À minha mãe
Madalena

À memória de meu pai
Manuel João José Carapau

Título: Exercícios sobre Primitivas
Copyright(Autor & Editor): Fernando Manuel Lucas Carapau
Design: Susana Martins Oliveira (FLM)
1ª Edição - Setembro de 2012
ISBN: 978-989-20-3131-6
Depósito legal:
Impresso na Publidisa

Fernando Manuel Lucas Carapau
PhD em Matemática

Exercícios sobre Primitivas

1ª Edição

Edição de Autor

2012

"A Matemática é como um jogo de xadrez: bela, emotiva, complexa e cheia de estratégia. A grande diferença é que o xadrez tem um número finito de regras"

Fernando Carapau

Prefácio

Este livro tem como objectivo auxiliar o estudo sobre primitivas dos alunos do ensino universitário e politécnico, na área das ciências exactas. Ao longo do texto, os conteúdos teóricos, de extrema relevância, serão apresentados sem os demonstrar, remetendo tais demonstrações para a bibliografia, dando assim mais importância à resolução de exercícios sobre primitivas. Pretende-se que tais resoluções tenham *princípio, meio e fim* contribuindo assim para que o leitor adquira uma estratégia lógica e uma forma apurada de pensar sobre a forma de obter a resolução de uma primitiva. É claro que, para adquirir tal capacidade de análise, o leitor tem que ter uma sólida formação de base na área da Matemática. Mas, não basta ter apenas uma sólida formação de base é necessário mais, por exemplo: é necessário um estudo diário apaixonado, consultar diferentes bibliografias, refinar a capacidade de análise e estratégia de acção, resolver exercícios por iniciativa própria, estudar em grupo e claro não deixar o estudo para a véspera dos testes. Ao longo do texto apresentado os assuntos a estudar, são sempre que possível, abordados de forma informal, pretendendo-se assim uma leitura alegre e não de obrigação, contribuindo, desta forma, para uma assimilação positiva dos conceitos propostos.

Quero terminar expressando a minha gratidão aos colegas que, ao executar o trabalho de *Referee*, permitiram a melhoria desde livro didáctico.

Évora, 1 de Setembro de 2012
Fernando Carapau

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Primitivas Imediatas

"A Matemática é como um moinho de café que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer, mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu"

Faraday

Neste capítulo vamos apresentar alguns exercícios sobre primitivas imediatas (ou quase imediatas). Para o leitor perceber as resoluções que se seguem é conveniente que tenha presente a noção de primitiva, suas propriedades, regras de derivação assim como alguns conceitos usuais da matemática. Estas noções, conceitos e propriedades - *fruto do estudo diário do aluno* - são importantes para perceber o que se segue.

1.1 Primitivas imediatas

De forma informal para obter uma primitiva de uma função f num dado intervalo I temos que encontrar algures na nossa mente uma função F tal que a sua derivada seja igual à função f no intervalo I. Em termos formais temos a seguinte definição:

Definição 1.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Chama-se primitiva de f em I a qualquer função $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que*

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Diz-se que f é primitivável em I quando f admite pelo menos uma primitiva em I. É usual representar-se uma primitiva de f, por

$$P(f(x)) = F(x) \ \ ou \ \ \int f(x)dx = F(x).$$

Observação 1.1 *Como consequência da Definição 1.1 temos*

$$f(x) = \frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(P(f(x))\big) = P\Big(\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)\Big)$$

ou

$$f(x) = \frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(\int f(x)dx\big) = \int \frac{d}{dx}\big(f(x)\big)dx.$$

Ao longo do livro vamos usar para primitiva o simbolo $\int$.

Propriedade 1.1 *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real:*

(i) Se F é uma primitiva de f, então $F+c$, em que c é uma constante real arbitrária, ainda é uma primitiva de f;

(ii) Se F_1, F_2 são primitivas de f, então F_1 e F_2 diferem de uma constante real.

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamondsuit$

Propriedade 1.2 *Sejam $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções primitiváveis. Então, temos:*

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamondsuit$

Propriedade 1.3 *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_n$ funções reais de variável real primitiváveis e ainda $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ constantes reais arbitrárias. Então,*

$$\int \Big(\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)\Big)dx = \alpha_1 \int f_1(x)dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)dx.$$

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamondsuit$

1.2 Exercícios sobre primitivas imediatas

De seguida vamos apresentar um conjunto de exercícios sobre primitivas imediatas (ou quase imediatas) tendo o cuidado de deduzir algumas primitivas imediatas necessárias para as resoluções que se seguem.

Exercício 1.1 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int (2x+1)^2 dx. \tag{1.1}$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar algures no universo das funções uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a $(2x+1)^2$, i.e.

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = (2x+1)^2.$$

Tendo em conta a definição de primitiva, suas propriedades e a derivada da potência[1]

$$\frac{d}{dx}\big(M^\alpha\big) = \alpha M^{\alpha-1}\frac{d}{dx}\big(M\big),$$

temos ao aplicar a primitivação na igualdade anterior[2]:

$$\int \frac{d}{dx}\big(M\big)M^\beta dx = \frac{M^{\beta+1}}{\beta+1} + c,\ \forall c \in \mathbb{R},\ \beta \neq -1. \tag{1.2}$$

Agora, ao identificar em (1.1) $M = 2x+1$ e $\beta = 2$ temos que a parte esquerda da expressão (1.2) é verificada desde que a derivada de M em ordem a x lá esteja. Tendo em conta que

$$\frac{d}{dx}\big(M\big) = 2$$

é uma constante, temos[3]:

$$\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^2 dx,$$

[1] Ao longo do nosso estudo M é uma função em x derivável com domínio e contradomínio adequados.

[2] Para simplificar consideramos $\beta = \alpha - 1$ e, assim, $\alpha = \beta + 1$.

[3] Para fazer aparecer na parte esquerda da expressão (1.2) a derivada de M em ordem a x, i.e. a constante 2, temos que multiplicar e dividir a nossa expressão por 2 para, assim, verificar a igualdade em causa.

e pela expressão (1.2), vem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^3}{3} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Observação 1.2 *De seguida vamos apresentar uma interpretação gráfica do resultado anterior, i.e. da função*

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^3}{3} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}$$

para diferentes valores da constante $c \in \mathbb{R}$*, ver Figura* 1.1.

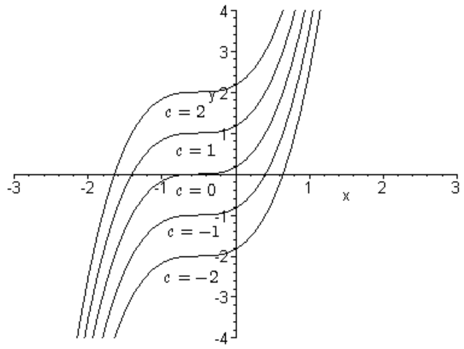

Figura 1.1: Interpretação geométrica da função $F(x)$ para diferentes valores da constante $c \in \mathbb{R}$.

Observação 1.3 *Quando no cálculo de* $\int f(x)dx$ *usamos a designação família da primitiva estamos a pensar em todas as funções* $F(x)$ *tais que*

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x).$$

E, por esse motivo temos que acrescentar ao resultado final uma constante real arbitrária, ver condição (i) na Propriedade 1.1.

Exercício 1.2 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int sin(bx)dx, \quad \forall b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1.3}$$

Resolução: Dada uma constante real arbitrária $b \neq 0$, o nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a $sin(bx)$. Tendo em conta a derivada da função trigonométrica $cos(M)$, i.e.

$$\frac{d}{dx}\big(cos(M)\big) = -\frac{d}{dx}\big(M\big)sin(M),$$

a definição de primitiva e suas propriedades, temos ao aplicar a primitivação (na igualdade anterior):

$$\int \frac{d}{dx}\big(M\big)sin(M)dx = -cos(M) + c, \; \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Ao identificar em (1.3) $M = bx$ a parte esquerda da expressão (1.4) é verificada desde que a derivada de M em ordem a x lá esteja. Ora, como

$$\frac{d}{dx}\big(M\big) = b,$$

temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int sin(bx)dx = \frac{1}{b}\int b\; sin(bx)dx \\ &= -\frac{1}{b}cos(bx) + c, \; \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Observação 1.4 *Podemos confirmar o resultado anterior da seguinte forma: derivo o resultado, i.e. a função* $F(x) = -\frac{1}{b}cos(bx) + c$ *e temos que ir obter a função que estou a primitivar, i.e. a função* $f(x) = sin(bx)$*. Neste caso concreto o resultado é válido pois*

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(-\frac{1}{b}cos(bx) + c\big) = sin(bx).$$

Exercício 1.3 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{arctg(x/2)}{4 + x^2}dx. \tag{1.5}$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar algures na nossa mente uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$\frac{arctg(x/2)}{4+x^2}.$$

Usando o saber acumulado e a visão mental apurada do leitor, adquirido ao longe do estudo solitário, podemos obter da expressão (1.5) a seguinte simplificação:

$$F(x) = \int \frac{arctg(x/2)}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\big(x/2\big)^2} arctg(x/2)dx. \tag{1.6}$$

De seguida vamos considerar a derivada[4] da função trigonométrica inversa $arctg(N)$, i.e.

$$\big(arctg(N)\big)' = \frac{N'}{1+N^2},$$

e vamos considerar ainda a primitiva imediata (1.2).

Para aplicar a expressão (1.2) com $M = arctg(x/2)$ e $\beta = 1$ temos que ter na expressão (1.6) a derivada de M, i.e.

$$M' = \frac{1/2}{1+(x/2)^2}.$$

Ora, para tal basta introduzir a constante $1/2$, e para manter a igualdade temos que multiplicar a mesma expressão por 2. Então, ao aplicar a primitiva imediata (1.2):

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{arctg(x/2)}{4+x^2}dx = \frac{2}{4}\int \frac{1/2}{1+\big(x/2\big)^2} arctg(x/2)dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{arctg^2(x/2)}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.4 *Partindo do princípio que o leitor sabe jogar xadrez considere a seguinte posição (ver Figura 1.2) de um jogo de xadrez. Qual será a sequência de lances das peças brancas com o objectivo de vencer o jogo?*

Resolução: O leitor deve estar a pensar:

Que raio, o que é que isto tem a ver com a Matemática em geral?

[4]Seja N uma função em x derivável com domínio e contradomínio adequados e para simplificar a notação vamos considerar $\frac{d}{dx}(N) = N'$.

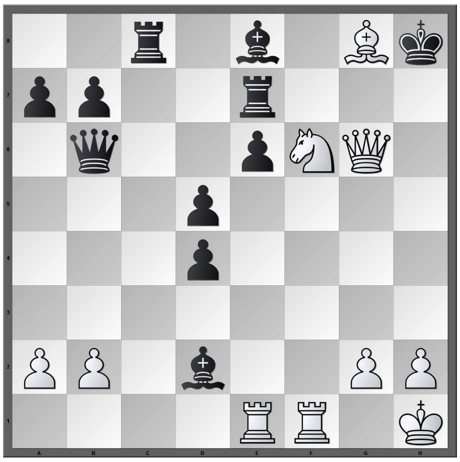

Figura 1.2: Uma posição simpática de um jogo de xadrez.

Para as peças brancas vencerem o jogo o jogador tem que analisar a posição em causa e como consequência dessa análise definir uma estratégia de acção. Essa estratégia só é possível se o jogador dominar as regras e os conceitos básicos do xadrez, o resto é pura imaginação mental e capacidade de análise. O sucesso ou não, da resolução do nosso problema, está intimamente relacionado com a estratégia a seguir. Portanto, o jogador tem que colocar em acção toda a sua imaginação criativa e a sua capacidade de análise com o objectivo de escolher a estratégia mais adequada. Esse é o problema de fundo: *conduzir a mente humana a escolher a estratégia mais adequada com vista um determinado fim.*

Ora, a matemática em geral funciona de forma análoga. Se o leitor dominar as ideias, propriedades e os conceitos básicos de um determinado assunto pode elaborar, depois de analisar um dado problema, uma estratégia com o objectivo de tentar esclarecer o mesmo. Para tal, é muito importante o seu passado acumulado sobre o assunto, a sua capacidade de análise e a sua imaginação criativa. Mas novamente, o problema é saber conduzir a mente humana a optar pela estratégia mais adequada.

Já agora a solução deste problema de xadrez é a seguinte: o lance imortal das peças brancas é 1.Bf7. Como consequência, as peças pretas estão sem contra jogo e sob a ameaça de xeque-mate, com Dama branca em h7 e em g8, o qual não podem evitar: (i) se 1....Txf7 2.Dg8++, (ii) se 1....Bxf7 2.Dh7++, (iii) para qualquer lance das peças pretas diferente dos anteriores 2.Dh7++. ♣

Exercício 1.5 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+6}}dx. \tag{1.7}$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$\frac{x}{\sqrt{2x^2+6}}.$$

Ao reescrever a expressão (1.7) na forma

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+6}}dx = \int x\big(2x^2+6\big)^{-1/2}dx, \tag{1.8}$$

e olhando para a expressão anterior de uma forma atenta podemos concluir que a resolução do nosso problema é uma aplicação directa da expressão (1.2) com $M = 2x^2+6$ e $\beta = -1/2$. Para aplicar (1.2) na nossa resolução temos que ter a derivada de M (i.e. $M' = 4x$) em (1.8). Para tal basta multiplicar e dividir o lado direito da igualdade, na expressão (1.8), pela constante 4, pois o factor x já se encontra na função a primitivar. Finalmente, usando a primitiva imediata (1.2), vem:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+6}}dx = \int x\big(2x^2+6\big)^{-1/2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int 4x\big(2x^2+6\big)^{-1/2}dx = \frac{1}{4}\frac{\big(2x^2+6\big)^{1/2}}{1/2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+6} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Observação 1.5 *Na resolução deste exercício podiamos simplesmente ter usado a primitiva imediata*[5]

$$\int \frac{M'}{n\sqrt[n]{M^{n-1}}}dx = \sqrt[n]{M} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Exercício 1.6 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{ln(x)}{x}dx, \tag{1.9}$$

e indique um intervalo onde seja possivel tal primitivação.

[5]Esta primitiva imediata está relacionada com a derivada $\big(\sqrt[n]{M}\big)' = \frac{M'}{n\sqrt[n]{M^{n-1}}}$.

Resolução: Em primeiro lugar o nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$\frac{ln(x)}{x}.$$

Olhando para (1.9) de uma forma carinhosa e com o encanto das *sereias* podemos concluir que a resolução do nosso problema é uma aplicação directa da expressão (1.2). Considerando a igualdade

$$\int \frac{ln(x)}{x} dx = \int \frac{1}{x}\ ln(x) dx,$$

podemos aplicar a expressão (1.2) com $M = ln(x)$ e $\beta = 1$ de forma directa visto que a derivada de M em ordem a x já está identificada na igualdade anterior. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{ln(x)}{x} dx = \int \frac{1}{x}\ ln(x) dx \\ &= \frac{ln^2(x)}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para responder à segunda parte do exercício basta identificar o domínio da função $F(x)$. Ora,

$$D_F = \big\{x \in \mathbb{R};\ x > 0\big\} = \big]0, +\infty\big[.$$

E, assim, o desenvolvimento anterior é válido para $\forall x \in \big]0, +\infty\big[$. ♣

Exercício 1.7 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{1}{sin(x)cos(x)} dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ algures, não sei onde, tal que a sua derivada seja igual a

$$\frac{1}{sin(x)cos(x)}.$$

Tendo em conta a fórmula fundamental da trigonometria, i.e.

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1,$$

temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{sin(x)cos(x)}dx &= \int \frac{sin^2(x)+cos^2(x)}{sin(x)cos(x)}dx\\ &= \int \frac{sin^2(x)}{sin(x)cos(x)}dx + \int \frac{cos^2(x)}{sin(x)cos(x)}dx\\ &= \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx + \int \frac{cos(x)}{sin(x)}dx. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Recorrendo à seguinte regra de derivação

$$\big(ln(M)\big)' = \frac{M'}{M}$$

temos a primitiva imediata

$$\int \frac{M'}{M}dx = ln|M| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

que é válida desde que $M \neq 0$.

Aplicando o resultado anterior à parte direita da expressão (1.10) e tendo em conta as propriedades da função logaritmo, nomeadamente

$$ln\big(\frac{b}{a}\big) = ln(b) - ln(a), \ \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

temos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{sin(x)cos(x)}dx = -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx + \int \frac{cos(x)}{sin(x)}dx\\ &= -ln|cos(x)| + ln|sin(x)| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}\\ &= ln|\frac{sin(x)}{cos(x)}| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}\\ &= ln|tg(x)| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O pensamento brilhante nesta resolução foi de facto a aplicação da fórmula fundamental da trigonometria. ♣

Exercício 1.8 *Determine o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$, tal que*

$$f''(x) = x + e^{2x}, \ com\, f(1) = 1, \ f'(0) = 2.$$

Resolução: Tendo em conta a definição de primitiva, temos

$$\int f''(x)dx = f'(x).$$

E, assim

$$f'(x) = \int \left(x + e^{2x}\right)dx = \int xdx + \int e^{2x}dx.$$

Para determinar a primitiva

$$\int xdx$$

basta aplicar a expressão (1.2) com $M = x$ e $\beta = 1$ visto que a derivada de M em ordem a x, que neste caso é a constante 1, já se encontra na função a primitivar. Para determinar a segunda primitiva, i.e.

$$\int e^{2x}dx \tag{1.12}$$

basta ter em conta a seguinte regra de derivação

$$\left(e^M\right)' = M'e^M$$

e, como consequência, a primitiva imediata

$$\int M'e^M dx = e^M + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Para aplicar o resultado anterior em (1.12) basta identificar $M = 2x$. E, como $M' = 2$, temos que multiplicar e dividir pela constante 2.

Finalmente, pela descrição anterior, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int \left(x + e^{2x}\right)dx = \int xdx + \int e^{2x}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mas o nosso objectivo principal é determinar a função $f(x)$. Aplicando novamente a definição de primitiva, mas agora á 1ª derivada da função f, temos

$$\int f'(x)dx = f(x).$$

E, assim

$$f(x) = \int (\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} + c)dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx + \int cdx.$$

Pelos mesmos argumentos que usamos para os cálculos anteriores e tendo em conta que a primitiva da função constante c é dada pela função cx (pois a derivada de cx é igual a c), vem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1}{4}\int 2e^{2x}dx + \int cdx \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}e^{2x} + cx + k, \quad \forall c, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De seguida vamos determinar as constantes c e k usando as condições dadas no enunciado do problema, i.e.

$$f(1) = 1, \; f'(0) = 2.$$

E, assim, temos:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6} + \frac{e^2}{4} + c + k = 1,$$

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + c = 2.$$

Ao resolver o sistema anterior, vem

$$c = \frac{3}{2}, \quad k = -\frac{2}{3} - \frac{e^2}{4}.$$

E, como consequência, a solução do nosso problema é a seguinte função

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{3}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{e^2}{4},$$

e o intervalo I onde o desenvolvimento anterior é válido coincide com o domínio da função $f(x)$, i.e.

$$I = D_f = \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 1.9 *Determine a primitiva da função* $f(x) = sin^2(x)cos(x)$, *cujo gráfico passa pelo ponto* $(\pi/2, 0)$.

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ primitiva de $f(x)$ cujo gráfico passa pelo ponto $(\pi/2, 0)$, i.e. $F(\pi/2) = 0$. Em primeiro lugar temos que determinar a primitiva da função $f(x)$. Depois de um olhar atrevido ao som de uma música tipo *Original of the Species* é fácil perceber que o cálculo da primitiva da função $f(x)$ é uma aplicação directa da expressão (1.2) com $M = sin(x)$ e $\beta = 2$ visto que a derivada de M em ordem a x já se encontra na função a primitivar.

E, assim

$$\begin{aligned} F(x) &= \int sin^2(x)cos(x)dx \\ &= \frac{sin^3(x)}{3} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para terminar a resolução do nosso problema basta determinar a constante c tal que $F(\pi/2) = 0$. Como

$$F(\pi/2) = 0 \Leftrightarrow \frac{(sin(\pi/2))^3}{3} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c = 0,$$

resulta $c = -1/3$. A resposta ao nosso problema é dada pela função

$$F(x) = \frac{sin^3(x)}{3} - \frac{1}{3}. \clubsuit$$

Observação 1.6 *De uma maneira geral os alunos não percebem porque motivo é que o número irracional*[6] π *(que aparece no exercício anterior) tem a seguinte aproximação*

$$\pi \simeq 3.141592653.....$$

É incrível como um problema tão simples como o de dividir o perímetro de um círculo pelo seu diâmetro tem ao longo dos tempos despertado tanto romantismo, paixão, mistério e intriga. O mais antigo registo (conhecido como Papiro de Rhind) que se conhece desta razão data do ano 1650 a.C. e foi escrito por um escriba egípcio de nome Ahmes. Este registo implica que $\pi = 256/81$*, ou seja,* $\pi \simeq 3,16049...$ *o que é uma aproximação notável para a época. Actualmente, os irmãos Chudnovsky calcularam o valor de* π *com oito mil milhões de dígitos, num super computador idealizado e construído pelos próprios, para mais informação consultar Blatner [3].*

Exercício 1.10 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int cos^3(ax)dx, \ \forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1.14}$$

[6] Todo o número irracional é caracterizado através de uma dízima infinita não periódica.

Resolução: Dada uma constante real arbitrária $a \neq 0$, o nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$, algures no *País das Maravilhas*, tal que a sua derivada seja igual a

$$cos^3(ax).$$

Ao som de uma música tipo *Electrical Storm* podemos perceber que basta fazer um pequeno desdobramento na expressão (1.14) para poder usar a fórmula fundamental da trigonometria

$$sin^2(y) + cos^2(y) = 1$$

e, assim, resolver o problema. Ora, ao som de *Even Better than the Real Thing*, obtém-se

$$\begin{aligned} F(x) &= \int cos^3(ax)dx = \int cos(ax)cos^2(ax)dx \\ &= \int cos(ax)\Big(1 - sin^2(ax)\Big)dx \\ &= \int cos(ax)dx - \int cos(ax)sin^2(ax)dx. \end{aligned}$$

A segunda primitiva é uma aplicação da expressão (1.2) com $M = sin(ax)$ e $\beta = 2$. Para determinar a primeira primitiva basta ter em conta a primitiva imediata[7]

$$\int M' cos(M)dx = sin(M) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Então, usando de forma apropriada a constante real $a \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int cos(ax)dx - \int cos(ax)sin^2(ax)dx \\ &= \frac{1}{a}\int a\ cos(ax)dx - \frac{1}{a}\int a\ cos(ax)sin^2(ax)dx \\ &= \frac{1}{a}sin(ax) - \frac{1}{a}\frac{sin^3(ax)}{3} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.11 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int tg^3(x)dx.$$

[7] A expressão em causa resulta da definição de primitiva e da seguinte regra de derivação $\big(sin(M)\big)' = M' cos(M)$.

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$tg^3(x).$$

Neste exercício concreto convém relembrar que $tg^2(x) = sec^2(x) - 1$, e já agora para futuras aplicações: $cotg^2(x) = cosec^2(x) - 1$. Sendo assim, ao som de *If God Will Send His Angels*, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int tg^3(x)dx = \int tg(x)tg^2(x)dx \\ &= \int tg(x)\Big(sec^2(x) - 1\Big)dx \\ &= \int tg(x)sec^2(x)dx - \int tg(x)dx. \end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$\big(tg(M)\big)' = M'sec^2(M) \ \text{ e } \ tg(M) = \frac{sin(M)}{cos(M)},$$

usando as primitivas imediatas (1.2) e (1.11), de forma apropriada, temos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int tg(x)sec^2(x)dx + \int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx \\ &= \frac{tg^2(x)}{2} + ln|cos(x)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.12 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{sin(2x)}{cos(x)}dx.$$

Resolução: Tendo em conta a igualdade[8] $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$ e a primitiva imediata (1.4), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{sin(2x)}{cos(x)}dx &= \int \frac{2sin(x)cos(x)}{cos(x)}dx = 2\int sin(x)dx \\ &= -2cos(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

[8]No caso do *coseno* temos $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$.

Exercício 1.13 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{1}{xln(x)}dx. \tag{1.16}$$

Resolução: Com um olhar imaginativo tipo *Where the Wild Roses Grow* podemos reescrever a primitiva (1.16) da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{xln(x)}dx = \int \frac{1/x}{ln(x)}dx.$$

Ao usar a primitiva imediata (1.11) com $M = ln(x)$, vem:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{xln(x)}dx &= \int \frac{1/x}{ln(x)}dx \\ &= ln|ln(x)| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.14 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{3x}{x^2 - 2}dx.$$

Resolução: O objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$\frac{3x}{x^2 - 2}.$$

Usando a primitiva imediata (1.11) de forma apropriada com $M = x^2 - 2$, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2 - 2}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 2}dx \\ &= \frac{3}{2}ln|x^2 - 2| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.15 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{sin(x)}{cos^2(x)}dx. \tag{1.17}$$

Resolução: A resolução do exercício é uma aplicação directa da primitiva imediata (1.2). Ao reescrever (1.17) de forma apropriada

$$\int \frac{sin(x)}{cos^2(x)}dx = \int sin(x)cos^{-2}(x)dx$$

com $M = cos(x)$ e $\beta = -2$ temos ao aplicar a expressão (1.2):

$$\begin{aligned} \int \frac{sin(x)}{cos^2(x)} dx &= -\int \big(- sin(x) \big) cos^{-2}(x) dx \\ &= \frac{1}{cos(x)} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.16 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Resolução: Ora, ao enfrentar o problema em causa com um olhar meigo, doce e superficial podemos verificar que:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^2 x^{-1/2} dx = \int x^{3/2} dx.$$

Usando a expressão (1.2) com $M = x$ e $\beta = 3/2$ (é de notar que a derivada de $M = x$ já se encontra na função a primitivar), obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx &= \int x^{3/2} dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 1.17 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{x+1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx, \ \ \beta \neq 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Resolução: A ideia para a resolução deste exercício é usar a primitiva imediata (1.11) e a primitiva imediata[9]

$$\int \frac{M'}{1+M^2} dx = arctg(M) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.18}$$

[9] A expressão em causa resulta da definição de primitiva e da seguinte regra de derivação $\big(arctg(M)\big)' = \frac{M'}{1+M^2}$.

Como consequência, temos:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x+1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int \frac{x-\alpha+\alpha+1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \\
= \;& \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\alpha+1}{(\frac{x-\alpha}{\beta})^2+1}dx \\
= \;& ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{\alpha+1}{\beta}\int \frac{1/\beta}{(\frac{x-\alpha}{\beta})^2+1}dx \\
= \;& ln|(x-\alpha)^2+\beta^2| + \frac{\alpha+1}{\beta}arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 1.18 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int xcos(x^2)dx.$$

Resolução: A resolução deste exercício é uma aplicação da primitiva imediata (1.15). Ao identificar $M = x^2$, temos $M' = 2x$ e assim:

$$\begin{aligned}
\int xcos(x^2)dx &= \frac{1}{2}\int 2xcos(x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}sin(x^2) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 1.19 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int sin(3x)e^{cos(3x)}dx.$$

Resolução: Usando a primitiva imediata (1.13) com $M = cos(3x)$ vem $M' = -3sin(3x)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int sin(3x)e^{cos(3x)}dx &= -\frac{1}{3}\int \Big(-3sin(3x)e^{cos(3x)}\Big)dx \\
&= -\frac{1}{3}e^{cos(3x)} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 1.20 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int 3xe^{-3x^2}dx.$$

Resolução: Usando a primitiva imediata (1.13) com $M = -3x^2$ vem $M' = -6x$. Então,

$$\begin{aligned}\int 3xe^{-3x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int -6xe^{-3x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.21 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \pi^{2x}dx. \tag{1.19}$$

Resolução: Tendo em conta a seguinte regra de derivação

$$\frac{d}{dx}\big(a^M\big) = \frac{d}{dx}\big(M\big)a^M ln(a), \quad a > 0,$$

temos a seguinte primitiva imediata

$$\int M' a^M ln(a)dx = a^M + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.20}$$

Então, usando a primitiva imediata (1.20) com $M = 2x$ e $a = \pi$ em (1.19), obtém-se

$$\begin{aligned}\int \pi^{2x}dx &= \frac{1}{2ln(\pi)}\int 2\pi^{2x}ln(\pi)dx \\ &= \frac{1}{2ln(\pi)}\pi^{2x} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.22 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \sqrt[3]{3x+1}dx. \tag{1.21}$$

Resolução: A magia é passar a raiz a expoente racional e o resultado é uma aplicação directa da primitiva imediata (1.2). Sendo assim ao identificar em (1.21) $M = 3x + 1$ e $\beta = 1/3$, temos:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{3x+1}dx &= \int \big(3x+1\big)^{1/3}dx = \frac{1}{3}\int 3\big(3x+1\big)^{1/3}dx \\ &= \frac{1}{4}\big(3x+1\big)^{4/3} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.23 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int cos^2(x)dx.$$

Resolução: Para resolver esta primitiva basta ter em conta a relação[10]

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + cos(2x)\big)$$

e a primitiva imediata (1.15). Então, tendo em conta o que foi dito anteriormente e que a primitiva de 1 é x, vem:

$$\begin{aligned}\int cos^2(x)dx &= \int \frac{1}{2}\big(1 + cos(2x)\big)dx = \frac{1}{2}\int \big(1 + cos(2x)\big)dx \\ &= \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int cos(2x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\int 2cos(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin(2x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.24 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int sec^2(3x)dx.$$

Resolução: Começamos por notar que[11]

$$sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}.$$

Esta primitiva é muito simples, basta ter em conta a primitiva imediata associada á regra de derivação

$$\frac{d}{dx}\big(tg(M)\big) = \frac{M'}{cos^2(M)} = M'sec^2(M)$$

que é dada por

$$\int M'sec^2(M)dx = tg(M) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

[10] Para o seno temos a relação $sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - cos(2x)\big)$.
[11] Para a cosecante temos a igualdade $cosec^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$.

Sendo assim, temos via (1.22) com $M = 3x$:

$$\begin{aligned}\int sec^2(3x)dx &= \frac{1}{3}\int 3sec^2(3x)dx \\ &= \frac{1}{3}tg(3x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Observação 1.7 *Associada á derivada da cotagente, i.e.*

$$\frac{d}{dx}\big(cotg(M)\big) = \frac{-M'}{sin^2(M)} = -M'cosec^2(M)$$

temos a primitiva imediata

$$\int M'cosec^2(M)dx = -cotg(M) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Exercício 1.25 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int sec^3(x)tg(x)dx.$$

Resolução: Este exercício parece o fim do mundo mas não é, para o resolver basta ter em conta a primitiva imediata (1.2) (que opera milagres) e a derivada[12]

$$\frac{d}{dx}\big(sec(M)\big) = M'sec(M)tg(M).$$

Então, ao fazer um pequeno desdobramento:

$$\int sec^3(x)tg(x)dx = \int sec^2(x)sec(x)tg(x)dx$$

vem aplicando o milagre (1.2) com $M = sec(x)$ e $\beta = 2$

$$\begin{aligned}\int sec^3(x)tg(x)dx &= \int sec^2(x)sec(x)tg(x)dx \\ &= \frac{sec^3(x)}{3} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.26 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}dx.$$

[12] Relativamente a cosecante temos $\frac{d}{dx}\big(cosec(M)\big) = -M'cosec(M)cotg(M)$.

Resolução: Esta primitiva é muito simples, basta ter em conta a primitiva imediata associada á regra de derivação

$$\frac{d}{dx}\big(arcsin(M)\big) = \frac{M'}{\sqrt{1-M^2}}$$

que é dada por

$$\int \frac{M'}{\sqrt{1-M^2}}dx = arcsin(M) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.24}$$

Considerando (1.24) e identificando $M = 2x+1$ temos via Moment of Surrender:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}arcsin(2x+1) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.27 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Resolução: Esta primitiva é o que se chama[13] *pescadinha de rabo na boca*, basta aplicar a primitiva imediata (1.13) com $M = \sqrt{x}$ e colocar a mente a saborear o som Babe I'm Gonna Leave You:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx \\ &= 2e^{\sqrt{x}} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.28 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{1}{e^x}dx.$$

Resolução: Mais uma *pescadinha de rabo na boca* cuja resolução é aplicar (1.13) com $M = -x$ e deixar a mente relaxar ao som de Since I've Been Loving You:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^x}dx &= \int e^{-x}dx \\ &= -\int -e^{-x}dx = -e^{-x} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

[13] Ou de forma mais atrevida *carapauzinho de rabo na boca*...lol....

Exercício 1.29 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{1}{(1+x^2)arctg(x)}dx.$$

Resolução: Penso que o leitor já adquiriu o pensamento correcto com vista a obter a resolução correcta, para tal basta uma reorganização da função a primitivar e aplicar a primitva imediata (1.11) com $M = arctg(x)$, i.e.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)arctg(x)}dx &= \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arctg(x)}dx\\ &= ln|arctg(x)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 1.30 *Determine a família da seguinte primitiva imediata:*

$$\int \frac{sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx. \tag{1.25}$$

Resolução: Esta primitiva é uma aplicação da primitiva imediata

$$\int M'sec(M)dx = ln|sec(M) + tg(M)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.26}$$

Para aplicar (1.26) na resolução de (1.25) basta identificar $M = \sqrt{x}$ e assim, tendo em conta que $M' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{sec(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{x}}sec(\sqrt{x})dx\\ &= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}sec(\sqrt{x})dx\\ &= 2ln|sec(\sqrt{x}) + tg(\sqrt{x})| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Observação 1.8 *Para a função cosecante temos a seguinte primitva imediata*

$$\int M'cosec(M)dx = -ln|cosec(M) + cotg(M)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$

Capítulo 2

Primitivas por Partes

"A Matemática apresenta invenções tão subtis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens"

Descartes

Neste capítulo vamos apresentar a teoria sobre primitivas por partes, explorando tal conceito com exercícios concretos. Para avançarmos nesta nova aventura é super importante que o dominio das primitivas imediatas - *e alguma dose de magia* - seja uma realidade sólida na mente do leitor.

2.1 Primitivas por partes

A primitivação por partes tem por base a regra da derivada do produto de duas funções e a aplicação do conceito de primitiva. O teorema seguinte apresenta-nos a primitivação por partes:

Teorema 2.1 *Sejam $v, u : I \to \mathbb{R}$ funções reais de variável real, deriváveis, e suponha-se que uv' é primitivável. Então, $u'v$ também é primitivável e*

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx. \tag{2.1}$$

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamondsuit$

Observação 2.1 *É de aplicar a primitivação por partes quando sabemos apresentar a função em estudo como o produto de dois factores $u'v$, tais que:*

(i) sabemos calcular, sem grande desperdício de energia mental, a primitiva de u', i.e. a função u;

(ii) sabemos calcular, sem grande desperdício de energia mental, a primitiva do produto uv'.

Alguns critérios para a escolha adequada de u' e v:

(iii) se no produto $u'v$ existir um factor com funções trigonométricas ou a função exponencial, convém considerar esse factor para u';

(iv) se no produto $u'v$ existir um factor com funções trigonométricas inversas ou a função logaritmo, convém considerar esse factor para v.

2.2 Exercícios sobre primitivas por partes

Exercício 2.1 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x sin(bx)dx, \ b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Resolução: Dada uma constante real $b \neq 0$, o nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$x sin(bx).$$

Tendo em conta a Observação 2.1 vamos considerar a seguinte escolha:

$$u' = sin(bx), \quad v = x$$

e como consequência[1]

$$u = \int sin(bx)dx = \frac{1}{b}\int b \ sin(bx)dx = -\frac{1}{b}cos(bx), \quad v' = 1.$$

[1] Ao cuidado do leitor perceber porque motivo basta identificar a primitiva de u' com constante nula (dica: resolver com constante não nula e perceber).

E, assim, usando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.15) e os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x sin(bx)dx = -\frac{x}{b}cos(bx) + \frac{1}{b}\int cos(bx)dx \\ &= -\frac{x}{b}cos(bx) + \frac{1}{b^2}\int b\, cos(bx)dx \\ &= -\frac{x}{b}cos(bx) + \frac{1}{b^2}sin(bx) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.2 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int arctg(x)dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ algures para lá do universo tal que a sua derivada seja igual a

$$arctg(x).$$

Pela Observação 2.1 vamos considerar a seguinte escolha:

$$u' = 1, \ \ v = arctg(x)$$

e, assim

$$u = \int 1dx = x, \ \ v' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Usando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.11) e os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores, temos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int arctg(x)dx = x\, arctg(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= x\, arctg(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\, arctg(x) - \frac{1}{2}ln|1+x^2| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.3 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^2\, e^x dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$x^2\, e^x.$$

Usando a Observação 2.1 vamos considerar $u' = e^x$, $v = x^2$ e por consequência

$$u = \int e^x dx = e^x, \;\; v' = 2x.$$

E, assim, pela expressão (2.1), temos

$$F(x) \;\; = \;\; \int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Para determinar a primitiva $\int x e^x dx$ vamos usar novamente a primitivação por partes, onde:

$$u' = e^x, \;\; v = x,$$

e, assim

$$u = \int e^x dx = e^x, \;\; v' = 1.$$

Aplicando os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores e usando a primitiva imediata (1.13), vem

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2\Big(x e^x - \int e^x dx\Big) \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, \; \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.4 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int e^x cos(ax) dx, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

Resolução: Dada uma constante arbitrária $a \in \mathbb{R}$, o nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$e^x cos(ax).$$

Pela Observação 2.1 podemos considerar qualquer das situações descritas. Escolhendo:

$$u' = e^x, \;\; v = cos(ax)$$

temos

$$u = \int e^x dx = e^x, \quad v' = -a\ sin(ax).$$

E, assim, usando a expressão (2.1), vem

$$\int e^x cos(ax)dx = e^x cos(ax) + a \int e^x sin(ax)dx.$$

Primitivando novamente por partes, com $u' = e^x$ e $v = sin(ax)$, temos

$$u = \int e^x dx = e^x, \quad v' = a\ cos(ax).$$

Obtendo assim:

$$\begin{aligned}\int e^x cos(ax)dx &= e^x cos(ax) + a\Big(e^x sin(ax) - a \int e^x cos(ax)dx\Big)\\ &= e^x cos(ax) + ae^x sin(ax) - a^2 \int e^x cos(ax)dx.\end{aligned}$$

Agora, basta ter um olhar atento tipo *The Unforgettable Fire* para verificar que o termo que está no lado esquerdo da expressão anterior também está no lado direito, e como tal, neste caso concreto, esse termo pode ser utilizado como variável. Assim,

$$\int e^x cos(ax)dx + a^2 \int e^x cos(ax)dx = e^x cos(ax) + ae^x sin(ax),$$

i.e.

$$(1 + a^2) \int e^x cos(ax)dx = e^x cos(ax) + ae^x sin(ax).$$

E, finalmente, a conclusão

$$\begin{aligned}F(x) &= \int e^x cos(ax)dx\\ &= \frac{e^x cos(ax) + ae^x sin(ax)}{1 + a^2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 2.5 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x\ ln(x)dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a

$$x\ ln(x).$$

Pela Observação 2.1:

$$u' = x, \quad v = ln(x)$$

e assim

$$u = \int x dx = \frac{x^2}{2}, \quad v' = \frac{1}{x}.$$

Usando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.2) e os conhecimentos adquiridos anteriormente, vem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x\ ln(x) dx = \frac{x^2}{2} ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{x^2}{2} ln(x) - \frac{x^2}{4} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.6 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cos^2(x) dx.$$

Resolução: Aplicando o resultado

$$cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + cos(2x)\big)$$

o cálculo da primitiva em causa fica imediato (ver Exercício 1.23). Mas, o nosso objectivo é aplicar a primitivação por partes. Ora,

$$\int cos^2(x) dx = \int cos(x) cos(x) dx.$$

Tendo em conta a Observação 2.1, vamos considerar:

$$u' = cos(x), \quad v = cos(x)$$

pelo que

$$u = \int cos(x) dx = sin(x), \quad v' = -sin(x).$$

Usando a expressão (2.1), vem

$$\begin{aligned}\int cos^2(x)dx &= \int cos(x)cos(x)dx \\ &= cos(x)sin(x) + \int sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

E, agora, coloca-se a seguinte questão:

Qual a estratégia a ter em conta para obter a resolução do problema?

Simples, tendo em conta (via fórmula fundamental da trigonometria) que $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$, vem

$$\begin{aligned}\int cos^2(x)dx &= cos(x)sin(x) + \int sin^2(x)dx \\ &= cos(x)sin(x) + \int \big(1 - cos^2(x)\big)dx \\ &= cos(x)sin(x) + \int 1dx - \int cos^2(x)dx \\ &= cos(x)sin(x) + x - \int cos^2(x)dx,\end{aligned}$$

i.e.

$$\int cos^2(x)dx = cos(x)sin(x) + x - \int cos^2(x)dx.$$

Aplicando-se a mesma estratégia do Exercício 2.4, obtém-se

$$\int cos^2(x)dx = \frac{cos(x)sin(x) + x}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.7 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^3\big(x^2+1\big)^m dx,\ m \neq -2, -1. \tag{2.2}$$

Resolução: Neste caso concreto a Observação 2.1 não nos fornece pistas que nos indique a escolha correcta para u' e v. Portanto, temos que pensar como resolver o nosso problema. Olhando para (2.2) com um *olhar de Lince*, temos

$$\int x^3\big(x^2+1\big)^m dx = \frac{1}{2}\int x^2\Big(2x\big(x^2+1\big)^m\Big)dx.$$

E, a resolução do exercício é uma aplicação da primitivação por partes com

$$u' = 2x\left(x^2+1\right)^m, \quad v = x^2,$$

pelo que

$$u = \int 2x\left(x^2+1\right)^m dx = \frac{\left(x^2+1\right)^{m+1}}{m+1}, \quad v' = 2x.$$

Usando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.2) e os conhecimentos adquiridos anteriormente, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int x^3\left(x^2+1\right)^m dx &= \frac{1}{2}\int x^2\Big(2x\left(x^2+1\right)^m\Big)dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[x^2\frac{\left(x^2+1\right)^{m+1}}{m+1} - \int 2x\frac{\left(x^2+1\right)^{m+1}}{m+1}dx\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[x^2\frac{\left(x^2+1\right)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int 2x\left(x^2+1\right)^{m+1}dx\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[x^2\frac{\left(x^2+1\right)^{m+1}}{m+1} - \frac{\left(x^2+1\right)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\Big] + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 2.8 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cos^3(x)dx.$$

Resolução: Este problema concreto já foi resolvido anteriormente de forma imediata, ver Exercício 1.10. Agora, estamos interessados em resolver o mesmo problema mas utilizando a primitivação por partes. Como

$$\int cos^3(x)dx = \int cos^2(x)cos(x)dx,$$

e, identificando (via Observação 2.1) $u' = cos(x), \ \ v = cos^2(x)$ temos

$$u = \int cos(x)dx = sin(x), \ \ v' = -2cos(x)sin(x).$$

Usando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.2) e os conhecimentos adquiridos anteriormente, vem

$$\begin{aligned}\int cos^3(x)dx &= \int cos^2(x)cos(x)dx \\ &= sin(x)cos^2(x) + 2\int cos(x)sin^2(x)dx \\ &= sin(x)cos^2(x) + \frac{2}{3}sin^3(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 2.9 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x\ arccotg(x)dx.$$

Resolução: Tendo em conta a Observação 2.1, vamos considerar

$$u' = x,\ \ v = arccotg(x)$$

e, assim

$$u = \int xdx = \frac{x^2}{2},\ \ v' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Pela expressão (2.1), temos

$$\int x\ arccotg(x)dx = \frac{x^2}{2}arccotg(x) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx. \tag{2.3}$$

A primitiva do segundo membro irá ser objecto de estudo numa secção seguinte sobre primitivas de funções racionais. Agora, vamos resolver a primitiva em causa sem entrar em muitos detalhes. Ao dividir a fracção em causa[2], temos:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Pelos conhecimentos adquiridos anteriormente e via primitiva imediata (1.18), obtém-se

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx &= \int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)dx \\ &= \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= x - arctg(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

[2]Divide-se sempre que a ordem do polinómio que está no numerador é superior ou igual à ordem do polinómio que está em denominador.

Finalmente, ao substituir o resultado (2.4) na expressão (2.3), vem:

$$\int x\ arccotg(x)dx = \frac{x^2}{2}arccotg(x) + \frac{1}{2}\Big(x - arctg(x)\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.10 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cosec^3(x)dx. \tag{2.5}$$

Resolução: Em primeiro lugar convém reescrever (2.5) na seguinte forma:

$$\int cosec^3(x)dx = \int cosec^2(x)cosec(x)dx.$$

Pela Observação 2.1, vamos considerar $u' = cosec^2(x),\ \ v = cosec(x)$ e, assim

$$u = \int cosec^2(x)dx = -cotg(x),\ \ v' = -cosec(x)cotg(x).$$

Pela expressão (2.1):

$$\int cosec^3(x)dx = -cotg(x)cosec(x) - \int cotg^2(x)cosec(x)dx,$$

e, usando o resultado $cotg^2(x) = cosec^2(x) - 1$ temos

$$\begin{aligned}\int cosec^3(x)dx &= -cotg(x)cosec(x) - \int cotg^2(x)cosec(x)dx,\\ &= -cotg(x)cosec(x) - \int \Big(cosec^2(x) - 1\Big)cosec(x)dx,\\ &= -cotg(x)cosec(x) - \int cosec^3(x)dx + \int cosec(x)dx.\end{aligned}$$

Usando a estratégia usada na resolução do Exercício 2.4, obtém-se

$$\int cosec^3(x)dx = -\frac{cotg(x)cosec(x)}{2} + \frac{1}{2}\int cosec(x)dx.$$

Para resolver o nosso problema basta ter em conta a primitiva imediata (1.27), i.e.

$$\int M'cosec(M)dx = -ln|cosec(M) + cotg(M)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int cosec^3(x)dx &= -\frac{cotg(x)cosec(x)}{2}+\frac{1}{2}\int cosec(x)dx\\ &= \frac{-cotg(x)cosec(x)-ln\mid cosec(x)+cotg(x)\mid}{2}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Observação 2.2 *A primitiva imediata* (1.27) *é deduzida via primitiva* (1.11) *da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\int M'cosec(M)dx &= \int M'cosec(M)\Big(\frac{cosec(M)+cotg(M)}{cosec(M)+cotg(M)}\Big)dx\\ &= \int \frac{M'cosec^2(M)+M'cosec(M)cotg(M)}{cosec(M)+cotg(M)}dx\\ &= -ln\mid cosec(M)+cotg(M)\mid +c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercício 2.11 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx. \tag{2.6}$$

Resolução: Convém reescrever (2.6) na seguinte forma:

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx=\int cos^2(x)sin(x)sin(x)dx.$$

Pela Observação 2.1, vamos considerar $u'=cos^2(x)sin(x),\quad v=sin(x)$ e, assim

$$u=\int cos^2(x)sin(x)dx=-\frac{cos^3(x)}{3},\ \ v'=cos(x).$$

Usando a expressão (2.1):

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx=-\frac{cos^3(x)}{3}sin(x)+\frac{1}{3}\int cos^4(x)dx.$$

Ao considerar $cos^4(x)=cos^2(x)cos^2(x)$ e usando o facto de $cos^2(x)=1-sin^2(x)$ temos:

$$\begin{aligned}\int cos^2(x)sin^2(x)dx &= -\frac{cos^3(x)}{3}sin(x)+\frac{1}{3}\int cos^2(x)\Big(1-sin^2(x)\Big)dx\\ &= -\frac{cos^3(x)}{3}sin(x)+\frac{1}{3}\int cos^2(x)dx-\frac{1}{3}\int cos^2(x)sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

Ao olhar de forma atenta para a expressão anterior temos que o termo

$$\int cos^2(x)sin^2(x)dx$$

pode ser usado como variável. Então, usando o resultado $cos^2(x) = \frac{1}{2}\Big(1+cos(2x)\Big)$, a primitiva imediata (1.15) e os conhecimentos adquiridos anteriormente, vem:

$$\begin{aligned}
\int cos^2(x)sin^2(x)dx &= -\frac{cos^3(x)}{4}sin(x) + \frac{1}{4}\int cos^2(x)dx \\
&= -\frac{cos^3(x)}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\int \big(1+cos(2x)\big)dx \\
&= -\frac{cos^3(x)}{4}sin(x) + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{16}\int 2cos(2x)dx \\
&= -\frac{cos^3(x)}{4}sin(x) + \frac{x}{8} + \frac{sin(2x)}{16} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 2.12 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x\ sin^2(x)dx. \tag{2.7}$$

Resolução: Usando a igualdade $sin^2(x) = \dfrac{1}{2}\big(1 - cos(2x)\big)$ podemos reescrever (2.7) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\int x\ sin^2(x)dx &= \frac{1}{2}\int xdx - \frac{1}{2}\int x\ cos(2x)dx \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\int 2x\ cos(2x)dx.
\end{aligned}$$

Para terminar a resolução do exercício basta resolver a primitiva do segundo membro da igualdade anterior. Usando a Observação 2.1, vamos considerar $u' = 2cos(2x)$, $v = x$ e, assim

$$u = \int 2cos(2x)dx = sin(2x), \ \ v' = 1.$$

Pela expressão (2.1) e primitiva imediata (1.4), temos:

$$\begin{aligned}\int 2x\ cos(2x)dx &= x\ sin(2x) - \int sin(2x)dx\\ &= x\ sin(2x) - \frac{1}{2}\int 2sin(2x)dx\\ &= x\ sin(2x) + \frac{1}{2}cos(2x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalmente, o resultado:

$$\int xsin^2(x)dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\Big(xsin(2x) + \frac{1}{2}cos(2x)\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.13 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int ln^2(x)dx.$$

Resolução: Pela Observação 2.1, vamos considerar $u' = 1,\ \ v = ln^2(x)$ e, assim

$$u = \int 1dx = x,\ \ v' = 2ln(x)\frac{1}{x}.$$

Usando a expressão (2.1):

$$\begin{aligned}\int ln^2(x)dx &= xln^2(x) - \int 2xln(x)\frac{1}{x}dx\\ &= xln^2(x) - 2\int ln(x)dx.\end{aligned}$$

Para terminar a resolução do exercício basta determinar

$$\int ln(x)dx.$$

Usando a Observação 2.1 com a escolha $u' = 1$ e $v = ln(x)$ temos

$$u = \int 1dx = x,\ \ v' = \frac{1}{x},$$

e pela primitivação por partes, i.e. expressão (2.1), vem:

$$\begin{aligned}\int ln(x)dx &= xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx\\ &= xln(x) - \int 1dx\\ &= xln(x) - x + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Organizando o resultado:

$$\int ln^2(x)dx = xln^2(x) - 2\Big(xln(x) - x\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.14 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cos(ln(x))dx.$$

Resolução: Este exercício vai ser resolvido usando a estratégia utilizada na resolução do Exercício 2.4. Para tal, usando a Observação 2.1 com $u' = 1,\quad v = cos(ln(x))$ temos

$$u = \int 1dx = x,\ \ v' = -\frac{1}{x}sin(ln(x)).$$

Pela expressão (2.1), obtém-se:

$$\begin{aligned}\int cos(ln(x))dx &= xcos(ln(x)) - \int \big(-x\frac{1}{x}sin(ln(x))\big)dx\\ &= xcos(ln(x)) + \int sin(ln(x))dx.\end{aligned}$$

Primitivado novamente por partes a primitiva

$$\int sin(ln(x))dx$$

com a escolha adqueada, i.e. $u' = 1$ e $v = sin(ln(x))$, temos

$$u = \int 1dx = x,\ \ v' = \frac{1}{x}cos(ln(x)),$$

e, assim (via (2.1)):

$$\begin{aligned}\int cos(ln(x))dx &= xcos(ln(x)) + \int sin(ln(x))dx \\ &= xcos(ln(x)) + xsin(ln(x)) - \int cos(ln(x))dx.\end{aligned}$$

Agora, com um olhar *alegre e dinâmico* podemos verificar que o termo que está no lado esquerdo da expressão anterior também está no lado direito, e como tal, neste caso concreto, pode ser utilizado como variável. E, assim, obtemos:

$$\int cos(ln(x))dx = \frac{xcos(ln(x)) + xsin(ln(x))}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.15 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Resolução: Ao reescrever a expressão anterior temos:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^2 x\big(1-x^2\big)^{-1/2}dx.$$

Considerando $u' = x\big(1-x^2\big)^{-1/2}$ e $v = x^2$ temos: $v' = 2x$ e via (1.2)

$$\begin{aligned} u &= \int x\big(1-x^2\big)^{-1/2}dx = -\frac{1}{2}\int -2x\big(1-x^2\big)^{-1/2}dx \\ &= -\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

Pela expressão (2.1), obtém-se (via primitiva imediata (1.2)):

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -x^2\sqrt{1-x^2} - \int \Big(-2x\sqrt{1-x^2}\Big)dx \\ &= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{\big(1-x^2\big)^3} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 2.16 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int xsin(x)cos(x)dx.$$

Resolução: Ao usar a igualdade $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$ a expressão anterior, vem

$$\int xsin(x)cos(x)dx = \frac{1}{2}\int xsin(2x)dx.$$

Pela Observação 2.1 com $u' = sin(2x)$ e $v = x$ temos

$$u = \int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2sin(2x)dx = -\frac{1}{2}cos(2x), \quad v' = 1.$$

Então, utilizando a expressão (2.1), a primitiva imediata (1.15) e os conhecimentos adquiridos na resolução de outros exercícios, obtém-se:

$$\begin{aligned}\int xsin(x)cos(x)dx &= \frac{1}{2}\int xsin(2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{x}{2}cos(2x) + \frac{1}{4}\int 2cos(2x)dx\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{x}{2}cos(2x) + \frac{1}{4}sin(2x)\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 2.17 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int sin^4(x)dx.$$

Resolução: Ao simplificar a expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}\int sin^4(x)dx &= \int sin^2(x)sin^2(x)dx \\ &= \int sin^2(x)\big(1 - cos^2(x)\big)dx \\ &= \int sin^2(x)dx - \int sin^2(x)cos^2(x)dx. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

O exercício fica resolvido com o cálculo das primitivas anteriores. No caso de

$$\int sin^2(x)cos^2(x)dx = \int cos(x)cos(x)sin^2(x)dx,$$

temos, via Observação 2.1 $u' = cos(x)sin^2(x)$ e $v = cos(x)$ Então:

$$u = \int cos(x)sin^2(x)dx = \frac{sin^3(x)}{3}, \quad v' = -sin(x).$$

E, assim (via (2.1)):

$$\begin{aligned}\int sin^2(x)cos^2(x)dx &= \int cos(x)cos(x)sin^2(x)dx\\ &= \frac{cos(x)sin^3(x)}{3} + \frac{1}{3}\int sin^4(x)dx. \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Via resultado do Exercício 2.6, temos

$$\begin{aligned}\int sin^2(x)dx &= \int \big(1 - cos^2(x)\big)dx\\ &= \int 1dx - \int cos^2(x)dx\\ &= x - \frac{cos(x)sin(x) + x}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Aplicando (2.9), (2.10) em (2.8) e usando os conhecimentos adquiridos com a resolução de outros exercícios, temos

$$\int sin^4(x)dx = -\frac{1}{4}cos(x)sin^3(x) + \frac{3}{8}\big(x - cos(x)sin(x)\big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 2.18 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^m\, ln(x^2)dx,\ \ m \neq -1.$$

Resolução: Pela Observação 2.1 com $u' = x^m$ e $v = ln(x^2)$ temos

$$u = \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad v' = \frac{2}{x}.$$

Então, utilizando a expressão (2.1), obtém-se via primitiva imediata (1.2)

$$\begin{aligned}\int x^m\, ln(x^2)dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1}\, ln(x^2) - \frac{2}{m+1}\int x^m dx\\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1}\, ln(x^2) - \frac{2x^{m+1}}{(m+1)^2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 2.19 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^2cos(x)dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a $x^2cos(x)$. Usando a Observação 2.1 vamos considerar $u' = cos(x)$, $v = x^2$ e por consequência

$$u = \int cos(x)dx = sin(x), \quad v' = 2x.$$

Então, pela expressão (2.1), temos

$$F(x) = \int x^2cos(x)dx = x^2sin(x) - 2\int xsin(x)dx.$$

Para determinar a primitiva $\int xsin(x)dx$ vamos usar novamente a primitivação por partes, onde (via Observação 2.1):

$$u' = sin(x), \quad v = x,$$

e, assim

$$u = \int sin(x)dx = -cos(x), \quad v' = 1.$$

Aplicando os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores e usando a primitiva imediata (1.15), vem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2cos(x)dx = x^2sin(x) - 2\int xsin(x)dx \\ &= x^2sin(x) + 2xcos(x) - 2\int cos(x)dx \\ &= x^2sin(x) + 2xcos(x) - 2sin(x) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.20 *Para estimular a mente do leitor vamos considerar mais um problema relacionado com o xadrez (ver Figura 2.1). A pergunta é a seguinte: Como devem as peças brancas conduzir o seu ataque de modo a vencer o jogo em dois lances?*

Resolução: O lance fantástico das peças brancas é 1.e7+!! e como consequência o xeque-mate é inevitável. Se 1...Txe7 2.Dh8++, se 1...Rg8 2. Dh8++, outra alternativa é 1...Dxe7 2.Dh8++. ♣

Exercício 2.21 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int ln(2x+3)dx.$$

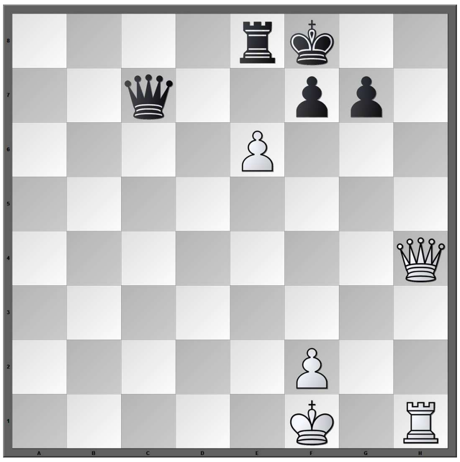

Figura 2.1: Uma posição simpática de um jogo de xadrez.

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ tal que a sua derivada seja igual a $ln(2x+3)$. Usando a Observação 2.1 vamos considerar $u' = 1$, $v = ln(2x+3)$ e por consequência

$$u = \int 1dx = x, \quad v' = \frac{2}{2x+3}.$$

Então, pela expressão (2.1), temos

$$F(x) \quad = \quad \int ln(2x+3)dx = xln(2x+3) - \int \frac{2x}{2x+3}dx.$$

Em relação à estratégia para determinar a primitiva $\displaystyle\int \frac{2x}{2x+3}dx$ ver o que foi dito na resolução do Exercício 2.9. Então, ao dividir a fracção em causa, temos

$$\frac{2x}{2x+3} = 1 - \frac{3}{2x+3}.$$

Finalmente, aplicando os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores e usando a primitiva imediata (1.11), vem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int ln(2x+3)dx = xln(2x+3) - \int \frac{2x}{2x+3}dx \\ &= xln(2x+3) - \int \big(1 - \frac{3}{2x+3}\big)dx \\ &= xln(2x+3) - \int 1dx + \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x+3}dx \\ &= xln(2x+3) - x + \frac{3}{2}ln|2x+3| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.22 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx.$$

Resolução: O nosso objectivo é encontrar uma função $F(x)$ algures no mundo fantástico da mente tal que a sua derivada seja igual a $\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$. Usando a Observação 2.1 vamos considerar $u' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $v = ln(x)$ e por consequência

$$u = \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}, \quad v' = \frac{1}{x}.$$

Então, pela expressão (2.1), temos

$$F(x) = \int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}ln(x) - \int 2\sqrt{x}\frac{1}{x}dx.$$

Aplicando os conhecimentos adquiridos na resolução de exercícios anteriores e usando a primitiva imediata (1.2), vem

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}ln(x) - \int 2\sqrt{x}\frac{1}{x}dx \\ &= 2\sqrt{x}ln(x) - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sqrt{x}ln(x) - 4\sqrt{x} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.23 *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$$

Resolução: Considerando o desdobramento

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}xdx$$

e a primitivação por partes com a escolha $u' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ e $v = x$ vem:

$$u = \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{-2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}, \quad v' = 1.$$

Finalmente via expressão (2.1) e primitiva imediata (1.18), temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx &= \int \frac{x}{(1+x^2)^2}xdx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}arctg(x) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 2.24 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^k e^x dx, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Resolução: Usando a primitivação por partes (2.1), i.e.

$$\int u'vdx = uv - \int uv'dx,$$

podemos obter algumas fórmulas de recorrência. Neste exercício a ideia é a primitivação de polinómios do tipo x^k multiplicado por e^x, i.e. $x^k e^x$ com k um número natural. Usando a Observação 2.1, ao considerar $u' = e^x$ e $v = x^k$ temos

$$u = \int e^x dx = e^x, \quad v' = kx^{k-1}$$

e, assim, obtém-se uma fórmula de recorrência, que permite descer sucessivamente o grau do polinómio até grau zero, i.e. até obter a primitiva imediata

$$\int e^x dx = e^x + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

E, assim, a fórmula de recorrência é:

$$\int x^k e^x dx = x^k e^k - k \int e^x x^{k-1} dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Exercício 2.25 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^k sin(x) dx, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Resolução: A primitivação de polinómios do tipo x^k multiplicado por $sin(x)$, i.e. $x^k sin(x)$ com k um número natural, obtém-se usando sucessivamente a primitivação por partes até que o polinómio x^k tenha grau zero. E, assim, temos por fim, apenas de calcular a primitiva imediata

$$\int sin(x) dx = -cos(x) + c, \forall c \in \mathbb{R} \text{ ou } \int cos(x) dx = sin(x) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta o que foi dito e Observação 2.1 ao considerar $u' = sin(x)$ e $v = x^k$, temos

$$u = \int sin(x) dx = -cos(x), \quad v' = kx^{k-1}$$

e, assim, obtém-se a fórmula de recorrência

$$\int x^k sin(x) dx = -x^k cos(x) + k \int x^{k-1} cos(x) dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Exercício 2.26 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int x^k cos(x) dx, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Resolução: A primitivação de polinómios do tipo x^k multiplicado por $cos(x)$, i.e. $x^k cos(x)$ com k um número natural, obtém-se usando sucessivamente a primitivação por partes até que o polinómio x^k tenha grau zero. E, assim, temos por fim, apenas de calcular a primitiva imediata

$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \ \text{ ou } \ \int cos(x)dx = sin(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta o que foi dito e Observação 2.1 ao considerar $u' = cos(x)$ e $v = x^k$, temos

$$u = \int cos(x)dx = sin(x), \quad v' = kx^{k-1}$$

e, assim, obtém-se a fórmula de recorrência

$$\int x^k cos(x)dx = x^k sin(x) - k \int x^{k-1} sin(x)dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Exercício 2.27 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva ($k \geqslant 2$ é um natural):*

$$\int sin^k(x)dx, .$$

Resolução: Seja k um natural, com $k \geqslant 2$. Para primitivar a potência $sin^k(x)$ a ideia é aplicar sucessivamente a primitivação por partes até obter uma primitiva imediata. Ao evidenciar na expressão a primitivar a função $sin(x)$, i.e.

$$\int sin^k(x)dx = \int sin(x) sin^{k-1}(x)dx,$$

e primitivando por partes (via Observação 2.1) com $u' = sin(x)$ e $v = sin^{k-1}(x)$, temos

$$u = \int sin(x)dx = -cos(x), \quad v' = (k-1) sin^{k-2}(x) cos(x)$$

e, assim, tem-se

$$\begin{aligned} \int sin^k(x)dx &= -cos(x) sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x) cos^2(x)dx \\ &= -cos(x) sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x) \Big(1 - sin^2(x)\Big)dx \\ &= -cos(x) sin^{k-1}(x) + (k-1) \int sin^{k-2}(x)dx - (k-1) \int sin^k(x)dx. \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação em relação à variável $\int sin^k(x)dx$, obtém-se a seguinte fórmula de recorrência

$$\int sin^k(x)dx = -\frac{1}{k}cos(x)sin^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int sin^{k-2}(x)dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Observação 2.3 (Fórmula de Recorrência) *Considerando um natural k ($k \geqslant 2$) e usando as ideias do Exercício 2.27 mas agora relativas à expressão $cos^k(x)$ (evidenciar a função $cos(x)$), a fórmula de recorrência para*

$$\int cos^k(x)dx,$$

é dada por

$$\int cos^k(x)dx = \frac{1}{k}sin(x)cos^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int cos^{k-2}(x)dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata.

Exercício 2.28 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int ln^k(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Resolução: Ao usar a primitivação por partes (via Observação 2.1) com $u' = 1$ e $v = ln^k(x)$, temos

$$u = \int 1dx = x, \quad v' = k\ ln^{k-1}(x)\ \frac{1}{x}$$

e, assim, tem-se a fórmula de recorrência

$$\begin{aligned}\int ln^k(x)dx &= xln^k(x) - \int k\frac{1}{x}xln^{k-1}(x)dx \\ &= xln^k(x) - k\int ln^{k-1}(x)dx.\end{aligned}$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Exercício 2.29 (Fórmula de Recorrência) *Determine a família da seguinte primitiva ($k > 1$ é um natural):*

$$\int tg^k(x)dx.$$

Resolução: Sabendo que $tg^2(x) = sec^2(x) - 1$ tem-se, via primitiva imediata (1.2), ao evidenciar na expressão a primitivar a função $tg^2(x)$, a seguinte fórmula de recorrência

$$\begin{aligned}\int tg^k(x)dx &= \int tg^{k-2}(x)tg^2(x)dx = \int tg^{k-2}(x)\big(sec^2(x) - 1\big)dx \\ &= \int tg^{k-2}(x)sec^2(x)dx - \int tg^{k-2}(x)dx \\ &= \frac{tg^{k-1}(x)}{k-1} - \int tg^{k-2}(x)dx.\end{aligned}$$

A esta fórmula aplica-se a mesma ideia, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Observação 2.4 (Fórmula de Recorrência) *Considerando um natural k ($k > 1$) e usando as ideias do Exercício 2.29 relativas á função $cotg^k(x)$ (evidenciar a função $cotg^2(x)$ e usar $cotg^2(x) = cosec^2(x) - 1$), a fórmula de recorrência para*

$$\int cotg^k(x)dx,$$

é dada por

$$\int cotg^k(x)dx = -\frac{cotg^{k-1}(x)}{k-1} - \int cotg^{k-2}(x)dx.$$

A esta fórmula aplica-se a mesma ideia, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata.

Exercício 2.30 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva ($k > 1$ é um natural):*

$$\int sec^k(x)dx.$$

Resolução: Ao evidenciar na expressão a primitivar a função $sec^2(x)$

$$\int sec^k(x)dx = \int sec^{k-2}(x)sec^2(x)dx$$

e, usando a primitivação por partes (via Observação 2.1) com $u' = sec^2(x)$ e $v = sec^{k-2}(x)$ temos

$$u = \int sec^2(x)dx = tg(x), \quad v' = (k-2)sec^{k-2}(x)tg(x).$$

Como consequência, e usando a relação $tg^2(x) = sec^2(x) - 1$, vem

$$\begin{aligned} & \int sec^k(x)dx = \int sec^{k-2}(x)sec^2(x)dx \\ = \quad & sec^{k-2}(x)tg(x) - (k-2)\int sec^{k-2}(x)tg^2(x)dx \\ = \quad & sec^{k-2}(x)tg(x) - (k-2)\int sec^{k-2}(x)\big(sec^2(x) - 1\big)dx \\ = \quad & sec^{k-2}(x)tg(x) - (k-2)\int sec^k(x)dx + (k-2)\int sec^{k-2}(x)dx. \end{aligned}$$

Finalmente, usando $\int sec^k(x)dx$ como variável, temos a seguinte fórmula de recorrência

$$\int sec^k(x)dx = \frac{sec^{k-2}(x)tg(x)}{k-1} + \frac{k-2}{k-1}\int sec^{k-2}(x)dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Observação 2.5 (Fórmula de Recorrência) *Considerando um natural k ($k > 1$) e usando as ideias do Exercício 2.30 relativas á função $cosec^k(x)$ (evidenciar a função $cosec^2(x)$), a fórmula de recorrência para*

$$\int cosec^k(x)dx,$$

é dada por

$$\int cosec^k(x)dx = -\frac{cosec^{k-2}(x)cotg(x)}{k-1} + \frac{k-2}{k-1}\int cosec^{k-2}(x)dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Exercício 2.31 (Fórmula de Recorrência) *Usando o método de primitivação por partes determine a família da seguinte primitiva ($n > 1$ é um natural):*

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Resolução: Recorrendo ao facto

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \quad (2.11)$$

temos apenas que calcular as primitivas do segundo membro da igualdade anterior. Mais concretamente apenas temos que calcular a 2ª primitiva. Para calcular a primitiva em causa basta tem em conta o seguinte desdobramento:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^n} x dx.$$

Usando a primitivação por partes com $u' = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ e $v = x$, vem

$$u = \int \frac{x}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-n} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1}, \quad v' = 1.$$

Então:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx, \qquad (2.12)$$

e organizando o resultado com base em (2.11) e (2.12), vem:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx.$$

A esta fórmula e usando a mesma estratégia, aplica-se a primitivação por partes, as vezes que forem necessárias, até obter uma primitiva imediata. ♣

Capítulo 3

Primitivas por Substituição

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza"

Bertrand Russel

Neste capítulo vamos apresentar a teoria sobre primitivas por substituição, explorando tal conceito com exercícios concretos. Novamente, é super importante o leitor dominar as primitivas imediatas e as primitivas por partes. Para o que se segue seja de um prazer infinito, convém que a magia da matemática e seus encantos habitem na mente do leitor.

3.1 Primitivas por substituição

De forma informal a primitivação por substituição diz-nos o seguinte: para calcular

$$\int f(x)dx$$

vamos considerar a mudança de variável $x = \varphi(t)$, em que φ é uma função contínua, com inversa e derivada contínua. Então, tendo em conta

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \quad i.e. \;\; dx = \varphi'(t)dt$$

temos

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{3.1}$$

Ao resolver o segundo termo na igualdade (3.1), o resultado vem em função da variável t. O resultado final é em função da variável x, e para tal basta usar o facto de φ ser invertível, i.e. $t = \varphi^{-1}(x)$ e substituir onde se encontra t no resultado obtido. Em termos mais precisos temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Sejam I e J dois intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e*

$$\varphi : J \to \mathbb{R}$$

uma função diferenciável que aplique bijectivamente o intervalo J sobre o intervalo I. Nestas condições, a função $\big(f \circ \varphi\big)\varphi'$ é primitivável e, designando por θ uma sua primitiva, $\theta \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamond$

Observação 3.1 *De uma maneira geral é de aplicar a primitivação por substituição quando conseguirmos encontrar uma substituição $x = \varphi(t)$ tal que a função $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ seja uma função que sabemos primitivar. Obtida uma primitiva (que será uma função de t), há que desfazer a substituição, ou seja regressar à variável inicial, i.e. x, para tal temos que compor o resultado obtido com $t = \varphi^{-1}(x)$.*

3.2 Exercícios sobre primitivas por substituição

Exercício 3.1 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx. \tag{3.2}$$

Resolução: Esta primitiva é uma aplicação directa da primitiva imediata (1.4). Mas o nosso objectivo é resolver o exercício em causa usando a primitivação por substituição. Sendo assim, ao olhar para a expressão (3.2) é fácil identificar o termo que está turvar o nosso pensamento, i.e. o termo $\sqrt{x}$. Então, ao considerar a substituição $\sqrt{x} = t$ temos

$$x = t^2, \ \ \frac{dx}{dt} = 2t, \ \ i.e. \ dx = 2t\,dt,$$

e assim usando a primitivação por substituição e primitiva imediata (1.4):

$$\begin{aligned}\int \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx &= \int \frac{sin(t)}{t}2t\,dt = 2\int sin(t)dt \\ &= -2cos(t) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para terminar a resolução temos que desfazer a substituição, i.e. regressar à variável x. Para tal basta ter em conta que $t = \sqrt{x}$ e temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= -2cos(t) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= -2cos(\sqrt{x}) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 3.2 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx.$$

Resolução: Sem dúvida alguma que a expressão $\sqrt{x}$ está a baralhar o meu pensamento. Ao considerar a substituição $\sqrt{x} = t$ temos $x = t^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ e $dx = 2t\ dt$. Então, via primitiva imediata (1.11), obtém-se

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx &= \int \frac{2t}{t(1+t)} dt = 2 \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= 2ln|1+t| + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= 2ln|1+\sqrt{x}| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 3.3 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int sin(ln(x)) dx. \tag{3.3}$$

Resolução: Ao considerar a substituição $ln(x) = t$ temos $x = e^t$, $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ e $dx = e^t dt$. Da expressão (3.3), obtém-se

$$\int sin(ln(x)) dx = \int e^t sin(t) dt.$$

Usando a primitivação por partes temos via Observação 2.1 o seguinte:

$$u' = e^t, \ \ v = sin(t)$$

e

$$u = \int e^t dt = e^t, \ \ v' = cos(t).$$

E, assim, usando a expressão (2.1), vem

$$\int e^t sin(t)dt = e^t sin(t) - \int e^t cos(t)dt.$$

Primitivando novamente por partes, com $u' = e^t$ e $v = cos(t)$, temos

$$u = \int e^t dt = e^t, \quad v' = -sin(t).$$

Obtendo assim:

$$\begin{aligned} \int e^t sin(t)dt &= e^t sin(t) - \int e^t cos(t)dt \\ &= e^t sin(t) - e^t cos(t) - \int e^t sin(t)dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, basta ter um olhar atento tipo *4 olhos* para verificar que o termo que está no lado esquerdo da expressão (3.4) também está no lado direito, e como tal, neste caso concreto, esse termo pode ser utilizado como variável. Assim,

$$\int e^t sin(t)dt = \frac{e^t\big(sin(t) - cos(t)\big)}{2} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, regressando à variável x temos

$$\int sin(ln(x))dx = \frac{x\big(sin(ln(x)) - cos(ln(x))\big)}{2} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 3.4 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx. \tag{3.5}$$

Resolução: Este exercício já foi resolvido pela primitivação por partes, mas agora desejamos resolver tal via primitivação por substituição. Neste caso concreto a substituição a fazer é $\sqrt{x} = t$ e assim temos $x = t^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ e $dx = 2t\ dt$. Então, a expressão (3.5), vem

$$\int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{ln(t^2)}{t}2t\ dt = 2\int ln(t^2)dt.$$

Usando a primitivação por partes temos via Observação 2.1 o seguinte:

$$u' = 1, \quad v = ln(t^2)$$

e

$$u = \int 1dt = t, \quad v' = \frac{2}{t}.$$

E, assim, usando a expressão (2.1), vem

$$\begin{aligned} \int ln(t^2)dt &= t\ ln(t^2) - \int 2dt \\ &= t\ ln(t^2) - 2t + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, regressando à variável x temos

$$\begin{aligned} \int \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}dx &= 2\big(t\ ln(t^2) - 2t\big) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= 2\big(\sqrt{x}\ ln(x) - 2\sqrt{x}\big) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 3.5 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx. \tag{3.6}$$

Resolução: A substituição a fazer é $\sqrt{x} = t$ e assim temos $x = t^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ e $dx = 2t\ dt$. Então, a expressão (3.6), vem

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx = \int \frac{2t}{t\sqrt{1+t}}dt = 2\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt.$$

Um olhar atento tipo *3 olhos* verifica que:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = \int \big(1+t\big)^{-1/2}dt.$$

Então, usando a primitiva imediata (1.2) com $M = 1 + t$ e $\beta = -1/2$, vem

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = \int \big(1+t\big)^{-1/2}dt = 2\sqrt{1+t} + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável x, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx &= 2\int \big(1+t\big)^{-1/2}dt\\ &= 4\sqrt{1+t}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}\\ &= 4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.6 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}dx.$$

Resolução: Considerando $e^x = t$ temos $x = ln(t)$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$ e $dx = \dfrac{1}{t}dt$. Então, via primitiva imediata (1.2) com $M = 1+2t$ e $\beta = -1/3$, vem:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}dx &= \int \frac{t}{t\sqrt[3]{1+2t}}dt = \frac{1}{2}\int 2\big(1+2t\big)^{-1/3}dt\\ &= \frac{1}{2}\frac{\big(1+2t\big)^{2/3}}{2/3}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}\\ &= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\big(1+2t\big)^2}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Regressando à variável x, temos

$$\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\big(1+2e^x\big)^2}+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit$$

Exercício 3.7 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \sqrt{a^2-b^2x^2}dx,\ a,b\in\mathbb{R}^+.$$

Resolução: Neste caso concreto a substituição recomendável é

$$x = \frac{a}{b}sin(t). \tag{3.7}$$

E, para esta substituição vem $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{b}cos(t)$ e $dx = \dfrac{a}{b}cos(t)dt$, assim

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx &= \int \sqrt{a^2 - b^2\frac{a^2}{b^2}sin^2(t)}\ \frac{a}{b}cos(t)dt \\
&= \frac{a}{b}\int \sqrt{a^2(1 - sin^2(t))}\ cos(t)dt \\
&= \frac{a^2}{b}\int cos^2(t)dt.
\end{aligned}$$

Usando o Exercício 2.6, vem

$$\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx = \frac{a^2}{b}\frac{cos(t)sin(t) + t}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Agora, temos que regressar à variável inicial x. Da substituição (3.7), obtém-se:

$$sin(t) = \frac{bx}{a},\ \ t = arcsin(\frac{bx}{a}),$$

e, obtém-se, via fórmula fundamental da trigonometria

$$cos(t) = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2x^2}.$$

Tendo em conta os resultadas anteriores, o resultado (3.8) em função da variável x é dado por:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}dx &= \frac{a^2}{b}\frac{cos(t)sin(t) + t}{2} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}arcsin(\frac{bx}{a}) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.8 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \sqrt{4 - 3x^2}dx. \tag{3.9}$$

Resolução: Podemos reescrever (3.9) da seguinte forma:

$$\int \sqrt{4 - 3x^2}dx = \int \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2x^2}dx.$$

Para resolver o nosso problema basta aplicar o Exercício 3.7, para $a = 2$ e $b = \sqrt{3}$. E, assim

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-3x^2}dx &= \int \sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2x^2}dx\\ &= \frac{x\sqrt{4-3x^2}}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}arcsin(\frac{\sqrt{3}x}{2})+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.9 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{ln^4(x)}{x\big(ln^2(x)+1\big)}dx.$$

Resolução: Olhando para o nosso problema com um *olhar imortal* vem que a substituição a fazer é:

$$ln(x) = t.$$

E, assim, temos $x = e^t$, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e $dx = e^t dt$. Tendo em conta esta substituição, vem

$$\begin{aligned}\int \frac{ln^4(x)}{x\big(ln^2(x)+1\big)}dx &= \int \frac{t^4}{e^t\big(t^2+1\big)}e^t dt\\ &= \int \frac{t^4}{t^2+1}dt.\end{aligned}$$

Dividindo os polinómios da fracção[1] em causa (no capítulo seguinte vamos generalizar as primitivas de fracções racionais), obtém-se:

$$\frac{t^4}{t^2+1} = t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

Aplicando o resultado anterior e os conhecimentos adquiridos anteriormente:

$$\begin{aligned}\int \frac{ln^4(x)}{x\big(ln^2(x)+1\big)}dx &= \int \Big(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\Big)dt\\ &= \int \big(t^2-1\big)dt+\int \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \frac{t^3}{3}-t+arctg(t)+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

[1]Divide-se sempre que a ordem do polinómio que está no numerador é superior ou igual à ordem do polinómio que está em denominador.

Tendo em conta a substituição em causa, ao regressar à variável inicial x, obtém-se:

$$\int \frac{ln^4(x)}{x\big(ln^2(x)+1\big)}dx = \frac{ln^3(x)}{3} - ln(x) + arctg(ln(x)) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 3.10 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx.$$

Resolução: Neste caso o olhar desperta a mente para a seguinte substituição:

$$e^x = t.$$

E, assim, $x = ln(t)$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$ e $dx = \dfrac{1}{t}dt$. Tendo em conta esta substituição e os resultados adquiridos anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx &= \int \frac{t}{t^2+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= arctg(e^x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 3.11 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx.$$

Resolução: Neste tipo de primitiva o segredo é considerar a seguinte substituição:

$$x = t^\beta$$

onde β é o *mínimo múltiplo comum* dos índices das raízes da fracção da função a primitivar. Neste caso concreto o mínimo múltiplo comum entre os índices $2, 3$ e 6 é $\beta = 6$. Como consequência:

$$\frac{dx}{dt} = 6t^5,\ \ dx = 6t^5dt\ \ e\ \ t = \sqrt[6]{x}$$

e, assim, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx &= \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{(t^6)^2}+\sqrt[6]{(t^6)^5}}6t^5dt = 6\int \frac{\sqrt{(t^3)^2}}{\sqrt[3]{(t^4)^3}+\sqrt[6]{(t^5)^6}}t^5dt \\
&= 6\int \frac{t^3}{t^4+t^5}t^5dt = 6\int \frac{t^3}{t^4\big(1+t\big)}t^5dt \\
&= 6\int \frac{t^4}{1+t}dt.
\end{aligned}$$

Ao dividir a fracção anterior, obtém-se[2]:

$$\frac{t^4}{t+1} = t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}.$$

Aplicando este resultado na resolução do nosso exercício e usando alguns conhecimentos adquiridos anteriormente, vem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx &= 6\int \frac{t^4}{1+t}dt = 6\int \Big(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\Big)dt \\
&= 6\int \big(t^3 - t^2 + t - 1\big)dt + 6\int \frac{1}{t+1}dt \\
&= 6\Big[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + ln|t+1|\Big] + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= 6\Big[\frac{\big(\sqrt[6]{x}\big)^4}{4} - \frac{\big(\sqrt[6]{x}\big)^3}{3} + \frac{\big(\sqrt[6]{x}\big)^2}{2} - \sqrt[6]{x} \\
&+ \ ln|\sqrt[6]{x}+1|\Big] + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.12 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}dx,\ a,b \in \mathbb{R}^+.$$

Resolução: Considerando a seguinte substituição

$$x = \frac{a}{b}sec(t),$$

[2] Divide-se sempre que a ordem do polinómio que está no numerador é superior ou igual à ordem do polinómio que está em denominador.

temos
$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{b}sec(t)tg(t), \;\; dx = \frac{a}{b}sec(t)tg(t)dt, \;\; t = arcsec(\frac{bx}{a}).$$
E, assim
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{b^2\frac{a^2}{b^2}sec^2(t) - a^2}}\frac{a}{b}sec(t)tg(t)dt \\ &= \frac{1}{b}\int \frac{sec(t)tg(t)}{\sqrt{sec^2(t) - 1}}dt.\end{aligned}$$
Tendo em conta que
$$tg^2(t) = sec^2(t) - 1$$
temos
$$\int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}dx = \frac{1}{b}\int sec(t)dt.$$
A primitiva do segundo membro da expressão anterior é uma aplicação directa da primitiva imediata (1.26):
$$\int sec(t)dt = ln \mid sec(t) + tg(t) \mid +c, \; \forall c \in \mathbb{R}.$$
Finalmente, tendo em conta
$$sec(t) = \frac{bx}{a}, \;\; tg(t) = \sqrt{sec^2(t) - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{b^2x^2 - a^2},$$
vem:
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}}dx &= \frac{1}{b}ln \mid sec(t) + tg(t) \mid +c, \; \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{b}ln \mid \frac{bx}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{b^2x^2 - a^2} \mid +c, \; \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.13 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}dx, \; a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Resolução: Considerando a seguinte substituição

$$x = \frac{a}{b} tg(t),$$

temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{b} sec^2(t), \quad dx = \frac{a}{b} sec^2(t) dt, \quad t = arctg(\frac{bx}{a}).$$

E, assim, usando as ideias da resolução do exercício anterior, em particular a primitiva imediata (1.26), vem

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2\frac{a^2}{b^2}tg^2(t)}} \frac{a}{b} sec^2(t) dt \\
&= \frac{1}{b} \int \frac{sec^2(t)}{\sqrt{1+tg^2(t)}} dt \\
&= \frac{1}{b} \int \frac{sec^2(t)}{sec(t)} dt = \frac{1}{b} \int sec(t) dt \\
&= \frac{1}{b} ln \mid sec(t) + tg(t) \mid +c, \ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta:

$$tg(t) = \frac{bx}{a}, \quad sec(t) = \sqrt{tg^2(t)+1} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2x^2},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} dx &= \frac{1}{b} ln \mid sec(t) + tg(t) \mid +c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{b} ln \mid \frac{1}{a}\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{bx}{a} \mid +c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.14 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Resolução: Neste caso concreto a tentação é considerar a seguinte substituição:

$$e^x = t.$$

O leitor pode verificar que a consequência desta substituição não é nada animadora[3]. Considerando a substituição:

$$\sqrt{e^x - 1} = t$$

temos

$$x = ln(t^2+1), \ \ \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}, \ \ dx = \frac{2t}{t^2+1}dt.$$

Então, usando os conhecimentos adquiridos na resolução de outros exercícios:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x - 1}dx &= \int t\frac{2t}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int \big(1 - \frac{1}{t^2+1}\big)dt \\
&= 2\int 1dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt \\
&= 2t - 2\ arctg(t) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= 2\sqrt{e^x - 1} - 2\ arctg(\sqrt{e^x - 1}) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.15 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx.$$

Resolução: Ao considerar a substituição $t = \sqrt{x}$ temos $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ e $dx = 2t\ dt$. E, assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx &= \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}2tdt \\
&= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Via primitiva imediata (1.24) a expressão (3.10), vem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx &= 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= 2\ arcsin(t) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= 2\ arcsin(\sqrt{x}) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit
\end{aligned}$$

[3]Seria interessante o leitor tentar resolver o exercício proposto usando a substituição $e^x = t$.

Exercício 3.16 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int cos^3(x)sin(x)dx.$$

Resolução: A primitiva em causa é imediata. Mas queremos resolver o exercício usando a primitivação por substituição. Considerando $t = cos(x)$ temos

$$x = arccos(t),\ \ \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}},\ \ dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt,\ \ sin(x) = \sqrt{1-cos^2(x)} = \sqrt{1-t^2}.$$

Então:

$$\begin{aligned}\int cos^3(x)sin(x)dx &= \int t^3\sqrt{1-t^2}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{cos^4(x)}{4} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Observação 3.2 *Relativamente ao exercício anterior outra forma de pensar para a mesma substituição $t = cos(x)$ seria:*

$$\frac{dt}{dx} = -sin(x),\ \ -dt = sin(x)dx.$$

E, assim

$$\begin{aligned}\int cos^3(x)sin(x)dx &= \int t^3(-dt) \\ &= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{cos^4(x)}{4} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.17 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{sin(x)}dx.$$

Resolução: Tendo em conta a relação[4] $sin(x) = \dfrac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$, temos

$$\int \frac{1}{sin(x)}dx = \int \frac{1+tg^2(\frac{x}{2})}{2tg(\frac{x}{2})}dx.$$

Ao considerar a substituição $t = tg(\dfrac{x}{2})$ obtém-se $\dfrac{x}{2} = arctg(t)$, i.e. $x = 2arctg(t)$. E, assim

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Por consequência:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{sin(x)}dx &= \int \frac{1+tg^2(\dfrac{x}{2})}{2tg(\dfrac{x}{2})}dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \times \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{t}dt = ln|t| + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= ln|tg(\frac{x}{2})| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \ \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.18 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-2}}dx.$$

Resolução: No caso geral $\sqrt{ax^2+bx+c}$ podemos considerar três casos possíveis para a substituição:

(i) se $a > 0$ podemos considerar $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$;

(ii) se $c > 0$ podemos considerar $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + xt$;

(iii) se α é uma raiz real de ax^2+bx+c podemos considerar

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \big(x-\alpha\big)t.$$

[4] Para o *coseno* existe a seguinte relação simpática: $cos(x) = \dfrac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$.

Na resolução do exercício em causa vamos considerar a opção (iii). O polinómio $p(x) = x^2 - x - 2$ tem raíz em $x = -1$ pois $p(-1) = 0$ e em $x = 2$ pois $p(2) = 0$. Escolhendo a raiz $\alpha = -1$ em (iii), temos:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{(x+1)(x-2)} = \big(x+1\big)t.$$

Como consequência desta escolha, obtém-se:

$$x = \frac{t^2+2}{1-t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{6t}{(1-t^2)^2}, \quad dx = \frac{6t}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \frac{3t}{1-t^2}, \qquad t = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}.$$

E, assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x-2}}dx &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2+2}{1-t^2} \times \dfrac{3t}{1-t^2}} \times \frac{6t}{(1-t^2)^2}dt \\
&= \int \frac{2}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}dt \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1/\sqrt{2}}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})^2}dt = \sqrt{2}arctg(\frac{t}{\sqrt{2}}) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \sqrt{2}arctg\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\Big) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.19 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}dx.$$

Resolução: Em virtude da substituição $x = \alpha + \beta tg(t)$ temos $\dfrac{dx}{dt} = \beta sec^2(t)$, $dx = \beta sec^2(t)dt$ e ainda

$$t = arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}).$$

Então:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx &= \int \frac{\alpha+\beta tg(t)}{\beta^2 tg^2(t)+\beta^2}\beta sec^2(t)dt\\ &= \int \frac{\alpha+\beta tg(t)}{\beta^2\big(tg^2(t)+1\big)}\beta sec^2(t)dt.\end{aligned}$$

Ao usar a expressão $sec^2(t) = tg^2(t)+1$ na igualdade anterior obtém-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx &= \frac{1}{\beta}\int \big(\alpha+\beta tg(t)\big)dt = \frac{\alpha}{\beta}\int 1dt + \int tg(t)dt\\ &= \frac{\alpha}{\beta}t - \int \frac{-sin(t)}{cos(t)}dt = \frac{\alpha}{\beta}t - ln|cos(t)| + c,\ \forall c\in\mathbb{R}\\ &= \frac{\alpha}{\beta}arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}) - ln|cos(arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}))| + c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.20 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1+tg^2(x)}{tg(x)}dx.$$

Resolução: A primitiva em causa é de cálculo imediato mas o nosso objectivo é aplicar a primitivação por substituição. Sem dúvida alguma que o termo $tg(x)$ está a turvar a resolução do nosso exercício. Ao considerar $t = tg(x)$ temos $x = arctg(t)$ e

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2},\quad dx = \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Então:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+tg^2(x)}{tg(x)}dx &= \int \frac{1+t^2}{t}\times\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt\\ &= ln|t| + c,\ \forall c\in\mathbb{R}\\ &= ln|tg(x)| + c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.21 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$$

Resolução: Ao considerar na mente humana a substituição $t = \sqrt{x-1}$ temos: $x = t^2 + 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t$ e $dx = 2tdt$. Então:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt.$$

Sabendo que[5]

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

obtém-se, ao desfazer a substituição:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \\
&= 2 \int 1dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\
&= 2t - arctg(t) + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= 2\sqrt{x-1} - arctg(\sqrt{x-1}) + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.22 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int sin^4(x) cos^5(x) dx.$$

Resolução: Para m, n inteiros positivos o caso geral vem:

$$\int sin^m(x) cos^n(x) dx.$$

Esta primitiva pode ser calculada de forma adequada via um dos três procedimentos sugeridos na Tabela 3.1.

[5]Divide-se sempre que a ordem do polinómio que está no numerador é superior ou igual à ordem do polinómio que está em denominador.

$\int sin^m(x)cos^n(x)dx$	Procedimento	Identidade
n ímpar	separar um factor $cos(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = sin(x)$	$cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$
m ímpar	separar um factor $sin(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = cos(x)$	$sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$
n, m par	usar a identidade apresentada para reduzir a potências do $sin(x)$ e $cos(x)$	$cos^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 + cos(2x)\big)$ $sin^2(x) = \frac{1}{2}\big(1 - cos(2x)\big)$

Tabela 3.1: Critérios a ter em conta para calcular a primitiva de $\int sin^m(x)cos^n(x)dx$, com m e n inteiros positivos.

Segundo o caso geral, ver Tabela 3.1, ao usar a substituição $t = sin(x)$ vem $\dfrac{dt}{dx} = cos(x)$, i.e. $dt = cos(x)dx$. Então:

$$\begin{aligned}\int sin^4(x)cos^5(x)dx &= \int sin^4(x)cos^4(x)cos(x)dx\\ &= \int sin^4(x)\big(1 - sin^2(x)\big)^4 cos(x)dx\\ &= \int t^4(1-t^2)^4dt = \int \big(t^4 - 4t^6 + 6t^8 - 4t^{10} + t^{12}\big)dt\\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{4t^7}{7} + \frac{6t^9}{9} - \frac{4t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Regressando à variável x, temos

$$\begin{aligned}\int sin^4(x)cos^5(x)dx &= \frac{1}{5}sin^5(x) - \frac{4}{7}sin^7(x) + \frac{6}{9}sin^9(x)\\ &- \frac{4}{11}sin^{11}(x) + \frac{1}{13}sin^{13}(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.23 *Usando o método de primitivação por substituição determine a* *família da seguinte primitiva:*

$$\int sin^4(x)cos^4(x)dx.$$

Resolução: Tendo em conta a Tabela 3.1 e os conhecimentos adquiridos anteriormente, temos

$$\begin{aligned}\int sin^4(x)cos^4(x)dx &= \int \big(sin^2(x)\big)^2\big(cos^2(x)\big)^2 dx\\ &= \int \Big(\frac{1}{2}\big(1-cos(2x)\big)\Big)^2\Big(\frac{1}{2}\big(1+cos(2x)\big)\Big)^2 dx\\ &= \frac{1}{16}\int \big(1-cos^2(2x)\big)^2 dx = \frac{1}{16}\int sin^4(2x)dx.\end{aligned}$$

Usando a substituição $t = 2x$ onde $dx = \frac{1}{2}dt$, obtém-se via Exercício 2.17

$$\begin{aligned}&\int sin^4(x)cos^4(x)dx = \frac{1}{16}\int sin^4(2x)dx = \frac{1}{32}\int sin^4(t)dt\\ = &\ \frac{1}{32}\Big[-\frac{1}{4}cos(t)sin^3(t) + \frac{3}{8}\big(t - cos(t)sin(t)\big)\Big] + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Regressando à variável x, temos

$$\begin{aligned}\int sin^4(x)cos^4(x)dx &= \frac{1}{32}\Big[-\frac{1}{4}cos(2x)sin^3(2x)\\ &+ \frac{3}{8}\big(2x - cos(2x)sin(2x)\big)\Big] + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.24 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int tg^2(x)sec^4(x)dx.$$

Resolução: Para m, n inteiros positivos o caso geral vem:

$$\int tg^m(x)sec^n(x)dx.$$

Esta primitiva pode ser calculada usando de forma adequada um dos três procedimentos sugeridos na Tabela 3.2.

$\int tg^m(x)sec^n(x)dx$	Procedimento	Identidade
n par	separar um factor $sec^2(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = tg(x)$	$sec^2(x) = tg^2(x) + 1$
m ímpar	separar um factor $sec(x)tg(x)$ aplicar a identidade apresentada fazer a substituição $t = sec(x)$	$tg^2(x) = sec^2(x) - 1$
m par, n ímpar	usar a identidade apresentada para reduzir a potências de $sec(x)$	$tg^2(x) = sec^2(x) - 1$

Tabela 3.2: Critérios a ter em conta para calcular a primitiva de $\int tg^m(x)sec^n(x)dx$, com m e n inteiros positivos.

Segundo o caso geral, ver Tabela 3.2, ao usar a substituição $t = tg(x)$ onde $dt = sec^2(x)dx$ e o conhecimento $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$, vem

$$\begin{aligned}
\int tg^2(x)sec^4(x)dx &= \int tg^2(x)sec^2(x)sec^2(x)dx \\
&= \int tg^2(x)\big(tg^2(x)+1\big)sec^2(x)dx \\
&= \int t^2\big(t^2+1\big)dt = \int \big(t^4+t^2\big)dt \\
&= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Regressando à variável x, temos

$$\begin{aligned}
\int tg^2(x)sec^4(x)dx &= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{5}\,tg^5(x) + \frac{1}{3}\,tg^3(x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.25 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{ln(2x)}{xln(4x)}dx.$$

Resolução: Usando a propriedade da função logaritmo $ln(ab) = ln(a)+ln(b), \forall a, b \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\int \frac{ln(2x)}{xln(4x)}dx = \int \frac{ln(2) + ln(x)}{x(ln(4) + ln(x))}dx.$$

Considerando a substituição $ln(x) = t$, vem $x = e^t$ e $dx = e^t dt$. Então, usando primitivas imediatas do conhecimento do leitor:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ln(2x)}{xln(4x)}dx &= \int \frac{ln(2) + ln(x)}{x(ln(4) + ln(x))}dx = \int \frac{ln(2) + t}{e^t(ln(4) + t)}e^t dt \\
&= \int \frac{ln(2) + t}{ln(4) + t}dt = \int \frac{ln(2)}{ln(4) + t}dt + \int \frac{t}{ln(4) + t}dt \\
&= ln(2)ln|ln(4) + t| + \int (1 - \frac{ln(4)}{ln(4) + t})dt \\
&= ln(2)ln|ln(4) + t| + t - ln(4)ln|ln(4) + t| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Finalmente, regressando á variável x:

$$\int \frac{ln(2x)}{xln(4x)}dx = ln(2)ln|ln(4) + ln(x)| + ln(x) - ln(4)ln|ln(4) + ln(x)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 3.26 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2}dx.$$

Resolução: Este exercício é super interessante pois vamos efectuar duas substituições e ainda a primitiva imediata da *secante*. Usando algumas propriedades:

$$\int \frac{\sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{3}{2}x^2\right)}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}dx.$$

A primeira substituição a fazer é $\sqrt{\frac{3}{2}}x = t$, e assim $dx = \sqrt{\frac{2}{3}}dt$. Então:

$$\int \frac{\sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}dt.$$

Agora, a substituição é $t = tg(w)$, e assim $dt = sec^2(w)dw$. Simplificando:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(w)}}sec^2(w)dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{sec^2(w)}}sec^2(w)dw = \frac{1}{\sqrt{3}}\int sec(w)dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}ln|sec(w)+tg(w)| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pelo facto de $1 + tg^2(w) = sec^2(w)$ temos via $t = tg(w)$ que $sec(w) = \sqrt{1+t^2}$, e assim:

$$\int \frac{\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}ln|\sqrt{1+t^2}+t| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

Regressando agora á variável x:

$$\int \frac{\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}ln|\sqrt{1+\frac{3}{2}x^2}+\sqrt{\frac{3}{2}}x| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\clubsuit$$

Exercício 3.27 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx.$$

Resolução: Consideranto a substituição $\sqrt{2+4x} = t$ temos:

$$x = \frac{t^2-2}{4},\ dx = \frac{t}{2}dt.$$

Sendo assim a resolução vem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx &= \int \frac{\frac{t^2-2}{4}}{t}\frac{t}{2}dt = \int \frac{t^2-2}{8}dt \\
&= \frac{1}{8}\int \big(t^2-2\big)dt \\
&= \frac{1}{8}\big(\frac{t^3}{3}-2t\big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{24}\big(\sqrt{2+4x}\big)^3 - \frac{1}{4}\sqrt{2+4x} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 3.28 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$$

Resolução: Vamos considerar a substituição $\sqrt{x} = t$, i.e. $x = t^2$ e $dx = 2tdt$. Então, via primitivação por substituição e primitiva imediata (1.18), vem ao desfazer a substituição:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx &= \int \frac{1}{t(t^2+1)}2tdt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= 2arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= 2arctg(\sqrt{x}) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.29 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx.$$

Resolução: Considerando a substituição $e^x = t$ vem $x = ln(t)$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Simplificando

$$\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{t}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt.$$

Ao aplicar a primitiva imediata (1.18) e desfazendo a substituição temos

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx &= \int \frac{1}{t^2+1}dt = arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= arctg(e^x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.30 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx.$$

Resolução: Neste caso a substituição a fazer é $\sqrt{x} = t$. Como consequência vem

$$x = t^2,\ \frac{dx}{dt} = 2t,\ dx = 2tdt$$

e assim:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{t^2+t}2tdt = 2\int \frac{1}{t+1}dt.$$

Usando a primitiva imediata (1.11) e desfazendo a substituição temos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx &= 2ln|t+1|+c,\ \forall c\in\mathbb{R}\\ &= 2ln|\sqrt{x}+1|+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 3.31 *Usando o método de primitivação por substituição determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{8}{\sqrt{x^2-9}}dx.$$

Resolução: Considerando a substituição $x = 3sec(t)$ vem $dx = 3sec(t)tg(t)dt$. Tendo em conta a relação $tg^2(t)+1 = sec^2(t)$, aplicando a primitivação por substituição e primitiva imediata (1.26), vem:

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{\sqrt{x^2-9}}dx &= \int \frac{8}{\sqrt{9sec^2(t)-9}}3sec(t)tg(t)dt = 8\int \frac{3sec(t)tg(t)}{\sqrt{9}\sqrt{sec^2t)-1}}dt\\ &= 8\int \frac{sec(t)tg(t)}{\sqrt{tg^2(t)}}dt = 8\int sec(t)dt\\ &= 8ln|sec(t)+tg(t)|+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para $x = 3sec(t)$ temos

$$sec(t) = \frac{x}{3},\ \ tg(t) = \sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$$

e ao desfazer a substituição:

$$\int \frac{8}{\sqrt{x^2-9}}dx = 8ln|\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}|+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\clubsuit$$

Exercício 3.32 *Para terminar este capítulo em beleza mental vamos considerar a seguinte posição (ver Figura 3.1) de um jogo de xadrez. Qual será a sequência de lances das peças brancas com o objectivo de vencer o jogo?*

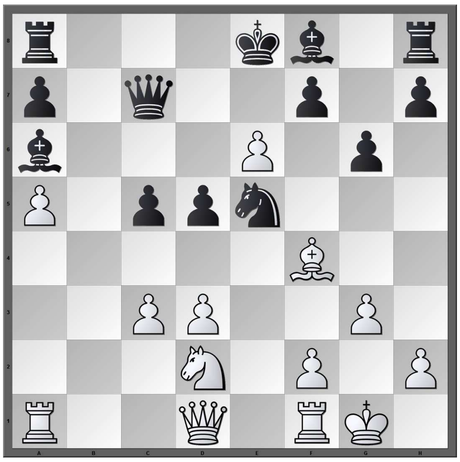

Figura 3.1: Uma posição simpática de um jogo de xadrez.

Resolução: O excelente jogador de xadrez não é aquele que descobre a solução num curto espaço de tempo, errado!! O excelente jogador é aquele que analisa a posição, que sabe olhar para a disposição de todas as peças e sua dinâmica, tanto as suas como as do adversário, que sabe identificar os pontos fracos da sua posição e da do seu adversário e sabe como organizar na mente uma estratégia de forma a tirar proveito das fraquezas da posição do adversário e evitanto, ao mesmo tempo, o contra ataque. Relativamente ao problema em causa: o lance fantástico das peças brancas é 1.BxC!! Como consequência o Bispo branco ataca a Torre e a Dama preta e as peças pretas ficam em apuros. Caso 1...DxB 2.Da4+ Re6 (se 2...Rd8 3.Dd7++) 3.Dd7+ Rf6 4.Dxf7+ Rg5 5.Cf3+ e as peças pretas abandonam pois vão perder a sua Dama. Caso a Dama preta não capature o Bispo branco então as peças brancas ganham qualidade decisiva. ♣

Capítulo 4

Primitivas de funções Racionais

"Não há ramo da Matemática, por mais abstracto que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real"

Lobachevsky

Neste capítulo vamos apresentar as ideias sobre como resolver uma primitiva envolvendo fracções racionais. Por vezes a resolução de uma situação com fracções racionais, para além de primitivas imediatas, pode envolver primitivação por partes e por sustituição. Por conseguinte, neste momento a *mente do leitor* tem que estar *bem arrumada* no que diz respeito a primitivas imediatas, por partes e por substituição.

4.1 Primitivas de funções racionais

A ideia é obter uma primitiva da seguinte fracção racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{4.1}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios na variável x. A fracção (4.1) diz-se própria se o grau do polinómio $P(x)$ é inferior ao grau do polinómio $Q(x)$ e diz-se imprópria no caso contrário. Se a fracção (4.1) for imprópria, é possível, pela divisão de polinómios, obter

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{4.2}$$

em que o grau do polinómio $R(x)$ (polinómio resto) é inferior ao grau do polinómio $Q(x)$ (polinómio quociente). De uma maneira geral para obter uma primitiva da fracção (4.1) temos que, em primeiro lugar, reduzir toda a fracção racional imprópria numa fracção própria através da divisão de polinómios. E por decomposição, o problema fica reduzido à primitivação de fracções racionais próprias.

Teorema 4.1 *Sejam P e Q dois polinómios com grau de P inferior ao grau de Q. Então,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

é a soma de um número finito de fracções racionais simples de dois tipos:

$$i)\ \frac{A}{\left(x-a\right)^k},\qquad ii)\ \frac{Bx+C}{\left[\left(x-\alpha\right)^2+\beta^2\right]^l},$$

onde os parâmetros A, B e C são constantes reais; $(x-a)^k$ e $\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^l$ são os factores irredutíveis da decomposição de $Q(x)$, sendo $x=a$ uma raiz real de multiplicidade k e $x=\alpha\pm i\beta$ uma raiz complexa[1] *de multiplicidade l. Mais precisamente, generalizando, se*

$$Q(x)=(x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_p)^{n_p}\left[\left(x-\alpha_1\right)^2+\beta_1^2\right]^{m_1}\dots\left[\left(x-\alpha_q\right)^2+\beta_q^2\right]^{m_q},$$

então

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}+\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_j}\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{\left[\left(x-\alpha_j\right)^2+\beta_j^2\right]^l}. \tag{4.3}$$

Demonstração: Consultar bibliografia. $\diamond$

Observação 4.1 *Como consequência do Teorema 4.1, a primitiva da expressão* (4.3)*, vem*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i}\int\frac{A_{ik}}{(x-a_i)^k}dx+\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{m_j}\int\frac{B_{jl}x+C_{jl}}{\left[\left(x-\alpha_j\right)^2+\beta_j^2\right]^l}dx.$$

[1]Sendo $i=\sqrt{-1}$ a unidade imaginária.

Observação 4.2 *Naturalmente, no membro da direita da igualdade* (4.3)*, estará ausente o primeiro somatório se $Q(x)$ não tiver raízes reais; e estará ausente o segundo se $Q(x)$ só tiver raízes reais; e claro estão ambos presentes se houver raízes reais e não reais.*

Observação 4.3 *A igualdade* (4.3) *reduz-se, após desembaraçar de denominadores, a uma igualdade de polinómios e os coeficientes A_{ik}, B_{jl} e C_{jl} podem ser calculados utilizando, por exemplo, o método dos coeficientes indeterminados. Generalizando, dados os polinómios*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

e

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

com o mesmo grau n, temos que $P(x) = Q(x)$ sse

$$a_n = b_n, \;\; a_{n-1} = b_{n-1}, \;\; \ldots, \;\; a_1 = b_1, \;\; a_0 = b_0.$$

4.2 Exercícios sobre primitivas de funções racionais

Exercício 4.1 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx, \;\; a, A \in \mathbb{R}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Resolução: O caso $k = 1$ é uma aplicação directa da primitiva imediata (1.11) com $M = x - a$ ($M' = 1$ e já se encontra no numerador), i.e.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{1}{x-a} dx = A \; ln|x-a| + c, \forall c \in \mathbb{R}.$$

Entretanto, para a situação $k > 1$ basta aplicar a primitiva imediata (1.2) com $M = x - a$ e $\beta = -k$ ($M' = 1$ e já se encontra na função a primitivar), i.e.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + c, \forall c \in \mathbb{R}.\clubsuit$$

Exercício 4.2 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{Bx + C}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m} dx, \;\; B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \;\; m \in \mathbb{N}.$$

Resolução: Basta aplicar a substituição $x = \alpha + \beta tg(t)$. Como consequência:

$$\frac{dx}{dt} = \beta sec^2(t), \quad dx = \beta sec^2(t)dt, \quad t = arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}).$$

E, assim, com a substituição anterior temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{\Big[\big(x-\alpha\big)^2+\beta^2\Big]^m}dx &= \int \Big[\frac{B(\alpha+\beta tg(t))+C}{\big(\beta^2 tg^2(t)+\beta^2\big)^m}\beta sec^2(t)\Big]dt \\ &= \int \Big[\frac{B\alpha+C+B\beta tg(t)}{\big(\beta^2 sec^2(t)\big)^m}\beta sec^2(t)\Big]dt.\end{aligned}$$

Caso $m = 1$. Usando a primitiva de uma constante, a primitva imediata (1.11) e simplificando, vem:

$$\begin{aligned}\int \Big[\frac{B\alpha+C}{\beta}+Btg(t)\Big]dt &= \int \Big[\frac{B\alpha+C}{\beta}+B\frac{sin(t)}{cos(t)}\Big]dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta}t - Bln|cos(t)|+c, \ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Caso $m > 1$, vem (via primitiva imediata (1.2)) ao simplificar:

$$\begin{aligned}&\int \Big[\frac{B\alpha+C+B\beta tg(t)}{\beta^{2m-1}}cos^{2m-2}(t)\Big]dt = \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt + \frac{B}{\beta^{2m-2}}\int tg(t)cos^{2m-2}(t)dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt + \frac{B}{\beta^{2m-2}}\int sin(t)cos^{2m-3}(t)dt \\ &= \frac{B\alpha+C}{\beta^{2m-1}}\int cos^{2m-2}(t)dt - \frac{B}{\beta^{2m-2}}\frac{cos^{2m-2}(t)}{2m-2}.\end{aligned}$$

Em relação ao cálculo da primitiva da função $cos^{2m-2}(t)$, basta ter em conta, que

$$\int cos^{2m-2}(t)dt = \int cos^{2m-3}(t)cos(t)dt,$$

e aplicar a primitivação por partes tantas vezes quantas as necessárias até obter uma primitiva imediata, ver fórmula de recorrência, adequada, apresentada no final do *Capítulo 2*. Depois, para concluir o exercício há que desfazer a substituição e para tal usar

$$t = arctg(\frac{x-\alpha}{\beta}). \clubsuit$$

Exercício 4.3 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}dx.$$

Resolução: Tendo em conta que o grau do polinómio que está no numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador temos que factorizar o polinómio do denominador, i.e. escrever

$$p(x) = x^2 + x - 2,$$

na sua forma mais irredutível. Ao aplicar a fórmula resolvente concluimos que os valores $x = -2$ e $x = 1$ são as raízes de $p(x)$. E, assim

$$p(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Pelo Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+x-2} &= \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{x(A+B)+2A-B}{(x-1)(x+2)}.
\end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$1 = x(A+B) + 2A - B$$

ou seja

$$x.0 + 1 = x(A+B) + 2A - B.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \\ 2A - B = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/3, \\ \\ B = -1/3. \end{cases}$$

Usando os resultados anteriores, assim, como alguns conhecimentos adquiridos de outras secções, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x-2}dx &= \int \frac{1/3}{x-1}dx + \int \frac{-1/3}{x+2}dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \\
&= \frac{1}{3}ln|x-1| - \frac{1}{3}ln|x+2| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{3}ln|\frac{x-1}{x+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit
\end{aligned}$$

Exercício 4.4 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx.$$

Resolução: O grau do polinómio que está no numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador. Então, temos que factorizar o polinómio do denominador, i.e. escrever $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$ na sua forma mais irredutível. Tendo em conta que

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - 2x + 1)x$$

e que o polinómio $x^2 - 2x + 1$ tem raiz $x = 1$ com multiplidade 2, temos:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - 2x + 1)x = (x-1)^2x.$$

Pelo Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^3-2x^2+x} &= \frac{x+2}{(x-1)^2x} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} \\
&= \frac{Ax + B(x-1)x + C(x-1)^2}{(x-1)^2x} \\
&= \frac{x^2(B+C) + x(A-B-2C) + C}{(x-1)^2x}.
\end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$x + 2 = x^2(B+C) + x(A-B-2C) + C$$

ou seja

$$x^2.0 + x + 2 = x^2(B + C) + x(A - B - 2C) + C.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B + C = 0, \\ A - B - 2C = 1, \\ C = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = -2, \\ C = 2. \end{cases}$$

E, assim

$$\int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{2}{x} dx.$$

Usando os resultados anteriores, assim, como alguns conhecimentos adquiridos de outras secções, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 3 \int (x-1)^{-2} dx - 2ln|x-1| + 2ln|x| \\ &= -\frac{3}{x-1} + 2ln|\frac{x}{x-1}| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 4.5 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx.$$

Resolução: O grau do polinómio que está no numerador é inferior ao grau do polinómio do denominador. Então, temos que factorizar o polinómio $p(x) = x^3 - 1$ na sua forma mais irredutível. Devido ao facto do polinómio $p(x)$ ter grau superior a 2 temos que usar a *Regra de Ruffini* para baixar o seu grau. Para tal temos que ter em conta que $x = 1$ é uma raiz de $p(x)$ pois $p(1) = 0$. Então, ao aplicar a *Regra de Ruffini* para $p(x) = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$, ver Tabela 4.1, obtém-se

$$p(x) = x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1).$$

Agora, basta factorizar o polinómio $q(x) = x^2 + x + 1$ na sua forma mais irredutível. Acontece que o polinómio $q(x)$ não tem raízes em $\mathbb{R}$ mas sim em $\mathbb{C}$. E, em $\mathbb{C}$, o polinómio $q(x)$ admite o seguinte par de raízes conjugadas

$$x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Tabela 4.1: Aplicação da *Regra de Ruffini* ao polinómio $p(x) = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ do qual se conhece a raiz $x = 1$.

E, assim, $q(x)$ na sua forma mais irredutível é dado por (resultado a usar na resolução final do exercício):

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 + x + 1 = \big(x - (-\frac{1}{2})\big)^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 \\ &= \big(x + \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3-1} &= \frac{x}{(x^2+x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{(Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2(A+C) + x(B-A+C) + C - B}{(x^2+x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$x^2.0 + x + 0 = x^2(A+C) + x(B-A+C) + C - B.$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B - A + C = 1, \\ C - B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/3, \\ B = 1/3, \\ C = 1/3. \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^3-1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx\\
&= \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}ln|x-1|\\
&= \frac{1}{3}\int \frac{-x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx + \frac{1}{3}ln|x-1|.
\end{aligned}$$

A resolução do exercício fica completa com o cálculo de

$$\int \frac{-x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Uma forma de resolver a primitiva anterior é ter em conta a substituição[2] (ao cuidado do leitor)

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}tg(t).$$

A outra forma de resolução é ter em conta as primitivas imediatas (1.11) e (1.18). Sendo assim, ao simplificar, vem:

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \int \frac{-x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx + \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx + \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx.
\end{aligned}$$

Usando, então, as primitivas imediatas (1.11) e (1.18), obtém-se

$$\int \frac{2x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = ln|(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R},$$

[2] De maneira geral para fracções onde o denominador apresenta raizes não reais, i.e. raizes complexas com $x = \alpha \pm i\beta$ a substituição $x = \alpha + \beta tg(t)$ faz milagres.

e

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}dx \\ &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por fim, a organização do resultado fica a cargo do leitor. ♣

Exercício 4.6 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x-3}dx.$$

Resolução: O polinómio que se encontra no numerador tem grau igual ao grau do polinómio que se encontra no denominador. Por consequência, temos que dividir os polinómios. Ao dividir, vem:

$$\frac{x^2}{x^2+2x-3} = 1+\frac{-2x+3}{x^2+2x-3}.$$

E, assim

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+2x-3}dx &= \int 1dx+\int \frac{-2x+3}{x^2+2x-3}dx \\ &= x+\int \frac{-2x+3}{x^2+2x-3}dx.\end{aligned}$$

O exercício fica resolvido com a resolução da primitiva do lado direito da expressão anterior. Para tal temos que factorizar o polinómio $p(x)=x^2+2x-3$ na sua forma mais irredutível[3]. Tendo em conta que o polinómio $p(x)$ tem raízes $x=1$ e $x=-3$, obtém-se

$$p(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3).$$

[3] É de notar que o polinómio $p(x)$ tem grau superior ao grau do polinómio que se encontra no numerador.

Via Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{-2x+3}{x^2+2x-3} &= \frac{-2x+3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \\ &= \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)} \\ &= \frac{x(A+B)+3A-B}{(x-1)(x+3)}.\end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$-2x+3 = x(A+B)+3A-B.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=-2, \\ \\ 3A-B=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/4, \\ \\ B=-9/4. \end{cases}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+3}{x^2+2x-3}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{9}{4}\int \frac{1}{x+3}dx \\ &= \frac{1}{4}ln|x-1| - \frac{9}{4}ln|x+3| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por fim, a organização do resultado fica a cargo do leitor. ♣

Exercício 4.7 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-7x+4}dx.$$

Resolução: O polinómio que se encontra no numerador tem grau superior ao grau do polinómio que se encontra no denominador. Por consequência, temos que dividir os polinómios. Ao dividir, vem:

$$\frac{x^4}{x^3+2x^2-7x+4} = x-2+\frac{11x^2-16x+8}{x^3+2x^2-7x+4}.$$

E, assim

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^3+2x^2-7x+4}dx &= \int (x-2)dx + \int \frac{11x^2-16x+8}{x^3+2x^2-7x+4}dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{11x^2-16x+8}{x^3+2x^2-7x+4}dx.\end{aligned}$$

Agora basta resolver a primitiva do lado direito da expressão anterior. Para tal temos que factorizar o polinómio $p(x) = x^3+2x^2-7x+4$ na sua forma mais irredutível[4]. O polinómio $p(x)$ tem uma raiz para $x = 1$ pois $p(1) = 0$. Então, ao aplicar a *Regra de Ruffini* para o polinómio $p(x)$, ver Tabela 4.2, obtém-se

$$p(x) = x^3+2x^2-7x+4 = (x^2+3x-4)(x-1).$$

	1	2	-7	4
1		1	3	-4
	1	3	-4	0

Tabela 4.2: Aplicação da *Regra de Ruffini* ao polinómio $p(x) = x^3+2x^2-7x+4$ do qual se conhece a raiz $x = 1$.

O polinómio $q(x) = x^2+3x-4$ tem raízes distintas em $\mathbb{R}$ mais precisamente $x = 1$ e $x = -4$. Então, o polinómio $p(x)$ na sua forma mais irredutível é dado por:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3+2x^2-7x+4 = (x^2+3x-4)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x+4).\end{aligned}$$

Ao aplicar o Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}\frac{11x^2-16x+8}{x^3+2x^2-7x+4} &= \frac{11x^2-16x+8}{(x-1)^2(x+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+4} \\ &= \frac{A(x+4)+B(x-1)(x+4)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+4)} \\ &= \frac{x^2(B+C)+x(A+3B-2C)+4A-4B+C}{(x-1)^2(x+4)}.\end{aligned}$$

[4] É de notar que o polinómio $p(x)$ tem grau superior ao grau do polinómio que se encontra no numerador.

Esta igualdade é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$11x^2 - 16x + 8 = x^2(B + C) + x(A + 3B - 2C) + 4A - 4B + C.$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} B + C = 11, \\ A + 3B - 2C = -16, \\ 4A - 4B + C = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3/5, \\ B = 27/25, \\ C = 248/25. \end{cases}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \int \frac{11x^2 - 16x + 8}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4} dx &= \frac{3}{5} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \frac{27}{25} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &+ \frac{248}{25} \int \frac{1}{x+4} dx. \end{aligned}$$

Então, usando primitivas imediatas do conhecimento do leitor:

$$\int \frac{1}{x+4} dx = ln|x + 4| + c,\ \forall c \in \mathbb{R},\quad \int \frac{1}{x-1} dx = ln|x - 1| + c,\ \forall c \in \mathbb{R},$$

e

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x - 1)^{-2} dx = -\frac{1}{x-1} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.$$

E, assim, resolvemos o exercício. A organização do resultado fica a cargo do leitor. ♣

Exercício 4.8 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{cos(x)} dx. \tag{4.4}$$

Resolução: Ao considerar a relação $cos(x) = \dfrac{1 - tg^2(x/2)}{1 + tg^2(x/2)}$, podemos reescrever a primitiva (4.4) da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{cos(x)} dx = \int \frac{1 + tg^2(x/2)}{1 - tg^2(x/2)} dx.$$

Usando a substituição $tg(x/2) = t$ temos $x/2 = arctg(t)$, i.e. $x = 2arctg(t)$ com $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ e assim:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{cos(x)}dx &= \int \frac{1+tg^2(x/2)}{1-tg^2(x/2)}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \times \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= 2\int \frac{1}{1-t^2}dt = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt.\end{aligned}$$

A igualdade entre as seguintes fracções

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)(1+t)} &= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+B(1-t)}{(1-t)(1+t)} \\ &= \frac{t(A-B)+A+B}{(1-t)(1+t)}\end{aligned}$$

é válida pelo Teorema 4.1, desde que os polinómios que estão em numerador sejam iguais entre si, i.e.

$$t.0 + 1 = t(A-B) + A + B.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ A + B = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2, \\ B = 1/2. \end{cases}$$

Ao som de *Under Pressure*, obtém-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{-1}{1-t}dt + \frac{1}{2}ln|1+t| \\ &= -\frac{1}{2}ln|1-t| + \frac{1}{2}ln|1+t| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2}ln|\frac{1+t}{1-t}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalmente, ao ter em conta que $t = tg(x/2)$ o resultado final é o seguinte:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{cos(x)}dx &= 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}dt = ln|\frac{1+t}{1-t}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= ln|\frac{1+tg(x/2)}{1-tg(x/2)}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 4.9 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx. \tag{4.5}$$

Resolução: Ao considerar a substituição $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$ (ver Exercício 3.18) vamos obter

$$x = \frac{t^2-1}{1-2t}, \quad x+1 = \frac{t^2-2t}{1-2t}, \quad \sqrt{x^2+x+1} = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$$

e, ainda

$$dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt.$$

Como consequência podemos reescrever a primitiva (4.5) em termos da variável t, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int \frac{(1-2t)^2}{(t^2-2t)(-t^2+t-1)} \times \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-2t}dt = 2\int \frac{1}{t(t-2)}dt. \end{aligned}$$

Tendo em conta os exercícios anteriores (via Teorema 4.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t-2)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+Bt}{t(t-2)} \\ &= \frac{t(A+B)-2A}{t(t-2)}. \end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida desde que

$$t.0+1 = t(A+B)-2A.$$

E, assim, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -2A=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/2, \\ B=1/2. \end{cases}$$

Ao som de *People are Strange*

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t(t-2)}dt &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-2}dt \\ &= -\frac{1}{2}ln|t| + \frac{1}{2}ln|t-2| + c, \ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2}ln|\frac{t-2}{t}| + c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Regressando à variável x usando um som tipo *Riders on the Storm*:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx &= 2\int \frac{1}{t(t-2)}dt = ln|\frac{t-2}{t}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= ln|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 4.10 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx.$$

Resolução: O polinómio $p(x) = x^2 - 2x + 3$ tem o grau superior ao polinómio que está no numerador. Então, temos que factorizar o polinómio $p(x)$ na sua forma mais irredutível. Acontece que $p(x)$ não tem raízes em $\mathbb{R}$ mas sim em $\mathbb{C}$ e dadas (via fórmula resolvente) por:

$$x = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

Assim, o polinómio $p(x)$ sofre a seguinte factorização:

$$p(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + (\sqrt{2})^2 = (x-1)^2 + 2.$$

Então:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx.$$

Usando o facto de que $sec^2(t) = 1 + tg^2(t)$, a substituição $x = 1 + \sqrt{2}tg(t)$ onde $dx = \sqrt{2}sec^2(t)dt$ e $t = arctg(\frac{x-1}{\sqrt{2}})$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx &= \int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx = \int \frac{\sqrt{2}sec^2(t)}{2tg^2(t)+2}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{sec^2(t)}{tg^2(t)+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{sec^2(t)}{sec^2(t)}dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int 1dt = \frac{\sqrt{2}}{2}t + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}arctg(\frac{x-1}{\sqrt{2}}) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Outra forma de resolver

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+2}dx,$$

seria via primitiva imediata (1.18), ao cuidado do leitor. $\clubsuit$

Exercício 4.11 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{2-cos(x)}dx. \tag{4.6}$$

Resolução: Ao considerar a relação fantástica $cos(x) = \dfrac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$, podemos reescrever a primitiva (4.6) da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{2-cos(x)}dx = \int \frac{1+tg^2(x/2)}{1+3tg^2(x/2)}dx.$$

Usando a substituição $tg(x/2) = t$, temos $x/2 = arctg(t)$, i.e. $x = 2arctg(t)$ com $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, e assim

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2-cos(x)}dx &= \int \frac{1+tg^2(x/2)}{1+3tg^2(x/2)}dx = \int \frac{1+t^2}{1+3t^2} \times \frac{2}{1+t^2}dt \\ &= 2\int \frac{1}{1+3t^2}dt = 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}dt.\end{aligned}$$

Usando, no nosso problema, a primitiva imediata (1.18) com $M = \sqrt{3}t$, temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2-cos(x)}dx &= 2\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}arctg(\sqrt{3}tg(x/2)) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 4.12 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{sin(x)}{1+cos(x)+sin(x)}dx. \tag{4.7}$$

Resolução: Ao considerar as relações simpáticas

$$cos(x) = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}, \quad sin(x) = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)},$$

e a substituição $tg(x/2) = t$, i.e. $x = 2arctg(t)$ com $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ podemos reescrever a primitiva (4.7) da seguinte forma:

$$\int \frac{sin(x)}{1 + cos(x) + sin(x)}dx = 2\int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt.$$

Usando os conhecimentos adquiridos com as resoluções de outros exercícios (via Teorema 4.1), vem que

$$\begin{aligned} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1+t^2)} \\ &= \frac{t^2(A+B) + t(C+B) + A + C}{(1+t)(1+t^2)}. \end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida desde que os polinómios que estão em numerador sejam iguais entre si, i.e.

$$t^2.0 + t + 0 = t^2(A+B) + t(C+B) + A + C.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ C + B = 1, \\ A + C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/2, \\ B = 1/2, \\ C = 1/2. \end{cases}$$

Como consequência a primitiva (4.7), vem:

$$\begin{aligned} \int \frac{sin(x)}{1 + cos(x) + sin(x)}dx &= 2\int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt = \int \Big(\frac{-1}{1+t} + \frac{t+1}{1+t^2}\Big)dt \\ &= -\int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{t}{1+t^2}dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= -ln|t+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt + arctg(t) \\ &= -ln|t+1| + \frac{1}{2}ln|1+t^2| + arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= -ln|tg(x/2)+1| + \frac{1}{2}ln|1 + tg^2(x/2)| \\ &+ \ arctg(tg(x/2)) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 4.13 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx.$$

Resolução: Considerando a substituição $\sqrt{x+4} = t$ temos $x = t^2 - 4$ e $dx = 2tdt$. Então

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = \int \frac{t}{t^2-4} 2tdt = 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt. \tag{4.8}$$

O polinómio que se encontra no numerador da função a primitivar em (4.8) tem grau igual ao grau do polinómio que se encontra no denominador. Por consequência, temos que dividir os polinómios. Ao dividir, vem:

$$\frac{t^2}{t^2-4} = 1 + \frac{4}{t^2-4}.$$

Ao reescrever (4.8), temos

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt \\ &= 2 \int 1dt + 8 \int \frac{1}{t^2-4} dt \\ &= 2t + 8 \int \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt. \end{aligned} \tag{4.9}$$

O exercício fica concluído com a resolução da primitiva da seguinte fracção racional

$$\int \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt.$$

Ora, pelos exercícios anteriores (via Teorema 4.1), temos

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{t(A+B) + 2A - 2B}{(t-2)(t+2)}.$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados para a imposição $t.0 + 1 = t(A+B) + 2A - 2B$, vem

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A - 2B = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/4, \\ B = -1/4. \end{cases}$$

Então, via primitiva imediata (1.11):

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(t-2)(t+2)}dt &= \int \Big(\frac{1/4}{t-2} - \frac{1/4}{t+2}\Big)dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}dt \\
&= \frac{1}{4}ln|t-2| - \frac{1}{4}ln|t+2| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}ln|\frac{t-2}{t+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{4}ln|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A organização do resultado fica a cargo do leitor. ♣

Exercício 4.14 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$$

Resolução: Depois de ouvir um som relaxante tipo *It´s a Miracle* estamos em perfeitas condições para considerar a substituição $e^x = t$ onde $x = ln(t)$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Como consequência, temos

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{(1+t)t}dt.$$

Usando o Teorema 4.1, vem

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{t(A+B)+B}{(1+t)t}.$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados para a imposição $t.0 + 1 = t(A+B) + B$, vem

$$\begin{cases} A+B=0, \\ B=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1, \\ B=1. \end{cases}$$

Então, pela primitiva imediata (1.11):

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+t)t}dt &= \int \Big(\frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\Big)dt = -\int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{t}dt \\
&= -ln|1+t| + ln|t| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\
&= ln|\frac{t}{1+t}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

e ao desfazer a substituição, vem

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = ln|\frac{e^x}{1+e^x}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 4.15 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}dx.$$

Resolução: O polinómio que se encontra no numerador tem grau inferior ao grau do polinómio que se encontra no denominador. Por consequência, visto não ser uma primitiva imediata, temos que factorizar o polinómio denominador na sua forma mais irredutível. Considerando, $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ temos $p(1) = 0$, i.e. $x = 1$ é raiz de $p(x)$. Então, aplicando a *Regra de Ruffini*, obtém-se $p(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$, ver Tabela 4.3. Para $q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ temos $q(-1) = 0$,

	1	0	-5	0	4
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	0

Tabela 4.3: Aplicação da *Regra de Ruffini* ao polinómio $p(x) = x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 4$ do qual se conhece a raiz $x = 1$.

i.e. $x = -1$ é raiz de $q(x)$. Então, aplicando novamente a *Regra de Ruffini* vem $p(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 4)$, ver Tabela 4.4.

	1	1	-4	-4
-1		-1	0	4
	1	0	-4	0

Tabela 4.4: Aplicação da *Regra de Ruffini* ao polinómio $q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ do qual se conhece a raiz $x = -1$.

Sabendo que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, temos

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2),$$

e, assim, podemos reescrever a primitiva a calcular na seguinte forma

$$\int \frac{1}{x^4-5x^2+4}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}dx.$$

Aplicando o Teorema 4.1, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4-5x^2+4} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2},\end{aligned}$$

e por consequência vamos considerar:

$$\begin{aligned}x^3.0+x^2.0+x.0+1 &= x^3\big(A+B+C+D\big)+x^2\big(A-B-2C+2D\big) \\ &+ x\big(-4A-4B-C-D\big)-4A+4B+2C-2D.\end{aligned}$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ A-B-2C+2D=0, \\ -4A-4B-C-D=0, \\ -4A+4B+2C-2D=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1/6, \\ B=1/6, \\ C=-1/12, \\ D=1/12. \end{cases}$$

Finalmente, usando a primitiva imediata (1.11):

$$\int \frac{1}{x^4-5x^2+4}dx = \frac{1}{6}\,ln|\frac{x+1}{x-1}| + \frac{1}{12}\,ln|\frac{x-2}{x+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit$$

Exercício 4.16 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+e^x+1}dx.$$

Resolução: Tendo em conta que

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+e^x+1}dx = \int \frac{(e^x)^4}{(e^x)^2+e^x+1}dx,$$

e a substituição $e^x = t$ com $x = ln(t)$ e $dx = \frac{1}{t}dt$, temos

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+e^x+1}dx = \int \frac{t^4}{(t^2+t+1)t}dt = \int \frac{t^3}{t^2+t+1}dt.$$

Dividindo os polinómios[5], temos

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3}{t^2+t+1}dt &= \int \big(t-1+\frac{1}{t^2+t+1}\big)dt \\ &= \int \big(t-1\big)dt + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\ &= \frac{t^2}{2} - t + \int \frac{1}{t^2+t+1}dt.\end{aligned}$$

O exercício fica resolvido com a resolução da primitiva do segundo membro. Sabendo que o polinómio $p(t) = t^2+t+1$ tem raízes (via fórmula resolvente) complexas

$$t = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

temos

$$t^2+t+1 = \Big(t - \big(-\frac{1}{2}\big)\Big)^2 + \big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^2 = \Big(t+\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}.$$

Por consequência, e usando a primitiva imediata (1.18), obtém-se

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt &= \int \frac{1}{\Big(t+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\big(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\big)^2}dt \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\big(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\big)^2}dt \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\Big(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalmente, temos a seguinte solução:

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+e^x+1}dx = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\Big(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\Big) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit$$

Exercício 4.17 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx.$$

[5] O polinómio que se encontra no numerador tem grau superior ao grau do polinómio que se encontra no denominador.

Resolução: Considerando a substituição $x+1=t^\beta$ onde $\beta=4$ é o *mínimo múltiplo comum* dos índices das raízes, temos

$$x=t^4-1, \quad dx=4t^3dt, \quad t=\sqrt[4]{x+1}.$$

Como consequência

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx=\int \frac{\sqrt[4]{t^4}}{\sqrt{\left(t^2\right)^2}+1}4t^3dt=4\int \frac{t^4}{t^2+1}dt.$$

Como o grau do polinómio que está no numerador é superior ao grau do polinómio que está no dominador temos ao efectuar a divisão dos polinómios, i.e.

$$\frac{t^4}{t^2+1}=t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

Então, via primitivas imediatas do conhecimento do leitor:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx &= 4\int \frac{t^4}{t^2+1}dt=4\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\ &= 4\int \left(t^2-1\right)dt+4\int \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \frac{4}{3}t^3-4t+4arctg(t)+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalmente, regressando à variável x, vem

$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx=4\frac{\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}{3}-4\sqrt[4]{x+1}+4arctg(\sqrt[4]{x+1})+c,\ \forall c\in\mathbb{R}.\ \clubsuit$$

Exercício 4.18 *Para relaxar a mente considere a seguinte posição (ver Figura 4.1) de um jogo de xadrez. Qual será a sequência de lances das peças brancas com o objectivo de vencer o jogo?*

Resolução: O lance das peças brancas que leva a mente do jogador para o mundo da imortalidade é 1.Dd1+!! O Rei preto é obrigado a capturar a Dama branca, i.e. 1....RxDd1 e ao fazê-lo vem o lance que leva a mente para lá da imortalidade 2.Bg5+ pois o Rei preto está em xeque duplo e fica totalmente exposto ao mate. Se 2....Re1 então 3.Td1++. Se 2....Rc7 então 3.Bd1++! Brilhante!! $\clubsuit$

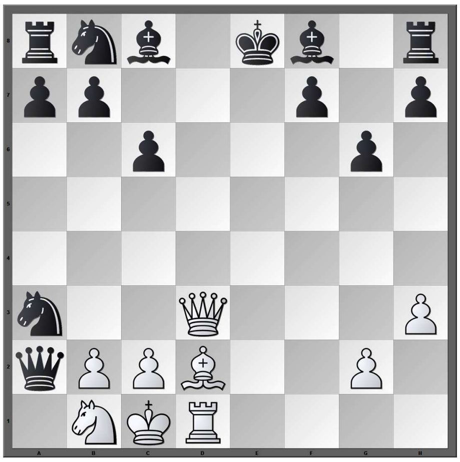

Figura 4.1: Uma posição simpática de um jogo de xadrez.

Exercício 4.19 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx.$$

Resolução: Numa primeira fase vamos considerar a substituição $e^x = t$, i.e. $x = ln(t)$ e assim $dx = \frac{1}{t}dt$. Então, vem:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx = \int \frac{t}{t^2-4}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1}{t^2-4}dt.$$

Via Teorema 4.1, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2-4} &= \frac{1}{(t-2)(t+2)} \\ &= \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{t(A+B)+2A-2B}{(t-2)(t+2)}, \end{aligned}$$

e por consequência vamos considerar: $t.0 + 1 = t\big(A+B\big) + 2A - 2B$.

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A-2B=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/4, \\ B=-1/4. \end{cases}$$

Finalmente e via primitiva imediata (1.11),

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-2}dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}dt \\ &= \frac{1}{4}ln|t-2| - \frac{1}{4}ln|t+2| + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{4}ln|\frac{t-2}{t+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ao desfazer a substituição:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx = \frac{1}{4}ln|\frac{e^x-2}{e^x+2}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 4.20 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{1}{1+sin(x)}dx.$$

Resolução: Usando a relação $sin(x) = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}$ em conjunto com a substituição $tg(x/2) = t$, i.e. $x = 2arctg(t)$ e assim $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, vem:

$$\int \frac{1}{1+sin(x)}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}}dx = \int \frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\frac{2}{1+t^2}dt$$

i.e.

$$\int \frac{1}{1+sin(x)}dx = 2\int \frac{1}{t^2+2t+1}dt = 2\int \frac{1}{(t+1)^2}dt.$$

Finalmente, via primitiva imediata (1.2) e desfazendo a substituição:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-4}dx &= 2\int \frac{1}{(t+1)^2}dt = 2\int (t+1)^{-2}dt \\ &= \frac{-2}{t+1} + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{-2}{tg(x/2)+1} + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit\end{aligned}$$

Exercício 4.21 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{dx}{1-sin(x)+cos(x)}dx.$$

Resolução: Sejam as relações simpáticas:

$$sin(x) = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}, \quad cos(x) = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}.$$

Considerando tal simpatia com a substituição $tg(x/2) = t$, i.e. $x = 2arctg(t)$ e assim $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, vem via primitiva imediada (1.11):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1-sin(x)+cos(x)}dx &= \int \frac{1}{1-\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}+\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}}dx \\
&= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1-t}dt = -ln|1-t|+c, \ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ao desfazer a substituição:

$$\int \frac{dx}{1-sin(x)+cos(x)}dx = -ln|1-tg(x/2)|+c, \ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 4.22 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{tg(x)}{tg(x)-2}dx.$$

Resolução: Considerando a substituição $tg(x) = t$, vem: $x = arctg(t)$ e $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$. Então

$$\int \frac{tg(x)}{tg(x)-2}dx = \int \frac{t}{(t-2)(1+t^2)}dt,$$

e é de notar que o denominador já está na sua forma mais irredutivel. Aplicando o Teorema 4.1, temos

$$\begin{aligned}
\frac{t}{(t-2)(1+t^2)} &= \frac{A}{t-2}+\frac{Bt+C}{1+t^2} \\
&= \frac{t^2(A+B)+t(C-2B)+A-2C}{(t-2)(1+t^2)},
\end{aligned}$$

e por consequência vamos considerar:

$$t^2.0+t+0 = t^2(A+B)+t(C-2B)+A-2C.$$

Ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-2B=1, \\ A-2C=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2/5, \\ B=-2/5, \\ C=1/5. \end{cases}$$

Por conseguinte e via primitivas imediatas (1.11) e (1.18):

$$\begin{aligned} \int \frac{tg(x)}{tg(x)-2}dx &= \frac{2}{5}\int \frac{1}{t-2}dt + \frac{1}{5}\int \frac{-2t+1}{1+t^2}dt \\ &= \frac{2}{5}\int \frac{1}{t-2}dt - \frac{1}{5}\int \frac{2t}{1+t^2}dt + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \frac{2}{5}ln|t-2| - \frac{1}{5}ln|1+t^2| + \frac{1}{5}arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Fianlmente ao som de *Knights Of Cydonia (Muse)* e desfazendo a substituição:

$$\int \frac{tg(x)}{tg(x)-2}dx = \frac{2}{5}ln|tg(x)-2| - \frac{1}{5}ln|1+tg^2(x)| + \frac{1}{5}arctg(tg(x)) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit$$

Exercício 4.23 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx.$$

Resolução: Considerando a substituição $e^x = t$, vem: $x = ln(t)$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Então

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{t^3}{t^2+1}\frac{1}{t}dt = \int \frac{t^2}{t^2+1}dt.$$

Ao dividir os polinómios (ver secção sobre primitivas de funções racionais), temos:

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}.$$

Ao usar primitivas imediatas e desfazendo a substituição:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx &= \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \\ &= \int dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= t - arctg(t) + c,\ \forall c \in \mathbb{R} \\ &= e^x - arctg(e^x) + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Exercício 4.24 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-\sqrt{x+5}}dx.$$

Resolução: Pelo facto de termos raizes com indice 2 e 3 vem que o mínimo multiplico comum entre os indices é 6. Considerando a substituição $x+5=t^6$, $x=t^6-5$ e $dx=6t^5dt$, temos:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-\sqrt{x+5}}dx = \int \frac{t^2}{1-t^3}6t^5dt = 6\int \frac{t^7}{1-t^3}dt.$$

Ao dividir a fracção

$$\frac{t^7}{1-t^3} = -t^4 - t + \frac{t}{1-t^3}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x+5}}{1-\sqrt{x+5}}dx &= 6\int \frac{t^7}{1-t^3}dt = 6\int \big(-t^4-t+\frac{t}{1-t^3}\big)dt \\
&= 6\int \big(-t^4-t\big)dt + 6\int \frac{t}{1-t^3}dt \\
&= -\frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{2}t^2 + 6\int \frac{t}{1-t^3}dt \\
&= -\frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{2}t^2 - 6\int \frac{t}{t^3-1}dt.
\end{aligned}$$

O exercício fica *finito* ao resolver a primitiva do 2º membro da igualdade anterior e para tal basta consultar o Exercício 4.5 e desfazer a substituição. A organização do resultado fica a cargo do leitor. ♣

Exercício 4.25 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{ln^3(x)+2}{x(ln^2(x)-1)}dx.$$

Resolução: Considerando $ln(x)=t$, vem $x=e^t$ e $dx=e^tdt$. Por conseguinte

$$\int \frac{ln^3(x)+2}{x(ln^2(x)-1)}dx = \int \frac{t^3+2}{e^t(t^2-1)}e^tdt = \int \frac{t^3+2}{t^2-1}dt.$$

Ao dividir a fracção racional temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{ln^3(x)+2}{x(ln^2(x)-1)}dx &= \int \frac{t^3+2}{t^2-1}dt = \int \big(t+\frac{t+2}{t^2-1}\big)dt \\
&= \int tdt + \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2-1}dt + \int \frac{2}{t^2-1}dt \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}ln|t^2-1| + \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}dt.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(t-1)(t+1)} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \\
&= \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)} \\
&= \frac{t(A+B)+A-B}{(t-1)(t+1)}.
\end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$t.0+2 = t(A+B)+A-B.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ \\ A-B=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ \\ B=-1. \end{cases}$$

Usando os resultados anteriores e primitivas imediatas do conhecimentos dos pesadelos dos sonhos do leitor, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{ln^3(x)+2}{x(ln^2(x)-1)}dx &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}ln|t^2-1| + \int \big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\big)dt \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}ln|t^2-1| + \int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt \\
&= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}ln|t^2-1| + ln|t-1| - ln|t+1| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Finalmente, ao desfazer a substituição

$$\int \frac{ln^3(x)+2}{x(ln^2(x)-1)}dx = \frac{1}{2}ln^2(x) + \frac{1}{2}ln|ln^2(x)-1| + ln|\frac{ln(x)-1}{ln(x)+1}| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}.\ \clubsuit$$

Exercício 4.26 *Determine a família da seguinte primitiva:*

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3-x}dx.$$

Resolução: Ao som de *Vaca de Fogo (Madredeus)* dá para perceber que ao simplificar, vem

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3-x}dx = \int \frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}dx.$$

Pelo Teorema 4.1:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2(A+B+C) + x(B-C) - A}{x(x-1)(x+1)}. \end{aligned}$$

A igualdade anterior é válida apenas quando os polinómios que estão em numerador são iguais entre si, i.e.

$$x^2+x+1 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A.$$

Então, ao aplicar o método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ \\ B-C=1, \\ \\ -A=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1, \\ \\ B=3/2, \\ \\ C=1/2. \end{cases}$$

Usando os resultados anteriores e primitivas imediatas do conhecimento do leitor (espero que esse conhecimento se prolongue para lá da mortalidade):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+x+1}{x^3-x}dx &= \int \frac{x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}dx \\ &= -\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= -ln|x| + \frac{3}{2}ln|x-1| + \frac{1}{2}ln|x+1| + c,\ \forall c \in \mathbb{R}. \clubsuit \end{aligned}$$

Bibliografia

[1] Anton, Howard, 1999, Cálculo um novo horizonte, Vol.I,II,6ªEdição, Bookman.

[2] Apostol, M.T., 1994, Cálculo, Vol.I,II, 2ªEdição, Editora Reverté, Ltda.

[3] Blatner, D., 1997, O encanto do π, Editora Replicações, Lda.

[4] Carapau, F., 2005, Matemática I, *Manuais da Universidade de Évora*, Publicações Universidade de Évora.

[5] Carapau, F., 2006, Primitivas, Integrais e suas Aplicações, 1ªEdição, Publidisa.

[6] Ferreira, J.Campos, 1987, Introdução à Análise Matemática, 3ªEdição, Fundação Calouste Gulbenkian.

[7] Figueira, Mário, 1996, Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática, Univ. de Lisboa, Fac. de Ciências, Departamento de Matemática.

[8] Ostrowski, A., 1967, Lições de Cálculo Diferencial e Integral, Vol.III, 3ªEdição, Fundação Calouste Gulbenkian.

[9] Piskounov, N., 1988, Cálculo Diferencial e Integral, Vol.I,II 12ªEdição, Editora Lopes da Silva.0

[10] Sarrico, Carlos, 1997, Análise Matemática, leituras e exercícios, Trajectos Ciência, Gradiva, Lisboa.

[11] Swokowski, Earld William, 1994, Cálculo com geometria analítica, Vol.2, 2ª edição, Makron Books do Brasil editora, Ltda.