EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Relatório sobre a Unidade Curricular

Feliz Manuel Barrão Minhós

Julho/2009

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

RELATÓRIO DE UNIDADE CURRICULAR

F E L I Z   M A N U E L   B A R R Ã O   M I N H Ó S

J U L H O / 2 0 0 9

Índice

Prefácio

O conteúdo desta monografia destina-se a uma Unidade Curricular de Equações Diferenciais Ordinárias incorporada num 1^o Ciclo de uma Licenciatura.

As Equações Diferenciais Ordinárias abarcam uma área muito vasta, que pode ser analisada ou apresentada por várias ópticas, privilegiando esta ou aquela área específica da Matemática, e conferindo ao seu conteúdo uma abordagem de acordo com os objectivos pretendidos e vocacionados para a especialização a atingir.

Nesta monografia optou-se, não por aprofundar de um modo específico e detalhado uma determinada área científica das Equações Diferenciais Ordinárias, mas sim, por abordar conceitos, técnicas e metodologias básicas, mas necessárias, que constituem ferramentas importantes na obtenção de resultados de ponta, não só na Análise não Linear, mas também no campo das aplicações. Nesta linha, pretendeu-se evitar uma linguagem hermética, por vezes característica das especializações, optando-se pela clareza, sem abdicar da correcção, e por uma abordagem, teórica e prática, útil a várias componentes da Matemática.

Procurou-se, assim, que os temas abordados proporcionassem uma plataforma de conhecimentos e técnicas úteis, não só em Equações Diferenciais Ordinárias, mas também em Equações Diferenciais Parciais, e uma formação num leque variado de temas, que deixasse em aberto a possibilidade de escolher, no futuro, entre as várias especializações e de poder optar por várias possibilidades de percurso:

- quem pretenda aprofundar a sua formação matemática, e eventualmente ingressar numa carreira de investigação em Matemática, dispõe de resultados clássicos (Teoremas de existência e unicidade de solução, no caso escalar e vectorial, teoria da estabilidade, análise espectral, séries de Fourier,...), indispensáveis para uma formação sólida em Equações Diferenciais;

- a quem opte por uma formação matemática com ênfase nas aplicações e/ou na análise qualitativa de soluções, é-lhe proporcionado, além da teoria, imprescindível, técnicas com um enorme potencial de aplicação, tais como, métodos construtivos, para determinar explicitamente a solução, como, por exemplo, as funções de Green; inequações diferenciais e princípios de máximo, para localizar a solução, mesmo quando a sua expressão não é conhecida ou calculável; técnicas iterativas para aproximação de soluções e métodos para estimação do erro,...
- quem escolha uma outra via com forte componente matemática, os métodos e técnicas referidos nos itens anteriores, proporcionam uma base de conhecimento suficiente, e indispensável, para se entender e poder progredir em qualquer área de Engenharia, Física, Programação,....

Em resumo, procura-se neste curso garantir uma formação vasta e geral em Equações Diferenciais Ordinárias, sem detalhar áreas científicas em particular, de modo a deixar em aberto, a quem o frequente, a opção por uma área de especialização matemática, que poderá ser tomada em Unidades Curriculares de 2^o Ciclo.

Introdução e metodologia

O curso planificado nesta monografia visa uma Unidade Curricular semestral (13 semanas lectivas), com uma carga horária semanal de 3 horas teóricas ou teórico-práticas e 2 horas práticas ou teórico-práticas.

Está organizada em cinco capítulos, nos quais são apresentados conceitos, métodos e técnicas, que garantem uma formação adequada na área de Equações Diferenciais Ordinárias. Cada capítulo é iniciado com uma listagem de objectivos específicos, que o aluno deverá atingir após a sua leccionação. Esta discriminação, entre outros aspectos, pretende ser útil ao aluno, permitindo uma auto-avaliação face aos conhecimentos e competências que deverão ser adquiridos. A finalizar cada um dos capítulos apresenta-se uma secção de Exercícios, a ser gerida entre as aulas teórico-práticas ou práticas e o estudo individual do aluno, e uma secção de Actividades, que terá, eventualmente, uma componente de avaliação.

No primeiro capítulo apresentam-se os conteúdos relacionados com esta área científica, que deverão ser considerados como pré-requisitos para os capítulos seguintes. Estes temas não se destinam a ser leccionados, mas pretendem apenas detalhar a base teórico-prática que o aluno deverá possuir, a partir da qual poderá analisar a sua preparação inicial e colmatar algum eventual desconhecimento. Neste sentido, como, em princípio, se trata de assuntos já leccionados noutras unidades curriculares, não são apresentadas as demonstrações desses resultados, à excepção de provas com carácter construtivo..

Nos Capítulos 2 e 3 aborda-se a teoria clássica para garantir a existência, local e global, e a unicidadede solução, bem como condições suficientes para garantir a dependência contínua dos dados iniciais ou em relação a um parâmetro. Estes resultados são, em primeiro lugar, apresentados para o caso escalar, depois generalizados para o caso vectorial e, finalmente, complementados com o estudo das inequações diferenciais e princípios de máximo, ou de mínimo, que são explorados em duas vertentes:

- a formulação de teoremas de existência e localização de solução, isto é, resultados em que, além da existência, se indica um conjunto onde a solução se encontra, mesmo que seja desconhecida a sua expressão. Este facto revela-se útil para dispôr de informações suplementares sobre o comportamento da solução, garantir soluções limitadas e até mesmo para estimar, a priori, a sua variação;

- a obtenção de soluções extremais, sejam maximais ou minimais, isto é, no primeiro caso, garantir a existência, e até obter, a solução maior ou igual que todas as possíveis soluções do problema.

São ainda estudadas as especificidades dos sistemas periódicos lineares, bem como condições suficientes para garantir o tipo de comportamento das soluções de sistemas, quando a variável independente de torna muito grande em valor absoluto.

O quarto capítulo é dedicado à teoria da estabilidade, quando o intervalo de definição da solução se torna ilimitado, com especial destaque para a teoria de Lyapunov, nos sistemas autónomos e não autónomos. Nos sistemas bidimensionais autónomos, cujas soluções permitem uma representação geométrica, os vários tipos de pontos críticos são analisados com detalhe, inclusive no que se refere à natureza da sua estabilidade.

No Capítulo 5 são introduzidos os problemas com valores na fronteira, especificando-se as suas peculiariedades em relação aos problemas de valor inicial. A relação entre este tipo de problemas e a sua tradução por equações integrais, com ganhos significativos em termos de regularidade, é explorada com recurso às Funções de Green. Destaca-se, ainda, a utilidade desta técnica, quer no plano teórico quer prático, ao permitir a representação explícita da solução, eventualmente numa forma integral, de problemas com valores na fronteira. Especial destaque é também dado aos problemas de Sturm-Liouville e a resultados de Análise Espectral, com recurso à representação ou aproximação de funções por séries de funções próprias e à sua relação com séries de Fourier.

As secções, que compõem cada um dos capítulos, correspondem a uma aula, podendo, no caso das secções mais longas, ser gerida com a aula teórico-prática, nomeadamente, no estudo dos exemplos apresentados. Os exercícios integrados nestas secções devem ser resolvidos nas aulas ou, pelo menos, discutida a sua estratégia de resolução, já que parte dos seus resultados, ou das técnicas envolvidas, serão utilizados posteriormente.

A secção dedicada apenas a exercícios, existente em cada capítulo, contem uma listagem que pretende apenas exemplificar formatos possíveis de exercícios. Nesse sentido, priviligeou-se a variedade de técnicas e métodos, em detrimento da quantidade. As propostas de exercícios têm ainda uma dupla finalidade: poderão ser utilizados nas aulas, ou partes de aula, de cariz prático, e/ou servir de guião para o imprescindível trabalho individual do aluno.

As Actividades, que encerram cada um dos capítulos, têm, sobretudo, um cariz avaliativo. Para os alunos que optarem pelo regime de Avaliação Contínua, os exercícios aqui apresentados, constituem uma peça importante, de acordo com as regras apresentadas no Capítulo da Avaliação.

Avaliação

A avaliação desta Unidade Curricular pode ser feita por dois processos:

1. **Avaliação por Exame (AE)**

   O aluno será aprovado se, num dos exames a realizar em época própria, após o período lectivo, obtiver classificação igual ou superior a 10 valores.

2. **Avaliação Contínua (AC)**

   A avaliação contínua tem duas componentes:

   2.1 Avaliação das Actividades (Act)

   O aluno entregará a resolução de, pelo menos, uma actividade referida em cada um dos cinco capítulos, à qual será atribuida uma classificação, por Capítulo.
   A nota desta componente será a média das cinco classificações obtidas.

   2.2 Avaliação por Frequências (AF)

   No final dos Capítulos 3 e 5 será realizada uma prova de avaliação, com incidência na matéria dos capítulos leccionados.
   A classificação desta componente será a média das classificações obtidas.

   O aluno optará pela Avaliação Contínua se, cumulativamente:

   - entregar a resolução de, pelo menos, uma das Actividades referidas em cada capítulo;
   - se apresentar à avaliação nas duas frequências e tiver, em cada uma delas, classificação igual ou superior a oito valores.

A nota final, via Avaliação Contínua, será obtida pela fórmula:

$$\mathrm{AC} = 0,75 \ \times \ \mathrm{AF} + 0,25 \ \times \ \mathrm{Act.}$$

Caso o aluno opte por se submeter aos dois processos de avaliação, a classificação final da Unidade Curricular será melhor das duas classificações obtidas.

CAP. 1

Equações Diferenciais Ordinárias: generalidades e pré-requisitos

Como pré-requisitos para este curso, o aluno deverá saber:

- Distinguir e classificar equações diferenciais quanto à ordem, linearidade e homogeneidade.
- Averiguar se uma função é solução duma equação diferencial ordinária e/ou de um problema.
- Verificar formalmente condições necessárias e conhecer condições suficientes para a existência de solução, explícita ou implícita.
- Analisar se uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem é exacta e, em caso afirmativo, determinar a respectiva família de soluções, ou, em caso contrário, averiguar a existência de factores integrantes.
- Verificar se uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem tem variáveis separáveis e, em caso afirmativo, determinar a respectiva família de soluções.
- Reconhecer uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem linear e dominar a técnica de resolução.
- Verificar se um conjunto de soluções forma uma base do espaço de soluções e, nesse caso, determinar a solução geral.

- Reduzir a ordem de uma equação diferencial ordinária, de ordem superior à 1^a, conhecida uma solução.
- Dominar técnicas e métodos de resolução de equações diferenciais lineares de ordem superior, com coeficientes constantes, homogéneas e não homogéneas, tais como, o método da variação dos parâmetros.
- Construir problemas que modelem situações da vida real e analisar a respectiva adaptabilidade e coerência.

1.1 Definições e generalidades

Uma **equação diferencial ordinária** (EDO) é uma igualdade que contem uma variável independente, x, uma variável dependente, y, e algumas das suas derivadas, $y', y'', ..., y^{(n)}$. Ao longo deste curso considera-se que, quer a variável independente, quer a variável dependente são reais.

Exemplos:

$$\begin{aligned} xy' + 3y &= 6x^3 & (1.1)\\ \left(y'\right)^2 - 4y &= 0 & (1.2)\\ x^2y'' - 3xy' + 3y &= 0 & (1.3)\\ 2x^2y'' - \left(y'\right)^2 &= 0. & (1.4)\end{aligned}$$

Designa-se por **ordem da EDO** a maior ordem da derivada (com coeficiente não identicamente nulo). Assim as equações (1.1) e (1.2) são de 1^a ordem, enquanto (1.3) e (1.4) são de 2^a ordem.

Se a igualdade tiver mais de uma variável independente, então será designada por **equação diferencial parcial.** Exemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Neste curso estudam-se apenas as equações diferenciais ordinárias, pelo que se passarão a designar apenas por equações diferenciais.

De uma forma geral uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita na forma

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1.5)$$

sendo F uma função conhecida.

Uma relação funcional entre as variáveis dependente y e independente x, num certo intervalo I, que verifique a equação diferencial, chama-se **solução** da equação diferencial.

A solução pode estar definida num intervalo limitado, do tipo $[a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, ou ilimitado, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$.

Por exemplo, $y(x) = 7e^x + x^2 + 2x + 2$ é solução da equação diferencial

$$y' - y = -x^2$$

para $I = \mathbb{R}$. De modo análogo $y(x) = x\tan(x+3)$ é solução da equação diferencial

$$xy' - y^2 - y = x^2$$

para $I = \left]-\frac{\pi}{2}-3, \frac{\pi}{2}-3\right[$.

A **solução geral** de uma equação diferencial de ordem n depende de n constantes arbitrárias. Ou seja, a solução y depende de x e das constantes reais $c_1, c_2, ..., c_n$.

Por exemplo, as funções

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^3 + \frac{c}{x^3}, & (1.6)\\ y_2(x) &= x^2 + cx + \frac{c^2}{4}, \\ y_3(x) &= c_1x + c_2x^3, \\ y_4(x) &= \frac{2x}{c_1} - \frac{2}{c_1^2}\log(1+c_1x) & (1.7) \end{aligned}$$

são soluções gerais das equações (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4), respectivamente.

Obviamente $y_1(x)$ está definida em qualquer intervalo que não contenha o valor 0, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$, e $y_4(x)$ coloca restrições quer à constante c_1 quer à variável x, nomeadamente $c_1 \neq 0$ e $1 + c_1x > 0$.

A função $y_1^*(x) = x^3$ é uma **solução particular** da equação (1.1) que se obtem considerando, em (1.6), $c = 0$.

Note-se que $y_4^*(x) = x^2$ é uma solução de (1.4) mas, contudo, não está incluida em (1.7). Esta solução "extra", que não pode ser obtida a partir de (1.7) atribuindo valores à constante, chama-se **solução singular** de (1.4).

Ao designar uma função por solução geral, o termo "geral" não deve ser considerado no sentido de "completa". À totalidade das soluções de uma equação diferencial chama-se **solução completa**.

Considere-se uma equação diferencial de 1^a ordem na forma $F(x,y,y') = 0$. A função $y = \phi(x)$ diz-se uma **solução explícita** se $F(x,\phi(x),\phi'(x)) = 0$ no intervalo I.

A relação $\psi(x,y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** de $F(x,y,y') = 0$, desde que represente uma ou mais funções $y = \phi(x)$ que verifiquem $F(x,\phi(x),\phi'(x)) \equiv 0$.

Em geral é difícil, e por vezes mesmo impossível, determinar explicitamente y na relação $\psi(x,y) = 0$. Contudo poder-se-á testar a solução obtendo y' pela derivada duma função implícita: $y' = -\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$ e verificar se $F(x,y,-\frac{\psi'_x}{\psi'_y}) \equiv 0$.

Sem perda de generalidade, considerar-se-á sempre a equação (1.5) escrita na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{1.8}$$

onde f é uma função conhecida. Desta forma evita-se que (1.5) represente mais que uma equação. Por exemplo $(y')^2 = 4y$ representa duas equações diferenciais $y' = \pm 2\sqrt{y}$.

As equações diferenciais são classificadas em dois grupos: **lineares** e **não lineares**. Uma equação diferencial é **linear** se é linear em y e em todas as suas derivadas. Assim uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma

$$\mathcal{P}_n[y] := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

As equações (1.1) e (1.3) são exemplos de equações diferenciais lineares, enquanto (1.2) e (1.4) são equações não lineares.

Se $\mathcal{P}_n[y](x) \equiv 0$ a equação diferencial diz-se **homogénea**, caso contrário dir-se-á **não homogénea**.

No campo das aplicações é vulgar pretender-se soluções de (1.8) que verifiquem determinadas restrições, chamadas **condições iniciais** ou **condições de fronteira**. Por exemplo, por condições iniciais para a equação (1.8) entende-se n condições do tipo

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{1.9}$$

em que $y_0, ..., y_{n-1}$ e x_0 são constantes dadas. Um problema que englobe a equação diferencial (1.8) e as condições (1.9) chama-se **problema de valor inicial**. É vulgar procurar soluções do problema (1.8), (1.9) num intervalo I que contenha x_0.

Repare-se que a equação diferencial $xy' - 3y + 3 = 0$:

- não tem nenhuma solução que satisfaça $y(0) = 0$;

- tem uma única solução, $y(x) \equiv 1$, que verifica $y(x) = 1$;
- tem infinitas soluções $y(x) = cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{R}$, que satisfazem $y(0) = 1$.

Esta variedade de situações coloca uma questão essencial: a existência de solução. Infelizmente a classe das equações diferenciais solúveis é muito restrita. Assim um dos principais objectivos da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias é encontrar condições suficientes para garantir a existência de, pelo menos, uma solução para uma certa equação ou problema de valor inicial.

Constituem também áreas de interesse nesta Teoria:

- calcular o número de soluções (eventualmente sem as determinar);
- demonstrar algumas propriedades das soluções (caso existam);
- construir processos de aproximar soluções.

Como base de trabalho considere-se o problema de valor inicial composto pela equação diferencial de 1^a ordem

$$y' = f(x, y) \tag{1.10}$$

e pela condição

$$y(x_0) = y_0.$$

1.2 Equações exactas e factores integrantes

Considerando, em (1.10), o caso particular $f(x, y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ obtem-se a equação

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{1.11}$$

onde M e N são funções contínuas, $N \neq 0$, com as derivadas parciais M'_y e N'_x contínuas, no rectângulo

$$S = \left\{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b,\ a, b \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{1.12}$$

A equação (1.11) é **exacta** se existir uma função $F(x, y)$ tal que

$$F'_x(x, y) = M(x, y) \ \text{ e } \ F'_y(x, y) = N(x, y). \tag{1.13}$$

O tipo de designação advem do facto de $M + Ny' = F'_x + F'_y y$ ser **exactamente** a derivada de F em relação à variável independente x. Então

$$F(x, y) = c$$

é solução de (1.11), a qual poderá ser encontrada seguindo a metodologia da demonstração (construtiva) do seguinte teorema:

Teorema 1.2.1 *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas com as derivadas parciais $M'_y(x,y)$ e $N'_x(x,y)$ contínuas, no rectângulo S dado por (1.12). Então a equação diferencial (1.11) é exacta se, e só se,*

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y). \tag{1.14}$$

Dem. Se (1.11) é exacta então, por (1.13), $F''_{xy} = M'_y$ e $F''_{yx} = N'_x$. Pela continuidade de M'_y e N'_x tem-se $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Reciprocamente, suponha-se que M e N verificam (1.14) e construa-se, para provar que (1.11) é exacta, uma função F que satisfaça (1.13).

Integrando ambos os membros de $F'_x(x,y) = M(x,y)$ em ordem a x, obtem-se

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + g(y), \tag{1.15}$$

sendo $g(y)$ uma função arbitrária, só dependendo de y, que desempenha o papel da "constante de integração" e que pode ser obtida através da segunda relação $F'_y(x,y) = N(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + g'(y) = \int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds + g'(y) = N(x,y),$$

e

$$g'(y) = N(x,y) - \int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds. \tag{1.16}$$

Derivando em ordem a x tem-se

$$N'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds = N'_x(x,y) - M'_y(x,y) = 0,$$

pelo que a expressão (1.16) depende apenas de y.

Portanto, a função g pode ser obtida a partir de (1.16) e, por consequência, uma função F, que verifique (1.13), obtida por (1.15). ■

Observação 1.2.2 ***(i)*** *Integrando (1.16) entre y_0 e y, a função g é dada, explicitamente, por*

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + g(y_0).$$

Substituindo em (1.15), obtem-se a solução da equação diferencial (1.11):

$$F(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x,t)dt+\int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds=c. \tag{1.17}$$

(ii) *A escolha de x_0 e y_0 é arbitrária, sendo apenas necessário garantir que os integrais permaneçam próprios.*

Exemplo 1.2.3 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$2x\ sen\ y+e^x\cos y+(x^2\cos y-e^x sen\ y)y'=0,\quad y(0)=\frac{\pi}{4}.$$

Quando a equação diferencial (1.11) não é exacta pode procurar-se uma função não nula $\mu(x,y)$, chamada **factor integrante**, para a qual a equação equivalente

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)y'=0 \tag{1.18}$$

já é exacta.

Como determinar um factor integrante?

Para que a equação (1.18) seja exacta ter-se-á

$$[\mu(x,y)M(x,y)]'_y=[\mu(x,y)N(x,y)]'_x\,,$$

pelo que o factor integrante μ deverá verificar a equação

$$\mu'_y M+\mu M'_y=\mu'_x N+\mu N'_x. \tag{1.19}$$

Resolver esta equação com derivadas parciais não é tarefa fácil. Contudo, como é apenas necessário uma solução particular de (1.19), pode considerar-se o factor integrante na forma

$$\mu(x,y)=A(x)B(y),$$

com $A(x)$ e $B(y)$ funções não nulas a determinar.

Substituindo em (1.19):

$$A(x)B'(y)M+A(x)B(y)M'_y=A'(x)B(y)N+A(x)B(y)N'_x$$

ou seja

$$\frac{A'(x)N}{A(x)}-\frac{B'(y)M}{B(y)}=M'_y-N'_x. \tag{1.20}$$

Definindo

$$g(x):=\frac{A'(x)}{A(x)},\ \ h(y):=\frac{B'(y)}{B(y)}$$

e primitivando, tem-se que (1.20) é verificada desde que

$$A(x)=e^{\int g(x)dx}\ \text{ e }\ B(y)=e^{\int h(y)dy}.$$

Exemplo 1.2.4 *A equação diferencial*

$$y - y^2 + xy' = 0 \tag{1.21}$$

não é exacta. Procure-se um factor integrante do tipo $\mu(x, y) = x^m y^n$*. Neste caso a equação (1.20) assume a forma*

$$m - n(1 - y) = -2y$$

pelo que $m = n = -2$*. Assim, multiplicando (1.21) por* $\mu(x, y) = x^{-2}y^{-2}$*, obtem-se a equação exacta*

$$x^{-2}(y^{-1} - 1) + x^{-1}y^{-2}y' = 0,$$

cuja solução, por (1.17) com $y_0 = 1$*, é dada por*

$$F(x, y) = \int_1^y x^{-1}t^{-2}dt = c$$

ou seja

$$y = \frac{1}{1 - cx}.$$

Exemplo 1.2.5 *De um modo mais geral pode olhar-se para um factor integrante do tipo* $\mu = \mu(v)$ *com* v *uma função de* x *e* y*, conhecida. Neste caso, de (1.19), obtem-se*

$$\frac{1}{\mu}\mu'(v) = \frac{N'_x - M'_y}{v'_y M - v'_x N}. \tag{1.22}$$

Se o segundo membro de (1.22) depender apenas de v*, por exemplo uma função* $\phi(v)$*, então o factor integrante é dado por*

$$\mu(x, y) = e^{\int \phi(v)dv}.$$

Exercício 1.2.6 *Determine uma expressão para o factor integrante nos casos particulares em que* $v = x$ *e* $v = y$*.*

Curiosamente, a partir de dois factores integrantes de (1.11) é possível encontrar uma solução:

Lema 1.2.7 *Se a equação (1.11) for exacta e admitir o factor integrante* $\mu(x, y)$ *então* $\mu(x, y) = c$ *é uma solução de (1.11).*

Dem. Por (1.19) e pela hipótese, tem-se que $\mu'_y M = \mu'_x N$.
Multiplicando (1.11) por μ'_y obtem-se

$$\mu'_y M + \mu'_y N y' = N \left(\mu'_x + \mu'_y y'\right) = N \frac{d\mu}{dx} = 0,$$

pelo que $\mu(x, y) = c$ é solução de (1.11). ■

Teorema 1.2.8 *Se $\mu_1(x, y)$ e $\mu_2(x, y)$ são dois factores integrantes de (1.11) cujo quociente não é constante, então $\mu_1(x, y) = c\mu_2(x, y)$ é uma solução de (1.11).*

Dem. As equações $\mu_1 M + \mu_1 N y' = 0$ e $\mu_2 M + \mu_2 N y' = 0$ são exactas.

Multiplicando a segunda equação por $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ obtem-se a primeira (exacta), pelo que admite o factor integrante $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Pelo Lema 1.2.7, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$ é uma solução da segunda equação, logo de (1.11). ■

1.3 Equações elementares de 1^a ordem

Existem equações diferenciais de 1^a ordem que se podem solucionar por técnicas elementares de primitivação precedidas, eventualmente, por uma mudança de variável

1.3.1 Equação de variáveis separáveis

Considerando, em (1.11), o caso particular de $M(x, y) = X_1(x)Y_1(y)$ e $M(x, y) = X_2(x)Y_2(y)$ então a equação tomará a forma

$$X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y)y' = 0. \tag{1.23}$$

Se $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$ para $(x, y) \in S$, dado por (1.12), então (1.23) pode ser escrita como uma equação exacta

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)} + \frac{Y_1(y)}{Y_2(y)} y' = 0, \tag{1.24}$$

na qual as variáveis estão separadas. Assim a equação diferencial (1.24) diz-se de **variáveis separadas** e a sua solução, por (1.17), é dada por

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)} dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y_2(y)} dy = c, \tag{1.25}$$

em que as constantes de primitivação estão contidas em c.

Esta relação contem todas as soluções de (1.23) em que $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$. Ao dividir (1.23) por $Y_1(y)X_2(x)$ pode perder-se algumas soluções, as quais devem ser acrescentadas a (1.25). Para serem obtidas todas as soluções de (1.23), o mesmo deve acontecer às soluções que não estejam aqui incluidas para algum valor de c.

Exemplo 1.3.1 *A equação (1.21) também pode ser escrita como*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2 - y} y' = 0,$$

para $xy(y-1) \neq 0$. *Por (1.25) tem-se as soluções*

$$y = \frac{1}{1 - cx}. \tag{1.26}$$

Outras possíveis soluções, para as quais $x(y^2 - y) = 0$, *são* $x = 0, y = 0$ *e* $y = 1$. *Contudo* $y = 1$ *já está incluida em (1.26) (caso de* $c = 0$*) e* $x = 0$ *não é solução. Assim todas as soluções de (1.21) são dadas por (1.26) e* $y = 0$.

1.3.2 Equação homogénea

Uma função $f(x, y)$ definida num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, aberto e conexo, diz-se **homogénea** de grau k se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y),$$

para todo o parâmetro real λ e $(x, y) \in D$.

Considerando $\lambda = \frac{1}{x}$ a relação ficará

$$x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

o que permite concluir que uma função homogénea de grau 0 é uma função de uma única variável $u := \frac{y}{x}$.

Uma equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y) \tag{1.27}$$

diz-se **homogénea** se f for uma função homogénea de grau 0.

Nestes casos, com a mudança de variável indicada, procuram-se soluções do tipo $y(x) = xu(x)$, sendo u uma função a determinar. Substituindo

$y'(x) = u(x) + xu'(x)$ em (1.27) obtem-se, pelo facto de f ser homogénea de grau 0,

$$u + xu' = f(x, xu) = f(1, u) := \varphi(u)$$

o que conduz a uma equação de variáveis separadas do tipo

$$\frac{u'}{\varphi(u) - u} = \frac{1}{x}.$$

Exemplo 1.3.2 *Determinar a solução da equação homogénea*

$$y'(x) = \frac{2xy}{x^2 - 3y^2}.$$

1.3.3 Equação homográfica

Uma equação diferencial da forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1.28}$$

onde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 são constantes reais, designa-se por equação **homográfica.**

Analise-se algumas situações:

Se $c_1 = c_2 = 0$ a equação é homogénea.

Se c_1 e c_2 não são simultaneamente nulos, a equação pode transformar-se numa equação homogénea, com uma mudança de variável adequada, de acordo com o tipo de relações verificadas pelos coeficientes:

No caso em que $a_1b_2 \neq a_2b_1$ efectuam-se as transformações

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

onde h e k são soluções do sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{array} \right. ,$$

obtendo-se a equação homogénea

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Se $a_1b_2 = a_2b_1$ então $a_1x + b_1y$ é proporcional a $a_2x + b_2y$. Assim a equação (1.28) pode escrever-se na forma

$$y' = f(\alpha x + \beta y)$$

e resolvida com a substituição $z := \alpha x + \beta y$.

Exemplo 1.3.3 *Calcular a solução do problema de valor inicial*

$$y' = \frac{y - 2x + 3}{2y - x}, \quad y(3) = 2.$$

1.3.4 Equação linear de 1^a ordem

O aspecto geral de uma equação diferencial linear de 1^a ordem será

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x).$$

Considere-se $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $r(x)$ funções contínuas e $p_1(x) \neq 0$ num certo intervalo I. Neste caso a equação anterior pode escrever-se na forma

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.29}$$

com $p(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ e $q(x) = \frac{r(x)}{p_0(x)}$ funções contínuas em I.

A equação homogénea correspondente

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1.30}$$

pode ser resolvida por uma separação de variáveis

$$\frac{1}{y}y' = -p(x)$$

e, com a correspondente primitivação,

$$y(x) = c\ e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.31}$$

Ao dividir-se (1.30) por y, "perdeu-se" a solução $y \equiv 0$, que é designada por **solução trivial**, já que (1.30) admite sempre esta solução nula. Contudo, apesar disso, esta solução já está incluida em (1.31) (basta fazer $c = 0$).

Para um problema de valor inicial formado por (1.30) e $y(x_0) = y_0$, com $x_0 \in I$, então a solução será

$$y(x) = y_0\ e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

A resolução da equação completa (1.29) também pode ser reduzida a um caso de primitivação: multiplicando-a por $e^{\int p(x)dx}$ obtem-se

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx}\left[y' + p(x)y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\ \left(y\ e^{\int p(x)dx}\right)' &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\ y\ e^{\int p(x)dx} &= c + \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx \end{aligned}$$

sendo a solução dada por

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx\right). \tag{1.32}$$

Observação 1.3.4 *Esta solução $y(x)$ é da forma $c\,u(x) + v(x)$, pelo que a solução geral da equação linear completa (1.29) se pode obter pela adição entre a solução (geral) da equação homogénea (1.30) e uma solução particular de (1.29).*

Para obter a solução do problema de valor inicial correspondente, basta apenas encontrar o elemento da família de soluções (1.32) que passa pelo ponto (x_0, y_0), isto é,

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds} q(t)dt\right).$$

Note-se que se $p(x)$ e $q(x)$ forem funções constantes, por exemplo, $p(x) \equiv p$ e $q(x) \equiv q$, a solução ficará

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{q}{p}\right) e^{p(x_0 - x)} + \frac{q}{p}.$$

Exemplo 1.3.5 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0, \quad x \neq 0, \quad y(1) = 1.$$

Se forem conhecidas duas soluções particulares de (1.29), $y_1(x)$ e $y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &= -p(x)y_1(x) + q(x) + p(x)y_2(x) - q(x) \\ &= -p(x)\left[y_1(x) - y_2(x)\right]. \end{aligned}$$

Assim a função $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ é solução da equação homogénea associada e, pela Observação 1.3.4, as funções

$$y(x) = c\left(y_1(x) - y_2(x)\right) + y_1(x) \quad \text{e} \quad y(x) = c\left(y_1(x) - y_2(x)\right) + y_2(x)$$

são soluções gerais da equação completa (1.29).

Algumas equações diferenciais não lineares de 1^a ordem podem ser reduzidas a equações lineares recorrendo a mudanças de variável adequadas:

1.3.5 Equação de Bernoulli

Uma equação da forma

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)\ y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{1.33}$$

com $p_1(x), p_0(x)$ e $r(x)$ funções contínuas, $p_1(x) \neq 0$, designa-se por **equação de Bernoulli**.

Exclui-se $n = 0$ e $n = 1$ porque nestes casos a equação seria linear.

A equação anterior é equivalente a

$$p_1(x)\ y^{-n}y' + p_0(x)y^{1-n} = r(x)$$

e, fazendo a substituição $v = y^{1-n}$, obtem-se a equação linear de 1^a ordem

$$\frac{1}{1-n}\ p_1(x)\ v' + p_0(x)v = r(x).$$

Exemplo 1.3.6 *Calcular a solução do problema de valor inicial*

$$y' + x^2y = e^{x^3}\frac{y^4}{3}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

1.3.6 Equação de Ricati

Uma equação não linear de 1^a ordem do tipo

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{1.34}$$

com $p(x), q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas num certo intervalo I, designa-se por **equação de Ricati.**

Se for conhecida uma solução de (1.34), $y_1(x)$, (a qual poderá não ser solução do problema de valor inicial) a substituição

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

transforma-a numa equação linear de 1^a ordem em z. De facto

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + r(x) \\ &= \left[p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)\right] + p(x)\left(\frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + q(x)\frac{1}{z} \end{aligned}$$

donde

$$-\frac{z'}{z^2} = \left[2p(x)y_1 + q(x)\right]\frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z^2}$$

e

$$z' + \left[2p(x)y_1 + q(x)\right]z + p(x) = 0.$$

Exemplo 1.3.7 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$y' = -2xy^2 + \left(2x + 4x^2\right) y - 2x^3 - 2x^2 + 1, \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

sabendo que $y_1(x) = x$ *é solução da equação.*

As equações diferenciais lineares de 1^a ordem têm um leque muito variado de aplicações.

A variável independente x representa vulgarmente "tempo". O segundo membro $q(x)$ pode ter um significado físico, como uma força. A solução $y(x)$ poderá significar um deslocamento ou uma outra quantidade física.

De uma forma geral, a equação (1.29) pode modelar uma relação de *input-output,* considerando $q(x)$ como as quantidades de **input** e $y(x)$ como a resposta de **output.**

1.4 Equações lineares de 2^a ordem

Para a equação homogénea linear de 2^a ordem com coeficientes variáveis

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{1.35}$$

com $p_2(x)\,(>0)$, $p_1(x)$ e $p_0(x)$ funções contínuas num intervalo I, não existe nenhum método para a resolver, excepto em alguns casos particulares.

Os resultados que se seguem resultam da adaptação à 2^a ordem da teoria mais geral de sistemas de equações diferenciais lineares de 1^a ordem, a desenvolver mais tarde.

Teorema 1.4.1 *Existem exactamente duas soluções* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *de (1.35) linearmente independentes num intervalo* I. *Isto é, não existe uma constante* c *tal que* $y_1(x) = c\ y_2(x)$, *para* $x \in I$.

Teorema 1.4.2 *Duas soluções de (1.35),* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$, *são linearmente independentes em* I *se o seu* ***Wronskiano*** *definido por*

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{1.36}$$

for diferente de 0 *para algum* $x = x_0 \in I$.

Teorema 1.4.3 *O Wronskiano (1.36) verifica a igualdade de Abel*

$$W(x) = W(x_0)\ e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt}, \quad x_0 \in I.$$

Assim, se o Wronskiano se anula para algum $x_0 \in I$ *então anula-se para todo o* $x \in I$.

Teorema 1.4.4 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (1.35) e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, então $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é também uma solução de (1.35).*
Além disso, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$, são linearmente independentes então qualquer solução $y(x)$ de (1.35) pode ser escrita na forma $y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$, com k_1 e k_2 constantes adequadas.

1.4.1 Redução de ordem

Se for conhecida uma solução **não trivial** de (1.35), $y_1(x)$, então pode encontrar-se uma segunda solução $y_2(x)$ que seja da forma

$$y_2(x) = u(x)\ y_1(x).$$

Substituindo na equação tem-se

$$\begin{aligned} p_2(u\ y_1)'' + p_1(u\ y_1)' + p_0u\ y_1 &= 0 \\ p_2u''y_1 + 2p_2u'y_1' + p_2uy_1'' + p_1u'y_1 + p_1uy_1' + p_0uy_1 &= 0 \\ p_2u''y_1 + \left(2p_2y_1' + p_1y_1\right)u' + \left(p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1\right)u &= 0. \end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ solução de (1.35), a última parcela anula-se e com a substituição $v = u'$ obtem-se

$$p_2y_1v' + \left(2p_2y_1' + p_1y_1\right)v = 0. \tag{1.37}$$

Esta equação linear de 1^a ordem pode ser resolvida em I. Multiplicando-a por $\frac{y_1}{p_2}$ tem-se

$$\begin{aligned} y_1^2v' + 2y_1'y_1v + \frac{p_1}{p_2}y_1^2v &= 0 \\ \left(y_1^2v\right)' + \frac{p_1}{p_2}y_1^2v &= 0 \end{aligned}$$

pelo que

$$y_1^2v = c\ e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx}.$$

Considerando $c = 1$, obtem-se

$$v = \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx} := u',$$

sendo então a segunda solução dada por

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\ e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx} dx. \tag{1.38}$$

Exemplo 1.4.5 *Calcular a solução geral da equação de Legendre*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in]-1, 1[,$$

sabendo que $y(x) = x$ é uma solução.

1.4.2 Solução particular da equação não homogénea

Para encontrar uma solução particular para a equação não homogénea

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \tag{1.39}$$

sendo $r(x)$ uma função contínua em I, utilizar-se-á o **método da variação dos parâmetros**:

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (1.35) e as "constantes" c_1 e c_2 consideradas como funções da variável independente x.

Suponha-se que

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

é solução de (1.39). Para determinar as duas funções incógnitas $c_1(x)$ e $c_2(x)$ necessita-se de duas condições: Como

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$$

a primeira condição a exigir será

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{1.40}$$

Diferenciando

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

tem-se

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2'.$$

Substituindo em (1.39), obtem-se

$$c_1(p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1) + c_2(p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2) + p_2(c_1'y_1' + c_2'y_2') = r(x)$$

e, como y_1 e y_2 são soluções de (1.35),

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{r(x)}{p_2(x)}. \tag{1.41}$$

Resolvendo o sistema (1.40)-(1.41), ter-se-á

$$c_1' = -\frac{\frac{y_2(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad c_2' = \frac{\frac{y_1(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Assim, uma solução particular de (1.39), $y_p(x)$, será

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ &= -y_1(x) \int \frac{\frac{y_2(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{\frac{y_1(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \end{aligned}$$

A solução geral de (1.39) obtem-se adicionando a esta solução particular a solução geral da equação homogénea associada:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.4.3 Equação homogénea com coeficientes constantes

Definida uma técnica para encontrar a solução particular, como obter a solução da equação homogénea associada? No caso de os coeficientes serem constantes, isto é, para

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad a \neq 0, \tag{1.42}$$

será "razoável" esperar que, à semelhança do que sucedia nas equações de 1^a ordem, as soluções assumam a forma de exponenciais, já que as derivadas de e^{rx} conduzem sempre à mesma exponencial multiplicada por uma constante.

Se se experimentar $y = e^{rx}$ e procurar os valores de r adequados, obtem-se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = \left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} = 0.$$

Então e^{rx} é solução de (1.42) se r for solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{1.43}$$

designada por **equação característica**.

Como é conhecido, há três casos possíveis:

1. Se existirem **duas raízes reais distintas**, r_1 e r_2, então e^{r_1x} e e^{r_2x} são duas soluções de (1.42), e a solução geral será

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Se existir **uma raiz real dupla**, $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$, e^{rx} é uma solução. A segunda solução pode ser encontrada por (1.38):

$$y_2(x) = e^{rx} \int \frac{1}{(e^{rx})^2} \, e^{-\int \frac{b}{a} dt} dx = e^{rx} x,$$

sendo a solução geral dada por

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) \, e^{rx}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Se existirem **duas raízes complexas conjugadas**, $r = \alpha \pm \beta i$, então as soluções serão da forma

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x} \left(\cos \beta x \pm i \text{sen} \beta x \right).$$

Como a parte real ($e^{\alpha x} \cos \beta x$) e o coeficiente da parte imaginária ($e^{\alpha x} \text{sen} \beta x$) são ambas soluções de (1.42), a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \text{sen} \beta x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.4.6 *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

Apesar de os casos anteriores serem obtidos para equações com coeficientes constantes, esta metodologia pode ser aplicada a outras situações:

Exercício 1.4.7 *Utilizando uma função do tipo $y(x) = x^m$ discuta, em função de m, as várias formas que a solução geral da equação de Cauchy-Euler*

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0,$$

pode assumir.

1.5 Exercícios

1. Resolva os problemas de valor inicial:

a) $3x^2 + 8xy^2 + \left(x^3 + 8x^2 y + 12y^2\right) y' = 0, \;\; y(2) = 1$

b) $ye^{xy} + 4y^3 + \left(xe^{xy} + 12xy^2 - 2y\right) y' = 0, \;\; y(0) = 2.$

2. Determine o valor de k de modo a que as equações sejam diferenciais exactas e encontre a expressão geral das soluções:

a) $\left(kx^2+4y\right)y' = -x^3 - 3xy$

b) $\frac{kx+1}{y^3}y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

3. Resolva as equações diferenciais utilizando um factor integrante do tipo indicado:

a) $x - y^2 + 2xyy' = 0, \; [\mu(x)]$

b) $y + \left(y^2 - x\right)y' = 0, \; [\mu(y)]$

c) $3xy + y^2 + \left(3xy + x^2\right)y' = 0, \; [\mu(x+y)]$

d) $x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + yy' = 0, \; \left[\mu(x^2+y^2)\right]$

4. Prove que:

a) $u(x,y) = c$ é solução geral da equação (1.11) se e só se $M\,\frac{\partial u}{\partial y} = N\frac{\partial u}{\partial x}$.

b) a equação (1.11) tem um factor integrante $\frac{1}{M^2+N^2}$ se $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$ e $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$.

5. Encontre a solução geral das equações diferenciais:

a) $x\ seny + \left(x^2+1\right)\cos y\ y' = 0$

b) $xy' - y = x\ e^{\frac{y}{x}}$

c) $y' = \frac{3x-y-5}{3y-x+7}$

6. Determine a solução das equações diferenciais:

a) $y' - (\cot x)\,y = 2x\ \mathrm{sen}x$

b) $y' + y + x + x^2 + x^3 = 0$

c) $2(1+y^3) + 3xy^2y' = 0$

d) $(1-x^2)y' + y^2 - 1 = 0$

7. Numa situação "ideal" de divisão celular, o número de células no instante t, $N\,(t)$, cresce exponencialmente e pode ser traduzido pela relação

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\ N,$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a razão de crescimento. Contudo, nos tumores sólidos, existe uma constante, α, de retardamento do crescimento, que está relacionada com a necrose das células centrais do tumor. Neste caso o número de células é modelado por

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\ e^{-\alpha t}\ N$$

a) Determine a expressão que permite calcular o número de células do tumor em função do tempo.

b) Qual o número de células limite que o tumor poderá atingir?

c) Suponha que, quando foi detectado, o tumor possuía 10^4 células, crescia à razão de 20% por unidade de tempo, sendo a constante de retardamento de $0,02$.

Qual o número de células limite que o tumor irá atingir ?

8. **A**rnesto, o desgraçado, foi encontrado morto na sua casa às 23h.

Bicente, o detective, chegou ao local do crime às 23h 30m e registou a temperatura da vítima: $30°C$.

Chico, o esperto, observou que às 00h 30m a temperatura do corpo era de $25°C$ e que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a $20°C$.

Diga a que horas ocorreu o crime.

E não esqueça a lei do arrefecimento de Newton: *a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura em cada instante e a do meio ambiente.*

9. (**Princípio da Sobreposição**) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de

$$y' + p(x)y = q_i(x), \quad i = 1, 2,$$

respectivamente, prove que $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(x)y = c_1q_1(x) + c_2q_2(x), \tag{1.44}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + 3xyy' = 0, \quad x \in]0, +\infty[.$$

a) Mostre que as funções $y_1(x) = c(\neq 0)$ e $y_2(x) = \frac{1}{x^2}$ são soluções da equação mas $y_1(x) + y_2(x)$ não o é.

b) Comente a afirmação : O Teorema 1.4.4 apenas é válido para equações lineares.

11. Dada a solução $y_1(x)$ encontre a segunda solução das equações diferenciais:

a) $\left(x^2 - 2\right) y'' + (3x - 1)y' + y = 0, \; x \neq 0, 1, \; y_1(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $xy'' - y' - 4x^3y = 0, \; x \neq 0, \; y_1(x) = e^{x^2}$.

12. Sejam $y_1(x) \neq 0$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação (1.35). Prove que $y(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ é uma solução não constante de

$$y_1(x)y'' + \left(2y_1'(x) + \frac{p_1(x)}{p_2(x)}y_1(x)\right)y' = 0.$$

13. Encontre a solução completa das equações não homogéneas:

a) $y'' + 4y = sen(2x)$
b) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$
c) $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}$.

14. Prove que se a parte real de todas as soluções da equação característica (1.43) são negativas então

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$$

para toda a solução $y(x)$ de (1.42).

1.6 Actividades

Actividade 1:

1.1. *"Descoberta de um esqueleto no deserto de Djourab, no Chade,...,que pode ser o mais antigo dos homens. Pensa-se que poderá ter entre 6 e 7 milhões de anos." (*Revista "*Nature", 2002/07/11)*

Sabendo que:
· A data de um esqueleto se calcula através da medida da quantidade de carbono radioactivo $\left(C^{14}\right)$ existente nos ossos.
· Na atmosfera e nos organismos vivos a razão entre C^{14} e o carbono ordinário $\left(C^{12}\right)$ é constante.
· Quando o organismo morre, a absorção de C^{14}, pela respiração e alimentação, termina.

Designe por $y(t)$ a quantidade de C^{14} existente num organismo no tempo t , dado em milhares de anos (MA).

a) Sabendo que a taxa de variação com o tempo, $\frac{dy}{dt}$, é proporcional à quantidade de C^{14}, escreva e resolva a equação diferencial que modela a desagregação radioactiva do C^{14} com o tempo.

b) Sabendo que o tempo de semi-vida do C^{14}, isto é, o tempo que decorre até que a massa de C^{14} atinja metade do valor da sua massa inicial, é de 5.73 MA, calcule a constante de proporcionalidade do modelo.

c) Admita que num certo organismo se encontra a quarta parte do C^{14} inicial. Faça uma estimativa da "idade" do organismo.

d) Que parte de C^{14} encontraram no esqueleto do *Djourab* para que o pudessem datar com 6 milhões de anos ?

1.2. Determine uma expressão geral para um factor integrante $\mu(v)$, sendo v uma função de x e y, de modo a que a equação (1.18) seja exacta, para os casos em que:

a) $v = x - y$

b) $v = xy$

c) $v = \frac{x}{y}$

d) $v = x^2 + y^2$.

Actividade 2:

2.1. Um caso particular da equação de Bernoulli (1.33) é a **equação de Verhulst**

$$y' - Ay = -By^2, \quad (A, B \in \mathbb{R}^+).$$

a) Prove que a solução da equaçâo é dada por

$$y = \frac{1}{\frac{B}{A} + c\, e^{-Ax}}, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{1.45}$$

designada por **lei logística** e utilizada para modelar o comportamento de populações.

b) Faça um esboço gráfico da família de soluções dadas por (1.45).

c) Caracterize o comportamento das populações ao longo do tempo quando :

(i) $0 < A < B$

(ii) $A = B$

(iii) $0 < B < A$

2.2. Considere o **problema com valores na fronteira**

$$\begin{aligned} -y'' &= f(x) && (1.46) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 && (1.47) \end{aligned}$$

a) Aplicando o método da variação dos parâmetros mostre que a solução geral da equação (1.46) pode ser escrita na forma

$$y(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x-s) f(s) ds,$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

b) Se $y(x)$ é solução do problema (1.46), (1.47) então

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \int_0^1 (1-s) f(s) ds.$$

c) Mostre que a solução do problema (1.46), (1.47), $y(x)$, pode ser escrita como

$$y(x) = \int_0^x s(1-x) f(s) ds + \int_x^1 x(1-s) f(s) ds.$$

d) Prove que a solução anterior se pode escrever na forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds$$

sendo

$$G(x,s) := \begin{cases} s(1-x) & , \quad 0 \leq s \leq x \\ x(1-s) & , \quad x \leq s \leq 1 \end{cases},$$

designada como **função de Green** associada ao problema (1.46), (1.47).

Actividade 3:

3.1. A equação diferencial

$$xy'' - (x+n)\, y' + ny = 0$$

é interessante porque possui duas soluções de tipos diferentes: uma solução exponencial e uma polinomial.

a) Verifique que uma solução é $y_1(x) = e^x$.

b) Mostre que a segunda solução tem a forma $y_2(x) = c\, e^x \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

c) Se $c = \frac{1}{n!}$, prove que

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

Repare que $y_2(x)$ contem os primeiros $n+1$ termos da série de Mac-Laurin para e^x, isto é, para $y_1(x)$.

3.2. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação diferencial

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad x \in I.$$

Prove que:

a) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se anulam no mesmo ponto de I, então

$$y_1(x) = ky_2(x).$$

b) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ têm máximos ou mínimos no mesmo ponto do intervalo aberto I, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não são soluções linearmente independentes.

c) Se $W(y_1, y_2)$ é independente de x, então $p_1(x) = 0$, $\forall x \in I$.

d) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem ter um ponto de inflexão comum em I, a menos que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ se anulem simultaneamente nesse ponto.

e) Se $W(y_1, y_2)(x^*) = y_1(x^*) = 0$, então, ou $y_1(x) \equiv 0$ em I, ou

$$y_2(x) = \frac{y_2'(x^*)}{y_1'(x^*)}\, y_1(x).$$

CAP. 2

Existência e Unicidade de Solução

No final do capítulo o aluno deverá:

- Reconhecer condições suficientes e/ou necessárias para a existência de solução de um problema de valor inicial.
- Traduzir um problema de valor inicial por uma equação integral e compreender as vantagens e potencialidades deste processo.
- Aplicar conceitos de Análise Matemática e Análise Funcional, como, por exemplo, teoria de séries numéricas e de funções, convergência uniforme, equicontinuidade,...., às equações diferenciais e explorar resultados clássicos, como, por exemplo, Teorema de Arzèla-Ascoli, teoria de Lipschitz,....
- Utilizar técnicas iterativas a equações integrais, tais como os métodos de Picard e de Cauchy-Euler, para obter soluções aproximadas e estimar o erro cometido.
- Identificar condições suficientes para a existência local e/ou global da solução de um problema de valor inicial.
- Averiguar a possibilidade de prolongar o intervalo de existência de solução e dominar a respectiva técnica.
- Determinar o intervalo maximal para a solução de um problema de valor inicial.

- Dominar várias metodologias para garantir a unicidade de solução de um problema de valor inicial.
- Utilizar inequações diferenciais e explorar as suas potencialidades, tais como: obtenção de soluções extremais, localização *a priori* da solução, conceitos mais gerais de derivação,....
- Analisar a variação da solução de um problema de valor inicial, quando a não linearidade e/ou os dados iniciais são modificados e estabelecer uma estimação para essa variação.
- Reconhecer condições para a dependência contínua dos dados iniciais e/ou em relação a um parâmetro.
- Identificar condições suficientes para garantir a diferenciabilidade da solução em relação aos dados iniciais.

2.1 Desigualdades e convergências

Até aqui, foi sempre assumido a existência de solução para as equações diferenciais. Contudo a teoria de existência e unicidade de soluções para um problema de valor inicial é mais complexa.

Considere-se o **problema de valor inicial**

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.1}$$

onde $f(x, y)$ é uma função contínua num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, que contém (x_0, y_0).

Por solução de (2.1) num intervalo I contendo x_0, entende-se uma função $y(x)$ que verifique:

- $y(x_0) = y_0$;
- $y'(x)$ existe para todo o $x \in I$;
- $(x, y(x)) \in D$, $\forall x \in I$;
- $y'(x) = f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

Ver-se-á mais tarde que a continuidade de $f(x, y)$, só por si, é suficiente para garantir a existência de, pelo menos, uma solução numa vizinhança suficientemente pequena de (x_0, y_0). Contudo se $f(x,y)$ não é contínua então a natureza das soluções de (2.1) é bastante arbitrária. Por exemplo, o problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{x}(y-1), \quad y(0) = 0$$

não tem solução, mas o problema

$$y' = \frac{2}{x}(y-1), \quad y(0) = 1$$

tem infinitas soluções $y(x) = 1 + cx^2$, $c \in \mathbb{R}$.

A utilização de **equações integrais** para estabelecer teoremas de existência de solução é frequente no estudo das equações diferenciais. A sua eficiência provem do facto da integração ter propriedades mais "regulares", em contraste com características mais "desconcertantes" da derivação. Por exemplo, se duas funções estão suficientemente próximas, o mesmo se verifica com os seus integrais, enquanto as respectivas derivadas poderão estar muito afastadas ou até nem existir.

Nesta perspectiva, o próximo teorema será muito útil:

Teorema 2.1.1 *Se $f(x,y)$ é uma função contínua no domínio D então toda a solução de (2.1) é também solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{2.2}$$

e reciprocamente.

Dem. Para qualquer solução $y(x)$ da equação diferencial $y' = f(x,y)$ obtem-se, por integração,

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Reciprocamente, se $y(x)$ é solução da equação (2.2), então $y(x_0) = y_0$ e, como $f(x,y)$ é contínua, diferenciando (2.2), obtem-se $y'(x) = f(x, y(x))$. ■

Embora a continuidade de $f(x,y)$ seja suficiente para garantir a existência, contudo não o é para garantir a unicidade.

Por exemplo a função $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ é contínua em $\mathbb{R}^2$, mas o problema $y' = y^{\frac{2}{3}}$, $y(0) = 0$ tem pelo menos duas soluções: $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{x^3}{27}$.

Para garantir a unicidade é necessário que a variação de $f(x,y)$ em relação a y permaneça limitada:

Definição 2.1.2 *Diz-se que a função $f(x,y)$ verifica a* ***condição de Lipschitz*** *no domínio D se*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in D. \tag{2.3}$$

A constante não negativa L designa-se por ***constante de Lipschitz.***

A função $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ não satisfaz a condição de Lipschitz em qualquer domínio que contenha $y = 0$. Mas $f(x,y) = x - y$ já a verifica em $D = \mathbb{R}^2$ com $L = 1$.

Se f satisfaz (2.3) em D então f é contínua em relação a y em D. Note-se contudo, que f não é necessariamente diferenciável em relação a y. Por exemplo, $f(x,y) = |y|$ não é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ mas satisfaz (2.3) com $L = 1$.

Caso $f(x,y)$ seja diferenciável em relação a y, então é possível não só determinar a constante de Lipschitz L como ainda obter uma condição necessária e suficiente para que f satisfaça a condição de Lipschitz:

Teorema 2.1.3 *Sejam D um domínio convexo e $f(x,y)$ diferenciável em relação a y em D. Então a condição (2.3) é satisfeita se e só se*

$$\sup_D \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq L. \tag{2.4}$$

Dem. Como $f(x,y)$ é diferenciável em relação a y e o domínio D é convexo, para quaisquer (x,y_1), $(x,y_2) \in D$, o Teorema do valor médio garante que

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y^*)\,(y_1 - y_2)\,,$$

com $y^* \in]y_1, y_2[$. Então, por (2.4), a condição (2.3) verifica-se imediatamente.

Reciprocamente, a desigualdade (2.3) implica que

$$\left| \frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1} \right| = \lim_{y_2 \to y_1} \left| \frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq L.$$

■

Para garantir a existência, a unicidade e outras propriedades das soluções de (2.1) é necessária uma **desigualdade integral do tipo Gronwall**:

Teorema 2.1.4 *Sejam $u(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas não negativas no intervalo $|x - x_0| \leq a$ $(a > 0)$ tais que*

$$u(x) \leq p(x) + \left| \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)dt \right|, \quad \text{para } |x - x_0| \leq a. \tag{2.5}$$

Então é válida a desigualdade

$$u(x) \leq p(x) + \left| \int_{x_0}^{x} p(t)q(t)e^{\left|\int_t^x q(s)ds\right|} dt \right|, \quad para \ |x - x_0| \leq a. \tag{2.6}$$

Dem. A desigualdade (2.6) prova-se apenas para $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, já que para $x_0 - a \leq x \leq x_0$ a demonstração é análoga.

Definindo-se

$$r(x) := \int_{x_0}^{x} q(t)u(t)dt,$$

tem-se que $r(x_0) = 0$ e $r'(x) = q(x)u(x)$.

Por (2.5), $u(x) \leq p(x) + r(x)$ e $r'(x) \leq p(x)q(x) + q(x)r(x)$.

Multiplicando por $e^{-\int_{x_0}^{x} q(s)ds}$ obtem-se

$$\left(e^{-\int_{x_0}^{x} q(s)ds} r(x)\right)' \leq p(x)q(x)e^{-\int_{x_0}^{x} q(s)ds}.$$

Integrando esta desigualdade, tem-se

$$r(x) \leq \int_{x_0}^{x} p(t)q(t)e^{\int_t^x q(s)ds} dt$$

e (2.6) resulta de $u(x) \leq p(x) + r(x)$. ∎

Corolário 2.1.5 *Se, no Teorema 2.1.4, $p(x) \equiv 0$ então $u(x) \equiv 0$.*

Corolário 2.1.6 *Se $p(x)$ é uma função não decrescente em $[x_0, x_0 + a]$ e não crescente em $[x_0 - a, x_0]$ então*

$$u(x) \leq p(x)e^{\left|\int_{x_0}^{x} q(s)ds\right|} \quad para \ |x - x_0| \leq a. \tag{2.7}$$

Dem. Tal como anteriormente, demonstra-se (2.7) apenas para $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, pois para $x_0 - a \leq x \leq x_0$ os argumentos são semelhantes.

Como $p(x)$ é uma função não decrescente, por (2.6), obtem-se

$$\begin{aligned} u(x) &\leq p(x)\left[1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_t^x q(s)ds} dt\right] \\ &= p(x)\left[1 - \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left(e^{\int_t^x q(s)ds}\right) dt\right] = p(x)e^{\int_{x_0}^{x} q(t)dt}. \end{aligned}$$

∎

Corolário 2.1.7 *Se no Teorema 2.1.4 as funções p e q forem do tipo*

$$p(x) := c_0 + c_1 |x - x_0| \quad e \quad q(x) := c_2, \tag{2.8}$$

com c_0, c_1 e c_2 constantes não negativas, então

$$u(x) \leq \left(c_0 + \frac{c_1}{c_2}\right) e^{c_2|x-x_0|} - \frac{c_1}{c_2}. \tag{2.9}$$

Dem. Para as funções dadas por (2.8) no intervalo $[x_0, x_0 + a]$, a desigualdade (2.6) é igual a

$$\begin{aligned}
u(x) &\leq c_0 + c_1 |x - x_0| + \int_{x_0}^{x} (c_0 + c_1 |t - x_0|)\, c_2 e^{c_2(x-t)} dt \\
&= c_0 + c_1 |x - x_0| + \left(- \left[(c_0 + c_1 |t - x_0|)\, e^{c_2(x-t)} \right]_{x_0}^{x} - \left[\frac{c_1}{c_2} e^{c_2(x-t)} \right]_{x_0}^{x} \right) \\
&= c_0 + c_1 |x - x_0| - c_0 - c_1 (x - x_0) + c_0 e^{c_2(x-x_0)} - \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1}{c_2} e^{c_2(x-x_0)} \\
&= \left(c_0 + \frac{c_1}{c_2}\right) e^{c_2|x-x_0|} - \frac{c_1}{c_2}.
\end{aligned}$$

■

Relembre-se agora alguns conceitos e resultados da Análise Real que serão utilizados mais à frente:

Definição 2.1.8 *Uma sucessão de funções $(y_n(x))$ diz-se que* ***converge uniformemente*** *para uma função $y(x)$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um natural N tal que quando $n \geq N$, $|y_n(x) - y(x)| \leq \varepsilon$ para todo o $x \in [\alpha, \beta]$.*

Teorema 2.1.9 *Seja $(y_n(x))$ uma sucessão de funções em $[\alpha, \beta]$ que converge uniformemente para $y(x)$. Então $y(x)$ é uma função contínua em $[\alpha, \beta]$.*

Teorema 2.1.10 *Sejam $(y_n(x))$ uma sucessão de funções que converge uniformemente para $y(x)$, em $[\alpha, \beta]$, e $f(x, y)$ uma função contínua no domínio D, tal que para todo n e x em $[\alpha, \beta]$ se tem $(x, y_n(x)) \in D$. Então*

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y_n(x))\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lim f(x, y_n(x))\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x))\, dx.$$

Teorema 2.1.11 ***(M-Teste de Weierstrass)*** *Seja $(y_n(x))$ uma sucessão de funções com $|y_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$ com $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty$. Então $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x)$ converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$ para uma única função $y(x)$.*

Definição 2.1.12 *Um conjunto S de funções diz-se* ***equicontínuo*** *num intervalo $[\alpha, \beta]$, se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que se $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ com $|x_1 - x_2| \leq \delta$ então $|y(x_1) - y(x_2)| \leq \varepsilon$ para todo $y(x) \in S$.*

Definição 2.1.13 *Um conjunto S de funções diz-se* ***uniformemente limitado*** *num intervalo $[\alpha, \beta]$, se existe um número M tal que $|y(x)| \leq M$ para todo $y(x) \in S$.*

Teorema 2.1.14 *(**de Arzèla-Ascoli**) Um conjunto infinito S de funções, uniformemente limitadas e equicontínuas em $[\alpha, \beta]$, contem uma sucessão que converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$.*

Teorema 2.1.15 *Seja $f(x, y)$ uma função definida no conjunto $T = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, contínua em x, diferenciável em y e*

$$0 < m \leq f'_y(x, y) \leq M < \infty, \quad \forall (x, y) \in T.$$

Então a equação $f(x, y) = 0$ tem ***uma única solução*** *$y(x)$ em $[\alpha, \beta]$.*

2.2 Método das aproximações sucessivas de Picard

Um processo para resolver a equação integral (2.2) é o método de aproximações sucesivas introduzido por Charles Émile Picard (1856 - 1941).

Considera-se como ponto de partida uma função contínua $y_0(x)$, frequentemente $y_0(x) \equiv y_0$, que constitui a "**aproximação inicial**" à solução de (2.2).

No passo seguinte, define-se

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt$$

e a terceira aproximação como

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt.$$

Iterando este processo otem-se a $(n + 2)$-ésima aproximação como

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.10}$$

A sucessão $(y_n(x))$ converge uniformemente para uma função contínua $y(x)$ num intervalo I que contenha x_0 e $(x, y_n(x)) \in D$, para todo o $x \in I$. Pelo Teorema 2.1.10 pode passar-se ao limite nos dois membros de (2.10), obtendo-se

$$y(x) = \lim y_{n+1}(x) = y_0 + \lim \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

pelo que $y(x)$ é a solução pretendida.

Exemplo 2.2.1 *O problema de valor inicial*

$$y' = -y, \quad y(0) = 1,$$

é equivalente à equação integral

$$y(x) = 1 - \int_0^x y(t)dt.$$

Considerando $y_0(x) \equiv 1$ *então*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \int_0^x 1dt = 1 - x \\ y_2(x) &= 1 - \int_0^x (1-t)\, dt = 1 - x + \frac{x^2}{2} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Recordando os desenvolvimentos em série de Taylor tem-se $\lim y_n(x) = e^{-x}$. *De facto* $y(x) = e^{-x}$ *é solução do problema inicial para* $I = \mathbb{R}$.

Além de ser construtivo, este método permite que as diferenças entre as várias iterações e a solução sejam facilmente calculáveis, o que é útil para aferir da rapidez de aproximação da solução.

O próximo teorema fornece condições suficientes para a convergência uniforme da sucessão $(y_n(x))$, para a única solução $y(x)$ da equação integral (2.2) ou, equivalentemente, do problema de valor inicial (2.1), mas apenas numa vizinhança do ponto (x_0, y_0):

Teorema 2.2.2 ***(de existência local)*** *Se se verificarem as seguintes condições para a e b, números reais positivos fixos:*

(i) *$f(x,y)$ é contínua no rectângulo fechado*

$$\overline{S} = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \tag{2.11}$$

pelo que existe $M > 0$ tal que $|f(x,y)| \leq M$, $\forall (x,y) \in \overline{S}$;

(ii) *$f(x,y)$ satisfaz a condição de Lipschitz (2.3), com constante L, em $\overline{S}$;*

(iii) *$y_0(x)$ é contínua em $|x - x_0| \leq a$ e $|y_0(x) - y_0| \leq b$;*

então a sucessão $(y_n(x))$ gerada pela iteração de Picard, (2.10), converge para a única solução $y(x)$ do problema de valor inicial (2.1), definida no intervalo $I_h = \{x : |x - x_0| \leq h\}$, com $h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.
Além disso, para $x \in I_h$, é válida a seguinte estimação para o erro

$$|y(x) - y_n(x)| \leq N\ e^{Lh} \min\left\{1, \frac{(Lh)^n}{n!}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.12}$$

com $\max\limits_{x \in I_h} |y_1(x) - y_0(x)| \leq N$.

Dem. Em primeiro lugar prova-se que as iterações $y_n(x)$, definidas por (2.10), podem ser consideradas como funções contínuas definidas em I_h e com $(x, y_n(x)) \in \overline{S}$, para $x \in I_h$. Como $y_0(x)$ é contínua para $x \in]x_0 - a, x_0 + a[$, a função $F_0(x) := f(x, y_0(x))$ é contínua em I_h e, portanto, $y_1(x)$ é contínua em I_h.

Por outro lado,

$$|y_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|\, dt \right| \leq M\, |x - x_0| \leq Mh \leq b.$$

Admitindo, por indução, que a afirmação é verdadeira para $y_{n-1}(x)$, $n \geq 2$, bastará provar que também é verdadeira para $y_n(x)$. Assim, como $y_{n-1}(x)$ é contínua em I_h, a função $F_{n-1}(x) := f(x, y_{n-1}(x))$ é também contínua em I_h e

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\, dt \right| \leq M\, |x - x_0| \leq b.$$

No passo seguinte justifica-se que a sucesão $(y_n(x))$ converge uniformemente em I_h.

Como $y_1(x)$ e $y_0(x)$ são funções contínuas definidas em I_h, existe uma constante $N > 0$ tal que $|y_1(x) - y_0(x)| \leq N$.

Verifique-se, por indução, que a seguinte desigualdade é verdadeira para qualquer $x \in I_h$:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq N \frac{(L|x - x_0|)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.13}$$

Para $n = 1$, a desigualdade anterior é óbvia. Supondo que é verificada para $n = k \geq 1$, então, por (2.10) e pela hipótese (ii), tem-se

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))| \, dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \, dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} N \frac{(L|t - x_0|)^{k-1}}{(k-1)!} dt \right| = N \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!}, \end{aligned}$$

pelo que (2.13) é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(L|x - x_0|)^{n-1}}{(n-1)!} \leq N \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(Lh)^n}{n!} \leq N \, e^{Lh} < +\infty,$$

pelo Teorema 2.1.11, a série

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

converge absoluta e uniformemente em I_h. Portanto, a sucessão das somas parciais $y_1(x)$, $y_2(x), ...$ converge para uma função contínua neste intervalo, isto é, $y(x) = \lim y_n(x)$, a qual é solução de (2.2), como foi visto anteriormente.

Para provar que $y(x)$ é a única solução, considera-se que $z(x)$ é também uma solução de (2.2), que está definida no intervalo I_h e com $(x, y_n(x)) \in \overline{S}$, para $x \in I_h$. Então verificam-se as condições da hipótese (ii) e tem-se

$$|y(x) - z(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \, dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| \, dt \right|.$$

Contudo, pelo Corolário 2.1.5, o integral anterior implica que $|y(x) - z(x)| = 0$ para $x \in I_h$, pelo que $y(x) = z(x)$, $\forall x \in I_h$.

Finalmente, para majorar o erro (2.12), a desigualdade (2.13) garante, para $n > m$,

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_m(x)| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(L\,|x-x_0|)^k}{k!} \\ &\leq N \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(Lh)^k}{k!} = N\,(Lh)^m \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(Lh)^k}{(m+k)!}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como $\frac{1}{(m+k)!} \leq \frac{1}{m!k!}$ obtem-se

$$|y_n(x) - y_m(x)| \leq N\frac{(Lh)^m}{m!} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{(Lh)^k}{k!} \leq N\frac{(Lh)^m}{m!} e^{Lh}$$

e, passando ao limite com $n \to +\infty$,

$$|y(x) - y_m(x)| \leq N\frac{(Lh)^m}{m!} e^{Lh}. \quad (2.15)$$

Da desigualdade (2.14) conclui-se ainda que

$$|y_n(x) - y_m(x)| \leq N \sum_{k=m}^{n-1} \frac{(Lh)^k}{k!} \leq Ne^{Lh}$$

e, quando $n \to +\infty$,

$$|y(x) - y_m(x)| \leq Ne^{Lh}. \quad (2.16)$$

Combinando (2.15) e (2.16), obtem-se a majoração para o erro (2.12). ■

Exemplo 2.2.3 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1,$$

que admite a solução (única) $y(x) = \frac{1}{1-x}$ *(obtida, por exemplo, por separação de variáveis) definida no intervalo* $]-\infty, 1[$.
Como

(i) *A função* $f(x,y) = y^2$ *é contínua em* $\mathbb{R}^2$ *e, em particular, no rectângulo* $\overline{S_*} = \{(x,y) : |x| \leq a, |y-1| \leq b\}$ *e* $|f(x,y)| = y^2 < (b+1)^2 := M$, $\forall (x,y) \in \overline{S_*}$;

(ii) Em $\overline{S_*}$, $f(x,y) = y^2$ *verifica (2.3) com* $L = 2b+2$;

(iii) $y_0(x) = 1$ *é contínua em* $|x| \leq a$ *e* $0 < b$;

então o Teorema 2.2.2 garante a existência de uma solução (única) no intervalo $|x| \le h$, *com* $h := \min\left\{a, \frac{b}{(1+b)^2}\right\}$. *Como* $\frac{b}{(1+b)^2} \le \frac{1}{4}$, *sendo o máximo atingido para* $b = 1$, *o intervalo maximal onde o Teorema 2.2.2 assegura a referida existência será* $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, *o que é algo rudimentar face ao intervalo obtido anteriormente.*
Por outro lado, aplicando (2.12) à forma iterativa

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (y_n(t))^2\, dt, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

permite obter estimações para o erro. Assim para $n = 2$, $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $h = \frac{1}{4}$, $L = 4$ *e*

$$\max_{x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]} |1 + x - 1| = \frac{1}{4} := N,$$

tem-se

$$\begin{aligned} |y(x) - y_2(x)| &= \left| \frac{1}{1-x} - \left(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \right| \\ &\le \frac{1}{4}\, e \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{e}{8} \end{aligned}$$

se $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Se a solução do problema de valor inicial (2.1) estiver definida em todo o intervalo $|x - x_0| \le a$, diz-se que a solução existe **globalmente**. O resultado para este tipo de solução será o seguinte:

Teorema 2.2.4 ***(de existência global)*** *Se se verificarem as seguintes condições para* $a > 0$ *fixo:*
(i) $f(x, y)$ *é contínua no rectângulo fechado*

$$T = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y| < +\infty\};$$

(ii) $f(x, y)$ *satisfaz a condição de Lipschitz (2.3) em* T;
(iii) $y_0(x)$ *é contínua em* $|x - x_0| \le a$;

então a sucessão $(y_n(x))$, *gerada pela iteração de Picard (2.10), existe no intervalo* $|x - x_0| \le a$ *e converge para a única solução* $y(x)$ *do problema de valor inicial (2.1).*

Dem. Para qualquer função contínua $y_0(x)$ definida no intervalo $|x - x_0| \leq a$, é possível provar, por indução, a existência de funções $y_n(x)$, definidas em $|x - x_0| \leq a$ e tais que $|y_n(x)| < +\infty$. A justificação que a sucessão $(y_n(x))$ converge para $y(x)$ no intervalo $|x - x_0| \leq a$, faz-se com argumentos análogos aos da demonstração do Teorema 2.2.2, substituindo h por a, e verificando que $f(x, y)$ satisfaz a condição de Lipschitz (2.3) em T. ■

Nalguns casos pode-se considerar, sem perda de generalidade, o ponto $x_0 = 0$.

Corolário 2.2.5 *Se $f(x, y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e satisfaz a condição de Lipschitz (2.3) em cada uma das regiões $T_a := \{(x, y) : |x| \leq a, |y| < +\infty\}$ com constante L_a, então o problema de valor inicial (2.1) tem uma única solução $y(x)$, que existe para $x \in \mathbb{R}$.*

Dem. Para qualquer x existe um $a > 0$ tal que $|x - x_0| \leq a$. Como a faixa T está contida em $T_{a+|x_0|}$, a função $f(x, y)$ verifica as condições do Teorema 2.2.4 no conjunto T. Portanto o resultado verifica-se para qualquer x. ■

2.3 Existência e prolongamento de soluções

A continuidade da função f é suficiente para garantir a existência de solução do problema (2.1):

Teorema 2.3.1 ***(de existência de Peano)*** *Se $f(x, y)$ é contínua e limitada na região $T = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| < +\infty\}$ então o problema de valor inicial (2.1) tem pelo menos uma solução definida no intervalo $|x - x_0| \leq a$.*

Dem. A demonstração da existência de solução faz-se apenas para o intervalo $[x_0, x_0 + a]$, já que para o intervalo $[x_0 - a, x_0]$ o raciocínio é análogo.

Defina-se, por recorrência, a sucessão de funções

$$y_n(x) = \begin{cases} y_0 & , \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{a}{n} \\ & \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-\frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt & , \quad x_0 + k\frac{a}{n} \leq x \leq x_0 + (k+1)\frac{a}{n}, \\ & \qquad k = 1, 2, ..., n-1. \end{cases} \tag{2.17}$$

O primeiro ramo define $y_n(x)$ no intervalo $\left[x_0, x_0 + \frac{a}{n}\right]$ e o segundo define a sucessão inicialmente em $\left[x_0 + \frac{a}{n}, x_0 + 2\frac{a}{n}\right]$, depois em $\left[x_0 + 2\frac{a}{n}, x_0 + 3\frac{a}{n}\right]$

e assim sucessivamente. Como $f(x,y)$ é limitada em T, pode considerar-se $|f(x,y)| \leq M$, $\forall (x,y) \in T$.

Para quaisquer dois pontos x_1, $x_2 \in [x_0, x_0+a]$ tem-se

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = 0, \quad \text{se} \;\; x_1, x_2 \in \left[x_0, x_0 + \frac{a}{n}\right].$$

Se $x_1 \in \left[x_0, x_0 + \frac{a}{n}\right]$, $x_2 \in \left[x_0 + k\frac{a}{n}, x_0 + (k+1)\frac{a}{n}\right]$ então

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_2 - \frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \leq M \left| x_2 - \frac{a}{n} - x_0 \right| \leq M\,|x_2 - x_1|\,.$$

Nos outros casos tem-se

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| = \left| \int_{x_1 - \frac{a}{n}}^{x_2 - \frac{a}{n}} f(t, y_n(t))dt \right| \leq M\,|x_2 - x_1|\,,$$

pelo que, em conclusão,

$$|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq M\,|x_2 - x_1|\,, \quad \forall x_1, x_2 \in [x_0, x_0 + a]\,.$$

Portanto, desde que $|x_2 - x_1| \leq \frac{\epsilon}{M} := \delta$ tem-se $|y_n(x_2) - y_n(x_1)| \leq \epsilon$, ou seja, a sucessão $(y_n(x))$ é equicontínua.

Por outro lado, para $x \in [x_0, x_0 + a]$, tem-se

$$|y_n(x)| \leq |y_0| + M \left| x - \frac{a}{n} - x_0 \right| \leq |y_0| + Ma,$$

isto é, a sucessão $(y_n(x))$ é uniformemente limitada em $[x_0, x_0 + a]$. Portanto pelo Teorema de Arzèla-Ascoli, a sucessão $(y_n(x))$ contem uma subsucesão $\left(y_{n_p}(x)\right)$ que converge uniformemente em $[x_0, x_0 + a]$ para uma função contínua $y(x)$.

Para provar que esta função $y(x)$ é solução do problema de valor inicial (2.1), considera-se $p \to +\infty$ na igualdade

$$y_{n_p}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n_p}(t))dt - \int_{x - \frac{a}{n_p}}^{x} f(t, y_{n_p}(t))dt.$$

Como $f(x,y)$ é contínua e a convergência é uniforme, no primeiro integral pode considerar-se o limite na função integranda para obter $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. O segundo integral não excede $\frac{M\,a}{n_p}$ e, portanto, tende para zero.

Assim, $y(x)$ é solução da equação integral (2.2). ■

Corolário 2.3.2 *Se* $f(x,y)$ *é contínua em* $\overline{S}$, *dado por (2.11), então o problema (2.1) tem pelo menos uma solução definida no intervalo* $I_h = \{x : |x - x_0| \leq h\}$, *com* $h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Dem. A demonstração é análoga à do Teorema 2.3.1, com modificações óbvias. ■

Exemplo 2.3.3 *A função* $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ *é contínua em* $\mathbb{R}^2$. *Então pelo Corolário 2.3.2 o problema*

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0,$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $I_h = \{x : |x| \leq h\}$, *com* $h := \min\left\{a, b^{\frac{2}{3}}\right\}$. *Contudo é possível escolher b suficientemente grande tal que* $h = a$. *Assim existe pelo menos uma solução para* $x \in \mathbb{R}$.

Poderá ser útil estimar o "**grau de aproximação**" de uma solução, para uma certa função $f(x,y)$ contínua num domínio D :

Definição 2.3.4 *Uma função* $y(x)$, *definida em* I, *diz-se uma* ***solução aproximada de raio*** ϵ *da equação* $y' = f(x,y)$ *se:*

(i) $y(x)$ *é contínua em* I;

(ii) $(x, y(x)) \in D$, $\forall x \in I$;

(iii) $y(x)$ *tem derivada seccionalmente contínua em* I, *podendo, eventualmente, não estar definida num número finito de pontos,* $x_1, ..., x_n$;

(iv) $|y'(x) - f(x, y(x))| \leq \epsilon$, $\forall x \in I$, $x \neq x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

A existência de soluções aproximadas é assegurada pelo teorema:

Teorema 2.3.5 *Se* $f(x,y)$ *é contínua no rectângulo fechado* $\overline{S}$, *então para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe* $y(x)$ *solução aproximada de raio* ϵ *da equação* $y' = f(x,y)$, *no intervalo* I_h *tal que* $y(x_0) = y_0$.

Dem. Como $f(x,y)$ é contínua no rectângulo fechado $\overline{S}$ então é uniformemente contínua nesse rectângulo. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - f(x_1,y_1)| \leq \epsilon, \tag{2.18}$$

para quaisquer (x,y), $(x_1,y_1) \in \overline{S}$ tais que $|x - x_1| \leq \delta$ e $|y - y_1| \leq \delta$.

De seguida constrói-se uma solução aproximada de raio ϵ no intervalo $[x_0, x_0 + h]$ e o processo será análogo para o intervalo $[x_0 - h, x_0]$. Para tal divide-se o intervalo $[x_0, x_0+h]$ em n partes $x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + h$ tais que

$$x_i - x_{i-1} \leq \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.19}$$

Defina-se a função $y(x)$ no intervalo $[x_0, x_0+h]$ de uma forma recorrente

$$y(x) = y(x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})\, f\left(x_{i-1}, y\left(x_{i-1}\right)\right), x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, ..., n. \tag{2.20}$$

Esta função é contínua e possui a primeira derivada seccionalmente contínua, $y'(x) = f\left(x_{i-1}, y\left(x_{i-1}\right)\right), x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ i = 1, 2, ..., n$, não estando definida nos pontos x_i, $i = 1, 2, ..., n-1$. Como em cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right],\ i = 1, 2, ..., n$, a função $y(x)$ é um segmento de recta, para provar que $(x, y(x)) \in \overline{S}$ bastará mostrar que $|y(x_i) - y_0| \leq b$ para $i = 1, 2, ..., n$. Para tal considere-se, em (2.20), $i = 1$ e $x = x_1$ para obter

$$|y(x_1) - y_0| = (x_1 - x_0)\left|f\left(x_0, y\left(x_0\right)\right)\right| \leq Mh \leq b.$$

Suponha-se agora que a afirmação é verdadeira para $i = 1, 2, ..., k-1 < n-1$. Então, por (2.20),

$$\begin{aligned} y(x_1) - y_0 &= (x_1 - x_0)\, f\left(x_0, y\left(x_0\right)\right) \\ y(x_2) - y(x_1) &= (x_2 - x_1)\, f\left(x_1, y\left(x_1\right)\right) \\ &\ \vdots \\ y(x_k) - y(x_{k-1}) &= (x_k - x_{k-1})\, f\left(x_{k-1}, y\left(x_{k-1}\right)\right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$y(x_k) - y_0 = \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1})\, f\left(x_{j-1}, y\left(x_{j-1}\right)\right),$$

pelo que se obtem

$$|y(x_k) - y_0| \leq \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1})\, M = M\left(x_k - x_0\right) \leq Mh \leq b.$$

Finalmente, se $x \in]x_{i-1}, x_i[$ então, por (2.20) e (2.19), tem-se

$$|y(x) - y(x_{i-1})| \leq M\left|x - x_{i-1}\right| \leq M\frac{\delta}{M} = \delta$$

e, por (2.18),

$$\left|y'(x) - f(x, y(x))\right| = |f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) - f(x, y(x))| \leq \epsilon,$$

para $x \in I_h$, $x \neq x_i$, $i = 1, 2, ..., n-1$, o que prova que $y(x)$ é uma solução aproximada de raio ϵ da equação $y' = f(x, y)$. ■

Este método de construir soluções aproximadas é designado por **método de Cauchy-Euler**.

O Corolário 2.3.2 pode agora ser obtido como consequência do Teorema anterior:

Teorema 2.3.6 ***(de existência de Cauchy-Peano)*** *Nas condições do Teorema 2.3.5 o problema de valor inicial (2.1) tem pelo menos uma solução em I_h.*

Dem. Mais uma vez far-se-á apenas a demonstração para o intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

Seja (ϵ_n) uma sucessão monótona decrescente de números positivos tal que $\epsilon_n \to 0$. Para cada ϵ_n aplica-se o Teorema 2.3.5 para construir uma solução aproximada de raio ϵ, $y_n(x)$. Seguindo o processo utilizado no Teorema 2.3.1, para dois pontos arbitrários x, $x^* \in [x_0, x_0 + h]$ prova-se que

$$|y_n(x) - y_n(x^*)| \leq M\,|x - x^*|$$

e, a partir daqui, que a sucessão $(y_n(x))$ é equicontínua.

Tal como no Teorema 2.3.5, para cada $x \in [x_0, x_0 + h]$, tem-se $|y_n(x)| \leq |y_0| + b$, pelo que a sucessão $(y_n(x))$ é também uniformemente limitada. Portanto, pelo Teorema de Arzèla-Ascoli, a sucessão $(y_n(x))$ contem uma subsucesão $\left(y_{n_p}(x)\right)$ que converge uniformemente em $[x_0, x_0 + h]$ para uma função contínua $y(x)$.

Para justificar que esta função $y(x)$ é solução do problema (2.1) define-se a sucessão

$$e_n(x) = \begin{cases} y_n'(x) - f(x, y_n(x)) & , \quad \text{nos pontos em que existe } y_n'(x) \\ \\ 0 & , \quad \text{nos outros pontos.} \end{cases}$$

Assim temos que

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(t, y_n(t)) + e_n(t)]\, dt \tag{2.21}$$

e $|e_n(x)| \leq \epsilon_n$.

Como $f(x, y(x))$ é contínua no rectângulo fechado $\overline{S}$ e $y_{n_p}(x)$ converge para $y(x)$ uniformemente em $[x_0, x_0+h]$, então $f(x, y_{n_p}(x))$ converge uniformemente para $y(x)$ em $[x_0, x_0+h]$. Uma vez que $\epsilon_{n_p} \to 0$ conclui-se que $\left|\epsilon_{n_p}(x)\right|$ converge para zero uniformemente em $[x_0, x_0+h]$. Substituindo, em (2.21), n por n_p e fazendo $p \to +\infty$, verifica-se que $y(x)$ é solução da equação integral (2.2). ■

O Exemplo 2.2.3 mostrou um caso em que o intervalo de definição da solução continha o conjunto em que o Teorema 2.2.2 garantia a existência de solução. Assim coloca-se a questão: em que condições se pode prolongar as soluções? Até onde pode ir esse prolongamento?

Lema 2.3.7 *Considere-se uma função $f(x, y)$ contínua num domínio D tal que*

$$\sup_D |f(x, y)| \leq M$$

e seja $y(x)$ uma solução do problema (2.1) no intervalo $]\alpha, \beta[$. Então os seguintes limites existem e

$$\lim_{x\to\alpha^+} y(x) = y(\alpha^+), \quad \lim_{x\to\beta^-} y(x) = y(\beta^-).$$

Dem. Para $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, pela equação integral (2.2) tem-se

$$|y(x_2) - y(x_1)| = \int_{x_1}^{x_2} |f(t, y(t))|\, dt \leq M\, |x_2 - x_1|\,.$$

Portanto, $y(x_2) - y(x_1) \to 0$, quando $x_1, x_2 \to \alpha^+$, pelo que $\lim\limits_{x\to\alpha^+} y(x)$ existe.

O mesmo procedimento é válido para provar que existe $\lim\limits_{x\to\beta^-} y(x)$. ■

Teorema 2.3.8 *Se se verificarem as hipóteses do Lema 2.3.7 e $(\beta, y(\beta^-)) \in D$ (ou $(\alpha, y(\alpha^+)) \in D$) então a solução $y(x)$ do problema (2.1) pode ser prolongada ao intervalo $]\alpha, \beta+\gamma]$ (ou $[\alpha-\gamma, \beta[$), para algum $\gamma > 0$.*

Dem. Defina-se a função $y_1(x) = y(x)$ se $x \in]\alpha, \beta[$ e $y_1(\beta) = y(\beta^-)$. Então, para $x \in]\alpha, \beta[$, tem-se que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(\beta^-) + \int_\beta^x f(t, y_1(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^\beta f(t, y_1(t))dt + \int_\beta^x f(t, y_1(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t))dt, \end{aligned}$$

a derivada lateral esquerda $y_1'(\beta^-)$ existe e $y_1'(\beta^-) = f(\beta, y_1(\beta))$. Portanto, $y_1(x)$ é o prolongamento de $y(x)$ ao intervalo $]\alpha, \beta]$.

Considere-se agora $y_2(x)$ como a solução do problema $y' = f(x,y)$, $y(\beta) = y_1(\beta)$, definida no intervalo $[\beta, \beta+\gamma]$. Então a função

$$y_3(x) = \begin{cases} y_1(x) & , \quad x \in]\alpha, \beta] \\ y_2(x) & , \quad x \in [\beta, \beta+\gamma] \end{cases}$$

é o prolongamento de $y(x)$ ao intervalo $]\alpha, \beta+\gamma]$. Assim, bastará provar que

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_3(t))dt,$$

para $x \in]\alpha, \beta+\gamma]$. De facto, para $x \in]\alpha, \beta]$ a igualdade é óbvia pela definição de $y_3(x)$. Para $x \in [\beta, \beta+\gamma]$ tem-se

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y(\beta^-) + \int_{\beta}^{x} f(t, y_3(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{\beta} f(t, y_3(t))dt + \int_{\beta}^{x} f(t, y_3(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_3(t))dt. \end{aligned}$$

■

2.4 Teoremas de Unicidade

Na secção anterior verificou-se que a continuidade de $f(x,y)$ num rectângulo fechado era suficiente para garantir a existência de pelo menos uma solução do problema de valor inicial. Para obter a **unicidade**, isto é, a existência de, no máximo, uma solução, são necessárias hipóteses adicionais sobre $f(x,y)$. No Teorema 2.2.2 já foi utilizada uma possibilidade: a condição de Lipschitz. Vejam-se, agora, vários tipos de hipóteses para obter a unicidade de solução:

Teorema 2.4.1 ***(da unicidade de Lipschitz)*** *Seja $f(x,y)$ uma função contínua que verifica a condição de Lipschitz (2.3) em $\overline{S}$, definido em (2.11). Então o problema (2.1) tem, no máximo, uma solução em $|x - x_0| \leq a$.*

Dem. No Teorema 2.2.2 é provada a unicidade de solução do problema (2.1) no intervalo I_h. Bastará agora substituir I_h pelo intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.
■

Teorema 2.4.2 ***(da unicidade de Peano)*** *Seja $f(x,y)$ uma função contínua em*

$$\overline{S}_+ = \{(x,y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\} \tag{2.22}$$

e não crescente em y, para x fixo em $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. Então (2.1) tem, no máximo, uma solução em $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Dem. Suponha-se que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções do problema (2.1), em $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, que diferem em pelo menos um ponto de $[x_0, x_0 + a]$.

Admita-se que $y_2(x) > y_1(x)$ em $x_1 < x < x_1 + \epsilon \leq x_0 + a$, e que $y_1(x) = y_2(x)$ em $x_0 \leq x \leq x_1$. Por outras palavras, designando por A o conjunto de valores de x para os quais $y_2(x) > y_1(x)$, x_1 é o ínfimo de A, que garantidamente existe, pois, no mínimo, A será minorado por x_0.

Então para qualquer $x \in]x_1, x_1 + \epsilon[$ tem-se $f(x, y_1(x)) \geq f(x, y_2(x))$, isto é, $y_1'(x) \geq y_2'(x)$. Portanto, a função $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$ é não crescente e como $z(x_1) = 0$ então ter-se-ia $z(x) \leq 0$ em $]x_1, x_1 + \epsilon[$. Esta contradição mostra que $y_1(x) = y_2(x)$ em $x_0 \leq x \leq x_0 + a$. ■

O tipo de monotonia referido no teorema anterior não pode ser substituido. Isto é o teorema não é válido se $f(x,y)$ for não decrescente, como se comprova pelo seguinte contra-exemplo:

Considere-se $f(x,y) = \sqrt{|y|}\ sgn(y)$, sendo $sgn(y)$ a função sinal, isto é,

$$sgn(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad y = 0 \\ -1 & , \quad y < 0. \end{cases}$$

A função f é contínua e não decrescente mas o problema $y' = \sqrt{|y|}\ sgn(y)$, $y(0) = 0$, tem duas soluções $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{x^2}{4}$ em $[0, +\infty[$.

Para uma não linearidade crescente é preciso um resultado auxiliar:

Lema 2.4.3 *Considere-se $w(z)$ uma função contínua e crescente no intervalo $[0, +\infty[$ com $w(0) = 0$, $w(z) > 0$ para $z > 0$ e, para $a > 0$,*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{dz}{w(z)} = +\infty. \tag{2.23}$$

Seja $u(x)$ uma função contínua não negativa em $[0, a]$ tal que

$$u(x) \leq \int_0^x w(u(t))\ dt, \quad 0 < x \leq a. \tag{2.24}$$

Então $u(x) \equiv 0$ em $[0, a]$.

Dem. Defina-se $v(x) := \max\limits_{0\leq t\leq x} u(t)$ e suponha-se que $v(x) > 0$ para $0 < x \leq a$. Então $u(x) \leq v(x)$ e para cada x existe $x_1 \leq x$ tal que $u(x_1) = v(x)$. Assim obtem-se

$$u(x_1) = v(x) \leq \int_0^x w\left(u(t)\right)\ dt \leq \int_0^x w\left(v(t)\right)\ dt,$$

isto é, a função não decrescente $v(x)$ verifica a mesma desigualdade que $u(x)$.

Considerando

$$\overline{v}(x) := \int_0^x w\left(v(t)\right)\ dt,$$

tem-se $\overline{v}(0) = 0$, $v(x) \leq \overline{v}(x)$ e $\overline{v}'(x) = w\left(v(x)\right) \leq w\left(\overline{v}(x)\right)$, pelo que, para $0 < \delta < a$,

$$\int_\delta^a \frac{\overline{v}'(x)}{w\left(\overline{v}(x)\right)}\ dx \leq a - \delta < a.$$

Contudo, por (2.23), obtem-se

$$\int_\delta^a \frac{\overline{v}'(x)}{w\left(\overline{v}(x)\right)}\ dx = \int_\epsilon^\alpha \frac{dz}{w(z)},\quad \overline{v}(\delta) = \epsilon,\quad \overline{v}(a) = \alpha,$$

em que o integral se torna infinito quando $\epsilon \to 0$ $(\delta \to 0)$.

Esta contradição prova que $v(x)$ não pode ser positivo, pelo que $v(x) \equiv 0$ e, portanto, $u(x) \equiv 0$ em $[0, a]$. ■

Teorema 2.4.4 ***(da unicidade de Osgood)*** *Seja $f(x, y)$ uma função contínua em $\overline{S}$ tal que, para quaisquer (x, y_1), $(x, y_2) \in \overline{S}$,*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq w\left(|y_1 - y_2|\right), \tag{2.25}$$

com $w(z)$ a função referida no Lema 2.4.3. Então o problema (2.1) tem, no máximo, uma solução em $|x - x_0| \leq a$.

Dem. Considerem-se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ do problema (2.1), em $[x_0 - a, x_0 + a]$. Por (2.25),

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x w\left(|y_1(t) - y_2(t)|\right) dt \right|.$$

Para qualquer $x \in [x_0, x_0 + a]$ define-se $u(x) := |y_1(x_0 + x) - y_2(x_0 + x)|$. Então, esta função contínua e não negativa, $u(x)$, verifica a desigualdade (2.24) e, pelo Lema 2.4.3, $u(x) = 0$ em $[0, a]$, isto é, $y_1(x) = y_2(x)$ em $[x_0, x_0 + a]$.

Se $x \in [x_0 - a, x_0]$ a demonstração é análoga, definindo-se neste caso a função $u(x) := |y_1(x_0 - x) - y_2(x_0 - x)|$ em $[0, a]$. ■

Lema 2.4.5 *Seja $u(x)$ uma função contínua, não negativa em $|x-x_0| \leq a$ tal que $u(x_0) = 0$ e diferenciável em $x = x_0$ com $u'(x_0) = 0$. Então a desigualdade*

$$u(x) \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{t-x_0} dt \right| \tag{2.26}$$

implica que $u(x) \equiv 0$ em $|x-x_0| \leq a$.

Dem. Prova-se o Lema apenas para $x \in [x_0, x_0+a]$, pois o outro caso é análogo.

Defina-se

$$v(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{u(t)}{t-x_0} dt.$$

Note-se que este integral existe, pois

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{x-x_0} = u'(x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$v'(x) = \frac{u(x)}{x-x_0} \leq \frac{v(x)}{x-x_0}$$

e $\frac{d}{dx}\left(\frac{v(x)}{x-x_0}\right) \leq 0$ então a função $\frac{v(x)}{x-x_0}$ é não crescente. Como $v(x_0) = 0$ tem-se $v(x) \leq 0$, o que, em conjunto com $v(x) \geq 0$, por definição de $v(x)$, conduz a $v(x) \equiv 0$ e, por consequência, $u(x) \equiv 0$ em $[x_0, x_0+a]$. ■

Teorema 2.4.6 ***(da unicidade de Nagumo)*** *Seja $f(x,y)$ uma função contínua em $\overline{S}$ tal que, para quaisquer (x,y_1), $(x,y_2) \in \overline{S}$,*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\frac{|y_1-y_2|}{|x-x_0|}, \quad x \neq x_0, \quad k \leq 1. \tag{2.27}$$

Então (2.1) tem, no máximo, uma solução em $|x-x_0| \leq a$.

Dem. Suponham-se duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ do problema de valor inicial (2.1), em $[x_0-a, x_0+a]$. Por (2.27), obtem-se

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|y_1(t)-y_2(t)|}{|t-x_0|} dt \right|.$$

Definindo $u(x) := |y_1(x) - y_2(x)|$ observa-se que esta função não negativa verifica a desigualdade (2.26). Além disso, como $u(x)$ é contínua em

$[x_0 - a, x_0 + a]$ e $u(x_0) = 0$, tem-se, pelo Teorema do valor médio, para $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$,

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{|y_1(x_0) + hy_1'(x_0+\theta_1 h) - y_2(x_0) - hy_2'(x_0+\theta_2 h)|}{h} \\ &= sgn(h) \lim_{h\to 0} \left| y_1'(x_0+\theta_1 h) - y_2'(x_0+\theta_2 h) \right| = 0. \end{aligned}$$

Assim verificam-se as condições do Lema 2.4.5 e $u(x) \equiv 0$, isto é, $y_1(x) = y_2(x)$ em $[x_0 - a, x_0 + a]$. ■

No teorema anterior, o valor de $k \le 1$ é **optimal**, isto é, k não pode tomar valores superiores a 1.

Veja-se o contra-exemplo: A função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le x \le 1,\ y \le 0 \\ \frac{(1+\epsilon)y}{x} & , \quad 0 \le x \le 1,\ 0 < y < x^{1+\epsilon},\ \epsilon > 0 \\ (1+\epsilon)\, x^{\epsilon} & , \quad 0 \le x \le 1,\ x^{1+\epsilon} \le y \end{cases}$$

é contínua e verifica (2.27) para $k = 1 + \epsilon > 1$ em $\overline{S} = [0,1] \times \mathbb{R}$. Para esta função o problema (2.1), com $(x_0, y_0) = (0,0)$ tem infinitas soluções, $y(x) = cx^{1+\epsilon}$, para c uma constante arbitrária entre 0 e 1.

2.5 Inequações diferenciais e soluções extremais

Considere-se uma função $f(x,y)$ contínua num domínio D.

Uma função $y(x)$ diz-se **solução da inequação diferencial** $y' > f(x,y)$ no intervalo $I := [x_0, x_0 + a[$ se:

(i) $y'(x)$ existe para qualquer $x \in I$;

(ii) $(x, y(x)) \in D$, $\forall x \in I$;

(iii) $y'(x) > f(x, y(x))$, $\forall x \in I$.

As soluções para as inequações diferenciais $y' \ge f(x,y)$, $y' < f(x,y)$ e $y' \le f(x,y)$ definem-se de modo análogo.

Por exemplo, $y(x) = \cot x$ é solução da inequação diferencial $y' < -y^2$ no intervalo $]0, \pi[$.

Teorema 2.5.1 *Sejam $f(x,y)$ uma função contínua num domínio D, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções das inequações diferenciais*

$$y_1' \leq f(x,y_1), \quad y_2' > f(x,y_2) \tag{2.28}$$

no intervalo I. Se $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ então

$$y_1(x) < y_2(x), \ \forall x \in I. \tag{2.29}$$

Dem. Supondo, por contradição que (2.29) não é verdade verifica-se que o conjunto $A = \{x \in I : y_1(x) \geq y_2(x)\}$ não é vazio. Designando por x_* o mínimo de A, tem-se que $x_0 < x_*$ e $y_1(x_*) = y_2(x_*)$.

Para $h < 0$ verifica-se $y_1(x_* + h) < y_2(x_* + k)$ e

$$\begin{aligned} y_1'(x_*^-) &= \lim_{h \to 0} \frac{y_1(x_*+h) - y_1(x_*)}{h} \\ &\geq \lim_{h \to 0} \frac{y_2(x_*+h) - y_2(x_*)}{h} = y_2'(x_*^-). \end{aligned}$$

Por (2.28), obtem-se $f(x_*, y_1(x_*)) > f(x_*, y_2(x_*))$ o que está em contradição com $y_1(x_*) = y_2(x_*)$. Assim o conjunto A é vazio e tem-se (2.29). ■

O Teorema anterior permanece válido se se substituir, em (2.28), $\leq$ por $<$ e $>$ por $\geq$.

Corolário 2.5.2 *Considere-se $f(x,y)$ uma função contínua no domínio D tal que:*

(i) *$y(x)$ é solução do problema de valor inicial (2.1) em $I = [x_0, x_0 + a[$;*

(ii) *$y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções das inequações diferenciais $y_1' < f(x,y_1)$ e $y_2' > f(x,y_2)$ em I;*

(iii) *$y_1(x_0) \leq y_0 \leq y_2(x_0)$.*

Então, para $x \in]x_0, x_0 + a[$,

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x).$$

Dem. Provar-se-á apenas que $y(x) < y_2(x)$ no intervalo $]x_0, x_0 + a[$, pois o outro caso é análogo.

Se $y_0 < y_2(x_0)$ o resultado obtem-se pelo Teorema 2.5.1. Considere-se então que $y_0 = y_2(x_0)$ e defina-se $z(x) := y_2(x) - y(x)$. Então

$$z'(x_0) := y_2'(x_0) - y'(x_0) > f(x_0, y_2(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) = 0,$$

isto é, $z(x)$ é crescente à direita de x_0, num intervalo suficientemente pequeno $[x_0, x_0 + \delta]$.

Aplicando o Teorema 2.5.1 obtem-se $y(x) < y_2(x)$ no intervalo $[x_0 + \delta, x_0 + a[$. Como δ pode ser arbitrariamente pequeno tem-se a conclusão pretendida. ■

Os resultados anteriores podem ser considerados em situações mais gerais como, por exemplo, admitindo que as desigualdades (2.28) se verificam em I, excepto em subconjuntos numeráveis de I.

Exemplo 2.5.3 *Para o problema de valor inicial*

$$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1[, \tag{2.30}$$

a função $y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3}$ *verifica, para* $x \in]0, 1[$,

$$y_1'(x) = x^2 < \left(1 + \frac{x^3}{3}\right)^2 + x^2 = y_1^2(x) + x^2.$$

Analogamente $y_2(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ *satisfaz, para* $x \in]0, 1[$, *a desigualdade*

$$y_2'(x) = \sec^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 > y_2^2(x) + x^2.$$

Como $y_1(0) = 1 = y_2(0)$, *pelo Corolário 2.5.2, a solução de (2.30),* $y(x)$, *estará entre* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *para* $x \in]0, 1[$, *isto é,*

$$1 + \frac{x^3}{3} < y(x) < \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x \in]0, 1[.$$

Uma primeira aplicação dos resultados anteriores será a seguinte proposição:

Proposição 2.5.4 *Seja* $f(x, y)$ *uma função contínua no domínio* D *que verifica as condições:*

(i) *para* (x, y), $(x, z) \in D$, $x \geq x_0$, $y \geq z$,

$$f(x, y) - f(x, z) \leq L(y - z);$$

(ii) $y(x)$ *é solução do problema de valor inicial (2.1) em* $I = [x_0, x_0 + a[$;

(iii) $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *soluções das inequações diferenciais* $y_1' \leq f(x, y_1)$, $y_2' \geq f(x, y_2)$ *em* I;

(iv) $y_1(x_0) \leq y_0 \leq y_2(x_0)$.

Então, para $x \in I$,

$$y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x).$$

Dem. Defina-se $z_1(x) := y_1(x) - \epsilon\ e^{\lambda(x-x_0)}$, com $\epsilon > 0$ e $\lambda > L$. Então, a partir das hipóteses, obtem-se

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y_1'(x) - \epsilon\lambda e^{\lambda(x-x_0)} \leq f(x, y_1(x)) - \epsilon\lambda e^{\lambda(x-x_0)} \\ &\leq f(x, z_1(x)) + \epsilon\,(L-\lambda)\,\lambda e^{\lambda(x-x_0)} < f(x, z_1(x)). \end{aligned}$$

De modo análogo, para a função $z_2(x) := y_2(x) + \epsilon\ e^{\lambda(x-x_0)}$ conclui-se

$$z_2'(x) > f(x, z_2(x)).$$

As relações $z_1(x_0) < y_1(x_0) \leq y_0 \leq y_2(x_0) < z_2(x_0)$ são imediatas, pelo que se verificam as condições do Teorema 2.5.1 para as funções $z_1(x)$ e $z_2(x)$. Assim

$$z_1(x) < y(x) < z_2(x), \quad \forall x \in I. \tag{2.31}$$

A conclusão pretendida obtem-se fazendo $\epsilon \to 0$ em (2.31). ■

Uma outra aplicação é a obtenção de **soluções extremais**, isto é, soluções maximais ou minimais:

Definição 2.5.5 *Uma solução $\alpha(x)$ ($\beta(x)$) do problema de valor inicial (2.1), existente no intervalo I, diz-se uma **solução minimal (maximal)** se, para qualquer solução $y(x)$ de (2.1) em I, se verifica $\alpha(x) \leq y(x)$ ($y(x) \leq \beta(x)$) para $x \in I$.*

É imediato, a partir da definição, que se as soluções maximal ou minimal existem então serão únicas.

A existência destas soluções é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 2.5.6 *Considere-se $f(x,y)$ uma função contínua em*

$$\overline{S}_+ = \{(x,y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$$

e seja M uma constante positiva tal que $|f(x,y)| \leq M$ para $(x,y) \in \overline{S}_+$. Então existe uma solução maximal $\beta(x)$ e uma solução minimal $\alpha(x)$ de (2.1) no intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, com $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{2M+b}\right\}$.

Dem. A demontração será feita apenas para a solução maximal $\beta(x)$.
Seja $0 < \epsilon \leq \frac{b}{2}$ e considere-se o problema de valor inicial

$$y' = f(x,y) + \epsilon, \quad y(x_0) = y_0 + \epsilon. \tag{2.32}$$

Como a função $f_\epsilon(x,y) = f(x,y) + \epsilon$ é contínua em

$$\overline{S}_\epsilon := \left\{(x,y) : x_0 \le x \le x_0 + a, |y - (y_0+\epsilon)| \le \frac{b}{2}\right\}$$

e $\overline{S}_\epsilon \subseteq \overline{S}_+$ tem-se que $|f_\epsilon(x,y)| \le M + \frac{b}{2}$ em $\overline{S}_\epsilon$.

Pelo Corolário 2.3.2, o problema (2.32) tem uma solução $y(x,\epsilon)$ no intervalo $[x_0, x_0+\delta]$, com $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{2M+b}\right\}$. Para $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 \le \epsilon$ tem-se $y(x_0,\epsilon_2) < y(x_0,\epsilon_1)$ e

$$\begin{aligned} y'(x,\epsilon_2) &= f(x, y(x,\epsilon_2)) + \epsilon_2, \\ y'(x,\epsilon_1) &> f(x, y(x,\epsilon_1)) + \epsilon_2, \ \forall x \in [x_0, x_0+\delta]. \end{aligned}$$

O Teorema 2.5.1 é aplicável e tem-se $y(x,\epsilon_2) < y(x,\epsilon_1)$ em $[x_0, x_0+\delta]$.

Aplicando argumentos análogos aos utilizados no Teorema 2.3.1, verifica-se que a família de funções $y(x,\epsilon)$ é equicontínua e uniformemente limitada em $[x_0, x_0+\delta]$. Portanto, pelo Teorema de Arzèla-Ascoli, existe uma sucessão decrescente (ϵ_n) tal que $\epsilon_n \to 0$ e $\lim_{n\to+\infty} y(x,\epsilon_n)$ existe uniformemente em $[x_0, x_0+\delta]$. Represente-se por $\beta(x)$ esta função limite. Então $\beta(x_0) = y_0$ e a continuidade uniforme de f em

$$y(x,\epsilon_n) = y_0 + \epsilon_n + \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t,\epsilon_n)) + \epsilon_n]\, dt$$

garante que $\beta(x)$ é solução do problema (2.1).

Finalmente, prove-se que $\beta(x)$ é solução maximal de (2.1) em $[x_0, x_0+\delta]$.

Considere-se uma solução arbitrária $y(x)$ de (2.1) em $[x_0, x_0+\delta]$. Então $y(x_0) = y_0 < y_0 + \epsilon = y(x_0,\epsilon)$, $y'(x) = f(x,y(x)) + \epsilon$ e $y'(x,\epsilon) = f(x, y(x,\epsilon)) + \epsilon$ para $x \in [x_0, x_0+\delta]$ e $0 < \epsilon \le \frac{b}{2}$. Pelo Teorema 2.5.1, tem-se $y(x) < y(x,\epsilon)$, para $x \in [x_0, x_0+\delta]$.

A unicidade da solução maximal mostra que $y(x,\epsilon)$ tende uniformemente para $\beta(x)$ em $[x_0, x_0+\delta]$, quando $\epsilon \to 0$. ■

O processo de prolongamento de soluções estudado anteriormente pode ser utilizado para obter soluções maximais ou minimais, sendo que estas não poderão admitir prolongamentos diferentes de si próprias.

Exemplo 2.5.7 *Para o problema de valor inicial* $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$, *as soluções maximal,* $\beta(x)$, *e minimal,* $\alpha(x)$, *são dadas, respectivamente, por*

$$\beta(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} &, \ x \ge 0 \\ 0 &, \ x < 0 \end{cases}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0 &, \ x \ge 0 \\ -\frac{x^2}{4} &, \ x < 0 \end{cases}.$$

Uma aplicação destas soluções extremais é ilustrada pelo próximo resultado:

Teorema 2.5.8 *Sejam $f(x,y)$ uma função contínua no domínio D, $\beta(x)$ uma solução maximal de (2.1) no intervalo $I := [x_0, x_0 + a[$ e $y(x)$ uma solução da inequação diferencial*

$$y'(x) \leq f(x, y(x)) \tag{2.33}$$

em I. Se $y(x_0) \leq y_0$ então

$$y(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in I. \tag{2.34}$$

Dem. Para $x_1 \in]x_0, x_0 + a[$, aplicando uma técnica semelhante à utilizada para o Teorema 2.5.6, prova-se que existe uma solução maximal $\beta(x)$ de (2.32) em $[x_0, x_1]$ para qualquer $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \beta(x, \epsilon) = \beta(x)$ uniformemente em $[x_0, x_1]$.

Por (2.32) e (2.33), juntamente com $y(x_0) \leq y_0 < \beta(x_0, \epsilon)$, o Teorema 2.5.1 garante que

$$y(x) < \beta(x, \epsilon) \tag{2.35}$$

em $[x_0, x_1]$. A desigualdade (2.34) resulta de considerar $\epsilon \to 0$ em (2.35). ■

2.6 Dependência contínua dos dados iniciais

O problema de valor inicial (2.1) pode modelar um problema físico onde alguns parâmetros como, por exemplo, comprimentos, massas, temperaturas, ..., estão envolvidos e cujos valores podem ser medidos até um certo grau de precisão.

Assim, quer os valores iniciais de (2.1), (x_0, y_0), quer a não linearidade $f(x,y)$, estão sujeitos a uma margem de erro, por necessidade ou por conveniência, pelo que é importante conhecer como varia a solução de (2.1) quando (x_0, y_0) ou $f(x,y)$ são modificados Isto é, quando o *input* é ligeiramente alterado como reage o *output* ?

Uma estimação para esta variação é dada pelo teorema:

Teorema 2.6.1 *Se*

(i) *$f(x,y)$ é uma função contínua e limitada por M, num domínio D contendo os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1);*

(ii) *$f(x,y)$ verifica a condição de Lipschitz (2.3) em D;*

(iii) *$g(x,y)$ é contínua e limitada por M_1 em D;*

(iv) *$y(x)$ é solução problema (2.1), definida num intervalo I contendo x_0;*

(v) *$z(x)$, definida em I contendo x_1, é solução do problema*

$$z' = f(x,z) + g(x,z), \quad z(x_1) = y_1; \tag{2.36}$$

então, para $x \in I$,

$$|y(x) - z(x)| \leq \left(|y_0 - y_1| + (M + M_1)\,|x_1 - x_0| + \frac{1}{L}M_1 \right) \, e^{L|x-x_0|} - \frac{1}{L}M_1. \tag{2.37}$$

Dem. Pelo Teorema 2.1.1, para $x \in I$, tem-se que

$$\begin{aligned} z(x) &= y_1 + \int_{x_1}^{x} [f(t,z(t)) + g(t,z(t))]\,dt \\ &= y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t,z(t))dt + \int_{x_1}^{x_0} f(t,z(t))dt + \int_{x_1}^{x} g(t,z(t))dt \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(x) - z(x) = y_0 - y_1 + \textstyle\int_{x_0}^{x} [f(t,y(t)) - f(t,z(t))]\,dt \\ + \textstyle\int_{x_0}^{x_1} f(t,z(t))dt - \int_{x_1}^{x} g(t,z(t))dt. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Considerando os valores absolutos em ambos os membros de (2.38) e utilizando as hipóteses, obtem-se

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq |y_0 - y_1| + (M + M_1)\,|x_1 - x_0| + M_1\,|x - x_0| \\ &\quad + L \left| \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,dt \right|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade é exactamente a mesma que foi considerada no Corolário 2.1.7 com $c_0 = |y_0 - y_1| + (M + M_1)\,|x_1 - x_0|$, $c_1 = M_1$, $c_2 = L$ e $u(x) = |y(x) - z(x)|$, pelo que se verifica (2.37). ■

Da desigualdade sobressai que a diferença entre duas soluções de (2.1), no intervalo I, é pequena desde que as alterações ao ponto inicial (x_0, y_0) e à função $f(x,y)$ não ultrapassem determinados valores. Ou seja, **se** $f(x,y)$ **e o ponto inicial** (x_0, y_0) **variarem de um modo contínuo então as soluções de (2.1) também variam contínuamente**.

Sublinhe-se que a solução $z(x)$ de (2.36) não tem que ser única em I.

Exemplo 2.6.2 *Considere-se o problema de valor inicial*

$$y' = sen(xy), \quad y(0) = 1, \tag{2.39}$$

no rectângulo $\overline{S} = \left\{(x,y) : |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\right\}$. *Como*

$$\max_{\overline{S}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{\overline{S}} |x\cos(xy)| \leq \frac{1}{2} := L,$$

pelo Teorema 2.1.3, $f(x,y) = sen(xy)$ *verifica a condição de Lipschitz (2.3) em* $\overline{S}$. *Aplicando o Teorema 2.2.2 com* $a = b = \frac{1}{2}$ *e* $M \geq 1$ *o problema (2.39) tem uma única solução no intervalo* $|x| \leq h \leq \frac{1}{2}$.
Como aproximação ao problema anterior considere-se

$$z' = xz, \quad z(0) = 1,1 \tag{2.40}$$

que admite a solução única $z(x) = 1,1\ e^{\frac{x^2}{2}}$ *no intervalo* $|x| \leq \frac{1}{2}$. *Pela Fórmula de Taylor, obtem-se*

$$|g(x,y)| = |sen(xy) - xy| \leq \frac{|xy|^3}{6} \leq \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{128} := M_1.$$

Aplicando o Teorema 2.6.1 para os dois problemas (2.39) e (2.40) obtem-se uma majoração para a "distância" entre as duas soluções $y(x)$ *e* $z(x)$:

$$|y(x) - z(x)| \leq \left(0.1 + \frac{9}{64}\right)\ e^{\frac{|x|}{2}} - \frac{9}{64}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Para realçar a dependência do ponto inicial (x_0, y_0) representa-se agora a solução de (2.1) por $y(x, x_0, y_0)$.

O próximo resultado mostra que a função $y(x, x_0, y_0)$ é diferenciável em relação a y_0 :

Teorema 2.6.3 *Se*

(i) $f(x,y)$ *é uma função contínua e limitada num domínio* D *contendo o ponto* (x_0, y_0);

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *existe, é contínua e limitada em* D;

(iii) *a solução* $y(x, x_0, y_0)$, *do problema (2.1), existe num intervalo* I *contendo* x_0;

então $y(x, x_0, y_0)$ *é diferenciável em relação a* y_0 *e* $z(x) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)$ *é solução do problema de valor inicial*

$$z' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, x_0, y_0))\ z, \qquad z(x_0) = 1. \tag{2.41}$$

Dem. Considere-se $(x_0, y_1) \in D$ tal que a solução $y(x, x_0, y_1)$ do problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_1$$

existe num intervalo I_1. Então para todo $x \in I_2 = I \cap I_1$, o Teorema 2.6.1 implica que

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1)| \leq |y_0 - y_1| \; e^{L|x-x_0|},$$

isto é, $|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1)| \to 0$ quando $|y_0 - y_1| \to 0$.

Para $x \in I_2$ verifica-se ainda que

$$\begin{aligned} & y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1) - z(x)(y_0 - y_1) \\ = & \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y(t, x_0, y_0)) - f(t, y(t, x_0, y_1)) \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, x_0, y_0)) z(t)(y_0 - y_1) \right] dt \\ = & \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, x_0, y_0)) \left[y(t, x_0, y_0) - y(t, x_0, y_1) - z(t)(y_0 - y_1) \right] dt \\ & + \int_{x_0}^{x} \delta(y(t, x_0, y_0), \; y(t, x_0, y_1)) \, dt, \end{aligned}$$

com $\delta(y(t, x_0, y_0), \; y(t, x_0, y_1)) \to 0$ quando $|y(t, x_0, y_0) - y(t, x_0, y_1)| \to 0$, ou seja, $|y_0 - y_1| \to 0$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} & |y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1) - z(x)(y_0 - y_1)| \\ \leq & \; L \left| \int_{x_0}^{x} |y(t, x_0, y_0) - y(t, x_0, y_1) - z(t)(y_0 - y_1)| \, dt \right| + o(|y_0 - y_1|). \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 2.1.7 obtem-se

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1) - z(x)(y_0 - y_1)| \leq o(|y_0 - y_1|) \; e^{L|x-x_0|}.$$

Portanto, $|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_1) - z(x)(y_0 - y_1)| \to 0$ quando $|y_0 - y_1| \to 0$, o que conclui a demonstração. ■

A equação (2.41) é designada por **equação variacional** correspondente à solução $y(x, x_0, y_0)$.

As hipóteses do Teorema 2.6.3 também são condições suficientes para garantir que a solução $y(x, x_0, y_0)$ é diferenciável em relação a x_0 :

Teorema 2.6.4 *Nas condições (i)-(iii) do Teorema 2.6.3 a solução* $y(x, x_0, y_0)$ *é diferenciável em relação a* x_0 *e* $z(x) = \frac{\partial y}{\partial x_0}(x, x_0, y_0)$ *é solução da equação variacional (2.41) que verifica a condição inicial*

$$z(x_0) = -f(x_0, y_0). \tag{2.42}$$

Dem. A demonstração é semelhante à do Teorema 2.6.3. ■

Observação 2.6.5 *A equação variacional (2.41) pode ser obtida directamente derivando em relação a* y_0 *(ou* x_0*) a igualdade*

$$y'(x, x_0, y_0) = f(x, y(x, x_0, y_0)).$$

Como $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, *a derivada em relação a* y_0 *dá*

$$z(x_0) := \left[\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)\right]_{x=x_0} = 1.$$

Para obter (2.42), considera-se a equação integral

$$y(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t, x_0, y_0))dt$$

e derivam-se ambos os membros em ordem a x_0, *obtendo-se*

$$z(x_0) := \left[\frac{\partial y}{\partial x_0}(x, x_0, y_0)\right]_{x=x_0} = -f(x_0, y_0).$$

Para estudar a dependência contínua de um parâmetro em geral, suponha-se o problema de valor inicial

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.43}$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}$ um parâmetro.

O próximo teorema demonstra-se de modo análogo aos resultados anteriores:

Teorema 2.6.6 *Se*

(i) $f(x, y, \lambda)$ *é contínua e limitada num domínio* $D \subseteq \mathbb{R}^3$ *contendo o ponto* (x_0, y_0, λ_0);

(ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \lambda)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y, \lambda)$ *existem, são contínuas e limitadas em* D, *por* L *e* L_1, *respectivamente*;

então:

(1) *existem* $h > 0$ *e* $\epsilon > 0$ *tais que para qualquer* $\lambda \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ *existe uma única solução* $y(x, \lambda)$ *do problema de valor inicial (2.43) definida no intervalo* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *;*

(2) *para* $\lambda_1, \lambda_2 \in [\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$ *e* $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ *verifica-se*

$$|y(x, \lambda_1) - y(x, \lambda_2)| \leq \frac{L_1}{L} |\lambda_1 - \lambda_2| \ \left(e^{L|x-x_0|} - 1\right);$$

(3) *a solução* $y(x, \lambda)$ *é diferenciável em relação a* λ *e* $z(x, \lambda) := \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ *é solução do problema de valor inicial*

$$z'(x, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, \lambda), \lambda) \ z(x, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y(x, \lambda), \lambda) \quad (2.44)$$

$$z(x_0, \lambda) = 0. \quad (2.45)$$

Se λ for tal que $|\lambda - \lambda_0| \leq \epsilon$ seja suficientemente pequeno obtem-se uma **aproximação de primeira ordem** da solução $y(x, \lambda)$ dada por

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &\simeq y(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \left[\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right]_{\lambda = \lambda_0} \\ &= y(x, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \ z(x, \lambda_0). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Exemplo 2.6.7 *O problema de valor inicial*

$$y' = \lambda y^2 + 1, \quad y(0) = 0, \quad (\lambda \geq 0), \quad (2.47)$$

admite a solução $y(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tan\left(\sqrt{\lambda} x\right)$ *no intervalo* $\left]-\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right[$, *para* $\lambda > 0$. *Se* $\lambda = 0$ *em (2.47) tem-se* $y(x, 0) = x$.
Como $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\lambda y$ *e* $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = y^2$ *o problema de valor inicial (2.44), (2.45) tem a forma*

$$z'(x, 0) = x^2, \quad z(0, 0) = 0,$$

e admite a solução $z(x, 0) = \frac{x^3}{3}$. *Portanto para* λ *próximo de 0 a aproximação, por (2.46), será*

$$y(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tan\left(\sqrt{\lambda} x\right) \simeq x + \lambda \frac{x^3}{3}.$$

2.7 Exercícios

1. Mostre que o problema de valor inicial

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_0) = y_1,$$

com $f(x,y)$ uma função contínua num domínio D contendo (x_0, y_0), é equivalente à equação integral

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y_1 + \int_{x_0}^{x} (x-t)\ f(t, y(t))dt.$$

2. Determine os domínios em que as funções verificam a condição de Lipschitz (2.3) e indique a respectiva constante:

a) $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$
b) $f(x,y) = x^2 \cos^2 y + y \text{ sen}^2 x$
c) $f(x,y) = |xy|$
d) $f(x,y) = x^2y^2 + xy + 1.$

3. Calculando as correspondentes constantes de Lipschitz prove que as seguintes funções satisfazem a condição de Lipschitz (2.3) nos domínios indicados:

a) $f(x,y) = x \text{ sen} y + y \cos x, \ \ |x| \leq a, \ \ |y| \leq b \ \ (a, b > 0)$
b) $f(x,y) = x^3 e^{-xy^2}, \ \ 0 \leq x \leq a, \ \ y \in \mathbb{R}.$

4. Mostre que as funções não satisfazem a condição de Lipschitz (2.3) nos domínios indicados:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases} \ , \quad |x| \leq 1, \ \ |y| \leq 2;$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\text{sen} y}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \ , \quad |x| \leq 1, \ \ |y| < +\infty.$

5. Verifique que a sucessão de funções $f_n(x) = \frac{nx^2}{nx+1}, \ \ 0 \leq x \leq 1,$ converge uniformemente para a função $f(x) = x$ e que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^2}{nx+1} dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{nx+1} dx = \frac{1}{2}.$$

6. Indique as três primeiras iterações pelo método de Picard dos seguintes problemas de valor inicial, considerando como aproximação inicial $y_0(x) \equiv x$:

a) $y' = x^2 - y^2 - 1, \quad y(0) = 0.$

b) $y' = \frac{x+2y}{2x+y}, \;\; y(1) = 1$

c) $y' = x^2 + y^2, \;\; y(0) = 0$

7. Discuta a existência (local e global) e unicidade de solução das soluções dos problemas:

a) $y' = 1 + \sqrt[3]{y^2}, \;\; y(0) = 0$

b) $y' = \text{sen}(xy)\,, \;\; y(0) = 1$

c) $y' = (x+y)x^2y^2, \;\; y(0) = 1$

8. Prove que o problema de valor inicial

$$y' = \left(x^2 - y^2\right) \text{sen} y + y^2 \cos y, \quad y(0) = 0$$

admite apenas a solução $y(x) \equiv 0$ no rectângulo

$$\overline{S} = \{(x, y) : |x| \leq a, \; |y| \leq b\}\,.$$

9. Prove que os problemas de valor inicial têm uma única solução para qualquer valor real de x :

a) $y' = y^3 e^x \frac{1}{1+y^2} + x^2 \cos y, \quad y(x_0) = y_0.$

b) $y' = \cos x \; e^{-y^2} + seny, \quad y(x_0) = y_0.$

10. Sejam $f(x)$ e $g(y) \neq 0$ duas funções contínuas em $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$, respectivamente.

Mostre que o problema de valor inicial

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

tem uma única solução no intervalo $|x - x_0| \leq k$ com $k \leq a$.

11. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) = \begin{cases} y(1-2x) & , \quad x > 0 \\ y(2x-1) & , \quad x < 0 \end{cases} \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

a) Justifique que $f(x, y)$ não é contínua nos pontos $(0, y)$, $y \neq 0$.

b) Mostre que

$$y(x) = \begin{cases} e^{x-x^2} & , \quad x \geq 0 \\ e^{x^2-x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

é a única solução do problema, definida para $x \in \mathbb{R}$ mas não diferenciável em $x = 0$.

12. Considere uma função contínua $f(x, y)$, $0 \leq \alpha < 1$ e um conjunto $T = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y| < +\infty\}$ tal que

$$|f(x, y)| \leq k_1 + k_2 |y|^\alpha, \quad \forall (x, y) \in T,$$

com $k_1, k_2 \geq 0$. Prove que o problema de valor inicial (2.1) tem pelo menos uma solução no intervalo $|x - x_0| \leq a$.

13. Mostre que a solução do problema

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

não é prolongável além do intervalo $-1 < x < 1$.

14. Justifique que a solução do problema

$$y' = y^2, \quad y(0) = 2$$

só é prolongável ao intervalo $-\infty < x < \frac{1}{2}$.

15. Determine o **intervalo maximal** para a solução do problema

$$y' + senx \; y^2 = 3(xy)^2, \quad y(0) = 2.$$

16. Resolva o problema de valor inicial

$$yy' - 3x^2 \left(1 + y^2\right) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Determine o intervalo maximal em que a solução pode estar definida.

17. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{x^4 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

a) Prove que $f(x, y)$ é contínua mas não verifica a condição de Lipschitz em qualquer subconjunto que contenha a origem.

b) Mostre que o problema tem infinitas soluções.

18. Seja $f(x,y)$ uma função contínua em $\overline{S}_+$ dado por (2.22) e que, para $y_1 \geq y_2$, satisfaz a **condição de Lipschitz unilateral**

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) \leq L\,(y_1 - y_2)\,, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \overline{S}_+.$$

Justifique que o problema (2.1) tem, no máximo, uma solução para $x_0 \leq x \leq x_0 + a$

19. Seja $f(x,y)$ uma função contínua que satisfaz a **condição de Lipschitz generalizada**

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L(x)\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \overline{S},$$

com $\overline{S}$ dado por (2.11) e $L(x)$ uma função tal que o integral

$$\int_{x_0+a}^{x_0+a} L(t)dt$$

existe. Prove que o problema (2.1) tem, no máximo, uma solução em $|x - x_0| \leq a$.

20. Considere $f(x,y)$ a função definida em $T = \{(x,y) : -\infty < x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x \leq 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ 2x & , \quad 0 < x \leq 1, \quad -\infty < y < 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & , \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & , \quad 0 < x \leq 1, \quad x^2 < y < +\infty \end{cases}.$$

Prove que o problema $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$ tem uma única solução definida para $-\infty < x \leq 1$.

21. Designe-se por $y(x)$ uma solução do problema

$$y' = y - y^2, \quad y(0) = y_0, \quad 0 < y_0 < 1.$$

Mostre que

$$y_0 < y(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

22. Seja $y(x)$ uma solução do problema $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$. Prove que

$$1 + x < y(x) < \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]0,1[.$$

23. Para o problema de valor inicial

$$y' = x + e^x sen(xy), \quad y(0) = 0 := y_0$$

estime a variação da solução no intervalo $[0, 1]$ quando y_0 é perturbado por $0, 01$.

24. Represente-se por $y(x, \lambda)$ a solução do problema

$$y' = \lambda + \cos y, \quad y(0) = 0.$$

Determine uma majoração em $[0, 1]$ para $|y(x, \lambda_1) - y(x, \lambda_2)|$.

25. Para λ suficientemente pequeno indique uma aproximação de primeira ordem para a solução de problema de valor inicial

$$y' = y + \lambda(x + y^2), \quad y(0) = 1.$$

26. Considere duas funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$, contínuas num domínio D e tais que

$$f(x, y) < g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções das equações diferenciais

$$y_1' = f(x, y_1) \;\text{ e }\; y_2' = g(x, y_2),$$

respectivamente, definidas no intervalo $I = [x_0, x_0 + a]$ e tais que $y_1(x_0) < y_2(x_0)$.

Mostre que $y_1(x) < y_2(x)$, para $x \in I$.

27. Determine o erro cometido ao utilizar a solução aproximada $y(x) = e^{-\frac{x^3}{6}}$ para o problema

$$y'' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

no intervalo $|x| \le \frac{1}{2}$.

2.8 Actividades

Actividade 1:

1.1. Seja $f(x, y)$ uma função contínua no conjunto

$$T := \{(x, y) : 0 \le x \le 1, y \in \mathbb{R}\} \tag{2.48}$$

que verifica a condição

$$f(x,y) = o\left(e^{-\frac{1}{x}}\ \frac{1}{x^2}\right),$$

uniformemente para $0 \leq y \leq \delta$, $\delta > 0$, arbitrário.

Suponha-se ainda que, para $(x,y_1), (x,y_2) \in T$, f verifica

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{1}{x^2}|y_1 - y_2|.$$

Mostre que o problema

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

tem, no máximo, uma solução em $[0,1]$.

(Nota: O resultado acima é conhecido como o **Teorema da unicidade de Roger**).

1.2. Considere-se a função $f(x,y)$ definida, no conjunto (2.48), por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y \leq 0 \\ \frac{y}{x^2} & , \ 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq e^{-\frac{1}{x}} \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & , \ 0 \leq x \leq 1 \quad e^{-\frac{1}{x}} \leq y < +\infty. \end{cases}$$

Prove que o problema

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

tem infinitas soluções em $[0,1]$.

Actividade 2:

2.1. Se a função $f(x,y)$ é contínua no conjunto $\overline{S} : [0,1] \times \mathbb{R}$ e verifica, para $(x,y_1), (x,y_2) \in \overline{S}$,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,\frac{|y_1 - y_2|}{|x - x_0|}, \quad x \neq x_0, \quad k > 0,$$

e

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq C \; |y_1 - y_2|^{\alpha}, \quad C > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k(1-\alpha) < 1,$$

então, mostre que o problema

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tem, no máximo, uma solução em $|x - x_0| \leq a$, para um certo $a > 0$.

(Nota: O resultado acima é conhecido como o **Teorema da unicidade de Krasnoselski-Krein**).

2.2. Demonstre o Teorema 2.6.4.

Actividade 3:

3.1. Seja $f(x,y)$ uma função contínua em $\overline{S} : [0,1] \times \mathbb{R}$ que verifica

$$|f(x,y)| \leq A\,|x - x_0|^p, \quad A > 0, \quad p > -1, \quad \forall (x,y) \in \overline{S},$$

e, para $(x,y_1), (x,y_2) \in \overline{S}$,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \frac{C}{|x - x_0|^r} \; |y_1 - y_2|^q,$$

para $q \geq 1$, $C > 0$, $q(1+p) - r = p$ e

$$\frac{C\,(2A)^{-1}}{(p+1)^q} < 1.$$

Então o problema

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

tem, no máximo, uma solução em $|x - x_0| \leq a$, para um certo $a > 0$.

(Nota: Este resultado é conhecido como o **Teorema da unicidade de Van Kampen**).

3.2. Demonstre o Teorema 2.6.6.

CAP. 3

Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo o aluno deverá:

- Adaptar ao caso vectorial as técnicas e metodologias utilizadas para o caso escalar no capítulo anterior, nomeadamente no que se refere à existência (local e global) e unicidade de solução, prolongamento de soluções dos problemas de valor inicial, dependência contínua e diferenciação em relação aos dados iniciais.

- Utilizar conceitos e métodos relativos a sistemas lineares de equações diferenciais, tais como: espaço vectorial de soluções, wronskiano, matriz fundamental e sistema fundamental de soluções,...

- Aplicar propriedades da Álgebra Linear (como, por exemplo, dimensão de um espaço vectorial, sistemas homogéneos e não homogéneos, valores e vectores próprios e respectiva multiplicidade,...) a sistemas de equações diferenciais com coeficientes constantes.

- Saber determinar a exponencial de uma matriz constante, tendo em conta a natureza, sinal e multiplicidade dos valores próprios, e aplicá-la na resolução de sistemas lineares.

- Identificar condições suficientes para a existência de soluções periódicas e/ou limitadas de um sistema de equações diferenciais lineares.

- Analisar o comportamento assimptótico das soluções de sistemas lineares.

- Reconhecer condições suficientes para que as soluções de sistemas lineares permaneçam limitadas ou se tornem ilimitadas "no infinito".
- Relacionar propriedades da matriz fundamental com o tipo de comportamento assimptótico.

3.1 Existência e unicidade de solução para sistemas

No capítulo anterior consideraram-se apenas equações e problemas escalares de valor inicial. Será agora natural generalizá-los a sistemas de equações diferenciais de 1^a ordem e de ordem superior.

Um sistema de equações diferenciais de 1^a ordem pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned} u_1' &= g_1(x, u_1, ..., u_n) \\ u_2' &= g_2(x, u_1, ..., u_n) \\ &\vdots \\ u_n' &= g_n(x, u_1, ..., u_n). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Este tipo de sistemas aparece em vários ramos da Ciência, mas também têm interesse pela sua relevância na Matemática. Como exemplo, refira-se que uma equação diferencial de ordem n, como

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right),$$

se pode escrever como um sistema do tipo (3.1). De facto, efectuando as mudanças de variável $y^{(i)} = u_{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$, obtem-se

$$\begin{cases} u_i' = u_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1, \\ u_n' = f(x, u_1, ..., u_n). \end{cases}$$

Ao longo deste Capítulo consideram-se $g_1, ..., g_n$ como funções contínuas num conjunto aberto $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Uma solução u do sistema (3.1), num intervalo I, representa um conjunto de n funções $u_1(x), ..., u_n(x)$ tais que:

a) $u_1'(x), ..., u_n'(x)$ existem para $x \in I$;

b) para $x \in I$ os pontos $(x, u_1(x), ..., u_n(x)) \in E$;

c) $u_i' = g_i(x, u_1, ..., u_n)$, para $x \in I$.

Ao sistema (3.1) podem também ser adicionadas condições iniciais do tipo

$$u_1^0(x_0) = u_1^0, ..., u_n^0(x_0) = u_n^0, \tag{3.2}$$

sendo $x_0 \in I$ um valor fixo e $u_1^0, ..., u_n^0$ números dados tais que $\left(x_0, u_1^0, ..., u_n^0\right) \in E$.

Tal como anteriormente, o sistema (3.1) com as condições iniciais (3.2) forma um **problema de valor inicial**.

O estudo da existência e unicidade de solução para o problema (3.1), (3.2) pode seguir dois processos: impondo condições suficientes às funções $g_1, ..., g_n$ e provando os resultados directamente ou, em alternativa, escrevendo o problema numa notação vectorial. No estudo que se segue opta-se por este segundo método, pois neste caso as demonstrações são muito semelhantes ao caso escalar.

Utilizando a notação

$$\begin{aligned} u(x) &= (u_1(x), ..., u_n(x)), \\ g(x,u) &= (g_1(x,u), ..., g_n(x,u)) \end{aligned}$$

e definindo que a **diferenciação** e a **integração** são efectuadas **componente a componente**, isto é,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(u_1'(x), ..., u_n'(x)\right), \\ \int_a^b u(x)dx &= \left(\int_a^b u_1(x)dx, ..., \int_a^b u_n(x)dx\right), \end{aligned}$$

então o problema (3.1), (3.2) pode ser escrito como

$$u' = g(x,u), \quad u(x_0) = u^0, \tag{3.3}$$

de um modo semelhante a (2.1), excepto que agora $u, u' : I \to \mathbb{R}^n$, $g : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ e $u^0 = \left(u_1^0, ..., u_n^0\right)$.

A função $g(x,u)$ diz-se **contínua** em E se todas as suas funções componentes forem contínuas em E e diz-se uniformemente Lipschitziana em E se existir $L \geq 0$ (constante de Lipschitz) tal que

$$\|g(x,u) - g(x,v)\| \leq L\,\|u - v\|, \quad \forall (x,u), (x,v) \in E. \tag{3.4}$$

Como em dimensão finita todas as normas são equivalentes não é necessário precisar qual a norma utilizada. Contudo, para comodidade de algumas demonstrações, ao longo do Capítulo utilizar-se-á, salvo indicação em contrário, a norma

$$||u|| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|.$$

Uma condição suficiente para que a função $g(x,u)$ satisfaça a condição de Lipschitz é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Seja E um domínio convexo tal que, para $(x,u) \in E$, $\frac{\partial g}{\partial u_k}$, $k = 1, ..., n$, existem e $\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| \leq L$. Então a função $g(x,u)$ verifica a condição (3.4) em E com a constante de Lipschitz L.*

Dem. Sejam (x,u) e (x,v) pontos fixos em E. Como E é convexo, para qualquer $0 \leq t \leq 1$ os pontos $(x, v + t(u-v))$ estão em E. Portanto a função vectorial $G(t) = g(x, v + t(u-v))$, $0 \leq t \leq 1$, está bem definida e

$$\begin{aligned} G'(t) &= (u_1 - v_1) \frac{\partial g}{\partial u_1} (x, v + t(u-v)) + ... \\ &\quad + (u_n - v_n) \frac{\partial g}{\partial u_n} (x, v + t(u-v)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| G'(t) \right\| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_1} (x, v + t(u-v)) \right| |u_1 - v_1| + ... \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i}{\partial u_n} (x, v + t(u-v)) \right| |u_n - v_n| \\ &\leq L \left(|u_1 - v_1| + ... + |u_n - v_n| \right) = L \left\| u - v \right\|. \end{aligned}$$

A partir da relação

$$g(x,u) - g(x,v) = G(1) - G(0) = \int_0^1 G'(t) dt$$

obtem-se

$$\left\| g(x,u) - g(x,v) \right\| \leq \int_0^1 \left\| G'(t) \right\| dt \leq L \left\| u - v \right\|.$$

■

Como exemplo considere-se a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,u) = (a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2).$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u_1} &= (a_{11}, a_{21}), \quad \frac{\partial g}{\partial u_2} = (a_{12}, a_{22}), \\
\left\| \frac{\partial g}{\partial u} \right\| &= \max \{ |a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}| \} := L
\end{aligned}$$

então tem-se

$$\begin{aligned}
& \|g(x,u) - g(x,v)\| \\
= & \ |a_{11}(u_1 - v_1) + a_{12}(u_2 - v_2)| + |a_{21}(u_1 - v_1) + a_{22}(u_2 - v_2)| \\
\leq & \ (|a_{11}| + |a_{21}|) |u_1 - v_1| + (|a_{12}| + |a_{22}|) |u_2 - v_2| \\
\leq & \ \max \{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|) \\
= & \ \max \{|a_{11}| + |a_{21}|, |a_{12}| + |a_{22}|\} \|u - v\|.
\end{aligned}$$

Tal como no caso escalar, se $g(x,u)$ for uma função contínua no domínio E, então qualquer solução de (3.3) é também solução da equação integral

$$u(x) = u^0 + \int_{x_0}^{x} g(t, u(t)) dt \tag{3.5}$$

e recíprocamente.

Tal como anteriormente, pode aplicar-se o método de Picard das aproximações sucessivas para a equação (3.5). Assim, admitindo uma função contínua $u^0(x)$ como aproximação inicial, as iterações podem ser dadas por

$$u^{n+1}(x) = u^0 + \int_{x_0}^{x} g(t, u^n(t)) dt, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.6}$$

Se a sucessão $(u^n(x))$ converge uniformemente para uma função contínua $u(x)$ num intervalo I, que contém x_0, e se os pontos $(x, u(x)) \in E$, então a funcção $u(x)$ é solução de (3.5).

Exemplo 3.1.2 *Para o problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1' = x + u_2 \\ u_2' = x + u_1 \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = -1, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

considera-se $u^0 = (1, -1)$ *e obtem-se*

$$\begin{aligned}
u^1(x) &= (1,-1) + \int_0^x (t-1, t+1)\, dt = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}, -1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\
u^2(x) &= (1,-1) + \int_0^x \left(t - 1 + t + \frac{t^2}{2}, t + 1 - t + \frac{t^2}{2}\right) dt \\
&= \left(1 - x + x^2 + \frac{x^3}{3!}, -1 + x + \frac{x^3}{3!}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A sucessão $(u^n(x))$ *existe para* $x \in R$ *e converge uniformemente para*

$$u(x) = \left(-1 - x + e^x + e^{-x}, -1 - x + e^x - e^{-x}\right)$$

que é a solução do problema de valor inicial (3.7).

Os resultados de existência e unicidade de solução referidos para o caso escalar permanecem válidos, com as respectivas modificações, para problemas envolvendo sistemas, pelo que se omite nalguns casos a sua demonstração.

Teorema 3.1.3 ***(Existência local)*** *Considere-se que:*
(i) $g(x, u)$ *é contínua em*

$$\Omega = \{(x, u) : |x - x_0| \le a, \|u - u_0\| \le b\}$$

e existe $M > 0$ *tal que* $\|g(x, u)\| \le M$, $\forall (x, u) \in \Omega$;

(ii) $g(x, u)$ *verica uniformemente a condição de Lipschitz (3.4) em* Ω;

(iii) $u^0(x)$ *é uma função contínua no intervalo* $|x - x_0| \le a$ *e* $\left\|u^0(x) - u^0\right\| \le b$.

Então a sucessão $(u^n(x))$, *gerada pelas iterações de Picard (3.6) converge uniformemente para a única solução* $u(x)$ *do problema (3.3), definida no intervalo* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *com* $h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.
Além disso, é válida a seguinte estimação para o erro

$$\|u(x) - u^n(x)\| \le N\ e^{Lh} \min\left\{1, \frac{(Lh)^n}{n!}\right\}, \quad n = 0, 1, ...,$$

com $\left\|u^1(x) - u^0(x)\right\| \le N$.

Teorema 3.1.4 *(**Existência global**) Se:*
(i) *$g(x,u)$ é contínua em*

$$\Delta = \{(x,u) : |x - x_0| \leq a, \|u\| < +\infty\}\,; \tag{3.8}$$

(ii) *$g(x,u)$ verifica uniformemente a condição de Lipschitz (3.4) em Δ;*

(iii) *$u^0(x)$ é uma função contínua no intervalo $|x - x_0| \leq a$;*

então a sucessão $(u^n(x))$, gerada pelas iterações de Picard (3.6) existe no intervalo $|x - x_0| \leq a$ e converge para a única solução $u(x)$ do problema (3.3).

Corolário 3.1.5 *Se $g(x,u)$ é contínua em $\mathbb{R}^{n+1}$ e verifica uniformemente a condição de Lipschitz (3.4) em cada*

$$\Delta_a = \{(x,u) : |x| \leq a, \|u\| < +\infty\}$$

com a constante de Lipschitz L_a, então o problema (3.3) tem uma única solução, definida para $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.1.6 *(de **Peano**) Seja $g(x,u)$ uma função contínua e limitada em Δ, dado por (3.8). Então o problema (3.3) tem pelo menos uma solução em $|x - x_0| \leq a$.*

Teorema 3.1.7 *(**Prolongamento de soluções**) Se $g(x,u)$ é contínua em E e $u(x)$ é uma solução de (3.3) no intervalo I, então $u(x)$ pode ser prolongada, como solução de (3.3) até à fronteira de E.*

Corolário 3.1.8 *Suponha-se $g(x,u)$ contínua em*

$$E_+ = \left\{(x,u) \in E : x_0 \leq x < x_0 + a,\ a \in \mathbb{R}^+, \|u\| < +\infty\right\}.$$

Se $u(x)$ é solução de (3.3) então o intervalo maximal para a existência de solução $u(x)$ ou é $[x_0, x_0 + a]$ ou $[x_0, x_0 + k[$, $0 < k < a$, e $\lim\limits_{x \to x_0 + k} \|u\| = \infty$.

Teorema 3.1.9 *(**Unicidade**) Seja $f(x,y)$ uma função não negativa com $f(x,0) \equiv 0$ e definida no rectângulo $[x_0,x_0 + a] \times [0, 2b]$, tal que, para $x_1 \in\,]x_0,x_0 + a[$, o problema de valor inicial*

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = 0, \tag{3.9}$$

admite apenas a solução $y(x) \equiv 0$ no intervalo $[x_0, x_1[$.
Se $g(x,u)$ é contínua em

$$\Omega_+ := \left\{(x,u) : x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ \left\|u - u^0\right\| \leq b\right\}$$

e

$$\|g(x,u)-g(x,v)\| \leq f\left(x,\|u-v\|\right),\ \forall (x,u),(x,v)\in\Omega_+, \tag{3.10}$$

então o problema (3.3) tem, no máximo, uma solução em $[x_0, x_0+a]$.

Dem. Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas soluções arbitrárias de (3.3) em $[x_0, x_0+a]$ e defina-se $y(x)=\|u(x)-v(x)\|$. Então $y(x)=0$ e

$$\begin{aligned} D^+y(x) \quad : &= \limsup_{h\to 0^+}\frac{y\left(x+h\right)-y(x)}{h} \leq \left\|u'(x)-v'(x)\right\| \qquad (3.11) \\ &= \quad \|g(x,u(x))-g(x,v(x))\|\,. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade (3.10) em (3.11), obtem-se $D^+y(x)\leq f(x,y(x))$. Pelo Teorema 2.5.8 conclui-se que $y(x)\leq\beta(x)$ para $x\in[x_0, x_1[$, sendo $x_1\in]x_0, x_0+a[$ e $\beta(x)$ a solução maximal de (3.9). Como, por hipótese, $\beta(x)\equiv 0$ então $y(x)\equiv 0$ em $[x_0, x_1[$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.1.10 ***(Dependência contínua dos dados iniciais)*** *Suponha-se que:*

(i) *$g(x,u)$ é contínua e limitada por M num aberto E que contenha $\left(x_0,u^0\right)$ e $\left(x_1,u^1\right)$;*

(ii) *$g(x,u)$ verica uniformemente a condição de Lipschitz (3.4) em E;*

(iii) *$h(x,u)$ é contínua e limitada por M_1 em E;*

(iv) *$u(x)$ é solução de (3.3) e $v(x)$ solução de*

$$\begin{aligned} v' &= g(x,v)+h(x,v) \\ v(x_1) &= u^1, \end{aligned}$$

ambas definidas num intervalo I que contem x_0 e x_1.

Então, para $x\in I$, verifica-se que

$$\|u(x)-v(x)\| \leq \left(\left\|u^0-u^1\right\|+(M+M_1)|x_1-x_0|+\frac{M_1}{L}\right)\ e^{L|x-x_0|}-\frac{M_1}{L}.$$

Teorema 3.1.11 ***(Diferenciação em relação aos dados iniciais)*** *Se se verificarem as seguintes condições:*

(i) *$g(x,u)$ é contínua e limitada por M num aberto E que contenha $\left(x_0,u^0\right)$;*

(ii) *a matriz $\frac{\partial g}{\partial u}(x,u)$ existe, é contínua e limitada por L em E;*

(iii) *a solução $u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (3.3) existe num intervalo I que contem x_0.*

Então:
(a) *a solução $u(x, x_0, u^0)$ é diferenciável em relação a u^0 e, para $1 \leq j \leq n$, $v^j(x) = \frac{\partial u}{\partial u_j^0}(x, x_0, u^0)$ é solução do problema*

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\partial g}{\partial u}(x, u(x, x_0, u^0))\ v \\ v(x_0) &= e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0); \end{aligned} \tag{3.12}$$

(b) *a solução $u(x, x_0, u^0)$ é diferenciável em relação a x_0 e*

$$v(x) = \frac{\partial u}{\partial x_0}(x, x_0, u^0)$$

é solução do sistema de equações diferenciais (3.12), verificando a condição inicial

$$v(x_0) = -g(x_0, u^0).$$

Considere-se agora um sistema de equações diferenciais que inclua um parâmetro $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$:

$$u' = g(x, u, \lambda). \tag{3.13}$$

Se se considerar $\lambda_1, ..., \lambda_m$ como novas variáveis então admite-se que

$$\frac{d\lambda_i}{dx} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{3.14}$$

pelo que o sistema de equações (3.13), (3.14) é exactamente da forma de (3.1), mas, em vez de ter dimensão n, tem dimensão $n + m$.

Assim para o problema de valor inicial

$$u' = g(x, u, \lambda), \quad u\,(x_0) = u^0, \tag{3.15}$$

pode enunciar-se um resultado análogo ao Teorema 2.6.6 :

Teorema 3.1.12 *Se :*
(i) *$g(x, u, \lambda)$ é contínua e limitada por M num aberto $E \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ que contenha $\left(x_0, u^0, \lambda^0\right)$;*

(ii) *a matriz $\frac{\partial g}{\partial u}(x, u, \lambda)$ existe, é contínua e limitada por L em E;*

(iii) *a matriz $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, u, \lambda)$ existe, é contínua e limitada por L_1 em E;*

então:
(a) *existem números positivos h e ε tais que, para qualquer λ que verifique $||\lambda - \lambda^0|| \le \varepsilon$ existe uma única solução $u(x, \lambda)$ do problema (3.15) no intervalo $|x - x_0| \le h$;*

(b) *para qualquer λ^j tal que $||\lambda^j - \lambda^0|| \le \varepsilon$, $j = 1, 2$, e x em $|x - x_0| \le h$, verifica-se a desigualdade*

$$\left\| u(x, \lambda^1) - u(x, \lambda^2) \right\| \le \frac{L_1}{L} ||\lambda^1 - \lambda^2|| \left(e^{L|x - x_0|} - 1 \right);$$

(c) *a solução $u(x, \lambda)$ é diferenciável em relação a λ e para cada i $(1 \le i \le m)$, $v^i(x, \lambda) = \frac{\partial u}{\partial \lambda_i}(x, \lambda)$ é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} v'(x, \lambda) &= \frac{\partial g}{\partial u}(x, u(x, \lambda), \lambda) v(x, \lambda) + \frac{\partial g}{\partial \lambda_i}(x, u(x, \lambda), \lambda) \\ v(x_0, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

3.2 Sistemas lineares

Se, no sistema (3.1), a função g tiver a forma

$$g(x, u) = a_{i1}(x) u_1 + a_{i2}(x) u_2 + ... + a_{in}(x) u_n, \quad 1 \le i \le n,$$

então o **sistema** diz-se **linear** e pode escrever-se na forma matricial

$$u' = A(x) u + b(x), \tag{3.16}$$

com $A(x)$ uma matriz $n \times n$, formada pelos elementos $a_{ij}(x)$, $b(x)$ uma matriz coluna $n \times 1$ e $u(x)$ a matriz incógnita, $n \times 1$, com as componentes $u_i(x)$.

A existência e unicidade de solução para o sistema (3.16) com as condições iniciais

$$u(x_0) = u^0, \tag{3.17}$$

num intervalo I que contenha x_0, são garantidas pelo Corolário 3.1.5 desde que as funções $a_{ij}(x)$, $1 \le i, j \le n$, e $b(x)$ sejam contínuas em I, que será o caso considerado nos resultados seguintes.

O Princípio da Sobreposição, (1.44), permanece válido para o sistema (3.16). Em particular se $u(x)$ e $v(x)$ são soluções do sistema homogéneo

$$u' = A(x) u, \tag{3.18}$$

então $k_1 u(x) + k_2 v(x)$ é também uma solução, pelo que as soluções de (3.18) formam um **espaço vectorial**. Por outro lado, se $u(x)$ é solução de (3.16) então $v(x)$ é também solução de (3.16) se, e só se, $u(x) - v(x)$ é solução de (3.18). Ou seja, a solução geral de (3.16) obtem-se adicionando a uma solução particular de (3.16) a solução geral do sistema homogéneo correspondente, (3.18).

Como determinar a dimensão do espaço vectorial das soluções de (3.18)?

Para um determinado conjunto de funções, $u^1(x), ..., u^n(x)$, o determinante $W(u^1, ..., u^n)(x)$, ou apenas $W(x)$, é definido por

$$\begin{vmatrix} u_1^1(x) & ... & u_1^n(x) \\ u_2^1(x) & ... & u_2^n(x) \\ \vdots & & \\ u_n^1(x) & ... & u_n^n(x) \end{vmatrix}$$

e designa-se por **Wronskiano** das funções $u^1(x), ..., u^n(x)$.

Este determinante fornece informação sobre a dependência linear das funções envolvidas:

Teorema 3.2.1 *Se o Wronskiano das funções $u^1(x), ..., u^n(x)$ é não nulo em pelo menos um ponto de I, então as funções são linearmente independentes em I.*

Dem. Sejam $u^1(x), ..., u^n(x)$ funções linearmente dependentes em I. Então existem n constantes $c_1, ..., c_n$, não simultaneamente nulas, tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i u^i(x) = 0$ em I. Este facto é equivalente a afirmar que um sistema homogéneo formado pelas condições $\sum_{i=1}^{n} c_i u_k^i(x) = 0$, $1 \leq k \leq n$, $x \in I$, tem uma solução não trivial. Como é conhecido da Álgebra Linear, um sistema homogéneo, para cada $x \in I$, tem uma solução não trivial se, e só se, $W(x) = 0$. Por hipótese, $W(x) \neq 0$ em pelo menos um $x \in I$, então $u^1(x), ..., u^n(x)$ não podem ser linearmente dependentes em I. ■

Em geral o recíproco do teorema anterior não é válido. Por exemplo, as funções

$$u^1(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e } u^2(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes em qualquer intervalo I e $W(u^1, u^2)(x) = 0$ em I.

Contudo a implicação recíproca do Teorema 3.2.1 já é válida se $u^1(x), ..., u^n(x)$ forem soluções do sistema homogéneo (3.18):

Teorema 3.2.2 *Se $u^1(x), ..., u^n(x)$ são soluções linearmente independentes de (3.18) em I então $W(x) \neq 0$ para $x \in I$.*

Dem. Seja x_0 um ponto de I onde $W(x_0) = 0$. Então existem constantes $c_1, ..., c_n$, não simultaneamente nulas, tais que $\sum_{i=1}^{n} c_i u^i(x_0) = 0$.

Como $u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u^i(x)$ é solução de (3.18) e $u(x_0) = 0$, pela unicidade de solução tem-se $u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i u^i(x) = 0$ em I. Contudo, como as funções $u^1(x), ..., u^n(x)$ são linearmente independentes em I, tem-se $c_1 = ... = c_n = 0$, cuja contradição completa a demonstração. ■

Combinando os Teoremas 3.2.1 e 3.2.2 resulta que as soluções $u^1(x), ..., u^n(x)$ do sistema (3.18) são linearmente independentes em I se, e só se, existir $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) \neq 0$. Portanto as soluções $u^1(x), ..., u^n(x)$ de (3.18) que verifiquem as condições iniciais

$$u^i(x_0) = e^i, \quad i = 1, ..., n, \tag{3.19}$$

com e^i o $i-$ésimo vector da base canónica, são linearmente independentes em I. Logo existem n vectores linearmente independentes soluções de (3.18) em I.

Considere-se agora uma solução $u(x)$ de (3.18) em I tal que $u(x_0) = u^0$. Pela existência e unicidade de solução (Corolário 3.1.5) para o problema (3.18), (3.17) tem-se

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i^0 u^i(x), \tag{3.20}$$

com $u^i(x)$ a solução do problema (3.18), (3.19). Isto é, **o espaço vectorial de todas as soluções de (3.18) tem dimensão** n.

O próximo teorema estabelece uma relação curiosa entre o Wronskiano e a matriz A : ou $W(x)$ é identicamente nulo em I ou então nunca se anula em I.

Teorema 3.2.3 ***(Fórmula de Abel)*** *Sejam $u^1(x), ..., u^n(x)$ soluções do sistema (3.18) em I, que contem x_0. Então*

$$W(x) = W(x_0)\ e^{\int_{x_0}^{x} TrA(t)dt}. \tag{3.21}$$

Dem. A derivada do Wronskiano $W(x)$ pode ser escrita como

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} u_1^1(x) & \dots & u_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{i-1}^1(x) & \dots & u_{i-1}^n(x) \\ \left(u_i^1\right)'(x) & \dots & \left(u_i^n\right)'(x) \\ u_{i+1}^1(x) & \dots & u_{i+1}^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^1(x) & \dots & u_n^n(x) \end{vmatrix}. \tag{3.22}$$

Pelo sistema (3.18), pode-se substituir, neste determinante, $\left(u_i^j\right)'(x)$ por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)u_k^j(x)$, e efectuar operações de condensação de modo a obter

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)W(x) = (TrA(x))\,W(x). \tag{3.23}$$

Integrando a equação diferencial de primeira ordem (3.23) de x_0 a x tem-se a relação (3.21). ■

Exemplo 3.2.4 *Considere-se o sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{x^2+2x-1} & \frac{2x+2}{x^2+2x-1} \end{bmatrix} u, \quad x \neq -1 \pm \sqrt{2}.$$

As funções

$$u^1(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad u^2(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 \\ 2x \end{bmatrix}$$

são duas soluções linearmente independentes,

$$W(u^1,u^2)(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x^2+1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2+2x-1$$

e

$$e^{\int_{x_0}^{x} TrA(t)dt} = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{2t+2}{t^2+2t-1}dt} = \frac{x^2+2x-1}{x_0^2+2x_0-1}.$$

A solução (3.20) pode ser escrita na forma matricial como

$$u(x) = \Phi(x,x_0)u^0,$$

com $\Phi(x,x_0)$ uma matriz $n\times n$, cuja $i-$ésima coluna é $u^i(x)$, denominada por **matriz fundamental principal**. Esta matriz é assim **solução do problema matricial de valor inicial**

$$\Phi' = A(x)\Phi, \quad \Phi(x_0) = I_n. \tag{3.24}$$

O processo utilizado para o problema (3.16), (3.17) pode ser aplicado para provar que o problema (3.24) tem uma única solução $\Phi(x,x_0)$ no intervalo I. Por outro lado, passando à forma integral obtem-se que as iterações

$$\begin{aligned}\Phi^{m+1}(x) &= I_n + \int_{x_0}^{x} A(t)\Phi^m(t)dt, \quad m=0,1,...\\ \Phi^0(x) &= I_n\end{aligned}$$

convergem para $\Phi(x,x_0)$ e

$$\Phi(x,x_0) = I_n + \int_{x_0}^{x} A(t)dt + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} A(t)A(t_1)dt_1dt + ...$$

Se a matriz A, $n\times n$, for **constante** então a expressão anterior assume a forma

$$\begin{aligned}\Phi(x,x_0) &= I_n + A\int_{x_0}^{x} dt + A^2\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} dt_1dt + ... \qquad (3.25)\\ &= I_n + \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{[A(x-x_0)]^m}{m!} = e^{A(x-x_0)}.\end{aligned}$$

Justifica-se assim o teorema:

Teorema 3.2.5 *A matriz*

$$\Phi(x,x_0) = e^{A(x-x_0)} \tag{3.26}$$

é a matriz fundamental do sistema

$$u' = Au, \tag{3.27}$$

com A uma matriz constante.

Exemplo 3.2.6 *Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ tem-se $A^{4m+1} = A$, $A^{4m+2} = -I$, $A^{4m+3} = -A$, $A^{4m+4} = I$, para $m = 0,1,...$, pelo que a série (3.25) permite obter*

$$\begin{bmatrix} \cos(x-x_0) & sen(x-x_0)\\ -sen(x-x_0) & \cos(x-x_0)\end{bmatrix}.$$

Se as n soluções, $u^1(x), ..., u^n(x)$, do sistema (3.18), são linearmente independentes então formam um **sistema fundamental de soluções** de (3.18) e a matriz, de ordem n, $\Psi(x) = \left[u^1(x), ..., u^n(x)\right]$ designa-se por **matriz fundamental** de (3.18). Para esta matriz tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.2.7 *Se $\Psi(x)$ é a matriz fundamental do sistema (3.18) então para qualquer matriz constante, de ordem n e não singular, C, a matriz $\Psi(x)C$ é também uma matriz fundamental de (3.18). Além disso, toda a matriz fundamental de (3.18) é da forma $\Psi(x)C$, com C uma matriz de ordem n e não singular.*

Dem. Por definição, tem-se $\Psi'(x) = A(x)\Psi(x)$ pelo que $\Psi'(x)C = A(x)\Psi(x)C$, ou seja $(\Psi(x)C)' = A(x)(\Psi(x)C)$. Assim, verifica-se que $\Psi(x)$ e $\Psi(x)C$ são ambas soluções do mesmo sistema diferencial matricial $\Phi' = A(x)\Phi$. Como $\det\Psi(x) \neq 0$ e $\det C \neq 0$ então $\det(\Psi(x)C) \neq 0$ e $\Psi(x)C$ é também uma matriz fundamental solução de (3.18).

Reciprocamente, sejam $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ duas matrizes fundamentais soluções de (3.18). Se $\Psi_2^{-1}(x)\Psi_1(x) = C(x)$, isto é, $\Psi_1(x) = \Psi_2(x)C(x)$, então $\Psi_1'(x) = \Psi_2'(x)C(x) + \Psi_2(x)C'(x)$, o que é análogo a

$$A(x)\Psi_1(x) = A(x)\Psi_2(x)C(x) + \Psi_2(x)C'(x) = A(x)\Psi_1(x) + \Psi_2(x)C'(x).$$

Portanto, $\Psi_2(x)C'(x) = 0$ ou $C'(x) = 0$, caso em que $C(x)$ será uma matriz constante.

Como $\Psi_1(x)$ e $\Psi_2(x)$ são não singulares, a matriz constante C também é não singular. ■

Como consequência tem-se a relação

$$\Phi(x, x_0) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0), \tag{3.28}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial (3.18), (3.17) se pode escrever como

$$u(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)u^0.$$

Note-se que dois sistemas homogéneos diferentes não podem ter a mesma matriz fundamental, isto é, $\Psi(x)$ **determina univocamente a matriz** $A(x)$ em (3.18), através da igualdade $A(x) = \Psi'(x)\Psi^{-1}(x)$. Contudo, pelo Teorema 3.2.7, o recíproco é falso.

Derivando a igualdade $\Psi(x)\Psi^{-1}(x) = I$, obtem-se

$$\Psi'(x)\Psi^{-1}(x) + \Psi(x)\left(\Psi^{-1}(x)\right)' = 0$$

e

$$\left(\Psi^{-1}(x)\right)' = -\Psi^{-1}(x)A(x).$$

Por transposição

$$\left(\left(\Psi^{-1}(x)\right)^T\right)' = -A^T(x)\left(\Psi^{-1}(x)\right)^T,$$

pelo que $\left(\Psi^{-1}(x)\right)^T$ é uma matriz fundamental do sistema

$$u' = -A^T(x)u. \tag{3.29}$$

Ao sistema (3.29) chama-se **sistema adjunto** de (3.18).

Exercício 3.2.8 *Seja $\Phi(x, x_0)$ a matriz fundamental do sistema homogéneo (3.18) num intervalo J. Mostre que:*

a) $\Phi(x, x_0) = \Phi(x, x_1)\Phi(x_1, x_0)$, *para* $x_1 \in J$;

b) $\Phi^{-1}(x, x_0) = \Phi(x_0, x)$, $\forall x \in J$;

c) $\Phi(x, x) = I$, $\forall x \in J$.

O método da variação dos parâmetros também pode ser aplicado para encontrar soluções de sistemas não homogéneos (3.16).

Nesse sentido procura-se uma função vectorial $v(x)$ tal que $\Phi(x, x_0)v(x)$ seja solução do sistema (3.16). Derivando tem-se

$$\Phi'(x, x_0)v(x) + \Phi(x, x_0)v'(x) = A(x)\Phi(x, x_0)v(x) + b(x)$$

e

$$\Phi(x, x_0)v'(x) = b(x).$$

Pelo Exercício 3.2.8, obtem-se

$$v'(x) = \Phi^{-1}(x, x_0)b(x) = \Phi(x_0, x)b(x),$$

pelo que $v(x)$ pode ser obtida por

$$v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Phi(x_0, t)b(t)dt.$$

Como $u(x_0) = \Phi(x_0, x_0)v(x_0) = v(x_0)$, a solução do problema de valor inicial (3.16) será da forma

$$u(x) = \Phi(x, x_0)u^0 + \Phi(x, x_0)\int_{x_0}^{x} \Phi(x_0, t)b(t)dt$$

e, pelo Exercício 3.2.8,

$$u(x) = \Phi(x, x_0)u^0 + \int_{x_0}^{x} \Phi(x, t)b(t)dt. \tag{3.30}$$

Escrevendo a solução de (3.16) em termos da matriz fundamental tem-se, por (3.28),

$$u(x) = \Psi(x)c + \int_{x_0}^{x} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)b(t)dt, \tag{3.31}$$

com $c = \Psi^{-1}(x_0)u^0$.

No caso em que $A(x)$ é uma matriz constante substitui-se (3.26) em (3.30) e obtem-se

$$u(x) = e^{A(x-x_0)}u^0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}b(t)dt. \tag{3.32}$$

Exemplo 3.2.9 *Considere-se o sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Para o correspondente sistema homogéneo verifica-se que a a matriz fundamental principal é

$$\Phi(x, 0) = \begin{bmatrix} 2e^x - e^{2x} & -e^x + e^{2x} \\ 2e^x - 2e^{2x} & -e^x + 2e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então a solução de (3.33) que verifique a condição $u(0) = u^0$ é dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^0 \\ &\quad + \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \int_0^x \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u^0 + (e^x - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.3 Sistemas com coeficientes constantes

A técnica utilizada anteriormente para obter, de modo explícito, soluções de sistemas homogéneos e/ou completos tem uma utilidade muito restrita pelo facto de envolver cálculos, por vezes, pouco "práticos". Este processo pode ser facilitado com o recurso aos valores e vectores próprios da matriz A, no caso em que esta é constante.

Teorema 3.3.1 *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ valores próprios da matriz A e $v^1, ..., v^n$ os correspondentes vectores próprios. Então*

$$u^1(x) = v^1 e^{\lambda_1 x}, ..., u^n(x) = v^n e^{\lambda_n x} \tag{3.34}$$

é um conjunto fundamental de soluções de (3.27).

Dem. Como v^i é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ_i, tem-se

$$\left(u^i(x)\right)' = \left(v^i e^{\lambda_i x}\right)' = \lambda_i v^i e^{\lambda_i x} = A v^i e^{\lambda_i x} = A u^i(x),$$

pelo que $u^i(x)$ é solução de (3.27). Para provar que (3.34) é um conjunto fundamental de soluções, salienta-se que $W(0) = \det\left[v^1, ..., v^n\right] \neq 0$, pois $v^1, ..., v^n$ são linearmente independentes. Então o resultado pretentido resulta do Teorema 3.2.1. ■

Pelo teorema anterior tem-se

$$e^{Ax} = \left[v^1 e^{\lambda_1 x}, ..., v^n e^{\lambda_n x}\right] \left[v^1, ..., v^n\right]^{-1},$$

pelo que a solução geral de (3.27) terá a forma $u(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i e^{\lambda_i x}$.

Exemplo 3.3.2 *A solução geral do sistema*

$$u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} u$$

é

$$u(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4x}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Quando a matriz A tem apenas $k < n$ valores próprios distintos então o cálculo de e^{Ax} não é fácil. Um método possível é dado pelos próximos resultados.

Teorema 3.3.3 ***(Cayley-Hamilton)*** *Se A é uma matriz $n \times n$ com $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ então $p(A) = 0$.*

Teorema 3.3.4 ***(Algoritmo de Putzer)*** *Considerem-se $\lambda_1, ..., \lambda_n$, valores próprios (não necessariamente distintos) da matriz A. Então*

$$e^{Ax} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j \tag{3.35}$$

com $P_0 = I$, $P_j = \prod_{k=1}^{j} (A - \lambda_k I)$, $j = 1, ..., n-1$, e $r_1(x), ..., r_n(x)$ são dados, por recorrência, pelas equações diferenciais

$$\begin{aligned} r_1'(x) &= \lambda_1 r_1(x), \quad r_1(0) = 1 \\ r_j'(x) &= \lambda_j r_j(x) + r_{j-1}(x), \quad r_j(0) = 0, \quad j = 2, ..., n. \end{aligned}$$

(Note-se que cada valor próprio na lista $\lambda_1, ..., \lambda_n$ está repetido de acordo com a sua multiplicidade.)

Dem. Bastará provar que $\Phi(x)$ dada por $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j$ verifica $\Phi' = A\Phi$, $\Phi(0) = I$. Para tal, define-se $r_0(x) \equiv 0$ e obtem-se

$$\begin{aligned} \Phi'(x) - \lambda_n \Phi(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\lambda_{j+1} r_{j+1}(x) + r_j(x)\right] P_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(x) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) P_j + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(x) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) r_{j+1}(x) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(x) P_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left[(\lambda_{j+1} - \lambda_n) P_j + (A - \lambda_{j+1} I) P_j\right] r_{j+1}(x) \quad (3.36) \\ &= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(x) P_j \\ &= (A - \lambda_n I) (\Phi(x) - r_n(x) P_{n-1}) \\ &= (A - \lambda_n I) \Phi(x) - r_n(x) P_n, \quad (3.37) \end{aligned}$$

em que para obter (3.36) e (3.37) se utilizou $P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1} I) P_j$ e $P_n = (A - \lambda_n I) P_{n-1}$, respectivamente. Pelo Teorema 3.3.3, $P_n = p(A) = 0$ e (3.37) reduz-se a $\Phi'(x) = A\Phi(x)$.

Finalmente, tem-se

$$\Phi(0) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(0) P_j = r_1(0) = I = I.$$

■

Exemplo 3.3.5 *Suponha-se uma matriz A de ordem 3 que admite um valor próprio λ_1, de multiplicidade três. No Teorema anterior tem-se $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1$ e $r_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $r_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$, $r_3(x) = \frac{x^2}{2} e^{\lambda_1 x}$ são as soluções do sistema*

$$\begin{aligned} r_1' &= \lambda_1 r_1, \quad r_1(0) = 1, \\ r_2' &= \lambda_1 r_2 + r_1, \quad r_2(0) = 0, \\ r_3' &= \lambda_1 r_3 + r_2, \quad r_3(0) = 0. \end{aligned}$$

Assim tem-se

$$e^{Ax} = e^{\lambda_1 x} \left[I + x (A - \lambda_1 I) + \frac{x^2}{2} (A - \lambda_1 I)^2 \right].$$

No caso particular da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

em que todos os valores próprios são iguais a -1 tem-se

$$e^{Ax} = \frac{1}{2} e^{-x} \begin{bmatrix} 2 + 6x - 3x^2 & 2x & -2x + x^2 \\ -6x & 2 & 2x \\ 18x - 9x^2 & 6x & 2 - 6x + 3x^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3.6 *Seja A uma matriz de ordem 3 com dois valores próprios sendo um de multiplicidade dois: $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$. Como $r_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $r_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ e*

$$r_3(x) = \frac{xe^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

obtem-se

$$e^{Ax} = e^{\lambda_1 x} \left[I + x (A - \lambda_1 I) + \left(\frac{x}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} - 1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) (A - \lambda_1 I)^2 \right].$$

Para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com os valores próprios $-1, -1, 1$, *tem-se*

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 & 2\left(e^{x} - e^{-x}\right) \\ 0 & e^{-x} & e^{x} - e^{-x} \\ 0 & 0 & e^{x} \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.3.7 *Mostre que para cada matriz A se obtem a matriz exponencial indicada:*

(a) *Se* $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ *então* $e^{Ax} = e^{\alpha x}\begin{bmatrix} \cos\beta x & sen\beta x \\ -sen\beta x & \cos\beta x \end{bmatrix}$.

(b) *Para* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{bmatrix}$, *com* $|\delta| < 1$, *tem-se*

$$e^{Ax} = \begin{bmatrix} e^{-\delta x}\left(\cos\omega x + \frac{\delta}{\omega} sen\omega x\right) & \frac{1}{\omega} e^{-\delta x} sen\omega x \\ \\ -\frac{1}{\omega} e^{-\delta x} sen\omega x & e^{-\delta x}\left(\cos\omega x - \frac{\delta}{\omega} sen\omega x\right) \end{bmatrix},$$

sendo $\omega = \sqrt{1 - \delta^2}$.

Exercício 3.3.8 *Seja* $u(x)$ *uma solução do sistema diferencial (3.27). Justifique que a parte real e a parte imaginária de* $u(x)$ *são soluções de (3.27).*

Exercício 3.3.9 *Prove que*

(i) *Toda a solução de (3.27) tende para zero quando* $x \to +\infty$ *se e só se as partes reais dos valores próprios de A são negativas.*

(ii) *Toda a solução de (3.27) é limitada em* $[0, +\infty[$ *se e só se as partes reais dos valores próprios de A com multiplicidade superior a* 1 *são negativas e as partes reais dos valores próprios simples de A são não positivas.*

3.4 Sistemas periódicos lineares

A periodicidade das soluções de um sistema de equações diferenciais é um aspecto interessante e importante para o seu estudo qualitativo. Designando por $\omega > 0$ o período positivo mínimo, se cada componente $u_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, de $u(x)$ e cada elemento $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, de $A(x)$, são funções periódicas de período ω, então $u(x)$ e $A(x)$ dizem-se **periódicas** de período ω.

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para que o sistema diferencial (3.16) tenha soluções periódicas de período ω :

Teorema 3.4.1 *Considere-se a matriz $A(x)$ e a função $b(x)$ contínuas e periódicas, de período ω, em $\mathbb{R}$. Então o sistema (3.16) tem uma solução periódica $u(x)$ de período ω se e só se $u(0) = u(\omega)$.*

Dem. Seja $u(x)$ uma solução periódica de período ω. Então é necessário que $u(0) = u(\omega)$.

Para a condição suficiente, considere-se $u(x)$ uma solução de (3.16) tal que $u(0) = u(\omega)$. Se $v(x) = u(x + \omega)$, então

$$v'(x) = u'(x + \omega) = A(x + \omega)u(x + \omega) + b(x + \omega),$$

isto é, $v(x)$ é solução de (3.16). Como $v(0) = u(\omega) = u(0)$, a unicidade do problema de valor inicial implica que $u(x) = v(x) = u(x + \omega)$ e, portanto, $u(x)$ é periódica de período ω. ■

Corolário 3.4.2 *Se $A(x)$ é uma matriz contínua e periódica em $\mathbb{R}$, de período ω, e $\Psi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema homogéneo (3.18) então o sistema (3.18) tem uma solução periódica não trivial $u(x)$ de período ω se e só se* $\det(\Psi(0) - \Psi(\omega)) = 0$.

Dem. A solução geral do sistema diferencial (3.18) é, como já foi referido anteriormente, $u(x) = \Psi(x)C$, com C um vector constante arbitrário. Esta solução $u(x)$ é periódica de período ω se e só se $\Psi(0)C = \Psi(\omega)C$, isto é, o sistema $[\Psi(0) - \Psi(\omega)]\, C = 0$ tem uma solução não trivial C. Contudo este sistema tem uma solução não trivial se e só se $\det[\Psi(0) - \Psi(\omega)] = 0$. ■

Corolário 3.4.3 *O sistema diferencial (3.26) tem uma solução periódica não trivial $u(x)$ de período ω se, e só se, a matriz $\left(I - e^{A\omega}\right)$ é singular.*

Corolário 3.4.4 *Nas hipóteses do Teorema 3.4.1, o sistema (3.16) tem uma única solução periódica de período ω se, e só se, o sistema homogéneo (3.18) admite unicamente, como solução periódica de período ω, a solução trivial.*

Dem. Considere-se $\Psi(x)$, uma matriz fundamental do sistema (3.18). Então por (3.31), a solução geral de (3.16) pode escrever-se na forma

$$u(x) = \Psi(x)C + \int_0^x \Psi(x)\Psi^{-1}(t)b(t)dt,$$

com C uma constante arbitrária. Esta função $u(x)$ é periódica de período ω se e só se

$$\Psi(0)C = \Psi(\omega)C + \int_0^\omega \Psi(\omega)\Psi^{-1}(t)b(t)dt,$$

ou seja, o sistema

$$\left[\Psi(0) - \Psi(\omega)\right] C = \int_0^\omega \Psi(\omega)\Psi^{-1}(t)b(t)dt$$

tem uma única solução vectorial C. Mas este sistema tem uma única solução se, e só se, $\det\left[\Psi(0) - \Psi(\omega)\right] \neq 0$, pelo que a conclusão pretendida resulta do Corolário 3.4.2. ■

Quando as condições do Corolário 3.4.2 se verificam, a matriz fundamental $\Psi(x)$ pode ser escrita como um produto entre uma matriz periódica de período ω e uma matriz fundamental dum sistema diferencial com coeficientes constantes. Para tal utiliza-se a matriz logaritmo:

Teorema 3.4.5 *Seja A uma matriz quadrada não singular de ordem n. Então existe uma matriz B, matriz quadrada de ordem n, (designada por* ***logaritmo de*** *A) tal que $A = e^B$.*

Teorema 3.4.6 ***(de Floquet)*** *Nas condições do Corolário 3.4.2 são válidas as proposições:*

(i) *A matriz $\chi(x) := \Psi(x+\omega)$ é também uma matriz fundamental do sistema homogéneo (3.18);*

(ii) *Existe uma matriz periódica singular $P(x)$, de período ω, e uma matriz constante R tais que*

$$\Psi(x) = P(x)\ e^{Rx}.$$

Dem. Como $\Psi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema diferencial homogéneo (3.18), tem-se

$$\chi'(x) = \Psi'(x+\omega) = A(x+\omega)\Psi(x+\omega) = A(x)\chi(x),$$

isto é, $\chi(x)$ é uma matriz solução do sistema homogéneo (3.18). Por outro lado, como $\det\left(\Psi(x+\omega)\right) \neq 0$ para todo o x, tem-se $\det\left(\chi(x)\right) \neq 0$ para qualquer x. Portanto, conclui-se que $\chi(x)$ é uma matriz fundamental do sistema (3.18), o que completa a demonstração da parte **(i).**

Para provar a parte **(ii)**, como $\Psi(x)$ e $\Psi(x+\omega)$ são ambas matrizes fundamentais do sistema (3.18), pelo Teorema 3.2.7, existe uma matriz constante e não singular C tal que

$$\Psi(x+\omega) = \Psi(x)C. \tag{3.38}$$

Pelo Teorema 3.4.5 existe uma matriz constante R tal que $C = e^{R\omega}$ e, por (3.38), obtem-se

$$\Psi(x+\omega) = \Psi(x)e^{R\omega}. \tag{3.39}$$

Defina-se agora a matriz $P(x)$ por

$$P(x) = \Psi(x)e^{-Rx}. \tag{3.40}$$

Por (3.39), tem-se

$$P(x+\omega) = \Psi(x+\omega)e^{-R(x+\omega)} = \Psi(x)e^{R\omega}e^{-R(x+\omega)} = \Psi(x)e^{-Rx} = P(x).$$

Portanto, $P(x)$ é periódica com período ω, e como $\Psi(x)$ e e^{-Rx} são matrizes não singulares então $\det P(x) \neq 0$ em $\mathbb{R}$. ■

3.5 Comportamento assimptótico das soluções de sistemas lineares

Nesta seccção apresentam-se algumas condições a exigir aos dados conhecidos num sistema, de modo a que seja possível garantir que todas as suas soluções permaneçam limitadas ou tendam para zero quando $x \to \infty$. Esta propriedade torna-se particularmente útil já que será feita sem necessitar da forma explícita da solução.

O Exercício 3.3.9 já fornece condições necessárias e suficientes para que todas as soluções de (3.27), $u' = Au$, sejam limitadas ou tendam para zero.

Por outro lado, se, no Teorema 3.3.4, se designar cada $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha := \max\limits_{1\leq j\leq n} \alpha_j$ e $r := \max\limits_{1\leq j\leq n} r_j$ então existe $x_1 \geq x_0 \geq 0$ tal que para $x \geq x_1$ a relação (3.35) garante que

$$\left\|e^{Ax}\right\| \leq c\, e^{\alpha x}x^r,$$

com c uma determinada constante. Considerando $\alpha < \eta$ então existe $x_2 \geq x_1$ tal que para $x \geq x_2$ se verifica $e^{\alpha x}x^r \leq e^{\eta x}$. Logo, para $x \geq x_2$, obtem-se

$$\left\|e^{Ax}\right\| \leq c\, e^{\eta x}. \tag{3.41}$$

Como o intervalo $[0, x_2]$ é finito, pode-se considerar em (3.41) c suficientemente grande de modo a que a desigualdade se verifique para qualquer $x \geq 0$. Assim qualquer solução $u(x)$ de (3.27) satisfaz a desigualdade

$$\|u(x)\| \leq c_1\, e^{\eta x},$$

para uma certa constante c_1.

Considere-se o sistema (3.27) perturbado na forma

$$v' = (A + B(x))\,v, \tag{3.42}$$

com $B(x)$ uma matriz de ordem n com os elementos $b_{ij}(x)$ contínuos, $1 \leq i, j \leq n$, em $[0, +\infty[$.

O primeiro resultado fornece uma condição suficiente para $B(x)$ de modo a que todas as soluções de (3.42) permaneçam limitadas desde que as soluções de (3.27) sejam limitadas:

Teorema 3.5.1 *Se todas as soluções de (3.27) são limitadas em* $[0, +\infty[$ *e*

$$\int_0^{+\infty} ||B(t)||dt < +\infty \tag{3.43}$$

então todas as soluções de (3.42) são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

Dem. Na expressão (3.32), considere-se o termo não homogéneo $b(x)$ na forma $B(x)v$, de modo a que cada solução $v(x)$, com $v(x_0) = v^0$, do sistema diferencial (3.42) verifique a equação integral

$$v(x) = e^{A(x-x_0)}v^0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(t-x_0)}B(t)v(t)dt. \tag{3.44}$$

Como todas as soluções de (3.27) são limitadas, existe uma constante c tal que $\sup\limits_{x\geq 0} \left\| e^{Ax} \right\| = c$. Assim, para $x \geq 0$, tem-se

$$\|v(x)\| \leq c \left\| v^0 \right\| + c \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| \, \|v(t)\| \, dt. \tag{3.45}$$

Aplicando o Corolário 2.1.7 à desigualdade (3.45) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c \left\| v^0 \right\| e^{c \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| dt},$$

para $x \geq 0$. Pelo que o resultado pretendido é consequência de (3.43). ■

A condição (3.43) exigue uma "limitação uniforme" sobre $B(x)$ que pode ser ultrapassada do seguinte modo:

Teorema 3.5.2 *Se todas as soluções de (3.27) tendem para* 0 *quando* $x \to +\infty$ *e*

$$||B(x)|| \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty, \tag{3.46}$$

então todas as soluções de (3.42) tendem para 0 *quando* $x \to +\infty$.

Dem. Como todas as soluções de (3.27) tendem para 0 quando $x \to +\infty$, o Exercício 3.3.9 garante que todos os valores próprios de A têm a parte real negativa. Assim, existem constantes c e $\eta = -\delta$ $(\delta > 0)$ tais que (3.41) é verificada, isto é, $\left\| e^{Ax} \right\| \leq c\, e^{-\delta x}$, para todo $x \geq 0$.

Por (3.46), dada uma constante $c_1 > 0$, existe $x_1 \geq x_0$ suficientemente grande tal que $||B(x)|| \leq c_1$ para $x \geq x_1$. Pela equação (3.44), para $x \geq x_1$, tem-se

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq ce^{-\delta(x-x_0)} \left\| v^0 \right\| + \int_{x_0}^{x_1} ce^{-\delta(x-t)} \|B(t)\| \, \|v(t)\| \, dt \\ &\quad + \int_{x_1}^{x} ce^{-\delta(x-t)} c_1 \|v(t)\| \, dt, \end{aligned}$$

o que é o mesmo que

$$w(x) \leq c_0 + c_2 \int_{x_1}^{x} w(t)dt, \tag{3.47}$$

com $w(x) = \|v(x)\| \, e^{\delta x}$,

$$c_0 = ce^{\delta x_0} \left\| v^0 \right\| + c \int_{x_0}^{x_1} e^{\delta t} \|B(t)\| \, \|v(t)\| \, dt$$

e $c_2 = c\, c_1$.

Aplicando agora o Corolário 2.1.7 à desigualdade (3.47) obtem-se

$$w(x) \leq c_0 \; e^{c_2(x-x_1)},$$

pelo que

$$\|v(x)\| \leq c_0 \; e^{(c_2-\delta)x - c_2 x_1}. \tag{3.48}$$

Finalmente, por (3.46) pode escolher-se c_1 suficientemente pequeno, de modo a que $c_2 = c\, c_1 < \delta$ e o resultado pretendido resulta de (3.48). ■

Embora ambas as condições (3.43) e (3.46) coloquem restrições à "grandeza" de $B(x)$ quando $x \to +\infty$, a primeira é mais forte que a segunda. Contudo, no Teorema 3.5.1, a condição (3.43) não pode ser substituida por (3.46), como se verifica no exemplo seguinte:

Exemplo 3.5.3 *Considerem-se os sistemas*

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

e

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a}{ax+b} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \tag{3.50}$$

com a e b constantes positivas.
Um sistema fundamental de soluções de (3.49) é dado por

$$\{(\cos x, \ -senx), (senx, \ \cos x)\},$$

pelo que todas as soluções de (3.49) são limitadas. Contudo um sistema fundamental de soluções de (3.50) é

$$\begin{bmatrix} a \ senx - (ax+b)\cos x \\ (ax+b)senx \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} a \ \cos x + (ax+b)senx \\ (ax+b)\cos x \end{bmatrix},$$

pelo que todas as soluções não triviais de (3.50) são não limitadas quando $x \to +\infty$.
Note-se ainda que $||B(x)|| \to 0$ quando $x \to +\infty$ e

$$\int_0^x ||B(t)||dt = \int_0^x \frac{2a}{at+b}dt = \ln\left(\frac{ax+b}{2a}\right)^2 \to +\infty$$

quando $x \to +\infty$.

Estude-se agora o problema

$$v' = Av + b(x), \tag{3.51}$$

com $b(x)$ uma matriz coluna com n componentes contínuos $b_i(x)$, $1 \le i \le n$, no intervalo $[x_0, +\infty[$. Tal como anteriormente, este sistema pode ser considerado como uma perturbação de (3.27), sendo o termo perturbante $b(x)$. Por (3.32), cada solução $v(x)$ do sistema (3.51), com $v(x_0) = v^0$, verifica a equação integral

$$v(x) = e^{A(x-x_0)}v^0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)}b(t)dt.$$

Então, para qualquer $x \ge x_0$ a desigualdade (3.41) permite obter

$$\|v(x)\| \le c_0 e^{\eta x} + c\int_{x_0}^x e^{\eta(x-t)}\|b(t)\|\,dt, \tag{3.52}$$

com $c_0 = ce^{-\eta x_0}\left\|v^0\right\|$, o que conduz ao seguinte resultado:

Teorema 3.5.4 *Considere-se que a função $b(x)$ verifica*

$$\|b(x)\| \leq c_3 e^{\nu x}, \tag{3.53}$$

para x suficientemente grande, $c_3 \geq 0$ e ν constantes. Então toda a solução $v(x)$ do sistema (3.51) satisfaz

$$\|v(x)\| \leq c_4 e^{\zeta x}, \tag{3.54}$$

para $x \geq x_0$, $c_4 \geq 0$ e ζ constantes.

Dem. A hipótese sobre $b(x)$, garante a existência de $x_1 \geq x_0$ tal que (3.53) se verifica para $x \geq x_1$. Portanto, por (3.52), se $\nu \neq \eta$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|v(x)\| &\leq e^{\eta x}\left[c_0 + c\int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t}\|b(t)\|\,dt + cc_3\int_{x_1}^{x} e^{(\nu-\eta)t}dt\right] \\
&= e^{\eta x}\left[c_0 + c\int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t}\|b(t)\|\,dt + \frac{cc_3}{\nu-\eta}\left(e^{(\nu-\eta)x} - e^{(\nu-\eta)x_1}\right)\right] \\
&\leq e^{\eta x}\left[c_0 + c\int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t}\|b(t)\|\,dt + \frac{cc_3}{|\nu-\eta|}e^{(\nu-\eta)x_1}\right] + \frac{cc_3}{|\nu-\eta|}e^{\nu x} \\
&\leq c_4 e^{\zeta x},
\end{aligned}$$

sendo $\zeta = \max\{\eta, \nu\}$ e

$$c_4 = c_0 + c\int_{x_0}^{x_1} e^{-\eta t}\|b(t)\|\,dt + \frac{cc_3}{|\nu-\eta|}\left(e^{(\nu-\eta)x_1} + 1\right).$$

No caso em que $\nu = \eta$ o processo é análogo com as modificações óbvias. ■

Repare-se que no caso em que $\zeta < 0$, por (3.54), toda a solução do sistema (3.51) tende para zero quando $x \to +\infty$.

Veja-se agora o comportamento das soluções do sistema (3.18) quando $x \to +\infty$.

Em primeiro lugar consideram-se resultados que envolvem os valores próprios da matriz $\left(A(x) + A^T(x)\right)$, os quais são funções de x.

Teorema 3.5.5 *Sejam $A(x)$ uma matriz contínua em $[x_0, +\infty[$ e $M(x)$ o maior valor próprio da matriz $\left(A(x) + A^T(x)\right)$ tal que*

$$\int_0^{+\infty} M(t)dt = -\infty. \tag{3.55}$$

Então toda a solução do sistema diferencial (3.18) tende para zero quando $x \to +\infty$.

Dem. Considere-se uma solução $u(x)$ do sistema diferencial (3.18). Então $|u(x)|^2 = u^T(x)u(x)$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|u(x)|^2 &= \left(u^T(x)\right)' u(x) + u^T(x)u'(x) \\ &= u^T(x)A^T(x)u(x) + u^T(x)A(x)u(x) \\ &= u^T(x)\left[A^T(x) + A(x)\right]u(x). \end{aligned}$$

Como a matriz $\left[A^T(x) + A(x)\right]$ é simétrica e $M(x)$ é o seu o maior valor próprio, então

$$u^T(x)\left[A^T(x) + A(x)\right]u(x) \leq M(x)\,|u(x)|^2 .$$

Portanto, para todo $x \geq x_0$ tem-se

$$0 \leq |u(x)|^2 \leq |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^{x} M(t)\,|u(t)|^2\,dt.$$

Utilizando o Corolário 2.1.7, obtem-se

$$|u(x)|^2 \leq |u(x_0)|^2\, e^{\int_{x_0}^{x} M(t)dt} \tag{3.56}$$

e a conclusão é imediata, por (3.55). ■

Se no Teorema 3.5.5 a condição (3.55) for substituida por

$$\int_0^{+\infty} M(t)dt < +\infty,$$

então a solução $u(x)$ do sistema (3.18) permanece limitada quando $x \to +\infty$.

Teorema 3.5.6 *Sejam $A(x)$ uma matriz contínua em $[x_0, +\infty[$ e $m(x)$ o menor valor próprio da matriz $\left(A(x) + A^T(x)\right)$ tal que*

$$\limsup_{x\to+\infty} \int_0^{x} m(t)dt = +\infty. \tag{3.57}$$

Então toda a solução de (3.18) é ilimitada.

Dem. Seguindo o processo da demonstração do Teorema 3.5.5, tem-se, para $x \geq x_0$,

$$|u(x)|^2 \geq |u(x_0)|^2 + \int_{x_0}^{x} m(t)\,|u(t)|^2\,dt,$$

o que implica

$$|u(x)|^2 \geq |u(x_0)|^2\, e^{\int_{x_0}^{x} m(t)dt},$$

obtendo-se o resultado pretendido por (3.57). ■

Exemplo 3.5.7 *Para a matriz* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x)^2} & x^2 \\ -x^2 & -1 \end{bmatrix}$ *tem-se*

$$A(x)+A^T(x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{(1+x)^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \ M(x) = \frac{2}{(1+x)^2} \ e \ \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^2} dt = 2.$$

Então todas as soluções do sistema diferencial $u' = A(x)u$ *permanecem limitadas quando* $x \to +\infty$.

Exemplo 3.5.8 *Se* $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+x} & 1+x^2 \\ -1-x^2 & -2 \end{bmatrix}$ *tem-se*

$$A(x)+A^T(x) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+x} & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \ M(x) = -\frac{2}{1+x} \ e \ \int_0^{+\infty} -\frac{2}{1+t} dt = -\infty.$$

Então todas as soluções do sistema diferencial $u' = A(x)u$ *tendem para zero quando* $x \to +\infty$.

Ainda relacionado com (3.18) considere-se o sistema perturbado

$$v' = (A(x) + B(x))\, v, \tag{3.58}$$

com $B(x)$ uma matriz de ordem n com elementos contínuos $b_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ no intervalo $[x_0, +\infty[$.

Um primeiro resultado mostra que **a limitação de todas as soluções de (3.18) e (3.43) não garante a limitação das soluções do sistema (3.58)**, ou seja, quando a matriz A é uma função de x então não se verifica necessariamente a conclusão do Teorema 3.5.1.

Exemplo 3.5.9 *Considere-se o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{aligned} u_1' &= -a\ u_1 \\ u_2' &= (sen\,(\ln x) + \cos\,(\ln x) - 2a)\ \ u_2, \end{aligned} \tag{3.59}$$

com $1 < 2a < 1 + \frac{e^{-\pi}}{2}$, *cuja solução geral é dada por*

$$\begin{aligned} u_1(x) &= c_1 e^{-ax} \\ u_2(x) &= c_2 e^{(sen(\ln x) - 2a)x}. \end{aligned}$$

Como $a > \frac{1}{2}$, *toda a solução de (3.59) tende para zero quando* $x \to +\infty$. *No sistema perturbado*

$$\begin{aligned} v_1' &= -a\ v_1 \\ v_2' &= (sen\,(\ln x) + \cos\,(\ln x) - 2a)\ \ v_2 + e^{-ax} v_1, \end{aligned}$$

tem-se como matriz perturbante $B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-ax} & 0 \end{bmatrix}$, *com* $\int_0^{+\infty} ||B(t)||dt < +\infty$, *sendo a sua solução geral dada por*

$$\begin{aligned} v_1(x) &= c_1 e^{-ax} \\ v_2(x) &= e^{(sen(\ln x)-2a)x}\left(c_2 + c_1\int_0^x e^{-t\ sen(\ln t)}dt\right). \end{aligned}$$

Definindo $x = x_n = e^{\frac{2n+1}{2}\pi}$, $n = 1, 2, ...,$ *obtem-se*

$$sen\,(\ln x_n) = 1e - sen\,(\ln t) \geq \frac{1}{2}$$

para qualquer t *que satisfaça*

$$e^{\frac{2n-1}{2}\pi} \leq t \leq e^{\frac{2n-1}{6}\pi},$$

isto é, $x_n e^{-\pi} \leq t \leq x_n e^{-\frac{2\pi}{3}}$. *Portanto*

$$\begin{aligned} \int_0^{x_n} e^{-t\ sen(\ln t)}dt &> \int_{e^{\frac{2n-1}{2}\pi}}^{e^{\frac{2n-1}{6}\pi}} e^{-t\ sen(\ln t)}dt \geq \int_{x_n e^{-\pi}}^{x_n e^{-\frac{2\pi}{3}}} e^{\frac{t}{2}}\ dt \\ &> e^{\frac{1}{2}x_n e^{-\pi}}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi}\right)x_n \end{aligned}$$

e, para $c_1 > 0$, *obtem-se*

$$v_2(x_n) > e^{(1-2a)x_n}\left(c_2 + c_1 x_n\left(e^{-\frac{2\pi}{3}} - e^{-\pi}\right)e^{\frac{1}{2}x_n e^{-\pi}}\right).$$

Para $c_1 < 0$ *a desigualdade é inversa. Como* $2a < 1 + \frac{e^{-\pi}}{2}$, *verifica-se que* $v_2(x_n) \to +\infty$ $(-\infty)$ *pelo que* $v_2(x_n)$ *permanece limitada somente para* $c_1 = 0$.

Este exemplo revela que, para os sistemas (3.18) e (3.58), o Teorema 3.5.2 não é válido se se substituir a condição (3.46) por (3.43). Para obter resultados semelhantes é necessário exigir mais condições a $A(x)$.

Teorema 3.5.10 *Admita-se que todas as soluções do sistema de equações diferenciais (3.18) são limitadas em* $[x_0 + \infty[$ *e que a condição (3.43) se verifica. Então todas as soluções de (3.58) são limitadas em* $[x_0 + \infty[$ *desde que*

$$\liminf_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} Tr\ A(t)dt > -\infty \quad ou \quad Tr\ A(x) = 0. \tag{3.60}$$

Dem. Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental de (3.18) Como todas as soluções do sistema (3.18) são limitadas então $\|\Psi(x)\|$ também é limitada.

Pelo Teorema 3.2.3, tem-se

$$\det \Psi(x) = \det \Psi(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} TrA(t)dt}$$

e

$$\Psi^{-1}(x) = \frac{adj\,\Psi(x)}{\det \Psi(x)} = \frac{adj\,\Psi(x)}{\det \Psi(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} TrA(t)dt}}. \tag{3.61}$$

Então, por (3.60), $\left\|\Psi^{-1}(x)\right\|$ é limitada.

Considerando agora, em (3.31), o termo não homogéneo $b(x)$ na forma $B(x)v$, de modo a que cada solução $v(x)$ do sistema diferencial (3.58), com $v(x_0) = v^0$, verifica a equação integral

$$v(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0 + \int_{x_0}^{x} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt. \tag{3.62}$$

Definindo

$$c := \max \left\{ \sup_{x \geq x_0} \|\Psi(x)\|, \sup_{x \geq x_0} \left\|\Psi^{-1}(x)\right\| \right\} \tag{3.63}$$

obtem-se

$$\|v(x)\| \leq c_0 + c^2 \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| \|v(t)\| dt,$$

com $c_0 = c\left\|\Psi^{-1}(x_0)v^0\right\|$. Esta desigualdade implica que

$$\|v(x)\| \leq c_0 \; e^{c^2 \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| dt}.$$

Por (3.43) tem-se a conclusão pretendida. ■

Teorema 3.5.11 *Seja $\Psi(x)$ a matriz fundamental de (3.18) tal que*

$$\left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(t)\right\| \leq c, \quad x_0 \leq t \leq x < +\infty, \tag{3.64}$$

com c uma constante positiva, e suponha-se que a condição (3.43) se verifica. Então:

(i) *Todas as soluções de (3.58) são limitadas em $[x_0 + \infty[$.*

(ii) *Se todas as soluções de (3.18) tendem para zero quando $x \to +\infty$, o mesmo acontece para todas as soluções de (3.58).*

Dem. Utilizando (3.64) em (3.62) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c\left\|v^0\right\| + c\int_{x_0}^{x} \|B(t)\| \, \|v(t)\| \, dt$$

e, portanto,

$$\|v(x)\| \leq c\left\|v^0\right\| e^{c\int_{x_0}^{+\infty}\|B(t)\|dt} := M < +\infty.$$

Então cada solução do sistema diferencial (3.58) é limitada em $[x_0 + \infty[$.

A igualdade (3.62) é análoga a

$$\begin{aligned} v(x) &= \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0 + \int_{x_0}^{x_1} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt \\ &\quad + \int_{x1}^{x} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)B(t)v(t)dt \end{aligned}$$

e conclui-se que

$$\begin{aligned} \|v(x)\| &\leq \|\Psi(x)\| \left\|\Psi^{-1}(x_0)\right\| \left\|v^0\right\| + \|\Psi(x)\| \int_{x_0}^{x_1} \left\|\Psi^{-1}(t)\right\| \|B(t)\| \, \|v(t)\| \, dt \\ &\quad + cM\int_{x_1}^{+\infty} \|B(t)\| \, dt. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, por (3.43), o último termo da expressão acima pode ser considerado como menor que $\frac{\epsilon}{2}$, escolhendo x_1 suficientemente grande.

Como todas as soluções de (3.18) tendem para zero, é necessário que $\|\Psi(x)\| \to 0$ quando $x \to +\infty$. Assim a soma dos primeiros dois termos do segundo membro pode ser considerado arbitrariamente pequeno, por exemplo menor que $\frac{\epsilon}{2}$, desde que se escolha x suficientemente grande. Então $\|v(x)\| < \epsilon$, para x grande, ou seja, $\|v(x)\| \to 0$ quando $x \to +\infty$. ■

As condições (3.60) e (3.64) podem ser substituidas pela periodicidade da matriz $A(x)$:

Teorema 3.5.12 *Considere-se $A(x)$ uma matriz periódica de período ω em $[x_0 + \infty[$ e admita-se que a condição (3.43) se verifica. Então:*

(i) *Todas as soluções de (3.58) são limitadas em $[x_0+\infty[$ desde que o mesmo aconteça a todas as soluções de (3.18).*

(ii) *Todas as soluções de (3.58) tendem para zero quando $x \to +\infty$ desde que o mesmo aconteça a todas as soluções de (3.18).*

Dem. Dada uma matriz fundamental $\Psi(x)$ de (3.18), o Teorema 3.4.6 implica que $\Psi(x) = P(x)\, e^{Rx}$, com $P(x)$ uma matriz não singular, periódica de período ω, e R uma matriz constante. Aplicando estes dados em (3.62) tem-se

$$v(x) = P(x)e^{R(x-x_0)}P^{-1}(x_0)v^0 + \int_{x_0}^{x} P(x)e^{Rx}e^{-Rt}P^{-1}(t)B(t)v(t)dt$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|v(x)\| \;\; &\leq \;\; \|P(x)\| \left\|e^{Rx}\right\| \left\|e^{-Rx_0}P^{-1}(x_0)v^0\right\| \\ &\quad + \int_{x_0}^{x} \|P(x)\| \left\|e^{R(x-t)}\right\| \left\|P^{-1}(t)\right\| \|B(t)\| \|v(t)\| \, dt. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Como $P(x)$ é uma matriz não singular e periódica, $\det P(x)$ é periódico e não se anula, ou seja, é limitado e não nulo em $[x_0 + \infty[$.

Definindo

$$c_4 := \max\left\{ \sup_{x \geq x_0} \|P(x)\|, \sup_{x \geq x_0} \left\|P^{-1}(x)\right\| \right\}$$

a desigualdade (3.65) pode ser substituida por

$$\|v(x)\| \leq c_5 \left\|e^{Rx}\right\| + c_4^2 \int_{x_0}^{x} \left\|e^{R(x-t)}\right\| \|B(t)\| \|v(t)\| \, dt, \tag{3.66}$$

com $c_5 = c_4 \left\|e^{-Rx_0}P^{-1}(x_0)v^0\right\|$.

Se todas as soluções de (3.18) são limitadas em $[x_0 + \infty[$, então é necessário que $\left\|e^{Rx}\right\| \leq c_6$ para todo $x \geq 0$. Portanto, por (3.66), obtem-se

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_6 + c_4^2 c_6 \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| \|v(t)\| \, dt,$$

o que conduz a

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_6 \; e^{c_4^2 c_6 \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| dt}.$$

A parte (i) conclui-se, assim, a partir de (3.43).

Por outro lado, se todas as soluções de (3.18) tendem para zero quando $x \to +\infty$, então existem constantes positivas c_7 e α tal que $\left\|e^{Rx}\right\| \leq c_7\, e^{-\alpha x}$ para $x \geq 0$. Pela desigualdade (3.66) tem-se

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_7 e^{-\alpha x} + c_4^2 c_7 \int_{x_0}^{x} e^{-\alpha(x-t)} \|B(t)\| \|v(t)\| \, dt,$$

o que conduz a

$$\|v(x)\| \leq c_5 c_7\ e^{c_4^2 c_7 \int_{x_0}^{x} \|B(t)\| dt - \alpha x}.$$

Portanto, pela condição (3.43), obtem-se que $v(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$. ■

O sistema de equações diferenciais (3.16) também pode ser considerado como uma perturbação de (3.18).

Teorema 3.5.13 *Suponha-se que todas as soluções de (3.18) são limitadas em* $[x_0, +\infty[$ *e que pelo menos uma solução de (3.16) é limitada. Então todas as soluções de (3.16) são limitadas.*

Dem. Sejam $u^1(x)$ e $u^2(x)$ duas soluções do sistema diferencial (3.16). Então $\phi(x) = u^1(x) - u^2(x)$ é solução do sistema (3.18) e $u^1(x) = \phi(x) + u^2(x)$. Como $\phi(x)$ é limitada em $[x_0, +\infty[$, se $u^2(x)$ for uma solução limitada de (3.16) então resulta que $u^1(x)$ é também uma solução limitada de (3.16). ■

Do teorema anterior resulta que se todas as soluções de (3.18) tendem para zero quando $x \to +\infty$, e se uma uma solução de (3.16) também tende para zero, então o mesmo acontece para todas as soluções de (3.16).

Teorema 3.5.14 *Se todas as soluções de (3.18) são limitadas em* $[x_0, +\infty[$, *se se verifica a condição (3.60) e*

$$\int_{x_0}^{+\infty} ||b(t)||dt < +\infty, \tag{3.67}$$

então todas as soluções de (3.16) são limitadas.

Dem. Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental do sistema diferencial (3.18). Como cada solução de (3.18) é limitada, tal como no Teorema 3.5.10, $\|\Psi(x)\|$ e $\left\|\Psi^{-1}(x)\right\|$ são ambas limitadas em $[x_0, +\infty[$. Então existe uma constante finita, definida como em (3.63). Portanto, para qualquer solução $u(x)$ de (3.16) que verifique $u(x_0) = u^0$, a igualdade (3.31) permite obter

$$\|u(x)\| \leq c\left\|\Psi^{-1}(x_0)u^0\right\| + c^2 \int_{x_0}^{x} \|b(t)\|\, dt.$$

A prova fica concluida por (3.67). ■

3.6 Exercícios

1. Resolva pelo método das aproximações sucessivas de Picard os problemas:

a) $u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

b) $u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, \quad u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$

2. Prove que o problema de ordem n

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

é equivalente à equação integral

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x - x_0)^i}{i!} y_i + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)) dt.$$

3. Considere a equação diferencial linear homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + ... + p_0 y = 0. \tag{3.68}$$

Mostre que:

a) Se $y(x)$ é solução de (3.68) e a função vectorial $u(x)$ é definida por $u^i(x) = y^{(i-1)}(x)$, $i = 1, ..., n$, então $u' = A(x)u$, com

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & & -p_{n-1} \end{bmatrix};$$

b) Se $y_k(x)$, $1 \le k \le n$, são n soluções de (3.68), então

$$u^k(x) = \left(y_k(x), y_k'(x), ..., y_k^{(n-1)}(x) \right)^T, \quad 1 \le k \le n,$$

verifica o sistema $u' = A\,(x)\,u$;

c) $W(u^1, ..., u^n)(x) = W(u^1, ..., u^n)(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t) dt}$.

4. Justifique que a matriz, de ordem n, $\Phi(x,t)$ em (3.30) verifica as relações:

a) $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = A(x)\Phi(x,t)$;

b) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) = -\Phi(x,t)A(t)$;

c) $\Phi(x,t) = I + \int_t^x A(s)\Phi(s,t)ds$;

d) $\Phi(x,t) = I + \int_t^x \Phi(x,s)A(s)ds$.

5. Um **controlador de malha aberta** pode ser escrito na forma

$$u' = Au + by(x), \quad z(x) = c^T u + dy(x),$$

sendo $y(x)$ e $z(x)$ funções escalares e d uma constante (escalar). Neste contexto $y(x)$ é o *input* conhecido e $z(x)$ o output desconhecido.

Se $u(0) = u^0$ é dado, prove que:

a) $u(x) = e^{Ax}u^0 + \int_0^x e^{A(x-t)}by(t)dt$;

b) $z(x) = c^T e^{Ax}u^0 + dy(x) + \int_0^x \left(c^T e^{A(x-t)}b\right) y(t)dt$.

A função $h(t) = c^T e^{A(x-t)}b$ designa-se por **impulso de resposta** do controlador.

6. Determine a solução geral dos sistemas diferenciais não homogéneos:

a) $u' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x \\ -2-4x \end{bmatrix}$;

b) $u' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} e^x \\ e^{3x} \\ 4 \end{bmatrix}$;

c) $u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2-x \\ 1 \\ 1-x \end{bmatrix}$.

7. Resolva os problemas de valor inicial:

a) $u' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} u, \quad u_1(0) = -2, \; u_2(0) = 1$;

b) $u' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \cos 2x \end{bmatrix}, \quad u_1(0) = 0, \; u_2(0) = 1,$ $u_3(0) = 1$;

c) $u' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 3,$ $u_3(0) = 0.$

8. Duas matrizes de ordem n, A e B, dizem-se **semelhantes** se, e só se, existir uma matriz não singular P tal que $P^{-1}AP = B$.

Prove que:

a) $v(x)$ é solução do sistema $v' = Bv$ se, e só se, $u(x) = Pv(x)$, sendo $u(x)$ uma solução do sistema (3.27).

b) $e^{Ax} = Pe^{Bx}P^{-1}$.

9. Na equação

$$y' = ay + senx,$$

discuta a existência de uma única solução periódica nos casos:

a) $a = 0$;
b) $a > 0$;
c) $a < 0$.

10. Verifique que a equação

$$y' = y \ \cos^2 x$$

não admite soluções periódicas, apesar da função $\cos^2 x$ ser periódica de período π.

11. Considere a equação $y'' + y = sen(2x)$.

a) Mostre que $y(x) = -\frac{1}{3}sen(2x)$ é uma solução periódica;

b) Prove que a equação $y'' + y = 0$ admite também soluções periódicas não triviais;

c) Este exemplo contradiz o Corolário 3.39 ?

12. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação

$$y'' + p(x)y = 0,$$

com $p(x)$ uma função contínua e periódica de período ω, tais que

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Justifique as afirmações:

a) O Wronskiano $W(y_1, y_2)(x) = 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) Existe pelo menos uma solução periódica não trivial $y(x)$ se e só se $y_1(\omega) + y_2'(\omega) = 2$.

c) Existe pelo menos uma solução **anti-periódica** não trivial $y(x)$, isto é, $y(x+\omega) = -y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se e só se $y_1(\omega) + y_2'(\omega) = -2$.

13. Considere a equação diferencial de 2^a ordem

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{3.69}$$

e uma perturbação

$$z'' + (p(x) + q(x))\, z = 0, \tag{3.70}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em $[x_0 + \infty[$. Prove que se todas as soluções de (3.69) são limitadas em $[x_0 + \infty[$ e $\int_0^{+\infty} |q(t)|dt < +\infty$ então também todas as soluções de (3.70) são limitadas em $[x_0 + \infty[$.

14. Na equação (3.69) considere-se $p(x)$ uma função monótona com $p(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. Mostre que todas as soluções de (3.69) são limitadas em $[x_0 + \infty[$.

15. Justifique que todas as soluções das seguintes equações diferenciais são limitadas em $[x_0 + \infty[$:

a) $y'' + \left(1 + \frac{1}{1+x^4}\right) y = 0$

b) $y'' + e^x y = 0$

c) $y'' + cy' + \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) y = 0, \;\; c > 0.$

16. Prove que não existem soluções limitadas para a equação

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{1+x^4}\right) y = \cos x, \quad x \in [0, +\infty[.$$

17. Considere no sistema (3.18) a matriz $A(x)$ dada por

$$\textbf{(i) } A(x) = \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(ii) } A(x) = \begin{bmatrix} -e^x & -1 & -\cos x \\ 1 & -e^{2x} & x^2 \\ \cos x & -x^2 & -e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Mostre que, em qualquer dos casos, todas as soluções de (3.18) tendem para zero quando $x \to +\infty$.

18. Verifique que todas as soluções do sistema diferencial (3.16) com:

$$\textbf{(i) } A(x) = \begin{bmatrix} -e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-3x} \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} \cos x \\ x \cos x^2 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{(ii)}\ A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+x)^2} & senx & 0 \\ -senx & 0 & x \\ 0 & -x & 0 \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(1+x)^2} \\ \frac{1}{(1+x)^4} \end{bmatrix};$$

são limitadas em $[0, +\infty[$.

19. Considere o sistema (3.27) perturbado na forma

$$v' = Av + g(x, v), \tag{3.71}$$

com $g \in C\left([x_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$. Se esta função verifica

$$\|g(x, v)\| \leq \lambda(x) \|v\|, \tag{3.72}$$

com $\lambda(x)$ uma função contínua não negativa em $[x_0, +\infty[$, mostre que:

(i) Se todas as soluções do sistema (3.27) são limitadas e $\int_{x_0}^{+\infty} \lambda(t)dt < +\infty$ então todas as soluções de (3.71) são limitadas.

(ii) Se todas as soluções de (3.27) tendem para zero quando $x \to +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda(x) = 0$ então todas as soluções de (3.71) tendem para zero quando $x \to +\infty$.

20. Se o sistema (3.18) for também perturbado por uma função $g \in C\left([x_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, isto é, na forma

$$v' = A(x)v + g(x, v), \tag{3.73}$$

e se a função g verifica (3.72) com $\int_{x_0}^{+\infty} \lambda(t)dt < +\infty$, prove que são verdadeiras as proposições:

(i) Se todas as soluções do sistema (3.18) são limitadas e se verifica (3.60) então todas as soluções de (3.73) são limitadas.

(ii) Se todas as soluções de (3.18) tendem para zero quando $x \to +\infty$ e se verifica (3.64) então todas as soluções de (3.73) tendem para zero quando $x \to +\infty$.

3.7 Actividades

Actividade 1:

1.1. Defina-se o conjunto

$$\Omega_1 := \left\{ \left(x, \phi_0, ..., \phi_{n-1}\right) : |x - x_0| \leq a, \ \sum_{i=0}^{n-1} |\phi_i - y_i| \leq b \right\}$$

e considere-se que $f\left(x, \phi_0, ..., \phi_{n-1}\right)$:

(i) é contínua em Ω_1, pelo que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega_1} \left| f\left(x, \phi_0, ..., \phi_{n-1}\right) \right| \leq M;$$

(ii) satisfaz uma condição de Lipschitz uniforme em Ω_1, isto é, para $\left(x, \phi_0, ..., \phi_{n-1}\right)$, $\left(x, \psi_0, ..., \psi_{n-1}\right) \in \Omega_1$ existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\left| f\left(x, \phi_0, ..., \phi_{n-1}\right) - f\left(x, \psi_0, ..., \psi_{n-1}\right) \right| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \left| \phi_i - \psi_i \right|.$$

Prove que o problema

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, ..., \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

tem uma única solução no intervalo definido por

$$|x - x_0| \leq h := \min\left\{a, \frac{b}{M_1}\right\},$$

com $M_1 = M + b + \sum_{i=0}^{n-1} |y_i|$.

1.2. Sejam $u(x)$, $v(x)$ e $w(x)$ soluções da equação diferencial $y''' + y = 0$ que verificam, respectivamente, as condições

$$\begin{aligned} u(0) &= 1, \; u'(0) = 0, \; u''(0) = 0, \\ v(0) &= 0, \; v'(0) = 1, \; v''(0) = 0, \\ w(0) &= 0, \; w'(0) = 0, \; w''(0) = 1. \end{aligned}$$

Sem resolver a equação diferencial, prove que:

a) $u'(x) = -w(x)$.

b) $v'(x) = u(x)$.

c) $w'(x) = v(x)$.

d) $W(u, v, w) = u^3 - v^3 + w^3 + 3uvw = 1$.

1.3. A equação diferencial

$$y'' + k_0^2 \; y = A \; \cos(kx),$$

modela o movimento de uma massa suspensa de uma mola, sem atrito e sujeita a uma força externa periódica, sendo k_0 a frequência natural do conjunto e k a frequência da força aplicada.

Se $k \neq k_0$, uma solução particular da equação será

$$y(x) = \frac{A}{k_0^2 - k^2} \cos(kx).$$

Logo, se a frequência aplicada k se aproximar suficientemente da frequência natural k_0, então a solução particular terá oscilações de grande amplitude (fenómeno de **ressonância**).

Se $k = k_0$, a solução particular não pode ser obtida a partir da expressão anterior.

Mostre que, neste caso, a solução particular é dada por

$$y(x) = \frac{A}{2k_0}\, x \operatorname{sen}(k_0 x),$$

que **não é uma função periódica**.

Actividade 2:

2.1. O Wronskiano de n funções $y_1(x), ..., y_n(x)$ que sejam $(n-1)$ vezes diferenciáveis no intervalo J, é definido pelo determinante:

$$W(y_1, ..., y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Prove que:

a) Se $W(y_1, ..., y_n)(x)$ é diferente de zero em pelo menos um ponto de J, então as funções $y_1(x), ..., y_n(x)$ são linearmente independentes em J.

b) Se as funções $y_1(x), ..., y_n(x)$ são linearmente dependentes em J, então o Wronskiano $W(y_1, ..., y_n)(x) = 0$ em J.

c) As proposições recíprocas de a) e b) não são necessariamente verdadeiras.

2.2. Considere a equação diferencial

$$y'' + p(x)y = 0, \tag{3.74}$$

com $\int_0^{+\infty} t\,|p(t)|\,dt < +\infty$.

Prove que:

a) para qualquer solução de (3.74), $\underset{x\to+\infty}{lim} y'(x)$ existe;

b) qualquer solução não trivial de (3.74) é assimptótica à recta $d_0x + d_1$, para certas constantes d_0, d_1 não simultaneamente nulas.

2.3. Na equação diferencial de segunda ordem

$$y'' + (1 + p(x))\,y = 0,$$

com $p \in C^1\left([x_0, +\infty[\right)$,

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{x_0}^{+\infty} \left|p'(t)\right| dt < +\infty,$$

mostre que todas as soluções desta equação diferencial são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

Actividade 3:

3.1. Seja $f(x, y)$ uma função contínua e não negativa para $x_0 < x < x_0 + a$, $0 \leq y \leq 2b$, com a propriedade de que apenas a solução $y(x)$ da equação diferencial $y' = f(x, y)$, em qualquer intervalo $]x_0, x_1[$, com $x_1 \in \left]x_0, x_0 + a\right[$, para o qual a derivada lateral direita, $y'_+(x_0)$, existe e

$$y(x_0) = y'_+(x_0) = 0,$$

é $y(x) \equiv 0$.

Considere-se ainda uma outra função contínua e não negativa $f_1(x, y)$ para $x_0 < x < x_0 + a$, $0 \leq y \leq 2b$, com $f_1(x, 0) \equiv 0$ e

$$f_1(x, y) \leq f(x, y), \quad x \neq x_0.$$

Prove que, para qualquer $x_1 \in \left]x_0, x_0 + a\right[$, $y(x) \equiv 0$ é a única função diferenciável em $[x_0, x_1[$, que verifica

$$y_1' = f_1(x, y_1), \quad y_1(x_0) = 0.$$

3.2. Considere-se $f(x, y)$ nas condições da alínea anterior e $g(x, u)$ uma função contínua em

$$\Omega_+ := \left\{(x, u) : x_0 \leq x \leq x_0 + a,\ \left\|u - u^0\right\| \leq b\right\}$$

com

$$\|g(x,u) - g(x,v)\| \leq f\left(x, \|u - v\|\right), \ \forall (x,u),(x,v) \in \Omega_+, \quad x \neq x_0.$$

Mostre que o problema

$$u' = g(x,u), \quad u(x_0) = u^0,$$

tem, no máximo, uma solução.

CAP. 4

Estabilidade de Soluções

Neste capítulo pretende-se que o aluno:

- Domine os conceitos de estabilidade, estabilidade assimptótica e uniforme da solução de um problema de valor inicial e respectivas propriedades.
- Reconheça as relações entre limitação e estabilidade de soluções nos casos de sistemas lineares homogéneos e não homogéneos.
- Relacione o estudo e o tipo de estabilidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais quasi-lineares com os valores próprios da matriz associada à parte linear, bem como com o tipo de estabilidade do sistema linear associado.
- Identifique o retrato-fase das soluções dos sistemas autónomos bidimensionais.
- Determine e classifique os pontos críticos das soluções dos sistemas autónomos planares, quanto ao seu campo de direcções e ao tipo de estabilidade, de acordo com a natureza, sinal e multiplicidade dos valores próprios.
- Averigue a existência de ciclos-limite num sistema de equações diferenciais, e identifique condições suficientes para a sua existência ou inexistência.
- Utilize a função e o método directo de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas de equações diferenciais, nos casos autónomo e não autónomo.

- Reconheça condições suficientes para a função de Lyapunov, de modo a garantir vários tipos de estabilidade para a solução trivial de sistemas de equações diferenciais.
- Analise a existência de soluções oscilatórias de uma equação diferencial.
- Conheça técnicas, resultados e condições que permitam obter, *a priori,* dados qualitativos sobre a solução de uma equação diferencial, nomeadamente quanto ao número de zeros e sua distribuição no intervalo de definição da solução.

4.1 Conceitos preliminares

Anteriormente já foram abordados condições de regularidade para que a solução do problema de valor inicial (3.3), $u(x, x_0, u^0)$, dependa de uma forma contínua de x, x_0 e u^0, no ponto $\left(x, x_0, u^0\right)$, para x num certo intervalo finito $J = [x_0, x_0 + \alpha]$. Ou seja, **uma pequena variação em u^0 origina uma pequena alteração nas soluções** $u(x, x_0, u^0)$ de (3.3), num intervalo finito $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Contudo o mesmo não acontece se se substituir este intervalo por um não limitado, por exemplo, $[x_0, +\infty[$, como se pode verificar, a título de exemplo, no problema de valor inicial

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0, \tag{4.1}$$

cuja única solução é $y\,(x, 0, y_0) = y_0\; e^{ax}$. Designando as respectivas variações por $|\Delta y|$ e $|\Delta y_0|$ tem-se

$$|\Delta y| = |y\,(x, 0, y_0 + \Delta y_0) - y\,(x, 0, y_0)| = |\Delta y_0|\; e^{ax}$$

para $x \geq 0$. Assim, se $a \leq 0$ tem-se que $|\Delta y| = |\Delta y_0|\; e^{ax} \leq \delta$ sempre que $|\Delta y_0| \leq \delta$. Mas, se $a > 0$ o valor de $|\Delta y| \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ por muito pequeno que seja $|\Delta y_0|$.

Uma solução $u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (3.3), definida em $[x_0, +\infty[$, diz-se **estável** se pequenas variações em u^0 originam apenas pequenas mudanças nas soluções de (3.3), para $x \geq x_0$. Caso contrário a solução $u(x, x_0, u^0)$ diz-se **instável**.

Assim a solução $y\,(x) = y_0\; e^{ax}$ do problema (4.1) é estável para $a \leq 0$ e instável para $a > 0$.

As próximas definições tipificam os comportamentos das soluções:

Definição 4.1.1 *Uma solução* $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ *do problema de valor inicial (3.3) diz-se* ***estável,*** *se, para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *tal que* $\left\|\Delta u^0\right\| < \delta$ *implica que* $\left\|u\left(x, x_0, u^0 + \Delta u^0\right) - u\left(x, x_0, u^0\right)\right\| < \varepsilon.$

Definição 4.1.2 *Uma solução* $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ *do problema de valor inicial (3.3) diz-se* ***instável*** *se não for estável.*

Definição 4.1.3 *Uma solução* $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ *do problema de valor inicial (3.3) diz-se* ***assimptoticamente estável*** *se é estável e existe* $\delta_0 > 0$ *tal que* $\left\|\Delta u^0\right\| < \delta_0$ *implica*

$$\left\|u\left(x, x_0, u^0 + \Delta u^0\right) - u\left(x, x_0, u^0\right)\right\| \to 0 \quad \text{se } x \to +\infty.$$

Estas definições foram introduzidas por A. Lyapunov em 1892, pelo que uma solução estável também se pode designar como **estável no sentido de Lyapunov**

Exemplo 4.1.4 *Toda a solução da equação diferencial* $y' = x$ *tem a forma* $y(x) = y(x_0) + \frac{x^2 - x_0^2}{2}$, *pelo que é estável, embora não limitada.*

Exemplo 4.1.5 *As soluções da equação diferencial* $y' = 0$ *são do tipo* $y(x) = y(x_0)$, *pelo que são estáveis mas não assimptoticamente estáveis.*

Exemplo 4.1.6 *Toda a solução da equação* $y' = p(x)y$ *é da forma* $y(x) = y(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$. *Assim a solução trivial* $y(x) \equiv 0$ *é assimptoticamente estável se, e só se,* $\int_{x_0}^{x} p(t)dt \to -\infty$ *quando* $x \to +\infty$.

O Exemplo 4.1.4 evidencia que **os conceitos de estabilidade e de limitação são independentes**. Contudo, no caso do **sistema linear homogéneo (3.18)** estes conceitos **são equivalentes,** como é afirmado pelo próximo teorema:

Teorema 4.1.7 *Todas as soluções do sistema linear homogéneo (3.18) são estáveis se, e só se, são limitadas.*

Dem. Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental do sistema diferencial (3.18).

Se todas as soluções de (3.18) são limitadas, então existe uma constante c tal que $\|\Psi(x)\| \leq c$, para todo $x \geq x_0$.

Dado $\epsilon > 0$, escolhe-se $\left\|\Delta u^0\right\| < \frac{\epsilon}{c\|\Psi^{-1}(x_0)\|} = \delta(\epsilon) > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \left\|u\left(x, x_0, u^0 + \Delta u^0\right) - u\left(x, x_0, u^0\right)\right\| &= \left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0\right\| \\ &\leq c\left\|\Psi^{-1}(x_0)\right\|\left\|\Delta u^0\right\| < \epsilon, \end{aligned}$$

isto é, todas as soluções de (3.18) são estáveis.

Reciprocamente, se todas as soluções de (3.18) são estáveis, então, em particular, a solução trivial $u(x, x_0, 0) \equiv 0$ é estável. Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|\Delta u^0\| < \delta$ implica que $\|u(x, x_0, \Delta u^0)\| < \delta$, para todo $x \geq x_0$. Contudo, como $u(x, x_0, \Delta u^0) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0$, tem-se que $\|u(x, x_0, \Delta u^0)\| = \|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0\| < \epsilon$.

Considere-se agora que Δu^0 é o vector $\frac{\delta}{2}e^j$. Então

$$\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0\| = \|\psi^j(x)\| \frac{\delta}{2} < \epsilon,$$

sendo $\psi^j(x)$ a $j-$ésima coluna de $\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)$, pelo que

$$\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\| = \max_{1\leq j\leq n} \|\psi^j(x)\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta}.$$

Portanto, para qualquer solução $u(x, x_0, u^0)$ do sistema diferencial (3.18) tem-se

$$\|u(x, x_0, u^0)\| = \|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)u^0\| < \frac{2\epsilon}{\delta} \|u^0\|,$$

ou seja, todas as soluções de (3.18) são limitadas. ■

Corolário 4.1.8 *Se os valores próprios múltiplos da matriz A têm a parte real negativa e os valores próprios simples da matriz A têm a parte real não positiva, então todas as soluções do sistema (3.27) são estáveis.*

O resultado seguinte fornece uma condição necessária e suficiente para que as soluções do sistema (3.18) sejam assimptoticamente estáveis:

Teorema 4.1.9 *Seja $\Psi(x)$ uma matriz fundamental de (3.18). Então todas as soluções do sistema (3.18) são assimptoticamente estáveis se e só se*

$$\|\Psi(x)\| \to 0 \text{ quando } x \to +\infty. \tag{4.2}$$

Dem. Toda a solução $u(x, x_0, u^0)$ do sistema diferencial (3.18) pode ser expressa na forma $u(x, x_0, u^0) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)u^0$. Como $\Psi(x)$ é contínua, a condição (4.2) implica que existe uma constante c tal que $\|\Psi(x)\| \leq c$, para $x \geq x_0$. Então $\|u(x, x_0, u^0)\| \leq c\|\Psi^{-1}(x_0)\| \|u^0\|$ e, por conseguinte, toda a solução de (3.18) é limitada. Logo, pelo Teorema 4.1.7, toda a solução de (3.18) é estável. Como

$$\begin{aligned} \|u(x, x_0, u^0 + \Delta u^0) - u(x, x_0, u^0)\| &= \|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0\| \\ &= \|\Psi(x)\| \|\Psi^{-1}(x_0)\Delta u^0\| \to 0 \end{aligned}$$

quando $x \to +\infty$, então toda a solução do sistema (3.18) é assimptoticamente estável.

Reciprocamente, se todas as soluções de (3.18) são assimptoticamente estáveis, então, em particular, a solução trivial $u(x, x_0, 0) \equiv 0$ é assimptoticamente estável. Logo, $\left\| u\left(x, x_0, u^0\right) \right\| \to 0$ quando $x \to +\infty$. ■

Corolário 4.1.10 *Se os valores próprios da matriz A têm a parte real negativa, então todas as soluções do sistema (3.27) são assimptoticamente estáveis.*

Para os sistemas de equações perturbados (3.42) pode-se combinar os Teoremas 3.5.1 e 4.1.7 para obter o resultado:

Teorema 4.1.11 *Suponha-se que todas as soluções do sistema (3.27) são estáveis e que se verifica (3.43). Então todas as soluções do sistema (3.42) são estáveis.*

De modo análogo pode-se conciliar os Teoremas 3.5.2 e 4.1.9:

Teorema 4.1.12 *Se todas as soluções do sistema (3.27) são assimptoticamente estáveis e se se verifica (3.46), então todas as soluções do sistema (3.42) são assimptoticamente estáveis.*

Posteriormente será necessário uma noção mais forte de estabilidade:

Definição 4.1.13 *Uma solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do problema de valor inicial (3.3) diz-se* ***uniformemente estável*** *se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para qualquer solução $u^1(x) = u(x, x_0, u^1)$ do problema*

$$u' = g(x, u), \quad u(x_0) = u^1,$$

as desigualdades $x_1 \geq x_0$ e $\left\| u^1(x_1) - u(x_1) \right\| < \delta$ implicam que $\left\| u^1(x) - u(x) \right\| < \varepsilon$ para $x \geq x_1$.

A estabilidade assimptótica não implica a estabilidade uniforme, como se ilustra no exemplo seguinte:

Exemplo 4.1.14 *As soluções da equação $y' = p(x)y$ são do tipo*

$$y(x) = y(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

A solução trivial $y(x) \equiv 0$ é uniformemente estável se, e só se, $\int_{x_1}^{x} p(t)dt$ é majorado para qualquer $x \geq x_1 \geq x_0$.
Em particular, escolhendo $p(x) = sen\,(\ln x) + \cos(\ln x) - 1,25$ tem-se

$$\int_{x_0}^{x} p(t)dt = [t\ sen\,(\ln t) - 1,25t]_{x_0}^{x} \to -\infty,$$

quando $x \to +\infty$. Portanto, pelo Exemplo 4.1.6, a solução trivial $y(x) \equiv 0$ é assimptoticamente estável.
Contudo se se escolher $x = e^{\frac{2n+1}{3}\pi}$ e $x_1 = e^{\frac{2n+1}{6}\pi}$ então

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x} p(t)dt &= e^{2n\pi}\left[e^{\frac{\pi}{3}}\left(sen\frac{\pi}{3} - 1,25\right) - e^{\frac{\pi}{6}}\left(sen\frac{\pi}{6} - 1,25\right)\right] \\ &\simeq 0,172\ e^{2n\pi} \to +\infty,\end{aligned}$$

pelo que a solução trivial não é uniformemente estável.

A estabilidade uniforme também **não implica a estabilidade assimptótica.** Como exemplo basta considerar a equação $y' = 0$, cujas soluções, da forma $y(x) = y(x_0)$ são uniformemente estáveis mas não o são assimptoticamente.

Uma condição necessária e suficiente para que todas as soluções do sistema diferencial (3.18) sejam uniformemente estáveis é dada pelo próximo resultado:

Teorema 4.1.15 *Considere-se $\Psi(x)$ uma matriz fundamental do sistema (3.18). Então todas as soluções de (3.18) são uniformemente estáveis se, e só se, $\Psi(x)$ verificar $\left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(t)\right\| \leq c,\ \ x_0 \leq t \leq x < +\infty$.*

Dem. Seja $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ uma solução do sistema (3.18). Então, para $x_1 \geq x_0$, tem-se $u(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_1)u(x_1)$.

Se $u^1(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_1)u^1(x_1)$ for uma outra solução arbitrária e se se verificar a condição (3.64), então

$$\left\|u^1(x) - u(x)\right\| \leq \left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_1)\right\| \left\|u^1(x_1) - u(x_1)\right\| \leq c \left\|u^1(x_1) - u(x_1)\right\|$$

para todo $x_0 \leq x_1 \leq x < +\infty$. Assim, se $\epsilon > 0$ então $x_1 \geq x_0$ e

$$\left\|u^1(x_1) - u(x_1)\right\| < \frac{\epsilon}{c} := \delta(\epsilon) > 0$$

implicam que $\left\|u^1(x) - u(x)\right\| < \epsilon$, pelo que a solução é uniformemente estável. ∎

4.2 Estabilidade de sistemas quasi-lineares

A perturbação dos sistemas de equações diferenciais (3.27) e (3.18) afecta a sua estabilidade?

Para responder a esta questão considere-se os sistemas anteriores perturbados por uma função $g \in C\left([x_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, isto é, respectivamente,

$$v' = Av + g(x, v) \tag{4.3}$$

e

$$v' = A(x)v + g(x, v), \tag{4.4}$$

geralmente designados por **sistemas diferenciais quasi-lineares**.

Suponha-se que a função $g(x, v)$ verifica a igualdade

$$\|g(x, v)\| = o\left(\|v\|\right) \tag{4.5}$$

uniformemente em x, quando $\|v\| \to 0$. Como consequência, para v suficientemente próvimo de 0, a razão $\frac{\|g(x,v)\|}{\|v\|}$ pode ser considerada arbitrariamente pequena. Por outro lado, por (4.5), $g(x, 0) \equiv 0$ e $v(x) \equiv 0$ é uma solução trivial dos sistemas quasi-lineares.

O próximo exemplo mostra que a estabilidade assimptótica da solução trivial do sistema não perturbado (3.18) e a condição (4.5), não garantem a estabilidade assimptótica da solução trivial do sistema não perturbado (4.4).

Exemplo 4.2.1 *O sistema*

$$\begin{array}{l} u_1' = -au_1 \\ u_2' = \left(sen(2x) + 2x\cos(2x) - 2a\right)u_2, \end{array} \tag{4.6}$$

com $1 < 2a < \frac{3}{2}$, *tem a solução geral*

$$\begin{array}{rcl} u_1(x) & = & c_1 e^{-ax} \\ u_2(x) & = & c_2 e^{(sen(2x)-2a)x}. \end{array}$$

Como $a > \frac{1}{2}$, *toda a solução de (4.6) tende para zero quando* $x \to +\infty$, *pelo que a solução trivial de (4.6) é assimptoticamente estável.*
Se o sistema for perturbado por $g(x, v) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1^2 \end{bmatrix}$, *isto é,*

$$\begin{array}{l} v_1' = -av_1 \\ v_2' = \left(sen(2x) + 2x\cos(2x) - 2a\right)v_2 + v_1^2, \end{array} \tag{4.7}$$

então admite como solução geral

$$\begin{aligned} v_1(x) &= c_1 e^{-ax} \\ v_2(x) &= \left(c_2 + c_1^2 \int_0^x e^{-tsen(2t)} dt \right) e^{(sen(2x)-2a)x}. \end{aligned}$$

Para $x_n = \frac{n+1}{4}\pi$, $n \in \mathbb{N}$, *tem-se*

$$-sen2t \geq \frac{1}{2}, \ \textit{para} \ x_n + \frac{\pi}{3} \leq t \leq x_n + \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int\limits_0^{x_{n+1}} e^{-tsen(2t)} dt > \int\limits_{x_n+\frac{\pi}{3}}^{x_n+\frac{\pi}{2}} e^{-tsen(2t)} dt > \int\limits_{x_n+\frac{\pi}{3}}^{x_n+\frac{\pi}{2}} e^{\frac{t}{2}} dt > 0,4 \ e^{\frac{x_n}{2}+\frac{\pi}{4}}.$$

Assim

$$v_2(x_{n+1}) > c_2 e^{(1-2a)x_n} + 0,4 \ c_1^2 \ e^{\left(\frac{3}{2}-a\right)x_n + \frac{\pi}{4}}$$

e como $2a < \frac{3}{2}$ *tem-se que* $v_2(x_{n+1}) \to +\infty$ *se* $c_1 \neq 0$. *Logo a solução trivial de (4.7) é instável.*

A estabilidade assimptótica da solução trivial do sistema (3.27) e a condição (4.5) são suficientes para garantir a estabilidade assimptótica da solução trivial do sistema quasi-linear (4.3):

Teorema 4.2.2 *Se as partes reais dos valores próprios da matriz A são negativas e a função $g(x, v)$ verifica (4.5), então a solução trivial do sistema quasi-linear (4.3) é assimptoticamente estável.*

Dem. Em (3.32) considere-se o termo não homogéneo $b(x)$ como $g(x, v)$, de modo a que cada solução $v(x)$, com $v(x_0) = v^0$, do sistema quasi-linear (4.3) verifica a equação integral

$$v(x) = e^{A(x-x_0)} v^0 + \int_{x_0}^x e^{A(x-t)} g(t, v(t)) dt. \tag{4.8}$$

Como as partes reais dos valores próprios da matriz A são negativas, existem constantes c e $\eta := -\delta$ ($\delta > 0$) tal que $\left\| e^{Ax} \right\| \leq c \ e^{-\delta x}$ para $x \geq 0$. Portanto, por (4.8), tem-se

$$\|v(x)\| \leq c e^{-\delta(x-x_0)} \left\| v^0 \right\| + c \int_{x_0}^x e^{-\delta(x-t)} \left\| g(t, v(t)) \right\| dt, \quad x \geq 0. \tag{4.9}$$

Por (4.5), para um dado $m > 0$, existe um número positivo d tal que

$$\|g(t,v)\| \leq m\,\|v\|\,, \tag{4.10}$$

para $x \geq x_0$, $\|v\| < d$.

Assuma-se agora que $\left\|v^0\right\| < d$. Então existe um número x_1 tal que $\|v(x)\| < d$ para todo $x \in [x_0, x_1[$. Utilizando (4.10) em (4.9), obtem-se

$$\|v(x)\|\, e^{\delta x} \leq c e^{\delta x_0} \left\|v^0\right\| + cm \int_{x_0}^{x} e^{\delta t}\,\|v(t)\|\,dt, \quad x \in [x_0, x_1[.$$

Aplicando o Corolário 2.1.7 a esta desigualdade, tem-se

$$\|v(x)\| \leq c\left\|v^0\right\| e^{(cm-\delta)(x-x_0)}, \quad x \in [x_0, x_1[. \tag{4.11}$$

Como v^0 e m são arbitrários, pode escolher-se m tal que $cm < \delta$ e $v(x_0) = v^0$ de modo que $\left\|v^0\right\| < \frac{d}{c}$ implica $\|v(x)\| < d$ para todo $x \in [x_0, x_1[$.

Pela continuidade de $g(x,v)$ em $[x_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$, é possível extender a solução $v(x)$, intervalo a intervalo, de modo a preservar a limitação δ. Portanto, dada uma solução qualquer $v(x) = v(x, x_0, v^0)$ com $\left\|v^0\right\| < \frac{d}{c}$ conclui-se que v está definida em $[x_0, +\infty[$ e satisfaz $\|v(x)\| < d$. Contudo, d pode ser considerado suficientemente pequeno, pelo que a solução trivial do sistema diferencial (4.3) é estável. Como $c\ m < \delta$, isto implica que a solução trivial é assimptoticamente estável. ■

A demonstração do próximo resultado é semelhante à do teorema anterior:

Teorema 4.2.3 *Se pelo menos um dos valores próprios da matriz A tem a parte real positiva e a função $g(x,v)$ verifica (4.5), então a solução trivial do sistema quasi-linear (4.3) é instável.*

Os Teoremas 4.2.2 e 4.2.3 não se referem aos casos em que as partes reais de todos os valores próprios da matriz A são não positivas, ou quando pelo menos um dos valores próprios é nulo. Em geral, nestes casos, não é possível concluir a natureza da estabilidade da solução trivial, a partir dos valores próprios de valores próprios A. Por exemplo, a solução trivial da equação diferencial $y' = ay^2$ é assimptoticamente estável se $a < 0$, estável se $a = 0$ e instável se $a > 0$.

Suponha que no sistema quasi-linear (4.4) a função contínua g verifica

$$\|g(x,v)\| \leq \lambda(x)\,\|v\|\,, \tag{4.12}$$

com $\lambda(x)$ uma função contínua não negativa em tal que $\int_0^{+\infty} \lambda(t)dt < +\infty$.

Teorema 4.2.4 *Se as soluções do sistema diferencial (3.18) são uniformemente (ou uniforme e assimptoticamente) estáveis e $g(x,v)$ verifica (4.12), então a solução trivial do sistema quasi-linear (4.4) é uniformemente (ou uniforme e assimptoticamente) estável.*

Dem. Como todas as soluções do sistema (3.18) são uniformemente estáveis, pelo Teorema 4.1.15, existe uma constante c tal que, para qualquer matriz fundamental $\Psi(x)$ de (3.18), se tem $\left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(t)\right\| \leq c$, para $x_0 \leq t \leq x < +\infty$.

Considere-se, em (3.25), o termo não homogéneo $b(x)$ na forma $g(x, v(x))$, de modo a que cada solução $v(x)$ do sistema diferencial (4.4), tal que $v(x_1) = v^1$, $x_1 \geq x_0$, verifica a equação integral

$$v(x) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_1)v^1 + \int_{x_1}^{x} \Psi(x)\Psi^{-1}(t)g(t, v(t))dt. \tag{4.13}$$

Assim

$$\|v(x)\| \leq c\left\|v^1\right\| + c\int_{x_1}^{x} \lambda(t)\left\|v(t)\right\| dt,$$

pelo que

$$\|v(x)\| \leq c\left\|v^1\right\| \; e^{c\int_{x_1}^{x} \lambda(t)dt} \leq K\left\|v^1\right\|,$$

com

$$K := c\; e^{c\int_{x_0}^{+\infty} \lambda(t)dt}.$$

Portanto, para um certo $\epsilon > 0$ dado, quando $\left\|v^1\right\| < \frac{\epsilon}{K}$, tem-se $\|v(x)\| < \epsilon$, para $x \geq x_1$, isto é, a solução trivial do sistema (4.4) é uniformemente estável.

Por último, se as soluções do sistema diferencial (3.18) são também assimptoticamente estáveis, então pelo Teorema 4.1.9, obtem-se que $\|\Psi(x)\| \to 0$, quando $x \to +\infty$. Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, é possível escolher x_2 suficientemente grande tal que $\left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0\right\| \leq \epsilon$, para $x \geq x_2$. Assim, para a solução $v(x) = v(x, x_0, v^0)$, obtem-se

$$\begin{aligned}\|v(x)\| &\leq \left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)v^0\right\| + \int_{x_0}^{x}\left\|\Psi(x)\Psi^{-1}(t)\right\|\left\|g(t,v(t))\right\| dt \\ &\leq \epsilon + c\int_{x_0}^{x} \lambda(t)\left\|v(t)\right\| dt,\end{aligned}$$

para $x \geq x_2$, e

$$\|v(x)\| \leq \epsilon\; e^{c\int_{x_0}^{x} \lambda(t)dt} \leq L\;\epsilon, \quad \text{para} \quad x \geq x_2,$$

com $L := e^{c\int_{x_0}^{+\infty}\lambda(t)dt}$.

Como ϵ é arbitrário e L não depende de ϵ ou de x_2, conclui-se que $\|v(x)\| \to 0$, quando $x \to +\infty$, ou seja, a solução trivial do sistema (4.4) também é assimptoticamente estável. ■

4.3 Sistemas autónomos planares

O sistema de equações diferenciais diz-se **autónomo** se a função $g(x,u)$ for independente de x. Assim um sistema autónomo **bidimensional** ou **planar** terá a forma

$$\begin{aligned} u_1' &= g_1(u_1,u_2) \\ u_2' &= g_2(u_1,u_2). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para estes sistemas admitir-se-á que quer **as funções** g_1 **e** g_2, quer as suas **derivadas parciais são contínuas num domínio** D do plano u_1u_2. Portanto, para qualquer ponto $(u_1^0,u_2^0) \in D$ o sistema diferencial (4.14), com as condições $u_1(x_0)=u_1^0$, $u_2(x_0)=u_2^0$, tem uma única solução num certo intervalo J que contenha x_0.

O estudo dos sistemas autónomos planares (4.14) tem um duplo interesse: por um lado eles modelam um grande números de processos dinâmicos em vários ramos da Ciência e, por outro lado, o comportamento qualitativo das respectivas soluções pode ser ilustrado geometricamente no plano u_1u_2.

O primeiro resultado é válido para estes sistemas e não é necessariamente verdadeiro para os sistemas não autónomos:

Teorema 4.3.1 *Se $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$ é uma solução do sistema diferencial (4.14) no intervalo $]\alpha,\beta[$, então, para qualquer constante c, a função $v(x)=(u_1(x+c),u_2(x+c))$ é também uma solução de (4.14) no intervalo $]\alpha-c,\beta-c[$.*

Dem. Como $v'(x)=u'(x+c)$ e $u'(x)=g\left(u(x)\right)$ então

$$v'(x)=u'(x+c)=g\left(v(x)\right),$$

pelo que $v(x)$ é também uma solução de (4.14). ■

No domínio D do plano u_1u_2 qualquer solução de (4.14) pode ser entendida como uma curva dada na forma paramétrica, $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$, com x como parâmetro.

A curva $u(x)$ é designada por **trajectória**, **órbita** ou **caminho** de (4.14) e ao plano u_1u_2 chama-se **plano de fase**. Portanto, pelo Teorema 4.3.1, para qualquer constante c, as curvas $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, com $x \in]\alpha, \beta[$, e $v(x) = (u_1(x+c), u_2(x+c))$, com $x \in]\alpha - c, \beta - c[$, que são soluções distintas de (4.14), representam a mesma trajectória.

Teorema 4.3.2 *Por cada ponto $(u_1^0, u_2^0) \in D$ passa uma única trajectória do sistema diferencial (4.14).*

Dem. Suponha-se, por contradição, que existem duas trajectórias diferentes, $(u_1(x), u_2(x))$ e $(v_1(x), v_2(x))$, que passam por $\left(u_1^0, u_2^0\right)$. Então, pela unicidade de solução dos problemas de valor inicial, $u_1(x_0) = u_1^0 = v_1(x_1)$ e $u_2(x_0) = u_2^0 = v_2(x_1)$, com $x_0 \neq x_1$.

Pelo Teorema 4.3.1, $u_1^1(x) := u_1(x - x_1 + x_0)$ e $u_2^1(x) := u_2(x - x_1 + x_0)$ é também uma solução de (4.14). Como $u_1^1(x_1) = u_1(x_0) = u_1^0 = v_1(x_1)$ e $u_2^1(x_1) = u_2(x_0) = u_2^0 = v_2(x_1)$, então, pela unicidade dos problemas de valor inicial, tem-se que $u_1^1(x) \equiv v_1(x)$ e $u_2^1(x) \equiv v_2(x)$. Portanto, $(u_1(x), u_2(x))$ e $(v_1(x), v_2(x))$ são parametrizações diferentes que originam a mesma trajectória. ∎

Exemplo 4.3.3 *O sistema diferencial*

$$\begin{array}{c} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 \end{array}$$

tem infinitas soluções

$$\begin{array}{rcl} u_1(x) & = & sen(x+c) \\ u_2(x) & = & \cos(x+c), \end{array}$$

com $0 \leq c < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, mas que representam a mesma trajectória: a circunferência unitária $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

Definição 4.3.4 *Ao ponto $(u_1^0, u_2^0) \in D$, onde as funções g_1 e g_2 se anulam simultaneamente, chama-se **ponto crítico** de (4.14) (ou **ponto de equilíbrio**, **ponto estacionário** ou **ponto singular**).*
*Um ponto crítico (u_1^0, u_2^0) diz-se **isolado** se não existir mais nenhum ponto crítico numa certa vizinhança de (u_1^0, u_2^0).*

De ora em diante por ponto crítico designar-se-á um ponto crítico isolado.

Exemplo 4.3.5 *No sistema*

$$\begin{array}{rcl} u_1' & = & a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ u_2' & = & a_{21}u_1 + a_{22}u_2, \end{array} \tag{4.15}$$

com $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, existe apenas o ponto crítico $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4.3.6 *No **pêndulo simples não amortecido** dado pelo sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{g}{L}\, sen(u_1)\,, \end{aligned}$$

existem uma inifinidade de pontos críticos, dados por $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, *em* $\mathbb{R}^2$.

Se (u_1^0, u_2^0) é um ponto crítico de (4.14), então efectuando a substituição

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_1^0 \\ v_2 &= u_2 - u_2^0 \end{aligned}$$

transforma-se (4.14) num sistema equivalente com $(0, 0)$ como ponto crítico. Assim, sem perda de generalidade, considerar-se-á $(0, 0)$ como ponto crítico de (4.14).

Uma técnica possível para estudar o sistema diferencial (4.14) na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$ é aproximá-lo por um sistema linear da forma de (4.15), na expectativa de que essa "boa" aproximação forneça soluções, que sejam também "boas" aproximações das soluções de (4.14).

Por exemplo, se o sistema (4.14) fosse escrito como

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + h_1(u_1, u_2) \\ u_2' &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + h_2(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4.16}$$

com $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = 0$ e

$$\lim_{\substack{u_1 \to 0 \\ u_2 \to 0}} \frac{h_1(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \lim_{\substack{u_1 \to 0 \\ u_2 \to 0}} \frac{h_2(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0,$$

então, pela teoria de estabilidade estudada nas secções anteriores, ter-se-ia:

Teorema 4.3.7 ***(i)*** *Se a solução nula de (4.15) é assimptoticamente estável então a solução nula de (4.16) também é assimptoticamente estável.*
(ii) *Se a solução nula de (4.15) é instável então a solução nula de (4.16) também é instável.*
(iii) *Se a solução nula de (4.15) é estável então a solução nula de (4.16) pode ser assimptoticamente estável, estável ou instável.*

Se no sistema diferencial (4.14) as funções $g_1(u_1, u_2)$ e $g_2(u_1, u_2)$ admitirem derivadas parciais de 2^a ordem contínuas na vizinhança do ponto crítico

$(0,0)$, então pela Fórmula de Taylor, o sistema (4.14) pode escrever-se na forma de (4.16) com

$$a_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(0,0), \quad a_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(0,0), \quad a_{21} = \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(0,0), \quad a_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(0,0).$$

Se (u_1^0, u_2^0) é um ponto crítico de (4.14), então a função constante $u(x) \equiv (u_1^0, u_2^0)$ é solução de (4.14) e, pelo Teorema 4.3.2, nenhuma trajectória pode passar pelo ponto (u_1^0, u_2^0).

O esquema de todas as trajectórias de um sistema designa-se por **retrato-fase** do sistema e desde que as soluções de (4.15) possam ser determinadas explicitamente então pode ser obtida uma descrição completa do seu retrato-fase. Como a natureza das soluções de (4.15) depende dos valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

ou seja, das raízes da equação

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \tag{4.17}$$

então o retrato-fase de (4.15) depende quase inteiramente das raízes λ_1 e λ_2 de(4.17).

Assim, analisam-se em separado vários casos:

Caso 1: λ_1 e λ_2 são valores próprios reais, distintos e com o mesmo sinal

Designando por v^1 e v^2 os correspondentes vectores próprios então, pelo Teorema 3.3.1, a solução geral de (4.15) é dada por

$$\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 x} + c_2 \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 x}, \tag{4.18}$$

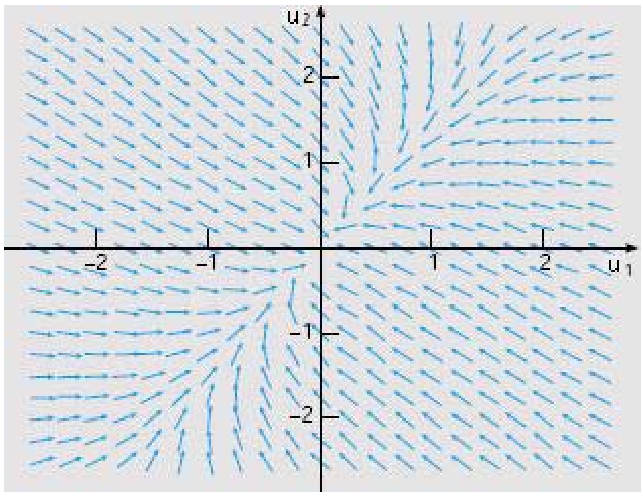
com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Suponha-se que $\lambda_1 > \lambda_2$ (o outro caso é análogo).

Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ então todas as soluções de (4.15) tendem para zero quando $x \to +\infty$, pelo que o ponto crítico $(0,0)$ é assimptoticamente estável. No caso de $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$ obtem-se $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} u_1$, isto é, as trajectórias são linhas rectas com declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$. Analogamente, se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ tem-se a recta $u_2 = \frac{v_1^2}{v_2^2} u_1$. Para obter outras trajectórias considere-se c_1 e c_2 ambos diferentes de zero. Então

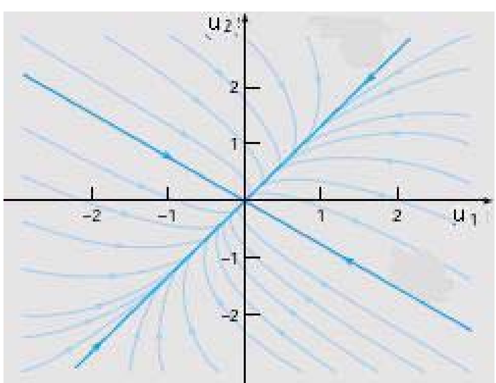
$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} = \frac{c_1 v_2^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_2^2 e^{\lambda_2 x}}{c_1 v_1^1 e^{\lambda_1 x} + c_2 v_1^2 e^{\lambda_2 x}} = \frac{c_1 v_2^1 + c_2 v_2^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}{c_1 v_1^1 + c_2 v_1^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}}, \tag{4.19}$$

tende para $\frac{v_2^1}{v_1^1}$ quando $x \to +\infty$, pelo que todas as trajectórias tendem para $(0,0)$ quando $x \to +\infty$. Do mesmo modo, quando $x \to -\infty$ todas as trajectórias se aproximam assimptoticamente da recta de declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$.



Retrato-fase para $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_1 = -1$

Esta situação pode ser ilustrada para um declive $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \sqrt{2}$ pela figura seguinte, na qual o ponto crítico se designa por **nó estável**.



Trajectórias para $\frac{v_2^2}{v_1^2} = \sqrt{2}$

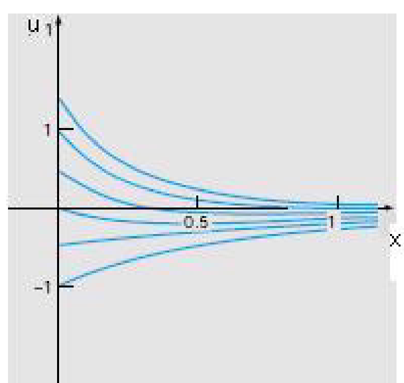


Gráfico de $u_1(x)$

Se $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ então todas as soluções não triviais (4.15) tendem para infinito quando $x \to +\infty$, pelo que o ponto crítico $(0,0)$ é instável. As trajectórias são como no caso $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, mas com sentidos opostos. Quando $x \to -\infty$, as trajectórias tendem para $(0,0)$ com declive $\frac{v_2^2}{v_1^2}$ e quando

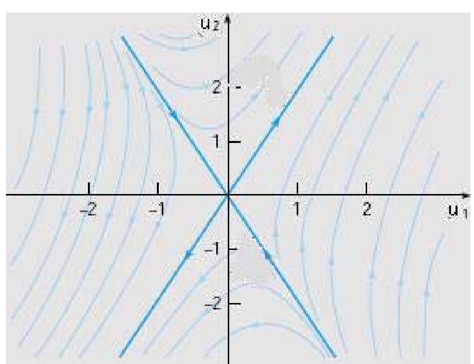
$x \to +\infty$ aproximam-se assimptoticamente da recta $u_2 = \frac{v_1^2}{v_2^2} u_1$. Neste caso o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é designado por **nó instável**.

Caso 2: λ_1 e λ_2 são valores próprios reais, distintos e com sinais opostos

A solução geral do sistema (4.15) é também dada por (4.18). Considere-se que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$ então tem-se, tal como no primeiro caso, $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} u_1$ e, tanto $u_1(x)$ como $u_2(x)$, tendem para zero quando $x \to +\infty$.

Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ então $u_2 = \frac{v_2^1}{v_1^1} u_1$, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ tendem para infinito quando $x \to +\infty$ e aproximam-se de zero quando $x \to -\infty$.

Se c_1 e c_2 são ambos não nulos então, por (4.19), $\frac{u_2}{u_1}$ tende para $\frac{v_2^1}{v_1^1}$ quando $x \to +\infty$. Portanto, as trajectórias aproximam-se assimptoticamente da recta com declive $\frac{v_2^1}{v_1^1}$, quando $x \to +\infty$. De modo análogo, quando $x \to -\infty$, as trajectórias tendem para a recta $u_2 = \frac{v_2^2}{v_1^2} u_1$. Ambas as funções, $u_1(x)$ e $u_2(x)$, tendem para infinito quando $x \to \pm\infty$.



Trajectórias para $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 3$

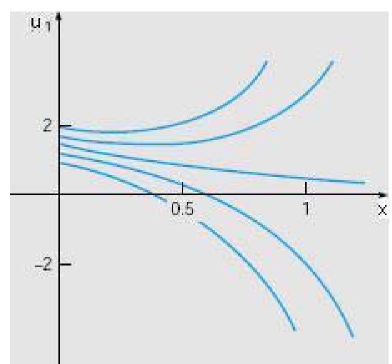


Gráfico de $u_1(x)$

Este tipo de ponto crítico chama-se **ponto de sela** e é um ponto crítico instável.

Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Pelo Teorema 3.3.4, a solução geral do sistema (4.15) é da forma

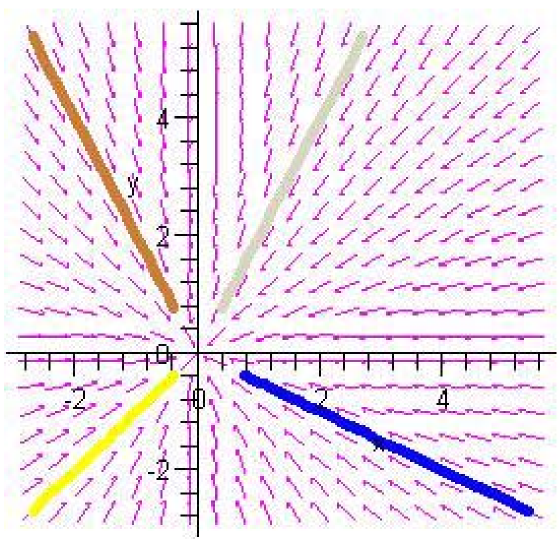
$$\begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 + (a_{11} - \lambda)\, x \\ a_{21} x \end{bmatrix} e^{\lambda x} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} x \\ 1 + (a_{22} - \lambda)\, x \end{bmatrix} e^{\lambda x}, \quad (4.20)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se $\lambda < 0$, $u_1(x)$ e $u_2(x)$ tendem para zero quando $x \to +\infty$ pelo que o ponto crítico $(0,0)$ de (4.15) é assimptoticamente estável. Por outro lado, por (4.20),

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} = \frac{c_2 + [a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)\, c_2]\, x}{c_1 + [a_{12}c_2 + (a_{11} - \lambda)\, c_1]\, x}. \tag{4.21}$$

Em particular, se $a_{12} = a_{21} = 0$ e $a_{11} = a_{22} \neq 0$, pela equação (4.17) tem-se $\lambda = a_{11} = a_{22}$. Assim a razão anterior reduz-se a $\frac{u_2}{u_1} = \frac{c_2}{c_1}$, pelo que todas as trajectórias são linhas rectas com declive $\frac{c_2}{c_1}$. Nesta situação o campo de direcções é dado pela figura seguinte e a origem designa-se por **nó próprio estável**.



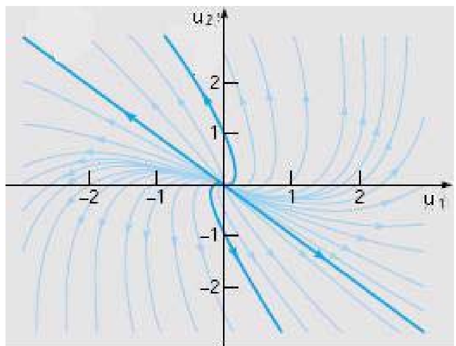
$\lambda = a_{11} = a_{21}$

No caso geral, quando $x \to \pm\infty$,

$$\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \to \frac{a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)\, c_2}{a_{12}c_2 + (a_{11} - \lambda)\, c_1} = \frac{a_{21}}{a_{11} - \lambda},$$

pois, pela equação característica, $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = a_{12}a_{21}$. Portanto, quando $x \to \pm\infty$, todas as trajectórias são assimptóticas com a recta $u_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}-\lambda} u_1$. A origem diz-se então um **nó impróprio estável**.

Se $\lambda > 0$, todas as soluções tendem para $+\infty$ quando $x \to +\infty$ e o ponto crítico $(0,0)$ de (4.15) é instável. As trajectórias são análogas às do caso $\lambda < 0$ excepto no sentido do movimento que é o inverso, como se ilustra na figura seguinte.



Trajectórias para $\lambda = 2$

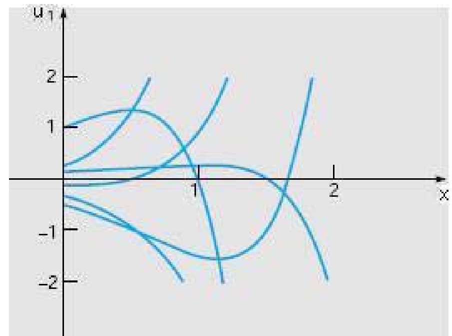


Gráfico de $u_1(x)$

Caso 4: λ_1 e λ_2 são números complexos conjugados

Designe-se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ e considere-se $\beta > 0$. Se o vector próprio da matriz A, correspondente a λ_1, for $v = v_1 + iv_2$, então a solução do sistema (4.15) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x}(v_1 + iv_2) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\mathrm{sen}(\beta x))(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha x}(v_1 \cos(\beta x) - v_2 \mathrm{sen}(\beta x)) + ie^{\alpha x}(v_1 \mathrm{sen}(\beta x) + v_2 \cos(\beta x)). \end{aligned}$$

Pelo Exercício 3.3.8,

$$u_1(x) = e^{\alpha x}(v_1 \cos(\beta x) - v_2 \mathrm{sen}(\beta x))$$

e

$$u_2(x) = e^{\alpha x}(v_1 \mathrm{sen}(\beta x) + v_2 \cos(\beta x))$$

são duas soluções reais, linearmente independentes de (4.15). Além disso toda a solução de (4.15) é forma

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

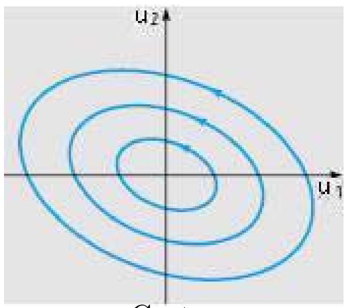
que, pelas propriedades trigonométricas pode ser escrita como

$$\begin{aligned} u_1(x) = r_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x - \delta_1) \\ u_2(x) = r_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x - \delta_2), \end{aligned} \tag{4.22}$$

com $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, δ_1 e δ_2 constantes.

Se $\alpha = 0$ as funções $u_1(x) = r_1 \cos(\beta x - \delta_1)$ e $u_2(x) = r_2 \cos(\beta x - \delta_2)$ são periódicas, de período $\frac{2\pi}{\beta}$, e limitadas. Cada trajectória começa num ponto

(u_1^*, u_2^*), para $x = x^*$, e regressa ao mesmo ponto quando $x = x^* + \frac{2\pi}{\beta}$. Então as trajectórias são curvas fechadas em torno do ponto crítico $(0,0)$, que é estável, mas não assimptoticamente estável, e que se designa por **centro**.



Centro

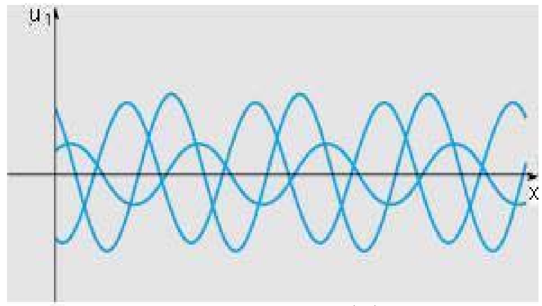
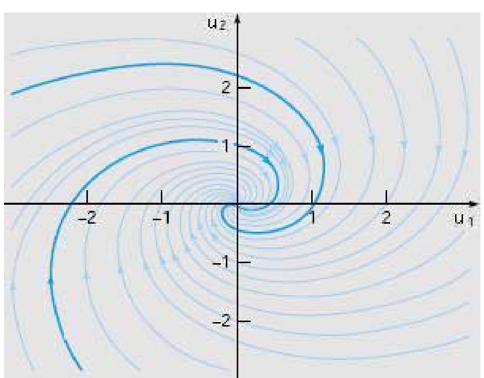


Gráfico de $u_1(x)$

Se $\alpha < 0$ o factor $e^{\alpha x}$ transforma as curvas fechadas simples em espirais. Isto acontece porque o ponto

$$\left(u_1\left(\frac{2\pi}{\beta}\right), u_2\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}\left(u_1(0), u_2(0)\right)$$

fica mais próximo da origem que $\left(u_1(0), u_2(0)\right)$. Neste caso o ponto crítico $(0,0)$, que é **assimptoticamente estável**, designa-se como um **foco** ou **ponto de espiral**.



Foco estável $(\alpha < 0)$

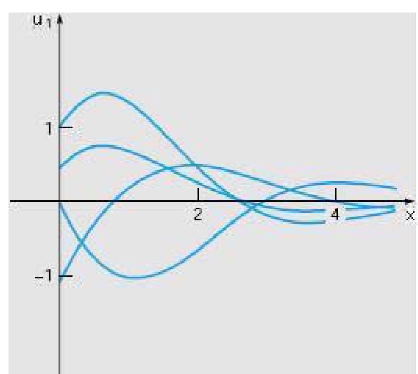


Gráfico de $u_1(x)$

Se $\alpha > 0$ todas as trajectórias de (4.15) são espirais que se afastam da origem, quando $x \to +\infty$. Neste caso o ponto crítico $(0,0)$ é instável e designa-se por **foco instável**.

Os casos anteriormente estudados podem ser resumidos no teorema:

Teorema 4.3.8 *Sejam λ_1 e λ_2 os valores próprios da matriz A do sistema diferencial (4.15). O comportamento das suas trajectórias, na proximidade do ponto crítico* $(0,0)$, *caracteriza-se por:*

1. *nó estável, se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e negativos;*
2. *nó instável, se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e positivos;*
3. *ponto de sela (instável), se λ_1 e λ_2 são reais, distintos e com sinais contrários;*
4. *nó estável, se λ_1 e λ_2 são reais, iguais e negativos;*
5. *nó instável, se λ_1 e λ_2 são reais, iguais e positivos;*
6. *centro estável, se λ_1 e λ_2 são imaginários puros;*
7. *foco estável, se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com a parte real negativa;*
8. *foco instável, se λ_1 e λ_2 são complexos conjugados com a parte real positiva.*

Um esquema da análise da estabilidade do sistema (4.15) pode ser ilustrado pela figura seguinte, definindo $p := Tr(A)$, $q := \det(A)$ e $\Delta = p^2 - 4q$.

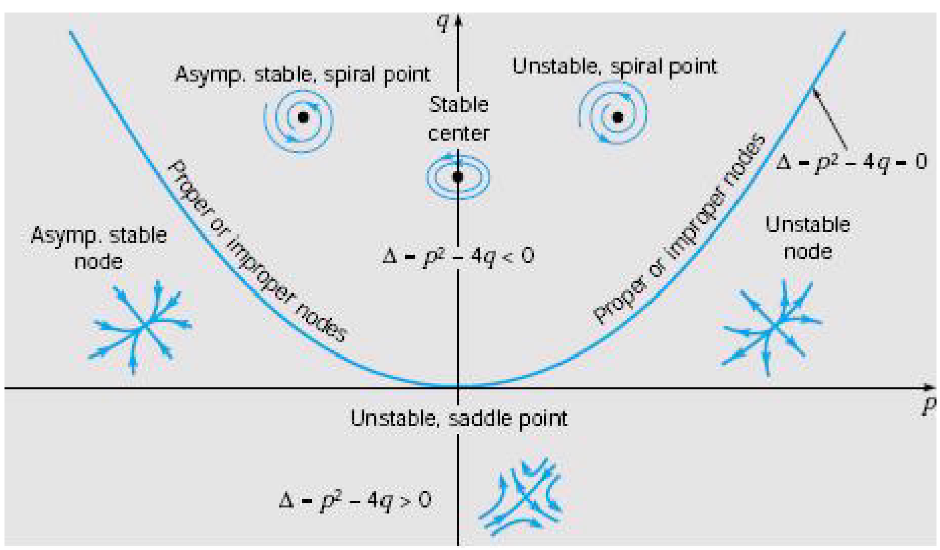


Diagrama de estabilidade de (4.15)

O comportamento do sistema diferencial (4.15) perto da origem também determina a natureza das trajectórias do **sistema não linear** (4.16), na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$.

Teorema 4.3.9 *No sistema diferencial (4.15), sejam λ_1 e λ_2 os valores próprios da matriz A. Então:*

1. *O sistema diferencial não linear (4.16) tem o mesmo tipo de ponto crítico na origem que o sistema linear (4.15), quando:*

   (i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *e $(0, 0)$ é um nó do sistema (4.15);*

   (ii) $(0, 0)$ *é um ponto de sela de (4.15);*

   (iii) $\lambda_1 = \lambda_2$ *e $(0, 0)$ não é um nó próprio do sistema (4.15);*

   (iv) $(0, 0)$ *é um foco de (4.15).*

2. *A origem não é necessariamente o mesmo tipo de ponto crítico nos dois sistemas. Mas :*

   (i) *se $\lambda_1 = \lambda_2$ e $(0, 0)$ é um nó próprio do sistema (4.15), então $(0, 0)$ é, ou um nó, ou um foco do sistema (4.16);*

   (ii) *se $(0, 0)$ é um centro do sistema (4.15), então $(0, 0)$ é, ou um centro, ou um foco do sistema (4.16).*

Exemplo 4.3.10 *O sistema diferencial não linear*

$$\begin{aligned} u_1' &= 1 - u_1 u_2 \\ u_2' &= u_1 - u_2^3 \end{aligned} \tag{4.23}$$

tem como pontos críticos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.
No primeiro caso, com as mudanças de variável $v_1 = u_1 - 1$ e $v_2 = u_2 - 1$ obtem-se um novo sistema

$$\begin{aligned} v_1' &= 1 - (v_1 + 1)(v_2 + 1) = -v_1 - v_2 - v_1 v_2 \\ v_2' &= (v_1 + 1) - (v_2 + 1)^3 = v_1 - 3v_2 - 3v_2^2 - v_2^3. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Este último é um caso particular de (4.16) com $h_1(v_1, v_2) = -v_1 v_2$ e $h_2(v_1, v_2) = -3v_2^2 - v_2^3$ e que verificam

$$\lim_{\substack{u_1 \to 0 \\ u_2 \to 0}} \frac{h_1(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \lim_{\substack{u_1 \to 0 \\ u_2 \to 0}} \frac{h_2(u_1, u_2)}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = 0.$$

O sistema linear associado a (4.24) é

$$\begin{aligned} v_1' &= -v_1 - v_2 \\ v_2' &= v_1 - 3v_2, \end{aligned} \tag{4.25}$$

onde a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

tem os valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, *e a solução nula do sistema (4.25) é assimptoticamente estável. Pelo Teorema 4.3.7, a solução nula do sistema (4.24) também é assimptoticamente estável. Então o ponto crítico* $(1,1)$ *do sistema (4.23) é assimptoticamente estável.*
Por outro lado, pelo Teorema 4.3.8, a solução nula do sistema (4.25) é um nó estável e, pelo Teorema 4.3.9, a solução nula do sistema (4.24) é também um nó estável. Logo, o ponto crítico $(1,1)$ *de (4.23) é um nó estável.*
De modo análogo, para o ponto $(-1,-1)$, *utiliza-se a substituição* $v_1 = u_1+1$ *e* $v_2 = u_2 + 1$ *para obter o sistema*

$$\begin{aligned} v_1' &= 1 - (v_1 - 1)(v_2 - 1) = v_1 + v_2 - v_1 v_2 \\ v_2' &= (v_1 - 1) - (v_2 - 1)^3 = v_1 - 3v_2 + 3v_2^2 - v_2^3. \end{aligned} \tag{4.26}$$

O sistema linear associado é

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 + v_2 \\ v_2' &= v_1 - 3v_2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

e a matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

tem os valores próprios $\lambda_1 = -1 + \sqrt{5} > 0$ *e* $\lambda_2 = -1 - \sqrt{5} < 0$. *A solução nula do sistema (4.27) é um ponto de sela instável. Para o sistema não linear (4.26), a solução nula também é um ponto de sela instável. Então o ponto crítico* $(-1,-1)$ *do sistema (4.23) é um ponto de sela instável.*

4.4 Ciclos limite e soluções periódicas

Antes da formalização de conceitos veja-se o seguinte exemplo:

Exemplo 4.4.1 *No sistema de equações diferenciais não lineares*

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_2 + u_1\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right) \\ u_2' &= u_1 + u_2\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

o termo $u_1^2+u_2^2$ aparece em ambas as equações, pelo que "sugere" a introdução de coordenadas polares (r,θ), com $u_1 = r\cos\theta$ e $u_2 = r sen\,\theta$. Derivando membro a membro a relação $r^2 = u_1^2 + u_2^2$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}r^2 &= 2r\frac{dr}{dx} = 2u_1u_1' + 2u_2u_2' \\ &= 2\left(u_1^2+u_2^2\right) - 2\left(u_1^2+u_2^2\right)^2 = 2r^2\left(1-r^2\right) \end{aligned}$$

e

$$\frac{dr}{dx} = r\left(1-r^2\right).$$

De modo análogo obtem-se

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}arc\tan\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{1}{u_1^2}\frac{u_1u_2' - u_2u_1'}{1+\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2} = \frac{u_1^2+u_2^2}{u_1^2+u_2^2} = 1.$$

Então, (4.28) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dr}{dx} = r\left(1-r^2\right) \\ \frac{d\theta}{dx} = 1, \end{cases} \tag{4.29}$$

que tem como solução geral

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \left(1-r_0^2\right)e^{-2x}}} \\ \theta(x) &= x + \theta_0, \end{aligned}$$

com $r_0 = r(0)$ e $\theta_0 = \theta(0)$. Assim, a solução geral de (4.28) será

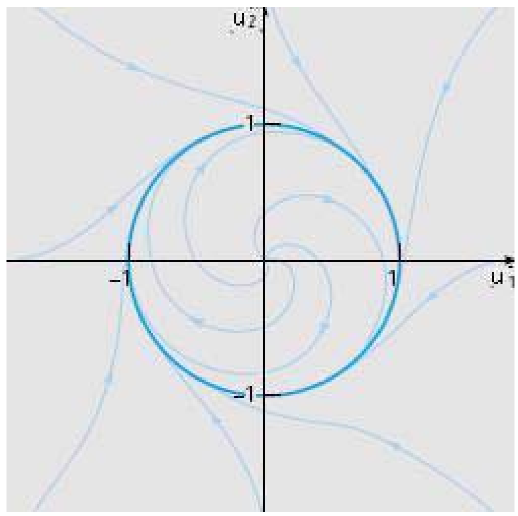
$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+\left(1-r_0^2\right)e^{-2x}}}\cos\left(x+\theta_0\right) \\ u_2(x) &= \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+\left(1-r_0^2\right)e^{-2x}}} sen\left(x+\theta_0\right), \end{aligned} \tag{4.30}$$

que também define as trajectórias de (4.28) no plano u_1u_2. Se $r_0 = 1$, a trajectória obtida é a circunferência unitária

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cos\left(x+\theta_0\right) \\ u_2(x) &= sen\left(x+\theta_0\right), \end{aligned} \tag{4.31}$$

percorrida no sentido directo, pelo que a solução é periódica de período 2π. Se $r_0 \neq 1$, as trajectórias definidas por (4.30) não são fechadas (logo não

são periódicas) mas percorrem um caminho em espiral.
Se $r_0 < 1$, *as trajectórias são espirais que permanecem no interior da circunferência (4.31), aproximando-se dela quando* $x \to +\infty$ *e, quando* $x \to -\infty$, *tendem para a origem, que é o único ponto crítico de (4.28). Se* $r_0 > 1$, *as trajectórias são espirais no exterior do círculo, aproximando-se da circunferência (4.31) quando* $x \to +\infty$.
Estes vários casos são ilustrados na figura seguinte.



Ciclo limite

A existência de trajectórias em espiral aproximando-se de uma circunferência, válida em sistemas não lineares, não é possível para sistemas lineares. Quais são, então, as condições para a sua existência?

Definição 4.4.2 *Uma trajectória fechada do sistema de equações diferenciais (4.14), da qual se aproximam, pelo interior ou pelo exterior, trajectórias de (4.14), não fechadas e em espiral, quando* $x \to +\infty$ *ou quando* $x \to -\infty$, *diz-se um* ***ciclo limite*** *de (4.14).*

O próximo teorema indica condições suficientes para a existência de ciclos limites do sistema (4.14):

Teorema 4.4.3 *(de* ***Poincaré-Bendixson****) Seja* $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ *uma solução do sistema de equações diferenciais (4.14), que permanece numa região limitada do plano* u_1u_2 *e que não contem nenhum ponto crítico de (4.14). Então a sua trajectória aproxima-se em espiral de uma curva simples e fechada, que é ela própria a trajectória de uma solução periódica de (4.14).*

Exemplo 4.4.4 *Considere-se a equação diferencial*

$$y'' + \left(2y^2 + 3\left(y'\right)^2 - 1\right) y' + y = 0,$$

a qual é equivalente ao sistema

$$\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 + u_2\left(1 - 2u_1^2 - 3u_2^2\right). \end{array} \tag{4.32}$$

Para qualquer solução $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ de (4.32) tem-se

$$\begin{aligned} \left(u_1^2(x) + u_2^2(x)\right)' &= 2u_1(x)u_1'(x) + 2u_2(x)u_2'(x) \\ &= 2\left(1 - 2u_1^2(x) - 3u_2^2(x)\right) u_2^2(x). \end{aligned}$$

Como o factor $1 - 2u_1^2(x) - 3u_2^2(x)$ é positivo para $u_1^2 + u_2^2 < \frac{1}{3}$ e negativo para $u_1^2 + u_2^2 > \frac{1}{2}$, então a função $u_1^2(x) + u_2^2(x)$ é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Assim, se $u(x)$ começar no anel $\frac{1}{3} < u_1^2 + u_2^2 < \frac{1}{2}$ em x_0, permanecerá no anel para qualquer $x \geq x_0$. Por outro lado, como o anel não contem nenhum ponto crítico de (4.32), o Teorema 4.4.3 garante que a trajectória desta solução se aproxima em espiral de uma curva simples e fechada, que é ela própria uma solução periódica não trivial de (4.32).

Também podem ser obtidas condições para a não existência de trajectórias fechadas, logo, em particular, de ciclos limites do sistema (4.14):

Teorema 4.4.5 *(de **Bendixson**) Se a função*

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2)$$

tem sempre o mesmo sinal no domínio D, então o sistema (4.14) não tem trajectórias fechadas em D.

Dem. Seja S uma região de D limitada por uma curva fechada C. Pelo Teorema de Green, tem-se

$$\begin{aligned} &\int_C \left[g_1\left(u_1, u_2\right) du_2 - g_2\left(u_1, u_2\right) du_1\right] \\ = &\iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right) du_1 du_2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Seja $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ uma solução de (4.14) cuja trajectória é a curva fechada C em D e represente-se por ω o respectivo período. Então

$$\begin{aligned} & \int_C \left[g_1(u_1, u_2)\, du_2 - g_2(u_1, u_2)\, du_1\right] \\ = & \int_0^\omega \left[g_1(u_1(x), u_2(x)) \frac{du_2(x)}{dx} - g_2(u_1(x), u_2(x)) \frac{du_1(x)}{dx}\right] dx = 0. \end{aligned}$$

Por (4.33), obtem-se

$$\iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right) du_1 du_2 = 0.$$

Contudo este integral apenas poderá ser nulo se a função integranda mudar de sinal, o que contradiz a hipótese assumida. ■

Exemplo 4.4.6 *Considere-se o sistema de equações diferenciais não lineares*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1\left(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 - 3\right) - u_2 \\ u_2' &= u_2\left(u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 - 3\right) + u_1. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Neste caso

$$\frac{\partial g_1}{\partial u_1} + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 4u_1^2 + 4u_2^2 - 6u_1 - 6 = 4\left[\left(u_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + u_2^2 - \frac{33}{16}\right],$$

pelo que $\frac{\partial g_1}{\partial u_1} + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} < 0$ *no disco* D *com centro em* $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ *e raio 1,436. Então, pelo Teorema 4.4.5, não existe nenhuma trajectória fechada em* D.

4.5 Método directo de Lyapunov para sistemas autónomos

Um sistema mecânico é estável se a energia total (soma da energia potencial com a energia cinética) decresce de modo contínuo. Estas duas energias são sempre quantidades positivas e anulam-se quando o sistema está em descanso total. O método directo de Lyapunov usa uma função energia generalizada, **função de Lyapunov,** geralmente designada por V, para estudar a estabilidade das soluções de um sistema de equações diferenciais. A principal vantagem deste método reside no facto de a estabilidade poder ser discutida sem prévio conhecimento das soluções.

Considere-se o sistema autónomo

$$u' = g(u), \tag{4.35}$$

com a função $g = (g_1, ..., g_n)$ e as derivadas parciais $\frac{\partial g_i}{\partial u_j}$, $1 \leq i, j \leq n$, contínuas num conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ contendo a origem. Assim, para qualquer $u^0 \in \Omega$, o problema de valor inicial (4.35), (3.2) tem uma única solução num intervalo que contenha x_0. Para que o sistema (4.35) admita a solução trivial e a origem seja um ponto crítico isolado, considera-se ainda que $g(0) = 0$ e $g(u) \neq 0$ para $u \neq 0$ numa certa vizinhança da origem.

Seja $V(u)$ uma função escalar contínua definida em Ω e $V(0) = 0$.

Definição 4.5.1 ***(i)*** *$V(u)$ diz-se **definida positiva** em Ω se, e só se, $V(u) > 0$ para $u \in \Omega$, $u \neq 0$.*

(ii) *$V(u)$ é **semi-definida positiva** em Ω se $V(u) \geq 0$, $\forall u \in \Omega$ (com $V(u)$ não identicamente igual a 0).*

(iii) *$V(u)$ diz-se **definida negativa (semi-definida negativa)** em Ω se, e só se, $-V(u)$ é definida positiva (semi-definida positiva) em Ω.*

Para maior facilidade de demonstração, nos próximos resultados considera-se a norma euclidiana, também representada por $\|.\|$.

Definição 4.5.2 *Uma função $\phi(r)$ pertence à classe $\mathcal{K}$ se, e só se, $\phi \in C([0, \rho[, \mathbb{R}^+)$, $\phi(0) = 0$ e $\phi(r)$ é estritamente crescente.*

Como $V(u)$ é contínua, para r suficientemente pequeno e $0 < r \leq d$ tem-se

$$V(u) \leq \max_{\|v\| \leq r} V(v), \quad V(u) \geq \min_{r \leq \|v\| \leq d} V(v) \tag{4.36}$$

na hiper-esfera $\|u\| = r$. Os segundos membros de (4.36) são funções monótonas de r e podem ser estimadas com recurso a funções da classe $\mathcal{K}$. Assim, existem duas funções p, $q \in \mathcal{K}$ tais que

$$p(\|u\|) \leq V(u) \leq q(\|u\|). \tag{4.37}$$

O primeiro membro de (4.37) permite uma definição alternativa para que $V(u)$ seja definida positiva:

Definição 4.5.3 *A função $V(u)$ é definida positiva em Ω se, e só se, $V(0) = 0$ e existe uma função $p(r) \in \mathcal{K}$ tal que $p(r) \leq V(u)$, para $u \in \Omega$ e $\|u\| = r$.*

Exemplo 4.5.4 ***(i)*** *A função $V(u_1, u_2) = c_1u_1^2 + c_2u_2^2$, com c_1 e c_2 constantes positivas é definida positiva em $\mathbb{R}^2$.*

(ii) *$V(u_1, u_2, u_3) = c_1u_1^2 + c_2u_2^2$, com c_1 e c_2 constantes positivas é semi-definida positiva em $\mathbb{R}^3$, porque se anula no eixo u_3.*

(iii) *$V(u_1, u_2, u_3) = c_1u_1^2 + (c_2u_2 + c_3u_3)^2$, com $c_1 > 0$, é semi-definida positiva em $\Omega = \mathbb{R}^3$, porque se anula não só na origem mas também na linha $c_2u_2 + c_3u_3 = 0 \wedge u_1 = 0$.*

(iv) *A função $V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - u_1^4 - u_2^4$, é definida positiva no interior do círculo unitário porque $V(u_1, u_2) \geq \|u\|^2 - \|u\|^4$, para $\|u\| < 1$.*

Defina-se o conjunto

$$S_\rho := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| < \rho\}$$

e seja $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ uma solução do problema (4.35), (3.2), tal que $\|u(x)\| < \rho$ para $x \geq x_0$. Como o sistema (4.35) é autónomo é sempre possível considerar $x_0 = 0$. Para $V \in C^1(S_\rho, \mathbb{R})$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}V(u) &= \frac{\partial V(u)}{\partial u_1}u_1'(x) + ... + \frac{\partial V(u)}{\partial u_n}u_n'(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(u)}{\partial u_i} g_i(u) = \operatorname{grad}(V(u)) \cdot g(u). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Portanto a derivada de $V(u)$, em relação a x, ao longo da solução $u(x)$ de (4.35), fica conhecida, embora não se tenha explicitamente a solução.

Para o estudo da estabilidade da solução trivial de (4.35), apresentam-se três resultados:

Teorema 4.5.5 *Se existir uma função escalar definida positiva, $V(u) \in C^1(S_\rho, \mathbb{R})$ (**função de Lyapunov**) tal que $\frac{d}{dx}V(u) \leq 0$ em S_ρ, então a solução trivial do sistema (4.35) é estável.*

Dem. Como $V(u)$ é definida positiva, existe uma função $p \in \mathcal{K}$ tal que $p(\|u\|) \leq V(u)$, para qualquer $u \in S_\rho$. Dado ϵ tal que $0 < \epsilon < \rho$, pela continuidade de $V(u)$ e $V(0) = 0$, é possível encontrar-se $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\left\|u^0\right\| < \delta$ implica $V(u^0) < p(\epsilon)$.

Se a solução trivial do sistema (4.35) for instável, então existe uma solução $u(x) = u\left(x, 0, u^0\right)$ de (4.35) tal que $\left\|u^0\right\| < \delta$ e que que $\|u(x_1)\| = \epsilon$

para um certo $x_1 > 0$. Contudo, como $\frac{d}{dx}V(u) \leq 0$ em S_ρ, então $V(u(x_1)) \leq V(u^0)$ e obtem-se a contradição

$$p(\epsilon) = p(\|u(x_1)\|) \leq V(u(x_1)) \leq V(u^0) < p(\epsilon).$$

Portanto, se $\left\|u^0\right\| < \delta$ tem-se obrigatoriamente que $\|u(x)\| < \epsilon$ para todo $x \geq 0$, o que implica que a solução trivial do sistema (4.35) é estável. ∎

Teorema 4.5.6 *Se existir uma função escalar definida positiva, $V(u) \in C^1(S_\rho, \mathbb{R})$ tal que $\frac{d}{dx}V(u)$ é definida negativa em S_ρ, então a solução trivial do sistema (4.35) é assimptoticamente estável.*

Dem. Como se verificam todas as hipóteses do Teorema 4.5.5, então a solução trivial de (4.35) é estável. Portanto, dado ϵ tal que $0 < \epsilon < \rho$, suponha-se que existem $\delta > 0$, $\lambda > 0$ e uma solução $u(x) = u\left(x, 0, u^0\right)$ de (4.35) tal que

$$\lambda \leq \|u(x)\| < \epsilon \text{ para } x \geq 0, \quad \left\|u^0\right\| < \delta. \tag{4.39}$$

Como $\frac{d}{dx}V(u)$ é definida negativa, existe uma função $p \in \mathcal{K}$ tal que

$$\frac{d}{dx}V(u(x)) \leq -p\left(\|u(x)\|\right).$$

Por outro lado, como $\|u(x)\| \geq \lambda > 0$, para $x \geq 0$, eviste uma constante $d > 0$ tal que $p\left(\|u(x)\|\right) \geq d$, para $x \geq 0$, e

$$\frac{d}{dx}V(u(x)) \leq -d < 0, \quad x \geq 0.$$

Ora, isto implica que

$$V(u(x)) = V(u^0) + \int_0^x \frac{d}{dt}V(u(t))dt \leq V(u^0) - xd$$

e, para x suficientemente grande, o último membro torna-se negativo, o que está em contradição com o facto de $V(u)$ ser definida positiva. Assim, não é possível existir esse tipo de λ que verifique (4.39).

Além disso, como $V(u(x))$ é positiva e uma função decrescente de x, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} V(u(x)) = 0$. Portanto, $\lim_{x\to+\infty} \|u(x)\| = 0$, o que implica que a solução trivial de (4.35) é assimptoticamente estável. ∎

Teorema 4.5.7 *Se existir uma função escalar $V(u) \in C^1(S_\rho, \mathbb{R})$ tal que $V(0) = 0$ e $\frac{d}{dx}V(u)$ é definida positiva em S_ρ e, em qualquer vizinhança N da origem, $N \subset S_\rho$, existe um ponto u^0 onde $V(u^0) > 0$, então a solução trivial do sistema (4.35) é instável.*

Dem. Seja $r > 0$ suficientemente pequeno tal que a hiper-esfera

$$S_r = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \leq r\} \subset S_\rho.$$

Defina-se $M := \max\limits_{\|u\| \leq r} V(u)$ e repare-se que, pela continuidade de V, M é finito. Considere-se r_1 tal que $0 < r_1 < r$. Então, por hipótese, existe um ponto $u^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < \left\|u^0\right\| < r_1$ e $V(u^0) > 0$. Ao longo da solução $u(x) = u\left(x, 0, u^0\right)$, para $x \geq 0$, $\frac{d}{dx}V(u)$ é positiva, pelo que $V(u(x))$, com $x \geq 0$, é uma função crescente e $V(u(0)) = V(u^0) > 0$. Este facto implica que esta solução $u(x)$ não se pode aproximar da origem, pelo que

$$\inf_{x \geq 0} \frac{d}{dx} V(u(x)) = m > 0,$$

$V(u(x)) \geq V(u^0) + mx$, para $x \geq 0$. Contudo este segundo membro pode ser maior que M, para x suficientemente grande, o que mostra que $u(x)$ sairá da hiper-esfera S_r. Ou seja, a solução trivial de (4.35) é instável. ∎

Exemplo 4.5.8 *No sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= -u_1 u_2^4 \\ u_2' &= u_2 u_1^4 \end{aligned} \tag{4.40}$$

escolhe-se a função definida positiva $V(u_1, u_2) = u_1^4 + u_2^4$ *em* $\Omega = \mathbb{R}^2$. *Derivando, obtem-se que* $\frac{d}{dx}V(u_1, u_2) \equiv 0$ *e, portanto, a solução trivial de (4.40) é estável.*

Exemplo 4.5.9 *Para o sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 + u_1\left(r^2 - u_1^2 - u_2^2\right) \\ u_2' &= -u_1 + u_2\left(r^2 - u_1^2 - u_2^2\right) \end{aligned} \tag{4.41}$$

considere-se a função definida positiva $V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$ *em* $\Omega = \mathbb{R}^2$. *Derivando, tem-se a função*

$$\frac{d}{dx}V(u_1, u_2) = -2\left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(u_1^2 + u_2^2 - r^2\right),$$

a qual, para $r = 0$, *é definida negativa, pelo que a solução trivial de (4.41) é assimptoticamente estável. Por outro lado, se* $r \neq 0$, $\frac{d}{dx}V(u_1, u_2)$ *fica definida positiva na região* $u_1^2 + u_2^2 < r^2$. *Logo, neste caso, a solução é instável.*

4.6 Método directo de Lyapunov para sistemas não autónomos

O método de Lyapunov também pode ser aplicado para estudar as propriedades de estabilidade das soluções dos sistemas de equações diferenciais (3.1), isto é, em forma abreviada

$$u' = g(x, u).$$

Considera-se que a função $g(x,u)$ é contínua para todo $(x,u) \in [x_0, +\infty[\times S_\rho$, $x_0 \geq 0$ e com regularidade suficiente para que o problema de valor inicial (3.3) tenha uma única solução em $[x_0, +\infty[$ para todo $u^0 \in S_\rho$. Para que o sistema (3.1) admita a solução trivial, supõe-se que $g(x,0) \equiv 0$.

Neste contexto, é claro que uma função de Lyapunov para o sistema (3.1) tem que depender de x e de u, isto é, $V = V(x,u)$.

Definição 4.6.1 *Uma função real $V(x,u)$ definida em $[x_0, +\infty[\times S_\rho$ é **definida positiva** se $V(x,0) \equiv 0$, $x \geq x_0$, e existir uma função $p(r) \in \mathcal{K}$ tal que $p(r) \leq V(x,u)$, $\|u\| = r$, $(x,u) \in [x_0, +\infty[\times S_\rho$.*
*A função $V(x,u)$ é **definida negativa** se $V(x,u) \leq -p(r)$.*

Definição 4.6.2 *Uma função real $V(x,u)$ definida em $[x_0, +\infty[\times S_\rho$ é **decrescente** se $V(x,0) \equiv 0$, $x \geq x_0$, e existir h, $0 < h \leq \rho$, e uma função $q(r) \in \mathcal{K}$ tal que $V(x,u) \leq q(\|u\|)$ para $\|u\| < h$ e $x \geq x_0$.*

Exemplo 4.6.3 ***(i)*** *A função*

$$V(x, u_1, u_2) = \left(1 + sen^2 x\right) u_1^2 + \left(1 + \cos^2 x\right) u_2^2$$

é definida positiva em $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$, pois $V(x,0,0) \equiv 0$ e $p(r) = r^2 \in \mathcal{K}$ verifica a desigualdade $p(r) \leq V(x, u_1, u_2)$. A função também é decrescente pois $q(r) = 2r^2 \in \mathcal{K}$ verifica $V(x, u_1, u_2) \leq q(r)$.

(ii) *A função*

$$V(x, u_1, u_2) = u_1^2 + \left(1 + x^2\right) u_2^2$$

é definida positiva em $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^2$ mas não é descrescente, uma vez que pode ser suficientemente grande, para $\|u\|$ arbitrariamente pequeno.

É ainda necessário considerar que $V(x,u) \in C^1\left([x_0, +\infty[\times S_\rho, \mathbb{R}\right)$ para que se obtenha

$$\frac{d}{dx}V(x,u) := V^*(x,u) = \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial u_i}\frac{du_i}{dx}.$$

Neste contexto, interessa a derivada de $V(x,u)$ ao longo da solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do sistema diferencial (3.1). Ou seja

$$V^*(x,u) = \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial u_i} g_i(x,u) = \frac{\partial V}{\partial x} + \operatorname{grad} V(x,u) \cdot g(x,u).$$

Os próximos teoremas sobre estalidade e estabilidade assimptótica da solução trivial do sistema (3.1) são análogos aos resultados do caso autónomo:

Teorema 4.6.4 *Se existir uma função escalar definida positiva,* $V(x,u) \in C^1\left([x_0, +\infty[\times S_\rho, \mathbb{R}\right)$ (***função de Lyapunov***) *tal que*

$$V^*(x,u) \leq 0 \quad em \quad [x_0, +\infty[\times S_\rho,$$

então a solução trivial do sistema (3.1) é estável.

Teorema 4.6.5 *Se existir uma função escalar definida positiva e decrescente* $V(x,u) \in C^1\left([x_0, +\infty[\times S_\rho, \mathbb{R}\right)$ *tal que* $V^*(x,u)$ *é definida negativa em* $[x_0, +\infty[\times S_\rho$*, então a solução trivial do sistema (3.1) é assimptoticamente estável.*

Exemplo 4.6.6 ***(i)*** *A equação diferencial*

$$y'' + p(x)y = 0,$$

com $p(x) \geq \delta > 0$ *e* $p'(x) \leq 0$ *para* $x \in [0, +\infty[$*, é equivalente ao sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -p(x)u_1. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Para este sistema considera-se a função escalar $V(x, u_1, u_2) = p(x)u_1^2 + u_2^2$*, que é definida positiva em* $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^2$*. Como*

$$V^*(x,u) = p'(x)u_1^2 + 2p(x)u_1u_2 + 2u_2\left(-p(x)u_1\right) = p'(x)u_1^2 \leq 0$$

em $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^2$*, então a solução trivial de (4.42) é estável.*

(ii) *Considere-se o sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= -a_{11}(x)u_1 - a_{12}(x)u_2 \\ u_2' &= a_{21}(x)u_1 - a_{22}(x)u_2, \end{aligned} \tag{4.43}$$

onde $a_{21}(x) = a_{12}(x)$, $a_{11}(x) \geq \delta > 0$ *e* $a_{22}(x) \geq \delta > 0$ *para qualquer* $x \in [0, +\infty[$. *A função escalar* $V(x, u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$ *é definida positiva e decrescente em* $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^2$ *e*

$$\begin{aligned} V^*(x,u) &= 2u_1\left(-a_{11}(x)u_1 - a_{12}(x)u_2\right) + 2u_2\left(a_{21}(x)u_1 - a_{22}(x)u_2\right) \\ &= -2a_{11}(x)u_1^2 - 2a_{22}(x)u_2^2 \leq -2\delta\left(u_1^2 + u_2^2\right), \end{aligned}$$

em $[0, +\infty[\times\mathbb{R}^2$. *Logo a solução trivial de (4.43) é assimptoticamente estável.*

A solução trivial do sistema (3.1) será instável caso se verifiquem as seguintes condições:

Teorema 4.6.7 *Se existir uma função escalar* $V(x,u) \in C^1\left([x_0, +\infty[\times S_\rho, \mathbb{R}\right)$ *tal que:*

(i) $|V(x,u)| \leq q(\|u\|)$ *com* $q \in \mathcal{K}$ *e para qualquer* $(x,u) \in [x_0, +\infty[\times S_\rho$;

(ii) *para* $\delta > 0$ *arbitrário existe* u^0 *com* $\left\|u^0\right\| < \delta$ *tal que* $V(x_0, u^0) < 0$;

(iii) $V^*(x,u) \leq -p(\|u\|)$ *para* $p \in \mathcal{K}$ *e qualquer* $(x,u) \in [x_0, +\infty[\times S_\rho$;

então a solução trivial do sistema (3.1) é instável.

Dem. Suponha-se, por contradição, que a solução trivial de (3.1) é estável.

Então para qualquer $\epsilon > 0$, com $\epsilon < \rho$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\left\|u^0\right\| < \delta$ implica que $\|u(x)\| = \left\|u(x, x_0, u^0)\right\| < \epsilon$ para $x \geq x_0$.

Considere-se u^0 tal que $\left\|u^0\right\| < \delta$ e $V(x_0, u^0) < 0$. Como $\left\|u^0\right\| < \delta$ tem-se $\|u(x)\| < \epsilon$. Portanto, a condição (i) garante que

$$|V(x,u)| \leq q\left(\|u(x)\|\right) \leq q\left(\epsilon\right) \text{ para todo } x \geq x_0. \tag{4.44}$$

Pela hipótese (iii) obtem-se que $V(x, u(x))$ é uma função decrescente pelo que, para $x \geq x_0$, se tem $V(x, u(x)) \leq V(x_0, u^0) < 0$. Ora isto implica que $|V(x, u(x))| \geq \left|V(x_0, u^0)\right|$ e, pela condição (i), $\|u(x)\| \geq q^{-1}\left(\left|V(x_0, u^0)\right|\right)$.

Pela condição (iii), sabe-se que $V^*(x, u(x)) \leq -p(\|u(x)\|)$. Integrando esta desigualdade entre x_0 e x tem-se

$$V(x, u(x)) \leq V(x_0, u^0) - \int_{x_0}^{x} p(\|u(t)\|)dt.$$

Contudo, como $\|u(x)\| \geq q^{-1}\left(\left|V(x_0, u^0)\right|\right)$, conclui-se que $p(\|u(x)\|) \geq p(q^{-1}\left(\left|V(x_0, u^0)\right|\right))$ e, portanto,

$$V(x, u(x)) \leq V(x_0, u^0) - (x - x_0)\, p(q^{-1}\left(\left|V(x_0, u^0)\right|\right)).$$

Assim, tem-se que $\lim_{x\to+\infty} V(x,u(x)) = -\infty$, o que contradiz (4.44). Logo a solução trivial de (3.1) é instável. ■

Exemplo 4.6.8 *No sistema*

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(x)u_1 - a_{12}(x)u_2 \\ u_2' &= a_{21}(x)u_1 + a_{22}(x)u_2, \end{aligned} \tag{4.45}$$

com $a_{21}(x) = a_{12}(x)$, $a_{11}(x) \geq \delta > 0$ *e* $a_{22}(x) \geq \delta > 0$ *para qualquer* $x \in [0,+\infty[$, *defina-se a função escalar* $V(x,u_1,u_2) = -\left(u_1^2+u_2^2\right)$. *Para todo* $(x,u) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2$ *tem-se*

$$|V(x,u_1,u_2)| \leq u_1^2+u_2^2 = r^2 = q(r),$$

para $(u_1,u_2) \neq (0,0)$, $V(x,u_1,u_2) < 0$ *e*

$$\begin{aligned} V^*(x,u_1,u_2) &= -2\left(a_{11}(x)u_1^2 + a_{22}(x)u_2^2\right) \\ &\leq -2\delta\left(u_1^2+u_2^2\right) = -2\delta r^2 = -p(r). \end{aligned}$$

Como se verificam as condições do Teorema 4.6.7, a solução trivial de (4.45) é instável.

Pode mesmo obter-se condições que garantam uma estabilidade uniforme:

Teorema 4.6.9 *Se existir uma função escalar definida positiva e decrescente* $V(x,u) \in C^1\left([x_0,+\infty[\times S_\rho,\mathbb{R}^+\right)$ *tal que* $V^*(x,u) \leq 0$ *em* $[x_0,+\infty[\times S_\rho$, *então a solução trivial do sistema (3.1) é uniformemente estável.*

Dem. Como $V(x,u)$ é definida positiva e decrescente, existem funções $p,q \in \mathcal{K}$ tais que

$$p\left(\|u\|\right) \leq V(x,u) \leq q\left(\|u\|\right), \tag{4.46}$$

para $(x,u) \in [x_0,+\infty[\times S_\rho$. Para cada ϵ, com $0<\epsilon<\rho$, escolha-se $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $q(\delta) < p(\epsilon)$.

Pretende-se provar que a solução trivial do sistema (3.1) é uniformemente estável, isto é, se $x_1 \geq x_0$ e $\|x_1\| < \delta$ então $\|u(x)\| < \epsilon$ para todo $x \geq x_1$.

Suponha-se que isto não acontece.

Então existe $x_2 > x_1$ tal que $x_1 \geq x_0$ e $\|u(x_1)\| < \delta$ implica que

$$\|u(x_2)\| = \epsilon. \tag{4.47}$$

Integrando $V^*(x,u(x)) \le 0$ em $[x_1,x]$ tem-se que $V(x,u(x)) \le V(x_1,u(x_1))$ e, para $x = x_2$,

$$\begin{aligned} p(\epsilon) &= p\left(\|u(x_2)\|\right) \le V(x_2,u(x_2)) \le V(x_1,u(x_1)) \\ &\le q\left(\|u(x_1)\|\right) \le q\left(\delta\right) < p\left(\epsilon\right). \end{aligned}$$

Isto contradiz (4.47), pelo que não existe nenhum x_2 nestas condições. Logo a solução trivial de (3.1) é uniformemente estável. ■

Corolário 4.6.10 *Se existir uma função escalar*

$$V(x,u) \in C\left([x_0,+\infty[\times S_\rho,\mathbb{R}^+\right)$$

que verifique (4.46) e seja não crescente em x*, para toda a solução* $u(x)$ *de (3.1) com* $\|u(x)\| < \rho$*, então a solução trivial do sistema (3.1) é uniformemente estável.*

Exemplo 4.6.11 *Considere-se o sistema (4.43). A função* $V(x,u_1,u_2) = u_1^2 + u_2^2$ *é definida positiva, decrescente e* $V^*(x,u_1,u_2) \le 0$ *para todas as soluções de (4.43). Então a solução trivial de (4.43) é uniformemente estável.*

Para terminar este tema saliente-se que o principal inconveniente do método directo de Lyapunov está relacionado com o facto de não haver um método geral que permita construir a função $V(x,u)$. Apesar disso, em muitos casos de sistemas de equações diferenciais essa construção é possível.

4.7 Equações oscilatórias

Nesta secção estuda-se a equação linear de 2^a ordem

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0 \tag{4.48}$$

e o caso particular

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{4.49}$$

onde $p,q \in C(J)$ e $p(x) > 0$, para $x \in J$.

Por solução da equação (4.48) entende-se uma função não trivial $y \in C^1(J)$ e com $py' \in C^1(J)$.

Uma **solução** $y(x)$ de (4.48) diz-se **oscilatória** se não tiver um último zero, isto é, se $y(x_1) = 0$ então existe $x_2 > x_1$ tal que $y(x_2) = 0$. Caso contrário dir-se-á **não oscilatória**.

A **equação** (4.48) é **oscilatória** se toda a solução de (4.48) é oscilatória.

Por exemplo a equação $y'' + y = 0$ é oscilatória, enquanto $y'' - y = 0$ é não oscilatória em $J = [0, +\infty[$.

Na prática é útil o seguinte resultado:

Teorema 4.7.1 ***(da comparação de Sturm)*** *Se $\alpha, \beta \in J$ são dois zeros consecutivos de uma solução não trivial $y(x)$ de (4.49), $q_1(x)$ é uma função contínua com $q_1(x) \geq q(x)$ e $q_1(x) \neq q(x)$ em $[\alpha, \beta]$, então toda a solução não trivial $z(x)$ da equação*

$$z'' + q_1(x)z = 0 \tag{4.50}$$

tem um zero em $]\alpha, \beta[$.

Dem. Multiplicando (4.49) por $z(x)$, (4.50) por $y(x)$ e subtraindo, obtem-se

$$z(x)y''(x) - y(x)z''(x) + [q(x) - q_1(x)]\ \ y(x)z(x) = 0,$$

ou seja,

$$\big(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\big)' + [q(x) - q_1(x)]\ \ y(x)z(x) = 0.$$

Como $y(\alpha) = y(\beta) = 0$, por integração tem-se que

$$z(\beta)y'(\beta) - z(\alpha)y'(\alpha) + \int_\alpha^\beta [q(x) - q_1(x)]\ \ y(x)z(x)dx = 0. \tag{4.51}$$

Pela linearidade de (4.49), pode considerar-se $y(x) > 0$ em $]\alpha, \beta[$ e, então, $y'(\alpha) > 0$ e $y'(\beta) < 0$. Logo, por (4.51), conclui-se que $z(x)$ não pode ter sinal constante em $]\alpha, \beta[$, isto é, $z(x)$ tem um zero em $]\alpha, \beta[$. ■

Corolário 4.7.2 *Se $q(x) \geq \frac{1+\epsilon}{4x^2}$, $\epsilon > 0$ para $x > 0$, então a equação (4.49) é oscilatória em $J =]0, +\infty[$.*

Dem. Para $\epsilon > 0$, todas as soluções não triviais da equação diferencial

$$y'' + \frac{\epsilon}{4}y = 0 \tag{4.52}$$

são oscilatórias. Considere-se, em (4.52), $t = e^x$ para obter

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \frac{\epsilon}{4}y = 0. \tag{4.53}$$

Utilizando a mudança de variável $y = \frac{z}{\sqrt{t}}$ em (4.53), tem-se

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1+\epsilon}{4t^2}z = 0. \tag{4.54}$$

Como $z(t) = e^{\frac{x}{2}}y\left(e^x\right)$ a equação (4.54) é também oscilatória. Portanto, pelo Teorema 4.7.1, entre quaisquer dois zeros da solução de (4.54) existe um zero de toda a solução de (4.49). Logo a equação (4.49) é oscilatória em $J =]0, +\infty[$. ■

Exemplo 4.7.3 ***(i)*** *A equação $y'' = 0$ é não oscilatória. Então, se $q(x) \leq 0$ em J (não identicamente nula), pelo Teorema 4.7.1, as soluções de (4.49) não podem ter mais que um zero em J.*
(ii) *A equação $y'' + y = 0$ é oscilatória. Então, pelo Teorema 4.7.1, a equação*

$$y'' + (1+x)\,y = 0$$

é também oscilatória em $J = [0, +\infty[$.
(iii) *Pelo Corolário 4.7.2, toda a solução de*

$$y'' + \frac{c}{x^2}y = 0$$

tem uma infinidade de zeros positivos se $c > \frac{1}{4}$ e um número finito de zeros se $c < \frac{1}{4}$.

Para aplicar o Teorema da Comparação de Sturm à equação (4.48), é necessário o seguinte lema:

Lema 4.7.4 *(**Igualdade de Picone**) Se as funções y, z, py' e p_1z' são diferenciáveis e $z(x) \neq 0$ em J, então é válida a igualdade*

$$\begin{aligned}\left[\frac{y}{z}\left(zpy' - yp_1z'\right)\right]' &= y\left(py'\right)' - \frac{y^2}{z}\left(p_1z'\right)' + (p - p_1)\left(y'\right)^2 \\ &\quad + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Dem. Desenvolvendo o primeiro membro da equação tem-se

$$\begin{aligned}&\left(\frac{y'}{z} - \frac{y}{z^2}z'\right)\left(zpy' - yp_1z'\right) + \frac{y}{z}\left[z'py' + z\left(py'\right)' - y'p_1z' - y\left(p_1z'\right)'\right] \\ = \;& y\left(py'\right)' - \frac{y^2}{z}\left(p_1z'\right)' + p\left(y'\right)^2 - \frac{2yy'p_1z'}{z} + \frac{y^2p_1\left(z'\right)^2}{z^2} \\ = \;& y\left(py'\right)' - \frac{y^2}{z}\left(p_1z'\right)' + (p - p_1)\left(y'\right)^2 + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.7.5 *(de **Sturm-Picone**) Sejam $\alpha, \beta \in J$ dois zeros consecutivos de uma solução não trivial, $y(x)$, de (4.48). Se $p_1(x)$ e $q_1(x)$ são funções contínuas com $0 < p_1(x) \leq p(x)$, $q_1(x) \geq q(x)$ em $[\alpha, \beta]$, então toda a solução não trivial $z(x)$ da equação*

$$\left(p_1(x)z'\right)' + q_1(x)z = 0 \tag{4.56}$$

tem um zero em $[\alpha, \beta]$.

Dem. Supondo que $z(x) \neq 0$ em $[\alpha, \beta]$, o Lema 4.7.4 é aplicável. Assim, por (4.55) e pelas equações diferenciais (4.48) e (4.56), tem-se

$$\left[\frac{y}{z}\left(zpy' - yp_1z'\right)\right]' = (q_1 - q)\, y^2 + (p - p_1)\left(y'\right)^2 + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2.$$

Integrando esta igualdade, e pelo facto de $y(\alpha) = y(\beta) = 0$, obtem-se

$$\int_\alpha^\beta \left[(q_1 - q)\, y^2 + (p - p_1)\left(y'\right)^2 + p_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2\right] dx = 0,$$

o que é uma contradição a menos que $q_1(x) \equiv q(x)$, $p_1(x) \equiv p(x)$ e $y' - \frac{y}{z}z' \equiv 0$. Esta última identidade é equivalente a $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{z}\right) \equiv 0$, pelo que $\frac{y(x)}{z(x)} \equiv$constante. Como $y(\alpha) = 0$ então a constante terá de ser zero, pelo que $\frac{y(x)}{z(x)} \equiv 0$, ou seja, $y(x) \equiv 0$.

Esta contradição implica que $z(x)$ tem que ter um zero em $[\alpha, \beta]$. ■

Corolário 4.7.6 *(**Teorema da separação de Sturm**) Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (4.48), linearmente independentes em J, então entre dois zeros consecutivos de uma solução existe precisamente um zero da outra.*

Dem. Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem ter zeros comuns, aplicando o Teorema 4.7.5, com $p_1(x) \equiv p(x)$ e $q_1(x) \equiv q(x)$, conclui-se que a solução $y_2(x)$ tem pelo menos um zero entre dois zeros consecutivos de $y_1(x)$. Trocando o papel de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tem-se, de modo análogo, que entre dois zeros consecutivos de $y_2(x)$ existe pelo menos um zero de $y_1(x)$. ■

Exemplo 4.7.7 *As funções $y_1(x) = c_1 \cos x + c_2 senx$ e $y_2(x) = c_3 \cos x + c_4 senx$ são soluções linearmente independentes de $y'' + y = 0$ se e só se $c_1c_4 \neq c_2c_3$. Portanto, pelo Corolário 4.7.6, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ têm zeros alternados.*

Num intervalo limitado $J = [\alpha, \beta]$ a equação (4.48) pode ter, no máximo, um número finito de zeros:

Teorema 4.7.8 *A única solução de (4.48) que se anula infinitas vezes em $J = [\alpha, \beta]$ é a solução nula.*

Dem. Considere-se uma solução $y(x)$ de (4.48) que tem um número infinito de zeros em J.

O conjunto dos zeros terá um ponto de acumulação $x^* \in J$, pelo que existe uma sucessão (x_m) de zeros convergindo para x^* com $x_m \neq x^*$, $m = 0, 1, ...$

Pretende-se provar em seguida que $y(x^*) = y'(x^*) = 0$ e, pela unicidade de solução, concluir que $y(x) \equiv 0$ em J.

Para tal, a continuidade da solução $y(x)$ implica que $y(x^*) = \lim y(x_m) = 0$.

Pela diferenciabilidade da solução $y(x)$ tem-se

$$y'(x^*) = \lim_{m \to +\infty} \frac{y(x_m) - y(x^*)}{x_m - x^*} = 0.$$

■

Exercício 4.7.9 *Mostre que a equação diferencial (4.48) tem uma solução sem zeros no intervalo J se, e só se, a equação de Ricati*

$$z' + q(x) + \frac{z^2}{p(x)} = 0 \tag{4.57}$$

tem uma solução definida em todo o intervalo J.

Um teste mais fácil para verificar o carácter oscilatório de (4.48) é dado por:

Teorema 4.7.10 *Se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{p(x)} dx = +\infty \text{ e } \int_0^{+\infty} q(x) dx = +\infty,$$

então a equação (4.48) é oscilatória em $J =]0, +\infty[$.

Dem. Seja $y(x)$ uma solução não oscilatória de (4.48), que se considera ser positiva em $[x_0, +\infty[$, para $x_0 > 0$. Então, pelo Exercício 4.7.9, a equação (4.57) tem uma solução $z(x)$ em $[x_0, +\infty[$. Esta solução verifica a equação integral

$$z(x) = z(x_0) - \int_{x_0}^{x} q(t) dt - \int_{x_0}^{x} \frac{z^2(t)}{p(t)} dt. \tag{4.58}$$

Como $\int_0^{+\infty} q(x)dx = +\infty$, é possível encontrar $x_1 > 0$ tal que

$$z(x_0) - \int_{x_0}^{x} q(t)dt < 0,$$

para $x \in [x_1, +\infty[$. Portanto, por (4.58), conclui-se que

$$z(x) < -\int_{x_0}^{x} \frac{z^2(t)}{p(t)}dt,$$

para $x \in [x_1, +\infty[$. Defina-se

$$r(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{z^2(t)}{p(t)}dt, \quad x \in [x_1, +\infty[.$$

Então $z(x) < -r(x)$ e

$$r'(x) = \frac{z^2(x)}{p(x)} > \frac{r^2(x)}{p(x)} \tag{4.59}$$

para $x \in [x_1, +\infty[$. Integrando (4.59) em $[x_1, +\infty[$, com $x_1 > x_0$, obtem-se

$$-\frac{1}{r(+\infty)} + \frac{1}{r(x_1)} > \int_{x_1}^{+\infty} \frac{1}{p(t)}dt$$

e, portanto,

$$\int_{x_1}^{+\infty} \frac{1}{p(t)}dt < \frac{1}{r(x_1)} < +\infty,$$

o que contradiz a hipótese sobre $p(x)$. Logo a solução $y(x)$ é oscilatória. ∎

4.8 Exercícios

1. Analise a estabilidade, a estabilidade assimptótica ou a instabilidade das soluções triviais dos seguintes sistemas:

a) $u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} u;$

b) $u' = \begin{bmatrix} -1 & -e^{2x} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u;$

c) $u' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix} u.$

2. No sistema diferencial (3.16) considere-se $A(x)$ e $b(x)$ contínuas em $[x_0, +\infty[$. Prove que:

a) Se todas as soluções são limitadas em $[x_0, +\infty[$ então são estáveis.

b) Se todas as soluções são estáveis e uma delas é limitada então todas as soluções são limitadas em $[x_0, +\infty[$.

3. O movimento de um **pêndulo simples amortecido** é modelado pela equação

$$\theta'' + \frac{k}{m}\theta' + \frac{g}{L}\ sen\theta = 0,$$

que é geralmente "linearizado" na forma

$$\theta'' + \frac{k}{m}\theta' + \frac{g}{L}\ \theta = 0. \tag{4.60}$$

Escreva a equação (4.60) na forma de sistema e analise a sua estabilidade.

4. Analise a estabilidade, a estabilidade assimptótica ou a instabilidade das soluções triviais dos seguintes sistemas perturbados:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} u_1' &=& -2u_1 + u_2 + 3u_3 + 8u_1^2 + u_2^3 \\ u_2' &=& -6u_2 - 5u_3 + 7u_3^4 \\ u_3' &=& -u_3 + u_1^4 + u_2^2 + u_3^3 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} u_1' &=& 2u_1 + u_2 - u_1^2 - u_2^2 \\ u_2' &=& u_1 + 3u_2 - u_1^3\ sen\ u_3 \\ u_3' &=& u_2 + 2u_3 + u_1^2 + u_2^2 \end{array}\right.$

5. Analise a estabilidade, a estabilidade assimptótica ou a instabilidade das soluções triviais das equações seguintes:

a) $y''' + 3y'' - 4y' + 7y + y^2 = 0$

b) $y'''' + 2y''' + 3y'' + 11y + y\ seny = 0$

6. Mostre que todas as soluções das equações diferenciais seguintes são periódicas:

a) $y'' + a^2y + by^3 = 0,\ \ b > 0$ (**Equação de Duffing**)

b) $y'' + \frac{y^3}{1+y^4} = 0.$

7. Prove que todas as soluções dos sistemas diferenciais seguintes são periódicas:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} u_1' &=& u_2\left(1 + u_1^2 + u_2^2\right) \\ u_2' &=& -2u_1\left(1 + u_1^2 + u_2^2\right). \end{array}\right.$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_2\ e^{1+u_1^2} \\ u_2' &= -u_1\ e^{1+u_1^2}. \end{cases}$

8. Determine todos os pontos críticos dos sistemas diferenciais e indique o respectivo tipo de estabilidade:

a) $\begin{cases} u_1' &= u_1 + 4u_2 \\ u_2' &= u_1 + u_2 - u_1^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_1 - 4u_2 + u_1^2 \\ u_2' &= 12u_1 - 6u_2 + u_1u_2. \end{cases}$

9. Indique o tipo de estabilidade do ponto crítico $(0,0)$ em cada um dos sistemas lineares e esboce o respectivo retrato-fase:

a) $\begin{cases} u_1' &= -2u_1 + u_2 \\ u_2' &= -5u_1 - 6u_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= 4u_1 + u_2 \\ u_2' &= 3u_1 + 6u_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= 2u_1 - u_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1' &= -2u_1 - 5u_2 \\ u_2' &= 2u_1 + 2u_2. \end{cases}$

10. Calcule todos os pontos críticos dos sistemas diferenciais e indique a sua natureza:

a) $\begin{cases} u_1' &= -u_1^2 + 4u_2^2 \\ u_2' &= 2u_1u_2 - 4u_2 - 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_1\,(2u_2 - u_1 + 5) \\ u_2' &= u_1^2 + u_2^2 - 6u_1 - 8u_2. \end{cases}$

11. Determine os ciclos limite dos sistemas diferenciais:

a) $\begin{cases} u_1' &= u_2 + u_1\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\left(u_1^2+u_2^2-3\right) \\ \\ u_2' &= -u_1 + u_2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\,\left(u_1^2+u_2^2-3\right) \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= -u_2 + \frac{u_1\left(u_1^2+u_2^2-2\right)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \\ \\ u_2' &= u_1 + \frac{u_2\left(u_1^2+u_2^2-2\right)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}. \end{cases}$

12. Mostre a existência de soluções periódicas não triviais em cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} u_1' &= 2u_1 - 2u_2 - u_1\left(u_1^2+u_2^2\right) \\ u_2' &= 2u_1 + 2u_2 - u_2\left(u_1^2+u_2^2\right) \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_2 - \frac{u_1\left(u_1^2+u_2^2-1\right)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \\ u_2' &= -u_1 - \frac{u_2\left(u_1^2+u_2^2-1\right)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}. \end{cases}$

13. Justifique que, nos sistemas seguintes, não existem soluções periódicas não triviais:

a) $\begin{cases} u_1' &= u_1 + 7u_2^2 + 2u_1^3 \\ u_2' &= -u_1 + 3u_2 + u_2u_1^2 \end{cases}, \quad D = \mathbb{R}^2$

b) $\begin{cases} u_1' &= u_1 - u_1u_2^2 + u_2^3 \\ u_2' &= 3u_2 - u_2u_1^2 + u_1^3 \end{cases}, \quad D = \left\{(u_1,u_2) : u_1^2 + u_2^2 < 4\right\}.$

14. Em cada um dos sistemas construa a função de Lyapunov da forma $c_1u_1^2 + c_2u_2^2$ para estudar a estabilidade da respectiva solução trivial:

a) $\begin{cases} u_1' &= -u_1 + e^{u_1}u_2 \\ u_2' &= -u_2 - e^{u_1}u_1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1' &= -u_1^3 + u_2u_1^2 \\ u_2' &= -u_1^3 - u_2u_1^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1' &= 2u_2u_1 + u_1^3 \\ u_2' &= -u_1^2 + u_2^5. \end{cases}$

15. Considere-se o sistema

$$\begin{cases} u_1' &= u_2 - u_1 f\left(u_1,u_2\right) \\ u_2' &= -u_1 - u_2 f\left(u_1,u_2\right), \end{cases}$$

em que $f\left(u_1,u_2\right)$ pode ser escrita como uma série de funções em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, contendo a origem, e $f(0,0) = 0$.

Mostre que a solução trivial do sistema anterior é:

a) estável se $f\left(u_1,u_2\right) \geq 0$ numa região que contem a origem;

b) assimptoticamente estável se $f\left(u_1,u_2\right)$ é definida positiva numa vizinhança da origem;

c) instável se, em qualquer região que contenha a origem, existem pontos (u_1,u_2) tais que $f\left(u_1,u_2\right) < 0$.

16. Aplicando o exercício anterior, analise a estabilidade da solução trivial dos sistemas:

a) $$\begin{cases} u_1' &= u_2 - u_1\left(e^{u_1}\text{sen}^2 u_2\right) \\ u_2' &= -u_1 - u_2\left(e^{u_1}\text{sen}^2 u_2\right) \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u_1' &= u_2 - u_1\left(u_1^4 + u_2^6 + 2u_2^2 u_1^2 \text{sen}^2 u_1\right) \\ u_2' &= -u_1 - u_2\left(u_1^4 + u_2^6 + 2u_2^2 u_1^2 \text{sen}^2 u_1\right) \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} u_1' &= u_2 - u_1\left(u_2^3 \text{sen}^2 u_1\right) \\ u_2' &= -u_1 - u_2\left(u_2^3 \text{sen}^2 u_1\right). \end{cases}$$

17. Para a equação diferencial

$$y' = \left(sen\,(\ln x) + \cos\,(\ln x) - \frac{5}{4}\right) y, \tag{4.61}$$

considere a função

$$V(x,y) = y^2 e^{\left(\frac{5}{2} - 2sen(\ln x)\right)x}.$$

Mostre que:

a) $V(x,y)$ é definida positiva mas não é decrescente;

b) A solução trivial de (4.61) é estável.

18. Prove que a solução trivial do sistema

$$\begin{cases} u_1' &= p(x)u_2 + q(x)u_1\left(u_1^2 + u_2^2\right) \\ u_2' &= -p(x)u_1 + q(x)u_2\left(u_1^2 + u_2^2\right), \end{cases}$$

com $p, q \in C\left([0, +\infty[\right)$ é:

a) estável se $q(x) \leq 0$;

b) assimptoticamente estável se $q(x) \leq \delta < 0$;

c) instável se $q(x) \geq \delta > 0$.

19. Seja $q_1(x)$ uma função contínua tal que $q_1(x) \geq q(x)$ em J. Justifique que:

a) Se a equação (4.49) é oscilatória então (4.50) também é oscilatória.

b) Se a equação (4.50) é não oscilatória então (4.49) também é não oscilatória.

20. Considerem-se a função $q(x)$ tal que $0 < m \leq q(x) \leq M$ em $[\alpha, \beta]$ e $\alpha \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq \beta$ zeros da solução $y(x)$ da equação (4.49). Da comparação entre as equações

$$y'' + my = 0 \ \text{ e } \ y'' + My = 0$$

mostre que:

a) $\frac{\pi}{\sqrt{m}} \geq x_{i+1} - x_i \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$, $i = 1, 2, ..., n-1$.

b) $n > (\beta - \alpha) \frac{\sqrt{m}}{\pi} - 1$.

4.9 Actividades

Actividade 1:

1.1. Considere a equação $y'' + \mu \left(y^2 - 1\right) y' + y = 0$, que é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= \mu \left(y^2 - 1\right) u_2 - u_1. \end{aligned}$$

a) Prove que $(0, 0)$ é o único ponto crítico do sistema.

b) Determine a natureza do ponto crítico para

b.1) $\mu < 2$;

b.2) $\mu = 2$;

b.3) $\mu > 2$.

1.2. Seja $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$ uma solução do sistema diferencial (4.14). Mostre que:

(i) Se $u(x)$ é periódica de período ω, então a trajectória desta solução é uma curva fechada no plano $u_1 u_2$.

(i) Se a trajectória de $u(x)$ é uma curva fechada que não contem pontos críticos de (4.14), então esta solução é periódica.

Actividade 2:

2.1. Considere o sistema diferencial

$$u' = A(x)u, \tag{4.62}$$

com $A(x)$ uma matriz contínua em $[x_0, +\infty[$. O sistema diz-se **estável** se todas as soluções são estáveis e diz-se **estritamente estável** se o sistema e o sistema adjunto,

$$u' = -A^T(x)u, \tag{4.63}$$

forem estáveis.

Prove que:

a) Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade estrita é que exista uma constante $c > 0$ tal que $\|\Phi(x, x_0)\,\Phi(x_0, t)\| \leq c$, para $x \geq x_0$, $t \geq x_0$, e com $\Phi(x, x_0)$ a matriz fundamental de (4.62).

b) Se o sistema (4.62) é estável e se verifica a condição (3.60), então o sistema é estritamente estável.

c) Se o sistema adjunto (4.63) é estável e

$$\limsup_{x \to +\infty} \int_0^x Tr\ A(t)dt < +\infty,$$

então o sistema (4.62) é estritamente estável.

2.2. Na equação diferencial

$$y'' = (x \text{ sen } x - 2x)\, y, \tag{4.64}$$

considere a função

$$V(x, y) = y^2\ e^{\int_0^x (2t - t \text{ sen } t)dt}.$$

Mostre que:

a) $V(x, y)$ é definida positiva mas não é decrescente.

b) $V^*(x, y) \leq -\lambda V(x, y)$, para $x \geq \lambda > 0$.

c) A solução trivial de (4.64) é assimptoticamente estável.

Actividade 3:

3.1. Seja $q_1(x)$ uma função contínua tal que $q_1(x) \geq q(x)$, com $q_1(x)$ não identicamente igual a $q(x) \in C([\alpha, \beta])$ no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Considerem-se, ainda, $y(x)$ solução de

$$y'' + q(x)y = 0$$

e $z(x)$ solução da equação

$$z'' + q_1(x)z = 0$$

tais que

$$\frac{y'(\alpha)}{y(\alpha)} \geq \frac{z'(\alpha)}{z(\alpha)}, \quad y(\alpha) \neq 0, \quad z(\alpha) \neq 0,$$

ou

$$y(\alpha) = z(\alpha) = 0.$$

(i) Use o teorema da comparação de Sturm (Teorema 4.7.1) para provar que $z(x)$ tem, pelo menos, tantos zeros em $[\alpha, \beta]$ quantos os de $y(x)$.

(ii) Se $y(x)$ e $z(x)$ têm o mesmo número de zeros, então prove que

$$\frac{y'(\beta)}{y(\beta)} \geq \frac{z'(\beta)}{z(\beta)},$$

desde que $y(\beta) \neq 0$.

3.2. Justifique que a questão da estabilidade da solução $u(x) = u(x, x_0, u^0)$ do sistema (3.1) pode-se reduzir sempre à análise da estabilidade da solução trivial do sistema de equações diferenciais

$$v' = G(x, v),$$

com $v = u - u(x)$ e $G(x, v) = g(x, v + u(x)) - g(x, u(x))$.

CAP. 5

Problemas com Valores na Fronteira

Após este capítulo o aluno deverá:

- Reconhecer problemas com valores na fronteira e entender as suas peculiaridades em relação aos problemas de valor inicial.
- Identificar condições para os dados na fronteira de modo a que o problema homogéneo com valores na fronteira admita uma solução, infinitas soluções ou apenas a solução trivial.
- Construir a função de Green para o problema homogéneo com valores na fronteira, identificando os casos em que tal é possível.
- Utilizar a função de Green e as suas propriedades para obter explicitamente a solução de um problema não homogéneo com valores na fronteira.
- Aplicar princípios de máximo, ou de mínimo, para obter a existência e/ou unicidade de solução, bem como dados qualitativos sobre a solução de problemas com valores na fronteira.
- Identificar problemas de Sturm-Liouville, obter os valores do parâmetro para os quais a solução não trivial existe (valores próprios) e determinar as correspondentes funções próprias (soluções não triviais).
- Dominar conceitos relacionados com os valores próprios e funções próprias, tais como, ortogonalidade, função peso, ortonormalidade,....

- Analisar propriedades do espectro de problemas, regulares e singulares, com valores na fronteira, e das funções próprias correspondentes.

- Aproximar uma função por uma série de funções próprias. Conhecer alguns casos particulares como as séries de Fourier e as respectivas propriedades.

- Distinguir e aplicar as potencialidades de vários tipos de convergência das séries de funções próprias (pontual, uniforme, em média,...).

- Relacionar funções seccionalmente contínuas com o tipo de convergência das séries de Fourier.

- Utilizar a Alternativa de Fredholm para obter informação sobre o número de soluções de problemas homogéneos com valores na fronteira e o modo de as determinar.

- Adaptar a problemas não lineares com valores na fronteira a teoria estudada para problemas de valor inicial, nomeadamente o que respeita à existência local e/ou global da solução, unicidade de solução, aproximações sucessivas e estimação do erro.

5.1 Problemas lineares com valores na fronteira

Até ao momento apenas têm sido referidos problemas de valor inicial, isto é, problemas em que, além da equação diferencial, existem informações sobre a função incógnita e algumas derivadas num ponto fixo x_0. Em várias situações, esses dados suplementares são obtidos através de valores que a função incógnita e/ou algumas derivadas tomam em mais do que um valor fixo da variável independente (**condições de fronteira**). A equação diferencial em conjunto com este tipo de condições formam os **problemas com valores na fronteira**.

Considere-se a equação linear de segunda ordem

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \tag{5.1}$$

no intervalo $J = [\alpha, \beta]$, com as funções $p_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, e $r(x)$ contínuas em J. A esta equação juntam-se condições do tipo

$$\begin{aligned} L_1[y] &:= a_0y(\alpha) + a_1y'(\alpha) + b_0y(\beta) + b_1y'(\beta) = A \\ L_2[y] &:= c_0y(\alpha) + c_1y'(\alpha) + d_0y(\beta) + d_1y'(\beta) = B, \end{aligned} \tag{5.2}$$

com a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1$, A, B constantes conhecidas e L_1, L_2 condições linearmente independentes, isto é, para as quais não existe uma constante k tal que $(a_0, a_1, b_0, b_1) = k\,(c_0, c_1, d_0, d_1)$.

O problema com valores na fronteira (5.1), (5.2) designa-se por **problema linear não homogéneo com valores em dois pontos**.

A equação homogénea

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \tag{5.3}$$

em conjunto com as condições de fronteira homogéneas

$$L_1\,[y] = 0, \quad L_2\,[y] = 0 \tag{5.4}$$

formam um **problema homogéneo com valores na fronteira**.

As condições de fronteira (5.2) são muito gerais e incluem vários casos:

1. **Condições de Dirichlet**

$$y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \tag{5.5}$$

2. **Condições mistas**

$$y(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B \tag{5.6}$$

ou

$$y'(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \tag{5.7}$$

3. **Condições separadas** (ou do tipo Sturm-Liouville)

$$\begin{aligned} a_0y(\alpha) + a_1y'(\alpha) &= A \\ d_0y(\beta) + d_1y'(\beta) &= B, \end{aligned} \tag{5.8}$$

com $a_0^2 + a_1^2$ e $d_0^2 + d_1^2$ não nulos;

4. **Condições periódicas**

$$y(\alpha) = y(\beta), \quad y'(\alpha) = y'(\beta). \tag{5.9}$$

O problema com valores na fronteira (5.1), (5.2) diz-se **regular** se α e β forem finitos e $p_2(x) \neq 0$, $\forall x \in J$.

Se $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$ e/ou existe pelo menos um $x \in J$ tal que $p_2(x) = 0$, então o problema (5.1), (5.2) diz-se **singular**.

Caso não haja indicação em contrário, consideram-se problemas regulares.

Por solução do problema (5.1), (5.2) designa-se uma solução da equação diferencial (5.1) que verifica as condições (5.2).

A teoria de existência e unicidade para os problemas com valores na fronteira apresenta mais dificuldades que os problemas de valor inicial, pois uma pequena alteração nas condições de fronteira pode provocar modificações significativas nas soluções.

Por exemplo, o problema de valor inicial

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = k_1, \quad y'(0) = k_2$$

tem uma única solução, $y(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x$, para quaisquer k_1, k_2 reais. Contudo o problema com valores na fronteira

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \epsilon (\neq 0)$$

não tem solução; o problema

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\beta) = \epsilon, \ \ 0 < \beta < \pi,$$

tem uma única solução, $y(x) = \frac{\epsilon \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \beta}$; o problema

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

tem uma infinidade de soluções, $y(x) = c \operatorname{sen} x$, com c uma constante arbitrária.

É evidente que o problema homogéneo (5.3), (5.4) admite sempre a solução trivial. Contudo, como se vê pelos exemplos acima, o problema homogéneo pode ter soluções não triviais. Uma condição necessária e suficiente para a sua existência é dada pelo Teorema:

Teorema 5.1.1 *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções linearmente independentes da equação (5.3). Então o problema homogéneo com valores na fronteira (5.3), (5.4) admite apenas a solução trivial se, e só se,*

$$\Delta := \begin{vmatrix} L_1[y_1] & L_1[y_2] \\ L_2[y_1] & L_2[y2] \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.10}$$

Dem. Qualquer solução da equação diferencial (5.3) pode ser escrita na forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Esta função será solução do problema (5.3), (5.4) se, e só se,

$$\begin{array}{c} L_1 [c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L_1 [y_1] + c_2 L_1 [y_2] = 0 \\ L_2 [c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L_2 [y_1] + c_2 L_2 [y_2] = 0. \end{array} \tag{5.11}$$

Contudo, este sistema tem apenas a solução trivial se, e só se, $\Delta \neq 0$. ■

O Teorema 5.1.1 é independente da escolha das soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Assim, por uma facilidade de cálculos, pode-se sempre considerar as soluções de (5.3) que verificam as condições iniciais

$$y_1(\alpha) = 1, \quad y_1'(\alpha) = 0 \tag{5.12}$$

e

$$y_2(\alpha) = 0, \quad y_2'(\alpha) = 1. \tag{5.13}$$

Corolário 5.1.2 *O problema homogéneo com valores na fronteira (5.3), (5.4) admite infinitas soluções se, e só se,* $\Delta = 0$.

Exemplo 5.1.3 *Considere-se o problema*

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0 \tag{5.14}$$

$$\begin{array}{c} L_1 [y] = y(1) = 0, \\ L_2 [y] = y(2) = 0. \end{array} \tag{5.15}$$

As funções $y_1(x) = \cosh\left(x^2 - 1\right)$ *e* $y_2(x) = \frac{1}{2} senh\left(x^2 - 1\right)$, *soluções de (5.14), são linearmente independentes. Como, para as condições de fronteira (5.15), se tem*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cosh 3 & \frac{1}{2} senh 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

então o problema (5.14), (5.15) tem apenas a solução trivial.

Exemplo 5.1.4 *O problema com valores na fronteira*

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

$$\begin{array}{c} L_1 [y] = y(0) = 0, \\ L_2 [y] = y(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{array}$$

admite as soluções linearmente independentes $y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$ *e* $y_2(x) = e^{-x}sen(2x)$. *Como*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\frac{\pi}{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

então o problema tem, além da solução trivial, soluções não triviais. De facto tem um número infinito de soluções da forma $y(x) = ke^{-x}sen2x$, *com* k *uma constante arbitrária.*

Teorema 5.1.5 *O problema não homogéneo com valores na fronteira, (5.1), (5.2), tem uma única solução se, e só se, o problema homogéneo (5.3), (5.4) admite apenas a solução trivial.*

Dem. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções quaisquer, linearmente independentes, da equação (5.3) e $z(x)$ uma solução particular de (5.1).

Assim, a solução geral de (5.1) pode ser escrita na forma

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + z(x). \tag{5.16}$$

Esta função será solução do problema (5.1), (5.2) se, e só se,

$$\begin{array}{c} L_1[c_1y_1 + c_2y_2 + z] = c_1L_1[y_1] + c_2L_1[y_2] + L_1[z] = A \\ L_2[c_1y_1 + c_2y_2 + z] = c_1L_2[y_1] + c_2L_2[y_2] + L_2[z] = B. \end{array} \tag{5.17}$$

Mas, o sistema não homogéneo (5.17) tem uma única solução se, e só se, $\Delta \neq 0$, isto é, se, e só se, o sistema homogéneo (5.11) tem apenas a solução trivial.

Pelo Teorema 5.1.1, $\Delta \neq 0$ é equivalente a dizer que o problema homogéneo (5.3), (5.4) admite apenas a solução trivial ■

Exemplo 5.1.6 *Seja o problema*

$$xy'' - y' - 4x^3y = 1 + 4x^4 \tag{5.18}$$

$$\begin{array}{l} L_1[y] = y(1) = 0, \\ L_2[y] = y(2) = 1. \end{array} \tag{5.19}$$

Como o problema homogéneo associado, (5.14), (5.15) admite apenas a solução trivial, pelo Teorema 5.1.5, o problema (5.18), (5.19) tem uma única solução.

Para encontrar essa solução utilizam-se duas soluções linearmente independentes de (5.14), $y_1(x) = \cosh\left(x^2 - 1\right)$ e $y_2(x) = \frac{1}{2} senh\left(x^2 - 1\right)$, e verifica-se que $z(x) = -x$ é uma solução particular de (5.18). Então, para as condições de fronteira (5.19), o sistema

$$\begin{aligned} c_1 - 1 &= 0 \\ \cosh 3\ c_1 + \frac{1}{2} senh\ 3\ c_2 - 2 &= 1 \end{aligned}$$

conduz a $c_1 = 1$ e $c_2 = 2\frac{3-\cosh 3}{senh\ 3}$, pelo que a solução, única, será

$$y(x) = \cosh\left(x^2 - 1\right) + \frac{3 - \cosh 3}{senh\ 3} senh\left(x^2 - 1\right) - x.$$

Exercício 5.1.7 *Sejam $y_1(x)$ uma solução do problema (5.3), (5.2) e $y_2(x)$ uma solução de (5.1), (5.4). Prove que $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ é solução do problema (5.1), (5.2).*

5.2 Funções de Green

Nesta secção mostra-se que a solução do problema não homogéneo com valores na fronteira (5.1), (5.4) pode ser **explicitamente** expressa em termos de uma função $G(x,t)$, designada como **função de Green** do problema homogéneo associado, (5.3), (5.4), assumindo-se que este admite apenas a solução trivial.

A função de Green $G(x,t)$ para o problema (5.3), (5.4) está definida no quadrado $[\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$ e possui as seguintes propriedades:

1. $G(x,t)$ é contínua em $[\alpha,\beta] \times [\alpha,\beta]$.
2. $\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ é contínua para $\alpha \leq x \leq t \leq \beta$ e $\alpha \leq t \leq x \leq \beta$, e
$$\frac{\partial G}{\partial x}(t^+,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t^-,t) = \frac{1}{p_2(t)},$$
sendo
$$\frac{\partial G}{\partial x}(t^+,t) = \lim_{x\to t^+} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(t^-,t) = \lim_{x\to t^-} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t).$$
3. Para $t \in [\alpha,\beta]$, $z(x) = G(x,t)$ é solução da equação (5.3) em cada um dos intervalos $[\alpha,t[$ e $]t,\beta]$.

4. Para $t \in [\alpha, \beta]$, $z(x) = G(x,t)$ verifica as condições de fronteira (5.4).

Estas propriedades caracterizam completamente a função de Green $G(x,t)$. Justifique-se porquê:

Considerem-se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (5.3) linearmente independentes. Pela Propriedade 3, existem quatro funções, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$, tais que

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\lambda_1(t) + y_2(x)\lambda_2(t) & , \quad \alpha \leq x \leq t \\ y_1(x)\mu_1(t) + y_2(x)\mu_2(t) & , \quad t \leq x \leq \beta. \end{cases} \tag{5.20}$$

Pelas Propriedades 1 e 2, obtêm-se as equações:

$$y_1(t)\lambda_1(t) + y_2(t)\lambda_2(t) = y_1(t)\mu_1(t) + y_2(t)\mu_2(t)$$
$$y_1'(t)\mu_1(t) + y_2'(t)\mu_2(t) - y_1'(t)\lambda_1(t) - y_2'(t)\lambda_2(t) = \frac{1}{p_2(t)}.$$

Definindo $\nu_1(t) := \mu_1(t) - \lambda_1(t)$ e $\nu_2(t) := \mu_2(t) - \lambda_2(t)$, as igualdades anteriores podem ser escritas como

$$y_1(t)\nu_1(t) + y_2(t)\nu_2(t) = 0 \tag{5.21}$$
$$y_1'(t)\nu_1(t) + y_2'(t)\nu_2(t) = \frac{1}{p_2(t)}. \tag{5.22}$$

Pela independência linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$, o Wronskiano $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, e, portanto, as relações (5.21) e (5.22) definem univocamente $\nu_1(t)$ e $\nu_2(t)$.

Utilizando as igualdades $\mu_1(t) = \nu_1(t) + \lambda_1(t)$ e $\mu_2(t) = \nu_2(t) + \lambda_2(t)$, a função de Green (5.20) pode ser escrita como

$$G(x,t) = \begin{cases} y_1(x)\lambda_1(t) + y_2(x)\lambda_2(t) & , \quad \alpha \leq x \leq t \\ y_1(x)\left[\nu_1(t) + \lambda_1(t)\right] + y_2(x)\left[\nu_2(t) + \lambda_2(t)\right] & , \quad t \leq x \leq \beta. \end{cases} \tag{5.23}$$

Finalmente, pela Propriedade 4, obtem-se

$$\begin{aligned} L_1[y_1]\lambda_1(t) + L_1[y_2]\lambda_2(t) &= -b_0\left[y_1(\beta)\nu_1(t) + y_2(\beta)\nu_2(t)\right] \\ &\quad -b_1\left[y_1'(\beta)\nu_1(t) + y_2'(\beta)\nu_2(t)\right], \\ L_1[y_1]\lambda_1(t) + L_1[y_2]\lambda_2(t) &= -d_0\left[y_1(\beta)\nu_1(t) + y_2(\beta)\nu_2(t)\right] \\ &\quad -d_1\left[y_1'(\beta)\nu_1(t) + y_2'(\beta)\nu_2(t)\right]. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Como o problema (5.3), (5.4) admite apenas a solução trivial, pelo Teorema 5.1.1, o sistema (5.24) determina univocamente $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.

Pelo método de contrução exposto, não existe mais nenhuma função que verifique as Propriedades 1 a 4, isto é, a **função de Green** $G(x,t)$ relativa ao problema (5.3), (5.4) **é única**.

Verificar-se-á de seguida que a única solução do problema não homogéneo (5.1), (5.4) pode ser representada com recurso a $G(x,t)$, por

$$y(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t)\ r(t)dt = \int_\alpha^x G(x,t)\ r(t)dt + \int_x^\beta G(x,t)\ r(t)dt. \tag{5.25}$$

Como $G(x,t)$ é diferenciável em relação a x em cada um dos intervalos, tem-se

$$\begin{aligned} y'(x) &= G(x,x)r(x) + \int_\alpha^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ r(t)dt - G(x,x)r(x) \\ &\quad + \int_x^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ r(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\ r(t)dt. \end{aligned} \tag{5.26}$$

A função $\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)$ é contínua nos triângulos $\alpha \le x \le t \le \beta$ e $\alpha \le t \le x \le \beta$, pelo que, em qualquer ponto (s,s) da diagonal do quadrado, ou seja, para $x=t$, obtem-se

$$\frac{\partial G}{\partial x}(s,s^-) = \frac{\partial G}{\partial x}(s^+,s) \tag{5.27}$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(s,s^+) = \frac{\partial G}{\partial x}(s^-,s). \tag{5.28}$$

Derivando (5.26),

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,x^-)\ r(x) + \int_\alpha^x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\ r(t)dt \\ &\quad -\frac{\partial G}{\partial x}(x,x^+)\ r(x) + \int_x^\beta \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\ r(t)dt \end{aligned}$$

e, por (5.27) e (5.28),

$$y''(x) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x^+,x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x^-,x)\right) r(x) \int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\ r(t)dt.$$

Pela Propriedade 2, tem-se

$$y''(x) = \frac{r(x)}{p_2(x)} + \int_\alpha^\beta \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t)\ r(t)dt. \tag{5.29}$$

Aplicando (5.25), (5.26), (5.29) e a Propriedade 3,

$$\begin{aligned} & p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y \\ = \ & r(x) + \int_\alpha^\beta \left[p_2(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,t) + p_1(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,t) + p_0(x)G(x,t) \right] r(t)dt \\ = \ & r(x), \end{aligned}$$

isto é, $y(x)$ dado por (5.25) é solução da equação diferencial (5.1).

Para as condições de fronteira, como

$$y(\alpha) = \textstyle\int_\alpha^\beta G(\alpha,t)\ r(t)dt \quad , \quad y(\beta) = \int_\alpha^\beta G(\beta,t)\ r(t)dt,$$

$$y'(\alpha) = \textstyle\int_\alpha^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(\alpha,t)\ r(t)dt \quad , \quad y'(\beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial G}{\partial x}(\beta,t)\ r(t)dt,$$

tem-se

$$L_1[y] = \int_\alpha^\beta L_1[G(x,t)]\ \ r(t)dt = 0 \text{ e } L_2[y] = \int_\alpha^\beta L_2[G(x,t)]\ \ r(t)dt = 0.$$

Logo, $y(x)$ dado por (5.25) verifica as condições de fronteira (5.4).

Estas conclusões podem ser organizadas no resultado seguinte:

Teorema 5.2.1 *Se o problema (5.3), (5.4) admite apenas a solução trivial, então:*

(i) *existe uma única função de Green $G(x,t)$ para o problema (5.3), (5.4);*

(ii) *a solução única $y(x)$ do problema não homogéneo (5.1), (5.4) pode ser representada por (5.25).*

Exemplo 5.2.2 *Para construir a função de Green associada ao problema*

$$y'' = 0 \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) = 0 \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) = 0, \end{aligned} \tag{5.31}$$

considere-se duas soluções de (5.30) linearmente independentes, $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = x$.

O problema (5.30), (5.31) tem apenas a solução trivial se, e só se,

$$\Delta := a_0 d_0 (\beta - \alpha) + a_0 d_1 - a_1 d_0 \neq 0.$$

As igualdades (5.21) e (5.22) reduzem-se a

$$\nu_1(t) + t\nu_2(t) = 0 \quad e \quad \nu_2(t) = 1,$$

pelo que $\nu_1(t) = -t$ *e* $\nu_2(t) = 1$.
O sistema (5.24) toma a forma

$$\begin{aligned} a_0\lambda_1(t) + (a_0\alpha + a_1)\lambda_2(t) &= 0 \\ d_0\lambda_1(t) + (d_0\beta + d_1)\lambda_2(t) &= -d_0(-t+\beta) - d_1, \end{aligned}$$

o que permite determinar $\lambda_1(t)$ *e* $\lambda_2(t)$ *como*

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{1}{\Delta}(a_0\alpha + a_1)(d_0\beta - d_0 t + d_1) \\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{\Delta}a_0(d_0 t - d_0\beta - d_1). \end{aligned}$$

Substituindo estas funções em (5.23), obtem-se a função de Green pretendida

$$G(x,t) = \frac{1}{\Delta}\begin{cases} (d_0\beta - d_0 t + d_1)(a_0\alpha - a_0 x + a_1) &, \quad \alpha \leq x \leq t \\ (d_0\beta - d_0 x + d_1)(a_0\alpha - a_0 t + a_1) &, \quad t \leq x \leq \beta, \end{cases}$$

que é uma função simétrica, isto é, $G(x,t) = G(t,x)$.

Exemplo 5.2.3 *Veja-se agora o caso do problema periódico*

$$y'' + k^2 y = 0, \quad k > 0, \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\omega) \\ y'(0) &= y'(\omega), \end{aligned} \tag{5.33}$$

para $\omega > 0$. *A equação diferencial (5.32) tem, como soluções linearmente independentes,* $y_1(x) = \cos(kx)$ *e* $y_2(x) = sen(kx)$. *Para aplicar o Teorema 5.1.1, o problema (5.32), (5.33) admite apenas a solução trivial se, e só se,*

$$\Delta = 4k\ sen^2\left(\frac{k\omega}{2}\right) \neq 0, \quad isto\ é,\ \omega \in \left]0, \frac{2\pi}{k}\right[.$$

As igualdades (5.21) e (5.22) ficam

$$\begin{aligned} \cos(kt)\,\nu_1(t) + sen(kt)\nu_2(t) &= 0 \\ -k\ sen(kt)\nu_1(t) + k\cos(kt)\,\nu_2(t) &= 1, \end{aligned}$$

pelo que $\nu_1(t) = -\frac{1}{k} sen(kt)$ *e* $\nu_2(t) = \frac{1}{k}\cos(kt)$.
O sistema (5.24) escreve-se na forma

$$\begin{aligned}(1-\cos(k\omega))\ \lambda_1(t) - sen(k\omega)\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{k}\ sen(k(\omega - t))\\ sen(k\omega)\ \lambda_1(t) + (1-\cos(k\omega))\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{k}\ cos(k(\omega - t)),\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{1}{2k\ sen\left(\frac{k}{2}\omega\right)} cos\left(k\left(t-\frac{\omega}{2}\right)\right)\\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{2k\ sen\left(\frac{k}{2}\omega\right)} sen\left(k\left(t-\frac{\omega}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Substituindo em (5.23), obtem-se a função de Green para o problema (5.32), (5.33)

$$G(x,t) = \frac{1}{2k\ sen\left(\frac{k}{2}\omega\right)}\begin{cases} cos\left(k\left(x-t+\frac{\omega}{2}\right)\right) & , \quad 0 \le x \le t \\ \\ cos\left(k\left(t-x+\frac{\omega}{2}\right)\right) & , \quad t \le x \le \omega,\end{cases}$$

que é simétrica, como esperado.

Exercício 5.2.4 *Considere a equação diferencial*

$$y'' = f(x,y,y') \tag{5.34}$$

com as condições de fronteira (5.5). Mostre que $y(x)$ *é solução deste problema se e só se*

$$y(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}A + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}B + \int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t,y(t),y'(t))dt, \tag{5.35}$$

sendo $G(x,t)$ *a função de Green do problema*

$$y'' = 0, \quad y(\alpha) = y(\beta) = 0,$$

dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{cases}(\beta-t)(\alpha-x) & , \quad \alpha \le x \le t \\ \\ (\beta-x)(\alpha-t) & , \quad t \le x \le \beta.\end{cases} \tag{5.36}$$

Prove ainda que:

(i) $G(x,t) \leq 0$ *em* $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$;

(ii) $|G(x,t)| \leq \frac{1}{4}(\beta-\alpha)$;

(iii) $\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\,dt = \frac{1}{2}(\beta-x)(x-\alpha) \leq \frac{1}{8}(\beta-\alpha)^2$;

(iv) $\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\, sen\Big(\frac{\pi(t-\alpha)}{\beta-\alpha}\Big)\,dt = \frac{(\beta-\alpha)^2}{\pi^2} sen\Big(\frac{\pi(x-\alpha)}{\beta-\alpha}\Big)$;

(v) $\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| dt = \frac{(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2}{2(\beta-\alpha)} \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

Exercício 5.2.5 *Seja a equação diferencial*

$$y'' - ky = f(x,y,y'), \quad k>0, \tag{5.37}$$

com as condições de fronteira (5.5). Mostre que $y(x)$ *é solução deste problema se e só se*

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-x)\Big)}{senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-\alpha)\Big)}A + \frac{senh\Big(\sqrt{k}\,(x-\alpha)\Big)}{senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-\alpha)\Big)}B \\ &\quad + \int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t,y(t),y'(t))dt, \end{aligned}$$

sendo $G(x,t)$ *a função de Green do problema*

$$y''-ky=0, \quad y(\alpha)=y(\beta)=0,$$

dada por

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{-1}{\sqrt{k}senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-\alpha)\Big)} \\ &\quad \begin{cases} senh\Big(\sqrt{k}\,(x-\alpha)\Big)\,senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-t)\Big) & , \quad \alpha\leq x\leq t \\ senh\Big(\sqrt{k}\,(t-\alpha)\Big)\,senh\Big(\sqrt{k}\,(\beta-x)\Big) & , \quad t\leq x\leq \beta. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Prove ainda que:

(i) $G(x,t) \leq 0$ *em* $[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]$;

(ii) $\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\,dt = \frac{1}{k}\left(1-\frac{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-x\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)}\right) \leq \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)}\right)$.

5.3 Princípios de máximo

Os princípios de máximo são utilizados tanto em desigualdades diferenciais ordinárias como parciais e desempenham um papel importante na demonstração de resultados de existência e/ou unicidade e na construção de soluções de equações diferenciais.

Nesta secção estuda-se um princípio de máximo para uma função que verifique uma desigualdade diferencial de segunda ordem, enunciando-se depois para uma forma mais geral.

Teorema 5.3.1 *Se $y \in C^2([\alpha,\beta])$, $y''(x) \geq 0$ em $]\alpha,\beta[$ e $y(x)$ atingir o seu máximo num ponto interior de $[\alpha,\beta]$ então $y(x)$ é constante em $]\alpha,\beta[$.*

Dem. Em primeiro lugar, suponha-se que $y''(x) > 0$ em $]\alpha,\beta[$.

Se $y(x)$ atinge o máximo num ponto interior de $[\alpha,\beta]$, por exemplo x_0, então $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) \leq 0$, o que está em contradição com a hipótese de $y''(x) > 0$. Portanto se $y''(x) > 0$ em $]\alpha,\beta[$, a função $y(x)$ não ter o seu máximo num ponto interior de $[\alpha,\beta]$.

Suponha-se agora que $y''(x) \geq 0$ em $]\alpha,\beta[$ e que $y(x)$ atinge o máximo num ponto interior de $[\alpha,\beta]$, por exemplo x_1. Se $y(x_1) = M$, então $y(x_1) \leq M$ em $[\alpha,\beta]$. Admita-se que existe um ponto $x_1 \in]\alpha,\beta[$ tal que $y(x_2) < M$.

Se $x_2 > x_1$, define-se $z(x) := e^{\gamma(x-x_1)}$, sendo γ uma constante positiva. Para esta função $z(x)$ tem-se que

$$z(x) < 0, \quad x \in [\alpha, x_1[, \quad z(x_1) = 0, \quad z(x) > 0, \quad x \in]x_1,\beta] \tag{5.39}$$

e

$$z''(x) = \gamma^2 e^{\gamma(x-x_1)} > 0, \quad x \in [\alpha,\beta].$$

Considere-se agora $w(x) := y(x) + \epsilon\, z(x)$, com $0 < \epsilon < \frac{M-y(x_2)}{z(x_2)}$. Repare-se que, como $y(x_2) < M$ e $z(x_2) > 0$, este ϵ existe sempre. Por (5.39), obtem-se que $w(x) < y(x) \leq M$, $x \in]\alpha, x_1[$, $w(x_2) = y(x_2) + \epsilon\, z(x_2) < M$ e $w(x_1) = M$.

Como $w''(x) = y''(x) + \epsilon\, z''(x) > 0$ em $]\alpha, x_2[$, a função $w(x)$ não pode atingir o seu máximo num ponto interior de $[\alpha, x_2]$. Contudo, uma vez que $w(\alpha) < M$, $w(x_2) < M$ e $w(x_1) = M$, para $x_1 \in]\alpha, x_2[$, tem-se uma contradição. Portanto, não existe nenhum ponto $x_2 \in]\alpha,\beta[$, com $x_2 > x_1$ e tal que $y(x_2) < M$.

Se $x_2 < x_1$, define-se a função $z(x) := e^{-\gamma(x-x_1)} - 1$, com γ uma constante positiva, e aplica-se o mesmo tipo de argumentos para mostrar que tal x_2 não pode existir. Portanto $y(x) = M$ em $[\alpha,\beta]$. ∎

O teorema anterior permanece válido para a desigualdade contrária, substituindo "máximo" por "mínimo".

Para uma desigualdade mais geral, por exemplo, $y'' + p(x)y' + q(x)y \geq 0$, o resultado anterior não é necessariamente verdadeiro, para $q(x)$ positiva ou negativa, como se ilustra nos exemplos seguintes:

Exemplo 5.3.2 ***(i)*** *A função $y(x) =$sen x é uma solução da equação $y'' + y = 0$ e, no intervalo $[0, \pi]$, atinge o máximo em $x = \frac{\pi}{2}$, que é um ponto interior.*

(ii) *na equação $y'' - y = 0$, a função $y(x) = -e^x - e^{-x}$ é uma solução que atinge o valor máximo -2 em $x = 0$, no intervalo $[-1, 1]$.*

Teorema 5.3.3 *Suponha-se que $y(x)$ verifica a inequação diferencial*

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) \geq 0, \quad x \in]\alpha, \beta[, \tag{5.40}$$

com $p(x)$ e $q(x)$ funções limitadas em qualquer subintervalo fechado de $]\alpha, \beta[$ e $q(x) \leq 0$. Se $y(x)$ tiver um máximo não negativo M num ponto interior de $[\alpha, \beta]$ então $y(x) \equiv M$.

Dem. Se a desigualdade (5.40) for estrita e $y(x)$ assumir um máximo não negativo M num ponto interior x_0 de $[\alpha, \beta]$, então $y(x_0) = M$, $y'(x_0) = 0$ e $y''(x_0) \leq 0$. Como $p(x)$ e $q(x)$ são limitadas num subintervalo fechado que contenha x_0 e $q(x) \leq 0$ então tem-se

$$y''(x_0) + p(x_0)y'(x_0) + q(x_0)y(x_0) \leq 0,$$

o que contradiz a hipótese de a desigualdade ser estrita em (5.40). Assim, se a desigualdade (5.40) for estrita, então $y(x)$ não pode ter um máximo não negativo M num ponto interior x_0 de $[\alpha, \beta]$.

Admitindo agora (5.40) e $y(x_1) = M$, para algum $x_1 \in]\alpha, \beta[$, suponha-se que existe um ponto $x_2 \in]\alpha, \beta[$ tal que $y(x_2) < M$. Se $x_2 > x_1$, então define-se novamente $z(x) := e^{\gamma(x - x_1)} - 1$, com γ uma constante positiva a ser determinada. Esta função $z(x)$ verifica (5.39) e, como $q(x) \leq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned}
& z'' + p(x)z' + q(x)z \\
= \; & \left[\gamma^2 + p(x)\gamma + q(x)\left(1 - e^{-\gamma(x - x_1)}\right)\right] \; e^{\gamma(x - x_1)} \\
\geq \; & \left[\gamma^2 + p(x)\gamma + q(x)\right] \; e^{\gamma(x - x_1)}.
\end{aligned}$$

Escolha-se γ tal que $\gamma^2+p(x)\gamma+q(x)>0$ em $]\alpha,\beta[$, o que é sempre possível uma vez que $p(x)$ e $q(x)$ funções limitadas em qualquer subintervalo fechado de $]\alpha,\beta[$. Com esta escolha verifica-se que

$$z''+p(x)z'+q(x)z>0.$$

A parte restante da demonstração é análoga à realizada no Teorema 5.3.1, excepto no caso da função w, em que, em vez de $w''(x)>0$, se tem agora que $w''(x)+p(x)w'(x)+q(x)w(x)>0$.

Se $q(x)$ não for identicamente nula em $]\alpha,\beta[$, então a única constante não negativa M para a qual $y(x)=M$ satisfaz (5.40) é $M=0$. De facto, se $y(x)=M\geq 0$, $y'(x)=y''(x)=0$, para $x\in]\alpha,\beta[$ e, portanto,

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=q(x)M\geq 0.$$

Mas como $q(x)\leq 0$, então é necessário que $M=0$. ■

Algumas consequências deste resultado apresentam-se nos corolários seguintes:

Corolário 5.3.4 *Sejam $y(x)$ uma solução não constante de (5.40) com derivadas laterais em α e β, $p(x)$ e $q(x)$ funções limitadas em qualquer subintervalo fechado de $]\alpha,\beta[$ e $q(x)\leq 0$.*

Se $y(x)$ tiver um máximo não negativo em α e a função $p(x)+(x-\alpha)\,q(x)$ for minorada em α, então $y'(\alpha)<0$.

Se $y(x)$ tiver um máximo não negativo em β e a função $p(x)-(\beta-x)\,q(x)$ for majorada em β, então $y'(\beta)>0$.

Dem. Suponha-se que $y(x)$ tem um máximo não negativo em α, por exemplo, $y(\alpha)=M\geq 0$.

Então $y(x)\leq M$, $x\in[\alpha,\beta]$ e, como $y(x)$ é não constante, existe $x_0\in]\alpha,\beta[$ tal que $y(x_0)<M$.

Defina-se $z(x):=e^{\gamma(x-\alpha)}-1$, com γ uma constante positiva a determinar. Como $q(x)\leq 0$ e $1-e^{-\gamma(x-\alpha)}\leq\gamma\,(x-\alpha)$, para $x\geq\alpha$, obtem-se

$$\begin{aligned} & z''+p(x)z'+q(x)z \\ = & \left[\gamma^2+p(x)\gamma+q(x)\left(1-e^{-\gamma(x-\alpha)}\right)\right]\ e^{\gamma(x-\alpha)} \\ \geq & \left[\gamma^2+\gamma\left(p(x)+q(x)\,(x-\alpha)\right)\right]\ e^{\gamma(x-\alpha)}. \end{aligned}$$

Escolha-se γ tal que $\gamma^2+\gamma\left(p(x)+q(x)\,(x-\alpha)\right)>0$ para $x\in[\alpha,x_0]$, o que é sempre possível uma vez que $p(x)$ e $q(x)$ funções limitadas em qualquer subintervalo fechado de $]\alpha, \beta[$ e a função $p(x) + q(x)\,(x - \alpha)$ é minorada em α. Então $z'' + p(x)z' + q(x)z > 0$.

Defina-se agora $w(x) := y(x) + \epsilon\ z(x)$, com $0 < \epsilon < \frac{M - y(x_0)}{z(x_0)}$. Então $w(\alpha) = y(\alpha) = M$ o que implica que $w(x)$ tem um máximo maior ou igual que M em $[\alpha, x_0]$. Contudo, como $w'' + p(x)w' + q(x)w > 0$, o máximo não negativo tem de ocorrer numa das extremidades de $[\alpha, x_0]$. Finalmente, $w(x_0) = y(x_0) + \epsilon\ z(x_0) < M$ implica que o máximo é atingido em α. Portanto a derivada lateral de $w(x)$ em α não pode ser positiva, isto é, $w'(\alpha) \leq 0$ e $w'(\alpha) = y'(\alpha) + \epsilon z'(\alpha) \leq 0$. Como $z'(\alpha) = \gamma > 0$, então tem de ser $y'(\alpha) < 0$.

Se o máximo não negativo M ocorrer em β, é possível aplicar o mesmo tipo de argumentos para provar que $y'(\beta) > 0$. ■

Corolário 5.3.5 *Considere-se $y(x)$ uma solução de (5.40), contínua em $[\alpha, \beta]$ tal que $y(\alpha) \leq 0$, $y(\beta) \leq 0$ e $p(x)$ e $q(x)$ são funções limitadas em qualquer subintervalo fechado de $]\alpha, \beta[$ com $q(x) \leq 0$. Então ou $y(x) < 0$ em $]\alpha, \beta[$ ou $y(x) = 0$ em $[\alpha, \beta]$.*

Dem. Se $y(x)$ tem um máximo negativo, então $y(x) < 0$ em $[\alpha, \beta]$. Caso contrário, pelo Teorema 5.3.3, o máximo não negativo de $y(x)$ tem de ocorrer numa das extremidades. Contudo, como $y(\alpha) \leq 0$ e $y(\beta) \leq 0$ tem-se $y(x) < 0$ em $]\alpha, \beta[$, a menos que $y(x) = 0$ em $[\alpha, \beta]$. ■

Os próximos exemplos ilustram como os princípios de máximo podem ser aplicados para obter minorantes e majorantes para soluções de equações diferenciais que não possam ser resolvidas explicitamente.

Exemplo 5.3.6 *Considere o problema com valores na fronteira*

$$\begin{aligned} y'' - x^2 y &= 0, \quad x \in]\alpha, \beta[\\ y(\alpha) &= \gamma_1, \quad y(\beta) = \gamma_2, \end{aligned}$$

para o qual existe uma única solução $y(x)$.
Suponha-se que existe uma função $z(x)$ tal que

$$z'' - x^2 z \leq 0, \quad z(\alpha) \geq \gamma_1, \quad z(\beta) \geq \gamma_2. \tag{5.41}$$

Para esta função $z(x)$ define-se $w(x) = y(x) - z(x)$. Então $w(x)$ satisfaz

$$w'' - x^2 w \geq 0, \quad w(\alpha) \leq 0, \quad w(\beta) \leq 0 \tag{5.42}$$

e, pelo Corolário 5.3.5, obtem-se que $w(x) \leq 0$ *em* $[\alpha, \beta]$, *ou seja* $y(x) \leq z(x)$ *em* $[\alpha, \beta]$.

Construa-se agora a função $z(x)$ *do seguinte modo: define-se*

$$z_1(x) := A\left(2 - e^{-\gamma(x-\alpha)}\right),$$

onde A *e* γ *são constantes a determinar. Como*

$$z_1'' - x^2 z_1 = A\left[\left(-\gamma^2 + x^2\right) e^{-\gamma(x-\alpha)} - 2x^2\right],$$

escolhe-se $A = \max\{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$ *e* $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\} + 1$ *de modo que* $A \geq 0$, $\gamma > 0$ *e* $-\gamma^2 + x^2 < 0$ *para* $x \in [\alpha, \beta]$. *Com este tipo de escolha tem-se*

$$z_1'' - x^2 z_1 \leq 0, \quad z_1(\alpha) = A \geq \gamma_1, \quad z_1(\beta) \geq A \geq \gamma_2.$$

Portanto $z_1(x)$ *verifica (5.41) e, por isso,* $y(x) \leq z_1(x)$ *em* $[\alpha, \beta]$.

A minoração para $y(x)$ *obtem-se de modo análogo, definindo*

$$z_2(x) := B\left(2 - e^{-\gamma(x-\alpha)}\right),$$

com γ *escolhido como anteriormente e* $B = \min\{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$. *Assim* $B \leq 0$ *e* $z_2(x)$ *verifica*

$$z_2'' - x^2 z_2 \geq 0, \quad z_2(\alpha) = B \leq \gamma_1, \quad z_2(\beta) \leq B \leq \gamma_2,$$

e (5.41) com as desigualdades contrárias. A função $w(x) = z_2(x) - y(x)$ *satisfaz (5.42), pelo que* $z_2(x) \leq y(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Em conclusão,

$$B\phi(x) \leq y(x) \leq A\phi(x),$$

com $A = \max\{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$, $B = \min\{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$, $\phi(x) = 2 - e^{-\gamma(x-\alpha)}$ *e* $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\} + 1$.

Exemplo 5.3.7 *Para obter majorações e minorações para a solução* $y(x)$ *do problema*

$$\begin{aligned} y'' - x^2 y &= 0, \quad x \in]0, 1[\\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0, \end{aligned}$$

bastará encontrar uma função $z_1(x)$ *que verifique*

$$z_1'' - x^2 z_1 \geq 0, \quad x \in]0, 1[, \quad z_1(0) \geq 1, \quad z_1'(0) \geq 0. \tag{5.43}$$

Para tal defina-se $v_1(x) = z_1(x) - y(x)$ *e repare-se que*

$$v_1'' - x^2 v_1 \geq 0, \quad x \in]0,1[, \quad v_1(0) \geq 0, \quad v_1'(0) \geq 0.$$

Como $v_1(0) \geq 0$, *a função* $v_1(x)$ *tem um máximo não negativo em qualquer intervalo* $[0, x_0] \subseteq [0,1]$. *Pelo Teorema 5.3.3, este máximo ocorre ou em* 0 *ou em* x_0. *Mas, como* $v_1'(0) \geq 0$, *então, pelo Corolário 5.3.4, terá de ocorrer em* x_0, *a menos que* $v_1(x)$ *seja constante em* $[0, x_0]$. *Portanto, para* $x_0 \in]0,1[$, $v_1(x_0) \geq v_1(0) \geq 0$ *e, pelo Corolário 5.3.4, tem-se* $v_1'(x_0) \geq 0$. *Então, para* $x \in]0,1[$, $v_1(x) = z_1(x) - y(x) \geq v_1(0) \geq 0$, *isto é,* $y(x) \leq z_1(x)$.

Para construir esta função $z_1(x)$, *define-se* $z_1(x) = c_1 x^2 + 1$, *com* c_1 *uma constante a ser determinada. Como*

$$z_1'' - x^2 z_1 = 2c_1 - x^2\left(c_1 x^2 + 1\right) = c_1\left(2 - x^4\right) - x^2,$$

escolhe-se c_1 *tal que* $c_1 \geq \frac{x^2}{2-x^4}$, $x \in]0,1[$. *Mas* $\frac{x^2}{2-x^4} \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$, *pelo que se pode optar por* $c_1 = 1$. *Então* $z_1(x) = x^2+1$ *verifica (5.43) e* $y(x) \leq x^2+1$, $x \in [0,1]$.

Analogamente, para obter uma minoração, é necessário encontrar uma função $z_2(x)$ *que satisfaça*

$$z_2'' - x^2 z_2 \leq 0, \quad x \in]0,1[, \quad z_2(0) \leq 1, \quad z_2'(0) \leq 0. \tag{5.44}$$

Para a sua construção coloca-se $z_2(x) = c_2 x^2 + 1$, *com* c_2 *a determinar. Como*

$$z_2'' - x^2 z_2 = c_2\left(2 - x^4\right) - x^2,$$

é necessário escolher c_2 *tal que* $c_2 \leq \frac{x^2}{2-x^4}$, $x \in]0,1[$. *Basta tomar* $c_2 = 0$ *para* $z_2(x) = 1$ *verificar (5.44) e* $1 \leq y(x)$, $x \in [0,1]$.

Finalmente,

$$1 \leq y(x) \leq x^2 + 1, \quad x \in [0,1].$$

5.4 Problemas de Sturm-Liouville

Em secções anteriores viu-se que o problema homogéneo com valores na fronteira (5.3), (5.4) pode admitir soluções não triviais. No caso em que os coeficientes da equação diferencial e/ou das condições de fronteira dependem de um parâmetro é importante determinar o(s) valor(es) do parâmetro para o qual (os quais) a solução não trivial existe. Estes valores especiais do parâmetro designam-se por **valores próprios** e as correspondentes soluções não triviais por **funções próprias**.

O problema com valores na fronteira composto por

$$\big(p(x)y'\big)' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{5.45}$$

com λ um parâmetro, as funções $q, r \in C(J)$, $p \in C^1(J)$, $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em J, e pelas condições (5.31),

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) &= 0 \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) &= 0, \end{aligned}$$

é vulgarmente designado por **problema de Sturm-Liouville regular.** Resolver este problema significa encontrar os valores de λ (valores próprios) e as correspondentes soluções não triviais, $\phi_\lambda(x)$, (funções próprias). Ao conjunto de todos os valores próprios do problema regular chama-se **espectro** do problema.

Veja-se um exemplo do cálculo dos valores próprios e das correspondentes funções próprias:

Exemplo 5.4.1 *Considere-se o problema*

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{5.46}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{5.47}$$

Se $\lambda = 0$, a solução geral de (5.46) é $y(x) = c_1 + c_2 x$. Esta solução verifica as condições de fronteira (5.47) se, e só se, $c_1 = c_2 = 0$, ou seja, $y(x) \equiv 0$ é a única solução do problema (5.46), (5.47). Portanto, $\lambda = 0$ não é um valor próprio do problema (5.46), (5.47).

Se $\lambda \neq 0$, é conveniente substituir λ por μ^2, sendo μ um novo parâmetro, não necessariamente real. Neste caso a solução geral de (5.46) é $y(x) = c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}$, que verifica as condições (5.47) se, e só se,

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{i\mu\pi} + c_2 e^{-i\mu\pi} = 0. \end{gathered} \tag{5.48}$$

Este sistema tem uma solução não trivial se, e só se,

$$e^{-i\mu\pi} - e^{i\mu\pi} = 0. \tag{5.49}$$

Se $\mu = a + ib$, com a e b reais, a condição (5.49) fica

$$\begin{aligned} & e^{b\pi}\left(\cos(a\pi) - i sen(a\pi)\right) - e^{-b\pi}\left(\cos(a\pi) + i sen(a\pi)\right) \\ = & \left(e^{b\pi} - e^{-b\pi}\right)\cos(a\pi) - i\left(e^{b\pi} + e^{-b\pi}\right) sen(a\pi) \\ = & 2\sinh(b\pi)\cos(a\pi) - 2i\cosh(b\pi)\, sen(a\pi) = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\sinh(b\pi)\cos(a\pi) = 0 \tag{5.50}$$

e

$$\cosh(b\pi)\, sen(a\pi) = 0. \tag{5.51}$$

Como $\cosh(b\pi) > 0$ *para todos os valores de* b, *a equação (5.51) implica que* $a = n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Para este* a *tem-se* $\cos(a\pi) \neq 0$, *pelo que, por (5.50),* $\sinh(b\pi) = 0$, *isto é,* $b = 0$. *Contudo, se* $b = 0$ *então* $a \neq 0$, *pois, caso contrário, ter-se-ia* $\mu = 0$ *e* $\lambda = 0$ *não é um valor próprio. Assim* $\mu = n$, *com* n *um inteiro não nulo, pelo que os valores próprios do problema (5.46), (5.47) são* $\lambda_n = \mu^2 = n^2$, $n = 1, 2, ...$

Por (5.48), $c_2 = -c_1$ *e para* $\lambda_n = n^2$ *as correspondentes soluções não triviais de (5.46), (5.47) são*

$$\phi_n(x) = c_1\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = 2ic_1\ sen(nx),$$

ou simplesmente $\phi_n(x) = sen(nx)$.

Exemplo 5.4.2 *Para a mesma equação diferencial (5.46) consideram-se as condições de fronteira*

$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{5.52}$$

Se $\lambda = 0$, *então a solução geral de (5.46),* $y(x) = c_1 + c_2 x$, *também verifica as condições (5.52) se, e só se,* $c_1 + c_2 = 0$, *ou seja,* $c_1 = -c_2$. *Logo,* $\lambda = 0$ *é um valor próprio do problema (5.46), (5.52), sendo a correspondente função própria* $\phi_1(x) = 1 - x$.

Se $\lambda \neq 0$, *também é conveniente substituir* λ *por* μ^2, *e verifica-se que a solução geral* $y(x) = c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}$ *satisfaz as condições (5.52) se, e só se,*

$$\begin{array}{c} c_1 + c_2 + i\mu\,(c_1 - c_2) = 0 \\ c_1 e^{i\mu} + c_2 e^{-i\mu} = 0. \end{array} \tag{5.53}$$

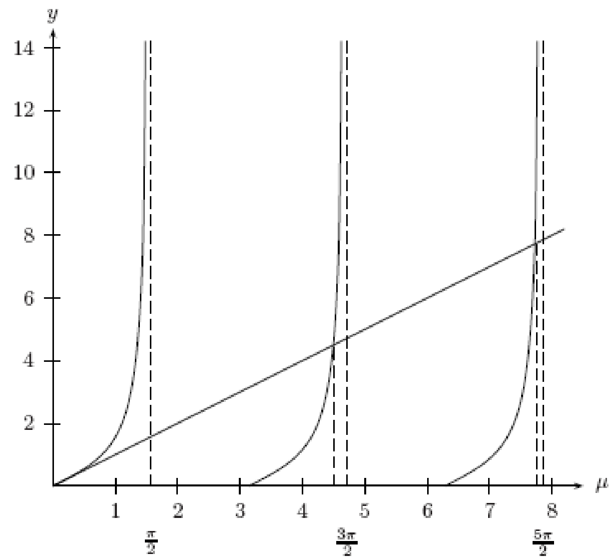
O sistema anterior tem uma solução não trivial se, e só se,

$$(1 + i\mu)\, e^{-i\mu} - (1 - i\mu)\, e^{i\mu} = 0,$$

que é equivalente a

$$\tan\mu = \mu. \tag{5.54}$$

As raízes reais desta equação podem ser ilustradas pela intersecção entre os gráficos das funções $y = \tan\mu$ e $y = \mu$.



Assim, torna-se claro que a equação (5.54) tem infinitas soluções μ_n, $n = 1, 2, ...$, que se aproximam dos múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$, isto é, $\mu_n \simeq (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Como a equação permanece inalterada se se substituir μ por $-\mu$, tem-se que as raízes não nulas de (5.54) são $\mu_n \simeq \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 2, ...$

Desta forma, o problema (5.46), (5.52) também possui um número infinito de valores próprios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{n+1} \simeq (2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}$, $n = 1, 2, ...$ Por (5.53), $c_2 = -c_1 e^{2i\mu}$ e para λ_n, $n > 1$, as soluções não triviais de (5.46), (5.52) correspondentes, são

$$y(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda_n}x} - c_1 e^{-i\sqrt{\lambda_n}x} e^{2i\sqrt{\lambda_n}} = -2ic_1\ e^{i\sqrt{\lambda_n}} sen\left(\sqrt{\lambda_n}\,(1-x)\right).$$

Portanto as funções próprias de (5.46), (5.52) são

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 - x \\ \phi_n(x) &= sen\left(\sqrt{\lambda_n}\,(1-x)\right), \quad n = 2, 3, ... \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 5.4.1 é evidente que o problema (5.46), (5.47) tem um número infinito de valores próprios λ_n, que podem ser dispostos como uma sucessão crescente $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ tal que $\lambda_n \to +\infty$ quando $n \to +\infty$. Além disso, correspondente a cada valor próprio, existe uma família de funções próprias $\phi_n(x)$, que têm exactamente $n - 1$ zeros no intervalo $]0, \pi[$.

Estas funções próprias são ortogonais, de acordo com a seguinte definição:

Definição 5.4.3 *O conjunto das funções $\{\phi_n(x) : n = 0, 1, ...\}$, seccionalmente contínuas num intervalo infinito ou finito $[\alpha, \beta]$, diz-se **ortogonal** em $[\alpha, \beta]$, em relação à função não negativa $r(x)$, se*

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_\alpha^\beta r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad \forall m \neq n,$$

e

$$\int_\alpha^\beta r(x)\phi_n^2(x)dx \neq 0, \quad \forall n.$$

*A função $r(x)$ designa-se como **função peso** e assume-se que tem apenas um número finito de zeros em $[\alpha, \beta]$ e que os integrais $\int_\alpha^\beta r(x)\phi_n(x)dx$, $n = 0, 1, ...$existem.*

*O conjunto ortogonal $\{\phi_n(x) : n = 0, 1, ...\}$ em $[\alpha, \beta]$, em relação à função peso $r(x)$, diz-se **ortonormal** se*

$$\int_\alpha^\beta r(x)\phi_n^2(x)dx = 1, \quad \forall n.$$

Então as funções ortonormais têm as mesmas propriedades que as funções ortogonais, mas, além disso, estão normalizadas, isto é, cada função $\phi_n(x)$ do conjunto ortogonal, está dividida pela sua norma, definida por

$$\|\phi_n\| = \left(\int_\alpha^\beta r(x)\phi_n^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe-se que, como

$$\int_0^x \text{sen}(kx)\ \text{sen}(lx)dx = 0,$$

para $k \neq l$, o conjunto das funções próprias $\{\phi_n(x) = \text{sen}(nx),\ n = 1, 2, ...\}$ de (5.46), (5.47) é ortogonal em $[0, \pi]$ em relação à função peso $r(x) = 1$.

As propriedades referidas para os valores próprios e para as funções próprias de (5.46), (5.47) também são válidas para o problema (5.46), (5.52). De facto, até são válidas para um problema regular geral de Sturm-Liouville (5.45), (5.31), como se justifica nos próximos teoremas:

Teorema 5.4.4 *Os valores próprios dum problema regular geral de Sturm-Liouville (5.45), (5.31) são* ***simples****, isto é, se λ é um valor próprio de (5.45), (5.31) e $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são funções próprias correspondentes, então $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são linearmente dependentes.*

Dem. Como $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são ambas soluções de (5.45), então

$$p(x)W\left(\phi_1, \phi_2\right)(x) = c \text{ (constante)}.$$

Para encontrar o valor de c utilizam-se as condições de fronteira, isto é,

$$\begin{aligned} a_0\phi_1(\alpha) + a_1\phi_1'(\alpha) &= 0 \\ a_0\phi_2(\alpha) + a_1\phi_2'(\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $W\left(\phi_1, \phi_2\right)(\alpha) = 0$ e, portanto, $c = 0$. Logo,

$$p(x)W\left(\phi_1, \phi_2\right)(x) = 0,$$

isto é, $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são linearmente dependentes. $\blacksquare$

Teorema 5.4.5 *Sejam λ_n, $n = 1, 2, ...$, valores próprios dum problema regular de Sturm-Liouville (5.45), (5.31), e $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, as funções próprias correspondentes. Então o conjunto $\{\phi_n(x) : n = 1, 2, ...\}$ é ortogonal em $[\alpha, \beta]$, em relação à função peso $r(x)$.*

Dem. Considerem-se λ_k e λ_l, $(k \neq l)$, dois valores próprios e $\phi_k(x)$ e $\phi_l(x)$ as funções próprias correspondentes de (5.45), (5.31) e defina-se

$$\mathcal{P}_2[y] := \left(p(x)y'\right)' + q(x)y. \tag{5.55}$$

Como $\phi_k(x)$ e $\phi_l(x)$ são soluções de (5.45), tem-se

$$\mathcal{P}_2[\phi_k] + \lambda_k \; r(x)\phi_k(x) = 0$$

e

$$\mathcal{P}_2[\phi_l] + \lambda_l \; r(x)\phi_l(x) = 0.$$

Multiplicando a primeira por ϕ_l, a segunda por ϕ_k, subtraindo e integrando em $[\alpha, \beta]$, obtem-se

$$\begin{aligned} \left(\lambda_l - \lambda_k\right) \int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_l(x)dx &= \int_\alpha^\beta \left(\phi_l \mathcal{P}_2[\phi_k] - \phi_k \mathcal{P}_2[\phi_l]\right) dx \qquad (5.56) \\ &= \left[p(x)\left(\phi_k'(x)\phi_l(x) - \phi_k(x)\phi_l'(x)\right)\right]_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

Uma vez que $\phi_k(x)$ e $\phi_l(x)$ verificam as condições de fronteira (5.31), isto é,

$$\begin{aligned} a_0\phi_k(\alpha) + a_1\phi_k'(\alpha) &= 0, \quad d_0\phi_k(\beta) + d_1\phi_k'(\beta) = 0 \\ a_0\phi_l(\alpha) + a_1\phi_l'(\alpha) &= 0, \quad d_0\phi_l(\beta) + d_1\phi_l'(\beta) = 0 \end{aligned}$$

é necessário que

$$\phi_k(\alpha)\phi_l'(\alpha) - \phi_k'(\alpha)\phi_l(\alpha) = \phi_k(\beta)\phi_l'(\beta) - \phi_k'(\beta)\phi_l(\beta) = 0.$$

Assim a igualdade (5.56) reduz-se a

$$(\lambda_l - \lambda_k)\int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_l(x)dx = 0. \tag{5.57}$$

Contudo, como $\lambda_k \neq \lambda_l$, tem-se $\int_\alpha^\beta r(x)\phi_k(x)\phi_l(x)dx = 0$. ■

Corolário 5.4.6 *Considerem-se λ_1 e λ_2 dois valores próprios dum problema regular de Sturm-Liouville (5.45), (5.31), e $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ as funções próprias correspondentes. Então $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são linearmente dependentes apenas se $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Dem. A demonstração é consequência imediata de (5.57) ■

Teorema 5.4.7 *Os valores próprios dum problema regular de Sturm-Liouville (5.45), (5.31) são reais.*

Dem. Seja $\lambda = a + ib$ um valor próprio complexo e $\phi(x) = \mu(x) + i\nu(x)$ a correspondente função própria do problema (5.45), (5.31). Portanto,

$$\left(p(x)\left(\mu + i\nu\right)'\right)' + q(x)\left(\mu + i\nu\right) + (a + ib)\, r(x)\left(\mu + i\nu\right) = 0$$

e, por consequência,

$$\begin{gathered} \mathcal{P}_2[\mu] + \left(a\mu(x) - b\nu(x)\right) r(x) = 0, \\ \mathcal{P}_2[\nu] + \left(b\mu(x) + a\nu(x)\right) r(x) = 0, \\ a_0\mu(\alpha) + a_1\mu'(\alpha) = 0, \quad d_0\mu(\beta) + d_1\mu'(\beta) = 0, \\ a_0\nu(\alpha) + a_1\nu'(\alpha) = 0, \quad d_0\nu(\beta) + d_1\nu'(\beta) = 0. \end{gathered}$$

Aplicando um processo análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 5.4.5, obtem-se

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta (\nu \mathcal{P}_2[\mu] - \mu \mathcal{P}_2[\nu])\, dx \\
= &\int_\alpha^\beta [-(a\mu(x) - b\nu(x))\, \nu(x) r(x) + (b\mu(x) + a\nu(x))\, \mu(x) r(x)]\, dx \\
= &\; b \int_\alpha^\beta \left(\nu^2(x) + \mu^2(x)\right) r(x) dx \\
= &\left[p(x)\left(\nu\mu' - \nu'\mu\right)\right]_\alpha^\beta = 0.
\end{aligned}$$

Ora para que tal seja possível, é necessário que $b = 0$, isto é, que λ seja real.
■

Como o problema (5.46), (5.52) é um problema regular de Sturm-Liouville, pelo Teorema 5.4.7, a equação (5.54) tem apenas raízes reais.

Nos resultados anteriores tem sido sempre assumido a existência de valores próprios. Tal facto é "permitido" pelo seguinte teorema:

Teorema 5.4.8 *Num problema regular de Sturm-Liouville (5.45), (5.31) existe um número infinito de valores próprios* λ_n, $n = 1, 2, ...$ *Estes valores próprios podem ser dispostos como uma sucessão crescente* $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ *tal que* $\lambda_n \to +\infty$ *quando* $n \to +\infty$. *Além disso, a função própria* $\phi_n(x)$, *correspondente ao valor próprio* λ_n, *tem exactamente* $n-1$ *zeros no intervalo* $]\alpha, \beta[$.

Dem. Em primeiro lugar considera-se um caso particular que inclui a equação (5.45) e

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0. \tag{5.58}$$

Note-se que:

(i) Se os valores próprios de (5.45), (5.58) existirem, então são todos números reais (conforme Teorema 5.4.7);

(ii) Para cada λ, fixo, existe uma única solução $y(x, \lambda)$ do problema da valor inicial formado por (5.45) e

$$y(\alpha, \lambda) = 0, \quad y'(\alpha, \lambda) = 1. \tag{5.59}$$

Além disso, $y(x, \lambda)$ e $y'(x, \lambda)$ variam de modo contínuo em λ (conforme Teorema 3.1.12).

(iii) Existem constantes p, P, q, Q, r e R tais que, para $x \in [\alpha, \beta]$, $0 < p \leq p(x) \leq P$, $q \leq q(x) \leq Q$ e $0 < r \leq r(x) \leq R$. Então, para $\lambda > 0$ fixo, a solução $y(x, \lambda)$ de (5.45), (5.59) oscila mais rapidamente que a solução $y_0(x, \lambda)$ do problema

$$\begin{gathered} (Py_0')' + qy_0 + \lambda r y_0 = 0 \\ y_0(\alpha, \lambda) = 0, \quad y_0'(\alpha, \lambda) = 1 \end{gathered} \tag{5.60}$$

e mais lentamente que a solução $y_1(x, \lambda)$ do problema

$$\begin{gathered} (py_1')' + Qy_1 + \lambda R y_1 = 0 \\ y_1(\alpha, \lambda) = 0, \quad y_1'(\alpha, \lambda) = 1, \end{gathered} \tag{5.61}$$

(conforme Teorema 4.7.5). Quando $\lambda < 0$, r e R em (5.60) e (5.61) não necessitam de serem trocados.

Os problemas (5.60) e (5.61) têm coeficientes constantes (modificados quando $\lambda < 0$) e podem ser resolvidos explicitamente.

Se $\lambda > 0$ é suficientemente grande tal que $0 < \frac{q+\lambda r}{P} := a^2$, então a solução do problema (5.60) é $y_0(x) = \frac{1}{a}\text{sen}(a(x-\alpha))$, a qual se anula pelo menos uma vez em $]\alpha, \beta[$, desde que $a(x-\alpha) > \pi$, isto é, $\frac{q+\lambda r}{P} > \frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}$. Então, para cada

$$\lambda > \max\left\{0, \frac{1}{r}\left(\frac{P\pi^2}{(\beta-\alpha)^2} - q\right)\right\} := \lambda^0,$$

a solução do problema (5.45), (5.59) tem pelo menos um zero em $]\alpha, \beta[$.

Analogamente, se $\lambda < 0$ é suficientemente pequeno tal que

$$-a^2 = \frac{Q + \lambda r}{P} < 0, \text{ ou seja, } \lambda < \min\left\{0, -\frac{Q}{r}\right\} := \lambda^1,$$

então a solução do problema modificado (5.61) é $y(x) = \frac{1}{a}\text{senh}(a(x-\alpha))$, a qual nunca se anula. Portanto para cada $\lambda < \lambda^1$ a solução do problema (5.45), (5.59) não tem nenhum zero em $]\alpha, \beta]$.

Como a solução $y(x, \lambda)$ de (5.45), (5.59) varia continuamente em λ, se $y(x, \lambda)$ tem um zero em $]\alpha, \beta[$, então a sua posição também varia continuamente com λ. Então, se λ aumenta constantemente a partir de λ^1 (para o qual a solução do problema (5.45), (5.59) não tem nenhum zero em $]\alpha, \beta]$) até λ^0, então haverá um valor específico de λ, por exemplo, λ_1, para o qual $y(x, \lambda)$ se anula primeiro para $x = \beta$. Isto prova que existe um menor valor próprio λ_1 do problema (5.45), (5.58) e $y(x, \lambda_1)$, a solução de (5.45), (5.59), a função própria correspondente.

Permitindo que λ cresça desde este valor λ_1, então existe um número $\lambda_2 > \lambda_1$ para o qual $y(x, \lambda_2)$, solução de (5.45), (5.59), tem precisamente um zero em $]\alpha, \beta[$ e $y(\beta, \lambda_2) = 0$. Como λ continua a crescer, resulta uma sucessão de valores próprios $\lambda_1 < \lambda_2 < ...$ e uma sucessão correspondente de funções próprias $y(x, \lambda_1), y(x, \lambda_2), ...$ Além disso, $y(x, \lambda_n)$ tem precisamente $n-1$ zeros em $]\alpha, \beta[$, o que completa a demonstração para o problema (5.45), (5.58).

Para o problema formado pela equação (5.45) e pelas condições

$$a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = 0, \tag{5.62}$$

as afirmações anteriores permanecem válidas, substituindo a solução $y(x, \lambda)$ de (5.45), (5.59) pela solução $z(x, \lambda)$ do problema da valor inicial formado por (5.45) e

$$z(\alpha, \lambda) = a_1, \quad z'(\alpha, \lambda) = -a_0. \tag{5.63}$$

Assim, o problema (5.45), (5.62) também tem uma sucessão de valores próprios $\lambda_1' < \lambda_2' < ...$ e a correspondente sucessão de funções próprias $z\left(x, \lambda_1'\right)$, $z\left(x, \lambda_2'\right)$, ...tais que $z\left(x, \lambda_n'\right)$ tem precisamente $n-1$ zeros no intervalo aberto $]\alpha, \beta[$.

Finalmente, considera-se o problema (5.45), (5.31).

Para a solução $z(x, \lambda)$ de (5.45), (5.63), o Teorema 3.1.12 implica que $\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ é solução do problema da valor inicial

$$\mathcal{P}_2\left[\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right] + \lambda\, r(x)\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda) + r(x) z(x, \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda) = \frac{\partial z'}{\partial \lambda}(\alpha, \lambda) = 0.$$

Aplicando a técnica de (5.56) obtem-se

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda)\,\mathcal{P}_2\left[z(x, \lambda)\right] - z(x, \lambda)\,\mathcal{P}_2\left[\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda)\right]\right) dx \\
= &\int_\alpha^\beta r(x)\ z^2(x, \lambda)\, dx \\
= &\left[p(x)\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, z'(x, \lambda) - \frac{\partial z'}{\partial \lambda}(x, \lambda)\, z(x, \lambda)\right)\right]_\alpha^\beta \\
= &\ p(\beta) W\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}(\beta, \lambda), z(\beta, \lambda)\right),
\end{aligned}$$

o que permite concluir que

$$W\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}(\beta,\lambda), z(\beta,\lambda)\right) > 0.$$

No intervalo $\left]\lambda_n', \lambda_{n+1}'\right[$ sabe-se que $z(\beta,\lambda) \neq 0$, pelo que para todo $\lambda \in \left]\lambda_n', \lambda_{n+1}'\right[$ a função $\phi(\lambda) = \frac{z'(\beta,\lambda)}{z(\beta,\lambda)}$ está bem definida. Além disso,

$$\phi'(\lambda) = -\frac{W\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}(\beta,\lambda), z(\beta,\lambda)\right)}{z^2(\beta,\lambda)} < 0,$$

isto é, no intervalo $\left]\lambda_n', \lambda_{n+1}'\right[$ a função $\phi(\lambda)$ é decrescente. Como $z\left(\beta,\lambda_n'\right) = z\left(\beta,\lambda_{n+1}'\right) = 0$, $z'\left(\beta,\lambda_n'\right) \neq 0$ e $z'\left(\beta,\lambda_{n+1}'\right) \neq 0$ então é necessário que $\phi\left(\lambda_n'\right) = +\infty$ e $\phi\left(\lambda_{n+1}'\right) = -\infty$, isto é, $\phi(\lambda)$ decresce de $+\infty$ até $-\infty$. Portanto, existe um único $\lambda_n'' \in \left]\lambda_n', \lambda_{n+1}'\right[$ tal que

$$\phi\left(\lambda_n''\right) = \frac{z'\left(\beta,\lambda_n''\right)}{z\left(\beta,\lambda_n''\right)} = -\frac{d_0}{d_1}.$$

Assim, para o problema (5.45), (5.31) existe uma sucessão de valores próprios $\lambda_1'' < \lambda_2'' < ...$, tais que $\lambda_n'' \in \left]\lambda_n', \lambda_{n+1}'\right[$, e $z\left(x,\lambda_n''\right)$, $n = 1, 2, ...$são as correspondentes funções próprias, que têm precisamente $n-1$ zeros no intervalo aberto $]\alpha,\beta[$.

As propriedades anteriores dos valores próprios e das funções próprias não são necessariamente válidas para problemas de Sturm-Liouville singulares, como se mostra nos exemplos seguintes: ■

Exemplo 5.4.9 *No problema de Sturm-Liouville singular*

$$\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad |y(x)| \leq M < +\infty, \quad x \in]0,+\infty[, \end{array} \tag{5.64}$$

cada $\lambda \in]0,+\infty[$ é um valor próprio e sen$\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ é a função própria correspondente. Comparando com o problema regular, onde o espectro é sempre discreto, verifica-se que os problemas singulares podem ter um espectro contínuo.

Exemplo 5.4.10 *Considere-se o problema, periódico e singular, de Sturm-Liouville*

$$\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \end{array} \tag{5.65}$$

Este problema tem como valores próprios $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_{n+1} = n^2$, $n = 1, 2, ...$ *O valor próprio* $\lambda_1 = 0$ *é simples e* $\phi(x) = 1$ *é a função própria correspondente. O valor próprio* $\lambda_{n+1} = n^2$, $n \geq 1$, *não é simples e existem duas funções próprias correspondentes linearmente independentes:* $sen(nx)$ *e* $cos\,(nx)$.
Em contraste com os problemas regulares, em que os valores próprios são simples, nos problemas singulares podem ser múltiplos.

Contudo, as propriedades dos valores próprios e das funções próprias dos problemas de Sturm-Liouville regulares, podem permanecer válidas para os casos singulares se se verificarem condições suplementares adequadas.

Alguns casos particulares são ilustrados pelos exemplos seguintes:

Exemplo 5.4.11 *Seja o problema de Sturm-Liouville singular*

$$\left(\left(1 - x^2\right) y'\right)' + \lambda y = 0 \tag{5.66}$$
$$\lim_{x \to -1} y(x) < +\infty, \quad \lim_{x \to 1} y(x) < +\infty.$$

Os valores próprios deste problema são $\lambda_n = n\,(n-1)\,,\ n = 1, 2, ...$ *e as funções próprias correspondentes são os **polinómios de Legendre*** $P_{n-1}(x)$ *dados por*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x - 2\right)^n, \quad n = 0, 1, ... \tag{5.67}$$

Exemplo 5.4.12 *No problema de Sturm-Liouville singular formado por (5.66) e*

$$y'(0) = 0, \quad \lim_{x \to 1} y(x) < +\infty,$$

os valores próprios são $\lambda_n = (2n-2)\,(2n-1)\,,\ n = 1, 2, ...$ *e as funções próprias correspondentes são os polinómios de Legendre de ordem par,* $P_{2(n-1)}(x)$.

Exemplo 5.4.13 *Considere-se o problema de Sturm-Liouville singular*

$$\left(e^{-x^2} y'\right)' + \lambda e^{-x^2} y = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{|x|^k} < +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^k} < +\infty,$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$.
Os valores próprios deste problema são $\lambda_n = 2\,(n-1)\,,\ n = 1, 2, ...$ *e as funções próprias correspondentes são os **polinómios de Hermite*** $H_{n-1}(x)$ *definidos por*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, ...$$

Exemplo 5.4.14 *No problema de Sturm-Liouville singular*

$$\left(xe^{-x}y'\right)' + \lambda e^{-x}y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} |y(x)| < +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{y(x)}{x^k} < +\infty,$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$, os valores próprios são $\lambda_n = n-1$, $n = 1, 2, ...$ e as funções próprias correspondentes são os ***polinómios de Laguerre*** *$L_{n-1}(x)$ definidos por*

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right), \quad n = 0, 1, ...$$

5.5 Desenvolvimento em série de funções próprias

Considerando a base canónica de $\mathbb{R}^n$, $\left\{e^1, ..., e^n\right\}$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^n$, existe constantes (únicas) $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i.$$

Pela ortogonalidade dos vectores e^i, $i \leq 1 \leq n$, pode-se determinar α_i, $i \leq 1 \leq n$, do modo seguinte

$$\left\langle u, e^j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i, e^j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle e^i, e^j \right\rangle = \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Assim, o vector u pode escrever-se, de modo único, como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left\langle u, e^i \right\rangle e^i.$$

Uma generalização natural desta observação pode ser a seguinte:

Seja $\{\phi_n(x) : n = 0, 1, 2, ...\}$ um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[\alpha, \beta]$ em relação à função peso $r(x)$. Então qualquer função $f(x)$ pode ser expressa como uma série envolvendo funções ortogonais $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$, na forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \phi_n(x). \tag{5.68}$$

A igualdade anterior coloca algumas questões sobre a sua natureza, nomeadamente sobre a convergência da série ou sobre como determinar os coeficientes (constantes) c_n, $n = 0, 1, 2, ...$

Ignorando momentaneamente a convergência, multiplique-se (5.68) por $r(x)\phi_m(x)$ e integre-se em $[\alpha, \beta]$. Obtem-se

$$\int_\alpha^\beta r(x)\phi_m(x)f(x)dx = \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(x)r(x)\phi_m(x)dx.$$

Admitindo que a integração e a soma podem permutar, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta r(x)\phi_m(x)f(x)dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_\alpha^\beta \phi_n(x)r(x)\phi_m(x)dx \\ &= c_m \int_\alpha^\beta r(x)\phi_m^2(x)dx = c_m \left\|\phi_m\right\|^2.\end{aligned}$$

Então, com condições adequadas à convergência, as constantes c_n, $n = 0, 1, 2, ...$, são dadas por

$$c_n = \frac{\int_\alpha^\beta r(x)\phi_n(x)f(x)dx}{\left\|\phi_n\right\|^2}. \tag{5.69}$$

Se o conjunto $\{\phi_n(x)\}$ for ortonormado, tem-se $\|\phi_n\| = 1$, pelo que, neste caso,

$$c_n = \int_\alpha^\beta r(x)\phi_n(x)f(x)dx. \tag{5.70}$$

Em conclusão, se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(x)$ convergir uniformemente para $f(x)$ em $[\alpha, \beta]$ então as afirmações anteriores são válidas. Os coeficientes c_n, dados por (5.69), são designados por **coeficientes de Fourier** da função $f(x)$, em relação ao conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(x)$ designa-se por **série de Fourier** de $f(x)$ e fornece uma aproximação de $f(x)$, representada por

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(x),$$

já que, com frequência, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\phi_n(x)$.

Exemplo 5.5.1 *O conjunto dos polinómios de Legendre dados por (5.67),*

$$\{\phi_n(x) = P_n(x), n = 0, 1, 2, ...\},$$

é ortogonal em $[-1, 1]$ *com* $r(x) = 1$, *pois*

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & , \quad m = n. \end{cases}$$

Portanto, por (5.69), dada uma função $f(x)$, os coeficientes da ***série de Fourier-Legendre*** $f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n(x)$ *são dados por*

$$c_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{1} P_n(x) f(x) dx, \; n = 0, 1, 2, ...$$

Exemplo 5.5.2 *O conjunto de funções*

$$\left\{1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \; sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), L > 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

é ortogonal em relação à função peso $r(x) = 1$ em $[-L, L]$, tendo por normas

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \begin{cases} 2L & , \quad n = 0 \\ L & , \quad n \geq 1 \end{cases} \\ \int_{-L}^{L} sen^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= L, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Assim a **série trigonométrica de Fourier** duma certa função $f(x)$ é definida por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{ sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \tfrac{1}{L} \int_{-L}^{L} \text{sen}\left(\tfrac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{5.71}$$

Analise-se agora a convergência das séries de Fourier para a função $f(x)$, num caso geral em que as funções $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, ...$ e $f(x)$ são seccionalmente contínuas em $[\alpha, \beta]$.

Designe-se a soma dos primeiros $N+1$ termos, $\sum_{n=0}^{N} c_n \phi_n(x)$, por $S_N(x)$ e considere-se a diferença $|S_N(x) - f(x)|$ para os vários valores de N e x.

Se para $\epsilon > 0$ arbitrário, existir um inteiro $N(\epsilon) > 0$ tal que

$$|S_N(x) - f(x)| < \epsilon,$$

então a **série de Fourier converge (uniformemente)** para $f(x)$.

Se N depender de x e de ϵ, simultaneamente, então a **série de Fourier converge pontualmente** para $f(x)$.

Contudo, estes dois tipos de convergência são "demasiado exigentes", pelo que é conveniente uma convergência mais fraca:

Definição 5.5.3 *Suponha-se que cada uma das funções $\psi_n(x)$, $n \geq 0$, e $\psi(x)$ são seccionalmente contínuas em $[\alpha, \beta]$. Diz-se que a sucessão $(\psi_n(x))$* ***converge em média*** *para $\psi(x)$ (em relação à função peso $r(x)$) no intervalo $[\alpha, \beta]$ se*

$$\lim \|\psi_n - \psi\|^2 = \lim \int_\alpha^\beta r(x) [\psi_n(x) - \psi(x)]^2 \, dx = 0.$$

Então a série de Fourier converge em média para $f(x)$ se

$$\lim_{N \to +\infty} \int_\alpha^\beta r(x) [S_N(x) - f(x)]^2 \, dx = 0.$$

Antes de demonstrar a convergência da série de Fourier, considere-se a possibilidade de representar $f(x)$ por uma série do tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n \phi_n(x)$, em que os coeficientes d_n não são necessariamente os coeficientes de Fourier.

Defina-se

$$T_N(x; d_0, d_1, ..., d_N) := \sum_{n=0}^{N} d_n \phi_n(x),$$

tem-se, pela ortogonalidade das funções $\phi_n(x)$,

$$\begin{aligned} \|T_N - f\|^2 &= \int_\alpha^\beta r(x) \left[\sum_{n=0}^{N} d_n \phi_n(x) - f(x) \right]^2 dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} d_n^2 \int_\alpha^\beta r(x) \phi_n^2(x) dx - 2 \sum_{n=0}^{N} d_n \int_\alpha^\beta r(x) \phi_n(x) f(x) dx \\ &\quad + \int_\alpha^\beta r(x) f^2(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{N} d_n^2 \|\phi_n\|^2 - 2 \sum_{n=0}^{N} d_n c_n \|\phi_n\|^2 + \|f\|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 (d_n - c_n)^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\phi_n\|^2 + \|f\|^2 . \end{aligned} \tag{5.72}$$

Então, verifica-se que $\|T_N - f\|$ é mínimo quando $d_n = c_n$ para $n = 0, 1, ..., N$, o que prova o teorema seguinte:

Teorema 5.5.4 *Dado um inteiro não negativo N, a melhor aproximação em média para uma função $f(x)$ é uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{N} d_n \phi_n(x)$, obtida quando d_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$.*

Considere-se, em (5.72), $d_n = c_n$ para $n = 0, 1, ..., N$, para obter

$$\|S_N - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\phi_n\|^2 . \tag{5.73}$$

Então

$$\|T_N - f\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 (d_n - c_n)^2 + \|S_N - f\|^2 , \tag{5.74}$$

pelo que

$$0 \leq \|S_N - f\| \leq \|T_N - f\| . \tag{5.75}$$

Se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n \phi_n(x)$ convergir em média para $f(x)$, isto é,

$$\lim_{N \to +\infty} \|S_N - f\| = 0,$$

então, por (5.75), a série de Fourier converge em média para $f(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{N \to +\infty} \|T_N - f\| = 0$.

Contudo, por (5.74), tem-se

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \|\phi_n\|^2 (d_n - c_n)^2 = 0,$$

o que apenas é possível se $d_n = c_n$ para $n = 0, 1, ...$

Provou-se assim o teorema:

Teorema 5.5.5 *Se uma série do tipo* $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n \phi_n(x)$ *converge em média para* $f(x)$*, então os coeficientes* d_n *têm de ser os coeficientes de Fourier de* $f(x)$.

Da desigualdade (5.73) conclui-se

$$0 \leq \|S_{N+1} - f\| \leq \|S_N - f\| ,$$

pelo que a sucessão $\{\|S_N - f\| , \ N = 0, 1, ...\}$ é não crescente e minorada por zero, logo é convergente. Se convergir para zero, então a série de Fourier para $f(x)$ converge em média para $f(x)$.

Além disso, por (5.73), é válida a desigualdade

$$\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

e como a sucessão $\left\{\sum_{n=0}^{N} c_n^2 \|\phi_n\|^2,\ N = 0, 1, ...\right\}$ é não crescente e majorada por $\|f\|^2$, logo é convergente e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Novamente por (5.73), verifica-se que a série de Fourier para $f(x)$ converge em média para $f(x)$ se, e só se,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \|\phi_n\|^2 . \tag{5.76}$$

No caso particular em que $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, ...$, são funções ortonormadas a expressão reduz-se à **desigualdade de Bessel**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2 \tag{5.77}$$

e (5.76) torna-se a **igualdade de Parseval**

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2. \tag{5.78}$$

Estes resultados são resumidos no teorema seguinte:

Teorema 5.5.6 *Seja $\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$ um conjunto ortonormado e c_n os coeficientes de Fourier de $f(x)$ dados por (5.70). Então:*

(i) *A série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2$ converge e*

$$\lim c_n = \lim \int_{\alpha}^{\beta} r(x)\phi_n(x)f(x)dx = 0.$$

(ii) *É válida a desigualdade de Bessel (5.77).*

(iii) *A série de Fourier de $f(x)$ converge em média para $f(x)$ se, e só se, a igualdade de Parseval, (5.78), for válida.*

Represente-se por $C_s([\alpha, \beta])$ o espaço de todas as **funções seccionalmente contínuas** em $[\alpha, \beta]$. O conjunto ortogonal $\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$ diz-se **completo** em $C_s([\alpha, \beta])$ se para toda a função $f(x)$ de $C_s([\alpha, \beta])$ a sua série de Fourier converge em média para $f(x)$.

Se $\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$ for um conjunto ortonormado então é completo se, e só se, a igualdade de Parseval se verificar para qualquer função em $C_s([\alpha, \beta])$.

Uma propriedade fundamental para conjuntos ortogonais é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 5.5.7 *Se um conjunto ortogonal $\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$ é completo em $C_s([\alpha, \beta])$, então qualquer função ortogonal a todas as funções $\phi_n(x)$ tem que ser nula, excepto, eventualmente, num número finito de pontos de $[\alpha, \beta]$.*

Dem. Suponha-se, sem perda de generalidade, que o conjunto

$$\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$$

é ortonormal. Se $f(x)$ é ortogonal a todas as funções $\phi_n(x)$, então, por (5.70), todos os coeficientes de Fourier c_n de $f(x)$ são nulos. Então, pela igualdade de Parseval (5.78) a função $f(x)$ tem que ser nula, excepto, possivelmente, num número finito de pontos de $[\alpha, \beta]$. ■

Este resultado é importante porque caso se retire uma função a um conjunto ortogonal, então as funções restantes não podem formar um conjunto completo. Por exemplo, o conjunto $\{\cos(nx), n = 1, 2, ...\}$ não é completo em $[0, \pi]$ em relação à função peso $r(x) = 1$.

Não existe, infelizmente, nenhuma regra geral para garantir a completude de um conjunto ortogonal. Contudo pode enunciar-se:

Teorema 5.5.8 *O conjunto ortogonal $\{\phi_n(x), n = 0, 1, ...\}$ em $[\alpha, \beta]$, com respeito à função peso $r(x)$, é completo em $C_s([\alpha, \beta])$ se $\phi_n(x)$ é um polinómio de grau n.*

Como consequência imediata, a série de Fourier-Legendre de uma função seccionalmente contínua em $[-1, 1]$ converge em média para $f(x)$.

Teorema 5.5.9 *O conjunto de todas as funções próprias $\{\phi_n(x), n = 1, 2, ...\}$ do problema de Sturm-Liouville regular (5.45), (5.31) é completo no espaço $C_s([\alpha, \beta])$.*

O Teorema anterior pode também ser aplicado a um problema periódico de valores próprios. Por exemplo, em

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L), \end{gathered}$$

o conjunto

$$\left\{1, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n \geq 1,\ L > 0\right\},$$

referido no Exemplo 5.5.2, é completo em $C_s\left([-L, L]\right)$. Portanto a série trigonométrica de Fourier de qualquer função $f(x)$ em $C_s\left([-L, L]\right)$ converge em média para $f(x)$.

A discussão analítica sobre a convergência pontual e uniforme da série de Fourier de uma função $f(x)$ para $f(x)$, não cabe neste curso. Contudo, apresenta-se, sem demonstração, o resultado:

Teorema 5.5.10 *Seja $\{\phi_n(x), n = 1, 2, ...\}$ o conjunto de todas as funções próprias do problem de Sturm-Liouville regular (5.45), (5.31). Então:*

(i) *A série de Fourier de $f(x)$ converge para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ em cada ponto do intervalo aberto $]\alpha, \beta[$, desde que $f(x)$ e $f'(x)$ sejam seccionalmente contínuas em $[\alpha, \beta]$.*

(ii) *A série de Fourier de $f(x)$ converge uniforme e absolutamente para $f(x)$ em $[\alpha, \beta]$, desde que $f(x)$ seja contínua, $f'(x)$ seccionalmente contínua em $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = 0$ se $\phi_n(\alpha) = 0$ e $f(\beta) = 0$ se $\phi_n(\beta) = 0$.*

Exemplo 5.5.11 *Pretende-se obter a série de Fourier de $f(x) = 1$ em $[0, \pi]$ em termos das funções próprias $\phi_n(x) =$sen(nx), $n = 1, 2, ...$, do problema de valores próprios*

$$\begin{array}{c} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{array} \tag{5.79}$$

Como

$$\|\phi_n\|^2 = \int_0^\pi sen^2(nx)dx = \frac{\pi}{2},$$

então

$$c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_0^\pi f(x)sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi sen(nx)dx = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Portanto

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}sen\left((2n-1)\,x\right) \tag{5.80}$$

e, pelo Teorema 5.5.10, a igualdade (5.80) é válida em qualquer ponto do intervalo aberto $]0, \pi[$.

Exemplo 5.5.12 *Para determinar a série de Fourier de* $f(x) = x - x^2$, $x \in [0,1]$ *em termos das funções próprias* $\phi_1(x) = 1 - x$, $\phi_n(x) = sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)$, $n = 2, 3, ...$, *do problema (5.79), note-se que:*

$$\begin{aligned}
\|\phi_1\|^2 &= \int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}, \\
\|\phi_n\|^2 &= \int_0^1 sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[1 - \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} sen\left(2\sqrt{\lambda_n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda n}} sen\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right] = \frac{1}{2} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right), \ n \geq 2,
\end{aligned}$$

tendo-se utilizado o facto de $\tan\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n}$.
Portanto,

$$c_1 = 3\int_0^1 (1-x)\left(x - x^2\right)dx = \frac{1}{4}$$

e, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2}{sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}\int_0^1 \left(x - x^2\right) sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)dx \\
&= \frac{-2}{\sqrt{\lambda_n} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)} \\
&\quad \left[(1-2x)\frac{sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)}{-\sqrt{\lambda_n}}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 -2\frac{sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right)}{-\sqrt{\lambda_n}}dx\right] \\
&= \frac{-2}{\lambda_n^{\frac{3}{2}} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}\left[\sqrt{\lambda_n} sen\left(\sqrt{\lambda_n}\right) - 2 + 2\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\lambda_n^{\frac{3}{2}} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}\left[2 - (2+\lambda_n)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned}
f(x) &= x - x^2 = \tfrac{1}{4}(1-x) \\
&\quad + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\lambda_n^{\frac{3}{2}} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}\left[2 - (2+\lambda_n)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right] sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1-x)\right).
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Pelo Teorema 5.5.10, a igualdade (5.81) é uniformemente verdadeira em $[0,1]$.

A convergência da série de Fourier-Legendre ou da série trigonométrica de Fourier não pode ser obtida a partir do Teorema 5.5.10.

Para estes casos aplicam-se os resultados:

Teorema 5.5.13 *Se $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $[-1,1]$, então a série de Fourier-Legendre de $f(x)$ converge para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ em cada ponto do intervalo aberto $]-1,1[$, em $x=-1$ converge para $f(1^+)$ e $x=1$ converge para $f(1^-)$.*

Teorema 5.5.14 *Se $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $[-L,L]$, $(L>0)$, então a série trigonométrica de Fourier de $f(x)$ converge para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ em cada ponto do intervalo aberto $]-L,L[$ e em $x=\pm L$ converge para $\frac{f(-L^+)+f(L^-)}{2}$.*

Exemplo 5.5.15 *A função*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in[-\pi,0[\\ 1 & , \quad x\in[0,\pi] \end{cases}$$

é seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$, com uma desontinuidade em $x=0$. Por (5.71), tem-se $a_0=1$ e, para $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi sen\,(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}sen\,((2n-1)\,x)\,. \tag{5.82}$$

Pelo Teorema 5.5.14, a igualdade (5.82) verifica-se em cada um dos pontos dos intervalos abertos $]-\pi,0[$ e $]0,\pi[$, enquanto que para $x=0$ se tem

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}.$$

Para $x=\pm\pi$ obtêm-se os mesmos valores.

Considere-se agora a equação diferencial não homogénea

$$\left(p(x)y'\right)'+q(x)y+\mu r(x)y=f(x), \tag{5.83}$$

sendo μ uma constante, as funções $q, r \in C([\alpha, \beta])$, $p \in C^1([\alpha, \beta])$, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ em $[\alpha, \beta]$ e $f(x)$ uma função dada em $[\alpha, \beta]$, com as condições de fronteira homogéneas (5.31),

$$\begin{aligned} a_0 y(\alpha) + a_1 y'(\alpha) = 0 \\ d_0 y(\beta) + d_1 y'(\beta) = 0. \end{aligned}$$

No problema não homogéneo (5.83), (5.31), assume-se que as soluções podem ser desenvolvidas em termos de funções próprias $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, ...$, do problema homogéneo de Sturm-Liouville correspondente (5.45), (5.31), isto é, $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x)$.

Para calcular os coeficientes c_n, repare-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x)$ verifica as condições de fronteira (5.31), porque cada uma das funções $\phi_n(x)$ também as verifica.

Considerando $\mathcal{P}_2[y] := (p(x)y')' + q(x)y$, tem-se

$$\mathcal{P}_2 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x) \right] + \mu r(x) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x) = f(x)$$

e, comutando as somas com a diferenciação,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \mathcal{P}_2 \left[\phi_n(x) \right] + \mu r(x) \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x) = f(x).$$

Como $\mathcal{P}_2 \left[\phi_n(x) \right] = -\lambda_n r(x) \phi_n(x)$, obtem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\mu - \lambda_n) c_n \phi_n(x) = \frac{f(x)}{r(x)}. \tag{5.84}$$

Considerando que a função $\frac{f(x)}{r(x)}$ verifica as condições do Teorema 5.5.10, pode escrever-se

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \phi_n(x),$$

em que, por (5.69), os coeficientes d_n são dados por

$$d_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_\alpha^\beta r(x) \phi_n(x) \frac{f(x)}{r(x)} dx = \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_\alpha^\beta \phi_n(x) f(x) dx. \tag{5.85}$$

Assim a expressão (5.84) toma a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(\mu - \lambda_n) c_n - d_n \right] \phi_n(x) = 0.$$

Para que esta igualdade se verifique, para cada $x \in [\alpha, \beta]$, é necessário que

$$(\mu - \lambda_n)\, c_n - d_n = 0, \; n = 1, 2, ... \tag{5.86}$$

Portanto, se μ for diferente de qualquer valor próprio do problema homogéneo de Sturm-Liouville correspondente (5.45), (5.31), isto é $\mu \neq \lambda_n$, $n = 1, 2, ...$, então

$$c_n = \frac{d_n}{\mu - \lambda_n}, n = 1, 2, ..., \tag{5.87}$$

e a solução $y(x)$ do problema (5.83), (5.31) pode ser escrita como

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x). \tag{5.88}$$

Se $\mu = \lambda_m$, então para $n = m$, pela equação (5.86), $d_m = 0$.

Logo, se $d_m \neq 0$, é impossível encontrar c_m que verifique (5.86) e o problema não homogéneo (5.83), (5.31) não tem solução.

Por outro lado, se $d_m = 0$ então (5.86) é verificada para qualquer valor de c_m, e o problema não homogéneo (5.83), (5.31) tem uma infinidade de soluções. Mas, por (5.85), $d_m = 0$ se, e só se,

$$\int_\alpha^\beta \phi_m(x) f(x) dx = 0,$$

isto é, se $f(x)$, em (5.83), for ortogonal à função própria $\phi_m(x)$.

Esta discussão pode ser sintetizada no teorema:

Teorema 5.5.16 *Considere-se $f(x)$ uma função contínua em $[\alpha, \beta]$. Então o problema não homogéneo com valores na fronteira (5.83), (5.31):*

(i) *tem uma única solução desde que μ seja diferente de todos os valores próprios do correspondente problema homogéneo de Sturm-Liouville, (5.45), (5.31). Esta solução $y(x)$ é dada por (5.88) e a série converge para cada $x \in [\alpha, \beta]$;*

(ii) *não tem solução se μ for igual a algum valor próprio λ_m do problema homogéneo (5.45), (5.31);*

(iii) *tem soluções não únicas se, para um certo m, $\mu = \lambda_m$ e $f(x)$ for ortogonal à função própria $\phi_m(x)$, isto é,*

$$\int_\alpha^\beta \phi_m(x) f(x) dx = 0.$$

Este resultado pode ser apresentado em forma de alternativa:

Teorema 5.5.17 ***(Alternativa de Fredholm)*** *Dadas uma constante μ e uma função contínua em $[\alpha, \beta]$, $f(x)$, o problema não homogéneo com valores na fronteira (5.83), (5.31) ou tem uma única solução, ou o correspondente problema homogéneo (5.45), (5.31) tem uma solução não trivial.*

Exemplo 5.5.18 *Considere-se o problema não homogéneo com valores na fronteira*

$$\begin{array}{c} y'' + \pi^2 y = x - x^2 \\ y(0) + y'(0) = 0 = y(1), \end{array} \tag{5.89}$$

o qual pode ser resolvido directamente para obter a única solução

$$y(x) = \frac{2}{\pi^4}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi^3}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) sen(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\left(x - x^2 + \frac{2}{\pi^2}\right).$$

Pelo Exemplo 5.4.2, π^2 não é um valor próprio do problema de Sturm-Liouville (5.46), (5.52). Então, pelo Teorema 5.5.16, o problema não homogéneo (5.89) tem uma única solução. Para encontrar esta solução em termos de valores próprios λ_n e funções próprias $\phi_n(x)$ do problema (5.46), (5.52), repare-se que a função $f(x) = x - x^2$ já foi desenvolvida em série no Exemplo 5.5.12, pelo que, por (5.81),

$$d_1 = \frac{1}{4}, \quad d_n = \frac{2}{\lambda_n^{\frac{3}{2}} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)}\left[2 - (2 + \lambda_n)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right], \quad n \geq 2.$$

Assim, por (5.88), a solução $y(x)$ de (5.89), tem o desenvolvimento

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4\pi^2}(1 - x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(\pi^2 - \lambda_n)\lambda_n^{\frac{3}{2}} sen^2\left(\sqrt{\lambda_n}\right)} \\ &\quad \left[2 - (2 + \lambda_n)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\right)\right] sen\left(\sqrt{\lambda_n}(1 - x)\right). \end{aligned}$$

5.6 Problemas não lineares com valores na fronteira

Anteriormente já foram indicadas condições necessárias e suficientes para que o problema linear com valores na fronteira (5.1), (5.2) tivesse uma única solução (Teorema 5.1.5). Contudo este resultado depende do conhecimento explícito de duas soluções linearmente independentes, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, da equação diferencial homogénea (5.3).

Nesta secção serão estabelecidas condições suficientes para que a equação diferencial não linear

$$y'' = f(x, y) \tag{5.90}$$

com as condições de Dirichlet (5.5) tenha pelo menos uma solução e em que casos essa solução é única.

Para identificar algumas dificuldades, veja-se o seguinte exemplo:

Exemplo 5.6.1 *A difusão de calor gerada por fontes dependentes da temperatura (positiva) pode ser modelada pelo probelma de valores na fronteira*

$$y'' = b\ e^{ay}, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{5.91}$$

Por exemplo, o caso $a = 1$ aplica-se nas perdas de calor dos condutores eléctricos sólidos, sendo b o quadrado da corrente constante e e^y a resistência, dependente da temperatura, ou com calor gerado por fricção, com b a representar o quadrado da pressão (constante) vertical e e^y a temperatura dependente da densidade do fluido.

Temos então várias situações possíveis:

1. *Se $ab = 0$, o problema (5.91) tem uma única solução. Se $a = 0$, a solução será $y(x) \equiv 0$. Se $b = 0$, será $y(x) = \frac{b}{2}\left(x^2 - x\right)$.*

2. *Se $ab < 0$, o problema (5.91) tem tantas soluções quantas as raízes da equacão $c = \sqrt{2|ab|}\cosh\left(\frac{c}{4}\right)$. Para cada c_i a solução é*

$$y_i(x) = -\frac{2}{a}\left\{\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{2}c_i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right] - \ln\left(\cosh\left(\frac{c_i}{4}\right)\right)\right\}.$$

   Da equação $c = \sqrt{2|ab|}\cosh\left(\frac{c}{4}\right)$ tem-se que se

$$\sqrt{\frac{|ab|}{8}}\min_{c\geq 0}\frac{\cosh\left(\frac{c}{4}\right)}{\frac{c}{4}} \quad \begin{array}{lll} < 1, & \textit{(5.91)} & \textit{tem duas soluções;} \\ = 1, & \textit{(5.91)} & \textit{tem uma solução;} \\ > 1 & \textit{(5.91)} & \textit{não tem soluções.} \end{array}$$

3. *Se $ab > 0$, o problema (5.91) tem uma única solução*

$$y_1(x) = \frac{2}{a}\ln\left(\frac{c_1}{\cos\left(\frac{1}{2}c_1\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}\right) - \frac{1}{a}\ln\left(2ab\right),$$

   com $\frac{c_1}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ a raiz da equação

$$\frac{c}{4}\sqrt{\frac{ab}{8}}\cos\left(\frac{c}{4}\right).$$

Exemplo 5.6.2 *Considere-se o problema não linear com valores na fronteira*

$$y'' + |y| = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\beta) = B, \tag{5.92}$$

com β e B parâmetros.
É óbvio que a solução $y(x)$ da equação inicial será solução de $y'' - y = 0$ se $y(x) \leq 0$ e será solução de $y'' + y = 0$ se $y(x) \geq 0$.
Como $f(x, y) = |y|$ verifica uma condição de Lipschitz uniforme, isto é,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D_f, \tag{5.93}$$

para cada m, o problema de valor inicial

$$y'' + |y| = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = m$$

tem uma única solução $y(x, m)$, que pode ser dada, nos vários casos, por

$$y(x,m) = \begin{cases} 0 & , \quad \forall x \in [0, \beta] \quad , \quad se\ m = 0 \\ m\ senh\ x & , \quad \forall x \in [0, \beta] \quad , \quad se\ m < 0 \\ m\ sen\ x & , \quad \forall x \in [0, \pi] \quad , \quad se\ m > 0 \\ -m\ senh\,(x - \pi) & , \quad \forall x \in [\pi, \beta] \quad , \quad se\ m > 0 \end{cases}$$

Se $\beta < \pi$, o problema com valores na fronteira (5.92) tem uma única solução $y(x)$, que é dada por

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad B = 0 \\ \frac{B\ senh\ x}{senh\ \beta} & , \quad B < 0 \\ \frac{B\ sen\ x}{sen\ \beta} & , \quad B > 0. \end{cases}$$

Se $\beta \geq \pi$ e $B > 0$, então o problema (5.92) não tem solução, enquanto que para $\beta = \pi$ e $B = 0$ tem uma infinidade de soluções $y(x) = c\ senx$, com c uma constante arbitrária.
Se $\beta > \pi$ e $B = 0$, então $y(x) \equiv 0$ é a única solução de (5.92).
Finalmente, se $\beta > \pi$ e $B < 0$, então (5.92) tem duas soluções, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, dadas por

$$y_1(x) = B\frac{senh\ x}{senh\ \beta}$$

e

$$y_2(x) = \begin{cases} -\frac{B\ sen\ x}{senh(\beta - \pi)} & , \quad x \in [0, \pi] \\ \frac{B\ senh(x - \pi)}{senh(\beta - \pi)} & , \quad x \in [\pi, \beta]\,. \end{cases}$$

O próximo resultado fornece uma condição suficiente para a função $f(x,y)$ de modo a que o problema (5.90), (5.5) tenha, pelo menos, uma solução:

Teorema 5.6.3 *Se a função contínua $f(x,y)$ verifica uma condição de Lipschitz uniforme (5.93) em $[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$ e é limitada, isto é,*

$$|f(x,y)| \leq M, \quad \forall (x,y) \in [\alpha,\beta]\times\mathbb{R},$$

então o problema de Dirichlet com valores na fronteira (5.90), (5.5) tem, pelo menos, uma solução.

Dem. Pelo Teorema 3.1.4, para cada m o problema de valor inicial formado pela equação (5.90) e pelas condições

$$y(\alpha) = A, \quad y'(\alpha) = m,$$

tem uma única solução $y(x,m)$ em $[\alpha,\beta]$. Como

$$\begin{aligned} y'(x,m) &= y'(\alpha,m) + \int_\alpha^x y''(t,m)dt = m + \int_\alpha^x f(t,y(t,m))dt \\ &\geq m - \int_\alpha^x M dt = m - M(x-\alpha), \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} y(x,m) &= y(\alpha,m) + \int_\alpha^x y'(t,m)dt \geq A + \int_\alpha^x (m - M(t-\alpha))\,dt \\ &= A + m(x-\alpha) - M\frac{(x-\alpha)^2}{2}. \end{aligned}$$

Em particular

$$y(\beta,m) \geq A + m(\beta-\alpha) - M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}. \tag{5.94}$$

Para $m = m_1$ suficientemente grande e positivo, (5.94) implica que $y(\beta,m_1) > B$. Do mesmo modo obtem-se

$$y(\beta,m) \leq A + m(\beta-\alpha) + M\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

e, portanto, para $m = m_2$ suficientemente negativo, $y(\beta,m_2) < B$.

Pelo Teorema 3.1.10, $y(\beta, m)$ é uma função contínua de m, pelo que existe pelo menos um m_3 tal que $m_2 < m_3 < m_1$ e $y(\beta, m_3) = B$. Portanto a solução do problema de valor inicial formado por (5.90) e por

$$y(\alpha) = A, \quad y'(\alpha) = m_3,$$

é também uma solução do problema com valores na fronteira (5.90), (5.5). ■

Exemplo 5.6.4 *Como a função $f(x,y) = x$ sen y verifica as condições do Teorema 5.6.3 em $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, o problema*

$$y'' = xsen\ y, \quad y(0) = y(2\pi) = 0$$

tem, pelo menos, uma solução, que é a solução trivial.

Naturalmente, segue-se uma condição suficiente para que o problema (5.90), (5.5) tenha, no máximo, uma solução:

Teorema 5.6.5 *Se a função $f(x,y)$ é contínua e não decrescente em y para $(x,y) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, então o problema (5.90), (5.5) tem, no máximo, uma solução.*

Dem. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (5.90), (5.5). Então

$$y_1''(x) - y_2''(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)),$$

isto é,

$$[y_1(x) - y_2(x)] \left[y_1''(x) - y_2''(x)\right] = [y_1(x) - y_2(x)] \left[f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))\right]. \tag{5.95}$$

Como f é não decrescente em y, o segundo membro de (5.95) é não negativo, pelo que

$$\int_\alpha^\beta [y_1(x) - y_2(x)] \left[y_1''(x) - y_2''(x)\right] dx \geq 0,$$

ou seja,

$$\left[(y_1(x) - y_2(x)) \left(y_1'(x) - y_2'(x)\right)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left[y_1'(x) - y_2'(x)\right]^2 dx \geq 0.$$

Como o primeiro termo é nulo, então ter-se-á

$$\int_\alpha^\beta \left[y_1'(x) - y_2'(x)\right]^2 dx = 0. \tag{5.96}$$

Esta equação (5.96) é verdadeira se, e só se, $y_1'(x) - y_2'(x) \equiv 0$, isto é, $y_1(x) - y_2(x) = c$ (constante). Mas como, $y_1(\alpha) - y_2(\alpha) = 0$ então $c = 0$ e $y_1(x) \equiv y_2(x)$. ■

Exemplo 5.6.6 *No caso em que* $ab > 0$*, a função* be^{ay} *é não decrescente em* y *e, por isso, o Teorema 5.6.5 garante que o problema (5.91) tem, no máximo, uma solução.*

Repare-se que o problema

$$y'' = -y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

tem infinitas soluções, o que permite concluir que quando $f(x, y)$ é decrescente em relação a y, o Teorema 5.6.5 não é válido. Ou seja, no Teorema 5.6.5 não é possível substituir "não decrescente" por "decrescente".

No Teorema 5.6.5 exigiu-se que $f(x, y)$ fosse limitada para todos os valores de (x, y) em $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, o que é muito restritivo. Nenhum dos Exemplos 5.6.1 e 5.6.2 a verifica, nem sequer uma "simples" função linear.

O seguinte resultado supera esta restrição :

Teorema 5.6.7 *(**Existência local**) Considerem-se um número* $K > 0$*, uma função* $f(x, y)$ *contínua no conjunto*

$$D = \{(x, y) : \alpha \leq x \leq \beta,\ |y| \leq 2K\}$$

e $M > 0$ *tais que*

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D, \quad \frac{1}{8} (\beta - \alpha)^2 M \leq K \quad e \quad \max\{|A|, |B|\} \leq K.$$

Então o problema de valores na fronteira (5.90), (5.5),

$$y'' = f(x, y), \quad y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B,$$

tem, pelo menos, uma solução $y(x)$ *tal que* $|y(x)| \leq 2K$ *para* $x \in [\alpha, \beta]$.

Corolário 5.6.8 *(**Existência global**) Suponha-se que a função* $f(x, y)$ *é contínua e limitada para* $(x, y) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$*. Então o problema (5.90), (5.5) tem, pelo menos, uma solução.*

Estes últimos resultados permitem concluir que, no Teorema 5.6.3, a hipótese de $f(x, y)$ ser uniformemente Lipschitzeana é "excessiva".

Exemplo 5.6.9 *O problema (5.91) verifica as condições do Teorema 5.6.7 desde que*

$$\frac{1}{8}|b|\ e^{2|a|K} \leq K.$$

Em particular, o problema

$$y'' = e^y, \quad y(0) = y(1) = 0$$

tem, pelo menos, uma solução $y(x)$ se $\frac{1}{8}\ e^{2K} \leq K$.

Exemplo 5.6.10 *Para o problema (5.92) as condições do Teorema 5.6.7 verificam-se desde que $\beta \leq 2$ e $|B| \leq K$.*
Um caso particular, é o problema

$$y'' + |y| = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1,$$

que tem, pelo menos, uma solução $y(x)$ que verifica $|y(x)| \leq 2$.

O método das aproximações sucessivas de Picard para os problemas de valor inicial, também é útil para os problemas com valores na fronteira (5.90), (5.5). Para tal recorde-se que, pelo Exercício 5.2.4, este problema é equivalente à equação integral

$$y(x) = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} A + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} B + \int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t, y(t))dt, \tag{5.97}$$

com a função de Green dada por (5.36).

O próximo resultado estabelece uma condição suficiente para $f(x, y)$ de modo a que a sucessão $(y_m(x))$, gerada pela iteração

$$\begin{aligned} &y_0(x) = l(x) \\ &y_{m+1}(x) = l(x) + \textstyle\int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t, y_m(t))dt, \quad m = 0, 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{5.98}$$

com

$$l(x) := \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} A + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} B, \tag{5.99}$$

seja convergente para a única solução da equação integral (5.97).

Teorema 5.6.11 *Seja $f(x, y)$ uma função contínua que verifique a condição de Lipschitz uniforme (5.93) em $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$ e*

$$\theta := \frac{1}{8} L\,(\beta - \alpha)^2 < 1. \tag{5.100}$$

Então a sucessão $(y_m(x))$, gerada pela iteração (5.98), converge para a única solução,$y(x)$, do problema com valores na fronteira (5.90), (5.5).
Além disso, para $x \in [\alpha, \beta]$, verifica-se a seguinte majoração para o erro

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)|, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{5.101}$$

Dem. Por (5.98), as aproximações sucessivas $y_m(x)$ são funções contínuas em $[\alpha, \beta]$. Assim, é necessário provar que

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq \theta^m \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| . \tag{5.102}$$

Para $m = 1$, tem-se, por (5.98), (5.93) e pelo Exercício 5.2.4, que

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))| \, dt \\ &\leq L \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |y_1(t) - y_0(t)| \, dt \\ &\leq L \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \, dt \\ &\leq \frac{L}{8} (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| , \end{aligned}$$

pelo que (5.102) é verdadeira para $m = 1$.

Considere-se agora que (5.102) se verifica para $m = k \geq 1$. Então, por (5.98), obtem-se

$$\begin{aligned} |y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\leq \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |f(t, y_{k+1}(t)) - f(t, y_k(t))| \, dt \\ &\leq L \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \, dt \\ &\leq L \ \theta^k \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \, dt \\ &\leq \frac{L}{8} (\beta - \alpha)^2 \, \theta^k \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| \\ &\leq \theta^{k+1} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| , \end{aligned}$$

pelo que (5.102) é verdadeira para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para $n > m$, por (5.102), tem-se

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_m(x)| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \theta^k \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| \\ &\leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y_1(x) - y_0(x)| . \end{aligned} \tag{5.103}$$

Como $\theta < 1$, resulta de (5.103) que $(y_n(x))$ é uma sucessão de Cauchy em $[\alpha, \beta]$ que converge uniformemente para uma função contínua $y(x)$ em $[\alpha, \beta]$. Fazendo $n \to +\infty$ em (5.98), resulta que $y(x)$ é solução de (5.97). Pelo mesmo processo, se $n \to +\infty$ em (5.103), obtem-se (5.101).

Para provar a unicidade da solução $y(x)$ de (5.97), admita-se que existe uma outra solução $z(x)$ de (5.97). Aplicando os argumentos de (5.36), tem-se que

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &\leq \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \, dt \\ &\leq L \int_\alpha^\beta |G(x,t)| \ \ |y(t) - z(t)| \, dt \\ &\leq \frac{L}{8} (\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x) - z(x)| \, . \end{aligned} \tag{5.104}$$

Como $\theta < 1$, a desigualdade (5.104) implica que $\max\limits_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x) - z(x)| = 0$, isto é, $y(x) \equiv z(x)$ em $[\alpha, \beta]$. ∎

Dada uma certa função, a constante de Lipschitz L fica determinada, pelo que a condição (5.100) restringe o comprimento do intervalo, $\beta - \alpha$. Por outro lado, dadas as condições de fronteira o comprimento do intervalo, $\beta - \alpha$, fica conhecido e (5.100) restringe a constante de Lipschitz L.

Encontrar o intervalo de maior diâmetro no qual se possa garantir a existência de uma única solução para o problema (5.90), (5.5), é uma questão interessante.

Exemplo 5.6.12 *Considere-se o problema com valores na fronteira*

$$y'' = sen\ y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{5.105}$$

Neste caso, $L = 1$, $\beta - \alpha = 1$ *e* $\theta = \frac{1}{8}$, *pelo que o Teorema 5.6.11 garante que o problema (5.105) tem uma única solução.*
Como

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x \\ y_1(x) &= x + \int_0^1 G(x,t)\ sen\ t\ dt = x + x\ sen\ 1 - sen\ x \end{aligned}$$

então

$$|y_1(x) - y_0(x)| = |x\ sen\ 1 - sen\ x| \leq 0,06$$

e, por (5.101),

$$|y(x) - y_m(x)| \leq \frac{8}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m 0,06, \quad m = 0, 1, 2, ...$$

Repare-se que a função $b\ e^{ay}$ verifica a condição de Lipschitz (5.93) em qualquer subconjunto compacto de $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, pelo que o Teorema 5.6.11 não é aplicável ao Exemplo 5.6.1.

Para ultrapassar esta situação é necessário modificar um pouco o Teorema 5.6.11:

Se $y(x)$ for solução de (5.90), (5.5) então $w(x) = y(x) - l(x)$ é solução do problema

$$\begin{aligned} w'' &= F(x, w) &(5.106)\\ w(\alpha) &= w(\beta) = 0, &(5.107) \end{aligned}$$

com $F(x, w) = f(x, w + l(x))$, a qual verifica a condição de Lipschitz (5.93) com a mesma constante que é válida para f.

Para este último problema temos o resultado seguinte:

Teorema 5.6.13 *Suponha-se que a função $F(x, w)$ é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz uniforme (5.93) em $[\alpha, \beta] \times [-N, N]$, com N uma constante positiva. Se a desigualdade (5.100) se verificar e*

$$\frac{1}{8}(\beta - \alpha)^2 \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |F(x, 0)| \leq N(1 - \theta) \tag{5.108}$$

ou

$$\frac{1}{8}(\beta - \alpha)^2 \max_{\substack{\alpha \leq x \leq \beta \\ |w| \leq N}} |F(x, w)| \leq N, \tag{5.109}$$

então problema (5.106), (5.107) tem uma única solução $w(x)$, tal que $|w(x)| \leq N$ para $x \in [\alpha, \beta]$.

Além disso, a iteração

$$\begin{aligned} &w_0(x) = 0 \\ &w_{m+1}(x) = \int_\alpha^\beta G(x, t)\ F(t, w_m(t))\ dt \quad m = 0, 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{5.110}$$

converge para $w(x)$ e

$$|w(x) - w_m(x)| \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |w_1(x)|, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{5.111}$$

Exemplo 5.6.14 *A função* $F(x,w) = f(x,y) = -e^y$ *satisfaz a condição de Lipschitz em* $[\alpha,\beta] \times [-N,N]$, *com a constante* $L = e^N$. *Portanto, para o problema (5.91) com* $b = -1$, $a = 1$, *as condições do Teorema 5.6.13 reduzem-se a*

$$\frac{1}{8}e^N < 1 \tag{5.112}$$

e

$$\frac{1}{8} \leq N\left(1 - \frac{1}{8}e^N\right) \tag{5.113}$$

ou

$$\frac{1}{8}e^N \leq N. \tag{5.114}$$

Por (5.112) e (5.114) o problema

$$y'' + e^y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

tem uma única solução $y(x)$ *no rectângulo* $[0,1] \times [-2,079; 2,079]$ *e* $|y(x)| \leq 0,144$.
Por (5.110), $w_0(x) = y_0(x) = 0$, $w_1(x) = y_1(x) = \frac{1}{2}x\,(1-x)$, *pelo que (5.111) fica na forma*

$$|y(x) - y_m(x)| \leq 0,146 \ \ (0,144)^m\,, \quad m = 0,1,2,....$$

"Evitando" a condição de Lipschitz obtem-se:

Teorema 5.6.15 *Se* $F(x,w)$ *e* $\frac{\partial F}{\partial w}(x,w)$ *são contínuas e*

$$0 \leq \frac{\partial F}{\partial w}(x,w) \leq L, \ \forall (x,w) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{R},$$

então o problema (5.106), (5.107) tem uma única solução $w(x)$.
Além disso, para $k \geq L$, *a iteração*

$$\begin{array}{l} w_0(x) = 0 \\ w_{m+1}(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t) \ \ [-kw_m(t) + F(t,w_m(t))] \ dt \quad m = 0,1,2,... \end{array} \tag{5.115}$$

converge para $w(x)$, *sendo a função de Green* $G(x,t)$ *dada por (5.38).*

Dem. Em primeiro lugar prova-se que a sucessão $(w_m(x))$, gerada por (5.115) é uma sucessão de Cauchy. Para tal calcula-se, pelo Teorema do valor médio,

$$\begin{aligned}
& w_{m+1}(x) - w_m(x) \\
= & \int_\alpha^\beta G(x,t)\left[-k\left(w_m(t) - w_{m-1}(t)\right) + \left(F(t, w_m(t)) - F(t, w_{m-1}(t))\right)\right] dt \\
= & -\int_\alpha^\beta G(x,t)\left[k - \frac{\partial F}{\partial w}(t, w_m(t) - \theta(t)\left(w_m(t) - w_{m-1}(t)\right))\right] \\
& \times \left(w_m(t) - w_{m-1}(t)\right)\ dt,
\end{aligned}$$

com $0 \leq \theta(t) \leq 1$. Como $0 \leq \frac{\partial F}{\partial w}(x,w) \leq L$ e $k \geq L$, resulta que $0 \leq k - \frac{\partial F}{\partial w} \leq k$. Portanto, pelo Exercício 5.2.5, tem-se

$$\begin{aligned}
& \left|w_{m+1}(x) - w_m(x)\right| \\
\leq & \left(\int_\alpha^\beta \left|G(x,t)\right| k dt\right) \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left|w_1(x) - w_0(x)\right| \\
\leq & \left(1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - x\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)}\right) \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left|w_1(x) - w_0(x)\right| \\
\leq & \left(1 - \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)}\right) \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left|w_1(x) - w_0(x)\right|.
\end{aligned}$$

Definindo $\mu := 1 - \frac{1}{\cosh\left(\sqrt{k}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right)} < 1$, obtem-se

$$\left|w_{m+1}(x) - w_m(x)\right| \leq \mu^m \max_{\alpha \leq x \leq \beta} \left|w_1(x) - w_0(x)\right|,$$

pelo que $(w_m(x))$ é uma sucessão de Cauchy. Então, considerando em (5.115) $m \to +\infty$, resulta que

$$w(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t)\ \left[-kw(t) + F(t, w(t))\right]\ dt,$$

que é equivalente ao problema com valores na fronteira (5.106), (5.107).

A unicidade pode ser provada como o foi no Teorema 5.6.11. ■

Exemplo 5.6.16 *O problema linear com valores na fronteira*

$$y'' = p(x)y + q(x), \quad y(\alpha) = y(\beta) = 0,$$

com $p, q \in C\left([\alpha, \beta]\right)$ *e* $p(x) \geq 0$ *para* $x \in [\alpha, \beta]$, *tem uma única solução.*

5.7 Exercícios

1. Resolva os problemas com valores na fronteira:

a) $$\begin{cases} y'' + 4y' + 7y = 0 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} y'' + y = x^2 \\ \\ y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} y'' + y' + y = x \\ \\ y(0) + 2y'(0) = 1 \\ \\ y(1) - y'(1) = 8. \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ \\ y(0) = y(\frac{\pi}{6}) \\ \\ y'(0) = y'(\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0 \\ \\ y(-1) = y(1) \\ \\ y'(-1) = y'(1) \end{cases}$$

2. Mostre que o problema formado pela equação $y'' = r(x)$ e pelas condições (5.8) tem uma única solução se, e só se,

$$\Delta = a_0 d_0 (\beta - \alpha) + a_0 d_1 - a_1 d_0 \neq 0.$$

3. A equação diferencial homogénea

$$L_2 [y] := \left(x^2 + 1\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$$

admite as soluções linearmente independentes x e $x^2 - 1$. Utilize este facto para provar que o problema com valores na fronteira

$$L_2 [y] = 6 \left(x^2 + 1\right)^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \tag{5.116}$$

tem uma única solução e determine-a.

4. Justifique que

$$G(x,t) = \begin{cases} -\cos t \ \mathrm{sen}\ x & , \quad 0 \leq x \leq t \\ -\mathrm{sen}\ t \ \cos x & , \quad t \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

é a função de Green para o problema $y'' + y = 0,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e resolva o problema com valores na fronteira

$$y'' + y = 1 + x, \qquad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

5. Construa as funções de Green para os problemas seguintes e determine as suas soluções:

a) $\begin{array}{c} y'' + y = x^2 \\ y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{array}$

b) $\begin{array}{c} y'' + 2y' + y = x \\ y(0) = 0, \quad y(2) = 3 \end{array}$

6. Mostre que a solução do problema com valores na fronteira

$$y'' - \frac{1}{x}y' = r(x), \quad y(0) = 0, \ \ y(1) = 0$$

pode ser escrita como

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)\ r(t)\ dt,$$

com

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{\left(1-t^2\right)x^2}{2t} & , \quad x \leq t \\ \\ -\frac{t\left(1-x^2\right)}{2} & , \quad x \geq t. \end{cases}$$

7. Prove que a função de Green para o problema

$$\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 0$$

é

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{t\left(x^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} & , \quad 0 \leq t \leq x \\ \\ \frac{x\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} & , \quad x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Utilize a função de Green para resolver o problema (5.116).

8. Considere a equação diferencial

$$y'' + \alpha\, e^{\beta y} = -x^2, \quad x \in]0,1[,$$

com α e β constantes positivas. Mostre que a sua solução não pode atingir um mínimo no intervalo $]0,1[$.

9. Mostre que a solução $y(x)$ do problema com valores na fronteira

$$y'' - xy = 0, \quad x \in]0,1[\quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

verifica as relações

$$\frac{x + x^2}{2} \leq y(x) \leq x, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

10. Prove que a solução $y(x)$ do problema de valor inicial

$$y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0, \quad x \in]0,1[\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

satisfaz as desigualdades

$$1 + \frac{x^2}{4} \leq y(x) \leq 1 + \frac{x^2}{3}, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

11. Mostre que:

a) o conjunto $\{1,\ \cos(nx)\,,\ n = 1,2,...\}$ é ortogonal em $[0,\pi]$ com $r(x) = 1$.

b) o conjunto $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{sen}\,(nx)\,,\ n = 1,2,...\right\}$ é ortonormado em $[0,\pi]$ com $r(x) = 1$.

c) o conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}\,(nx)\,,\ n = 1,2,...\right\}$ é ortonormado em $[-\pi,\pi]$ com $r(x) = 1$.

12. Determine os valores próprios e as funções próprias para o problema formado pela equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$ e pelas seguintes condições de fronteira:

a) $y(0) = 0,\ \ y'(\beta) = 0$

b) $y'(0) = 0,\ \ y(\beta) = 0$

c) $y(0) = 0,\ \ y(\beta) + y'(\beta) = 0.$

13. Calcule os valores próprios e as funções próprias dos problemas de Sturm-Liouville seguintes:

a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$
b) $y'' + (1+\lambda)\, y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$
c) $y'' + 2y' + (1-\lambda)\, y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
d) $\left(x^2 y'\right)' + \lambda x^{-2} y = 0, \quad y(1) = y(2) = 0.$

14. Verifique que o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \left(xy'\right)' + \lambda x^{-1} y &= 0, \quad 1 < x < e^{2x}, \\ y'(1) &= 0, \quad y'(e^{2\pi}) = 0 \end{aligned}$$

admite como valores próprios $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$, $n = 0, 1, ...$, sendo as funções próprias correspondentes dadas por $\phi_n(x) = cos\left(\frac{n}{2}\ln x\right)$.

Mostre ainda que

$$\int_1^{e^{2\pi}} \frac{1}{x}\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

15. Resolva os problemas de Sturm-Liouville singulares:

a) $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \ |y(x)| < \infty$ para $x \in]0, +\infty[$
b) $y'' + \lambda y = 0, \quad |y(x)| < \infty$ para $x \in \mathbb{R}$.

16. Determine a expansão da função seccionalmente contínua $f(x)$, $x \in [0, \pi]$,

a) numa série de co-senos de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{n} \alpha_n \cos(nx), \quad \text{com } \alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt, \quad n \geq 0;$$

b) numa série de senos de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{n} b_n \text{sen}(nx), \quad \text{com } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\text{sen}(nt)\, dt, \quad n \geq 1.$$

17. Encontre a série trigonométrica de Fourier das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$;
b) $f(x) = x - \pi, \quad -\pi < x < \pi;$
c) $f(x) = x^4, \quad -\pi < x < \pi.$

18. Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-1, 0[\\ 1 & , \quad x \in [0, 1] \end{cases}$. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x \right)^2 dx \leq \int_{-1}^{1} \left(f(x) - c_0 - c_1 x - c_2 x^2 \right)^2 dx,$$

para constantes c_0, c_1, c_2 adequadas.

19. Considere uma função $f(x)$ uma função periódica, de período 2π, e de classe C^2. Prove que:

a) os coeficientes da série trigonométrica de Fourier a_n e b_n de $f(x)$ verificam as majorações

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad n = 1, 2, ...,$$

com $M = \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx$;

b) a série trigonométrica de Fourier de $f(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$.

20. Resolva os problemas, recorrendo ao desenvolvimento em séries de funções próprias:

a) $y'' + 3y = e^x, \quad y(0) = 0 = y(1).$

b) $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0 = y(1) + y'(1).$

21. Mostre que os seguintes problemas com valores na fronteira têm, pelo menos, uma solução:

a) $y'' = 1 + x^2 e^{-|y|}, \quad y(0) = 1, \ y(1) = 7.$

b) $y'' = \text{sen} x \, \cos y + e^x, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 1.$

22. Determine o maior valor de $\beta > 0$ para o qual os problemas com valores na fronteira que se seguem têm, pelo menos, uma solução:

a) $y'' = y \cos y + \text{sen} x, \quad y(0) = y(\beta) = 0.$

b) $y'' = y^2 \text{sen} x + e^{-x} \cos x, \quad y(0) = 1, \ y(\beta) = 2.$

23. Prove que os problemas com valores na fronteira têm, no máximo, uma solução:

a) $y'' = y^3 + x, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 1.$

b) $y'' = y + \cos y + x^2, \quad y(0) = 1, \ y(1) = 5.$

24. Encontre as duas primeiras iterações de Picard para os seguintes problemas com valores na fronteira e indique uma majoração para o erro cometido ao considerar a segunda iteração como solução:

a) $y'' + |y| = 0, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1.$

b) $y'' + e^{-y} = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$

25. Resolva os problemas com valores na fronteira:

a) $y'' = -2yy', \quad y(0) = 1, \; y(1) = \frac{1}{2}.$

b) $y'' = -\frac{(y')^2}{y}, \quad y(0) = 1, \; y(1) = \frac{3}{4}.$

c) $y'' = 2y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}, \; y(1) = 2.$

5.8 Actividades

Actividade 1:

1.1. Seja $y_1(x)$ uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{gathered} p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \\ y_1(\alpha) = a_1, \quad y_1'(\alpha) = -a_0 \end{gathered}$$

e $y_2(x)$ solução de

$$\begin{gathered} p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \\ y_2(\beta) = -d_1, \quad y_2'(\beta) = d_0. \end{gathered}$$

Prove que o problema de Dirichlet

$$\begin{gathered} p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \\ y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B \end{gathered}$$

tem uma única solução se, e só se, $W\left(y_1, y_2\right)(\alpha) \neq 0$.

1.2. Considere a equação diferencial

$$x^4 y'' + k^2 y = 0.$$

a) Verifique a sua solução geral é dada por

$$y(x) = x\left(A\,\cos\left(\frac{k}{x}\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{k}{x}\right)\right).$$

b) Encontre os valores próprios e as correspondentes funções próprias do problema de Sturm-Liouville formado pela equação e pelas condições

$$y(\alpha) = y(\beta) = 0, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Actividade 2:

Considere o problema com condições mistas na fronteira

$$\begin{gathered} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y(\alpha) = A, \quad y'(\beta) = B. \end{gathered}$$

Prove que:

a) $y(x)$ é solução deste problema se, e só se,

$$y(x) = A + B\,(x - \alpha) + \int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t, y(t), y'(t))dt,$$

sendo $G(x,t)$ a função de Green do problema homogéneo

$$\begin{gathered} y'' = 0 \\ y(\alpha) = 0, \quad y'(\beta) = 0, \end{gathered}$$

dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} \alpha - x & , \quad \alpha \le x \le t \\ \alpha - t & , \quad t \le x \le \beta. \end{cases}$$

b) $G(x,t) \le 0$ em $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$.

c) $G(x,t) \le \beta - \alpha$.

d) $\int_\alpha^\beta |G(x,t)|\, dt = \frac{1}{2}(x - \alpha)(2\beta - \alpha - x) \le \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2$.

e) $\int_\alpha^\beta \left|\frac{\partial G}{\partial x}(x,t)\right| dt = \beta - x \le \beta - \alpha$.

Actividade 3:

Suponha que a função $f(x, y, y')$ é contínua e verifica a seguinte condição de Lipschitz uniforme

$$\left|f(x,y,y') - f(x,z,z')\right| \le L\,|y - z| + M\,\left|y' - z'\right|$$

em $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}$, com

$$\mu := \frac{1}{8} L\,(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{2} M\,(\beta - \alpha) < 1.$$

Mostre que:

a) A sucessão $(y_m(x))$ gerada pela iteração

$$\begin{aligned} y_0(x) &= l(x) \\ y_{m+1}(x) &= l(x) + \int_\alpha^\beta G(x,t)\ f(t, y_m(t), y_m'(t))dt, \quad m = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

com $l(x)$ dado por (5.99) e $G(x,t)$ por (5.36), converge para a única solução do problema de Dirichlet

$$\begin{gathered} y'' = f\left(x, y, y'\right) \\ y(\alpha) = A, \quad y(\beta) = B. \end{gathered}$$

b) Uma estimação para o erro é dada por

$$\|y - y_m\| \leq \frac{\mu^m}{1-\mu} \|y_1 - y_0\|\,, \quad m = 0, 1, 2, ...,$$

sendo $\|y\| := L \underset{\alpha \leq x \leq \beta}{max} |y(x)| + M \underset{\alpha \leq x \leq \beta}{max} |y'(x)|\,.$

Bibliografia

[1] H. Amann, *Ordinary Differential Equation-An Introduction to Nonlinear Analysis*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 13. Walter de Gruyter & C.^{a}, Berlin, 1990.

[2] R.P.Agarwal, D. O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations,* Universitext, Springer, 2008.

[3] R.P.Agarwal, D. O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations, with Special Functions, Fourier Series and Boundary Value Problems*, Universitext, Springer, 2009.

[4] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Springer Verlag, 1978.

[5] W.E.Boyce, R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, Inc., 7^a Ed., 2001.

[6] E, Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics,* John Wiley & Sons Inc, 2005.

[7] M.W. Hirch, S. Smale, *Differencial Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Acad. Press, 1974.

[8] E.Serra, M.Tarallo, *A new proof of the Poincaré-Bendixson theorem*, Rivista de Matematica Pura ed Applicata, 7, (1990), 81-87

[9] G. Teschl, *Ordinary differential equations and Dynamical Systems,* URL: http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/