

REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS DE FUNÇÕES EM AMBIENTE COM GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE O SEU USO POR ALUNOS DE 9º ANO¹

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Resumo

O presente artigo refere-se a um estudo em que se investigou de que modo os alunos utilizam as representações múltiplas na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções num contexto de trabalho com o *Geogebra*. O estudo procurou identificar quais as representações a que os alunos recorrem, os factores que influenciam a sua escolha e a forma como relacionam as diferentes representações. O estudo desenvolveu-se numa turma de 9º ano que já tinha trabalhado com o Geogebra. Este *software* tem inúmeras potencialidades no estabelecimento de conexões entre a Geometria e a Álgebra e permite ao utilizador trabalhar com distintas representações das Funções, nomeadamente as representações numérica, tabular, algébrica e gráfica. Os alunos realizaram um conjunto de tarefas diversificadas em que podiam livremente recorrer ao Geogebra. A investigadora assumiu essencialmente o papel de observadora participante durante a recolha de dados (registos de aula e produções dos alunos). Foi elaborado um estudo de caso descritivo e analítico da turma. As conclusões apontam que os alunos tendem, predominantemente, a recorrer à representação gráfica, mas conseguem usar eficazmente uma variedade de representações no seu trabalho com Funções. Os alunos revelam também estabelecer relações entre diferentes representações. A escolha pelas representações usadas parece estar relacionada com o tipo de conhecimento matemático que as questões evocam, bem como com a predisposição dos alunos para as distintas representações proporcionadas pelo Geogebra.

Palavras-Chave: Representações múltiplas, Funções, Geogebra.

Introdução

As representações assumem um papel importante em toda a aprendizagem da Matemática. Elas são encaradas como elementos essenciais na compreensão de

¹ Trabalho realizado no âmbito do Projecto *Práticas Profissional dos Professores de Matemática*, com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008.

conceitos e das relações matemáticas; na comunicação de abordagens, de argumentos e de conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (NCTM, 2007).

É importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo das Funções, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações (NCTM, 2007; Kieran, 2007).

As novas tecnologias vieram criar novas oportunidades de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática (Zbiek et al., 2007). O uso de tecnologias é referido no actual Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar o computador em situações diversas e, em particular, devem ter oportunidade de trabalhar com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, que permitem conciliar as diferentes representações das funções.

Neste contexto, torna-se relevante compreender de que modo os alunos lidam com as representações das funções quando trabalham com o *Geogebra*², *software* que reúne ferramentas de Álgebra, Geometria e uma folha de cálculo e oferece a possibilidade de explorar múltiplas representações. As questões orientadoras do estudo são:

1. Quais são as representações a que os alunos mais recorrem?
2. Que factores influenciam a escolha da representação?
3. Como é que os alunos conciliam as diferentes representações?

² O Geogebra foi desenvolvido principalmente para o ensino e aprendizagem da Matemática ao nível do Ensino Básico e Secundário, por Markus Hohenwarter, na universidade americana Florida Atlantic University. Este *software*, para além de ter uma versão portuguesa e de dispor de uma vasta combinação de ferramentas, apresenta uma outra mais valia que é ser de uso livre, ficando assim disponível para professores e alunos, nas escolas e em casa.

Funções, representações e tecnologia

A Álgebra é um tema da maior importância nos currículos de Matemática (Kaput, 1999) que tem vindo a ver a sua abordagem alterada e antecipada junto dos alunos, com vista a um maior reforço dos seus aspectos conceptuais e uma não focalização exclusiva na manipulação simbólica e reprodução de técnicas desprovidas de sentido. O NCTM (2007) recomenda que os programas de Matemática, do ensino pré-escolar ao 12.º ano, habilitem os alunos para:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos. (NCTM, 2007, p. 39)

Uma tendência semelhante pode ser identificada no nosso país nos últimos anos (Ponte, 2006). No Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001), “Álgebra e Funções” surge como um grande tema curricular e propõe-se que neste domínio, ao longo de todos os ciclos do ensino básico, seja desenvolvida a competência matemática que inclui:

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- A aptidão para construir e interpretar tabelas valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;
- A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas. (ME, 2001, p.66)

Com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), a Álgebra surge como um dos quatro grandes temas. Prevê-se que o seu estudo se inicie nos

primeiros anos de escolaridade e, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos. Assim, o estudo das Funções surge valorizado no 3.º ciclo.

Também as representações têm vindo a assumir especial destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. O NCTM (2007) dedica uma norma específica à representação matemática, considerando como objectivos para os alunos, desde o pré-escolar até ao 12.º ano (NCTM, 2007, p. 160):

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Segundo o NCTM (2007), é necessário estimular os alunos para a representação das suas ideias, ainda que inicialmente estes o façam recorrendo a formas não convencionais mas que para eles têm sentido. Todavia, é importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, para facilitar quer a aprendizagem da Matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas.

Também os documentos curriculares portugueses têm vindo a valorizar as representações. O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME/DEB, 2001) defende que ser-se matematicamente competente implica o desenvolvimento de atitudes, capacidades e competências, destacando-se aqui as que dizem respeito às representações, ainda que implicitamente: “a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação” (ME/DEB, 2001).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) as representações matemáticas são uma das dimensões da aprendizagem mais valorizada. Neste documento é apresentado como objectivo geral do ensino da Matemática:

Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de:

- ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais. (Ponte et al., 2007, pp. 4-5)

Ainda neste documento é referido a importância das representações matemáticas na aprendizagem dos alunos e do trabalho com múltiplas representações, sempre que possível. Defende-se que os alunos, ao trabalharem com diversas representações para as ideias matemáticas, adquirem a capacidade de passar de uma forma de representação para outra, que é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.

O conceito de função, como já foi referido anteriormente, deve ser abordado de forma a englobar as diferentes representações e a utilização de ferramentas tecnológicas pode, em certa medida, permitir que sejam ultrapassados alguns problemas de representação e manipulação de funções. Segundo Gomez (1997), o recurso às tecnologias para o ensino e aprendizagem das funções permite uma melhor e mais fácil consolidação do conceito de função em comparação com a abordagem clássica do estudo formal das funções, em que se partia das representações simbólicas e se traduziam por representações tabulares e finalmente por representações gráficas (Coulombe & Berenson, 2001). As tecnologias que foram progressivamente ficando acessíveis ao ensino da Matemática, nomeadamente aquelas que exibem capacidades gráficas, permitem a criação de múltiplas representações, ainda com as vantagens de exibirem representações diversas e também permitirem acções sobre essas representações.

Destaca-se aqui a utilização do *software* de geometria dinâmica, com o seu carácter dinâmico que potencia a exploração de representações e sua inter-relação, em especial de gráficos, tabela e expressões algébricas. Este tipo de *software* permite trabalhar e compreender a Matemática de uma forma que não é possível com as tradicionais ferramentas como o papel e o lápis, proporcionando aos alunos acrescidas

oportunidades, destacando-se: a exploração de problemas e conceitos matemáticos complexos, a execução de procedimentos rotineiros de forma mais rápida e precisa, deixando os alunos mais disponíveis para as tomadas de decisões, para a reflexão e raciocínio, e a análise de exemplos ou formas de representação (NCTM, 2007).

A compreensão das relações existentes entre as várias representações de um mesmo conceito e a identificação das suas semelhanças e diferenças contribui para uma melhor compreensão do conceito por parte dos alunos (Goldin & Shteingold, 2001). Quando é utilizada uma forma de representação e essa não representa na totalidade a ideia matemática, é necessário recorrer a mais formas de representação (Hadmard, 1945, citado por Wong, 2004).

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. O uso de diferentes representações tem o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das Funções, seja significativo e efectivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação que identificam:

- a) *representação verbal* – está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorrectas.
- b) *representação numérica* – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.
- c) *representação gráfica* – proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, a representação gráfica

é muito influenciada por factores externos (por exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

- d) *representação algébrica* – esta é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a natureza do objecto e causar dificuldades de interpretação de resultados.

A importância de trabalhar com várias representações resulta das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação e da necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos estudantes. Desta forma defende-se que se deve trabalhar num ambiente múltiplas representações, uma vez que as desvantagens de umas são colmatadas pela combinação com as outras. No entanto, a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação são factores que poderão determinar o tipo de representação a utilizar (Kaput, 1992).

Brown e Mehilos (2010) fazem referência a uma outra forma de representação das Funções, a tabular. As tabelas ajudam os alunos a passar do mundo concreto da aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, para o mundo abstracto da álgebra, onde as quantidades variam. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado. A tabela actua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, para a Álgebra, onde as variáveis não são especificadas e expressam relações gerais.

No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010), alguns alunos desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo estas um suporte a usar enquanto os alunos procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas. As tabelas fazem com que se sintam mais confiantes no trabalho algébrico e encoraja-os a persistir; são ferramentas poderosas para ajudar os alunos a darem significado a variáveis e a expressões algébricas. Esta forma de representação permite aos alunos verem os símbolos algébricos como descrições gerais de números específicos, o que é

de extrema importância para aqueles que precisam de desenvolver uma melhor compreensão de símbolos abstractos.

No âmbito deste estudo, e atendendo a que os alunos são do 3.º ciclo, considerou-se pertinente adoptar os modos de representação enunciados por Friedland e Tabach (2001) à excepção da representação verbal, e ainda a representação tabular (Brown e Mehilos, 2010), disponível no Geogebra, e com reconhecidas potencialidades no trabalho com Funções.

Metodologia

Este estudo³, tendo em conta o seu propósito, objectivos e a natureza dos resultados finais que se pretendiam obter, é um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas (Merriam, 1988; Stake, 2009). Importa fazer aqui referência ao caso em estudo, uma turma do 9º ano de escolaridade, de uma escola do concelho de Elvas, que se considera como o conjunto dos grupos de alunos que a constituem, nos quais se identificam tendências principais. A turma foi alvo de uma experiência de ensino que foi desenvolvida em contexto natural, na sala e horário lectivo normais e conduzida pela professora titular da turma, que funcionou em cumplicidade com a investigadora. Esta experiência ou intervenção, concretizada em 2009/2010, criou as condições para a recolha de dados, na qual a investigadora assumiu uma postura de observadora participante durante a fase de apresentação da tarefa e trabalho autónomo sobre a mesma, mas com maior intervenção na fase de discussão colectiva das tarefas.

Para a realização da intervenção didáctica foi necessário organizar a turma em pequenos grupos. Estes grupos, em número de cinco, foram organizados pelo professor titular com a participação dos alunos. O professor teve em consideração os seguintes critérios na constituição dos grupos: o empenho, o interesse, o comportamento e a afinidade entre os alunos. Destes cinco grupos, quatro eram compostos por três alunos e um por dois alunos. Os alunos tinham já tido contacto com o Geogebra durante as aulas de Matemática e as de Estudo Acompanhado leccionadas também pelo professor de Matemática.

³ O estudo a que se reporta este artigo corresponde ao desenvolvimento da tese de mestrado da primeira autora (Gafanhoto, 2011).

A intervenção didáctica consistiu na realização de seis tarefas diversas, durante seis aulas (cinco blocos de noventa e um de quarenta e cinco minutos), classificadas quanto à sua natureza de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 1 - Tarefas classificadas consoante a sua natureza: exploração e modelação.

TAREFA	NATUREZA		REFERÊNCIA
	EXPLORAÇÃO	MODELAÇÃO	
1. Qual o tarifário melhor? Eis a questão...		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
2. As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b...$	X		Adaptado de exercícios de manuais
3. Matemática por um canudo		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
4. As folhas de papel que usamos		X	Criado pela investigadora
5. Estudo das funções $y=ax^2$	X		Adaptado de exercícios de manuais
6. O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

A estrutura das tarefas seguiu sempre a mesma lógica à excepção da tarefa 6. As tarefas eram divididas em duas partes: na primeira parte os alunos criavam, a pedido, as diferentes formas de representação (tabular, gráfica e algébrica) e, na segunda parte, eram colocadas questões aos alunos de interpretação das funções em estudo, permitindo-lhes que eles utilizassem as representações que considerassem mais adequadas para produzir as respectivas respostas. A tarefa 6 foi colocada de forma mais aberta, apresentando-se a situação em linguagem corrente e colocando-se directamente questões a responder pelos alunos recorrendo às formas de representação que entendessem.

A tarefa “Qual o tarifário melhor? Eis a questão...” corresponde a uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de função de proporcionalidade directa e afim. Esta tarefa consistia na definição, representação e interpretação de diferentes tarifários telefónicos reais como funções.

A tarefa “As folhas de papel que usamos” foi assinalada, para esta turma, como uma tarefa de exploração do conceito de função de proporcionalidade inversa. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos caracterizassem e representassem a função que a cada

valor da largura da folha A4 associa uma altura, de forma a manter constante a medida da área. O professor titular, na aula subsequente, baseou-se nos resultados desta tarefa para formalizar o conceito de função de proporcionalidade inversa.

A tarefa “Matemática por um canudo” foi aplicada no seguimento da tarefa descrita anteriormente, tendo sido aplicada como uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de proporcionalidade inversa. Nesta tarefa foi estudada a relação entre o comprimento de um cilindro oco e o tamanho de fita visualizada.

A tarefa “O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função” teve como objectivo colocar os alunos perante uma tarefa de modelação mais aberta. Esta tarefa tinha como contexto um problema da realidade (crescimento do cabelo) o qual é modelado por uma função de proporcionalidade directa.

As tarefas “As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b...$ ” e “Estudo das funções $y=ax^2$ ” são situações estritamente matemáticas, tendo como objectivo estudar matematicamente as funções do tipo $y=mx+b$ e $y=ax^2$.

A recolha de dados foi realizada através da observação e análise documental. A investigadora fez o registo dos acontecimentos da aula e a análise dos documentos produzidos pelos alunos, como as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de Geogebra correspondentes à resolução de cada uma.

A análise dos dados realizou-se em duas fases diferentes. A primeira fase ocorreu durante a recolha de dados; a segunda fase foi realizada posteriormente, a qual pode ser subdividida em três sub-fases. Primeiramente, definiram-se categorias para análise posterior dos dados recolhidos. Essas categorias estavam de acordo com as representações utilizadas pelos alunos e com a natureza/objectivo das perguntas das tarefas. Em seguida realizou-se uma análise de todos os dados recolhidos relativamente a todos os grupos, segundo as categorias definidas. Por último, efectuou-se uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças, formulando, por fim, conclusões.

Apresentação de resultados

De uma forma global, os grupos aderiram bem à realização destas tarefas, não só ao nível do empenho e responsabilidade mas também das respostas matemáticas

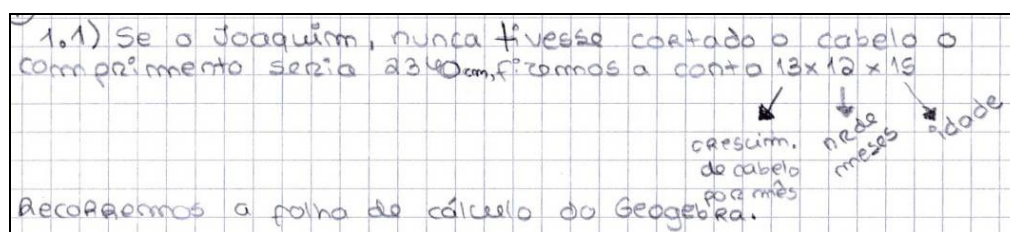
conseguidas. Ao longo de todas as tarefas, os alunos foram capazes de utilizar diversos tipos de representação disponibilizado pelo Geogebra, fazendo uso das potencialidades deste *software*, em particular das tabelas da folha de cálculo que tem incorporada, a qual consideraram uma mais valia significativa que lhes proporciona representações rigorosas em pouco tempo:

O meu grupo usou a folha de cálculo porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão. (Rui, grupo 4)

Pois quando descobrimos como fazemos para o primeiro já sabemos as outras todas, ou seja, quando descobrimos a fórmula do primeiro já temos para os outros todos. (Bárbara, grupo 3).

De seguida apresenta-se as respostas dos alunos à Tarefa 6 – O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função – que, como já explicado, permitia que os alunos adoptassem as representações que entendessem. Escolhe-se esta tarefa por ter carácter ilustrativo e por ter, de alguma forma, ido contra as expectativas das investigadoras.

Na primeira pergunta era pedido aos alunos que determinassem qual seria o comprimento do seu cabelo, tendo em conta a sua idade e se nunca o tivessem cortado, sabendo que este cresce ao ritmo médio de 13 mm por mês. Os diferentes grupos apresentaram as seguintes respostas:

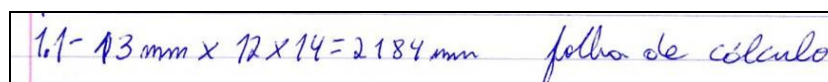


1.1) Se o Joaquim, nunca tivesse cortado o cabelo o comprimento seria 2340 cm, fomos a conta $13 \times 12 \times 15$

Recorremos a folha de cálculo do Geogebra.

Labels with arrows: crescim. do cabelo por mês, idade em meses, idade

Figura 1. Resposta do grupo 1.



1.1 - $13 \text{ mm} \times 12 \times 14 = 2184 \text{ mm}$ folha de cálculo

Figura 2. Resposta do grupo 2.

① 1.1- Na folha de cálculo multiplicamos a idade do joaquim que é 14 anos pelos 12 meses do ano e esse resultado multiplicamos pelos 13 mm que é em média o que o cabelo cresce por mês. o seu comprimento seria 2184mm.

Figura 3. Resposta do grupo 3.

1.1) Para saber o número de meses fez-se $14 \times 12 = 168$ e para saber o comprimento fez-se $168 \times 13 = 2184$

Figura 4. Resposta do grupo 4.

①
 p.1) $15 \times 12 = 180$ $180 \times 13 = 2340$ mm.
 O joaquim tem 15 anos, e o cabelo cresce 13mm por mês. Para saber quantos meses tinham passado multiplicamos 15 por 12 meses, recorrendo a folha de cálculo, ficamos a saber que tinham passado 180 meses. Logo, para saber quanto tinha crescido, multiplicamos o número de meses pelos milímetros que cresce por mês, recorrendo a folha de cálculo, e ficamos a saber que tinha de comprimento 2340 mm.

Figura 5. Resposta do grupo 5.

Para responderem a esta questão todos os grupos usaram a representação numérica e utilizaram como ferramenta de cálculo a folha de cálculo do Geogebra.

Todos os grupos, à excepção dos grupos 4 e 5, não tiveram em conta a unidade da variável tempo, ou seja, não determinaram a sua idade em meses ou então não determinaram qual é o crescimento médio do cabelo por ano.

Na segunda pergunta era dado o comprimento do cabelo e pedia-se que determinassem a idade mínima, tendo os grupos respondido:

1.2) A idade mínima que a Joana pode ter é 3,2 anos, recorrendo a folha de cálculo.

Figura 6. Resposta do grupo 1.

$$1.2 - 50 : 13 = 38,46 \quad \text{folha de cálculo}$$

$$38.46/12 = 3,21 = 3 \text{ anos}$$

Figura 7. Resposta do grupo 2.

1.2 - dividindo os 500 mm que tem o cabelo da joana pelos 13 mm deu 38,46. Esse valor divide-se pelos 12 meses do ano que deu 3,21 anos.

Figura 8. Resposta do grupo 3.

1.2) Para saber a idade fez-se $50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}$
 $\frac{500}{13} = 38,46$ meses logo em anos em anos tem $\frac{38,46}{12} = 3,21$
 Tem 3,21 anos

Figura 9. Resposta do grupo 4.

1.2) Tem 3,2 anos. Como aos 15 anos correspondia 2340 mm de comprimento de cabelo, logo 50 cm, que é 500 mm, corresponde a 2. Multiplicamos 500 mm por 15 anos e o resultado dividimos por 2340 mm, recorrendo à folha de cálculo. Ao realizarmos a regra de três simples chegamos à conclusão que podemos calcular pela fórmula $T = m \times 13$ sendo T em mm e m sendo meses.

Figura 10. Resposta do grupo 5.

A estratégia utilizada pelos grupos para responderem a esta questão, foi a mesma que haviam usado na pergunta anterior; recorreram à representação numérica da função e usaram a folha de cálculo do Geogebra para efectuarem os cálculos.

O grupo 2 na resposta escrita apresenta os cálculos com 50 cm, contudo na folha de cálculo efectuou-os correctamente, usando 500 mm.

Para responder a esta questão, os elementos do grupo 5 apresentaram opiniões e estratégias de resolução divergentes. Houve um elemento do grupo que usou a regra de três simples com os dados da alínea anterior, enquanto que os outros dois elementos efectuaram com os dados iniciais do problema. Esta situação levou a que discutissem as resoluções apresentadas e por fim a concluir que o comprimento do cabelo é sempre

igual ao produto do número de meses por 13mm, e daí a escreverem a expressão algébrica da função que modela o problema.

Na pergunta 1.3, era pedido o tempo necessário para que o cabelo tenha de 1m de comprimento. Os grupos responderam o seguinte:

1.3) 6,4 anos, porque se 0,50 cm é metade 1,3, 2 + 3,2 é 6,4. porque há medida que o tempo decorre o comprimento do cabelo vai aumentando.

Figura 11. Resolução do grupo 1.

1.3- Terá aproximadamente 6,42 ^{anos} porque 3,21 anos ~~é~~ é metade logo 6,42 é o dobro.

Figura 12. Resolução do grupo 2.

1.3 - A Joana precisa de esperar 6,42 anos para que o cabelo atinja 1000 mm. Dividindo os 1000 mm em 13 mm deu 76,92 que ao dividir pelos 12 meses foi dar os 6,42.

Figura 13. Resposta do grupo 3.

1.3) Tem que esperar 3,21 anos porque 1m é o dobro de 50 cm.

Figura 14. Resposta do grupo 4.

1.3) $T = m \times 13$
 $1000 = m \times 13$
 $13 \times m = 1000$
 $m = \frac{1000}{13}$
 $m = 76,92$

$\frac{76,92}{12} = 6,42$ ~~anos~~ anos

Recorrendo à fórmula substituímos T por 1000 mm que é o comprimento do cabelo, e calculamos m. O resultado da equação dividimos por 12 para sabermos os ~~anos~~ ^{anos}. Recorremos a folha de cálculo.

Figura 15. Resposta do grupo 5.

Os grupos 1, 2 e 4 usaram nas suas respostas, ainda que implicitamente, o conceito de proporcionalidade directa. Os grupos 3 e 5 utilizaram a representação algébrica para determinarem o valor pretendido. O grupo 5 partiu da expressão algébrica que haviam escrito na resposta à pergunta anterior. A folha de cálculo do Geogebra foi aqui também utilizada pelos grupos como auxiliar nos cálculos.

Na pergunta 1.4 era pedido aos alunos que determinassem quanto tempo havia passado para que o cabelo crescesse 1,95 cm, à qual responderam:

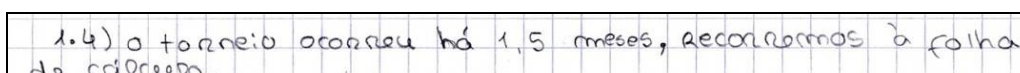


Figura 16. Resposta do grupo 1.

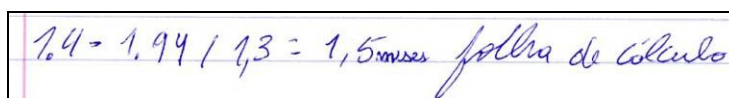


Figura 17. Resposta do grupo 2.

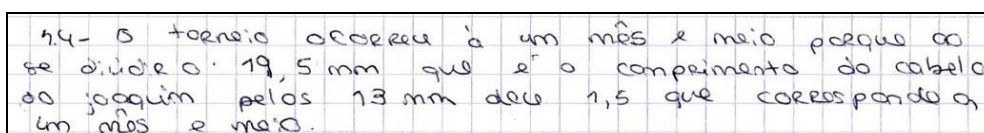


Figura 18. Resposta do grupo 3.

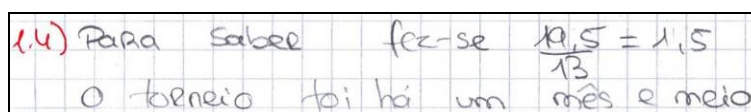


Figura 19. Resposta do grupo 4.

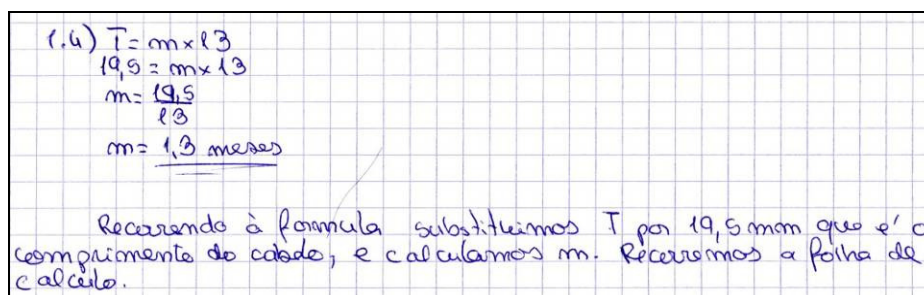
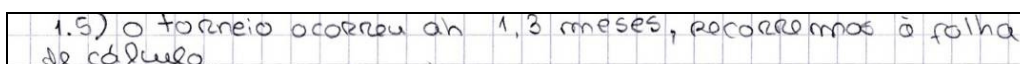


Figura 20. Resposta do grupo 5.

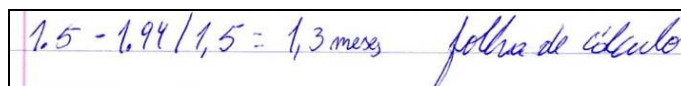
As respostas a esta pergunta não apresentam estratégias diferentes das utilizadas anteriormente, todos os grupos recorrem à representação numérica e usaram mais uma vez a folha de cálculo do Geogebra como ferramenta de cálculo. O grupo 5 distingue-se mais uma vez dos restantes grupos pelo simples facto de recorrer à expressão algébrica.

Na questão 1.5 é alterada a constante de proporcionalidade e é pedido aos alunos que determinem o tempo necessário para que o cabelo atinja o comprimento de 1,95 cm. Verificaram-se então as seguintes respostas:



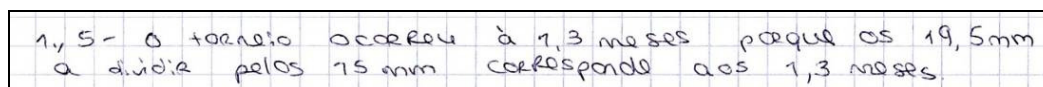
1.5) O torneio ocorreu há 1,3 meses, recorremos à folha de cálculo.

Figura 21. Resposta do grupo 1.



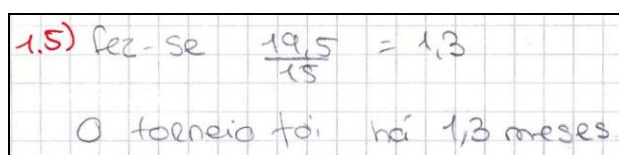
1.5 - 1.94 / 1,5 = 1,3 meses folha de cálculo

Figura 22. Resposta do grupo 2.



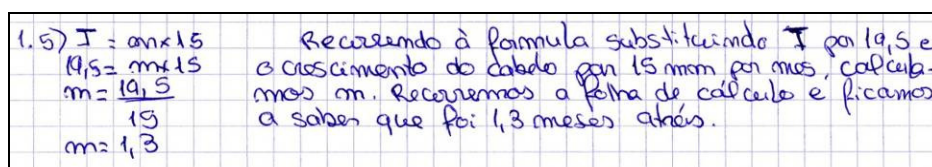
1,5 - O torneio ocorreu à 1,3 meses porque os 19,5mm a dividir pelos 15 mm corresponde aos 1,3 meses

Figura 23. Resposta do grupo 3.



1.5) fez-se $\frac{19,5}{15} = 1,3$
O torneio foi há 1,3 meses.

Figura 24. Resposta do grupo 4.



1.5) $I = m \times 15$
 $19,5 = m \times 15$
 $m = \frac{19,5}{15}$
 $m = 1,3$
Recorrendo à fórmula substituindo I por 19,5 e o crescimento do cabelo por 15 mm por mês, calculamos m . Recorremos a folha de cálculo e ficamos a saber que foi 1,3 meses atrás.

Figura 25. Resposta do grupo 5.

Mais uma vez todos os grupos recorreram às mesmas representações e procedimentos que haviam utilizado nas perguntas anteriores.

Na última pergunta pedia-se, aos alunos, que comparassem duas situações de crescimento de cabelo, modeladas por funções afim e, em particular, que determinassem se em algum momento as duas funções representavam o mesmo comprimento de cabelo. A esta pergunta os grupos responderam da seguinte forma:

1.6) Joana - $y = 100 + 13x$
 Joaquim - $15x$

$1,3 \times 13 = 16,9 \text{ mm}$
 $1,3 \times 100 = 116,9 \text{ cm}$

R: Ao fim de 50 meses, ~~por~~ recorremos à zona gráfica, colocamos o valor da Joana, e do Joaquim.

Figura 26. Resposta do grupo 1.

1.6 - $10 + 13x$ Da Popoziça
 $y = 15x$
 Têm o mesmo tamanho passado 5 meses

Figura 27. Resposta do grupo 2.

1.6 -
 colocando a equação $y = 100 + 13x$ que é o comprimento do cabelo da Joana que cresce 13mm por cada mês e a equação $y = 15x$... as rectas vão se cruzar quando elas tiverem 750 mm de comprimento de cabelo e isso acontecerá ao fim de 50 meses.

Figura 28. Resposta do grupo 3.

1.6) Sim, ao fim de 50 meses.

Figura 29. Resposta do grupo 4.

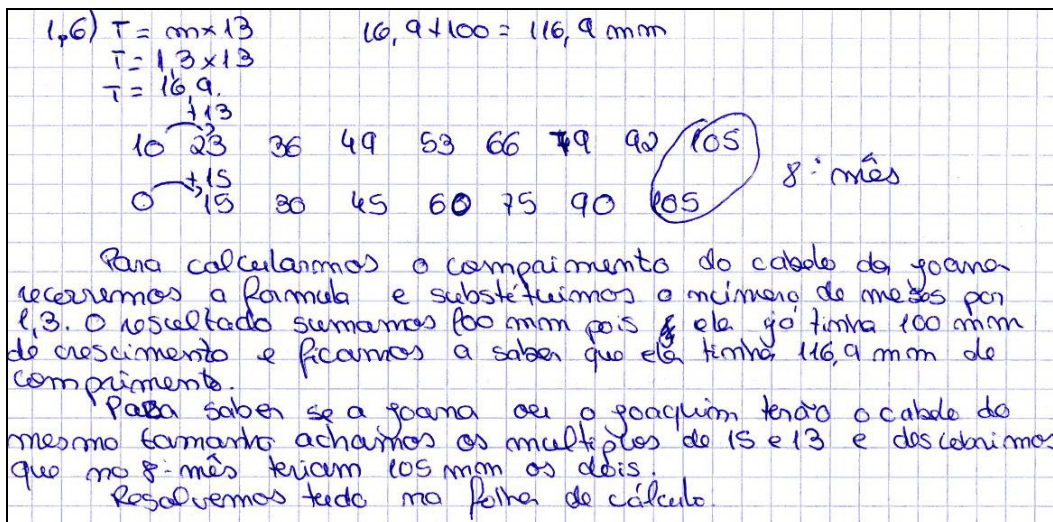


Figura 30. Resposta do grupo 5.

Os grupos 1, 3 e 4 recorreram à representação gráfica para responderem a esta pergunta, efectuando a representação de cada uma das funções no Geogebra e determinando o ponto de intersecção entre elas:

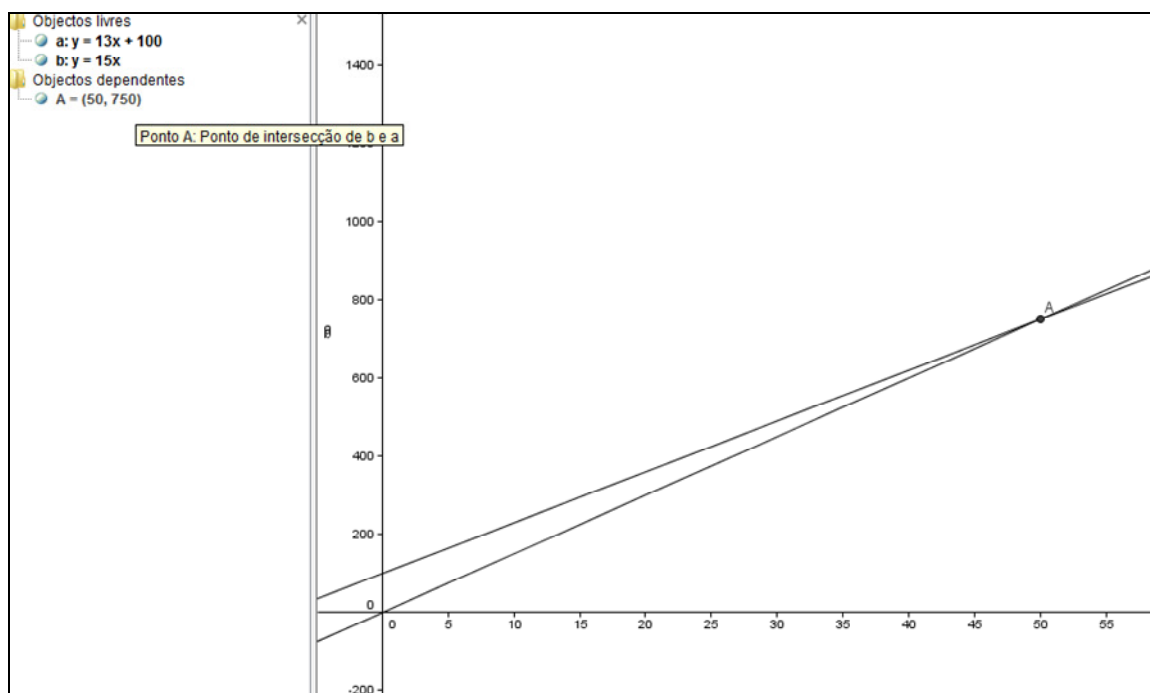


Figura 31. Procedimento utilizado pelos grupos 1, 3 e 4.

Os grupos 2 e 5 usaram as representações algébricas e tabulares, mas usando procedimentos distintos.

O grupo 2 usou a folha de cálculo do Geogebra e as suas potencialidades em conjunto com a expressão algébrica da função que modela cada uma das situações, como se pode ver em seguida:

	A	B	C	D
1				
2				
3	2184			
4				
5	38.46			
6	3.21			
7				
8				
9	1.5			
10	1.5			
11				
12	1.3			
13				
14	1	23	15	
15	2	26	26	
16	3	49	45	
17	4	62	60	
18	5	75		

Figura 32. Procedimento usado pelo grupo 2.

O grupo 2 cometeu o erro de usar os 10 cm onde teria que usar 100 mm, daí a justificação para a sua resposta não estar correcta. O grupo 5 só usou a folha cálculo para efectuar os cálculos auxiliares; no entanto, cometeram alguns erros o que justifica a sua resposta.

Note-se que os grupos nesta tarefa tinham total liberdade de escolha da(s) representação(ões) a que recorreriam para responder à questões. Todavia, não houve grandes diferenças nos procedimentos utilizados entre os grupos e no mesmo grupo entre as perguntas. Os alunos resolveram numericamente todas as questões, à excepção do grupo 5 que a partir da pergunta 1.2 recorreu à expressão algébrica. Os grupos 1, 2, 3 e 4 só definiram a expressão algébrica que modela o problema quando tiveram necessidade de fazer a representação gráfica.

Conclusões

De seguida tecem-se comentários conclusivos incidindo sobre as questões orientadoras do estudo desenvolvido.

Quais as representações a que os alunos mais recorrem?

O Quadro 2 resume as representações a que os alunos recorreram na realização de cada uma das tarefas, possibilitando assim uma análise cruzada das informações recolhidas relativamente às representações utilizadas por cada grupo na resolução de cada questão. Este quadro só contempla as questões em que os alunos podiam escolher as representações para produzir a resposta sem que nada lhes fosse imposto.

Quadro 2. Representações utilizadas por cada grupo.

	PERGUNTA	GRUPOS					Representação Predominante	
		1	2	3	4	5		
T1	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T2	2c	i)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica
		ii)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		iv)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		v)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vi)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T3	5	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	
T4	3	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Tabular	Tabular	Gráfica/ Tabular	
	6	a)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica

T5	P A R T E 1	c	i)	Algébrica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica
			ii)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Tabular	--
			iii)	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Tabular	Gráfica	Tabular	Tabular	Tabular
T5	P A R T E 2	d	i)	Algébrica	Tabular	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
			ii)	Tabular	Gráfica	Gráfica	----	Tabular	--
			iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T6	1.1		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	1.2		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	1.3		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica	Numérica
	1.4		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica	Numérica
	1.5		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica	Numérica
	1.6		Gráfica	Algébrica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Numérica	Gráfica	Gráfica
Repres. pred.			Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

Todos os grupos utilizaram os diferentes modos de representação no conjunto de tarefas propostas. A representação gráfica foi a representação a que os alunos mais recorreram por sua iniciativa, tendo sido as representações tabular e numérica as segundas mais utilizadas, surgindo em último lugar a representação algébrica.

Ao efectuar o mesmo tipo de análise, mas para cada grupo individualmente, verifica-se que todos os grupos recorreram também com maior frequência à representação gráfica. No entanto, verificou-se que só os grupos 2 e 3 apresentaram a mesma ordem de preferência/utilização dos modos de representação, ou seja, as representações tabular e numérica como as segundas representações mais utilizadas, seguidas pela representação algébrica. Para os grupos 1, 4 e 5 a segunda representação mais utilizada é a representação algébrica, logo de seguida estão referidas as representações numérica e tabular, respectivamente. O grupo 3 destaca-se por apresentar uma forte incidência no recurso à representação gráfica em comparação com os outros grupos.

Que factores influenciam a escolha da representação?

Para além das preferências que os alunos ou grupos parecem revelar, a escolha das representações parece ser orientada pelo tipo de conhecimento matemático que as

questões evocam. Assim, nas questões em que era pedido para se identificar a imagem dado o objecto, todos os grupos à excepção do grupo 3 recorreram maioritariamente à representação algébrica. O recurso generalizado à representação algébrica pode ser justificado por serem expressões algébricas de fácil compreensão, ainda mais quando foram escritas pelos próprios alunos, em que eram usadas estratégias de resolução (cálculo) com que os alunos estão mais familiarizados. O grupo 3, como desde início mostrou à vontade e entusiasmo em utilizar as potencialidades gráficas do Geogebra, procurou sempre que o conseguiu utilizar somente a representação gráfica.

Nas respostas às perguntas em que era necessário identificar o objecto dada a imagem, verifica-se que os grupos recorrem maioritariamente à representação gráfica, sendo excepção o grupo 5. Analisando em particular o grupo 5, este grupo recorre em grande parte à representação tabular, no entanto a representação tabular de cada uma das funções foi construída com base na representação gráfica. Portanto, pode afirmar-se que este grupo conciliou dois tipos de representação, a gráfica e tabular.

Nas respostas em que era solicitado o estudo comparativo de duas ou mais funções, os alunos recorreram na maioria das vezes à representação gráfica. A representação gráfica dá uma imagem clara global das funções, sendo esta uma mais valia quando se pede aos alunos que estabeleçam comparações entre funções ou que identifiquem momentos em as funções assumem o mesmo valor. Os alunos recorreram à representação tabular quando lhes foi pedido para analisarem as funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas.

Nas tarefas foram propostas questões em que os alunos tinham que analisar e interpretar a relação entre as variáveis e as variações das funções quanto à sua monotonia e compreender a influência da variação dos parâmetros das funções e ainda estudar a influência dos parâmetros dos tipos de função. Também nestes casos, a representação matemática predominante escolhida pelos grupos é a representação gráfica.

Como é que os alunos conciliaram as diferentes representações?

Note-se que os alunos usaram frequentemente mais do que um tipo de representação, tirando partido do *software* permitir visualizar e alterar, no mesmo ambiente de trabalho, todas as representações. Não ficaram por isso limitados na sua análise por não

terem presente uma dada representação, sendo sempre possível colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras.

Os alunos conciliaram sobretudo a representação gráfica com a representação algébrica e a tabular com a gráfica. A representação gráfica foi conciliada com a representação algébrica nas seguintes situações: quando o domínio representado pela representação gráfica não abrange os valores em estudo ou então quando, por limitações do software, o aluno não consegue seleccionar o valor em estudo. Os alunos também recorreram frequentemente à representação algébrica para construírem a representação gráfica das funções.

Dadas as características/potencialidades do Geogebra, a representação gráfica foi muitas vezes a base da construção da representação tabular das funções, uma vez que a partir da definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo, o Geogebra constrói automaticamente a tabela.

A possibilidade dos alunos usarem de forma autónoma o Geogebra fez com que não existissem constrangimentos relativamente ao tipo de representação a adoptar, pois a utilização de qualquer tipo de representação foi agilizada pelo uso do *software*, bem como a utilização simultânea de diversas representações para a mesma situação. No entanto, e como foi possível observar das respostas dos alunos à Tarefa 6, a disponibilidade do *software* não chega. Este estudo alerta também para que o trabalho com as representações múltiplas deve ser acautelado pelo professor, de forma a que possa ser potenciado e bem aproveitado pelos alunos.

Referências

- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Coulombe, W. N., & Berenson S. B. (2001). Representations of Patterns and Functions – Tools for Learning. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-174). Reston, VA: NCTM.
- Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.
- Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diversas representações das Funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra)* (Tese de Mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM:

- Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
- Gomez, P. (1997). Tecnología y educación Matemática. *Revista Informática Educativa. UNIANDÉS – LIDIE*, 10 (1), 93-11.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In Douglas Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. Acedido em 10 de Setembro, 2008, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 707-762). Charlotte: Information Age Publishing.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.
- ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Wong, K. (2004). Using Multi-modal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME-10*. Copenhagen: Technical University of Denmark. Acedido em <http://math.nie.edu.sg/kywong/Multi-modal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf>
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: a perspective of constructs. In Frank K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.