

Vibrações mecânicas lineares e análise em frequência¹

P. Areias
Professor Auxiliar
Departamento de Física da Universidade de Évora

11 de Novembro de 2011

Capítulo 1

Prelúdio

Expõem-se os conceitos essenciais de *vibrações mecânicas lineares* usando a classificação das equações do movimento como equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Como membro da classe, o tema pertence à “Análise Matemática”. Porém, tópicos relevantes para o Engenheiro são descritos como particularizações. Privilegia-se a clareza tentando introduzir conteúdo em cada frase. Evitam-se as longas descrições dos livros de texto e as deduções desnecessariamente elaboradas.

Capítulo 2

Vibrações de sistemas discretos

2.1 Introdução

O apelo à intuição física justifica a abordagem típica a este tema: sendo difícil definir precisamente a “intuição”, são mostrados muitos exemplos elementares. Na era do cálculo simbólico ainda se trabalha durante as horas de aulas em problemas recorrendo a pesados cálculos manuais. É útil ao aluno ganhar o correspondente arcaboço físico. No entanto, essa abordagem pode esbater as diferenças entre teoria, exemplo e demonstração.

Tentando fornecer o conteúdo da forma mais directa que consigo, cada tópico é dividido em quatro sub-secções:

- ★ Motivação e conceptualização
- ★ Modelo matemático
- ★ Soluções
- ★ Extensões

O leitor deve ter em mente a diferença entre

1. Leis Físicas gerais (Lei de gravidade de Newton, Segunda Lei de Newton, Força Electroestática de Coulomb, ...) e
2. leis constitutivas (força numa mola linear, corpo absolutamente rígido)

As primeiras são Universais e as segundas são pressupostos e/ou conveniências de cálculo. **Em engenharia nunca se discutem as primeiras e seleccionam-se as segundas de acordo com as conveniências.**

O leitor deve exercitar-se resolvendo problemas nos livros de texto habituais.

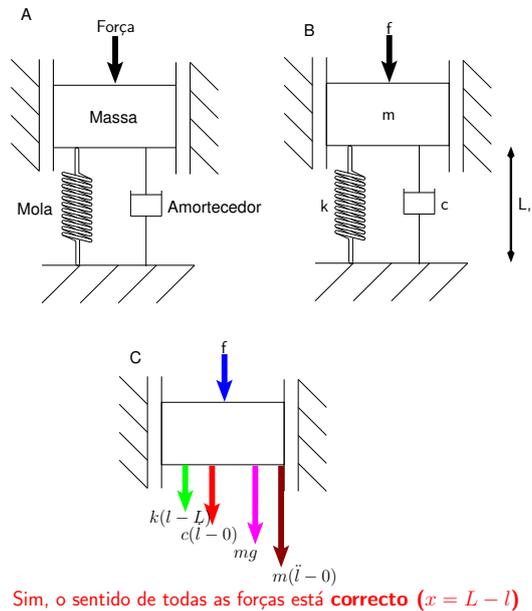


Figura 2.1: Sistema linear com um grau de liberdade: motivação

2.2 Um grau de liberdade

2.2.1 Motivação e conceptualização

Em mecânica é frequente observar-se a figura 2.1. Repare que o chamado diagrama de corpo livre C (o leitor deve informar-se sobre esse conceito) é baseado na sub-figura A mas requer a seguinte informação adicional:

- ★ A identificação dos componentes mecânicos
- ★ Pressupostos sobre a distribuição de rigidez e massa dos componentes (Leis Constitutivas)
- ★ Pressupostos sobre o comportamento dos componentes (Leis Constitutivas)
- ★ Uso de convenções, e.g. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, etc.
- ★ Identificação da geometria e sua mudança (Cinemática)
- ★ Conhecimento das Leis da Mecânica (Princípio d'Alembert e Mecânica Analítica)

No tema em questão:

- ★ Molas e amortecedores são lineares e sem massa
- ★ Massas concentradas são infinitamente rígidas

A equação de movimento é, usando a sub-figura C e x como parâmetro cinemático ($x(t) = L - l(t)$):

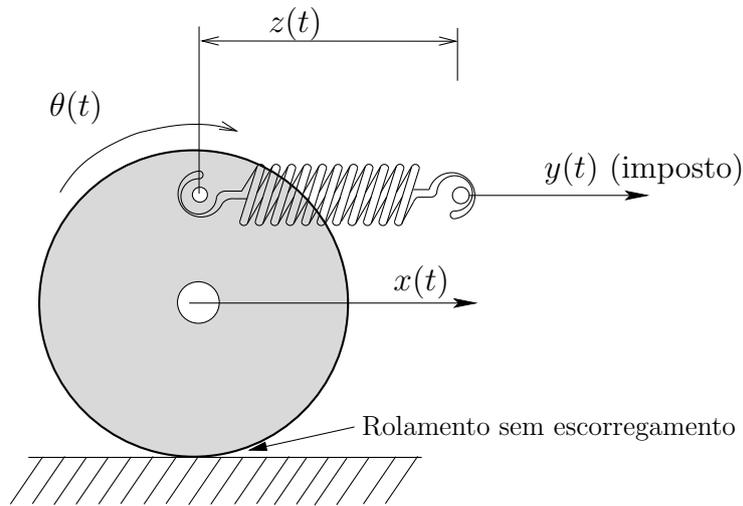


Figura 2.2: Parâmetros cinemáticos: quantos graus de liberdade tem o sistema?

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) + mg \quad (2.1)$$

Nomenclatura:

- ★ m : massa
- ★ c : coeficiente de amortecimento
- ★ k : rigidez

Problemas:

1. Determine a rigidez (k) de n molas estando todas em i) paralelo ii) série
2. Re-escreva a equação de movimento considerando o atrito estático
3. Justifique a frase “termos constantes no segundo membro podem ser removidos por transformação da variável cinemática”
4. Usando o Princípio de Alembert, determine as equações de movimento para um sólido rígido 3D completamente livre no espaço.

2.2.2 Graus de liberdade e parâmetros cinemáticos

É importante saber distinguir parâmetros cinemáticos de graus de liberdade. Parâmetros cinemáticos são quantidades que representam mudança de posição dos componentes do sistema (ângulos, deslocamentos, posições etc). Graus de liberdade são, de entre os parâmetros cinemáticos, aqueles que o leitor identifica como suficientes para descrever *completamente* o sistema. A figura 2.2 tem uma representação de vários parâmetros cinemáticos num sistema com poucos (quantos?) graus de liberdade.

Outro exemplo consiste numa viga com massa desprezável em cuja extremidade existe uma massa concentrada, observe-se a figura 2.3.

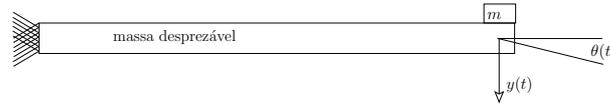


Figura 2.3: Viga com massa desprezável e com massa concentrada na extremidade

O ângulo θ na figura 2.3 só é revelado como parâmetro cinemático quando se perturba a viga.

Em geral,

- ★ Quando se estabelece o diagrama de corpo livre para problemas dinâmicos, somos obrigados a perturbar o sistema para revelar os parâmetros cinemáticos.

Essa perturbação deve ser, no contexto do presente texto, suficientemente pequena, no seguinte sentido:

- ★ $\sin(\theta) \cong \theta$
- ★ $\cos(\theta) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}$
- ★ $k_{eq}(x(t), t) = k_{eq}$
- ★ $m_{eq}(x(t), t) = m_{eq}$
- ★ $c_{eq}(x(t), t) = c_{eq}$

2.2.3 Momentos de segunda ordem

Quando se pretende conhecer a rigidez de uma barra, ou de uma viga, é necessário conhecer as propriedades elásticas do material, mas também as propriedades geométricas da secção transversal. Para o cálculo da massa equivalente é também necessário conhecer os valores dos momentos de inércia. Para isso usam-se tabelas como representada na figura 2.1.

2.2.4 Modelo Matemático

A equação (2.1) pertence à classe das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem (assumindo $m \neq 0$):

$$\underbrace{\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t)}_{\text{dependente de } x} = \underbrace{g(t)}_{\text{dependente de } t} \quad (2.2)$$

O polinómio característico correspondente à versão homogénea de (2.2) é:

$$s^2 + as + b \quad (2.3)$$

Description	Figure	Area moment of inertia	Comment	Reference
a filled circular area of radius r		$I_0 = \frac{\pi r^4}{4}$		[1]
an annulus of inner radius r_1 and outer radius r_2		$I_0 = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4)$	For thin tubes, this is approximately equal to: $\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2} \right)^3 (r_2 - r_1)$ or π times the cube of the average radius times the thickness.	
a filled circular sector of angle θ in radians and radius r with respect to an axis through the centroid of the sector and the centre of the circle		$I_0 = (\theta - \sin \theta) \frac{r^4}{8}$		
a filled semicircle with radius r with respect to a horizontal line passing through the centroid of the area		$I_0 = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) r^4$		[2]
a filled semicircle as above but with respect to an axis collinear with the base		$I = \frac{\pi r^4}{8}$	This is a consequence of the parallel axis theorem and the fact that the distance between these two axes is $\frac{4r}{3\pi}$	[2]
a filled semicircle as above but with respect to a vertical axis through the centroid		$I_0 = \frac{\pi r^4}{8}$		[2]
a filled quarter circle with radius r entirely in the 1st quadrant of the Cartesian coordinate system		$I = \frac{\pi r^4}{16}$		[3]
a filled quarter circle as above but with respect to a horizontal or vertical axis through the centroid		$I_0 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) r^4$	This is a consequence of the parallel axis theorem and the fact that the distance between these two axes is $\frac{4r}{3\pi}$	[3]
a filled ellipse whose radius along the x-axis is a and whose radius along the y-axis is b		$I_0 = \frac{\pi}{4} ab^3$		
a filled rectangular area with a base width of b and height h		$I_0 = \frac{bh^3}{12}$		[4]

Tabela 2.1: Momentos de segunda ordem e de inércia comuns

2.2.5 Soluções

2.2.5.1 $g(t) \equiv 0$

Neste caso, a solução é:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2.4)$$

em que $A_{1,2}$ são constantes de integração:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

e, fazendo uso do polinómio característico

$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad (2.6)$$

Ou, rearranjando,

$$s_{1,2} = \begin{cases} c_0 \pm c_1 & a^2 > 4b \\ c_0 & a^2 = 4b \\ c_0 \pm ic_2 & a^2 < 4b \end{cases} \quad (2.7)$$

A resposta é:

- ★ Estável se e só se (sse)
($c_0 + c_1 < 0 \wedge a^2 \geq 4b$) \vee ($c_0 < 0 \wedge a^2 < 4b$)
- ★ Oscilatória sse $a^2 < 4b$
(a frequência para $a \neq 0$ é $\omega_d \equiv c_2$
e para $a = 0$ é $\omega_n = \sqrt{k/m}$)

Como $b = k/m$ e $a = c/m$ o valor máximo de c para que a resposta seja oscilatória é dado por $c_c = 2m\omega_n$. A razão c/c_c é denominada razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.8)$$

E portanto $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

Problema:

1. Mostre que (2.2) pode ser escrito como:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 f(t)/k \quad (2.9)$$

Sendo assim, a resposta *em regime livre* é simplesmente:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (2.10)$$

Se ω_d for imaginário puro ($\zeta > 1$) temos:

$$A_1 = \frac{\dot{x}_0 + x_0(i\omega_d + \omega_n \zeta)}{2i\omega_d} \quad (2.11)$$

$$A_2 = -\frac{\dot{x}_0 + x_0(-i\omega_d + \omega_n \zeta)}{2i\omega_d} \quad (2.12)$$

No caso de ω_d ser nulo ($\zeta = 1$), resulta:

$$x(t) = e^{-\omega_n t}(A_1 + A_2 t) \quad (2.13)$$

em que:

$$A_1 = x_0 \quad (2.14)$$

$$A_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \quad (2.15)$$

Finalmente, se $0 < \zeta < 1$ o resultado é:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] \quad (2.16)$$

$$A_1 = x_0 \quad (2.17)$$

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \omega_n x_0 \zeta}{\omega_d} \quad (2.18)$$

2.2.5.2 $g(t) \neq 0$

Se $f(t) = kAe^{i\omega t}$ a resposta harmónica é dada por:

$$x(t) = AG(i\omega)e^{i\omega t} = A|G(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} \quad (2.19)$$

em que $G(i\omega)$ é a resposta em frequência (G de ganho):

$$G(i\omega) = \frac{1}{1 - \xi^2 + i2\zeta\xi} \quad (2.20)$$

com a razão de frequências $\xi = \omega/\omega_n$. O ângulo de fase é dado por:

$$\phi = \arctan \{ -\text{Im} [G(i\omega)] / \text{Re} [G(i\omega)] \} = \arctan \left(\frac{2\zeta\xi}{1 - \xi^2} \right) \quad (2.21)$$

e a amplitude, $|G(i\omega)| = \sqrt{G(i\omega)\overline{G(i\omega)}}$:

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\zeta^2}} \quad (2.22)$$

Problema:

1. Determine a amplitude máxima da resposta a uma excitação harmónica em função da razão de amortecimento.

Convém agora recordar a *fórmula de Euler* aos mais esquecidos:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (2.23)$$

Para uma função periódica de frequência angular ω_0 usa-se a série de Fourier:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \left[\sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-ip\omega_0\tau} d\tau \right)}_{A_p} e^{ip\omega_0 t} \right] \quad (2.24)$$

A resposta é dada por sobreposição:

$$x(t) = \frac{A_0}{2k} + \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left[\sum_{p=1}^{+\infty} A_p |G(ip\omega_0)| e^{i(p\omega_0 t - \phi_p)} \right] \quad (2.25)$$

Com as fases:

$$\phi_p = \arctan \left(\frac{2\zeta\xi_p}{1 - \xi_p^2} \right) \quad (2.26)$$

e as razões de frequência $\xi_p = p\xi_0$.

O princípio de sobreposição permite escrever:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^n f_i(t) \Leftrightarrow \\ x(t) &= \sum_{i=1}^n x_i(t) \end{aligned}$$

além disso, podemos fazer uma translação no tempo:

$$\begin{aligned} f_1(t + \Delta t) &= f_2(t) \Leftrightarrow \\ x_1(t + \Delta t) &= x_2(t) \end{aligned}$$

E portanto, se $f_1(t + \Delta t) = a_3 f_3(t)$ logo $x_1(t + \Delta t) = a_3 x_3(t)$ ou, mudando as variáveis, $x_1(t) = a_3 x_3(t - \tau_3)$. Generalizando para m funções,

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^m a_m x_m(t - t_m)$$

Esta propriedade é útil na determinação da resposta não periódica. Para uma função $f(t)$ não periódica, é necessário usar o integral de convolução. A resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ (também chamado Delta de Dirac) corresponde a uma velocidade imposta para o instante t igual ao inverso da massa: $\dot{x}(t) = 1/m$ usando uma translação temporal e o princípio da sobreposição.

Problema:

1. Sabendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ prove que a resposta a um impulso unitário em $t = 0$ é a mesma que a velocidade inicial $\dot{x}(0) = 1/m$.

A resposta a uma solicitação arbitrária $g(t)$ é dada por:

Tabela 2.2: Resposta ao degrau, à rampa e ao choque unitários

Resposta	
Degráu unitário $u(t)$	
$\frac{u(t)}{k} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta \sin(\omega_d t)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \right]$	
Rampa unitária $r(t) = u(t)t$	
$\frac{u(t)}{k} \left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{2\zeta}{\omega_n} \cos \omega_d t - \left(\frac{\omega_d^2 - \zeta^2 \omega_n^2}{\omega_n^2 \omega_d} \right) \sin \omega_d t \right) \right]$	
Choque unitário $F(t) = \begin{cases} \sin \omega t & 0 < t < \pi/\omega \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	
$x(t) = \frac{1}{k(1-\xi^2)} (\sin(\omega t) - r \sin \omega_n t)$ (não amortecido)	

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (2.27)$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

A resposta geral (forças e condições iniciais) é dada por:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau + \quad (2.29)$$

$$e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}_0 + \omega_n x_0 \zeta}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.30)$$

2.2.6 Extensões

A utilização de “ODE integrators” para resolver problemas numericamente pode fazer uso da decomposição num sistema contendo duas equações de primeira ordem. O sistema é:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f \quad (2.31)$$

em que

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

e $\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$. A matriz \mathbf{A} é simplesmente dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

e o vector \mathbf{b} por:

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ m^{-1} \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

A resposta é dada por sobreposição:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} f(\tau) d\tau \quad (2.35)$$

Problemas:

1. Prove a equação (2.35)
2. Determine a energia dissipada, cinética e o trabalho fornecido ao sistema para o caso geral.
3. Elabore um esquema numérico por diferenças centrais para resolver o problema não homogéneo de segunda ordem.

Para além do princípio d'Alembert, podemos fazer uso da equação de Euler-Lagrange no caso conservativo com forças constantes. Sendo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ um conjunto de parâmetros cinemáticos, T a energia cinética e V a energia potencial e W o trabalho das forças exteriores constantes, o estado de equilíbrio (no sentido d'Alembert) é dado pela estacionariedade da acção:

$$\int_a^b L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

em que $L = T - V + W$.

2.2.7 Cálculo de constantes equivalentes

Sendo possível reduzir um sistema à forma

$$k_{eq}x(t) + c_{eq}\dot{x}(t) + m_{eq}\ddot{x}(t) = f_{eq}(t) \quad (2.36)$$

Uma aplicação directa da definição das energias permite obter as constantes equivalentes de um sistema:

$$k_{eq} \quad x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.37)$$

$$m_{eq}\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) \quad (2.38)$$

$$c_{eq}\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (2.39)$$

2.3 Dinâmica de corpo rígido

2.3.1 Corpo rígido e bases ortonormadas

Nenhum corpo é rígido, já que sabemos empiricamente desde a infância que forças exteriores resultam *sempre* em deformação e por vezes em castigos. No entanto pode ser útil assumir-se que, para efeito de cálculo, um dado corpo seja considerado rígido. Essa restrição é uma *lei constitutiva* e portanto não está no mesmo patamar das leis da física como a segunda lei de Newton ou a lei de Coulomb da electrostática. Não deixa no entanto de ser útil em muitas situações. Assuma-se então essa lei que define o que se entende por *corpo rígido*.

Um corpo rígido é um sistema contínuo de partículas para o qual a distância entre quaisquer duas partículas é constante no tempo. É útil usarem-se dois “referenciais”, um fixo (com base \mathbf{e}_i) e outro acompanhando o corpo (com base \mathbf{e}'_i). A figura 2.4 mostra esses “referenciais”. A diferença $\mathbf{P} - \mathbf{O}$ introduz 3 incógnitas correspondentes às coordenadas. O referencial que acompanha o corpo introduz 3 incógnitas, como veremos.

As duas bases representadas na figura 2.4 são ortonormadas. Isto pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \delta_{ij} \\ \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \delta_{ij} \\ i, j &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Um dado vector \mathbf{v} pode ser escrito em cada uma dessas bases alternativamente:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_j \mathbf{e}'_j$$

e portanto $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ e $v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i$. A transformação de componentes escalares do vector \mathbf{v} é dada simplesmente por substituição:

$$\begin{aligned} v'_i &= (v_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}'_i \\ v_i &= (v'_j \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

Se a cada um dos produtos $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ associarmos uma componente de uma matrix \mathbf{A} temos a chamada “matriz de transformação” dada pelas componentes:

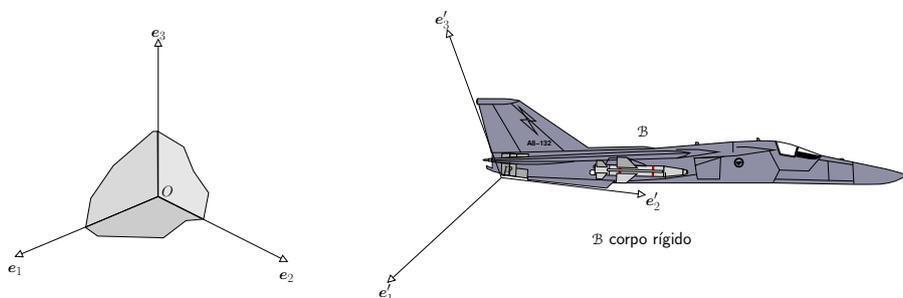


Figura 2.4: Referenciais para um corpo rígido

$$[a_{ij}] = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$$

Obviamente, se associarmos às componentes escalares (ou coordenadas) de \mathbf{v} na base \mathbf{e}_i um vector $\{\mathbf{v}\}$ e na base \mathbf{e}'_i um vector $\{\mathbf{v}'\}$ temos:

$$\{\mathbf{v}'\} = \mathbf{A}\{\mathbf{v}\}$$

Mas se \mathbf{v} é um vector e $\{\mathbf{v}\}$ e $\{\mathbf{v}'\}$ também são (mudando apenas a base), a transformação linear anterior pode ser interpretada de uma de duas formas:

- ★ \mathbf{A} transforma as componentes escalares de um vector \mathbf{v} entre duas bases
- ★ \mathbf{A} transforma um vector \mathbf{v} noutro vector \mathbf{v}'

Omitem-se portanto as chavetas $\{\}$ e assume-se que o leitor sabe escolher uma das duas transformações pelo contexto. Repare que se pode obter \mathbf{A} através da definição de um vector cujas coordenadas são as mesmas mas numa base distinta \mathbf{e}'_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= w_i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{w}' &= w_i \mathbf{e}'_i \end{aligned}$$

inserindo a primeira equação na segunda, obtém-se:

$$\mathbf{w}' = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}'_i$$

ou seja:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{A}^T \mathbf{w}$$

A matriz de transformação é ortogonal, já que a transformação definida acima implica a igualdade:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Como \mathbf{A} transforma coordenadas de um dado vector e portanto um vector noutro (preservando a norma) isso significa que transforma a própria base \mathbf{e}_i na base \mathbf{e}'_i :

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i$$

A matriz \mathbf{A} possui 9 componentes. Estas não são independentes já que 6 equações definem a ortonormalidade de \mathbf{e}'_i . O movimento é completamente definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right\} \text{ definindo uma translação}$$

\mathbf{A} com $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$ definindo uma rotação

São suficientes 6 incógnitas para definir o movimento de corpo rígido. Sabemos que 3 incógnitas correspondem aos P_i mas quais são as outras 3 incógnitas capazes de representar \mathbf{A} com $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$?

Uma solução é usar os ângulos de Euler. Procede-se partindo da base \mathbf{e}_i :

- ★ Formar uma nova base (^a) rodando a base anterior em torno de \mathbf{e}_3 um ângulo ϕ
- ★ Formar uma terceira base (^b) rodando a anterior em torno de \mathbf{e}_1^a um ângulo θ
- ★ Formar uma quarta base (^{c≡'}) rodando a anterior em torno de \mathbf{e}_2^b um ângulo ψ

A matriz de transformação é portanto um produto de 3 matrizes de rotação. Efectuando o produto temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ficamos portanto com 6 incógnitas às quais chamamos *graus de liberdade* e que são:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t) \\ &\phi(t) \\ &\theta(t) \\ &\psi(t) \end{aligned}$$

Suponhamos então que temos um *eixo de rotação* (os vectores colineares com esse tal eixo permanecem sobre o eixo sob a transformação \mathbf{A}). Segundo o Teorema de Euler esse eixo *existe sempre*:

Theorem 1. *Teorema de Euler: O movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno de um eixo*

A matriz \mathbf{A} dada pelos ângulos de Euler tem em geral 3 valores próprios λ_i : 1 e $e^{\pm i\Phi}$ em que Φ é o ângulo de rotação em torno do eixo. O eixo é dado pela solução do problema característico para o primeiro valor próprio $[\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}] \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$.

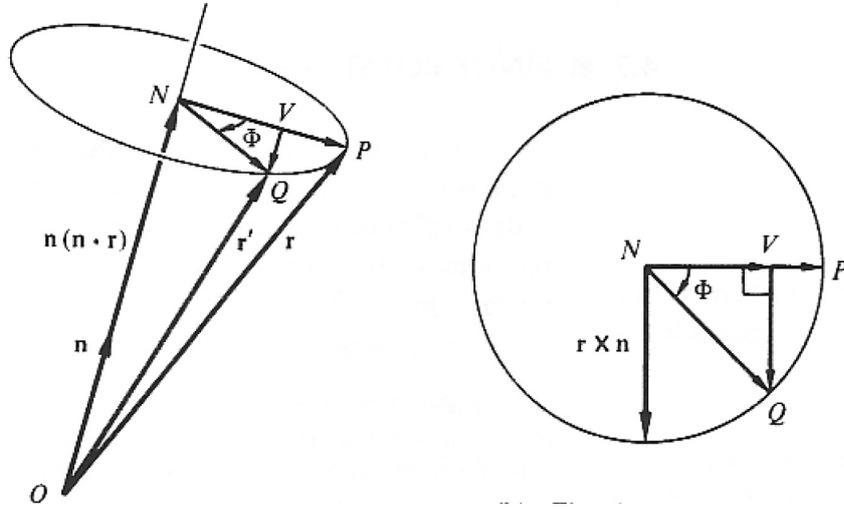
Corollary 2. *(Teorema de Chasles): O movimento mais geral de um corpo rígido é uma rotação mais uma translação*

Uma rotação finita de um dado vector \mathbf{r} em torno de um vector unitário \mathbf{n} pode ser estabelecida através da construção geométrica da figura 2.5:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \Phi + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(1 - \cos \Phi) + (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \sin \Phi$$

O ângulo Φ pode ser obtido a partir dos ângulos de Euler, tirando o traço de \mathbf{A} que é invariante:

$$\cos \frac{\Phi}{2} = \cos \frac{\phi + \psi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$


 Figura 2.5: Rotação de de um vector r

A velocidade resultante da rotação é dada pelo seguinte limite fazendo $\omega = \dot{\Phi}$:

$$\mathbf{v}_\omega = \frac{d(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{d\Phi} \Big|_{\Phi=0} \omega = \mathbf{r} \times \mathbf{n}\omega = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$$

A velocidade total de um ponto Q é calculada usando o teorema de Chasles:

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Q} \times \boldsymbol{\omega}$$

Esta fórmula pode ser re-interpretada usando a dualidade da transformação **A**. Suponhamos que o referencial (móvel) com origem O tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_R$ e o ponto sob observação se desloca nesse referencial com velocidade \mathbf{v}_{QP} . A velocidade do ponto Q é dada por:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{QP} + \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

Usando o sobre-escrito m para a quantidade vista por um observador no referencial móvel e f para um observador num referencial fixo, pode introduzir-se a seguinte transformação:

$$(\bullet)^f = (\bullet)^m + (\otimes)^f + \boldsymbol{\omega}_R \times (\bullet)^m$$

em que \otimes representa a quantidade \bullet na origem do referencial móvel. Re-escrevendo fica:

$$\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^m + \mathbf{v}_P^f + \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

A aceleração é dada pela derivada do mesmo vector usando a notação geral $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\mathbf{a}^f = \mathbf{a}^m + \mathbf{a}_P^f + 2\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{v}^m + \boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{P}\mathbf{Q}) + \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{P}\mathbf{Q}$$

Se estivermos interessados no movimento relativamente ao ponto P temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{fQ/P} &= \mathbf{v}^m + \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{PQ} \\ \mathbf{a}^{fQ/P} &= \mathbf{a}^m + 2\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{v}^m + \boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{PQ}) + \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{PQ} \end{aligned}$$

Podem ainda generalizar-se estas noções para movimentos relativos mais complexos. Suponhamos que, para além do movimento Q/P , temos o movimento relativo $I-J$ em que I e J são “referenciais” móveis e Q está solidário com I . Um terceiro referencial K é introduzido que assume o carácter “absoluto” do movimento. A velocidade e aceleração de um ponto Q no movimento $I-K$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{I-K} &= \mathbf{v}_{I-J} + \mathbf{v}_{J-K} + \boldsymbol{\omega}_{J-K} \times \mathbf{O}_J \mathbf{Q} \\ \mathbf{a}_{I-K} &= \mathbf{a}_{I-J} + \mathbf{a}_{J-K} + 2\boldsymbol{\omega}_{J-K} \times \mathbf{v}_{I-J} \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_{J-K} \times (\boldsymbol{\omega}_{J-K} \times \mathbf{O}_J \mathbf{Q}) + \boldsymbol{\alpha}_{J-K} \times \mathbf{O}_J \mathbf{Q} \end{aligned}$$

2.3.2 Quantidade de movimento e equações do movimento

Se usarmos para *origem do referencial* o *centro de massa do corpo*, que é determinado usando a densidade de massa ρ como:

$$\mathbf{P} = \frac{\int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{x} d\mathcal{B}}{M = \int_{\mathcal{B}} \rho d\mathcal{B}}$$

A quantidade de movimento linear é dada por integração das quantidades de movimento de cada ponto do corpo:

$$\mathbf{L}_{lP} = M \mathbf{v}_P$$

Para a quantidade de movimento angular é necessário efectuar o cálculo do integral:

$$\mathbf{L}_{aP} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d\mathcal{B} = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) d\mathcal{B}$$

que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{aP} &= \left\{ \int_{\mathcal{B}} \rho \begin{bmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_1 r_2 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_1 r_3 & -r_2 r_3 & r_1^2 + r_2^2 \end{bmatrix} d\mathcal{B} \right\} \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \\ &= \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

em que \mathbb{I} é denominado o tensor de inércia.

A quantidade de movimento angular para outro ponto distinto de P é dada através do momento de \mathbf{L}_{lP} :

$$\mathbf{L}_{aQ} = \mathbf{QP} \times \mathbf{L}_{lP} + \mathbf{L}_{aP}$$

O momento de inércia em torno de um eixo com orientação \mathbf{n} é dado por $I_{nP} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n}$. O tensor de inércia e portanto o momento de inércia dependem do ponto considerado. Se calcularmos o momento de inércia no centro de massa em torno de \mathbf{n} e houver interesse em determinar o momento de inércia num outro ponto Q em torno do mesmo eixo, pode usar-se:

$$I_{nQ} = I_{nP} + M \|(\mathbf{QP}) \times \mathbf{n}\|^2$$

Associados aos ângulos de Euler estão momentos que identificamos aqui como M_i . A segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{I}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{M} \\ M\mathbf{a} + M\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

em que \mathbf{F} e \mathbf{M} são as resultantes das forças e momentos relativamente ao ponto P , respectivamente. A figura 2.6 mostra alguns exemplos de matrizes de inércia.

No caso 2D, frequentemente só estamos preocupados com I_{zz} . Nesse caso temos dois hipóteses de movimento:

1. Movimento de rotação em torno de um ponto Q à distância R do ponto P :
 $T = (I_P + MR^2)\dot{\theta}^2/2$
2. Movimento geral (rotação em torno de P mais translação de P): $T = I_P\dot{\theta}^2/2 + M\dot{x}_P^2/2$

2.4 n graus de liberdade

2.4.1 Motivação

A figura 2.1 mostra um sistema com dois graus de liberdade. A coordenada x é absoluta. Usando a equação de Euler-Lagrange, obtemos o seguinte sistema linear ($\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m + M & -mL \\ -mL & mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F(t) + ky(t) + c\dot{y}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Este sistema está sob a forma geral:

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

em que \mathbf{x} e \mathbf{f} são vectores com n elementos.

Description	Figure	Moment of inertia tensor
Solid sphere of radius r and mass m		$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$
Hollow sphere of radius r and mass m		$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mr^2 \end{bmatrix}$
Right circular cone with radius r , height h and mass m , about the apex		$I = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$
Solid cuboid of width w , height h , depth d , and mass m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2 + d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(w^2 + d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$
slender rod of length l and mass m about end		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Slender rod of length l and mass m about center		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Solid cylinder of radius r , height h and mass m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$
Thick-walled cylindrical tube with open ends, of inner radius r_1 , outer radius r_2 , length h and mass m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3(r_1^2 + r_2^2) + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3(r_1^2 + r_2^2) + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2) \end{bmatrix}$

Figura 2.6: Exemplos de momentos de inércia

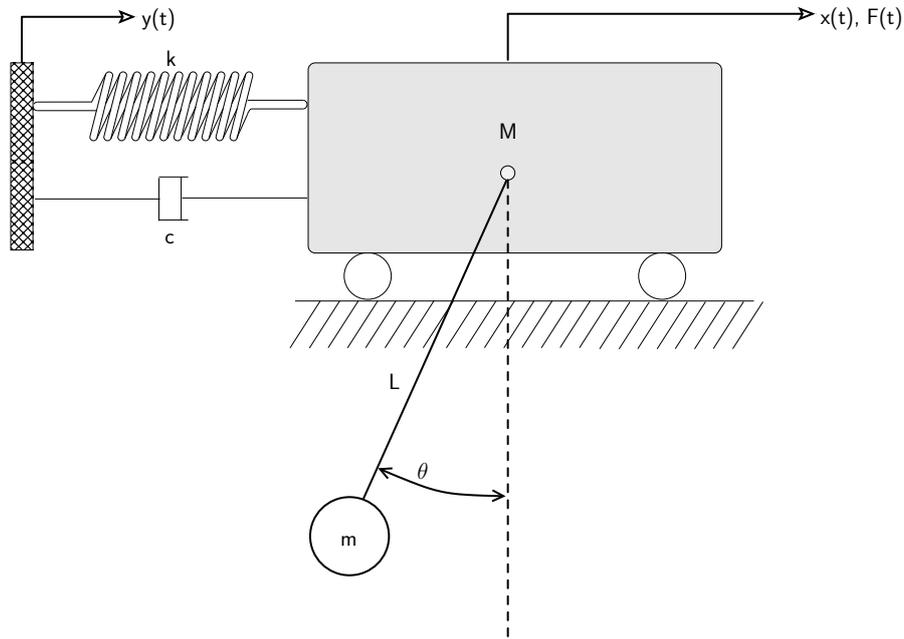


Figura 2.7: Sistema com dois graus de liberdade (x e θ). A excitação é exercida por $y(t)$ e $F(t)$.

2.4.2 Solução

Assumindo o caso livre não amortecido ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$) a solução é dada por um produto de um vector constante por uma função do tempo:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}T(t)$$

ou seja

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{K_{ij}X_j}{M_{ij}X_j}, i = 1, \dots, n$$

Como o segundo membro é independente do tempo o primeiro também é e pode portanto reduzir-se o sistema a uma equação diferencial ordinária e um problema de valores e vectores próprios generalizado:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Este pode ser resolvido recorrendo à redução ao caso clássico se $\det \mathbf{M} \neq 0$ com $\mathbf{Y} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ e

$$[\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1} - \omega^2 \mathbf{I}] \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Há n frequências naturais ω_i associadas a n formas naturais \mathbf{X}_i . É habitual (aqui *assume-se* que é assim) ordenar de forma crescente as frequências naturais:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$$

A ortonormalidade das formas é consequência da simetria de \mathbf{K} e \mathbf{M} e das relações:

$$\begin{aligned}\omega_i^2 \mathbf{X}_j^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i &= \mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_j \\ \omega_j^2 \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j &= \mathbf{X}_j^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i\end{aligned}$$

Se \mathbf{X}_i forem normalizados como:

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}}$$

então temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{X}}_j &= \delta_{ij} \\ \hat{\mathbf{X}}_i^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{X}}_j &= \omega_i^2 \delta_{ij}\end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{X}}_i$ formam uma base (prove que é assim), qualquer vector \mathbf{x} pode ser escrito nessa base (é chamada de base *modal*):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{X}}_i q_i$$

Dispondo cada $\hat{\mathbf{X}}_i$ como uma coluna da matriz $\hat{\mathbf{X}} : \hat{\mathbf{X}} = [\hat{\mathbf{X}}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_n]$ é possível usar a seguinte transformação linear:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{X}} \mathbf{q}$$

Dada a propriedade de ortogonalidade, o sistema que nas coordenadas \mathbf{x} se encontra geralmente acoplado está desacoplado em \mathbf{q} . Esse desacoplamento permite-nos resolver n equações com um grau de liberdade em vez de um sistema com n graus de liberdade.

No caso particular da matriz de amortecimento \mathbf{C} ser uma combinação linear de \mathbf{M} e \mathbf{K} , $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$, podemos usar:

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i$$

em que:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \frac{\alpha + \beta \omega_i^2}{2\omega_i} \\ \mathbf{Q} &= \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{f}\end{aligned}$$

As condições iniciais são dadas por inversão da matriz $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_0 &= \hat{\mathbf{X}}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= \hat{\mathbf{X}}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_0\end{aligned}$$

A solução de cada uma das equações pode ser obtida a partir do integral de convolução:

$$\begin{aligned}q_i(t) &= e^{-\zeta_i\omega_i t}(\cos\omega_{di}t + \frac{\zeta_i}{\sqrt{1-\zeta_i^2}}\sin\omega_{di}t)q_{i0} + \\ &+ \frac{\dot{q}_0}{\omega_{di}}e^{-\zeta_i\omega_i t}\sin\omega_{di}t + \\ &+ \frac{1}{\omega_{di}}\int_0^t Q_i(\tau)e^{-\zeta_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_{di}(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

2.4.3 Resposta em frequência

Para um sistema com n graus de liberdade, se a excitação for harmónica (ou, por generalização, periódica), é possível obter a resposta sem necessidade de desacoplamento. Se a excitação for:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$$

a resposta em regime estacionário (sem a contribuição dos transitórios) é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}$$

Após substituição no sistema de movimento, obtém-se a matriz de impedância:

$$\mathbf{Z}(i\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$$

A solução é simplesmente dada por inversão:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Z}(i\omega)^{-1}\mathbf{f}_0 e^{i\omega t}$$

No caso de termos uma frequência para cada coordenada do vector de forças exteriores:

$$f_j = f_{0j} e^{i\omega_j t}$$

a resposta é obtida por sobreposição:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{Z}(i\omega_j)^{-1}\mathbf{f}_{0j} e^{i\omega_j t}$$

em que

$$\mathbf{f}_{0j} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_{0j} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

2.5 Medição

Suponhamos que temos um sistema com um grau de liberdade excitado harmonicamente na base (a figura 2.8 mostra esse sistema). A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin \omega t + c\omega Y \cos \omega t$$

e a resposta é dada por:

$$\begin{aligned} x &= T_d Y \sin(\omega t - \phi) \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\xi^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)\xi^2} \right) \end{aligned}$$

Em que T_d , a transmissibilidade de deslocamento, é dada por:

$$T_d = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\xi)^2}{(1 - \xi^2)^2 + (2\zeta\xi)^2}}$$

A razão de frequências ($\xi = \omega/\omega_n$) que maximiza T_d é dada por:

$$\xi_M = \frac{1}{2\zeta} \sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1}$$

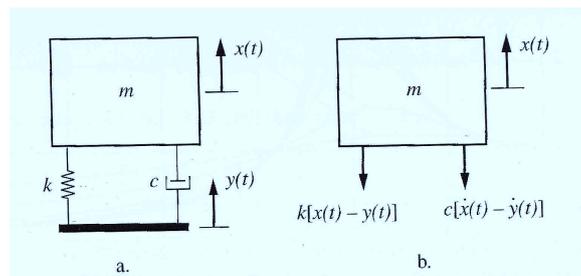


Figura 2.8: Movimento da base

Capítulo 3

Vibração de sistemas contínuos

3.1 O essencial das séries de Fourier

3.1.1 Introdução

Para sistemas lineares é por vezes útil substituir uma dada função por uma série cujos termos tenham soluções conhecidas. No tratamento de sinais é também útil fazer transformações de funções com domínio no tempo para funções cujo domínio seja a frequência.

3.1.2 Funções periódicas

Uma função real de variável real $f(x)$ é dita periódica se e só se existe um número $2p > 0$ tal que, para cada x no domínio de f , $f(x + 2p) = f(x) \Rightarrow 2p$ é um período de f . Sendo $2p$ um período de f , $2np$ com $n \in \mathbb{N}$ é também um período de f . Se $2p$ é o *menor* período de f , então é denominado período fundamental.

As funções:

★ Constante (e.g. a_0)

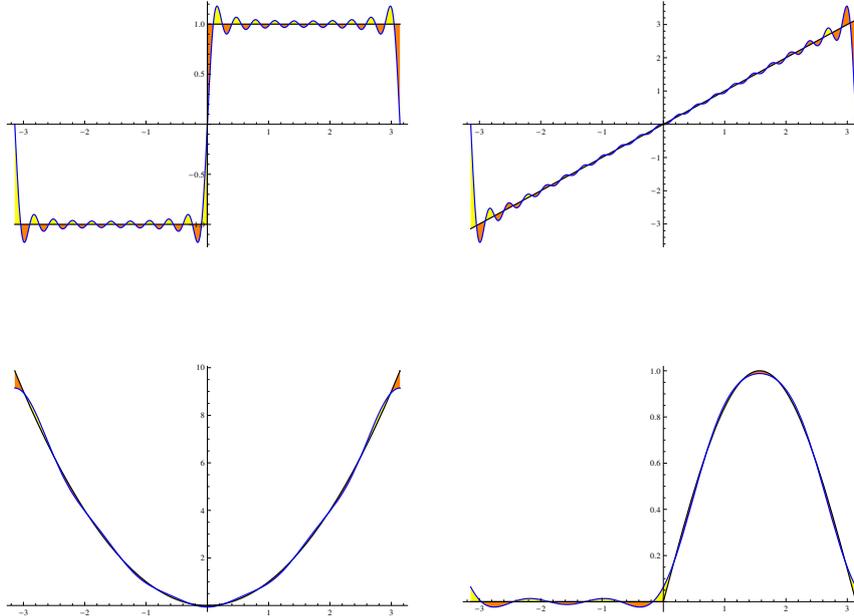
★ $\sin n \frac{\pi x}{p}$

★ $\cos n \frac{\pi x}{p}$

têm $2p$ como período. Suponhamos que uma função periódica, não necessariamente harmónica, é aproximada como uma série de termos harmónicos mais uma constante. Então, sabendo a resposta de um sistema mecânico linear a uma excitação harmónica, podemos obter a resposta a uma excitação periódica.

Dada essa função $f(x)$ com período $2p$, fazemos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$


 Figura 3.1: Exemplos de séries de Fourier truncadas ($N = 20, 20, 5, 5$)

As funções dadas acima são ortogonais, i.e., para $d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_d^{d+2p} \cos \frac{m\pi x}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dx &= p\delta_{mn} \\ \int_d^{d+2p} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi x}{p} dx &= p\delta_{mn} \\ \int_d^{d+2p} \sin \frac{m\pi x}{p} \cos \frac{n\pi x}{p} dx &= 0 \end{aligned}$$

de onde se conclui que

$$\int_d^{d+2p} \sin \frac{m\pi x}{p} dx = \int_d^{d+2p} \cos \frac{m\pi x}{p} dx = 0, \quad m \neq 0$$

A grande interrogação é a determinação dos coeficientes da combinação linear destas funções ortogonais. Usando as propriedades acima referidas, temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx \end{aligned}$$

Ou seja, os coeficientes da combinação de funções são obtidos por convolução da função a aproximar pelo termo correspondente da função de aproximação. Condições para a convergência da série para $f(x)$ são fornecidas pelo teorema de Dirichlet:

Theorem 3. *Se $f(x)$ é uma função limitada periódica, que para cada período tem um número finito de máximos e mínimos locais e um número finito de pontos descontínuos, então a série de Fourier de $f(x)$ converge para $f(x)$ em todos os pontos em que esta é contínua e converge para a média dos limites esquerdo e direito de $f(x)$ em cada ponto em que $f(x)$ é descontínua.*

Se quisermos aproximar uma função $f(x)$, $x \in [0, p]$ não-periódica por séries de Fourier, podemos estender a função para $x \in]-p, 0[$ e $x \in]p, \infty[\cup]-\infty, -p[$ usando a notação:

$$F(x) = \begin{cases} \phi(x) & -p < x < 0 \\ f(x) & 0 \leq x \leq p \\ F(x+2p) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Fazendo $\phi(x) = f(-x)$ temos uma expansão em cossenos e se $\phi(x) = -f(-x)$ temos uma expansão em senos.

Usando a identidade de Euler, $e^{\frac{in\pi x}{p}} = \cos \frac{n\pi x}{p} + i \sin \frac{n\pi x}{p}$, temos

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{\frac{in\pi x}{p}} \quad (3.1)$$

e

$$f[n] = \frac{1}{2p} \int_d^{d+2p} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}} dx \quad (3.2)$$

A relação (3.1) dá-nos uma função com domínio \mathbb{R} a partir de uma função definida em \mathbb{N} e a relação (3.2) o oposto. Se multiplicarmos duas funções, sejam $f(x)$ e $g(x)$ usando a forma complexa introduzida acima, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x)\bar{g}(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{g}[n] f[n] e^{\frac{in\pi x}{p}} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2p} \int_d^{d+2p} f(x)\bar{g}(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\bar{g}[n] \end{aligned}$$

Chamando $S_N(x)$ à aproximação de $f(x)$ para N termos da série de Fourier, podemos provar que os coeficientes a_0, a_n e b_n minimizam o erro (como exercício prove que é assim):

$$E = \frac{1}{2} \int_{-p}^p \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \left(\sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \right]^2 dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{-p}^p f(x)^2 dx - p \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + b_n^2 \right)$$

E portanto, como $E \geq 0$, obtemos a chamada desigualdade de Bessel:

$$\frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

É possível provar que, se $f(x)$ for uma função suave por troços, então a igualdade é verificada.

A atenuação do efeito de Gibbs, que pode ser observado na figura 3.1, pode ser efectuada com a função sinc(\bullet) :

$$\text{sinc}(\bullet) = \frac{\sin \bullet}{\bullet}$$

$$f^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \text{sinc} \left(\frac{\pi n}{N+1} \right) \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

que resulta na atenuação ilustrada na figura 3.2 para uma função degrau. Para uma função contínua por troços em $] -\pi, \pi[$ a quantidade de overshoot na vizinhança de uma descontinuidade é igual a:

$$0.09[f(x_0^+) - f(x_0^-)]$$

quando N é suficientemente grande.

Uma sequência de funções $f_N(x)$, $a \leq x \leq b$ converge uniformemente para um limite $f(x)$, $a \leq x \leq b$ se:

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon_N, \quad a \leq x \leq b, \quad N = 1, 2, \dots$$

em que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$$

Sempre que há fenómeno de Gibbs, a convergência é não-uniforme. Critérios para a convergência uniforme:

- ★ Se $f(x)$ for suave por troços e $\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) < +\infty$ então a série de Fourier converge uniformemente
- ★ Se $f(x)$ for suave por troços e contínua e $f(-p) = f(p)$, então a série de Fourier converge uniformemente

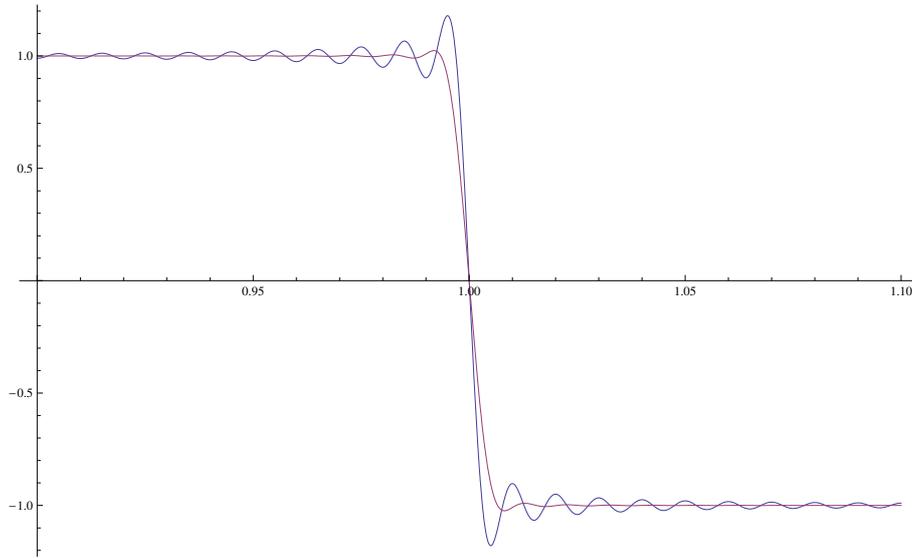


Figura 3.2: Atenuação do efeito de Gibbs por aplicação de um filtro

Núcleo de Dirichlet. Se definirmos a função

$$D_N(u) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{2\pi \sin u/2}, \quad u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

$$D_N(u) = (2N + 1)/2\pi, \quad u = 0, \pm 2\pi, 4\pi, \dots$$

é possível provar-se que

$$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t - x)dt$$

3.1.3 Transformação de Fourier

A remoção da restrição a funções periódicas, presente nas séries de Fourier, resulta na generalização da forma complexa da série de Fourier de uma função $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy}_{F(\omega)} \right] e^{i\omega x} d\omega$$

em que $F(\omega) = \mathcal{F}(f(x))$ é a transformada de $f(x)$. Na forma de senos e cossenos resulta:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega x) d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

com

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Se truncarmos as frequências ao intervalo $[-\omega_0, \omega_0]$ obtemos a aproximação:

$$P(\omega_0, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin \omega_0(y-x)}{y-x} dy$$

que é um filtro passa-baixo. Apenas frequências abaixo de ω_0 são usadas e o efeito de Gibbs observado nas séries continua a existir.

Propriedades da transformada de Fourier são:

- ★ Linearidade $\mathcal{F}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{F}(f_1) + a_2 \mathcal{F}(f_2)$
- ★ Simetria: se $F(\omega)$ é a transformada de $f(t)$ então $2\pi f(-\omega)$ é a transformada de $F(t)$
- ★ Mudança de escala de x : $\mathcal{F}(f(ax)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- ★ Shift em x : $\mathcal{F}(f(x-x_0)) = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}(f(x)) = e^{-i\omega x_0} F(\omega)$
- ★ Shift em ω : $\mathcal{F}(e^{i\omega_0 x} f(x)) = \mathcal{F}(f(x))|_{\omega \leftarrow \omega - \omega_0} = F(\omega - \omega_0)$
- ★ Diferenciação em x : $\mathcal{F}(f'(x)) = i\omega \mathcal{F}(f(x)) = i\omega F(\omega)$
- ★ Diferenciação em ω : $F'(\omega) = \mathcal{F}(-ixf(x)) \Leftrightarrow \mathcal{F}(xf(x)) = iF'(\omega)$

Introduz-se agora o integral

$$h(x) \equiv f * g = \int_a^{x-a} f(y)g(x-y)dy$$

como convolução de f e g no intervalo $[a, x-a]$. Se

- ★ $a = 0$ temos uma convolução unilateral
- ★ $a = -\infty$ temos uma convolução bilateral (usada aqui)

Dois propriedades envolvendo a convolução bilateral são:

- ★ $\mathcal{F}(f(x)g(x)) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$
- ★ $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)G(\omega)) = f(x) * g(x)$

A distribuição Delta de Dirac foi já usada. Podemos usar o Delta de Dirac como um operador de “amostra”:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) [\quad] dx$$

com as seguintes propriedades:

- ★ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)[a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)]dx = a_1\phi_1(0) + a_2\phi_2(0)$
- ★ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\phi_1(x)dx = \phi_1(x_0)$
- ★ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax)\phi(x)dx = \frac{1}{|a|}\phi(0)$
- ★ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x)dx = -\phi'(0)$
- ★ $\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$
- ★ $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$
- ★ $\mathcal{F}^{-1}(\delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi}$

As formas discretas (DFT e FFT) da transformação de Fourier são usadas na aquisição de dados e mostradas seguidamente. Suponhamos que temos n pontos igualmente espaçados em que se conhecem os tempos, t_0, t_1, \dots, t_{n-1} e os valores de uma função f_0, f_1, \dots, f_{n-1} . Se escolhermos uma escala para a qual $t_j = j2\pi/n$

3.2 Equações às derivadas parciais com coeficientes constantes e vibrações de meios contínuos

Considere-se uma equação de segunda ordem linear homogénea e com coeficientes (a, b, c, d, e, f) constantes:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$$

Introduzindo $\Delta = b^2 - 4ac$ usa-se a nomenclatura análoga à das equações algébricas:

- ★ $\Delta > 0$ a equação é hiperbólica
- ★ $\Delta = 0$ a equação é parabólica
- ★ $\Delta < 0$ a equação é elíptica

Os tipos de condições de fronteira a introduzir diferem consoante o tipo de equação. Se introduzirmos uma função $u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$, resulta

$$a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta^2 + d\alpha + e\beta + f = 0$$

Como exemplo, tome-se a equação de Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ que resulta em $\alpha^2 = -\beta^2$. Se as condições de fronteira forem $u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0$ temos que x deve ser periódica e portanto:

$$u = (A_1 \cos \gamma x + A_2 \sin \gamma x)(A_3 e^{-\gamma y} + A_4 e^{\gamma y})$$

com $\alpha = i\gamma$.

Introduzindo $u(x, 0) = 0$, resulta $A_3 = -A_4$ e portanto

$$u = (A_1 \cos \gamma x + A_2 \sin \gamma x) \sinh(\gamma y)$$

$u(0, y) = 0$ resulta em $A_1 = 0$. Finalmente, como $\sin \gamma L = 0 \implies \gamma L = n\pi$ temos:

$$u = A_2 \sin \frac{n\pi}{L} x \sinh \frac{n\pi}{L} y$$

Para a equação de onda, $c^2 u_{xx} - u_{yy} = 0$ com $u(0, y) = u(L, y) = 0$ temos $c^2 \alpha^2 = \beta^2$. Se forem ambos α^2 e β^2 positivos não podemos respeitar a periodicidade. São portanto os dois negativos e podemos escrever:

$$u = (A_1 \cos \gamma x + A_2 \sin \gamma x) (A_3 \cos c\gamma y + A_4 \sin c\gamma y)$$

com $A_1 = 0$ e $\gamma = n\pi/L$, resultando

$$u = A_2 \sin \frac{n\pi}{L} x (A_3 \cos \frac{cn\pi}{L} y + A_4 \sin \frac{cn\pi}{L} y)$$

3.2.1 Produto interno e ortogonalidade

O produto interno de duas funções reais $f(x)$ e $g(x)$ de x com $x \in [a, b]$ é definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

as funções são ortogonais sse $\langle f, g \rangle = 0$.

No caso de f e g serem complexas, resulta:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$$

Uma norma da função $f(x)$ é:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

O cosseno do ângulo entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é dado por:

$$\cos \theta_{fg} = \langle f, g \rangle / \|f\| \|g\|$$

A projecção de uma função $f(x)$ num conjunto ortogonal $\varphi_i(x) i = 1, \dots, N$ é dada pela minimização de:

$$D(c_1, \dots, c_n) = \|f - c_i \varphi_i\|^2$$

é possível provar que:

1. O mínimo é atingido para $c_i = \langle f, \varphi_i \rangle / \|\varphi_i\|^2$ (c_i é um coeficiente de Fourier)
2. A distância mínima entre as funções é dada por $d_{\min} = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^N \frac{\langle f, \varphi_i \rangle^2}{\|\varphi_i\|^2}$
3. Os coeficientes c_i verificam a desigualdade de Bessel $\sum_{i=1}^N c_i^2 \|\varphi_i\|^2 \leq \|f\|^2$

Dado um conjunto *ortonormado* $(\varphi_n)_{n \geq 1} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ podemos determinar os coeficientes de Fourier são dados por $c_i = \langle f, \varphi_i \rangle$. Supondo que temos uma função $f(x)$ para a qual

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

então a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier converge e satisfaz a desigualdade de Bessel. Podemos também ter um produto interno pesado por uma função positiva (métrica) $\rho(x)$. Dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$ o produto interno pesado é dado por:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Tal como para espaços vectoriais de dimensão finita é possível ortogonalizar um conjunto de funções, $\varphi_i, i = 1, \dots, n$ independentes mas não necessariamente ortogonais. Definindo as funções ψ_i como:

$$\psi_i = \varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \varphi_i, \psi_j \rangle}{\langle \psi_j, \psi_j \rangle} \psi_j, i = 1, \dots, n$$

3.2.2 Vibrações

No caso de vibrações mecânica, temos equações de segunda e quarta ordens. No caso de uma corda de comprimento L com tensão $T(x)$ e sujeita a uma força $f(x)$ a equação para a deflexão $y(x)$ é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t) = \rho(x, t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

cuja solução é obtida a partir da teoria anterior. A separação de variáveis $y = Y(x)q(t)$ resulta em duas equações diferenciais ordinárias, dadas por (para T e ρ constantes)

$$\ddot{q} + \omega^2 q = Q \tag{3.3}$$

$$-TY'' = \omega^2 \rho Y \tag{3.4}$$

A solução geral é dada por:

$$y = \sum_{r=1}^{+\infty} Y_r(x)q_r(t)$$

em que Y_r são as formas naturais normalizadas, dadas pelas condições de contorno e pela condição

$$\int_0^L \rho Y_r Y_s dx = \delta_{rs}$$

as frequências associadas verificam

$$\int_0^L TY_r'Y_s'dx = \omega_r^2\delta_{rs}$$

resultando portanto em:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) &= Q_r(t) \\ Q_r &= \int_0^L f(x,t)Y_r(x)dx\end{aligned}$$

As condições iniciais $q_r(0)$ e $\dot{q}_r(0)$ na base modal são determinadas a partir de $y_0(x)$ e $\dot{y}_0(x)$:

$$\begin{aligned}q_r(0) &= \int_0^L \rho y_0(x)Y_r(x)dx \\ \dot{q}_r(0) &= \int_0^L \rho \dot{y}_0(x)Y_r(x)dx\end{aligned}$$

Para uma viga, a equação é de quarta ordem:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + f(x,t) = m(x,t) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Para I constante, a forma geral de Y é dada por:

$$Y(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x$$

em que $\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}$. As condições de ortogonalidade são:

$$\begin{aligned}\int_0^L m Y_r Y_s dx &= \delta_{rs} \\ \int_0^L EI Y_r'' Y_s'' dx &= \omega_r^2 \delta_{rs}\end{aligned}$$