Análise Matemática I

Rui Albuquerque

Professor do
Departamento de Matemática da
Universidade de Évora

2012-2013

Resumo teórico das Séries Numéricas

Referências bibliográficas: "Curso de Análise Matemática" de J. Santos Guerreiro e "Curso de Análise" de E. Lages Lima

Março 2013

Uma **série** consiste em um par: uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e outra sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por sua vez definida como

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \ . \tag{1}$$

A série é normalmente denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geq 1} a_n \ .$$

A sucessão (S_n) tem o nome de **sucessão das somas parciais**. Note-se que onde a contagem começa, 1 no caso acima, é pouco importante. Podemos falar da série $\sum_{n\geq k} a_n$, subentendendo-se então que $S_n = \sum_{i=k}^{n} a_i$.

Exemplos (com nomes próprios!):

- A 'série com os termos quase todos nulos' é aquela em que $a_n = 0$, $\forall n > n_0$. Nesse caso $S_n = S_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$.

- Sendo o elemento x um número real ou uma variável independente de n, chamamos série **geométrica** àquela que é da forma:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \ = \sum_{n\geq 0} x^n \ . \tag{2}$$

  É fácil ver (!) que as somas parciais resultam em:

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ . \tag{3}$$

  Um caso bem conhecido é o da série geométrica $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$. A sucessão das somas parciais, *a soma de n metades da distância que falta percorrer*, fica:

$$S_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \ . \tag{4}$$

- As séries de **Mengoli** ou **telescópicas** são aquelas em que

$$a_n = b_n - b_{n+1} \tag{5}$$

  É claro que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1} \ . \tag{6}$$

  As séries de Mengoli podem aparecer de formas disfarçadas, como

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geq 5} \frac{7}{n(n-4)} = \sum (\frac{7}{4(n-4)} - \frac{7}{4n}) \ .$$

- As séries de **Dirichlet**, para um dado expoente α fixo,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \ . \tag{7}$$

Neste caso não se conhece uma fórmula geral que nos dê S_n, em função de n, que não seja por recorrência, ou seja, sem ser pela definição.

Uma série diz-se **convergente** se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente. A esse limite dá-se o nome de **soma da série**. São habituais as notações:

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \lim_n S_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n) \tag{8}$$

isto é, a identificação da série $\sum_{n\geq 1} a_n$ com a soma da série. Uma série que não converge diz-se **divergente**.

Dos casos notáveis vistos acima temos de imediato:

Proposição 1. *A série de termos quase todos nulos é convergente.*

Proposição 2. *A série geométrica de* razão x converge se e só se $|x| < 1$. Neste caso a soma da série é $\frac{1}{1-x}$.

Proposição 3. *A série de Mengoli* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *onde* $a_n = b_n - b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *é convergente se e só se a sucessão* (b_n) *é convergente. A soma da série é simplesmente* $b_1 - \lim b_n$.

Exemplos:

- Há séries de Mengoli que estão somadas a outras...

$$\sum_{n\geq 5} \frac{7}{n(n-4)} = \sum(\frac{7}{4(n-4)} - \frac{7}{4n}) = \frac{7}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \ .$$

- Outro exemplo,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \sum_{n\geq 2}(\frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1})$$

e determinando A, B, C, temos o valor $1/4$ como soma da série.

- Outra soma estudada noutro capítulo é, para qualquer x variável real, a famosa identidade $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

O seguinte critério de convergência é vulgarmente atribuído a A. Cauchy, mas foi o matemático português José Anastácio da Cunha quem primeiro o divisou.

Teorema 1 (Critério geral de convergência duma série)**.** *Condição necessária e suficiente para que uma série* $\sum a_n$ *seja convergente é que*

$$\forall \delta > 0,\ \exists n_0 :\ m, n > n_0 \ \Rightarrow\ |S_m - S_n| < \delta \ . \tag{9}$$

Demonstração. Esta formulação decorre directamente do estudo dos números reais. Todo o número real (finito) é uma classe de equivalência de uma dada sucessão de Cauchy *em* $\mathbb{Q}$, isto é, uma sucessão cujos termos se aproximam indefinidamente uns dos outros. Passa então a ser uma classe de sucessões convergentes (coincidindo o número real com o limite). Mais ainda, ficámos a saber naquele estudo que toda a sucessão de Cauchy *em* $\mathbb{R}$ é convergente em $\mathbb{R}$. Finalmente, com (9) estamos precisamente a exigir que (S_n) seja uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$. □

Corolário 1. *Se uma série* $\sum a_n$ *converge, então* $a_n \longrightarrow 0$.

Demonstração. Sendo $\delta > 0$, fazendo $n = m - 1$ em (9), a partir de certa ordem, virá $|S_m - S_n| = |a_m| < \delta$. □

O recíproco deste corolário é falso. A série **harmónica**, série de Dirichlet com $\alpha = 1$, é divergente:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad \longrightarrow +\infty \ .$$

Com efeito, pelo critério geral, supondo $\delta < \frac{1}{2}$, temos para qualquer n

$$|S_{n+n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \delta$$

e assim a sucessão das somas parciais não pode ser de Cauchy.

Note-se que a sucessão das somas parciais da série harmónica é crescente, pelo que não pode ser limitada superiormente, pois caso contrário seria convergente.

Os seguintes resultados seguem também facilmente do critério geral.

Proposição 4. *(i) Seja* $k \in \mathbb{N}$ *qualquer. A série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *converge se e só se* $\sum_{n\geq k} a_n$ *converge.*

(ii) Se $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *convergem, então a série* $\sum(a_n + b_n)$ *converge e as somas das séries verificam:*

$$\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n \ . \tag{10}$$

(iii) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ *qualquer. Se* $\sum a_n$ *converge, então a série* $\sum(\lambda a_n)$ *também converge e* $\sum(\lambda a_n) = \lambda \sum a_n$.

Uma série $\sum a_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série $\sum |a_n|$ converge. A série $\sum a_n$ diz-se **simplesmente convergente** se é uma série convergente *mas* a série dos módulos é divergente.

O contrário não acontece.

Proposição 5. *Uma série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ qualquer. Sendo a série dos módulos convergente, pelo critério geral de convergência existe uma ordem n_0 a partir da qual, para $m > n > n_0$, vem

$$\big||a_m| + \cdots + |a_{n+1}|\big| = |a_m| + \cdots + |a_{n+1}| < \delta \ .$$

Então da desigualdade triangular resulta $\big|a_m + \cdots + a_{n+1}\big| \leq |a_m| + \cdots + |a_{n+1}| < \delta$ e o mesmo critério prova que $\sum a_n$ é convergente. □

Note-se em particular que as seguintes duas séries, cuja soma dá a série inicial,

$$\sum a_n^+ = \frac{1}{2}\sum(a_n + |a_n|) \qquad \text{e} \qquad \sum a_n^- = \frac{1}{2}\sum(a_n - |a_n|) \tag{11}$$

também são convergentes (porquê?).

O exemplo mais conhecido de série simplesmente convergente é o da série *alternada* $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$. Vejamos porquê.

Primeiro, em geral, chama-se série **alternada** a série $\sum(-1)^n a_n$ com os $a_n \geq 0$.

Teorema 2 (Critério de Leibniz)**.** *Seja* (a_n) *uma sucessão real de termos positivos tal que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente e* $a_n \longrightarrow 0$. *Então a série* $\sum(-1)^n a_n$ *é convergente.*

Demonstração. Claro que o enunciado pode ser escrito com as mesmas hipóteses válidas só a partir de certa ordem, desprezando as somas iniciais. Por isso vamos prová-lo como se começássemos na ordem $2k$.

Por um lado, a sucessão das somas parciais verifica $S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq S_{2k}$ e logo, repetindo n vezes,

$$S_{2k+2n} \leq S_{2k} \ .$$

Também $S_{2k+3} = S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq S_{2k+1}$ e logo para qualquer n

$$S_{2k+2n+1} \geq S_{2k+1} \ .$$

Em suma

$$S_{2k+1} \leq S_{2k+2n+1} = S_{2k+2n} - a_{2k+2n+1} \leq S_{2k+2n} \leq S_{2k} \ .$$

Vê-se que tanto a subsucessão dos termos de ordem par, como a dos de ordem ímpar, são monótonas e limitadas. Logo são convergentes. Que convergem para o mesmo limite é também claro devido a $a_n \to 0$. □

O caso $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ verifica exactamente as condições acima.

Interessam-nos então estudar muito em particular as séries de termos positivos. A demonstração do próximo teorema é um simples exercício.

Teorema 3 (Critério de comparação)**.** *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos tais que $0 \leq a_n \leq b_n$. Temos os seguintes resultados:*

(i) Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

(ii) Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum b_n$ diverge.

Exemplos:

- Como $n^{-\alpha} \geq n^{-1}$, para $\alpha \leq 1$, temos que a série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- $\sum \frac{9^n}{n^n}$ converge porque a partir de certa ordem temos $(\frac{9}{n})^n < \frac{1}{2^n}$ e a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ converge.

No contexto do último exemplo, vemos a importância das séries geométricas.

Teorema 4 (Critério da razão)**.** *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Temos então:*

(i) Se $\exists 0 < \beta < 1$ tal que a partir de certa ordem $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$, então $\sum a_n$ converge.

(ii) Se a partir de certa ordem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, então a série $\sum a_n$ é divergente.

Demonstração. (i) A partir de certa ordem n_0, temos $a_{n+n_0} < \beta a_{n-1+n_0} < \beta^2 a_{n-2+n_0} < \cdots < \beta^n a_{n_0}$. Como a série geométrica de razão $\beta < 1$ converge, então pelo critério de comparação a série $\sum a_n$ converge.
(ii) Neste caso $\lim a_n \neq 0$, logo a série é divergente. □

Podemos ter uma análise das condições anteriores por meio de limites, como é fácil de provar (!), dando-nos o critério seguinte de convergência.

Teorema 5 (Critério de D'Alembert)**.** *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Temos:*

(i) Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a série é convergente

(ii) Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, a série é divergente

(iii) Se aquele limite é igual a 1, nada se pode concluir em geral.

Se o limite da razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, então existe o limite da sucessão $\sqrt[n]{a_n}$. Mas o recíproco não é verdade: pode existir este último sem que exista o primeiro, pelo que o seguinte critério de convergência pode ser mais acertivo (sendo muitas vezes menos prático).

Teorema 6 (Critério da raíz de Cauchy). *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Temos que:*

(i) Se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, a série é convergente

(ii) Se $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, a série é divergente

(iii) Se aquele limite é igual a 1, nada se pode concluir em geral.

Demonstração. Tal como no caso de D'Alembert, deixamos esta demonstração como exercício. Para (i) trata-se de usar a comparação com uma outra série conveniente. □

Para as séries de Dirichlet, os critérios anteriores, por exemplo, nada concluem, pois no primeiro caso $\lim \frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \lim(\frac{n}{n+1})^\alpha = 1$ e no segundo $\lim n^{-\frac{\alpha}{n}} = 1$. Temos então de estabelecer e provar o seguinte critério para uma importante família de séries.

Teorema 7. *A série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e só se $\alpha > 1$.*

Demonstração. Só falta provar que a série converge quando $\alpha > 1$. Já que se trata de uma série de termos positivos, se aplicarmos o critério geral de convergência com potências de 2, $2^m > 2^n > 2^{n_0}$, no lugar das ordens naturais do enunciado de convergência geral, provamos o resultado . Com efeito, quaisquer outros dois naturais estão entre duas potências de dois. Queremos assim mostrar que, $\forall \delta > 0$, existe uma ordem n_0, tal que se $2^m > 2^n > 2^{n_0}$, então

$$\left|\frac{1}{(2^n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^\alpha}\right| < \delta\ .$$

Escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que (note-se que $\alpha - 1 > 0$)

$$\frac{1}{2^{(\alpha-1)(n_0-1)}(2^{\alpha-1}-1)} < \delta\ .$$

Agora, somando os termos de seguida de $2^n + 1$ a 2^{n+1}, de $2^{n+1} + 1$ a 2^{n+2}, etc ..., temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{(2^n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^\alpha}\right| &< 2^n\frac{1}{2^{n\alpha}} + 2^{n+1}\frac{1}{2^{(n+1)\alpha}} + 2^{n+2}\frac{1}{2^{(n+2)\alpha}} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^{(m-1)\alpha}} \\ &= \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{m-n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}\frac{1-(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^{m-n}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}} \leq \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} < \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n_0-1}(2^{\alpha-1}-1)} < \delta\end{aligned}$$

(esta não é a demonstração mais rápida e usual, a qual se limita a majorar a série de Dirichlet por uma série geométrica convergente - o que o leitor poderá experimentar fazer por si). □

Note-se que se pode encontrar o fantástico cálculo elaborado por L. Euler de

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{12}$$

no sítio http://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Basileia.

Eis que estão apresentados os principais teoremas sobre séries de que necessitamos neste curso — tendo dado especial ênfase ao critério geral de convergência de Cauchy-Anastácio da Cunha.

Ficha 1 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Prove por indução:

i) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

iii) $n \geq 4 \;\Rightarrow\; n! > 2^n$

iv) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

v) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

vi) $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (n factores) é numerável.

2) Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais dadas por $f(y) = |y|,\ g(x) = 2x + 1$. Descreva na forma de intervalos de $\mathbb{R}$ os subconjuntos definidos pelas soluções das seguintes inequações:

i) $f \circ g \leq 1$

ii) $f \circ g \geq 3$

iii) $f(x - 5) < g(x)$

iv) $g(x^2) \leq 1$.

3) Resolva as inequações:

i) $(x + 1)^4(x - 2) \geq 0$

ii) $(2 - x^2)(x + 1) > 0$

iii) $5x^2 - 3x + 2 < 0$

iv) $|x - 1| + |x| \geq 1$

v) $|x - 3| + |x - 1| \geq 0$.

4) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ b, d > 0$. Mostre que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} .$$

5) Recorde que em geral $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto das partes de X, ou seja, o conjunto dos subconjuntos de X.

Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito qualquer. Prove que:

i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tem 1 elemento e $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ tem 8 elementos

ii) O número de funções injectivas de $A = \{1, \ldots, p\}$ em X é de $\frac{n!}{(n-p)!}$ (supondo $p \leq n$)

iii) O número de funções $f : X \to X$ bijectivas é $n!$

iv) O número de subconjuntos de p elementos de X é ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

v) O cardinal de $\mathcal{P}(X)$ é $(1 + 1)^n = 2^n$

vi) $\mathcal{P}(X) \simeq \{$funções $f : X \to \{0, 1\}\}$

vii) Usando a alínea anterior prove novamente v)

viii) Mais uma vez v) usando indução.

6) $\diamondsuit$ Mostre que o conjunto de sucessões de 0's e 1's não é numerável. (Sugestão: suponha que era, faça uma tabela e em seguida considere a *diagonal de Cantor*).

Conclua que o cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é um infinito *maior* que o de $\mathbb{N}$.

7) $\diamondsuit$ Seja X um conjunto infinito numerável. Prove que:

i) $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$

ii) O conjunto dos subconjuntos de X de cardinal n_0 é numerável

iii) O conjunto dos subconjuntos de X que são finitos é numerável.

8) $\diamondsuit$ Chamam-se *números algébricos* os números reais que são raízes de polinómios com coeficientes em $\mathbb{Q}$. (Por exemplo, sabe-se que π e e não são algébricos). Prove que:

i) $\sqrt{2}$ é irracional e algébrico

ii) O conjunto dos números algébricos é um conjunto numerável (utilize ex. 7).

9) Verifique que $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, 1[,\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma função bijectiva.

Ficha 2 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Calcule, se existirem:

i) $\inf\{x^3 - 1 + \cos x : \ -\pi \leq x \leq 2\pi\}$

ii) $\sup\{2 - \cot x : \ 0 < x < \pi/2\}$

iii) $\max\{x^2 - 2x + 7 : \ 1 \leq x \leq 3\}$

iv) $\min\{x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} : \ 3^{\text{a}}$ casa decimal de x é $5\}$

v) $\sup\{(1+n)^{-n} : \ n \in \mathbb{N}\}$.

2) Encontre o interior e a fronteira dos conjuntos:

i) $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ |x+3| < 5\}$

ii) $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\frac{1}{n+1}, \frac{2n+1}{2n(n+1)}[$.

3) $\diamondsuit$ Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais. Prove que:

i) $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$

ii) se $f, g \geq 0$, então $\inf(fg) \geq (\inf f)(\inf g)$

Nota: para qualquer função $h : A \to \mathbb{R}$, define-se $\sup h = \sup h(A)$ e $\inf h = \inf h(A)$.

4) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão real convergente para $a \in \mathbb{R}$, ou seja, $x_n \longrightarrow a$. Prove que:

i) $|x_n| \longrightarrow |a|$ (a recíproca é falsa se $a \neq 0$)

ii) se $a = 0$, então $y_n = \min\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \ \longrightarrow 0$

iii) se $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é outra sucessão e $(x_n - z_n) \longrightarrow 0$, então $z_n \longrightarrow a$

iv) se $a = 1$, então $\frac{x_n^p - 1}{x_n - 1} \longrightarrow p$ $(\forall p \in \mathbb{N})$

v) $\diamondsuit$ $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \longrightarrow a$

vi) $\diamondsuit$ se todos os $x_n > 0$, então $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \longrightarrow a$.

5) Considerando $x > 0, \ p > 1$, calcule os limites:

i) $\frac{n!}{n^n}$

ii) $\frac{x^n}{n!}$

iii) $\frac{x^n}{n^p}$

iv) nx^n

v) $\frac{1}{n^x}$

vi) $\frac{5^n + 7^n}{7^n + 4^{n+2}}$

vii) $x^{\frac{1}{n}}$.

6) Calcule, se existirem, os limites das seguintes sucessões:

i) $\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}$

ii) $\cos \frac{n\pi}{2}$

iii) $\frac{n^2+3n-2}{5n^2}$

iv) $n^{\frac{1}{n}}$.

v) $\frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + n^2}$

vi) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

vii) $\frac{10^{25} n}{1+n^2}$

viii) $n^{(-1)^n}$

ix) $\frac{n^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}(n!)}{n+1}$

7) $\diamondsuit$ Prove que o limite de uma sucessão é único.

8) $\diamondsuit$ Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de Cauchy. Prove que $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $({x_n}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ são sucessões de Cauchy.

9) Seja $a > 1$ e considere a sucessão definida por recorrência,

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \ .$$

Agora resolva sucessivamente:

i) prove por indução que $1 < x_n \leq a$

ii) prove que $x_n^2 > a$

iii) prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e, finalmente, convergente

iv) encontre o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nota: este é o método recursivo de Newton do cálculo de $\sqrt{a}$; é interessante ver a *dinâmica* no gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}\big(x + \frac{a}{x}\big)$.

Ficha 3 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 ◊=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Calcule os seguintes limites:

i) $\lim(\frac{1+n}{2+n^2})^{-n}$

ii) $\lim(\frac{3^n+5}{3^n-2})^n$

iii) $\lim(\frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+2n}})$

iv) $\lim(\frac{1}{(n^2+1)2^1}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)2^n})$

v) ◊ $\lim(\frac{4}{5-2^n}+\frac{4^2.2}{5^2-2^n}+\cdots+\frac{4^n n}{5^n-2^n})$
(verifique que $5^i \neq 2^n,\ \forall i,n \in \mathbb{N}$).

2) Sabendo que a sucessão $((1+\frac{1}{j})^j)_{j\in\mathbb{N}}$ é crescente, calcule o limite da seguinte sucessão:

$$(1+\frac{1}{1})^{-n}+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})^{-2n}+\cdots+\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^{-n^2} .$$

3) Considere a seguinte sucessão definida por recorrência:

$$x_1=2, \quad x_2=\frac{3}{2}, \quad x_{n+1}=\frac{x_n x_{n-1}}{2} .$$

i) Prove por indução em $n>1$ que

$$x_i<2,\ \forall 1<i\leq n$$

e conclua que $\forall n>1,\ x_n<2$

ii) prove que (x_n) é decrescente

iii) prove que é convergente e calcule o limite.

4) Considere a sucessão seguinte:

$$y_1=\frac{5}{8}, \quad y_{n+1}=\frac{3y_n+5}{8} .$$

i) Prove que $0<y_n<1$

ii) prove que (y_n) é crescente

iii) prove que é convergente e calcule o limite.

5) Sejam $a>b>0$ quaisquer reais. Prove que

$$\lim \sqrt[n]{a^n+b^n}=a .$$

6) Mostre pela definição que são verdadeiras as afirmações:

i) $\lim(2n+1)^{-1}=0$

ii) $\lim\frac{n^2-2n+3}{3n^2-5n+5}=\frac{1}{3}$

iii) $\lim\frac{n^2-5}{3n}=+\infty$

iv) $\lim\frac{2-5^n}{3}=-\infty$.

7) ◊ Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão cujas subsucessões $(z_{2n}),(z_{2n+1})$ e (z_{3n}) convergem, respectivamente para a,b e c. Mostre que (z_n) converge para $a=b=c$.

8) Uma sucessão é dada por:

$$x_1=1, \quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n} .$$

Prove que é crescente, limitada e convergente. Encontre o limite.

9) Uma sucessão que satisfaça $u_{n+1}=u_n+3/u_n$ não é convergente. Porquê? O mesmo para $v_{n+1}=v_n+3^{-v_n}$.

10) Calcule os limites das seguintes sucessões:

i) $\sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$

ii) $\left(\frac{n^2+2n+7}{n^2+3n+2}\right)^{n+3}$

iii) $\sqrt[n]{3^{n+1}-\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^n}$

iv) ◊ $\left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{4n+1}}\right)^n$

v) $\left(1+\frac{2n+7}{\ln n^2}\right)^{n^2-1}$

vi) $\sqrt[n]{n^{n+1}-(n+1)^n}$

vii) $\frac{n^2(\ln n)^k}{n^3+1}$ para $k>1$ constante

viii) $\sqrt[3n]{n^{2n}-n+3}$

ix) $(n^2+1)\ln(\frac{n^3-2n+3}{n^3+5n+4})$.

Ficha 4 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Calcule a soma das seguintes séries, se possível:

i) $\sum_{n\geq 4} \frac{7}{n^2-5n+6}$

ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{5^{n+1}}$

iii) $\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\cdots$

iv) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{120}+\frac{1}{840}+\cdots$

v) $\sum_{n>1} \frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

vi) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^{2n+1}-n^n(n+2)^{n+1}}{n^n(n+1)^{n+1}}$

vii) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots$

2) $\diamondsuit$ Demonstre o seguinte critério de comparação de duas séries de termos positivos:

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries de termos positivos tais que existe $l=\lim\frac{a_n}{b_n}$ e $0<l<+\infty$, então as duas séries são da mesma natureza.

3) Estude a natureza das séries seguintes:

i) $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\cdots$

ii) $\sum \frac{7}{n^2-5n+7}$

iii) $\sum \frac{n^n}{(8n)^n-5n+7}$

iv) $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

v) $\sum \frac{4^{-n}n^3}{(n+1)^2}$

vi) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{(2n)!}$

vii) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{(2n)!}$

viii) $\sum \frac{n^2+3n^5-1}{n^3+4+n^6\sqrt{n}}$

ix) $\sum \frac{n^{3/2}-3}{n+(n-1)+\cdots+2+1}$

x) $\sum \frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

xi) $\sum\left(\frac{n^2-3n+2}{n^2+5n+7}\right)^{n^3}$

xii) $\sum\left(\frac{3+n+2\sqrt{n}}{2+n+\sqrt[4]{n}+7}\right)^{n\sqrt{n}}$

xiii) $\sum(-1)^n\frac{(3^n+n!)n}{2^n n!}$

xiv) $\sum(-1)^n\frac{8^{\sqrt{n}}}{4^n}$

xv) $\sum(-1)^n\log(1+\frac{1}{n^\alpha})$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

xvi) $\sum(-1)^n\frac{\operatorname{sen} n}{n^2+(-1)^n}$

xvii) $\sum(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

4) Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Mostre que:

i) se $\exists\alpha>1$ tal que $\lim n^\alpha a_n<+\infty$, então a série é convergente

ii) se $\exists\alpha\leq 1$ tal que $\lim n^\alpha a_n>0$, então a série é divergente.

5) $\diamondsuit$ Utilize a alínea anterior para estudar a convergência das séries do tipo:

$$\sum\frac{P(n)}{Q(n)}$$

onde P e Q são polinómios de graus p e q respectivamente. Em seguida, com $\gamma,\delta>0$, resolva a mesma questão com a série

$$\sum\frac{P(n^\gamma)}{Q(n^\delta)}\ .$$

6) Considere a sucessão definida por recorrência:

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n+3}\ .$$

Diga qual a natureza das seguintes séries:

i) $\sum\frac{1}{x_n}$

ii) $\sum\frac{3}{n^\alpha x_n}$, $\alpha>1$

iii) $\diamondsuit\diamondsuit$ (para investigação) $\sum(l-x_n)$ onde $l=\lim x_n$.

7) $\diamondsuit$ Estude a natureza da série para qualquer p:

$$\sum\frac{1}{n\log^p n}\ .$$

8) Admitindo o cálculo de L. Euler, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, calcule $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

9) i) Sendo $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ f_1=f_2=1$, estude a convergência de

$$\sum\frac{1}{f_n}$$

ii) Sendo $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{n+2}}$, $x_1=1$, estude a convergência de

$$\sum_{n\geq 2}x_n\ .$$

10) Mostre que se $\sum a_n,\sum b_n$ convergem absolutamente, então a série $\sum a_n b_n$ também.

Ficha 5 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Calcule os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x}{x(1+x)}$

ii) $\lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x-2}}$

iii) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{1-\cos x}$

v) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$

vi) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{16x^3-12x^2+20x-9}{12x^2-3}$.

2) Baseando-se nos limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \ ,$$

calcule os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 8x}$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}(1-\cos x)}$

iv) $\lim_{x\to 3} (x-3)^{-1} \operatorname{sen}(x\pi)$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{\operatorname{sen} x} - \cos x}{3x^2}$

vi) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos x\frac{\pi}{2}}{x-1}$

vii) $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{cotg}(x-1)\sqrt{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x) - 1}$

viii) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x+1-\sqrt{x+1})}{x}$

ix) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x \operatorname{cotg} x$

x) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(3x-3)}{\log x}$

xi) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x}$

xii) $\lim_{x\to +\infty} (1 + \operatorname{sen}\frac{1}{x})^x$

xiii) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1+x^2-3x^3}{x+1})^{\frac{1}{x}}$

xiv) $\lim_{x\to 0^+} (\cos(e^x-1))^{\frac{1}{x^2}}$.

3) Escreva a definição de limite de uma função num ponto. Prove que o limite de $f(x) = x^2 - 1$ é 1 quando x tende para $\sqrt{2}$ e que $\lim f(x)$ é $+\infty$ quando x tende para $-\infty$.

4) Limites de sucessões f_n de variável natural podem ser vistos como limites de funções $f(x) = f_x$ reais quando $x \to +\infty$. Explique porquê.

i) Calcule o $\lim_{y\to 0} \frac{\cos((1-y)\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{1}{1+y}\frac{\pi}{2})}$

ii) Calcule o $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(\frac{x-1}{x}\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{x}{x+1}\frac{\pi}{2})}$

iii) Estude a natureza da série seguinte (verifique que o critério de D'Alembert não resulta):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2})}$$

iv) Estude a série

$$\sum (e^{\frac{1}{n^2}} - 1) \ .$$

5) Diga quais os pontos de continuidade das funções:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \in \mathbb{Q} \\ 3x - 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

ii) $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x}, & x < 0 \\ (x+1)^{1-x}, & x \in [0,1] \\ \operatorname{arctg}(1 + \log x), & x > 1 \end{cases}$

iii) $h_a(x) = \begin{cases} ax + 3 + ae^x, & x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(ax\pi)}{x}, & x > 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R}).$

6) $\diamondsuit$ Uma dada função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica as duas condições

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \ .$$

Encontre a expresão de $f(x)$ para todo o x.

7) Demonstre a regra de Leibniz da derivação do produto de duas funções reais f, g, de variável real, no ponto a:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .$$

Sugestão: tem de fazer a habitual adição e subtração de um termo conveniente no cálculo do limite.

8) Calcule as derivadas em 0 até a maior ordem possível da função

$$f(x) = \begin{cases} e^x x - 2x + 1, & x \leq 0 \\ 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{2}, & x > 0 \end{cases} \ .$$

Ficha 6 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Mostre que todo o polinómio de grau ímpar tem uma raíz real.

2) Esboce o gráfico das seguintes funções, se possível, e diga se terão alguma raíz nos intervalos considerados:

i) $f(x) = |\operatorname{sen} x|(e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} - 1)$ no intervalo $[-a, a]\backslash 0$ com $0 < a < \frac{\pi}{2}$

ii) g em intervalos $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)^3-8}{|x|}, & x \neq 0 \\ 12, & x = 0 \end{cases} .$$

iii) $h(x) = \sum_{n\geq 10} \frac{\operatorname{sen}(x+\frac{1}{n})}{n^2}$ em $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

3) $\diamondsuit$ Considere as funções reais $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, chamadas respectivamente de *seno-* e *coseno- hiperbólicos*.

i) Deduza as suas propriedades, incluindo o gráfico, e encontre a representação em séries de potências como a que conhece da função exponencial

ii) Deduza a igualdade $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Encontre as soluções ϕ da *equação diferencial*

$$\phi'' + k\phi = 0$$

usando senos e cosenos, hiperbólicos ou não, em função da constante $k \in \mathbb{R}$.

4) Seja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Mostre que f é de classe C^∞ .

5) Porque não contraria o teorema de Rolle em $[-1, 1]$ a função $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$?

6) $\diamondsuit$ Recorde que $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se de classe C^k – escreve-se $f \in C^k_D$ – se for diferenciável até ordem k e for contínua a k-ésima derivada em D.

i) Verifique que $f \in C^k$ se e só se $f' \in C^{k-1}$

ii) Sejam $f, g \in C^k$ definidas no mesmo domínio. Prove que $f + g, \ fg \in C^k$

iii) Sejam $f \in C^k_{D_f}$ e $g \in C^k_{D_g}$. Recorde o que deverá ser o domínio de $f \circ g$ e mostre que $f \circ g$ é de classe C^k nesse domínio.

7) Mostre que

i) $\log(x + 1) - \log x < \frac{1}{x}, \ \forall x > 0$

ii) $|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leq |x_1 - x_2|, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

iii) $\sqrt[n]{x} - 1 < \frac{1}{n}(x - 1), \ \forall x > 1$

iv) $e^x - 1 < e^x x, \ \forall x > 0$.

8) Encontre a fórmula de Taylor das seguintes funções, de ordem 2 pelo menos e no ponto a indicado:

i) $x \operatorname{sen} x; \quad a = \pi$

ii) $x^x; \quad a = 1$

iii) $\sqrt{x}; \quad a = 1$

iv) $\log x; \quad a = 1$

v) $\operatorname{tg} x; \quad a = \pi/4$

vi) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1; \quad a = 2$

vii) $q(x) = \sqrt[3]{x-1}$; "MacLaurin"

viii) $\frac{4x^2-1}{3x-2}$; "MacLaurin".

9) Calcule os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x^3}{\operatorname{sen}^3 4x}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{\operatorname{sen} 8x}$

iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x^3-x^2}$

iv) $\lim_{x\to 3}(x - 3)^{-2}((\cos(x\pi))^2 - 1)$

v) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\operatorname{sen}(x-1)}-1}{3x^2-3}$

vi) $\lim_{x\to 0^+}(2x)^{x^2}$

vii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(2x)^{x^2}-1}{\operatorname{arctg} x}$

viii) $\lim_{x\to 0}(x + 1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x^2}}$.

10) Encontre os extremos locais e monotonia das seguintes funções:

i) $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x+1}, \ x \neq -1$

ii) $g(x) = 4x^2\sqrt{2x} - 3x\sqrt{x+1}, \ x > 0$

iii) $h(x) = \cos^2 x \operatorname{tg} x$.

Ficha 7 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Escreva os primeiros termos do desenvolvimento de Taylor das seguintes funções em torno do ponto 0 e do ponto 1, se possível:

i) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$ ii) $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

2) Esboce o gráfico das seguintes funções, nos seus domínios, em conjunto com as suas assíntotas:

i) $f(x) = x/\sqrt{x-1}$

ii) $g(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x^3-1}$

iii) $h(x) = \operatorname{arctg}(x^2-1)$

iv) $i(x) = x^{\frac{1}{x}}$

v) $j(x) = \log(2x^2+3x+1)$.

3) $\diamondsuit$ Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função real e a um ponto no interior de I. Seja g uma função diferenciável em 0, tal que $g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$. Analise os limites quanto à sua existência e diferenciabilidade de f:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+g(h)) - f(a)}{h}$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+g(h)) - f(a-g(h))}{2h}$$

Sugestão: considere a função $f(x) = |x|$.

4) $\diamondsuit$ Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em I. Mostre que f satisfaz a condição de Lipschitz, ie. existe $c \geq 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in I$, se e só se $|f'| \leq c$ em I.

Suponha agora que a condição anterior é satisfeita com $0 \leq c < 1$ e que $f(I) \subset I$. Considere uma sucessão definida por qualquer $x_1 \in I$ inicial e por $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$. Mostre que existe $a = \lim x_n$, único elemento de I que satisfaz $f(a) = a$ (ou seja, existe um único ponto-fixo de f).

5) Demonstre a regra de l'Hospital: se f, g são funções diferenciáveis em a tais que $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \ .$$

6) Calcule os seguintes limites:

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2+2)}{\log(5x^2+\operatorname{sen} x)}$

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b}$ com $a > 1$, $b > 0$

iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-x}{x+1+\sqrt[3]{x}}$

iv) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2x^2-x^3} + x$

v) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin 3x)}{\log(\operatorname{sen} x)}$

vi) $\diamondsuit$ $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x))^{\frac{1}{\log x}}$.

7) Quais devem ser as dimensões de um triângulo isósceles de perímetro p dado e de área máxima?

Quais devem ser as dimensões de um cilindro de volume V de modo que a área da sua superfície seja mínima?

8) Encontre uma primitiva de:

i) x^α, $\alpha \neq 1$

ii) $2x^{-1}$

iii) $\sqrt{ax+b}$, a, b constantes

iv) $\operatorname{sen}(ax)$

v) $\cos(ax+b)$

vi) $\operatorname{sen}(ax+b)\cos(ax+b)$

vii) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(ax)}$

viii) $\frac{1}{\cos^2(ax)}$

ix) $\operatorname{tg} x$

x) $\operatorname{cotg}(ax)$

xi) a^x

xii) $\frac{1}{a^2+x^2}$

xiii) $\frac{x+5}{x^2+7}$

xiv) $\frac{1}{a^2-x^2}$

xv) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Ficha 8 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Calcule:

i) $\int \sqrt[3]{x-1} + \frac{x}{x-1}$

ii) $\int \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)} + \sqrt[5]{\sqrt{x^7}}$

iii) $\int \frac{x^3+\frac{1}{2}e^{2x}}{x^4+e^{2x}}$

iv) $\int 5^x \cos 5^x \operatorname{sen} 5^x$

v) $\int \operatorname{cotg} x \log(\operatorname{sen} x)$

vi) $\int \frac{x}{\cos^2 x^2} \operatorname{tg}^3 x^2$

vii) $\int \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x^2-2x+2}$

viii) $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

ix) $\int \frac{1}{x \operatorname{ch}^2 \log x}$

x) $\int x\sqrt[3]{4+8x^2}$

xi) $\int e^{5x} e^{e^{5x}}$

xii) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}$

xiii) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1-\operatorname{ch}^2 x}}$

xiv) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-16x^6}} \operatorname{arcsen} x^3$

xv) $\int \frac{1}{x^2+2ax+1}$,com $|a| < 1$.

2) Encontre as funções f e g que satisfazem as condições dadas:

i) $f'(x) = 6\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \operatorname{cotg} x$ e $f(\frac{\pi}{2}) = 0$

ii) $g''(x) = \frac{1+e^x}{3}$, $g'(2) = 0$ e $g(0) = 1$.

3) Calcule *por partes* uma primitiva das funções:

i) $x^k \log x$, $k \in \mathbb{R}$

ii) $x\, e^x$

iii) $x^3 e^x$

iv) $x^4 \operatorname{sen} x$

v) $x^3 \cos x^2$

vi) $x^k \log^3 x$

vii) $\operatorname{arctg} x$.

4) Utilize o método de primitivação por partes para deduzir fórmulas para:

i) $\int e^{ax} \cos bx$, $a, b \in \mathbb{R}$

ii) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx$

iii) $\int \cos^2 x$

iv) $\int \operatorname{sen}^2 bx$.

5) Encontre uma primitiva de:

i) $\frac{3x^2+4x+2}{x+1}$

ii) $\frac{x^4+2x^3+4x^2+3x+1}{x^3+x^2+1}$

iii) $\frac{8x^3+34x^2-17x-11}{2x+7}$

iv) $\frac{4x}{x^2-3x+2}$

v) $\frac{4}{x^3-x^2-6x}$

vi) $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

vii) $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x+\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x}{2+\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$ (cf. ex. anterior)

viii) $\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}$

ix) $\frac{1}{x^2-5x+6}$

x) $\frac{x}{(1+x^2)(4+x^2)}$

xi) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6) Primitive pelo método de substituição, utilizando a substituição indicada:

i) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-x}$, $x = t^2$

ii) $\int \frac{x^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}$, $x = t^3$

iii) $\int \sqrt{a^2-x^2}$, $x = a \operatorname{sen} t$

iv) $\int \sqrt{1+e^x}$, $x = \log(t-1)$

v) $\int (2\sqrt{x}+3)^5$, $2\sqrt{x}+3 = t$

vi) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}$, $x = t^4$

vii) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 t-1}{\operatorname{tg} t+5}$, $\operatorname{tg} t = y$.

Ficha 9 de Exercícios de Análise Matemática I

2012/2013 $\diamondsuit$=dificuldade elevada=exercício facultativo

1) Encontre as seguintes primitivas pelos métodos que conhece:

i) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

ii) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$

iii) $\int \frac{x^3+x^{\frac{3}{2}}}{1+x}$

iv) $\diamondsuit$ $\int \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{3+\operatorname{sen} x}$

v) $\int \operatorname{sen} \sqrt{x}$

vi) $\int e^{2x} \operatorname{arcsen} e^{2x}$

vii) $\int t \log(t+1)$

viii) $\int \cos x \operatorname{sh} x$

ix) $\int e^x \operatorname{sh} x$.

2) Verifique pela definição que $\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}$ (sugestão: particione o intervalo em n intervalos de largura $\frac{b}{n}$, calcule as somas inferiores e superiores de Darboux usando o exercício 1.iv da ficha 1).

3)(Teoremas do valor médio para integrais) Considere as funções f e g definidas num intervalo limitado $[a, b]$, com f contínua. Mostre que:

i) Existe $c \in]a, b[$ tal que $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(c)(b-a)$ (sugestão: teorema de Lagrange).

ii) $\diamondsuit$ Se g é integrável e não muda de sinal, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \ .$$

4) Calcule:

i)

$$\int_e^{e^2} \frac{\log \log x}{x} \, \mathrm{d}x$$

ii)

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \operatorname{sen} x^2 \, \mathrm{d}x$$

iii)

$$\int_1^{\pi} \pi^x \cos \pi^x \, \mathrm{d}x$$

iv)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sqrt{\operatorname{sen} 3x}} \frac{\cos 3x}{\sqrt{\operatorname{sen} 3x}} \, \mathrm{d}x$$

v)

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\log \frac{1}{x}}^{1} \frac{\operatorname{arctg} s}{1+s^2} \, \mathrm{d}s$$

vi) (aviso: não precisa primitivar)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\int_x^{\sqrt{x}} e^{t^2} \, \mathrm{d}t}$$

vii)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_x^{\log(1+x)} \frac{\operatorname{sen}^2 s}{s} \, \mathrm{d}s}{\log^2(x+1)} \ .$$

5) $\diamondsuit$ Considere a primeira substituição de Euler ($a > 0$):

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

e utilize-a para calcular os seguintes integrais:

i) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x$

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, \mathrm{d}x$.

6) Mostre que, fazendo $\operatorname{tg} x = t$, resulta

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \ , \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2} \ .$$

Agora encontre as seguintes primitivas:

i) $\int \operatorname{tg}^2 x$

ii) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

iii) $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$

iv) $\int \frac{2\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^4 x - \cos^2 x}$.

7) Calcule a área das seguintes regiões do plano:

i) $A = \{(x, y) : \ 2x - 2 \leq y \leq 3 - (x-1)^2\}$

ii) $B = \{(x, y) : \ xe^{x^2} \leq y \leq e^x \ \wedge \ x \geq -1\}$

iii) $C = \{(x, y) :$
$xy \geq 0 \wedge \log x \leq y \leq \frac{e+1}{x+1} \wedge (y-1)(x-2) \leq 1\}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

1ª teste de avaliação contínua de

Análise Matemática I

20 de Março de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

1. Encontre o interior, a fronteira, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\text{i) } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left] 1 + \frac{1}{n}, \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-5n} \right] \qquad \text{ii) } Y = \{\sqrt{n} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Seja $x > 0$.

i) Prove que $x < x(1+x)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) agora aplique o método de indução para ver que $1 + nx \leq (1+x)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) conclua que $\frac{1}{n} \log 2 \leq \log(1 + \frac{1}{n}), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

3. i) Prove pela definição que

$$\frac{2n + (-1)^n}{n+2} \longrightarrow 2 \ .$$

ii) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes, $a_n \longrightarrow a, \ b_n \longrightarrow b$. Demonstre pela definição que $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

4. Encontre o limite das seguintes sucessões:

$$\text{i) } w_n = \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n(n+1)} \qquad \text{ii) } x_n = n^{\frac{3}{2}} - (n+1)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{iii) } y_n = \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)^{n^2 + \sqrt{n}}$$

$$\text{iv) } z_n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

5. Considere a sucessão definida por recorrência

$$y_1 = 2, \quad y_{n+1} = \frac{3y_n + 7}{10} \ .$$

Mostre que é convergente. Com certo limite.

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

2º teste de avaliação contínua de

Análise Matemática I

24 de Abril de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

1. Calcule a soma das seguintes séries se possível:

$$\text{i)} \sum_{n\geq 2} 3^{-n+4} \qquad \text{ii)} \sum_{n\geq 3} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n+1]{n+2}\ .$$

2. Deduza, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$\text{i)} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+7n}\right)^{n^2} \qquad \text{ii)} \sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \qquad \text{iii)} \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{5}{3n-7}\ .$$

3. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

i) Se $|f(x)|$ é uma função contínua em $x=0$, então $f(x)$ é contínua em $x=0$

ii) Se g é uma função contínua num intervalo qualquer, então $\sup g = \max g$

iii) Se h é uma função limitada, então $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$.

4. Encontre os seguintes limites (sem recorrer ao cálculo diferencial!):

$$\text{i)} \lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt[3]{x+8}}{x} \qquad \text{ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(e^{x^2}-1)}{7\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{iii)} \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{3x^4}\ .$$

5. Seja $f(x)$ uma função diferenciável em a e positiva. Prove pela definição que

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'_{x=a} = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}\ .$$

6. i) Desenhe um triângulo equilátero e deduza os valores de:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \qquad \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}\ .$$

ii) Demonstre a fórmula: $2\cos^2 x - \sqrt{3}\operatorname{sen}(2x) = 4\cos x\,\cos(x+\frac{\pi}{3}),\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

3º teste de avaliação contínua de

Análise Matemática I

22 de Maio de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

1. Calcule o(s) valor(es) de λ de modo que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seja contínua:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+2+\lambda^2, & x\le\lambda\\ \frac{xe^{x^2}-\lambda e^{\lambda^2}}{x-\lambda}, & x>\lambda\end{cases}.$$

2. Seja f uma função real de classe C^2 tal que $f(a)=1,\ f'(a)=0,\ f''(a)=3$.

i) Calcule

$$\lim_{x\to a}\frac{(f(x))^2-(f(a))^2}{(x-a)^2}$$

ii) Determine um polinómio que satisfaça as condições da função f com $a=1$.

3. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

i) Se f é uma função contínua em x, então f^2 é diferenciável em x.

ii) Se $g(x)$ é uma função contínua e crescente em $\mathbb{R}$, então a função $g(e^{2t}-2e^t+1)$ tem um máximo no ponto 0.

4. Demonstre a desigualdade para qualquer $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{tg}x-1\le\frac{1}{\cos^2 x}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

5. Encontre os seguintes limites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\operatorname{sen}^2x-x^2}{e^{x^2}-1}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x}$.

6. i) Encontre o desenvolvimento de MacLaurin de $u(x)=\frac{1}{1-x^3}$

ii) Estude a função $v(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$

(apresente os zeros, os extremos relativos, a monotonia e as assíntotas).

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

4º teste de avaliação contínua de

Análise Matemática I

1ª chamada - 31 de Maio de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

1. Calcule as seguintes primitivas:

i)

$$\int x e^{x^2}$$

ii)

$$\int \frac{5x^3 - 2x^2 + 4x + 1}{x+1}\,\mathrm{d}x\ .$$

2. Calcule os seguintes limites:

i)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{L\to+\infty}\int_0^L \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

ii)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{s^2}\,\mathrm{d}s}{x}\ .$$

3. Mostre a seguinte igualdade

$$\int_0^1 (1+\sqrt{2x})^n\,\mathrm{d}x = \int_1^{1+\sqrt{2}} t^n(t-1)\,\mathrm{d}t\ .$$

Agora calcule o limite da sucessão

$$x_n = \frac{n}{(1+\sqrt{2})^n}\int_0^1 (1+\sqrt{2x})^n\,\mathrm{d}x$$

(se necessitar, abrevie a notação escrevendo $K = 1+\sqrt{2}$).

4. Calcule a área da seguinte região plana

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ x+2 \le y \le 4-x^2\right\}\ .$$

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

2ª Chamada do 4º Teste de Avaliação Contínua e Exame de

Análise Matemática I

18 de Junho de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

Nota sobre o 4º Teste: Este compreende apenas os exercícios da parte II e a solução deverá ser entregue numa folha de teste separada, feita no tempo de 2/3 da prova de exame; se o aluno deixar passar essa hora sem entregar, qualifica-se automática e exclusivamente para a avaliação em exame.

Parte I

I.1. Considere os conjuntos de números reais

$$A = \{x : |x-3| \geq |x-1\} \qquad B = \left\{x : -\frac{1}{n} \leq x < 2 - \frac{1}{n},\ \forall n \geq 1\right\}\ .$$

i) Descreva A e B na forma de intervalos

ii) Determine o ínfimo, o supremo, o mínimo, o máximo, o interior e a fronteira de A ou de B (ou dos dois).

I.2. São dadas sucessões reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergentes, com $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$. Diga se são verdadeiras as seguintes afirmações, justificando convenientemente:

i) Se $a = 0$ e $b = 0$, então $x_n y_n \longrightarrow 0$

ii) É impossível ter $a = 1$, $b = 1$ e $(x_n/y_n)^n \longrightarrow 3$

iii) É impossível ter x_n crescente, com valores em $[0,1[$ e $\lim x_n = a < 1$.

I.3. Calcule os limites das seguintes sucessões:

$$\text{i) } u_n = \frac{1}{9^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2} \qquad \text{ii) } v_n = 1 + 5^{-2} + 5^{-4} + \cdots + 5^{-2n} \qquad \text{iii) } w_n = \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{2n}}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n}}\ .$$

I.4. Diga qual a natureza da convergência das seguintes séries:

$$\text{i) } \sum \frac{2^n(3^n + n^3)}{7^n + n^5} \qquad \text{ii) } \sum (-1)^n \left(\frac{n^2-2}{3n^2+1}\right)^n\ .$$

Parte II

II.1. Considere as funções

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{2} - \log x \qquad \text{e} \qquad f(x) = g(x)^x = (x^2 - \frac{1}{2} - \log x)^x \ .$$

i) Mostre que $g(x) > 0$ no seu domínio D_g
(sugestão: indique D_g, estude a monotonia e o(s) mínimo(s) de g)

ii) Mostre que $e^{x^2} > \sqrt{e}x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (pode assumir a alínea i)

iii) Indique o domínio D_f e os zeros de f

iv) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$

v) Calcule $(\log g)'(1)$

vi) Determine a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, \frac{1}{2})$
(sugestão: recorde a fórmula de Taylor de resto de ordem 1).

II.2. Calcule

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}\operatorname{sen} x^2}{x \log \frac{1}{x}} \qquad\qquad \text{ii)}\ \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(y \operatorname{sen} y)}{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}^2(3y))} \ .$$

II.3. Calcule a primitiva seguinte:

$$\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x \ .$$

II.4. Calcule o integral

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \ .$$

II.5. Seja $A(R_M)$ a área da seguinte região plana

$$R_M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ x \geq 0 \ \wedge\ M^2 - \frac{x}{M} \leq y \leq M^2 - \frac{x^2}{M^2} \right\} .$$

Calcule $\lim \frac{A(R_M)}{M}$ quando $M \longrightarrow +\infty$.

Departamento de Matemática da Universidade de Évora

Exame de recurso de

Análise Matemática I

1 de Julho de 2013 Cursos de CTA, EC, EER, EG, EI e EM

1. Considere o conjunto de números reais

$$A = \{x : \; x^2 \leq |x^2 - 18| \; \wedge \; x \neq 3\} \; .$$

Escreva A na forma de intervalo; depois determine o ínfimo, o supremo, o mínimo, o máximo, o interior e a fronteira de A.

2. É dada uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \longrightarrow 5$. Demonstre rigorosamente que se pode afirmar que:

i) a partir de certa ordem, $4 < x_n < 6$

ii) (tendo em conta alínea anterior) $x_n^2 \longrightarrow 25$.

3. Calcule os limites das seguintes sucessões:

i) $u_n = \left(\dfrac{n^2 + \sqrt{2}n + \sqrt{n}}{n^2 + 8}\right)^n$ ii) $v_n = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

iii) $w_n = \dfrac{3^{\sqrt{2}+n} + 7n}{3^n - 2^{n+1}}$.

4. Coloque por ordem crescente, justificando, os limites anteriores, isto é, os números

$$2 + \sqrt{2}\,, \quad e^{\sqrt{2}}\,, \quad 27^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

(sugestão: use a fórmula de MacLaurin de e^x).

5. i) Estude a monotonia da seguinte sucessão definida por recorrência

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 8}{11}, \quad a_1 = 2$$

ii) Estude a convergência simples das seguintes séries:

$$S = \sum_{n \geq 1} (-1)^n (a_n - 1) \qquad\qquad T = \sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{sen}(n^2 + 1)}{n^2 + 1} \,.$$

6. Considere a função

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{1 - \cos^2 x} \,.$$

i) Indique o domínio D_f de f

ii) Estude a variação do sinal dos valores de f no intervalo $[0, 2\pi] \cap D_f$ (sugestão: faça uma tabela, analisando os intervalos $0 \to \frac{\pi}{2} \to \pi \to \frac{3\pi}{2} \to 2\pi$)

iii) Calcule $\lim_{x \to \pi^-} f(x)$

iv) Seja $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x = \operatorname{arc\,sen} t$. Encontre $\cos^2 x$ em função de t e, depois, calcule $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}) = (f \circ \operatorname{arc\,sen} t)'(\frac{1}{2})$.

7. Calcule

$$\text{i)} \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + \frac{\pi}{4}) - 1}{3x \operatorname{sen} x} \qquad\qquad \text{ii)} \lim_{y \to 0} \frac{1 - \arccos(y \operatorname{sen} y)}{1 - \arccos(\operatorname{sen}^2(3y))} \,.$$

8. Calcule a primitiva seguinte

$$\int \cos \sqrt[4]{x} \,.$$

9. Seja $A(R_M)$ a área da seguinte região plana

$$R_M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; x \geq 0 \;\wedge\; \frac{M^2}{4} - \frac{2x}{M} \leq y \leq \frac{M^2}{4} - \frac{4x^2}{M^2} \right\} .$$

Calcule $\lim_{M \to +\infty} \frac{A(R_M)}{M}$.