Notas elementares de Álgebra e Cálculo Vetorial

Departamento de Física
Universidade de Évora

(Versão 2020)

O grande livro da Natureza está escrito utilizando a linguagem da matemática.

Galileu (1564-1642)

Assim, é necessário conhecer a linguagem da Matemática e a sua gramática, i.e., as regras dessa linguagem.

A Física está escrita utilizando grandezas físicas e relações entre elas que são expressas sob a forma de equações.

Em Física as diferentes grandezas são representadas por diferentes entidades matemáticas:

Escalares (temperatura, massa)

Vetores (deslocamento, velocidade)

Tensores (tensão, deformação)

Estudemos, então, de maneira elementar,

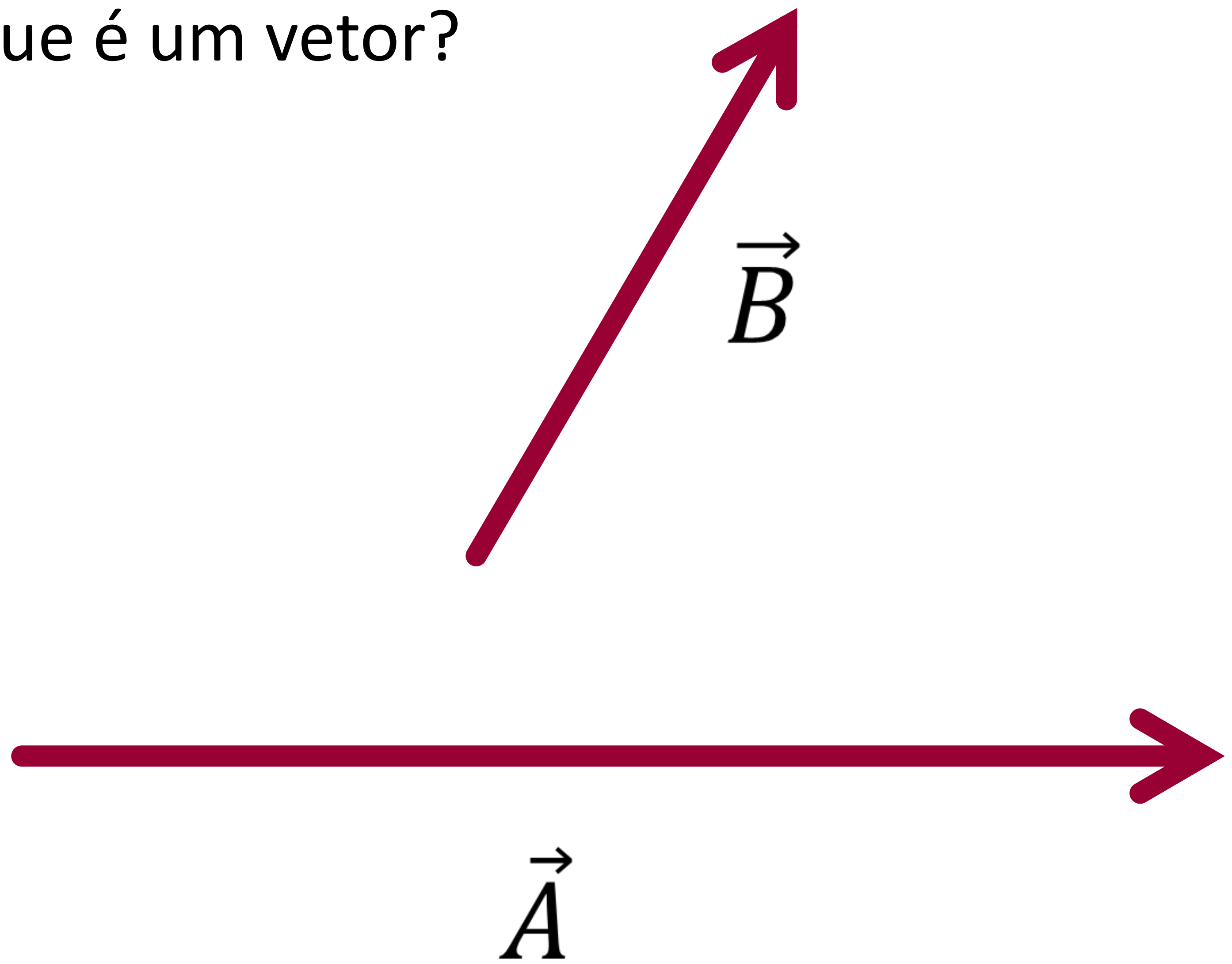
Vetores e operações com vetores

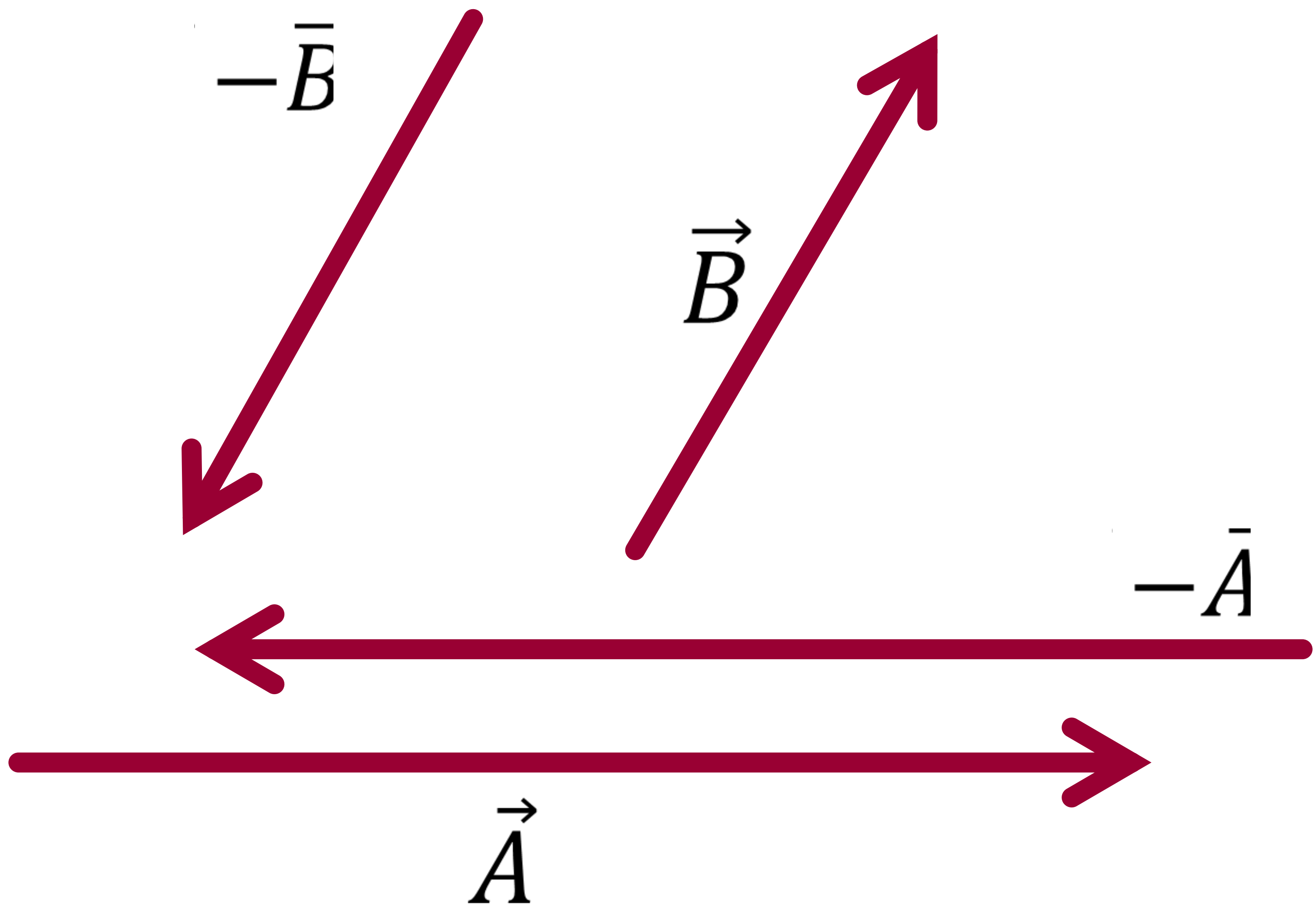
O que é um vetor?

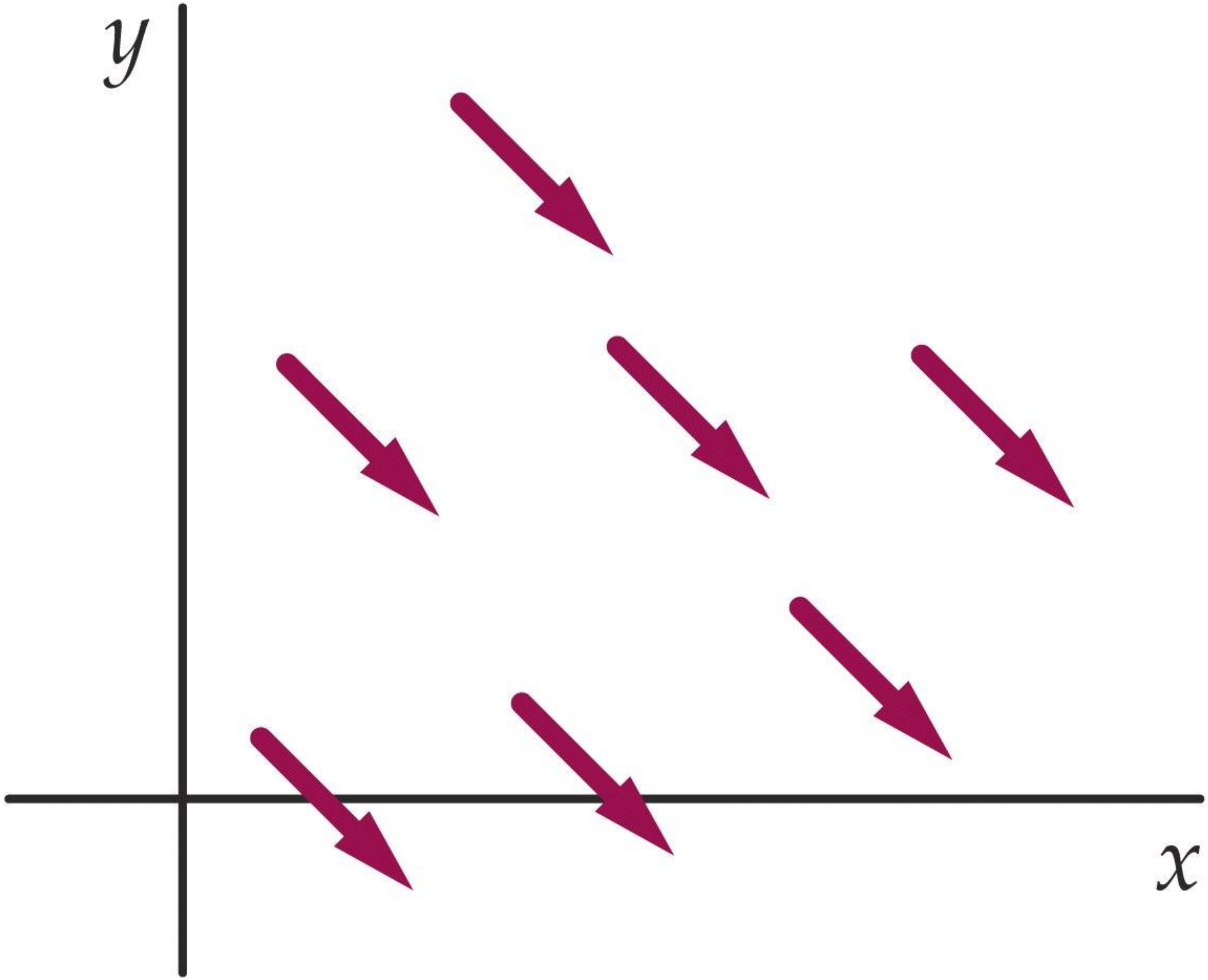
É uma entidade matemática que para ficar completamente definida precisa de três quantidades (ou três números).

Mas pode também ser visto como um segmento de recta orientado numa dada direção.

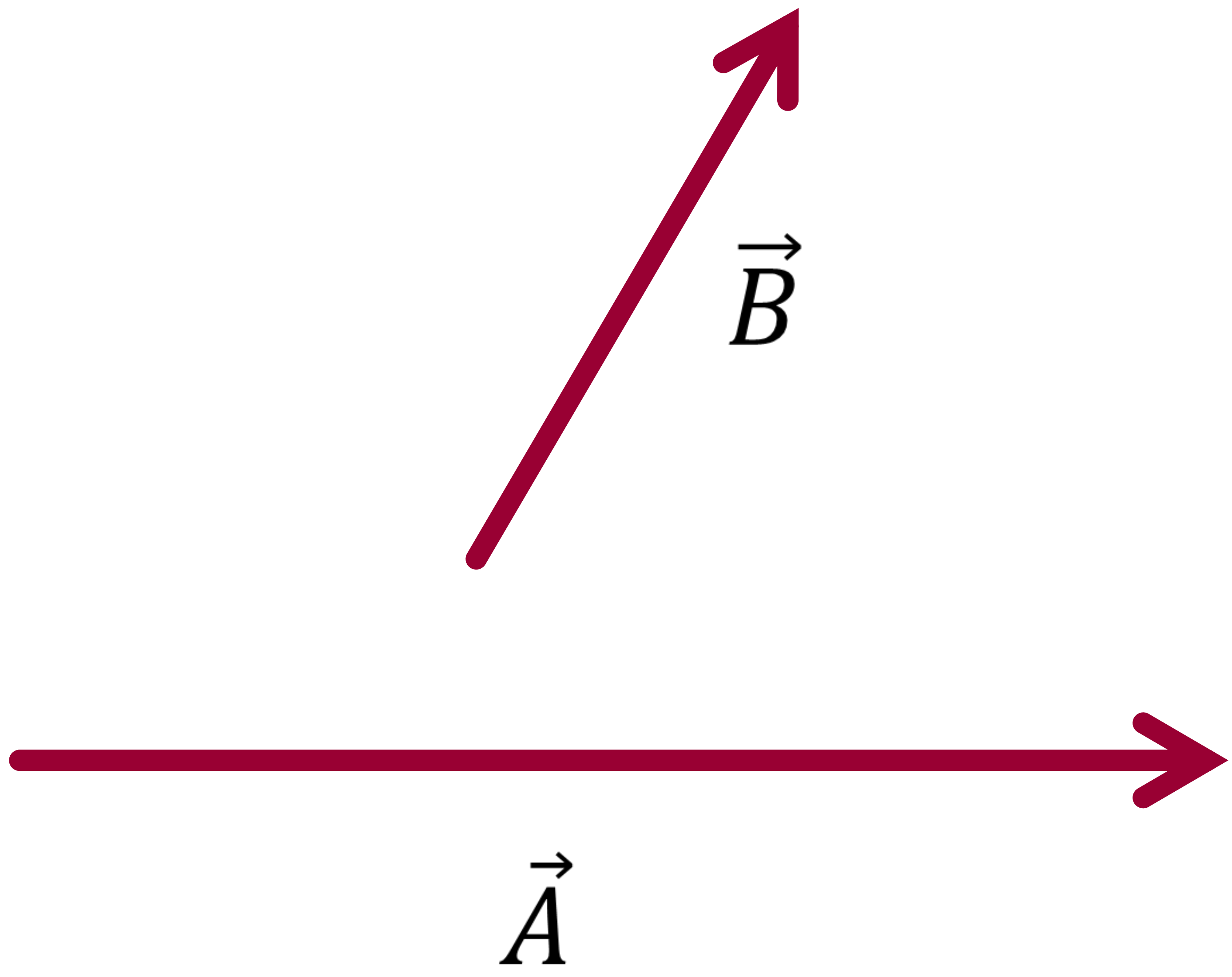
O que é um vetor?

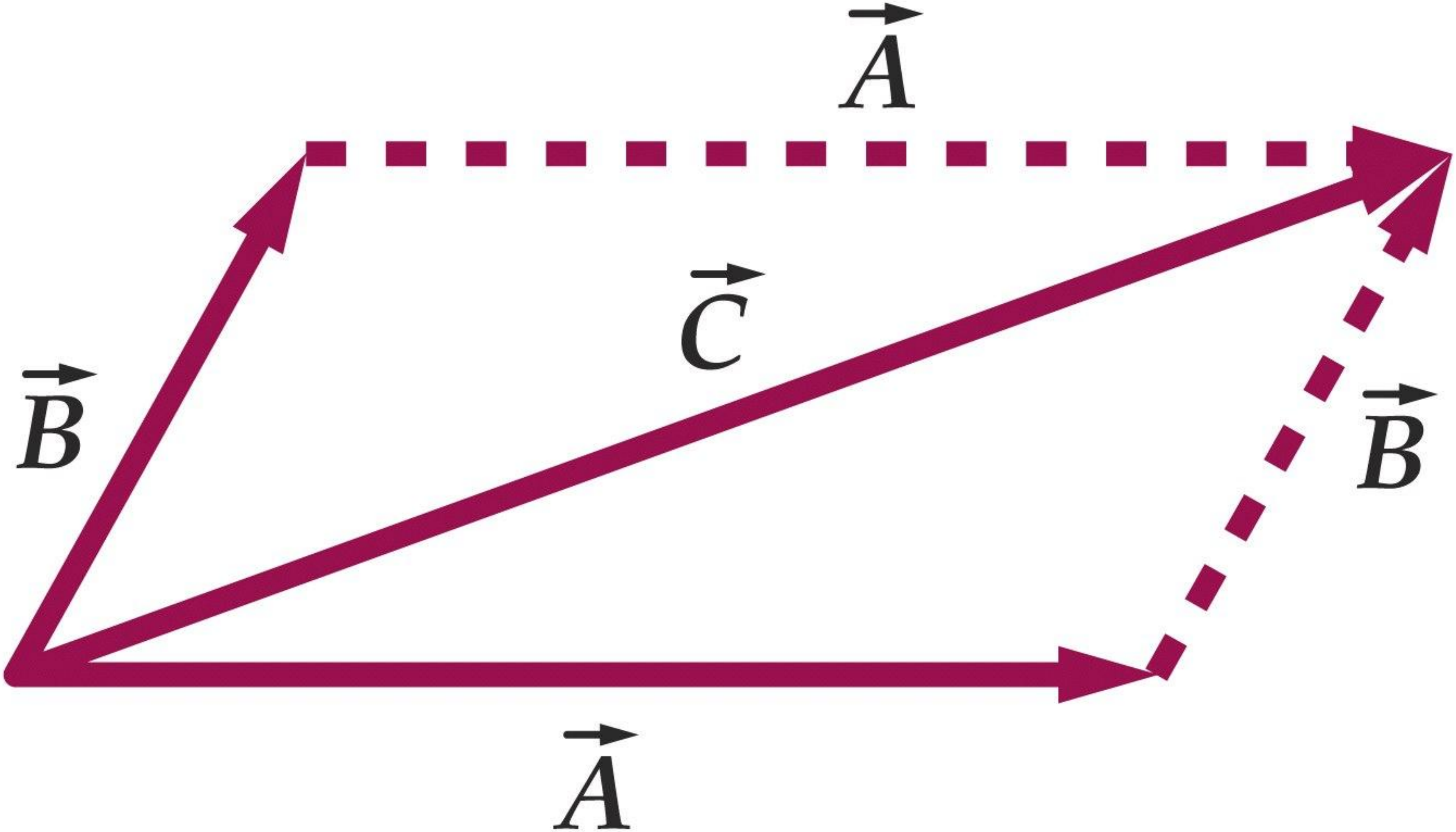



$-\bar{B}$
$\vec{B}$
$-\bar{A}$
$\vec{A}$



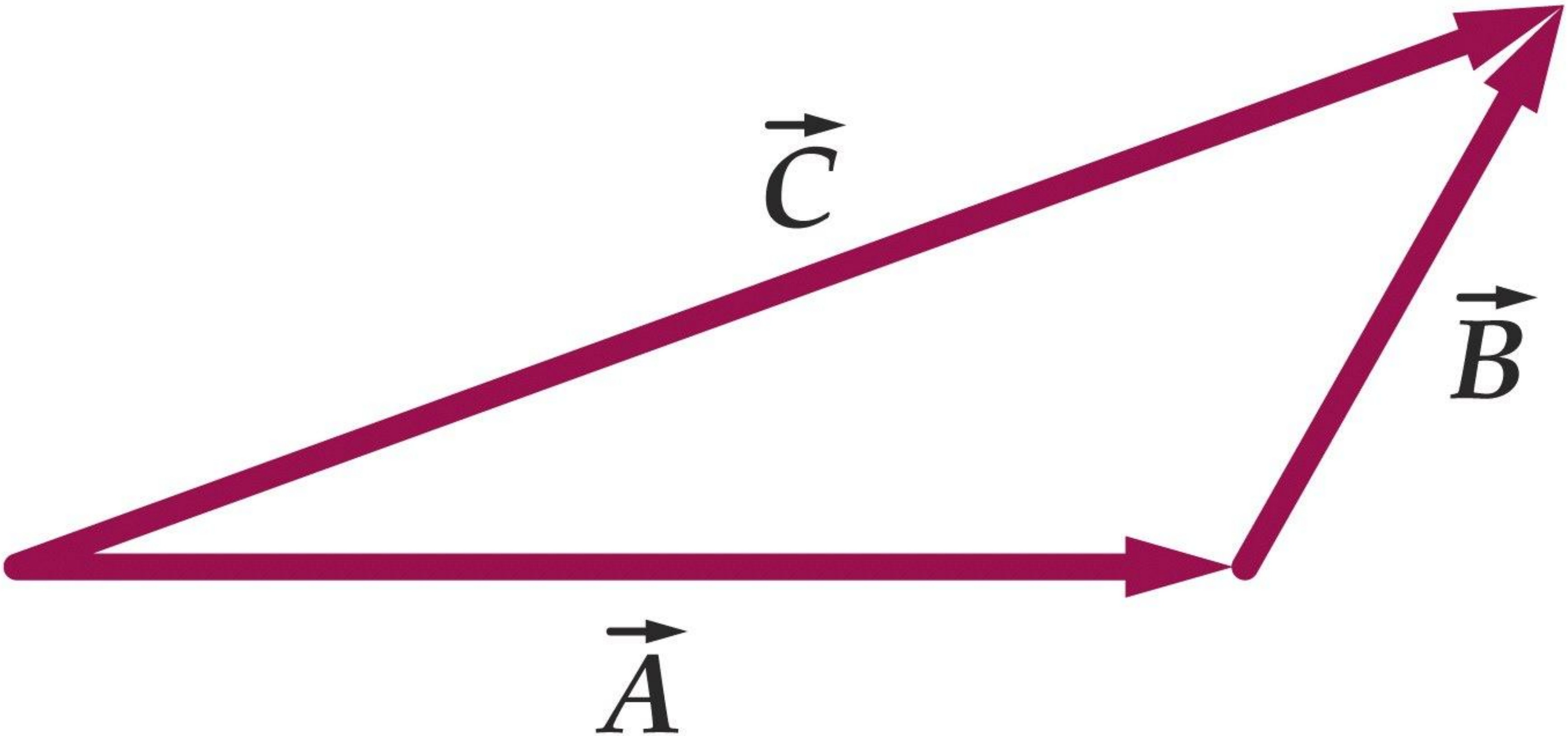
y
x


$\vec{B}$
$\vec{A}$



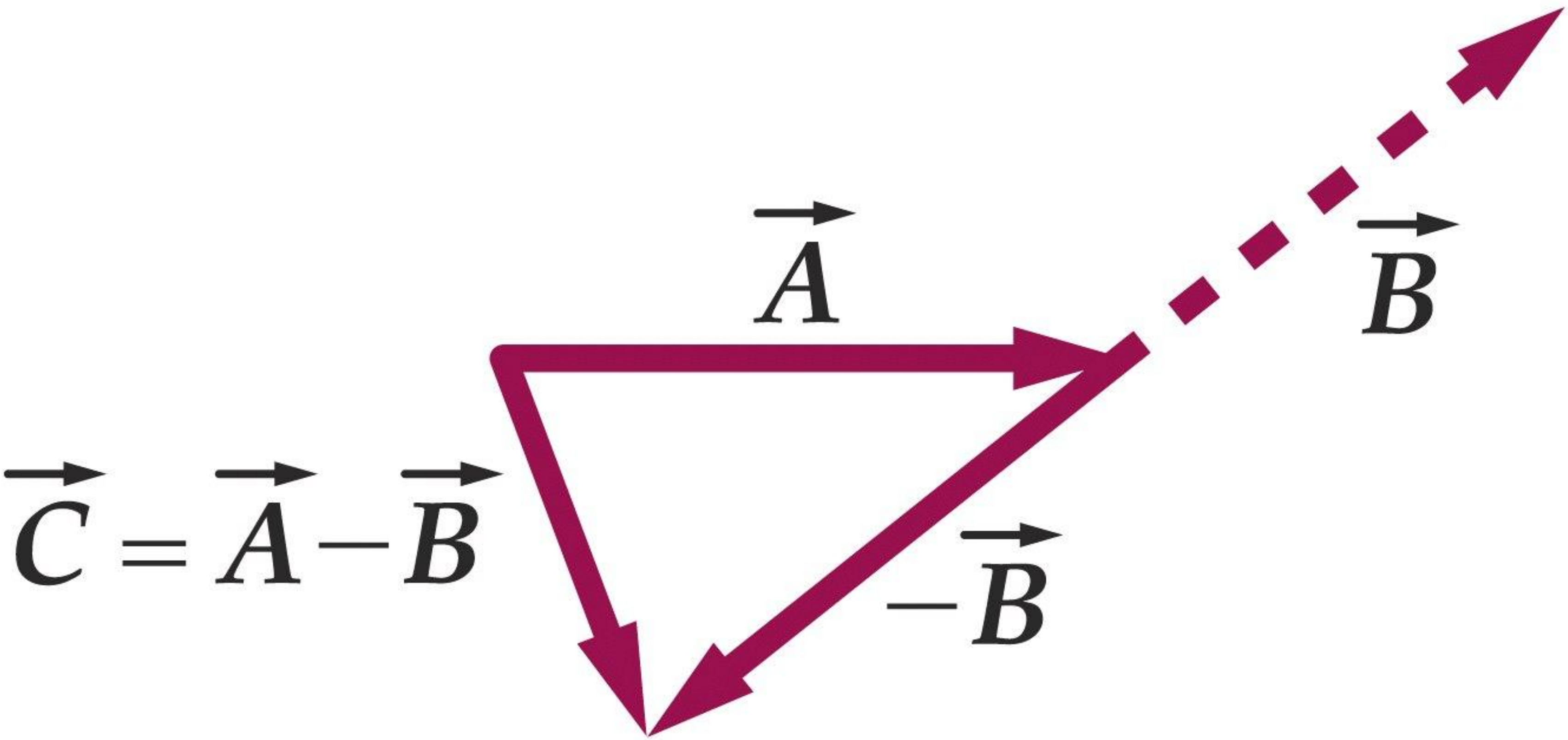
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$$

A soma de vetores é comutativa



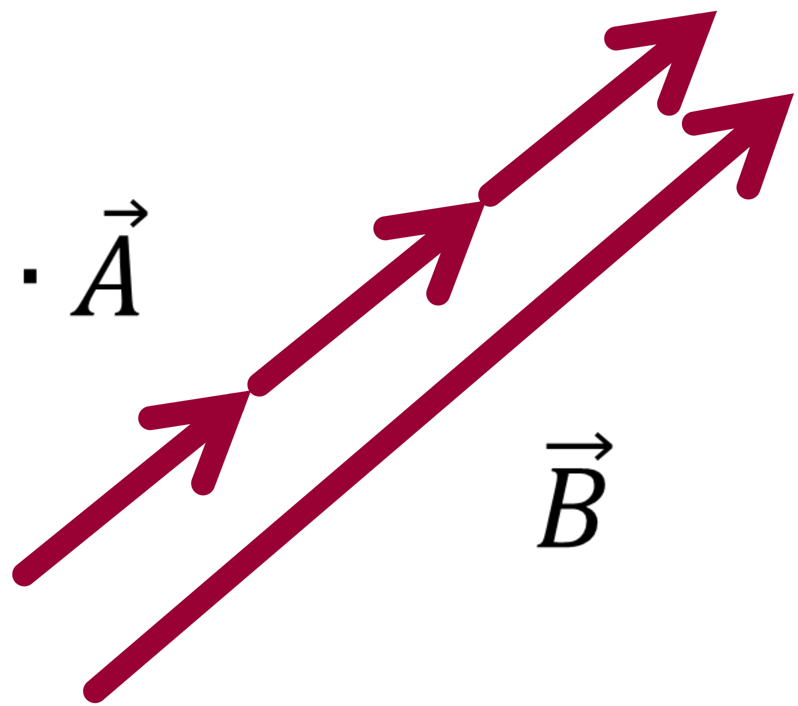
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

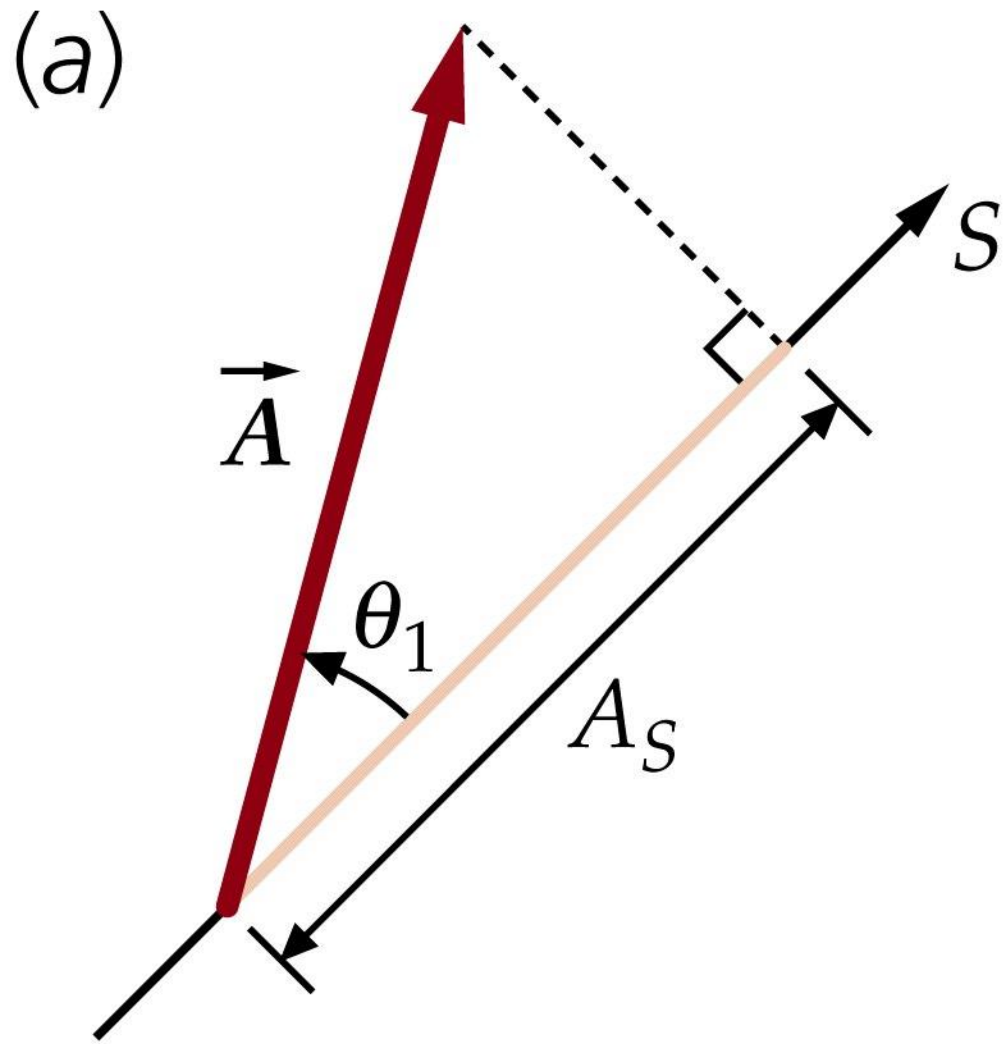
$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$



$$\vec{B} = n \cdot \vec{A}$$

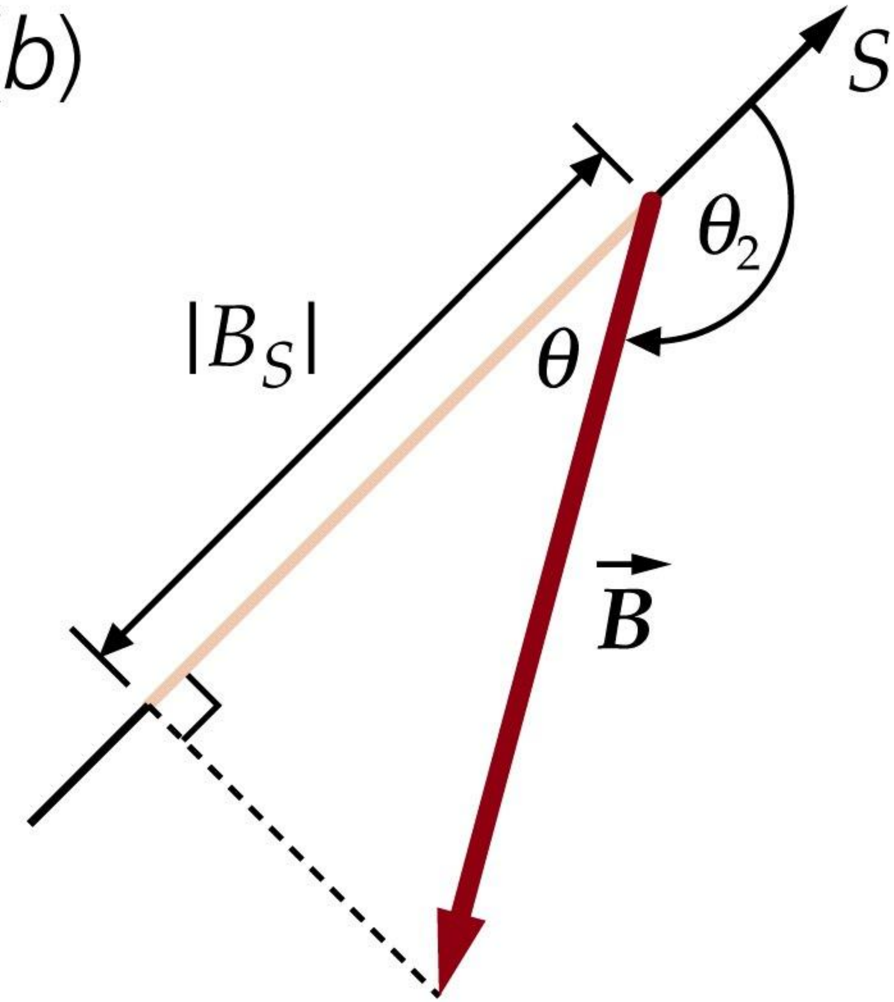
$$\vec{B} = 3 \cdot \vec{A}$$





$$A_S = A\cos\theta_1$$

(b)



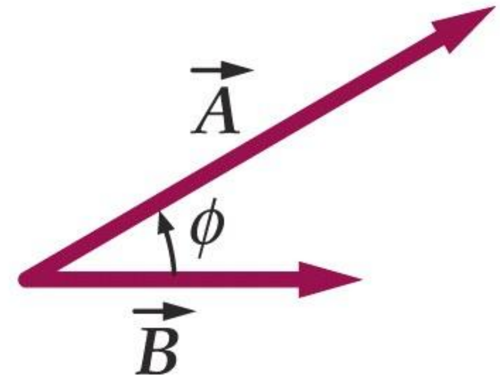
$$B_S = B\cos\theta_2 = -B\cos\theta$$

Por definição o produto interno de dois vetores é dado por:

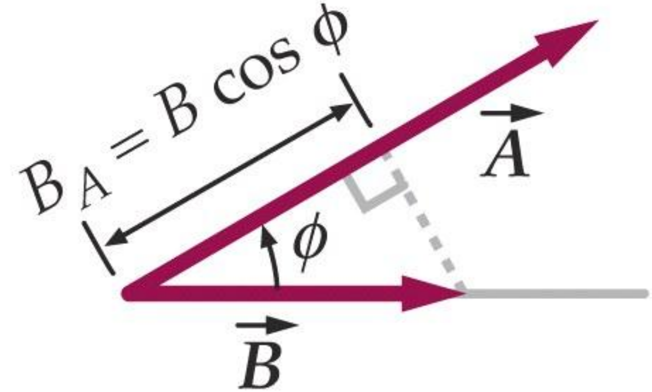
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A \cdot B \cdot cos\emptyset$$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = \left|\vec{B}\right| \cdot \left|\vec{A}\right| \cdot cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = B \cdot A \cdot cos\emptyset$$

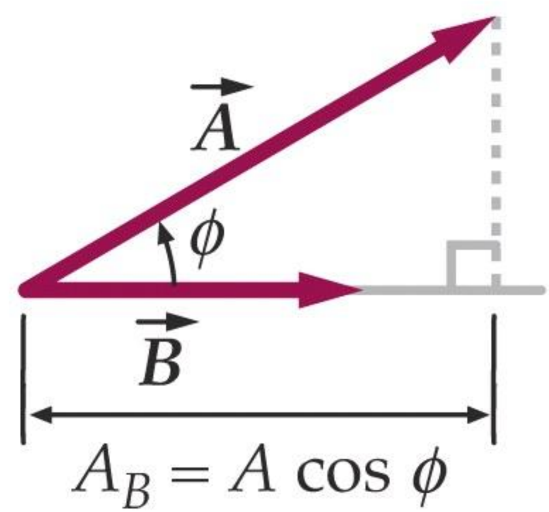
O produto interno é comutativo.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot cos\emptyset$$



$$\vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot cos\emptyset$$



Consequências da definição de produto interno

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A}, \vec{B}) = A \cdot B \cdot cos\emptyset$$

$\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular,	$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (since $\phi = 90°$, $\cos 90° = 0$)
$\vec{A}$ and $\vec{B}$ are parallel,	$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ (since $\phi = 0°$, $\cos 0° = 1$)
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$,	Either $\vec{A} = 0$ or $\vec{B} = 0$ or $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular

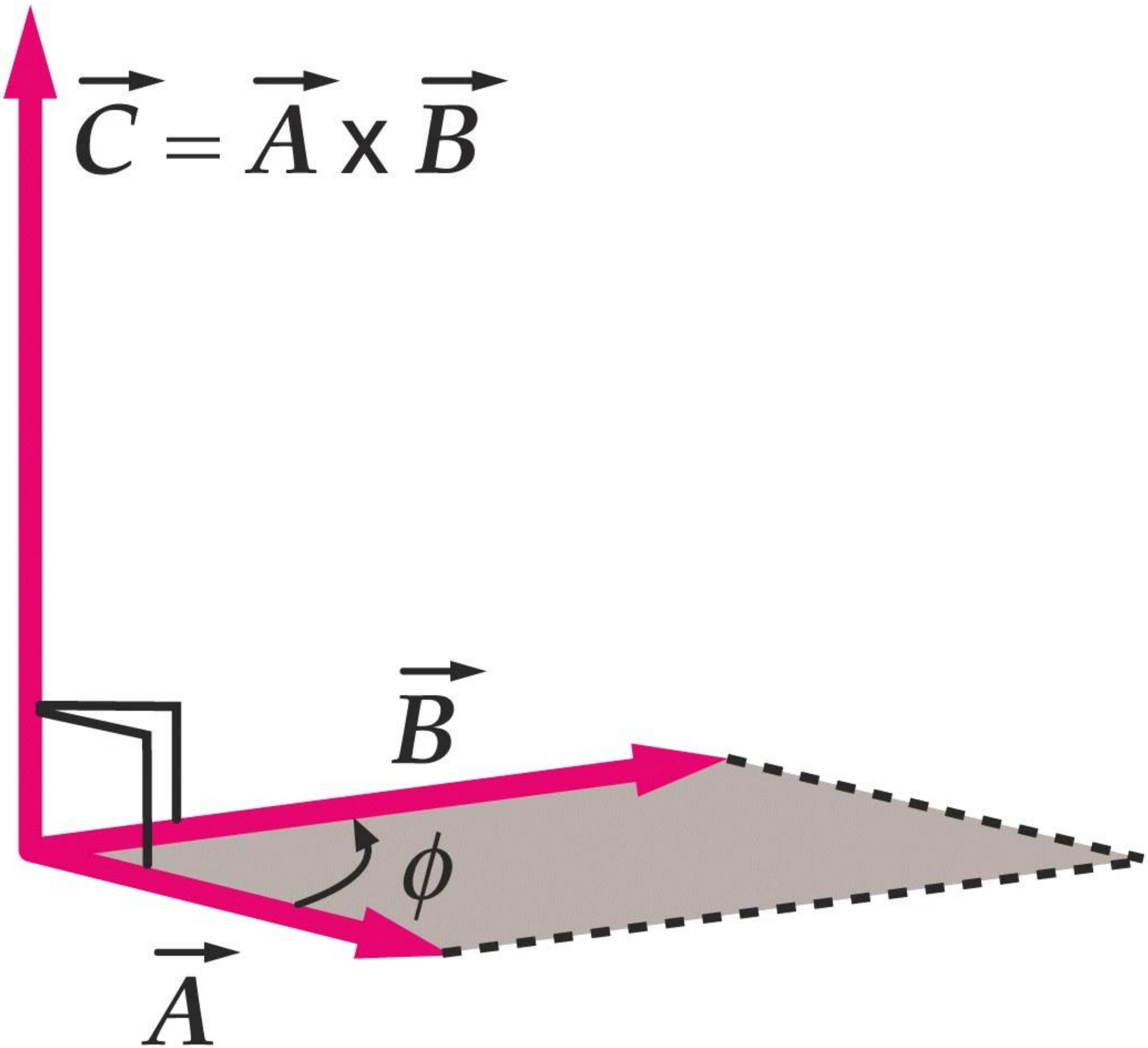
Furthermore,

$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$	Since $\vec{A}$ is parallel to itself
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$	Commutative rule of multiplication
$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$	Distributive rule of multiplication

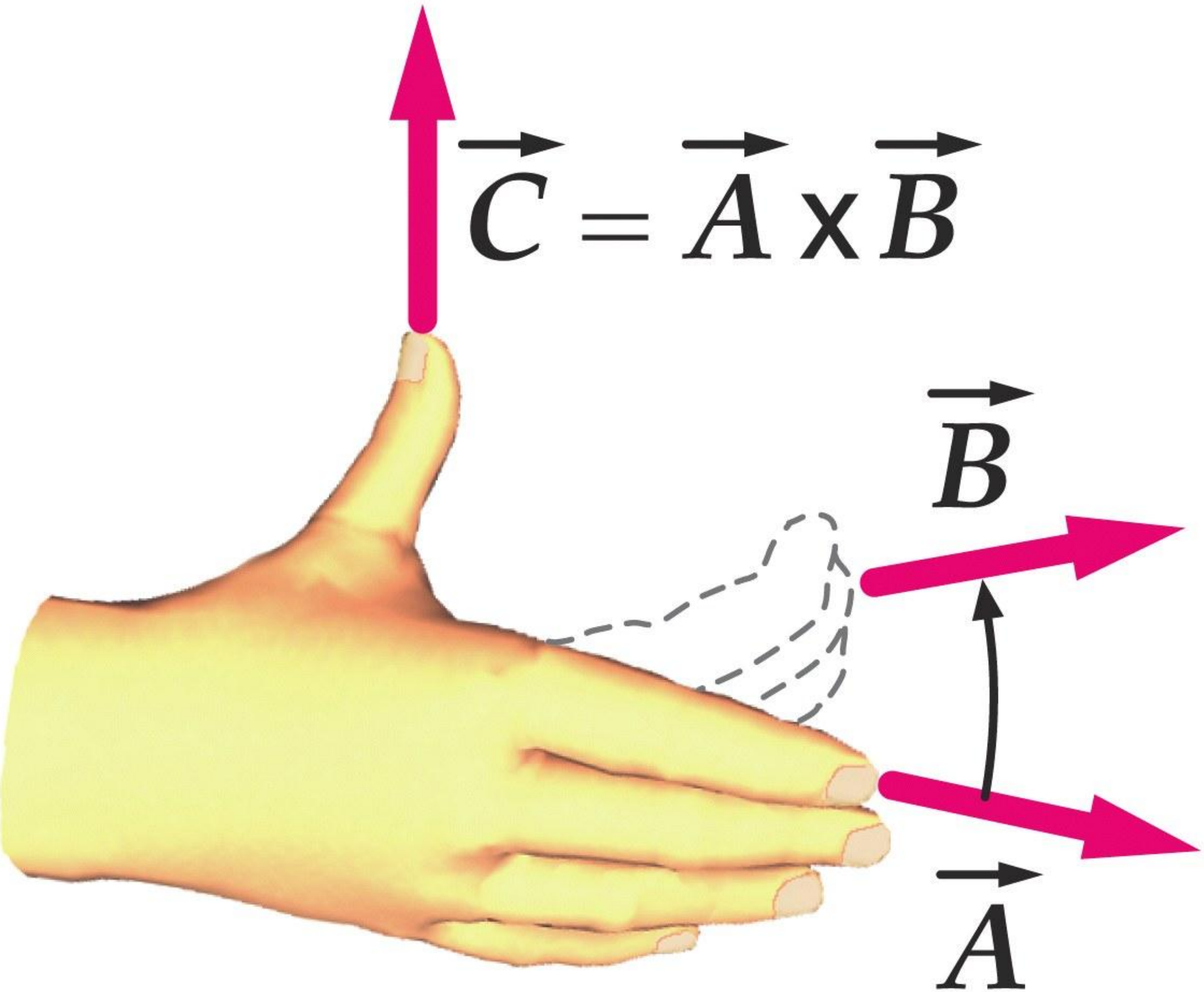
Por definição o produto externo de dois vetores é um vetor cujo módulo (ou intensidade) é dada por:

$$\left|\vec{A} * \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sen\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A \cdot B \cdot sen\emptyset$$

cuja direção é a direção perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e cujo sentido é dado pela regra da mão direita ou regra do saca rolhas.
O produto externo não é comutativo.



$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
$\vec{B}$
ϕ
$\vec{A}$



$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
$\vec{B}$
$\vec{A}$

Consequências da definição de produto externo

$$\left|\vec{A} * \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sen\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A \cdot B \cdot sen\emptyset$$

O produto externo não é comutativo $\vec{A} * \vec{B} = -\left(\vec{B} * \vec{A}\right)$.

Se os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem paralelos então $\vec{A} * \vec{B} = \vec{0}$ (critério de paralelismo).

Se um dos vetores $\vec{A}$ ou $\vec{B}$ for nulo então $\vec{A} * \vec{B} = \vec{0}$.

Portanto já sabemos o que é um vetor e efetuar algumas operações com vetores: somas, subtrações e várias multiplicações. Contudo, para fazer todas estas operações precisamos de ter sempre à mão uma régua e um transferir para medir ângulos e comprimentos.

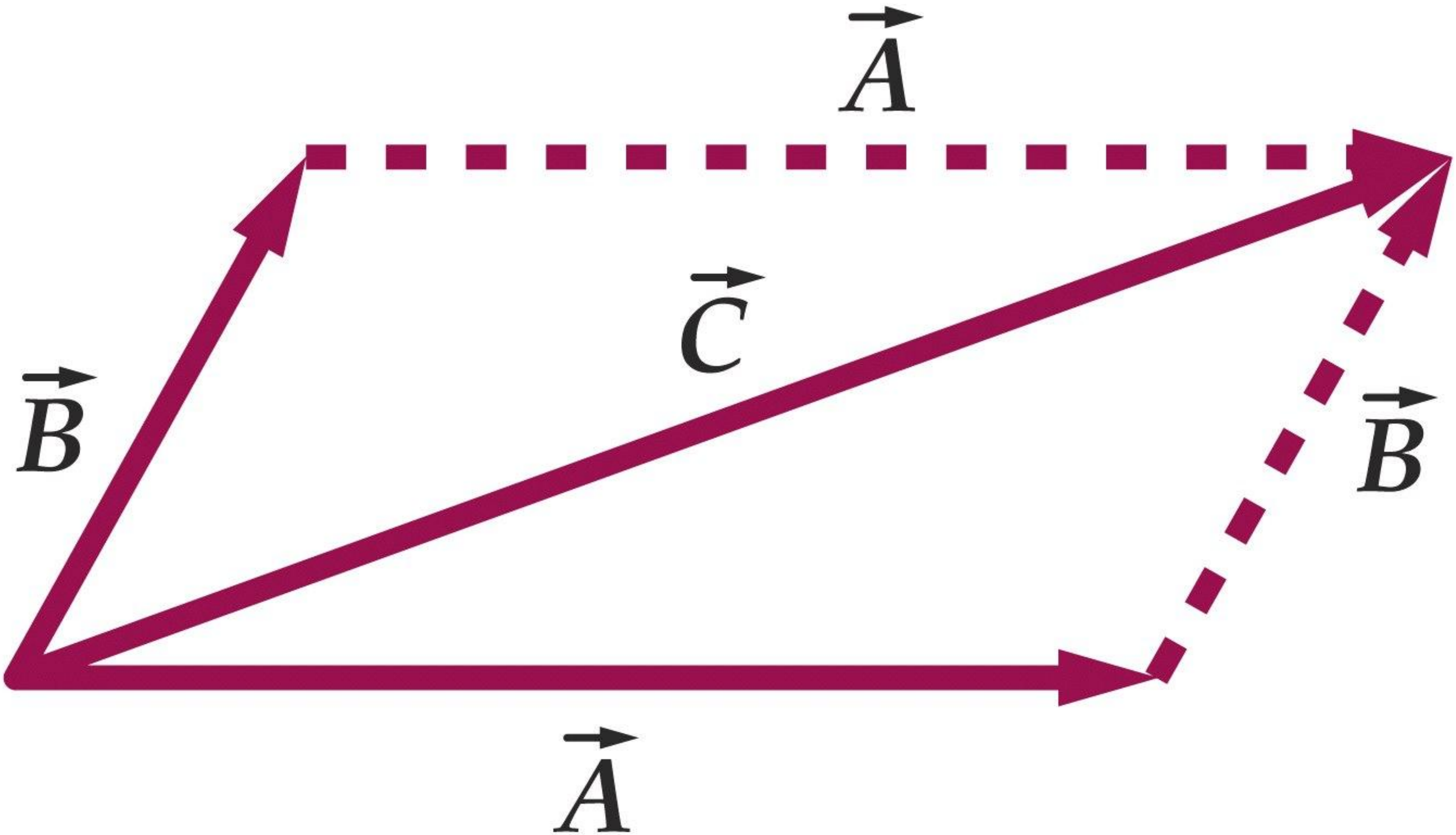
Será que não um processo mais simples de trabalhar com vetores? Há.

Problemas

1. Uma pessoa anda 3 km para leste e, depois, 2 km para norte. Qual foi o módulo do seu deslocamento?

2. Um carro anda 10 km para norte e, depois, 5 km para oeste. Calcule graficamente e analiticamente a intensidade e a direção do deslocamento resultante do carro.

Soma ou composição de vetores



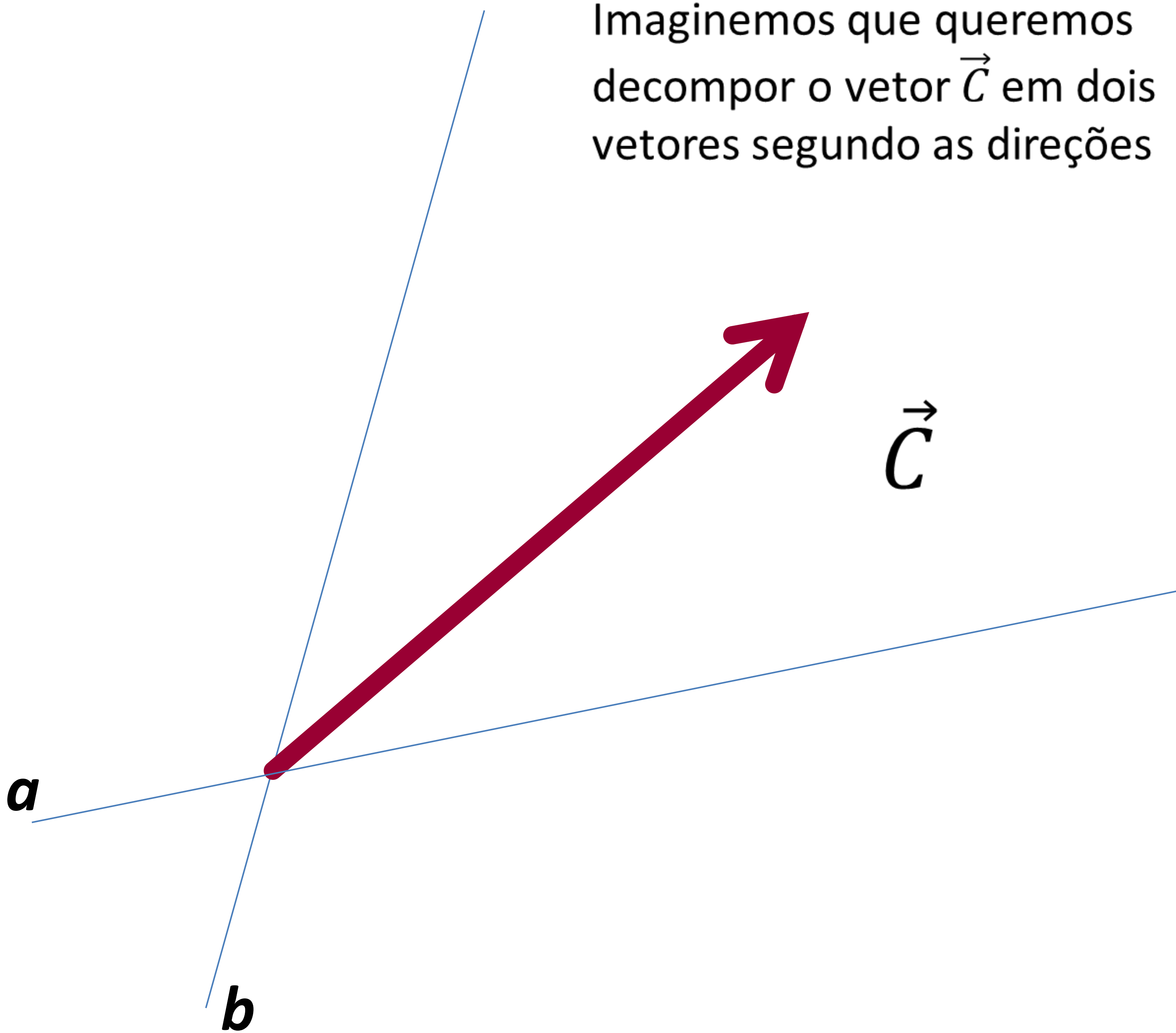
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$$

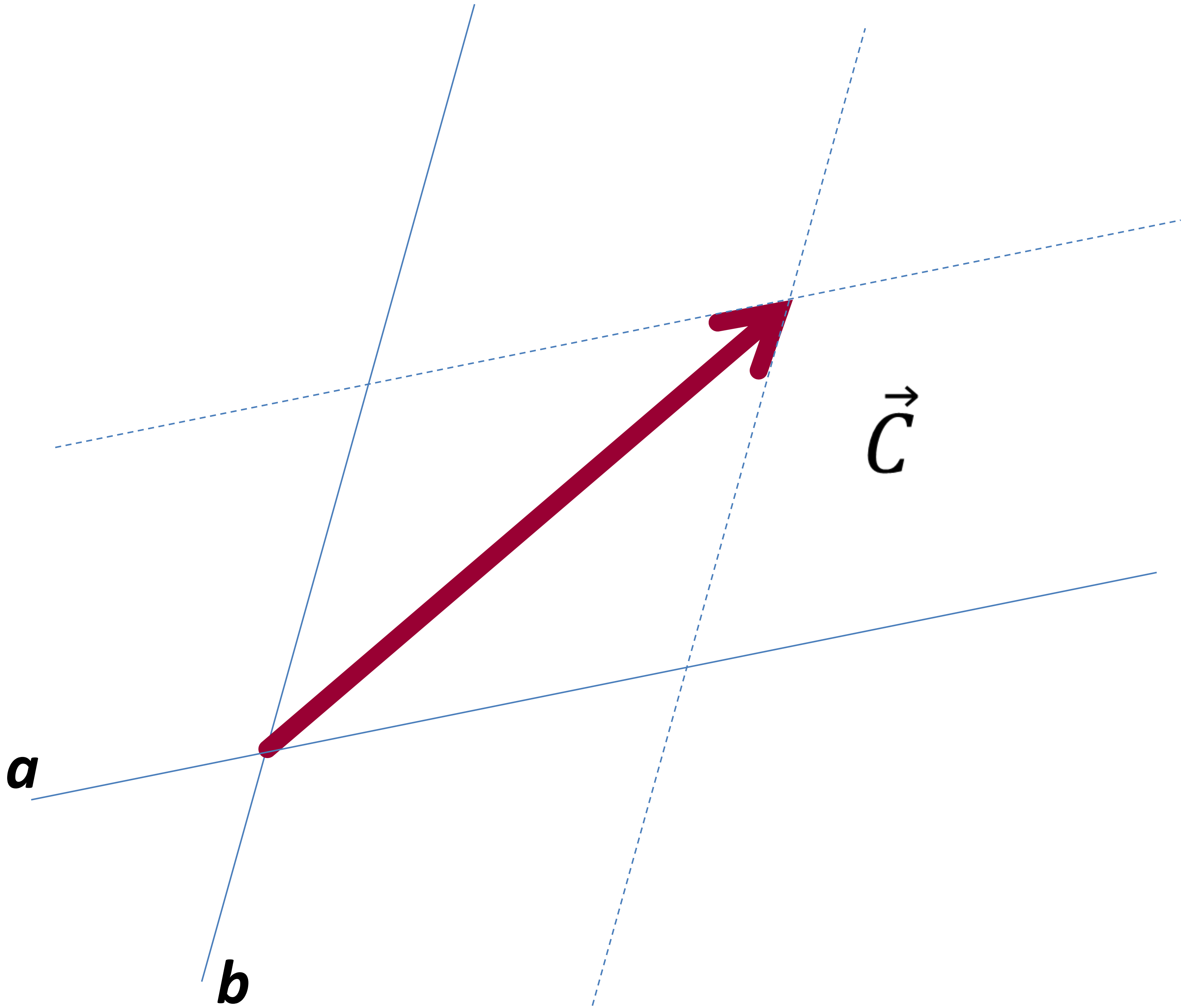
Se se podem compor vetores (i.e., somar vetores), o que será decompor vetores?

A pergunta é: se tivermos um dado vetor $\vec{C}$ que outros dois vetores ($\vec{A}$ e $\vec{B}$, por exemplo), ao serem somados (ou compostos) darão esse vetor $\vec{C}$?

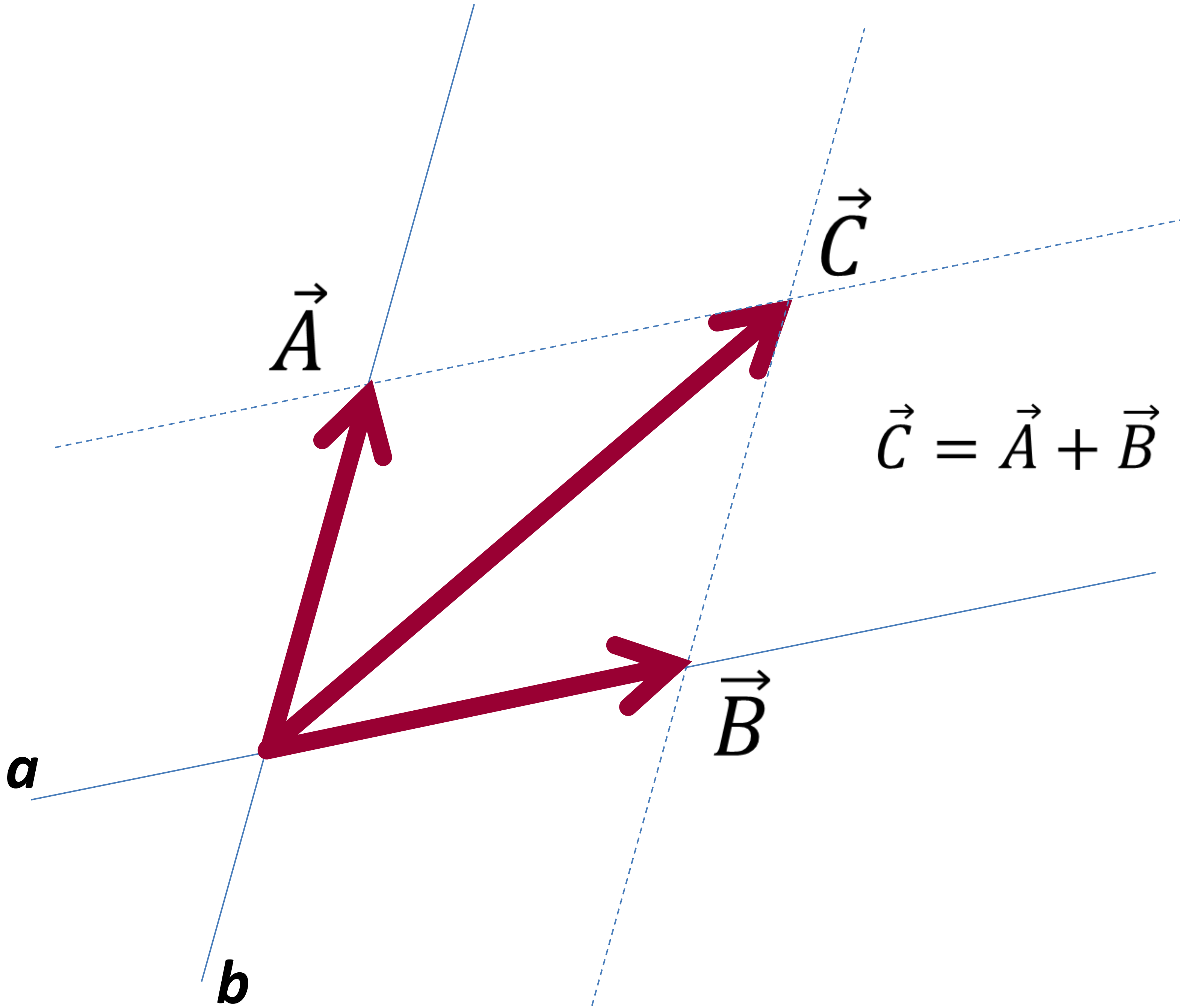
Vejamos, então, como se decompõe um dado vetor em dois outros vetores cuja soma é igual ao primeiro vetor.

Imaginemos que queremos decompor o vetor $\vec{C}$ em dois vetores segundo as direções ***a*** e ***b***.

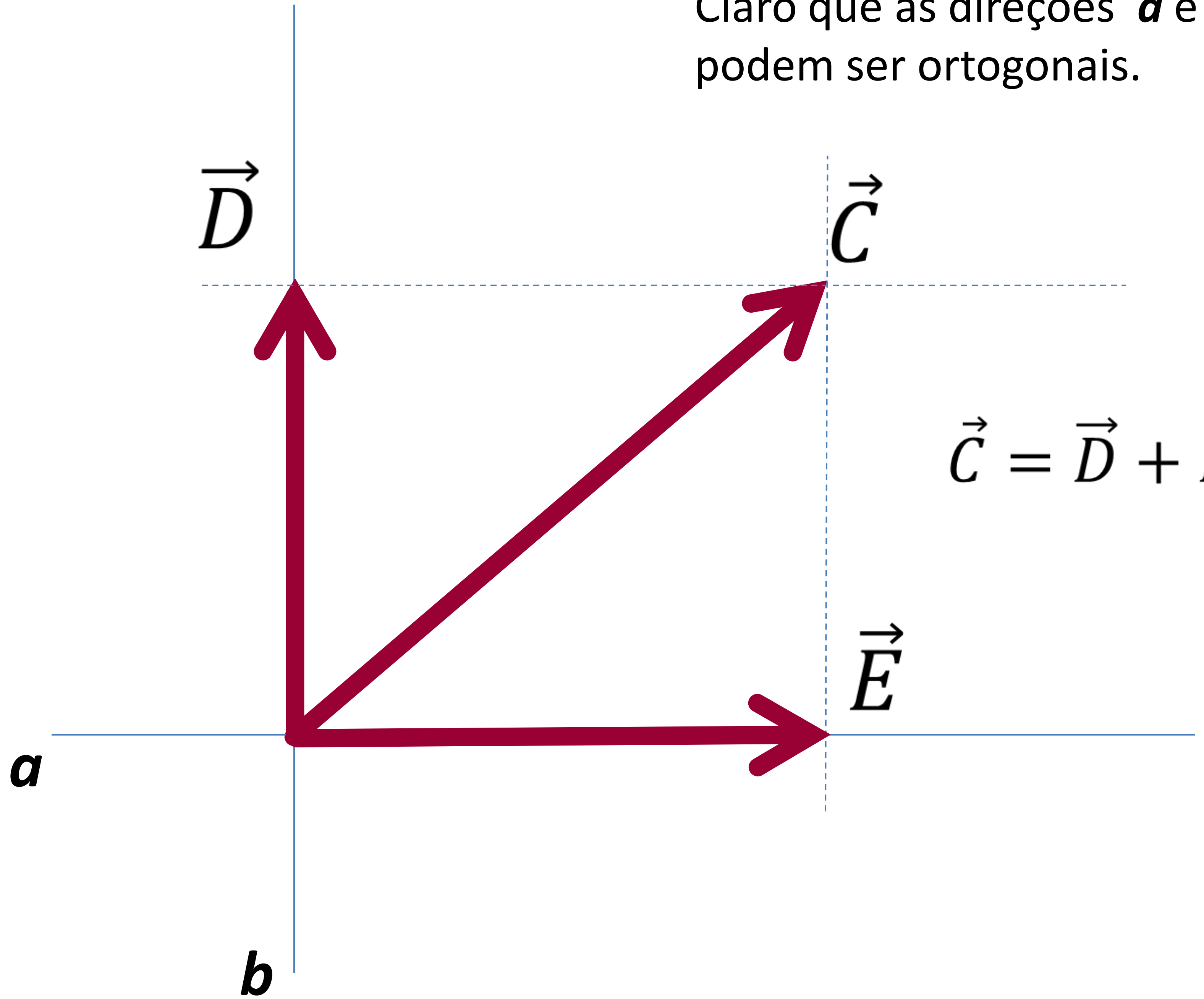




$\vec{C}$
a
b

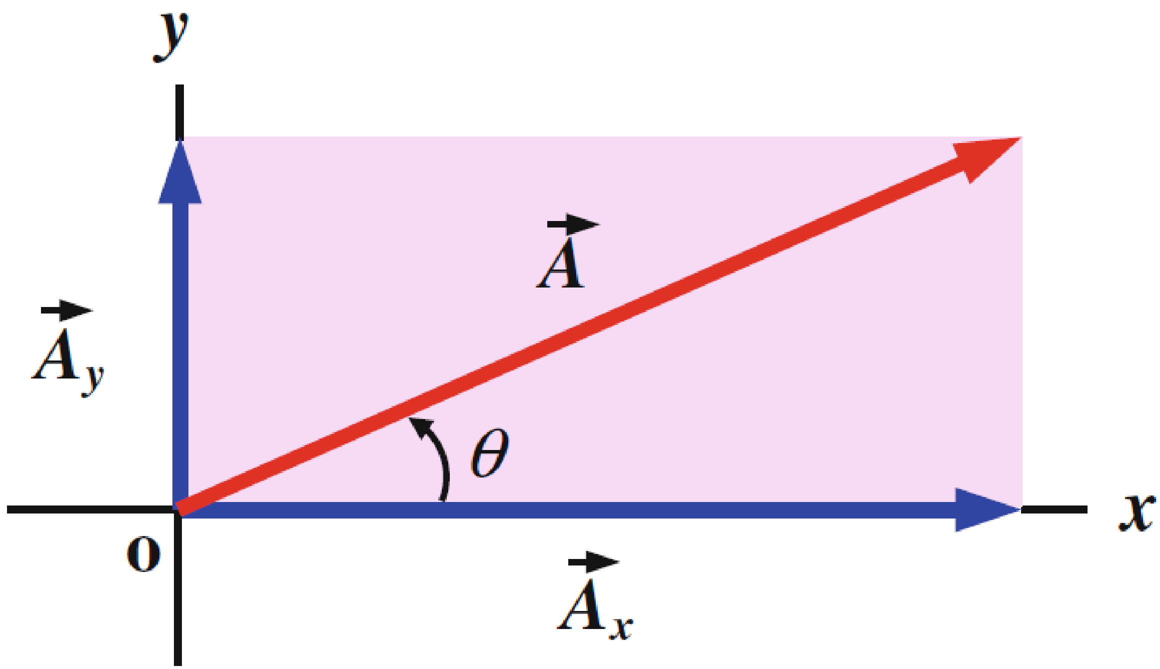

$\vec{C}$
$\vec{A}$
$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$
$\vec{B}$
a
b

Claro que as direções ***a*** e ***b*** podem ser ortogonais.



$$\vec{C} = \vec{D} + \vec{E}$$

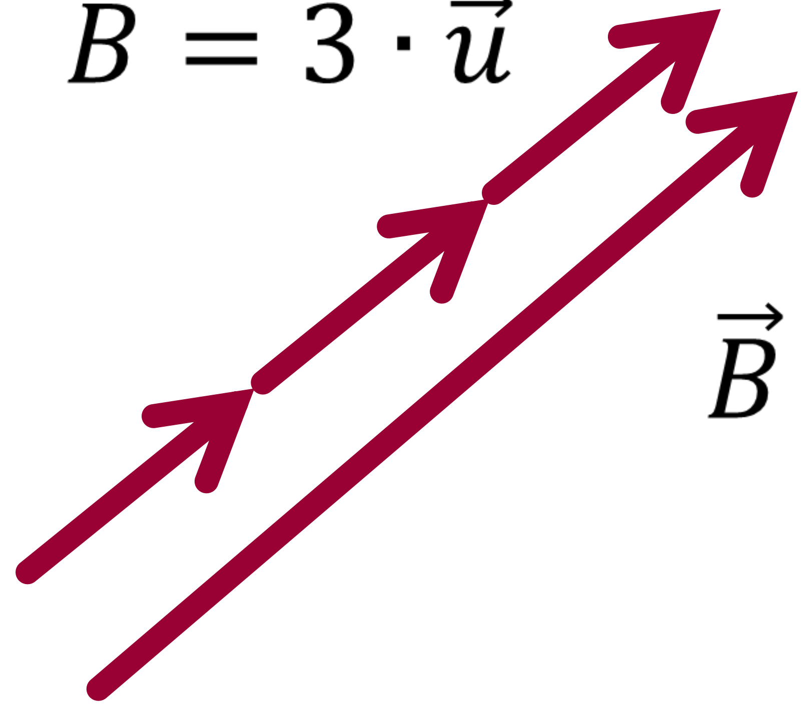
Imaginemos que temos duas direções do espaço definidas pelos eixos x e y, perpendiculares entre si. Imaginemos ainda que temos os vetores $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ que estão alinhados com essas duas direções.



A soma dos vetores $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ é o vetor $\vec{A}$, como já vimos (regra do paralelogramo). $\vec{A}_x$ e $\vec{A}_y$ são chamadas componentes vetoriais do vetor $\vec{A}$.

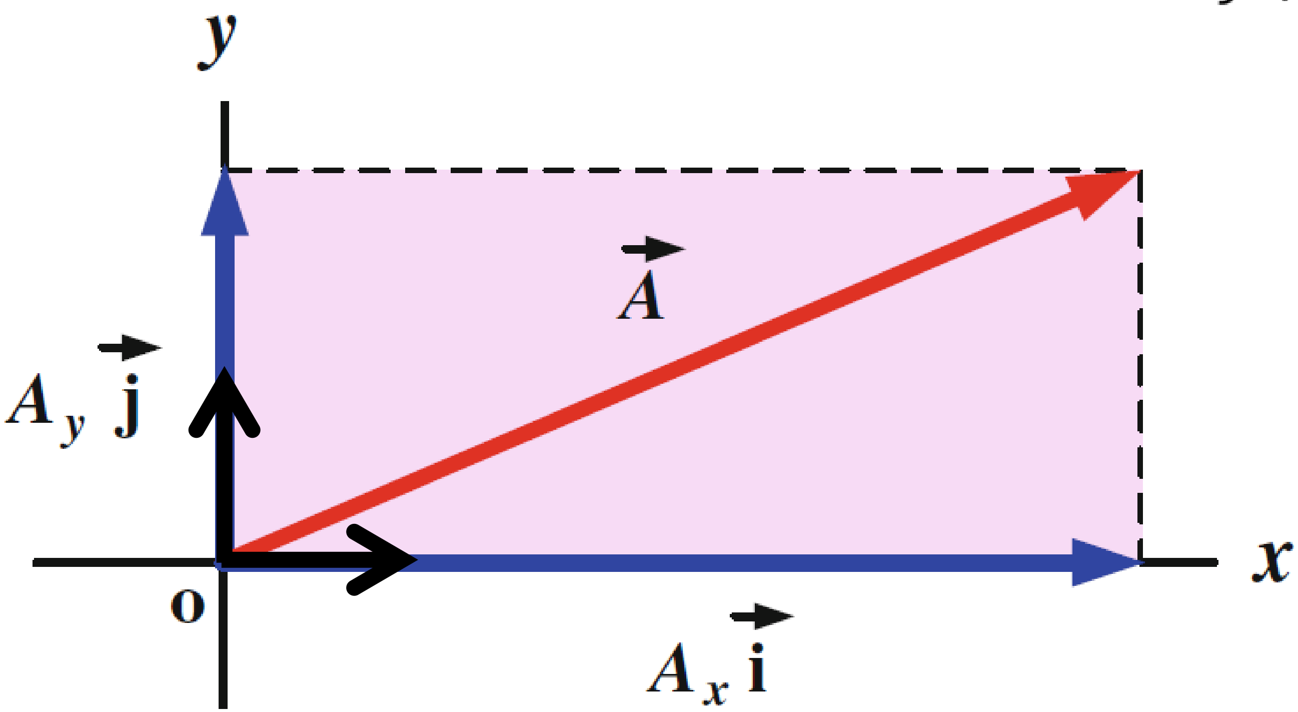
$$\vec{B} = n \cdot \vec{u}$$

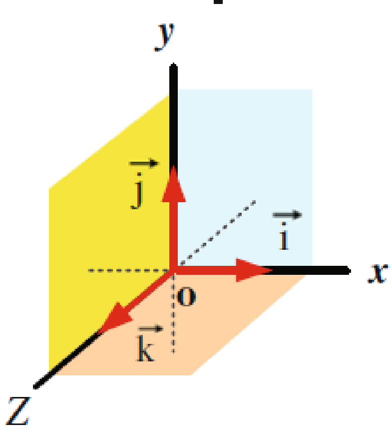
$$\vec{B} = 3 \cdot \vec{u}$$



Se o vetor $\vec{u}$ for o vetor unitário então a intensidade do vetor $\vec{B}$ (de módulo 3) terá três vezes a intensidade de $\vec{u}$. Assim, podemos calcular o vetor unitário associado a um dado vetor fazendo $\vec{u} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

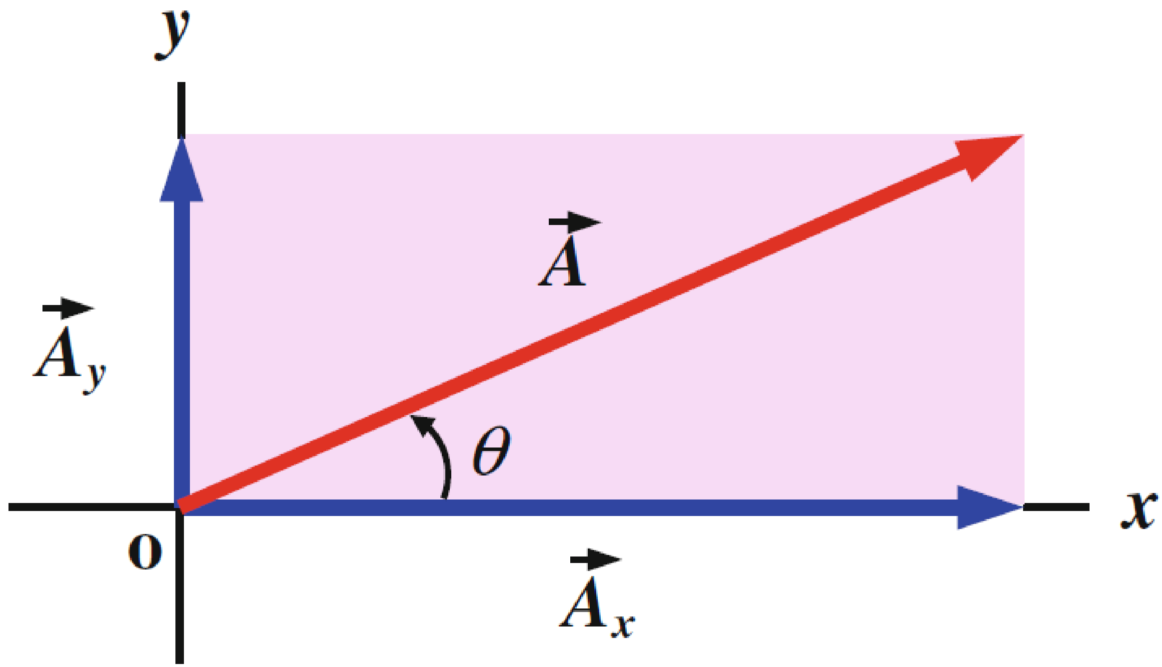
Imaginemos agora que introduzimos os vetores unitários $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ (a preto na figura).





A_x e A_y são chamadas componentes escalares do vetor $\vec{A}$ (ou simplesmente componentes do vetor $\vec{A}$). O vetor $\vec{A}$ na sua formas cartesiana escreve-se: $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$.

Módulo do vetor $\vec{A}$ ou $|\vec{A}|$



$$|\vec{A}|^2 = |\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2 \quad \text{ou} \quad |\vec{A}| = \sqrt{|\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2}$$

e $$\theta = tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Que definem a orientação do vetor $\vec{A}$ (θ em relação ao eixo x) e o seu módulo ou intensidade $|\vec{A}|$.

Ou seja, já não precisamos de réguas e transferidores para trabalhar com vetores; quando eles estão na sua <u>forma cartesiana</u> tudo pode ser feito com papel e lápis.

Podemos escrever

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} = A_x\vec{e}_1 + A_y\vec{e}_2$$

onde $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são vetores unitários (também chamados versores), com a mesma direção dos eixos *x* e *y, respetivamente,* e com um sentido que é considerado positivo no sentido indicado pela seta. Se considerarmos que os eixos *x* e *y* constituem um sistema de eixos cartesianos (eixos ortogonais entre si) então A_x e A_y serão as componentes cartesianas do vetor $\vec{A}$. Também podemos pôr $\vec{\imath} = \vec{e}_1$ e $\vec{\jmath} = \vec{e}_2$; e se houver um terceiro eixo perpendicular aos outros dois, $\vec{k} = \vec{e}_3$.

Consideremos, então 2 vetores

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}$$

e

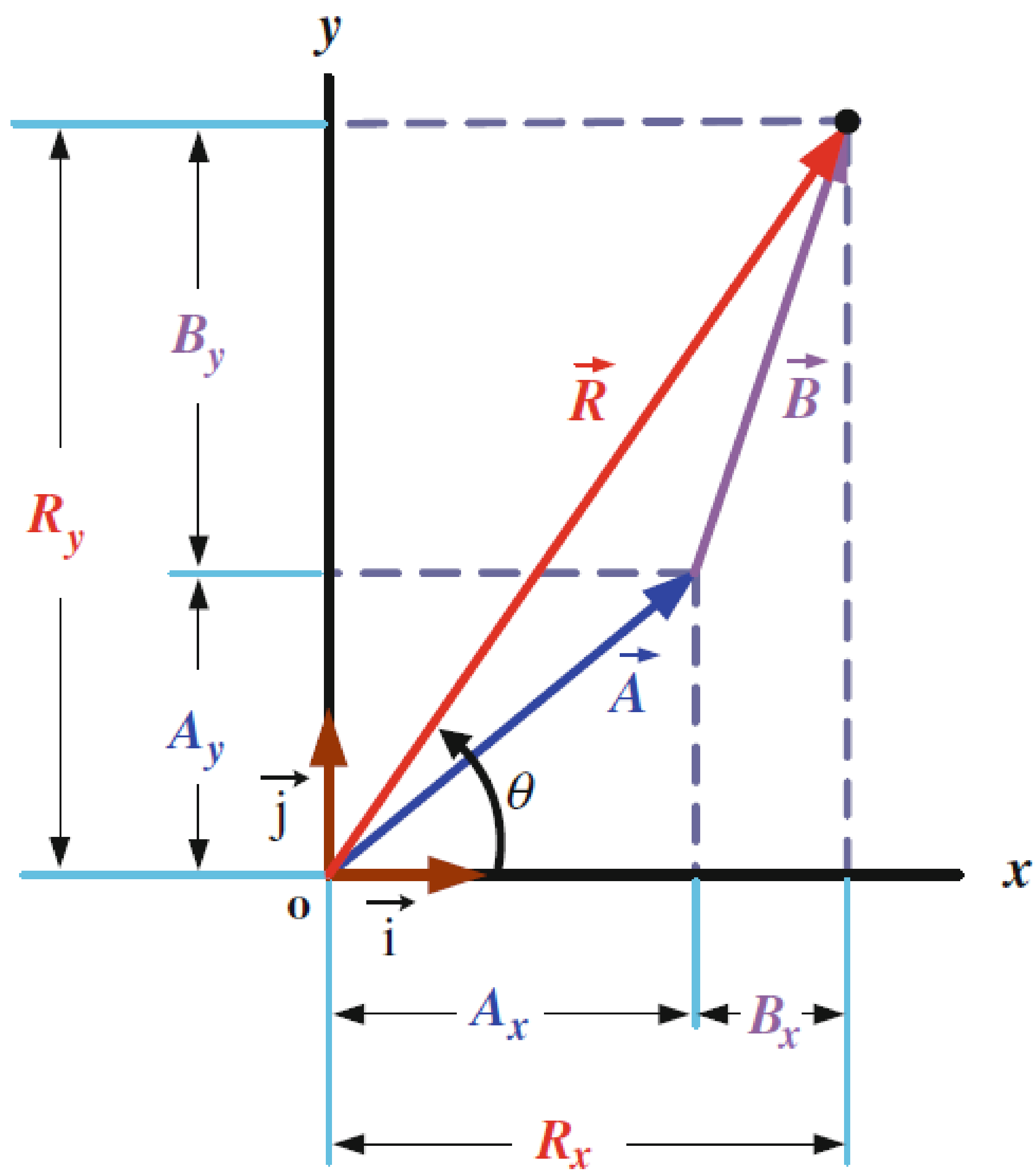
$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$$

A soma é dada por (analiticamente):

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} &= (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + (\vec{B}_x + \vec{B}_y) \\ &= (A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath}) + (B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}) \\ &= A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} \\ &= A_x\vec{\imath} + B_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + B_y\vec{\jmath} \\ &= (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} \\ &= R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} = \vec{R}\end{aligned}$$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} \qquad \vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath}$$

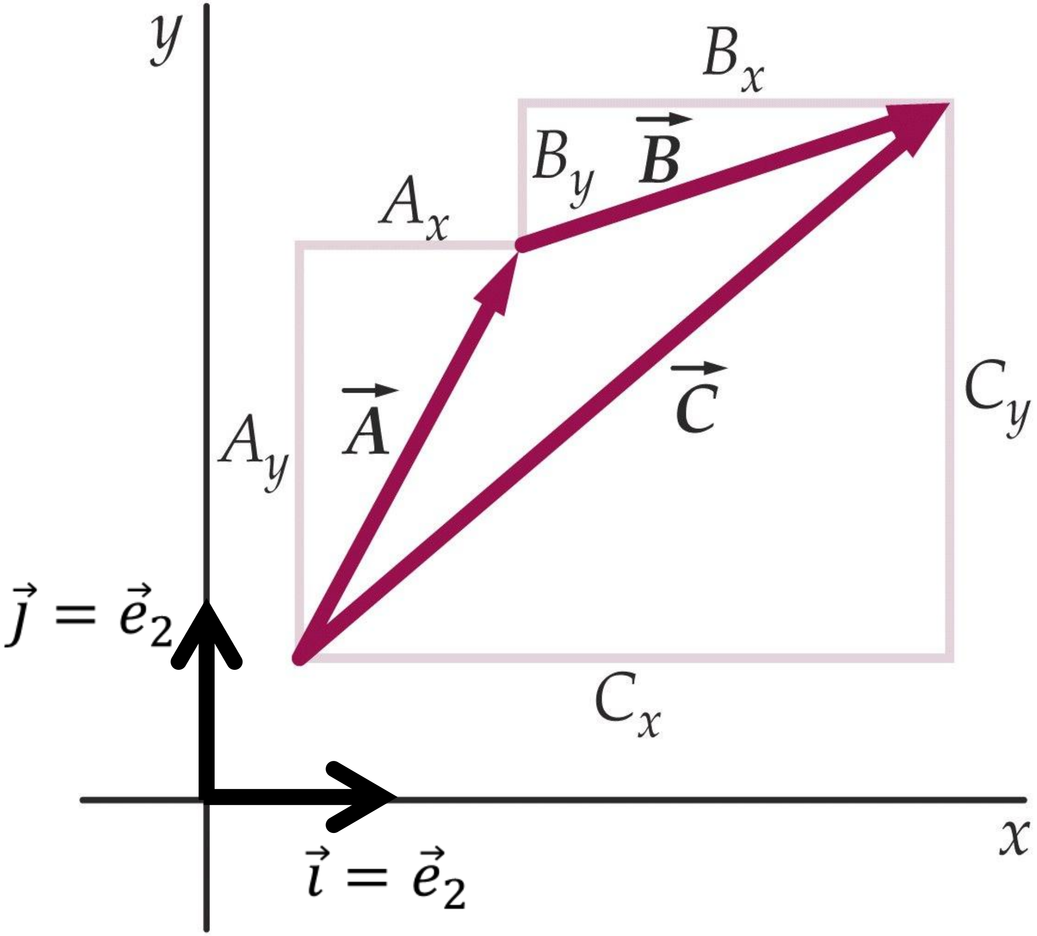
$$\begin{aligned}
\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} &= (\vec{A}_x + \vec{A}_y) + (\vec{B}_x + \vec{B}_y) \\
&= (A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j}) \\
&= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + B_x\vec{i} + B_y\vec{j} \\
&= A_x\vec{i} + B_x\vec{i} + A_y\vec{j} + B_y\vec{j} \\
&= (A_x + B_x)\vec{\imath} + (A_y + B_y)\vec{\jmath} \\
&= R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} = \vec{R}
\end{aligned}$$



Portanto: $R_x = A_x + B_x$

e $R_y = A_y + B_y$

$$\vec{R} = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath}$$



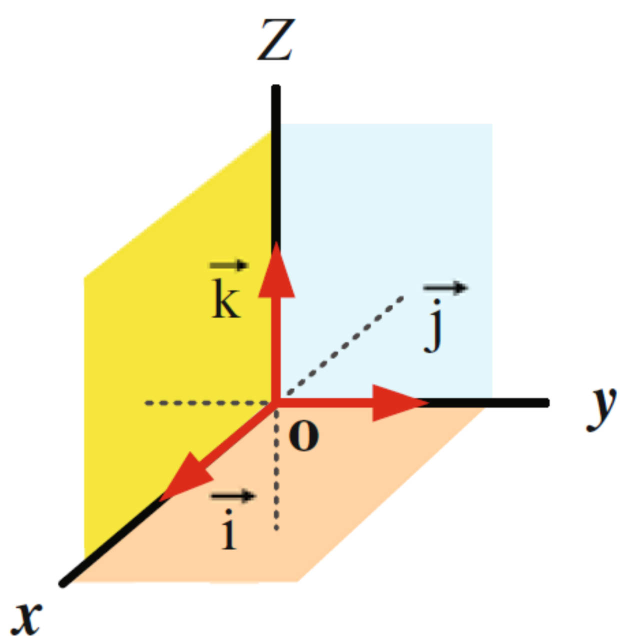
$$\vec{A} + \vec{B} =$$
$$= \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j}\right) + \left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}\right)$$
$$= A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$$
$$= A_x\vec{i} + B_x\vec{i} + A_y\vec{j} + B_y\vec{j}$$
$$= (A_x + B_x)\vec{i} + \left(A_y + B_y\right)\vec{j}$$
$$= C_x\vec{i} + C_y\vec{j} = \vec{C}$$

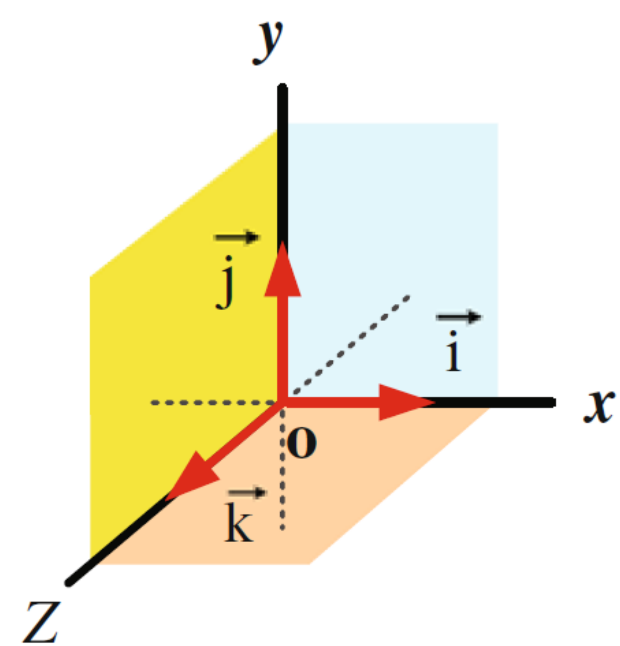
No plano (x,y) um vetor pode ser representado por:

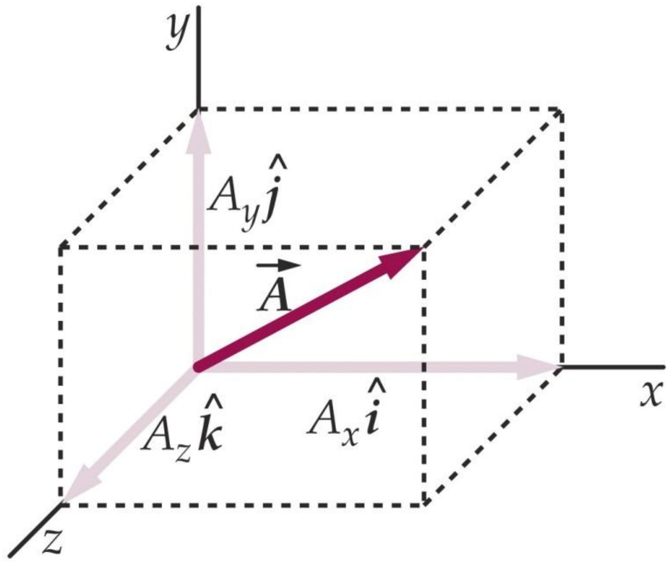
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} = A_x\vec{e}_1 + A_y\vec{e}_2$$

Generalização para as 3 direções do espaço (x, y, z) é imediata:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} = A_x\vec{e}_1 + A_y\vec{e}_2 + A_z\vec{e}_3$$

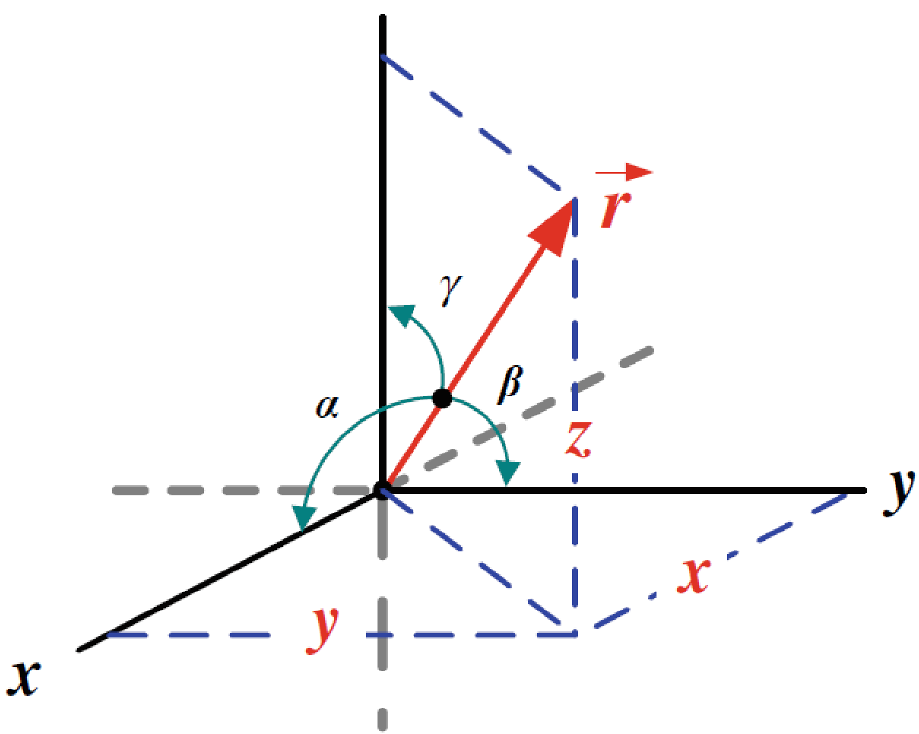






$$|\vec{A}|^2 = |\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2 + |\overrightarrow{A_z}|^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2 + |\overrightarrow{A_z}|^2}$$



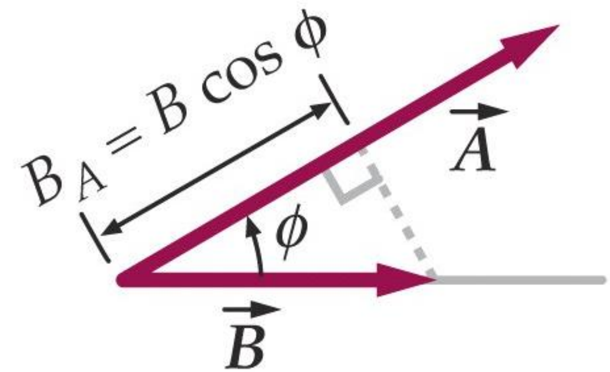
$$|\vec{r}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + |\vec{z}|^2}$$

Consequências para o produto interno e produto externo

Por definição:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A}, \vec{B})$$



Se tivermos dois vetores na sua forma cartesiana:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_1 + A_y \vec{e}_2 + A_z \vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_1 + B_y \vec{e}_2 + B_z \vec{e}_3$$

Então:

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2 + |\overrightarrow{A_z}|^2} \qquad |\vec{B}| = \sqrt{|\overrightarrow{B_x}|^2 + |\overrightarrow{B_y}|^2 + |\overrightarrow{B_z}|^2}$$

Por outro lado demonstra-se (na TP calcularemos $\vec{A} \cdot \vec{B}$, como exercício):

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

Como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Temos:

$$A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Ou:

$$cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

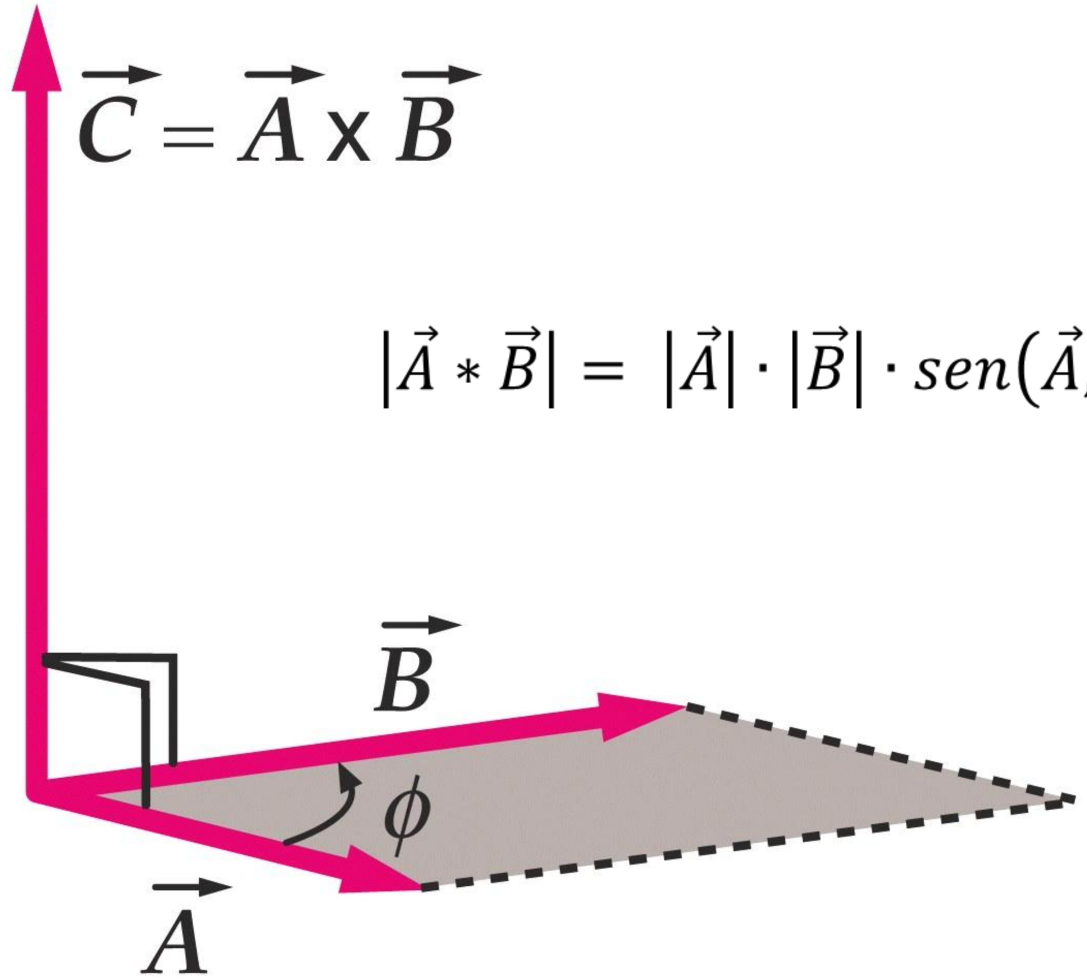
Conclusão: quando os vetores estão em forma cartesiana a régua e o transferidor deixam de ser necessários.

Por definição o produto externo de dois vetores é um vetor cujo módulo (ou intensidade) é dada por:

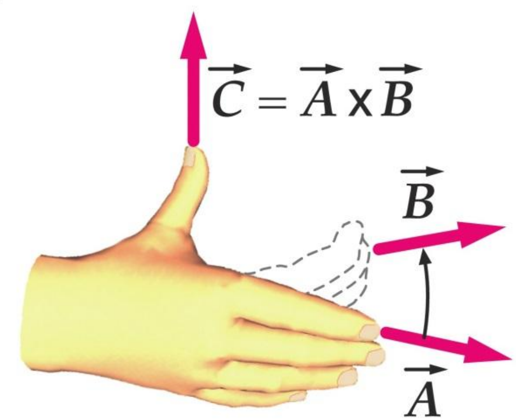
$$\left|\vec{A} * \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sen\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A \cdot B \cdot sen\emptyset$$

cuja direção é a direção perpendicular ao plano definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e cujo sentido é dado pela regra da mão direita ou regra do saca rolhas.

Se tivermos uma forma de calcular $\left|\vec{A} * \vec{B}\right|$ (módulo do produto externo) então podemos calcular o ângulo que os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fazem entre si. Na aula teórico prática calcularemos, como exercício, $\vec{A} * \vec{B}$.



$$\left|\vec{A} * \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sen\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = A \cdot B \cdot sen\emptyset$$



Produto externo com vetores na forma cartesiana

$$\vec{A} = A_x\,\vec{e}_1 + A_y\vec{e}_2 + A_z\vec{e}_3$$

$$\vec{B} = B_x\,\vec{e}_1 + B_y\vec{e}_2 + B_z\vec{e}_3$$

$$\begin{aligned}\vec{A} * \vec{B} = \left(A_y\,B_z - \;A_zB_y\right)\vec{e}_1 + (A_z\,B_x - \;A_xB_z)\vec{e}_2 \\ + \left(A_x\,B_y - \;A_yB_x\right)\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \begin{matrix} \color{red}{\vec{e}_1} & \color{red}{\vec{e}_2} \\ \color{red}{A_x} & \color{red}{A_y} \\ \color{red}{B_x} & \color{red}{B_y} \end{matrix}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \left(A_y\, B_z - \ A_z B_y\right)\vec{e}_1 + (A_z\, B_x - \ A_x B_z)\vec{e}_2 + \left(A_x\, B_y - \ A_y B_x\right)\vec{e}_3$$

Produto externo com vetores na forma cartesiana

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_x & \boxed{A_y} & \boxed{A_z} \\ B_x & \boxed{B_y} & \boxed{B_z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \left(A_y\, B_z - \; A_z B_y \right)\vec{e}_1 + \left(A_z\, B_x - \; A_x B_z\right)\vec{e}_2 + \left(A_x\, B_y - \; A_y B_x\right)\vec{e}_3$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ A_x & A_y & A_z & A_x & A_y \\ B_x & B_y & B_z & B_x & B_y \end{array} \right.$$

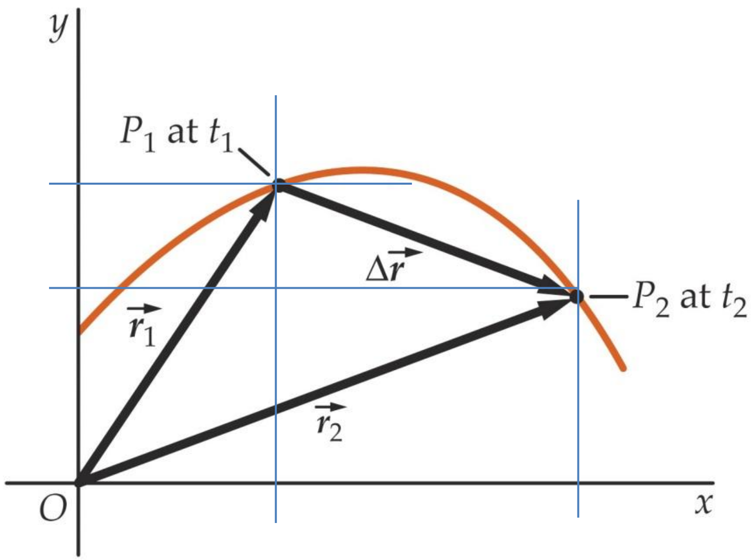
$$\vec{A} * \vec{B} = (A_y\, B_z - \; A_z B_y\,)\vec{e}_1 + (A_z\, B_x - \; A_x B_z)\vec{e}_2 + (A_x\, B_y - \; A_y B_x)\vec{e}_3$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{matrix}$$

$$\vec{A} * \vec{B} = \left(A_y\, B_z - A_z B_y\right)\vec{e}_1 + \left(A_z\, B_x - A_x B_z\right)\vec{e}_2 + \left(A_x\, B_y - A_y B_x\right)\vec{e}_3$$

Derivação e integração de vetores

Admitamos que um dado vetor varia no tempo (t).



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\right) = \frac{d}{dt}(x(t))\vec{e}_1 + \frac{d}{dt}\left(y(t)\right)\vec{e}_2 + \frac{d}{dt}(z(t))\vec{e}_3$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b x(t)dt\,\vec{e}_1 + \int_a^b y(t)dt\,\vec{e}_2 + \int_a^b z(t)dt\,\vec{e}_3$$

Alguns exemplos de operações de grandezas físicas vetoriais

Trabalho realizado por uma força:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Momento de uma força em relação a um ponto:

$$\vec{\tau} = \vec{r} * \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Momento angular em relação a um ponto:

$$\vec{L} = \vec{r} * \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

Problemas

1. Dados os vetores deslocamento e força por, respetivamente,

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \qquad \text{e} \qquad \vec{F} = F_x\vec{e}_1 + F_z\vec{e}_3$$

escreva a expressão do trabalho realizado pela força ao longo daquele deslocamento.

2. Se os dois vetores forem representados por

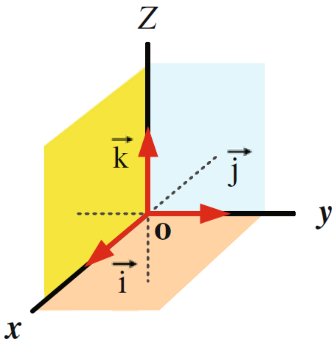
$$\vec{r} = 2\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 + 4\,\vec{e}_3 \ \ (\mathrm{m}) \ \ \text{e} \ \ \vec{F} = 5\,\vec{e}_1 + 6\,\vec{e}_3 \ (\mathrm{N})$$

qual será o trabalho realizado pela força durante aquele deslocamento? E qual o ângulo entre os dois vetores?

Soluções

1. Qual a situação geométrica dos 2 vetores? Estão no espaço tridimensional, ou num plano, ou ao longo de uma linha?

$\vec{r}$ é um vetor que existe no espaço tridimensional: tem 3 componentes ao longo do 3 eixos (x, y, z). $\vec{F}$ existe no plano (x, z). A origem dos vetores está no ponto (0, 0, 0). O vetor $\vec{r}$ tem a sua extremidade no ponto (x, y, z); vetor $\vec{F}$ tem a sua extremidade no ponto $(F_x, 0, F_z)$.



$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{F} = F_x\vec{e}_1 + F_z\vec{e}_3.$$

Trabalho realizado por uma força:

1.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \qquad \text{(m)}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_3 + F_z \vec{e}_3 \qquad \text{(N)}$$

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ &= (F_x\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + F_z\,\vec{e}_3) \cdot (x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3) \\ &= (F_x \cdot x) + (0 \cdot y) + (F_z \cdot z) \\ &= (F_x \cdot x) + (F_z \cdot z) \qquad \text{(J)} \end{aligned}$$

2. Neste caso os dois vetores têm componentes com valores numéricos. As unidades estão entre parêntesis.

$\vec{r} = 2\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 + 4\,\vec{e}_3$ (m) e $\vec{F} = 5\,\vec{e}_1 + 6\,\vec{e}_3$ (N).

Qual será o trabalho realizado pela força durante aquele deslocamento?

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ &= (5\,\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3) \cdot (2\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 + 4\,\vec{e}_3) \\ &= (5 \cdot 2) + (0 \cdot 3) + (6 \cdot 4) \\ &= (10) + (24) = 34 \ \ (\mathrm{J}) \end{aligned}$$

$$cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\overrightarrow{A_x}|^2 + |\overrightarrow{A_y}|^2 + |\overrightarrow{A_z}|^2}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{|2|^2 + |3|^2 + |4|^2} = \sqrt{29} \ \ \text{(m)}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{|5|^2 + |0|^2 + |6|^2} = \sqrt{61} \ \ \text{(N)}$$

$$cos(\vec{A},\vec{B}) = \frac{(5 \cdot 2) + (0 \cdot 3) + (6 \cdot 4)}{|\vec{r}| \cdot |\vec{F}|} = \frac{34}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = 0{,}808$$

$$cos\emptyset = cos(\vec{A},\vec{B}) = 0{,}808 \qquad \emptyset = cos^{-1}(0{,}808\ ) \approx 40^{o}$$