

# UM ALGORITMO PARA APROXIMAÇÃO DA FRONTEIRA DE PARETO EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA MULTIOBJECTIVO

Manuela Fernandes\*, Vladimir Bushenkov†

\*A. I. de Matemática, E.S.T.T., Instituto Politécnico de Tomar, CIMA-UE

†Departamento de Matemática, Universidade de Évora, CIMA-UE

## Introdução

Problemas de decisão com múltiplos objectivos (critérios) e variáveis inteiras ou mistas surgem nas mais diversas áreas tais como planeamento e gestão florestal, gestão de recursos hídricos, planeamento de redes de telecomunicações, transportes, finanças, etc ([1]-[3]). Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  o conjunto das soluções admissíveis inteiras  $x \in \mathbb{R}^n$ , definido por um conjunto de restrições lineares;  $y \in \mathbb{R}^m$  os vectores no espaço dos critérios,  $y_j = f_j(x)$ ,  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, m$  as funções objectivo lineares. Considere-se um problema

$$\begin{aligned} \max \quad & y(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in X, \quad x \text{ inteiras} \quad (\text{MOIP}). \end{aligned}$$

Seja  $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y = y(x), x \in X\}$  a imagem de  $X$ , ou o conjunto admissível no espaço dos critérios. Um ponto  $y' \in Y$  é *não dominado* (designa-se também por *ótimo de Pareto*) se e só se não existe outro  $y'' \in Y$ ,  $y'' \neq y'$  tal que  $y''_j \geq y'_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . O conjunto  $P(Y)$  de todos os pontos  $y \in Y$  não dominados chama-se *fronteira de Pareto*.

Vários Sistemas de Apoio à Decisão (SAD) baseados em modelos multiobjectivo usam informação sobre a fronteira de Pareto. Em particular, em [4] é descrita a metodologia IDM/FGM que prevê: 1) a construção ou aproximação da fronteira de Pareto no espaço dos critérios; 2) a apresentação gráfica desta ao Agente de Decisão (AD) de forma iterativa. Quando estamos interessados apenas na fronteira de Pareto, vale a pena considerar a *envólucro de Edgeworth-Pareto (EPH)* de  $Y$  que se define como

$$Y^* = \{y \in \mathbb{R}^m : y = y' - y'', y' \in Y, y'' \in \mathbb{R}_+^m\}$$

ou,  $Y^* = Y - \mathbb{R}_+^m$ , onde  $\mathbb{R}_+^m$  é o cone não negativo em  $\mathbb{R}^m$ . O conjunto  $Y^*$  possui a mesma fronteira de Pareto do que  $Y$  mas tem uma estrutura mais simples sendo mais fácil a sua construção e visualização [4].

No caso do problema (MOIP) com variáveis inteiras, os conjuntos  $X$  e  $Y$  podem ser não convexos. Algumas abordagens deste problema referem-se, por exemplo, em [3]. Neste artigo descreve-se um novo algoritmo iterativo que decompõe o problema original numa sequência de sub-problemas. É dado um exemplo ilustrativo para o caso de dois critérios.

## Algoritmo

Vamos apresentar as ideias principais do algoritmo usando um exemplo ilustrativo. Na Figura 1 é dado um conjunto  $Y$  das imagens  $y(x)$  no espaço dos dois critérios  $y_1$  e  $y_2$ . O nosso objectivo é maximizar  $y_1$  e  $y_2$ , portanto a fronteira de Pareto procurada  $P(Y)$  é composta pelos pontos  $\{P_1, \dots, P_8\}$ . Alguns destes pontos, nomeadamente  $P_1, P_5, P_7$  e  $P_8$ , são vértices do envólucro convexo de  $Y$ . Estes podem ser encontrados pelo cálculo das funções de suporte para o conjunto  $Y$  no espaço dos critérios e chamam-se *pontos suportados*. Encontrar pontos suportados, utilizando os algoritmos descritos no capítulo 6 de [4], constitui o primeiro passo da iteração inicial do algoritmo. É óbvio que toda a  $P(Y)$  pertence ao envólucro convexo de  $Y$  e que este pode ser majorado pelo seu EPH. A fronteira do EPH é representada pela linha a cheio na Figura 2. Portanto podemos afirmar que todos os pontos de  $P(Y)$  estão limitados superiormente pela linha a cheio  $P_1P_5P_7P_8$ . Por outro lado,

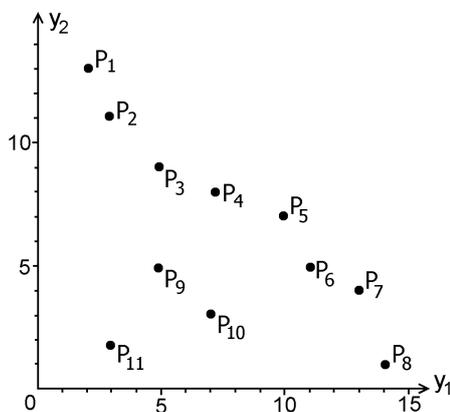


Figura 1

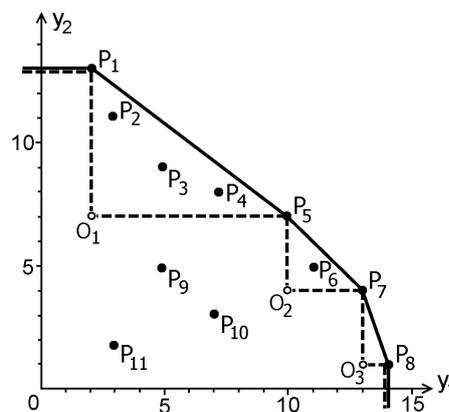


Figura 2

a linha a tracejado na Figura 2 representa a fronteira da união dos cones de dominância para os vértices  $P_1, P_5, P_7$  e  $P_8$ . É óbvio que todos os pontos de  $P(Y)$  são limitados inferiormente pela linha  $P_1O_1P_5O_2P_7O_3P_8$ . Entre estas duas linhas encontram-se os 3 triângulos ( $P_1O_1P_5$ ,  $P_5O_2P_7$  e  $P_7O_3P_8$ )

aos quais pertencem os pontos de  $P(Y)$  ainda não encontrados ( $P_2, P_3, P_4$  e  $P_6$ ). Os algoritmos descritos no capítulo 6 em [4] permitem calcular para cada um destes triângulos os seus vértices e hiperplanos. Vamos constituir com estes triângulos uma lista de regiões de pesquisa, e este passo finaliza a iteração inicial do processo.

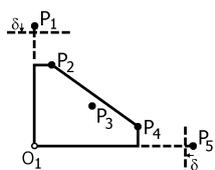


Figura 3

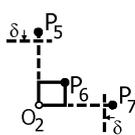


Figura 4



Figura 5

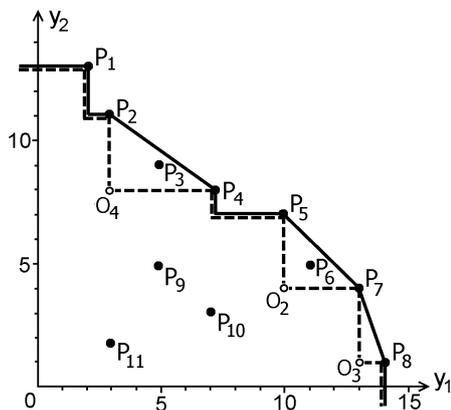


Figura 6

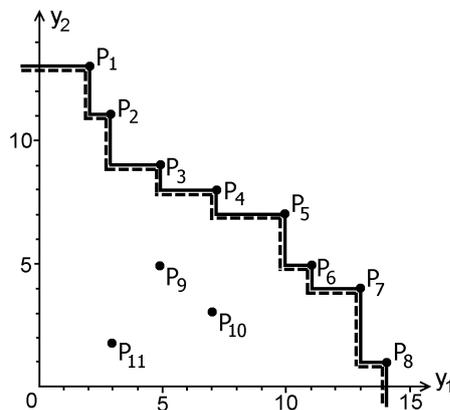


Figura 7

Em cada iteração seguinte analisa-se uma das regiões desta lista. Suponhamos que na iteração  $k$  foi seleccionado o triângulo  $P_1O_1P_5$  com as coordenadas  $P_1 = (2, 13)$  e  $P_5 = (10, 7)$ . Considera-se o sub-conjunto de  $Y$  correspondente definido pelas restrições

$$\{x \in X; y = f(x); 2 \leq y_1 < 10 - \delta; 7 \leq y_2 < 13 - \delta\}$$

para o qual se constrói  $EPH^{(k)}$  usando algoritmos do capítulo 6 em [4]. Este  $EPH^{(k)}$  está representado na Figura 3 e tem vértices  $P_2$  e  $P_4$ . Uma pequena constante  $\delta > 0$  não permite que no novo  $EPH^{(k)}$  entrem os vértices já conhecidos  $P_1$  e  $P_5$ . É fácil ver que, todos os pontos de  $P(Y)$  situados no triângulo  $P_1O_1P_5$  e ainda desconhecidos (no nosso exemplo –  $P_3$ ) estão abaixo da linha "trade-off" do novo  $EPH^{(k)}$  e nenhum destes pode pertencer aos cones de dominância para os vértices de  $EPH^{(k)}$  ( $P_2$  e  $P_4$ ). Usando esta

observação e combinando Figura 2 e Figura 3, chegamos a uma descrição mais refinada da fronteira de Pareto  $P(Y)$  (ver Figura 6). Esta descrição continua a estar contida entre as linhas a cheio e a tracejado. A inclusão do novo triângulo  $P_2O_4P_4$  na lista das regiões de pesquisa finaliza a iteração  $k$ .

No caso geral, a fronteira de Pareto de novos  $EPH^{(k)}$  pode ser composta por mais do que um segmento. Neste caso, para cada um dos segmentos cria-se a região de pesquisa própria.

Mais dois casos possíveis apresentam-se na Figura 4 e Figura 5. Quando se analisa o triângulo  $P_5O_2P_7$ , o  $EPH^{(k)}$  possui um único vértice  $P_6$  (ver Figura 4), e, logo, nesta área não há mais pontos de  $P(Y)$ . Na Figura 5, o único vértice de  $EPH^{(k)}$  coincide com  $O_3$  e, logo, no triângulo  $P_7O_3P_8$  não há nenhum novo ponto de  $P(Y)$ . Nestes casos, as novas regiões de pesquisa não se criam.

Combinando Figura 4 e Figura 5 com Figura 6 e efectuando mais uma iteração para o triângulo  $P_2O_4P_4$ , chegamos a Figura 7 onde as linhas a cheio e a tracejado coincidem. Isto significa que a lista das regiões de pesquisa está vazia e todos os pontos de  $P(Y)$  já estão encontrados.

Não é obrigatório continuar o processo computacional até ao fim. As iterações podem parar quando o tamanho das regiões de pesquisa na lista atingir um valor inferior ao desejável.

## Conclusão

O algoritmo exposto pode ser generalizado para 3-5 critérios, uma vez que, os algoritmos do capítulo 6 em [4] permitem construir (aproximar), com sucesso, o EPH no espaço dos critérios até 5 dimensões, calculando os seus vértices e hiperplanos. As regiões de pesquisa neste caso limitam-se por um hiperplano proveniente de EPH's e pelas restrições bilaterais para os critérios  $y_1, \dots, y_m$  derivados dos vértices correspondentes.

## Referências

- [1] Alves M. J., Clímaco J. A note on a decision support system for multiobjective integer and mixed-integer programming problems. *European Journal of Operational Research*, 155(1), 2004, 258–265.
- [2] Neely W., North R., Fortson J. An Operational Approach to Multiple Objective Decision Making for Public Water Resources Projects Using

Integer Goal Programming. *American Journal of Agricultural Economics*, 59(1), 1977, 198–203.

- [3] Toth S., McDill M. Finding Efficient Harvest Schedules under three Conflicting Objectives. *Forest Science*, 55(2), 2009, 117–131.
- [4] Lotov A., Bushenkov V., Kamenev G. *Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.