massa corporal referente à razão do predador/presa (=consumidor) [63]. Estes valores dos parâmetros também são ecologicamente significativos para o modelo de predação com cooperação uma vez que, tal como foi mencionado anteriormente, existem evidências experimentais desta estratégia de predação em espécies deste grupo taxonómico. De acordo com o estabelecido em [63, 64] consideramos  $R_0 = 0.16129$  e  $C_0 = 0.5$  (salvo casos devidamente assinalados). As condições iniciais utilizadas em todas as análises efectuadas para  $\sigma \neq 0$  são  $R(0) = 0.55$ ,  $C(0) = 0.35$  e  $P(0) = 0.8$ .

No modelo original de McCann-Yodzis (com  $\sigma = 0$ ), e na ausência do predador, a dinâmica do recurso trófico e do consumidor, ou é traduzida por um ponto de equilíbrio estável ou por um ciclo limite [63]. Na presença do predador, o sistema pode ser interpretado como dois osciladores acoplados, o que pode resultar numa maior complexidade no comportamento dinâmico do sistema dando origem a caos, tal como é exibido em [68]. O atractor estranho que envolve a coexistência das três espécies, é ilustrado no espaço de fases  $(R(t), C(t), P(t))$  (Figura 6.2(a)). Na realidade este atractor coexiste com um ciclo

limite localizado no plano  $(R(t), C(t), 0)$ , onde os predadores se extinguem. Assim, dependendo das condições iniciais, o sistema evolui assintoticamente para o atractor caótico ou para o ciclo limite com  $P = 0$ . Um parâmetro central no nosso estudo é  $K$ , que representa a chamada capacidade de carga do recurso trófico. Num contexto ecológico, a capacidade de carga dos recursos traduz a população máxima dos recursos que pode ser suportada indefinidamente por um dado habitat sem prejudicar permanentemente a produtividade do ecossistema. Quando  $K$  ultrapassa um determinado valor crítico,  $K_c$ , ocorre um acontecimento dinâmico designado por *crise*: a população de predadores desaparece, para quase todas as condições iniciais [63, 64]. Tal crise torna o ciclo limite globalmente estável no plano  $(R(t), C(t), 0)$ . Assim, uma dada trajectória representativa da população de predadores comporta-se de forma caótica durante um intervalo de tempo limitado e evolui para o ciclo limite dando origem à extinção dos predadores. Este surpreendente fenómeno dinâmico designa-se por *caos transiente* [63, 64]. Tal como é ilustrado na Figura 6.2(b) e na Figura 6.2(c) (com  $K > K_c$ ), a população  $P$  varia de forma caótica tendendo depois para zero, sem apresentar nenhum sinal prévio em termos de comportamento dinâmico. Neste caso, a extinção dos predadores não é desencadeada por qualquer influência externa, em contraste com o que acontece em alguns sistemas ecológicos onde a população desaparece, sendo a sua extinção genericamente atribuída a factores extrínsecos. Se investigarmos o papel do grau de cooperação na predação,  $\sigma$ , na dinâmica assintótica, para diversos valores da capacidade de carga do recurso trófico,  $K$ , encontramos uma ampla região no espaço dos parâmetros (Figura 6.3(A), região cinzenta) envolvendo a extinção de predadores e a sobrevivência do recurso trófico e dos consumidores. No interior desta região, a coexistência do recurso trófico e das presas pode ser atingida tanto através de

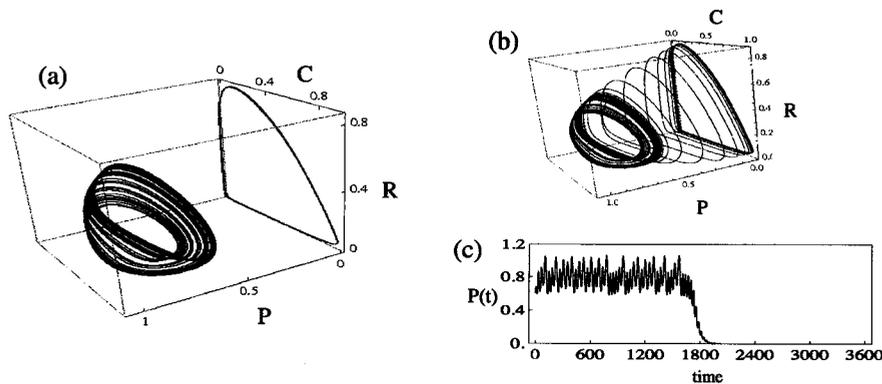


Figura 6.2: Dinâmica do modelo original de McCann-Yodzis [66], a qual é obtida a partir das Equações (6.1)- (6.3) usando  $\sigma = 0$ . (a) Cenário de coexistência entre as espécies: predador, presa e recurso trófico. Antes da crise existem dois comportamentos assintóticos no espaço de fases (os quais dependem das condições iniciais): o atrator estranho onde todas as espécies coexistem e o ciclo limite que envolve a extinção do predador. (b) Após a crise a única dinâmica assintótica corresponde ao atrator periódico no plano  $(R, C, 0)$ . (c) Caos transiente conduzindo à extinção do predador para  $K = 1.02 > K_c$ .

um ponto fixo como de uma órbita periódica (estes resultados não são mostrados). A região a branco dentro do espaço dos parâmetros  $(K, \sigma)$  (ver Figuras. 6.3(A) e 6.3(B) conduz à coexistência de todas as espécies, tanto no caso de um ponto fixo, como de uma órbita periódica estável ou de um atrator estranho, tal como é exibido na Figura 6.3(a). Na verdade, no interior desta região, e para  $\sigma > 0$ , o atrator estranho pode também coexistir com o ciclo limite do recurso trófico e dos consumidores. Uma análise detalhada da primeira linha crítica no plano  $(K, \sigma)$  do lado esquerdo da fronteira entre as regiões cinzenta e branca, na Figura 6.3(A), mostra que a extinção dos predadores não é atingida *via* crise caótica e caos transiente (ver por exemplo as Figuras 6.3(b) e 6.3(c). Este cenário pode corresponder a um meio ambiente com uma baixa capacidade de carga e, por isso, incapaz de sustentar as três espécies. Por exemplo, para  $K = 0.73$ , um valor de  $\sigma \geq 0.35$  conduz à extinção dos predadores. Tal como é exibido no espaço dos parâmetros da Figura

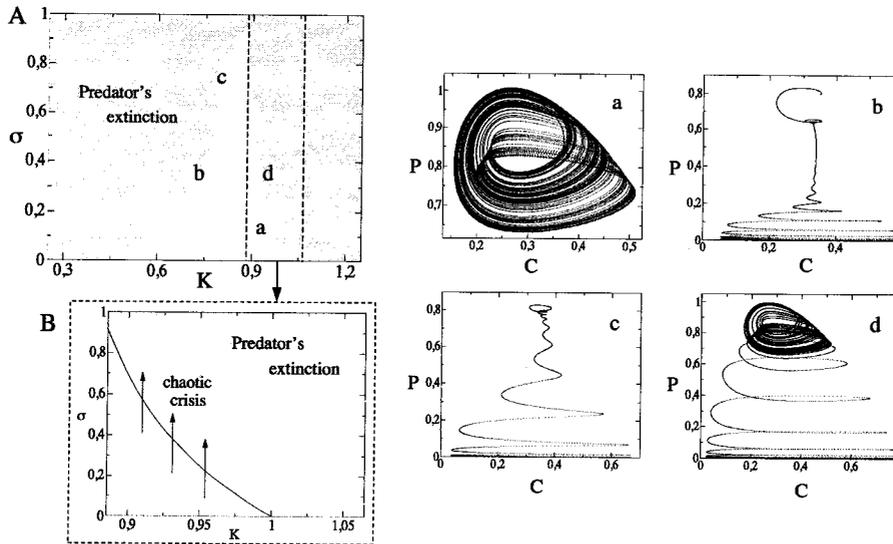


Figura 6.3: (A) Diagrama de fases mostrando a extinção dos predadores no espaço dos parâmetros  $(K, \sigma)$ . A região cinzenta corresponde aos pares  $(K, \sigma)$  associados à extinção dos predadores (extinção essa que é assumida quando  $P(t) \leq 10^{-10}$ ) e à sobrevivência do recurso trófico e da população de consumidores em  $t = 10^5$ . (B) Ampliação da região no espaço dos parâmetros  $(K, \sigma)$  onde existe crise caótica (as regiões a branco em A e B correspondem à sobrevivência das três espécies). Note-se que à medida que o grau de cooperação,  $\sigma$ , aumenta, a crise caótica ocorre para valores menores de  $K$ . (Direita) Dinâmica projectada no plano de fases  $(C, P)$ , correspondente aos valores dos parâmetros indicados com: (a) atractor estranho para  $K = 0.95$  e  $\sigma = 0.16$ ; (b) e (c) extinção dos predadores para  $K = 0.73$  e  $\sigma = 0.35$  e para  $K = 0.81$  e  $\sigma = 0.78$ , respectivamente; e (d) crise caótica para  $K = 0.935$  e  $\sigma = 0.37$ .

6.3(A) e 6.3(B), um aumento do valor de  $\sigma$ , para um determinado  $K$  fixo, causa a extinção dos predadores.

Neste estudo, também encontrámos uma outra linha crítica para valores maiores de  $K$ , para a qual a extinção dos predadores é atingida *via* caos transiente, tal como é ilustrado na Figura 6.3d, utilizando  $K = 0.935$  e  $\sigma = 0.37$ . Calculámos os diagramas de bifurcação usando  $K$  como parâmetro de controlo para vários valores de  $\sigma$  fixos e detectámos que esta segunda linha crítica corresponde a crises caóticas (estes resultados não são mostrados).

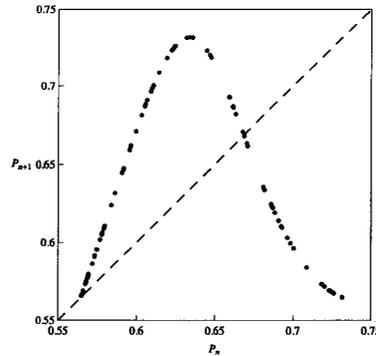


Figura 6.4: A aplicação iterada construída a partir dos sucessivos mínimos locais da variável  $P$  para predação sem cooperação ( $\sigma = 0$  e  $K = 0.9995$ ).

Para esta fronteira mostramos que os valores de  $K_c$  decrescem sistematicamente à medida que  $\sigma$  aumenta, indicando que o aumento da cooperação na predação, perto dos valores críticos da capacidade de carga propensiam a extinção dos predadores (ver a ampliação na Figura 6.3B para uma clara identificação desta segunda linha crítica).

## 6.2 Dinâmica caótica

Com o propósito de compreender as principais características das trajetórias tridimensionais, podemos construir aplicações unidimensionais registrando os sucessivos mínimos relativos (locais) da solução numérica  $P(t)$ , a qual representa a densidade populacional dos predadores. Estas aplicações iteradas consistem nos pares  $(P_n, P_{n+1})$ , onde  $P_n$  designa o  $n$ -ésimo mínimo local. Tal como é ilustrado na Figura 6.4, os dados da série temporal caótica parecem dispor-se segundo uma curva com a forma da aplicação logística.

Como sabemos, estas aplicações iteradas têm um comportamento dinâmico análogo às aplicações unimodais. Com o objectivo de estudar a dinâmica das Equações (6.1)-(6.3) para diferentes valores dos parâmetros de controlo, exibimos os diagramas de bifurcação

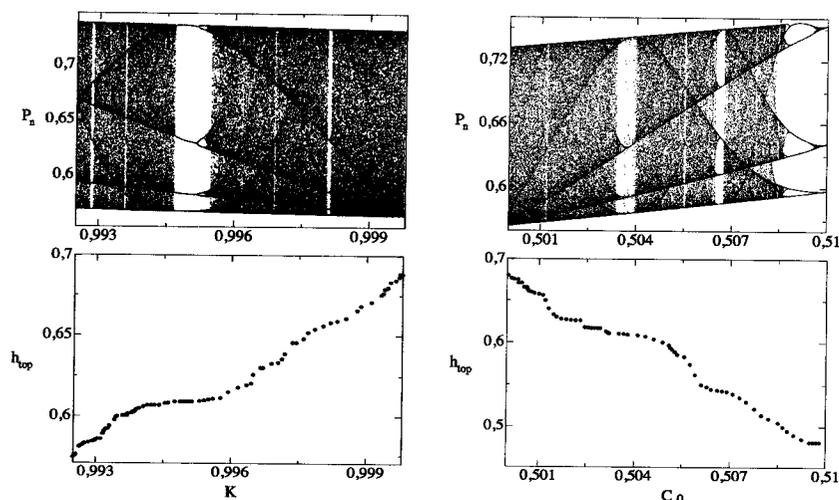


Figura 6.5: Diagramas de bifurcação (em cima) calculados através dos sucessivos mínimos locais,  $P_n$ , de uma série temporal  $P(t)$  para  $\sigma = 0$ . No diagrama da esquerda  $C_0 = 0.5$  e  $K \in [0.9925, 0.9998]$ ; no diagrama da direita  $K = 0.9995$  e  $C_0 \in [0.5, 0.51]$ . As figuras em baixo ilustram a variação da entropia topológica,  $h_{top}$ , para os mesmos valores dos parâmetros utilizados nos diagramas de bifurcação.

nas Figuras 6.5 e 6.6. A dinâmica, com a variação de  $K$  e  $C_0$ , sem considerar a predação com cooperação ( $\sigma = 0$ ) são ilustrados na Figura 6.5, onde surgem janelas periódicas e caos. A análise da dinâmica considerando um pequeno valor do grau de cooperação também é exibido na Figura 6.6. Para este último caso, a dinâmica pode também ser governada por atratores caóticos.

Atendendo às considerações feitas na subsecção 1.1.1 do Capítulo 1, discutimos o seguinte exemplo que ilustra o cálculo da entropia topológica para uma aplicação bimodal, usando a teoria de *kneading*.

**Exemplo 8** Consideremos a aplicação da Figura 6.4, a qual corresponde ao modelo de McCann-Yodzis (pois  $\sigma = 0$ ). A órbita do ponto crítico define a sequência de *kneading*, de período 9, *RLLLLLRRRC*. As sequências simbólicas que correspondem às órbitas dos

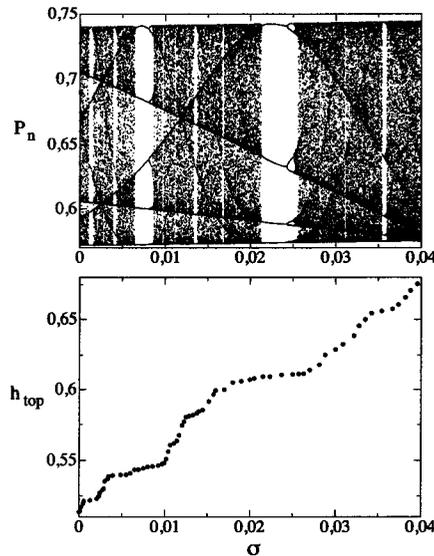


Figura 6.6: (a) O mesmo que na figura anterior usando um grau de cooperação na predação,  $0 \leq \sigma \leq 0.04$ , como parâmetro de controlo e fixando  $K = 0.99$ .

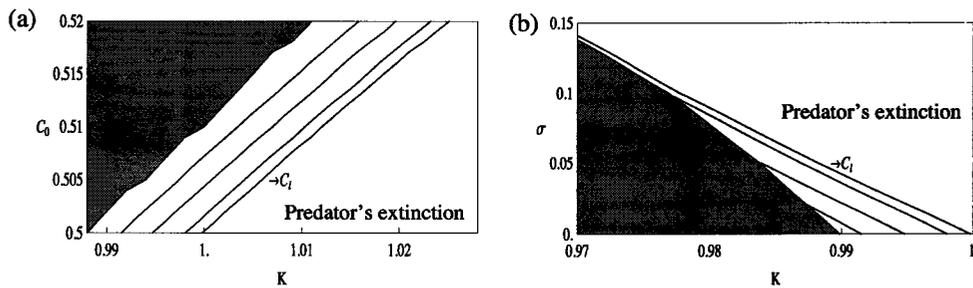


Figura 6.7: (a) Órbitas periódicas ( $n \leq 5$ ) do ponto crítico  $C$  no espaço dos parâmetros  $(K, C_0)$  para  $\sigma = 0$ . Da direita para a esquerda, as sequências de *kneading* são:  $R(L)^\infty$  (esta sequência simbólica correspondente à *linha crítica*, designada por  $C_l$ ), período-5 -  $(RLLLC)^\infty$ , período-4 -  $(RLLC)^\infty$  e período-5 -  $(RLLRC)^\infty$ . Os valores dos parâmetros na região cinzenta não correspondem a aplicações unimodais, não sendo, neste momento, objecto do nosso estudo. (b) O mesmo que em (a) mas para a região dos parâmetros  $(K, \sigma)$ .

pontos  $c^+$  e  $c^-$  são

$$c^+ \longrightarrow R(RLLLLRRR)^\infty$$

$$c^- \longrightarrow L(RLLLLRRR)^\infty.$$

Note-se que o bloco  $RLLLLRRR$  corresponde à sequência  $RLLLLRRC$  onde o símbolo  $C$  é substituído por  $R$  devido à paridade do bloco  $RLLLLRRR$  ser ímpar. As coordenadas invariantes são

$$\begin{aligned} \theta_{c^+}(t) &= R - Rt + Lt^2 + Lt^3 + Lt^4 + Lt^5 + Lt^6 + Rt^7 - \\ &\quad - Rt^8 + Rt^9 - Rt^{10} + Lt^{11} + \dots \\ &= R - t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\ &\quad + Rt^7 - Rt^8) - t^{10}(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - \\ &\quad - Lt^5 - Rt^6 + Rt^7 - Rt^8) - \dots \\ &= R - t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\ &\quad + Rt^7 - Rt^8)(1 + t^9 + t^{18} + \dots) \\ &= R - t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\ &\quad + Rt^7 - Rt^8) / (1 - t^9) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\theta_{c^-}(t) &= L + Rt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Lt^6 - Rt^7 + \\
&\quad + Rt^8 - Rt^9 + Rt^{10} - Lt^{11} - \dots \\
&= L + t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\
&\quad + Rt^7 - Rt^8) + t^{10}(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - \\
&\quad - Lt^5 - Rt^6 + Rt^7 - Rt^8) + \dots \\
&= L + t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\
&\quad + Rt^7 - Rt^8)(1 + t^9 + t^{18} + \dots) \\
&= L + t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\
&\quad + Rt^7 - Rt^8) / (1 - t^9).
\end{aligned}$$

O incremento de kneading é dado por

$$\begin{aligned}
v(t) &= \theta_{c^+}(t) - \theta_{c^-}(t) \\
&= R - t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\
&\quad + Rt^7 - Rt^8) / (1 - t^9) - \\
&\quad - (L + t(R - Lt - Lt^2 - Lt^3 - Lt^4 - Lt^5 - Rt^6 + \\
&\quad + Rt^7 - Rt^8) / (1 - t^9)) \\
&= \left( -1 + \frac{2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + 2t^6}{1 - t^9} \right) L + \\
&\quad + \left( 1 + \frac{-2t + 2t^7 - 2t^8 + 2t^9}{1 - t^9} \right) R.
\end{aligned}$$

A matriz de kneading,  $N(t)$ , é tal que

$$[N(t)]^T = \begin{bmatrix} -1 + \frac{2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + 2t^6}{1 - t^9} \\ 1 + \frac{-2t + 2t^7 - 2t^8 + 2t^9}{1 - t^9} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que  $D(t) = \frac{D_1(t)}{1-t} = -\frac{D_2(t)}{1+t}$ , obtemos

$$D(t) = \frac{1 - 2t + 2t^7 - 2t^8 + t^9}{(1-t)(1-t^9)}.$$

Por conseguinte,  $t^* = 0.505229\dots$  e a entropia topológica é dada por

$$h_{top}(f) = \log\left(\frac{1}{t^*}\right) = 0.682741\dots$$

A Figura 6.5 (gráficos em baixo) mostra a variação da entropia topológica,  $h_{top}$ , usando  $K$  e  $C_0$  como parâmetros de controlo do modelo sem cooperação na predação ( $\sigma = 0$ ). A entropia topológica é crescente com  $K$  e decrescente com  $C_0$ , sendo sempre positiva, o que denuncia o comportamento caótico do modelo. Este invariante topológico também é calculado considerando a predação com cooperação. Tal como é ilustrado na Figura 6.6, a entropia topológica é igualmente positiva e cresce à medida que  $\sigma$  aumenta.

O estudo das seqüências de *kneading* tornou possível identificar, no espaço dos parâmetros  $(K, C_0)$  e  $(K, \sigma)$ :

- (i) órbitas periódicas do ponto crítico  $C$ ;
- (ii) a linha crítica,  $C_l$ , que é a fronteira entre duas regiões cruciais: a região antes da crise ( $K < K_c$ ) - correspondente à preservação dos predadores e a região depois da crise ( $K > K_c$ ) - correspondente ao desaparecimento dos predadores (ver Figura 6.7).

O diagrama da Figura 6.7(a), mostra como os períodos ( $n \leq 5$ ) estão organizados no espaço dos parâmetros  $(K, C_0)$  assim como a *linha crítica*. Da direita para a esquerda na Figura 6.7, temos as seqüências de *kneading*:  $R(L)^\infty$  (esta seqüência simbólica corresponde ao *full shift*, o qual ocorre na linha crítica designada por  $C_l$ ), período-5 -  $(RLLLC)^\infty$ , período-4 -  $(RLLC)^\infty$  e período-5 -  $(RLLRC)^\infty$ . O esquema seguinte representa algumas

sequências de *kneading* e indica a correspondente entropia topológica.

Sequências de kneading	Polinómio característico	Entropia topológica
<i>RLLRC</i>	$1 - t - t^2 - t^3 + t^4$	0.543535...
<i>RLLC</i>	$1 + t + t^2 - t^3$	0.609378...
<i>RLLLC</i>	$-1 - t - t^2 - t^3 + t^4$	0.656256...

Realizámos a mesma análise para  $\sigma > 0$  e representámos os períodos das órbitas no espaço dos parâmetros  $(K, \sigma)$  correspondentes a aplicações unimodais. O cálculo destes períodos é efectuado no intervalo  $0 \leq \sigma \leq 0.15$ , uma vez que a nossa análise se restringe às aplicações unimodais e estas apenas surgem nesta região. É interessante constatar que, neste caso, tal como para  $\sigma = 0$ , também foi identificada a linha crítica,  $C_l$ , assim como exactamente os mesmos períodos, que antecedem a crise (ver Figura 6.7(b)). Os períodos são dados (também da direita para a esquerda) por  $R(L)^\infty$ , período-5 -  $(RLLLC)^\infty$ , período-4 -  $(RLLC)^\infty$  e período-5 -  $(RLLRC)^\infty$ . Contudo, a região ocupada por estes períodos no espaço dos parâmetros  $(K, \sigma)$  é menor. Note-se que a linha crítica coincide exactamente com a linha crítica representada na Figura 6.3(B).

### 6.3 Crise e controlo do comportamento caótico na predação com cooperação

Tal como foi referido anteriormente, a população de predadores pode extinguir-se *via* caos transiente. Neste contexto particular, uma questão surge naturalmente: será possível prevenir a extinção dos predadores? Uma possível resposta consiste em diminuir a capacidade de carga do recurso trófico,  $K$ , do meio ambiente. No entanto, de um ponto de vista ecológico, tal poderá não ser uma estratégia viável atendendo ao tempo necessário para o fazer depois de detectar que a população de predadores está em perigo. Todavia,

é possível evitar o caos transiente actuando directamente numa dada variável dinâmica. Assim, Dhamala e Lai [64], introduziram um método prático para manter a dinâmica de caos transiente extraindo informação de uma aplicação iterada. Fazendo uso de pequenos e ocasionais ajustamentos às populações locais em instantes apropriados, o caos transiente pode ser mantido [64].

No que se segue, e por clareza de exposição, descrevemos passo a passo o método de controlo para manter o caos no nosso modelo, o qual partilha determinadas características com o método de Dhamala e Lai [64]. Em particular, contruímos a aplicação de retorno que consiste em pares  $(P_n, P_{n+1})$  obtidos a partir dos sucessivos mínimos locais da série temporal  $P(t)$ . Calculando as pré-imagens de um ponto fixo, identificamos duas *regiões alvo* e uma *zona de escape*. Os pontos alvo obtidos conduzem a trajectórias que podem permanecer no atractor caótico durante um longo período de tempo. Perturbando a trajectória tridimensional da solução quando  $P_n$  excede um valor preciso (isto é, quando  $P_n$  “cai” na zona de escape) para o ponto mais próximo no interior da região alvo, o caos transiente pode ser efectivamente mantido.

### 6.3.1 Descrição do método de controlo

- (i) Consideramos o sistema autónomo tridimensional dado pelas Equações (6.1)-(6.3), o qual tem uma solução numérica que consiste em pontos da forma  $(R(t), C(t), P(t))$ . Na nossa análise tomamos  $\sigma$  como parâmetro de controlo (o grau de cooperação na predação).
- (ii) Considerando  $\sigma_c$  o valor crítico induzido pelo grau de cooperação na predação, para  $\sigma > \sigma_c$  tem lugar o caos transiente.

- (iii) Uma série temporal exibindo caos transiente (ver, por exemplo, Figura 6.2c) apresenta curtos troços de oscilações caóticas com um pequeno número de mínimos locais.
- (iv) Com uma condição inicial particular, seja  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) o conjunto de todos os mínimos locais correspondentes à série temporal  $P(t)$ . Nesta situação, o gráfico de pares  $(P_n, P_{n+1})$  comporta apenas alguns pontos.
- (v) Com o objectivo de extrair informação útil e relevante acerca da dinâmica subjacente, é considerado um elevado número de condições iniciais, o que conduz a um conjunto de trajectórias de  $P(t)$  com caos transiente, cada uma das quais contribuindo com um determinado número de pontos para o gráfico dos pares  $(P_n, P_{n+1})$ .
- (vi) Como consequência, obtém-se a representação de uma aplicação discreta

$$P_{n+1} = f(P_n).$$

- (vii) A dinâmica subjacente é aproximadamente unidimensional e a aplicação  $f$  é considerada uma aproximação de uma curva regular unidimensional (ver Figura 6.8).

Com o objectivo de testar a estratégia de controlo para sistemas de predadores que efectuem predação com cooperação, consideramos a aplicação da Figura 6.8 como um exemplo típico para  $\sigma > \sigma_c$  (depois da crise, induzida por  $\sigma$ ). Em todas as investigações numéricas que se seguem, usaremos  $K = 0.99$  e  $\sigma = 0.07$  (para estes valores,  $\sigma_c \approx 0.041665$ ).

- (viii) Com base na observação crucial de que uma iterada da aplicação que se situa abaixo do ponto fixo  $P^*$  tende para zero rapidamente, é possível identificar precisamente

duas regiões alvo e uma zona de escape através do cálculo de certas pré-imagens, no sentido da explicação dada nas linhas seguintes.

*Determinação dos pontos B e C, tal como exibidos na Figura 6.8*

(ix) Designemos o ponto fixo  $P^*$  por

$$P^* = (p_1^*, f(p_1^*)), \text{ com } f(p_1^*) = p_1^*.$$

Em particular,  $P^* = (0.589345, 0.589345)$  na aplicação da Figura 6.8. A primeira pré-imagem de  $p_1^*$  por meio de  $f$  permite-nos obter o ponto

$$(f^{-1}(p_1^*), p_1^*).$$

O cálculo da segunda pré-imagem de  $p_1^*$  por meio de  $f$  permite-nos identificar dois pontos da forma

$$(f^{-2}(p_1^*), f^{-1}(p_1^*)),$$

nomeadamente,  $B = (b_1, b_2)$  e  $C = (c_1, c_2)$ , com  $b_2 = c_2 = f^{-1}(p_1^*)$ . Particularmente, na Figura 6.8, temos  $B = (0.637881, 0.731615)$  e  $C = (0.667336, 0.731615)$ .

(A notação  $f^{-1}$  não deve ser confundida com a de função inversa. As duas coincidem apenas se  $f$  é uma bijecção).

*Determinação dos pontos A e D, tal como exibidos na Figura 6.8*

(x) Consideremos o ponto  $B = (b_1, b_2)$ . Com o cálculo da terceira pré-imagem de  $b_1$  por meio de  $f$ , pode representar dois pontos da forma

$$(f^{-3}(b_1), f^{-2}(b_1)),$$

mais precisamente,  $A = (a_1, a_2)$  e  $D = (d_1, d_2)$  com  $a_2 = d_2 = f^{-2}(b_1)$ . Para a aplicação da Figura 6.8,  $A = (0.63236, 0.719794)$  e  $D = (0.672548, 0.719794)$ .

*As regiões alvo de  $P_n$*

- (xi) Após o procedimento anterior, podemos construir as duas regiões a partir das quais as coordenadas alvo  $P_n$  são escolhidas, isto é, a região entre as linhas verticais  $a$  e  $b$  e a região entre as linhas verticais  $c$  e  $d$ . Por acréscimo, a zona de escape é claramente identificada, estando estabelecida entre as linhas  $b$  e  $c$ .

*O conjunto de pontos alvo necessário para efectuar o controlo*

- (xii) A única informação necessária para o controlo é experimentalmente acessível. Para cada coordenada  $P_n$  nas duas zonas alvo da aplicação  $f$  também registamos os correspondentes valores das restantes variáveis dinâmicas,  $R_n$  e  $C_n$ . Como consequência, o conjunto de todos os pontos alvo tem elementos da forma  $(R_n, C_n, P_n)$ , os quais contêm valores das três variáveis dinâmicas do sistema (6.1)-(6.3), com  $P_n$  sendo sempre um mínimo local, correspondendo a uma região alvo da aplicação.

*O controlo*

- (xiii) Quando uma trajectória “cai” na zona de escape, isto é, quando o valor de  $P_n$  em  $(R_n, C_n, P_n)$  é maior do que  $b_2 = c_2$ , seleccionamos o ponto mais próximo, no conjunto dos pontos alvo, tal que a perturbação requerida (distância euclidiana entre o ponto de escape e o ponto alvo), dada por  $\Delta X(t) = \sqrt{[\Delta R(t)]^2 + [\Delta C(t)]^2 + [\Delta P(t)]^2}$ , seja mínima. A aplicação do controlo consiste em colocar a trajectória no ponto alvo seleccionado.

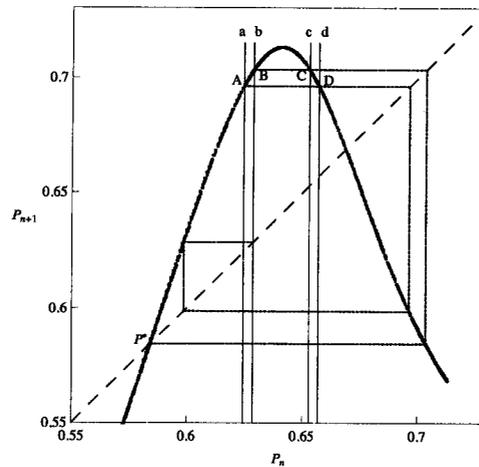


Figura 6.8: A aplicação iterada construída a partir dos sucessivos mínimos locais da variável  $P$  usando um conjunto de 250 condições iniciais para o modelo de predação com cooperação para  $K = 0.99$  e  $\sigma = 0.07 > \sigma_c$  (após a crise).

### 6.3.2 Análise das regiões alvo

O método inicial de controlo proposto por Dhamala e Lai mostrou ser eficaz na prevenção do caos transiente em sistemas eléctricos, no modelo de McCann e Yodzis e em sistemas químicos com comportamento de *bursting* [64]. Tal como esperado, ao testar o nosso método para o sistema de predação com cooperação, constatamos que o caos transiente pode também ser convertido em comportamento caótico continuado. A Figura 6.9 mostra uma série temporal para os predadores depois de ocorrer a crise, considerando  $\sigma = 0.07 > \sigma_c$  e  $K = 0.99$ . Para este caso particular, apenas precisamos de aplicar seis perturbações para manter o comportamento caótico, e a intensidade de tais perturbações é  $\Delta X(t) \approx 0.07$ .

A caracterização das propriedades das regiões alvo de  $P_n$  entre as linhas  $a$  e  $b$  e  $c$  e  $d$  (ver Figura 6.8), para intervalos de maior amplitude de variação dos parâmetros, pode ser muito vantajosa de um ponto de vista prático, uma vez que a quantificação rigorosa

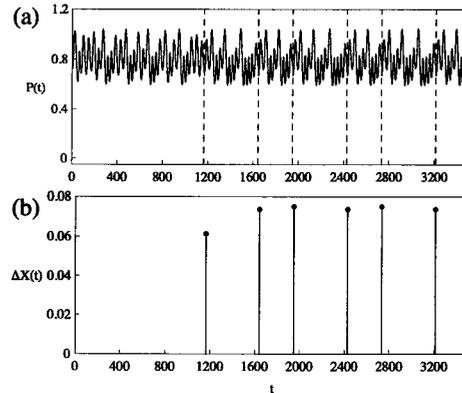


Figura 6.9: (a) A série temporal  $P(t)$  controlada após a crise, usando os mesmos valores dos parâmetros da figura anterior. Neste caso, a extinção é evitada para a predação com cooperação (tal como para  $\sigma = 0$ , correspondente ao modelo de Dhamala e Yodzis). As linhas verticais a tracejado indicam os momentos em que foi efectuado o controlo. (b) As pequenas e ocasionais perturbações necessárias para forçar a continuação do comportamento caótico.

dos parâmetros críticos ( $K_c$  e  $\sigma_c$ ) em ecossistemas naturais não é, usualmente, de fácil obtenção. Uma análise mais detalhada das duas regiões alvo indica que o número de iteradas de  $P_n$  e os tempos de vida das trajectórias resultantes do ponto  $(R_n, C_n, P_n)$ , são visivelmente não uniformes. Este comportamento assimétrico das coordenadas  $P_n$  é particularmente interessante e é uma das mais notáveis e apelativas características da dinâmica (ver Figura 6.10). Primeiramente, investigamos as propriedades destas regiões alvo para o modelo de McCann-Yodzis (i.e.,  $\sigma = 0$ ). Na Figura 6.11(a) representamos a distribuição das frequências absolutas de classes de iteradas,  $F_i$ , aumentando  $K$  para além do valor da crise. Note-se que a função  $\phi_K = K - K_c$  representa a distância de  $K$  ao valor da crise,  $K_c$ . Neste caso, as frequências  $F_i$  são calculadas como o número de pontos alvo  $P_n$  com  $i$  iteradas no interior de ambas as regiões alvo. Constatamos que os valores mais elevados das frequências estão concentrados próximos do valor da crise. De

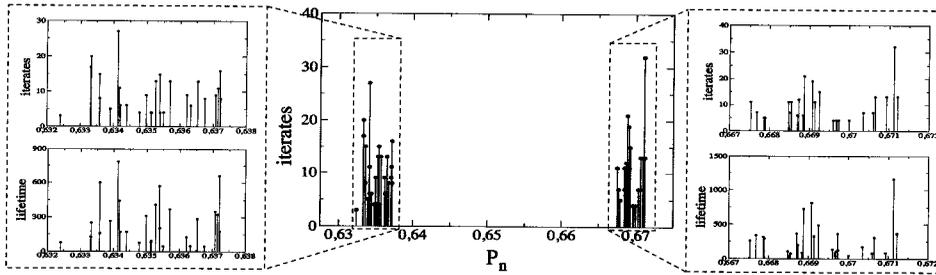


Figura 6.10: As iteradas de  $P_n$  nas duas regiões a partir das quais os pontos alvo são escolhidos (as regiões entre as linhas  $a$  e  $b$ , e entre as linhas  $c$  e  $d$  na Figura 6.8). Também são ilustradas ampliações destas regiões alvo, exibindo o número de iteradas (em cima) e o tempo de vida de cada ponto,  $P_n$  (em baixo).

facto, neste caso, existem 4 classes de iteradas às quais correspondem frequências muito mais elevadas do que as outras. Estas classes correspondem a valores de  $P_n$  que exibem um maior número de iteradas. Os pontos  $(i, F_i)$  que não são mostrados na figura por motivos de escala, são  $(47, 141)$ ,  $(48, 264)$ ,  $(49, 447)$  e  $(50, 242)$ . O aumento de  $K$  envolve geralmente um decréscimo no número de classes de iteradas, as quais estão concentradas em valores de  $P_n$  com um menor número de iteradas.

Na Figura 6.11(b) e na Figura 6.11(c) exibimos, respectivamente, os instantes nos quais as perturbações devem ser aplicadas para manter o comportamento caótico e o valor médio da intensidade destas perturbações,  $\Delta \bar{X}(t)$ , para valores crescentes de  $\phi_K$ . É interessante notar que, apesar de não encontrarmos uma ordem regular no número e na frequência das intervenções, as suas intensidades médias decrescem ligeiramente à medida que  $\phi_K$  aumenta (ver Figura 6.11(c)). O cálculo da regressão linear conduz ao coeficiente de correlação  $-0.79721\dots$ . No que diz respeito à Figura 6.11(d), e em concordância com a Figura 6.11(a), o valor médio dos tempos de vida,  $\bar{\tau}_L$ , das duas regiões alvo decresce para valores crescentes de  $\phi_K$ . Utilizando o método dos mínimos quadrados, encontrámos

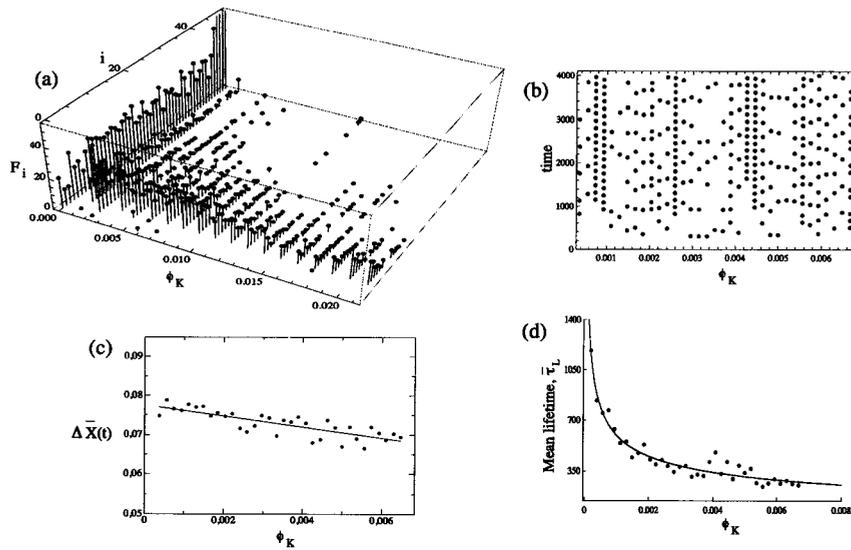


Figura 6.11: Estrutura e propriedades das duas regiões alvo obtidas para efectuar o controlo do caos à medida que o parâmetro,  $K$ , aumenta para além do valor da crise,  $K_c$  (determinado através da função  $\phi_K = K - K_c$ ), usando  $\sigma = 0$ . (a) Para cada valor de  $K > K_c$  mostramos a distribuição das frequências de iteradas,  $F_i$ . (b) Distribuição das intervenções necessárias para manter o caos durante o intervalo de tempo  $0 < t \leq 4000$ . O eixo vertical exhibe os instantes nos quais as perturbações foram efectuadas para cada valor de  $K > K_c$ . (c) Valores médios das intensidades das perturbações para cada valor da função  $\phi_K$  mostrada em (b). A linha recta corresponde a uma regressão linear. (d) Valores médios dos tempos de vida,  $\bar{\tau}_L$ , dos pontos no interior das regiões alvo. A curva representada é uma lei de ajustamento do tipo potência (ver section 6.4).

uma lei de ajustamento do tipo potência dada por  $\bar{\tau}_L = 37.7279\phi_K^{-0.39897}$ . Tal como esperado, também encontramos uma lei de ajustamento do tipo potência entre o número médio de iteradas dos pontos  $P_n$  no interior das regiões alvo e a função  $\phi_K$  (para este caso  $\bar{i} = 2.0919\phi_K^{-0.3081}$ ). De facto, a correlação entre o tempo médio de vida e o valor médio das iteradas no interior das regiões alvo é 0.9863... (estes resultados não são mostrados).

Seguidamente, repetimos a análise anterior estudando a dinâmica para valores do coeficiente de predação com cooperação,  $\sigma$ , maiores do que o ponto crítico  $\sigma_c$ , usando agora a função  $\phi_\sigma = \sigma - \sigma_c$  (ver Figura 6.12). Tal como nos resultados anteriores, a Figura 6.12(a) mostra um decréscimo nas classes de frequências mais elevadas à medida que  $\sigma$  se afasta de  $\sigma_c$ . Além disso, os maiores valores de  $F_i$  também ocorrem para valores próximos do valor da crise, com 5 classes ( $i, F_i$ ) de iteradas com valores da frequência consideravelmente maiores: (46, 92), (47, 263), (48, 479), (49, 703) e (50, 391). A diferença no número total de intervenções para o controlo do sistema, referente às situações apresentadas nas Figuras 6.11(b) e 6.12(b), é de 77, isto é, é necessário efectuar menos perturbações na presença de uma crise induzida pelo parâmetro  $\sigma$ . Nesta situação, embora a média de perturbações seja ligeiramente maior, também se verifica uma variação pequena quando  $\sigma > \sigma_c$  (ver Figura 6.12(c)). Os tempos médios de vida,  $\bar{\tau}_L$ , exibidos na Figura 6.12(d) quando  $\phi_\sigma \rightarrow 0$  são mais longos quando comparados com os exibidos na Figura 6.11(d). A lei de ajustamento do tipo potência é neste caso dada por  $\bar{\tau}_L = 37.9132\phi_\sigma^{-0.44168}$ , enquanto que a lei de ajustamento do tipo potência para a média de iteradas é  $\bar{i} = 2.9778\phi_\sigma^{-0.28758}$  (para esta situação, o coeficiente de correlação entre  $\bar{\tau}_L$  e  $\bar{i}$  foi 0.971...).

Neste capítulo construímos e analisámos a dinâmica populacional de um modelo de

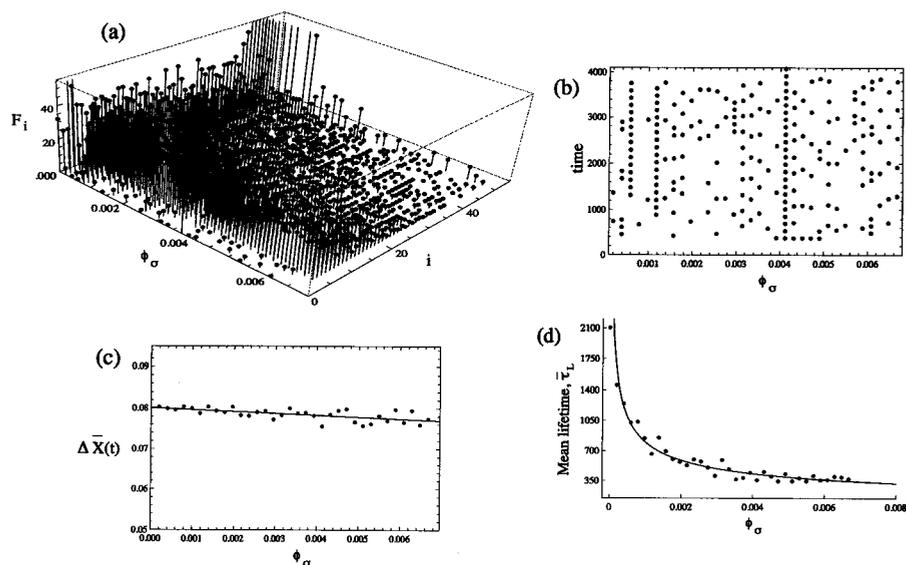


Figura 6.12: O mesmo que na figura anterior mas agora usando  $K = 0.99$  e  $\phi_\sigma = \sigma - \sigma_c$ .

predação com cooperação estendendo o modelo de McCann-Yodzis [63]. O novo modelo considera um coeficiente de cooperação  $\sigma$  que origina diferentes estratégias comportamentais na população de predadores.

No que diz respeito à entropia topológica, para o modelo original de McCann-Yodzis ( $\sigma = 0$ ), este invariante numérico é crescente com a capacidade de carga do recurso trófico,  $K$ , e é decrescente com o parâmetro  $C_0$ . Para o modelo de predação com cooperação verificámos que o valor crítico,  $K_c$ , decresce para valores crescentes do coeficiente de cooperação  $\sigma$ , indicando que os predadores se tornam mais susceptíveis à extinção à medida que o grau de predação com cooperação aumenta. Também caracterizámos a ordem das sequências periódicas de *kneading* no sentido da crise nos espaços dos parâmetros  $(K, C_0)$  e  $(K, \sigma)$ , obtidas a partir das aplicações unimodais. Para ambos os espaços dos parâmetros identificámos os seguintes períodos: período-5  $(RLLRC)^\infty$ , período-4  $(RLLC)^\infty$ , período-

5  $(RLLLC)^\infty$  e  $R(L)^\infty$  identificada com a linha da crise.

No contexto do controlo do caos transiente, aplicámos um procedimento de controlo que partilha com o método de Dhamala e Lai [64] alguns princípios fundamentais. Mostrámos que tal método também é capaz de converter o caos transiente em comportamento caótico continuado para o nosso modelo de predação com cooperação. Atendendo à importância das regiões alvo no método de controlo, foi elaborado um estudo aprofundado das características dessas regiões. Mais especificamente, analisámos o comportamento das iteradas e dos tempos de vida dos pontos dessas regiões para valores crescentes dos parâmetros  $K$  e  $\sigma$ , para além dos seus valores críticos, usando as funções  $\phi_K = K - K_c$  e  $\phi_\sigma = \sigma - \sigma_c$ . Em ambos os casos não encontramos um padrão comportamental regular na aplicação das perturbações para valores crescentes de  $\phi$ , embora para a crise induzida por  $\sigma_c$  o número de intervenções seja substancialmente menor. Os valores médios de tais perturbações, em ambos os casos, mostraram seguir uma relação aproximadamente linear, decrescente para valores crescentes de  $\phi$ . Apresentámos também uma lei de ajustamento de tipo potência entre o número médio de iteradas e o tempo médio de vida, à medida que os parâmetros críticos crescem para além dos respectivos valores da crise. Os resultados mostraram estar em perfeita harmonia com outros estudos de fenómenos de transição [69].

# Considerações finais

Os estudos apresentados nesta dissertação protagonizam uma experiência de interdisciplinaridade científica, suscitando reflexões sobre determinadas propriedades partilhadas por sistemas dinâmicos em domínios do conhecimento que apresentam uma estrutura conceptual distinta. De facto, a aplicação de elementos da teoria dos sistemas dinâmicos discretos a modelos que descrevem fenómenos na economia e na ecologia tornou possível a identificação de aplicações unidimensionais essenciais para a caracterização pormenorizada da dinâmica, assim como para a quantificação da complexidade. Mais precisamente, estas aplicações prestam-se a estudos numéricos exaustivos e a sua estrutura permite uma descrição teórica, em termos de dinâmica simbólica, particularmente completa. Ao explorar o comportamento dinâmico dos sistemas, destaca-se o aparecimento do comportamento caótico nos vários modelos, que através do estudo de invariantes topológicos se revela com um carácter estruturado. Este comportamento é ilustrado através do estudo da variação da entropia topológica, ou de situações de isentropia bem como da ordenação simbólica dos períodos nos espaços dos parâmetros considerados.

Motivados pelo comportamento caótico dos modelos, aplicámos procedimentos para controlo do caos, quer seja aplicando uma pequena perturbação no parâmetro, eliminando esse comportamento do sistema e induzindo-o a comportar-se periodicamente, quer seja

aplicando uma pequena perturbação na variável dinâmica preservando o comportamento caótico. O controlo da dinâmica caótica impede a ocorrência de situações de comportamento indesejável com possíveis repercussões irreversíveis nos sistemas sociais ou naturais. Na verdade, e em determinadas situações, é importante na economia a aplicação de técnicas de controlo do caos que conduzam à obtenção de ciclos periódicos, enquanto que na ecologia, no contexto da dinâmica populacional caracterizada pela existência de caos transiente, é fundamental a utilização de métodos que resultem na preservação do comportamento caótico, o que significa a preservação das espécies.

O trabalho apresentado ao longo dos capítulos anteriores constitui um estudo de modelos não-lineares cuja investigação encerra aspectos que motivam novos e entusiasmados desenvolvimentos. De facto, determinados ramos da matemática vivem cada vez mais de experiências interdisciplinares que despertam a curiosidade, colocando novas interrogações, que contribuem para o desenvolvimento da teoria.

# Bibliografia

- [1] M. Morse and G. Hedlund, *Symbolic Dynamics*, American Journal of Mathematics, 60, 815-866 (1938).
- [2] J. Milnor and W. Thurston, *On iterated maps of the interval I and II*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1342, 465-563 (1988).
- [3] J. P. Lampreia and J. Sousa Ramos, *Symbolic dynamics of bimodal maps*, Portugal. Math. Vol. 54, 1, 1-18 (1997).
- [4] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett. 64, 1196-1199 (1990).
- [5] T. Kapitaniak, *Controlling chaos: theoretical and practical methods in non-linear dynamics*, Academic Press, New York (1996).
- [6] D. Gulick, *Encounters with chaos*, McGraw-Hill Ed. (1992).
- [7] A. Sharkovsky, *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself*, Ukr. Math. Z. 16, 61-71 (1964).
- [8] P. Collet and J. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical Systems*, Progress on Physics, Vol. I, Birkhäuser-Boston, Boston (1980).

- [9] R. Adler, A. Konheim and M. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Am. Math. Soc. 114, 309-319 (1965).
- [10] R. Bowen and J. Franks, *The periodic points of maps of the disk and the interval*, Topology 15, 337-342 (1976).
- [11] M. Misiurewicz and W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. 67, 45-63 (1980).
- [12] J. Rothschild, *On the computation of the topological entropy*, Tese de Doutorado, CUNY (1971).
- [13] D. Singer, *Stable orbits and bifurcations of maps of the interval*, SIAM J. Appl. Math. 35, 260-267 (1978).
- [14] W. Melo and S. Strien, *One dimensional dynamics*, Springer (2003).
- [15] J. P. Lampreia and J. Sousa Ramos, *Trimodal Maps*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.3, No.6, 1607-1617 (1993).
- [16] N. Balmforth, E. Spiegel and C. Tresser, *The topological entropy of one-dimensional maps: approximation and bounds*, Phys. Rev. Lett. 80, 80-83 (1994).
- [17] L. Alsedà, S. F. Kolyada and L. Snoha, *On topological entropy of triangular maps of the square*, Bull. Austral. Math. Soc., 48, No. 1, 55-67 (1993).
- [18] D. A. Mendes and J. Sousa Ramos, *Computing the topological entropy of triangular maps of the plane*, Grazer Mathematics Ber, 346, 283-297 (2004).

- [19] D. A. Mendes and J. Sousa Ramos, *Kneading theory for triangular maps*, International Journal Pure And Application Mathematics 10, 4, 421-450 (2004).
- [20] P. Almeida, J. P. Lampreia and J. Sousa Ramos, Topological invariants for bimodal maps, *Iteration theory (Batschuns, 1992)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1-8 (1996).
- [21] W. L. Ditto, S. N. Rausseo and M. L. Spano, Experimental control of chaos, *Phys. Rev. Lett.*, 65, 3211-3214 (1990).
- [22] C. Januário, C. Grácio, D. A. Mendes and J. Duarte, Measuring and controlling the chaotic motion of profits, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, to appear.
- [23] R. H. Day, *Complex Economic Systems*, MIT Press (1996).
- [24] J. M. Grandmont, *On endogenous competitive business cycles*, *Econometrica*, 53, 995-1046 (1985).
- [25] S. Bouali, *The Hunt Hypothesis and the Dividend Policy of the Firm. The Chaotic Motion of the Profits* e-print arXiv: nlin.CD/0206032 (2002).
- [26] D. A. Mendes and V. Mendes, Control of chaotic dynamics in an OLG economic model, *Journal of Physics: Conference Series* 23, 158-181 (2005).
- [27] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott and W. P. Dayawansa, *Controlling chaotic dynamical systems*, *Physica D* 58 165 (1992).
- [28] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, New Jersey, Prentice-Hall (1990).

- [29] C. Januário, C. Grácio, D. A. Mendes and J. Duarte, *Isentropic dynamics and control in an economic model for capital accumulation*, submetido.
- [30] V. Böhm and L. Kaas, *Differential savings, factor shares, and endogenous growth cycles*, *Journal of Economic Dynamics & Control* 24, 965-980 (2000).
- [31] S. Brianzoni, C. Mammana and E. Michetti, *Complex dynamics in the neoclassical growth model with differential savings and non-constant labor force growth*, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 11, Issue 3 (2007).
- [32] N. P. Chau, *Controlling chaos by periodic proportional pulses*, *Phys. Lett. A* 234, 193-197 (1997).
- [33] J. Güémez and M. A. Matias, *Control of chaos in unidimensional maps*, *Phys. Lett. A* 181, 29-32 (1993).
- [34] N. P. Chau, *Stabilizing effect of periodic or eventually periodic constant pulses on chaotic dynamics*, *Phys. Rev. E* 57, No. 6, 7317-7320 (1998).
- [35] C. Januário, C. Grácio and J. Duarte, *Measuring complexity in a business cycle model of the Kaldor type*, *Chaos, Solitons & Fractals* (2009), doi: 10.1016/j.chaos.2009.04.030.
- [36] N. Kaldor, *The Model of the Trade Cycle*, *Economic Journal* 50, 78-92 (1940).
- [37] W. W. Chang and D. J. Smith, *The existence and persistence of cycles in a non-linear model: Kaldor's 1940 model re-examined*, *Rev. Economic Studies* 38, 37-44 (1971).
- [38] R. Herrmann, *Stability and chaos in a Kaldor-type model. DP 22*, Department of Economics, University of Goettingen (1985).

- [39] P. C. Chu, *First-passage time for stability analysis of the Kaldor model*, *Chaos Solitons & Fractals* 27 (5): 1355-68 (2006).
- [40] L. I. Dobrescu and D. Opris, *Neimark–Sacker bifurcation for the discrete-delay Kaldor model*, *Chaos Solitons & Fractals* 40 (5), 2462-2468 (2009).
- [41] A. Dohtani, T. Misawa, T. Inaba, M. Yokoo and T. Owase, *Chaos, complex transients and noise: illustration with a Kaldor model*, *Chaos Solitons & Fractals*; 7 (12), 2157-74 (1996).
- [42] C. Januário, C. Grácio and J. Sousa Ramos, *Chaotic behavior in a two-dimensional business cycle model*, ICDEA, Tenth International Conference on Difference Equations and Applications, Munich, Germany (2005).
- [43] H.-W. Lorenz, *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*, Springer, Berlin (1993).
- [44] M. Szydlowski and A. Krawiec, *The stability problem in the Kaldor–Kalecki business cycle model*, *Chaos Solitons & Fractals*; 25 (2), 299-305 (2005).
- [45] L. Alsedà and J. Llibre, *Periods for triangular maps*, *Bull. Austral. Math. Soc.*; 47, 41–53 (1993).
- [46] J. Duarte, C. Januário and N. Martins, *Topological invariants in the study of a chaotic food chain system*, *Chaos* 18 023109 (2008).
- [47] J. Duarte, C. Januário and N. Martins, *Chaos in ecology: the topological entropy of a tritrophic food chain model*, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 541683 (2008), doi: 10.1155

- [48] O. Feo and S. Rinaldi, *Yield and dynamics of tritrophic food chains*, Am. Nat. 150, 328–345 (1997).
- [49] O. Feo and S. Rinaldi, *Top-predator abundance and chaos in tritrophic food chains*, Ecology Lett. 2, 6–10 (1999).
- [50] B. Deng, *Food chain chaos due to junction-fold point*, Chaos 11, 514–525 (2002).
- [51] B. Deng and G. Hines, *Food chain chaos due to Shilnikov orbit*, Chaos 12, 533–538 (2002).
- [52] B. Deng and G. Hines, *Food chain chaos due to transcritical point*, Chaos 13, 578–585 (2003).
- [53] B. Deng, *Food chain chaos with canard explosion due to transcritical point*, Chaos 14, 1083–1092 (2004).
- [54] W. Liu, D. Xiao and Y. Yi, *Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems*, J. Differential Equations 188, 306–331 (2003).
- [55] J. Duarte, C. Januário, N. Martins and J. Sardanyés, *Chaos and crisis in a model of cooperative hunting: a symbolic dynamics approach*, submetido.
- [56] G. J. Butler and P. Waltman, *Bifurcation from a limit cycle in a two predator-one prey system modeled on a chemostat*, J. Math. Biol. 12, 295–310 (1981).
- [57] J. D. Murray *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, USA (1989).
- [58] M. E. Gilpin. *Spiral chaos in a predator-prey model*, The Am. Nat. 113, 306–308 (1979).

- [59] A. Hastings and T. Powell, *Chaos in a three-species food chain*, Ecology 72(3), 896-903 (1991).
- [60] C. Boesch, H. Boesch and L. Vigilant, *Cooperative hunting in chimpanzees: kinship of mutualism?* In: Kappeler and van Shaik (eds) *Cooperation in Primates and Humans. Mechanisms of evolution*. Springer, 4-21 (2006).
- [61] C. Packer and L. Rutten, *The Evolution of Cooperative Hunting*, The Am. Nat. 132(2), 159-198 (1988).
- [62] L. A. Dugatkin, *Cooperation in mammals I: nonprimates. In: cooperation among animals. An evolutionary perspective*, ed. L. A. Dugatkin, 90-115. Oxford Series in Ecology and Evolution. Oxford University Press, Inc. (1997).
- [63] K. McCann and P. Yodzis, *Nonlinear Dynamics and Population Disappearances*, The Am. Nat. 144, 873-879 (1994).
- [64] M. Dhamala and Y-C. Lai, *Controlling transient chaos in deterministic flows with applications to electrical power systems and ecology*, Phys. Rev. E 59, 1646-55 (1999).
- [65] L. Shulenburger, Ying-Chen Lai, T. Yalçinkaya and R. D. Holt, *Controlling transient chaos to prevent species extinction*, Phys. Lett. A 260, 156-161 (1999).
- [66] P. Yodzis and S. Innes, *Body Size and Consumer-Resource Dynamics*, The Am. Nat. 139, 1151-75 (1992).
- [67] E. Fontich and J. Sardanyés, *Dynamical role of the degree of intraspecific cooperation: a simple model for prebiotic replicators and ecosystems*, Physica A 388(9), 1867-1878 (2009).

- [68] M. Pascual, *Diffusion-Induced Chaos in a Spatial Predator-Prey System*, Proc. Roy. Soc. Lond. B 251, 1-7 (1993).
- [69] J. Sardanyés and R. Solé, *Ghosts in the origins of life?*, Int. J. Bif. and Chaos 16(9), 2761-65 (2006).