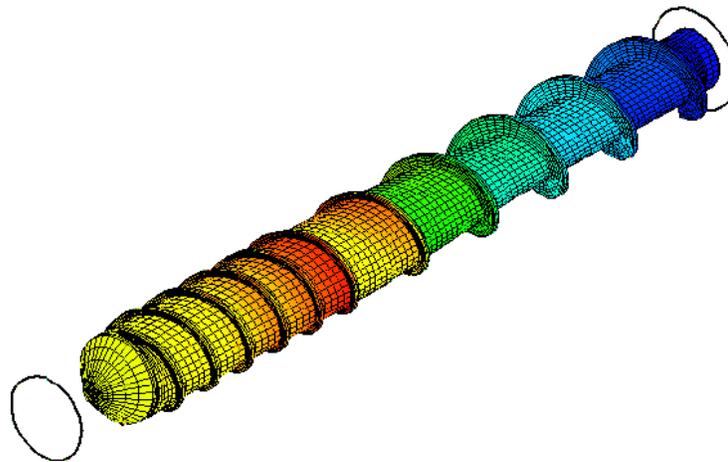


Mecânica Estrutural

Introdução ao Métodos dos
Elementos Finitos

Formulação Fraca *versus* Formulação Variacional



Resumo Teórico e Exercícios Resolvidos

Maio 2021

Professor Joaquim Guerreiro Marques

Abreviaturas

c.f.	condição de fronteira
edo	equação diferencial ordinária
EP	exercício proposto
f.f.	formulação fraca
g.l.	grau de liberdade
i.p.p.	integração por partes
MEF	método dos elementos finitos

Símbolos

□	fim do exemplo indicado
---	-------------------------

Índice

ABREVIATURAS	II
§1 INTRODUÇÃO	1
§2 FORMULAÇÃO CLÁSSICA	1
§2.0 ORIGEM FÍSICA	1
§2.1 EQUAÇÕES	1
§2.2 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA	2
§2.3 CONDIÇÕES DE SALTO NUM PONTO INTERIOR DO DOMÍNIO	4
§3 ENUNCIADOS DE PROBLEMAS MODELO	4
§3.1 EQUAÇÃO DE UM CABO	4
§3.2 EQUAÇÃO DE UMA VIGA	5
§4 SOLUÇÕES EXACTAS	5
§5 FORMULAÇÃO FRACA	9
§6 MÉTODO DE GALERKIN	14
§7 FORMULAÇÃO FRACA VARIACIONAL	17
§7.1 INTRODUÇÃO. EXEMPLOS FÍSICOS DE FUNCIONAIS	17
§7.2 MINIMIZAÇÃO DE FUNCIONAIS DE ENERGIA	18
§8 MÉTODO DE RITZ	20
§9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS	22
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	24
SUGESTÕES/SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS	24

§1 Introdução

Com este primeiro volume desta colecção pretende-se introduzir alguns conceitos importantes que encontraremos quando estudarmos o método dos elementos finitos, MEF, propriamente dito. Na literatura sobre este tema, podemos encontrar diferentes relações entre o MEF, método de Galerkin, método de Ritz. Ao longo de todo este texto vamos “admitir” que são métodos diferentes embora estejam relacionados de uma forma bem definida. Neste primeiro volume vamos estudar o método de Galerkin e o método de Ritz. Pretende-se assim introduzir o MEF que é o objecto desta colecção.

§2 Formulação Clássica

Neste capítulo vamos recordar os problemas de valores de fronteira que podem ser traduzidos por uma equação diferencial ordinária (edo) de 2ª ordem. Num volume extra desta colecção faremos uma “adaptação” para problemas de 4ª ordem, igualmente necessários para descrever fenómenos em engenharia e na ciência em geral.

§2.0 Origem Física

As áreas da ciência onde estes problemas aparecem são as mais variadas, mas destacamos aquelas que também usaremos para exemplificar, problemas de elasticidade linear: vigas, placas; condução de calor: transiente e estacionária; etc.. As equações diferenciais aparecem sempre como resultado de um balanço e o recurso a uma lei de “conservação”, e.g. a equação (de condução) do calor surge da aplicação da 1ª lei da termodinâmica, conservação de energia.

§2.1 Equações

Os problemas que se pretendem estudar apresentam a seguinte formulação clássica ou forte:

“Determinar a função $u = u(x)$ que satisfaça a seguinte equação diferencial de 2ª ordem:

$$a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l) \quad (2.1)$$

e as seguintes condições de fronteira:

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_0, \quad x = 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha_l u'(l) + \beta_l u(l) = \gamma_l, \quad x = l \quad (2.3)$$

em que:

- $u = u(x)$ é a função incógnita, ou variável dependente;
- x é a variável independente;
- $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ bem como $f(x)$ são funções conhecidas;
- $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ e $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ são constantes dadas, algumas poderão ser nulas.

A equação (2.1) pode ou não descrever um fenómeno físico, neste texto embora tentemos dar uma boa componente “física” das questões, em geral, este aspecto não nos limita de estudarmos problemas mais abstractos. A convenção que usaremos neste texto conduz a uma forma equivalente à equação (2.1):

$$-\left[k(x)u'(x)\right]' + c(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l) \quad (2.4)$$

EP2.1: Verifique a seguinte correspondência entre as equações (2.1) e (2.4): $a_2(x) = -k(x)$, $a_1(x) = (c(x) - k'(x))$ e $a_0(x) = b(x)$.

A edo (2.4) quando interpretada no sentido “clássico”¹ exige “demasiada” regularidade dos dados, excluindo deste modo muitas situações com interesse físico, senão mesmo todas, que podemos encontrar mormente em engenharia, nomeadamente aquelas em que a expressão de $f(x)$ é da forma²:

$$f(x) = \underbrace{\bar{f}(x)}_{\substack{\text{parte regular} \\ \text{das fontes}}} + \sum_{i=1}^m \hat{f}_i \underbrace{\delta(x-x_i)}_{\substack{\text{função delta} \\ \text{de Dirac}}}$$

§2.2 Condições de Fronteira

Definição 2.1: “Em cada ponto da fronteira do domínio temos uma condição de fronteira de um dos dois tipos de c.f.’s que podemos encontrar:

i. **Condições de Fronteira Essenciais** ou c.f.’s de Dirichlet, vulgarmente designadas por c.f.’s de “função imposta”, em que o valor da função incógnita é conhecido (imposto). São condições do tipo $u(0) = u_0$ com u_0 conhecido;

ii. **Condições de Fronteira Naturais**, quando em vez de se conhecer o valor da incógnita se conhece o da derivada. Dentro destas podemos ter duas situações (bem) distintas:

¹ Vamos “aos poucos” tentando explicar este significado.

² Esta colecção tem um volume sobre funções especiais.

- **Condição de fronteira de Neumann:** vulgarmente designadas por c.f. de “fluxo imposto”, que correspondem a impor o valor da derivada da função incógnita e.g. $u'(0) = c^{te}$;

- **Condição de fronteira de Robin:** a derivada é conhecida mas em função do valor da incógnita nesse mesmo ponto, e.g. $u'(0) = -u(0)$.

A partir destas definições, a cada conjunto de equação diferencial e condições de fronteira daremos uma das seguintes designações.

- **Problema de Dirichlet:** o facto de a solução ser conhecida na fronteira leva a que nestes pontos não seja necessário determinar a solução, com as implicações computacionais que daqui resultam;

- **Problema de Neumann:** quando em todos os pontos da fronteira as c.f.'s levam a que o fluxo seja conhecido. Este tipo de problemas nunca pode ser possível e determinado, i.e., ou é impossível ou é indeterminado. Assim quando tem solução esta não é única. Para que a solução exista e necessário que os dados verifiquem a equação de compatibilidade (2.6). A solução pode desta forma ser determinada a menos de uma referência que se fixe.

Dizemos que estamos com um problema de c.f.'s mistas quando numa porção da fronteira temos c.f.'s naturais e noutra c.f.'s essenciais.

Definição 2.2: Fluxo

“Atendendo à convenção (2.4) define-se fluxo de uma função $u(x)$ num ponto a por:

$$\sigma(a) \equiv -k(a) \frac{du}{dx}(a) \quad (2.5)$$

Definição 2.3: Equação de Compatibilidade

“Os dados de um problema têm sempre que verificar a seguinte equação de compatibilidade:

$$\sigma(x=l) - \sigma(x=0) \equiv \int_0^l f(x) dx \quad (2.6)$$

Esta equação só tem que ser explicitamente verificada quando ambas as c.f.'s são do tipo “fluxo imposto”- Problema de Neumann- pois neste caso os fluxos impostos e as c.f.'s não são independentes. Fisicamente corresponde a ter que verificar uma lei universal, e.g. num problema térmico: conservação de energia.

§2.3 Condições de Salto num Ponto Interior do Domínio

Definição 2.4: Salto

“Para uma função $u(x)$, definida num aberto (a,b) , define-se salto de $u(x)$ num ponto $c \in \text{Int}(a,b)$, por:

$$\llbracket u(c) \rrbracket \equiv \lim_{b \rightarrow c^+} u(b) - \lim_{a \rightarrow c^-} u(a) \quad (2.7)$$

Teorema 2.5:

“Nos pontos $y \in \text{Int}(a,b)$ onde u for contínua o salto é nulo, $\llbracket u(y) \rrbracket = 0$ ”.

Resultado que advém da definição de limite de uma função real de variável real. Podemos adiantar que as descontinuidades no fluxo são iguais, às singularidades das fontes, i.e.,

$$\llbracket \sigma(x_i) \rrbracket = \hat{f}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

§3 Enunciados de Problemas Modelo

§3.1 Equação de um cabo

Vejamos um primeiro exemplo físico descrito por uma edo de 2ª ordem: equação de equilíbrio estático de um cabo de comprimento L sujeito ao peso próprio e a uma carga concentrada P , localizada em $x=a < L$ é:

$$-\frac{d}{dx} \left(AT \frac{du}{dx} \right) = A\rho g + P\delta(x-a); \quad u(0) = u(L) = 0$$

em que:

$u \equiv$ deslocamento vertical do cabo

$A \equiv$ área transversal do cabo

$\rho \equiv$ massa específica do cabo

$g \equiv$ aceleração da gravidade

$T \equiv$ tensão no cabo, por hipótese, constante.

EP3.1: Faça corresponder cada um dos coeficientes de (2.4) com esta e.d.o..

§3.2 Equação de uma viga

Vejam os um segundo exemplo físico, agora descrito por uma equação de 4ª ordem, o modelo estrutural viga de *Euler-Bernoulli* descrito pela edo:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x) \right] + f(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

em que $w(x)$ representa a deformada, L representa o comprimento, EI representa a rigidez à flexão³ e $f(x)$ representa o carregamento distribuído. Na realidade, recordado que o momento flector é dado por $M(x) = EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x)$, podemos estudar este problema de 4ª ordem como dois problemas de 2ª ordem separados. Resolve-se primeiro o problema para o momento flector: $-\frac{d^2 M}{dx^2} = f(x)$, uma vez conhecida a distribuição do momento flector podemos resolver o problema da deformada: $EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x) = M(x)$.

§4 Soluções Exactas

Obter soluções exactas para a equação (2.4) não é o objectivo deste texto⁴. Mas como inicialmente queremos comparar as soluções (aproximadas) obtidas pelos métodos numéricos que vamos estudar, com as soluções exactas correspondentes.

Caso 1 - Um caso (muito) particular $c(x) = 0$ e $b(x) = 0$.

Neste caso ficamos reduzidos a $-[k(x)u'(x)]' = f(x)$ pelo que a solução desta equação se reduz à resolução da equação diferencial de primeira ordem seguinte:

$$-[k(x)u'(x)]' = \int f(x)dx + a$$

Caso 2 - A equação tem os termos todos constantes.

Como se trata de uma equação linear a solução geral pode ser determinada da seguinte forma: $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$. Em que $u_h(x)$ é a solução da equação homogénea correspondente, i.e., $-[k(x)u_h'(x)]' + c(x)u_h'(x) + b(x)u_h(x) = 0$ e $u_p(x)$

³ E representa o Módulo de Elasticidade Linear e I o segundo momento de área ou segundo momento estático, muitas vezes incorrectamente designado por momento de inércia.

⁴ Ver volume desta colecção sobre resolução exacta de edo's de 2ª ordem.

uma solução particular dada⁵. Os métodos para obter soluções particulares são vários e vamos estudar um que nos permitirá resolver os problemas em que estamos interessados.

Exemplo 4.1: Determine a solução analítica do problema de Dirichlet:

$$-u''(x) + u(x) = x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Nota Inicial: Trata-se de uma edo com os coeficientes constantes.

Resolução:

Sabemos que: $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$

i. $u_h(x) = ?$, que representa a expressão geral da solução da equação homogénea correspondente. À equação diferencial deste problema corresponde a seguinte equação homogénea:

$$-u_h''(x) + u_h(x) = 0,$$

à qual podemos associar a equação característica: $-\lambda^2 + \lambda^0 = 0$, para a qual as soluções são reais: $\lambda = \pm 1$, pelo que a forma geral da solução da equação homogénea é:

$$u_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

ii. $u_p(x) = ?$. Qualquer uma que seja solução⁶, e.g., $u_p(x) = x$

iii. $u(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x$

iv. $C_1 = ?$, $C_2 = ?$, atendendo as condições de fronteira fornecidas com o enunciado.

$$\begin{cases} u(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ u(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1/2 \sinh 1 \\ C_2 = 1/2 \sinh 1 \end{cases}$$

$$v. u(x) = -\frac{1}{2 \sinh 1} e^x + \frac{1}{2 \sinh 1} e^{-x} + x = -\frac{1}{2 \sinh 1} (e^x - e^{-x}) + x = x - \frac{\sinh x}{\sinh 1}$$

Nota Final: a análise matemática fornece-nos resultados⁷ para encontrar a solução particular, e.g. o Método dos Coeficientes Indeterminados ou o Método de

⁵ Ou obtida pelos métodos usuais.

⁶ como se pretende uma solução particular, esta não pode "conter" constantes.

⁷ Ver nota 2.

Variação das Constantes (ver o teorema 4.3). Para a generalidade dos casos que vamos estudar vamos admitir que⁸:

"Se o termo não homogéneo da edo é:

- i. um polinómio (em particular uma constante),
- ii. uma combinação linear de "senos" e/ou "co-senos",
- iii. uma exponencial,

então a solução particular também o é ".

Exemplo 4.1 □

Exemplo 4.2: Determine uma solução geral das seguintes edo's:

a. $u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = 0$

b. $u''(x) + 4u'(x) + 4u(x) = 1$

Resolução:

a. Trata-se de uma edo homogénea. A equação característica correspondente é:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Pelo que temos uma raiz de multiplicidade 2 e a solução pretendida é da forma:

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b. Sabemos que a solução geral é da forma: $u(x) = u_h(x) + u_p(x)$ em que $u_h(x)$, representa a solução da equação homogénea correspondente, determinada na alínea anterior. Nesta alínea $f(x) = 1$, é um polinómio pelo que vamos para a solução particular na forma: $u_p(x) = c$, pois não poderia ser uma função do primeiro grau. A introdução desta expressão na edo dada conduz a:

$$4c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4}.$$

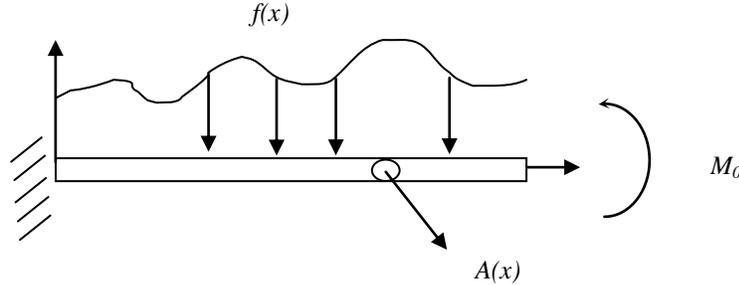
Conclusão: a solução geral é: $u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}, \forall_{x \in \mathbb{R}}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Nota final: Uma simples inspecção conduziria à mesma conclusão.

Exemplo 4.2 □

⁸ Não são teoremas, são apenas "ferramentas" para encontrar rapidamente uma solução particular não sendo de aplicação geral.

EP4.1: Considere o modelo estrutural viga de Euler-Bernoulli descrito pela edo apresentada em (§3.2) para a situação que se esquematiza:



Em que comprimento L , rigidez à flexão EI e carregamento distribuído f_0 , constantes.

i. estabeleça as c.f.'s adequadas à situação descrita. Recorde que o momento flector é dado por: $M(x) = EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x)$ e que o esforço transversal é dado por:

$$V(x) = \frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2}(x) \right].$$

ii. resolva exactamente a edo com as c.f.'s de i..

Teorema 4.3: Método de Variação das Constantes

“Se $u_1(x)$ e $u_2(x)$ forem soluções independentes da equação diferencial homogénea $u''_h(x) + au'_h(x) + bu_h(x) = 0$, correspondente à equação diferencial não-homogénea, $u''(x) + au'(x) + bu(x) = h(x)$, então a edo tem uma solução particular dada por:

$$u_p(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$

Em que:

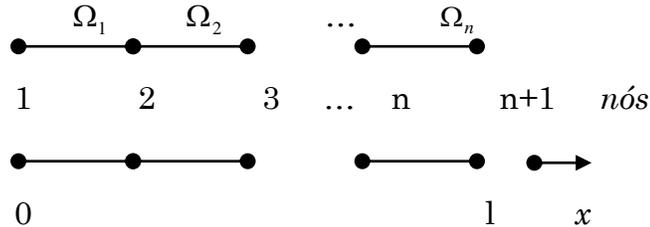
$$c_1(x) = -\int u_2(x) \frac{h(x)}{u_1(x)u'_2(x) - u_2(x)u'_1(x)} dx; \quad c_2(x) = \int u_1(x) \frac{h(x)}{u_1(x)u'_2(x) - u_2(x)u'_1(x)} dx”.$$

§5 Formulação Fraca

Como já foi referido as formulações fortes ou clássicas exigem demasiada regularidade dos dados. Para contornar esta dificuldade, utilizam-se formulações fracas ou variacionais. Que neste texto são duas formas distintas de chegar ao mesmo resultado⁹, note que algumas referências não fazem esta distinção, podendo tornar a abordagem inicial um pouco confusa. As formulações fracas são construídas por forma a que coincidam com as clássicas sempre que estas últimas tenham sentido. Note bem: geralmente tanto as soluções clássicas como as fracas, não são em geral conhecidas exactamente. Mesmo para as soluções fracas o que se pretende obter são (“boas”) aproximações. A formulação fraca que em seguida se descreve é intercalada com as definições directamente relacionadas, mas que não fazem parte da f.f. propriamente dita.

Formulação Fraca (“passo-a-passo”):

i. constrói-se a função resíduo: $r(x) = \underbrace{-(k(x)u'(x))' + c(x)u'(x) + b(x)u(x)}_{1^\circ \text{ membro}} - \underbrace{f(x)}_{2^\circ \text{ membro}}$, a qual verifica $r(x) = 0$, nos pontos (interiores) onde os dados são regulares. Admite-se o domínio $\Omega =]0, l[$ dividido em n troços nos quais os dados são regulares, i.e., $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$. A n troços correspondem, naturalmente, $n+1$ nós.



ii. considerando uma função $v(x)$, que designaremos por função de teste, suficientemente regular em Ω , vamos ponderar o resíduo definido anteriormente.

Definição 5.1: Resíduo Médio

“Usando funções $v(x)$ para ponderar o resíduo, define-se resíduo médio pelo rácio:

$$\bar{r}(x) \equiv \frac{\int_{\Omega} r(x)v(x)dx}{\int_{\Omega} v(x)dx} \tag{5.1}$$

⁹ Para os casos em que ambas sejam aplicáveis.

Para que o resíduo seja nulo em média é necessário que o numerador de (5.1) seja nulo, i.e.,

$$\int_{\Omega} r(x)v(x)dx = 0, \quad \forall_{v \text{ "suficiente regular"}}, \quad \Omega =]0, l[.$$

iii. integra-se por partes¹⁰ o termo de segunda ordem, que para um troço fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} r(x)v(x)dx & \stackrel{\text{integração}}{=} \stackrel{\text{por partes}}{=} \\ & = \left[- (k(x)u'(x)v(x)) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (k(x)u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + b(x)u(x)v(x) - f(x)v(x))dx \end{aligned}$$

pelo que obrigando a que o resíduo total se anule “em média”, vem que:

$$\int_{\Omega} r(x)v(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} r(x)v(x)dx = 0,$$

que após alguma álgebra conduz a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} (k(x)u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + b(x)u(x)v(x))dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} f(x)v(x)dx + k(0)u'(0)v(0) + \\ & k(l)u'(l)v(l) + \left[k(x_1)u'(x_1) \right] v(x_1) + \dots + \left[k(x_{n-1})u'(x_1) \right] v(x_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Com a i.p.p. conseguimos: menos regularidade exigida aos dados, em particular a u e igual regularidade pedida a u e a v , pelo que podem pertencer ao mesmo espaço de funções.

Admitindo as fontes $f = f(x)$ separadas na “parte regular” das fontes, $\bar{f}(x)$, e nas “singularidades” nas fontes, i.e.: $f = f(x) = \bar{f}(x) + \hat{f}_1 \delta(x - x_1) + \dots + \hat{f}_{n-1} \delta(x - x_{n-1})$ e as condições de fronteira na forma:

$$u'(0) = \frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0} \quad (5.2)$$

$$u'(l) = \frac{\gamma_l - \beta_l u(l)}{\alpha_l} \quad (5.3)$$

¹⁰ recorde que: $\int_a^b fg dx = [fg]_{x=a}^b - \int_a^b f'g dx$, é a fórmula de integração por partes (i.p.p.).

Definição 5.2: Espaços de Sobolev

“O espaço de Sobolev de ordem p , $p \in \mathbb{N}$, denotado por $H^p(\Omega)$ é o conjunto:

$$H^p(\Omega) = \{w : D^k w \in L^2(\Omega), k = 0, \dots, p\}.”$$

Por palavras, $H^p(\Omega)$ é o conjunto formado por todas as funções com derivadas de quadrado integrável até à ordem p .

Definição 5.3:

“Seja $\partial\Omega$ a fronteira de Ω . Define-se o conjunto:

$$H_0^p(\Omega) = \{w \in H^p : D^k(\partial\Omega) = 0, k = 0, \dots, p-1\}.”$$

Neste texto daremos especial atenção às edo's de 2ª ordem pelo que vamos particularizar as definições anteriores para $p=1$.

Definição 5.4: Espaço H^1

“Espaço das funções de quadrado integrável e com derivadas de quadrado integrável,

$$H^1(\Omega) = \left\{ w : \int_0^l [(w')^2 + w^2] dx \right\}.”$$

Definição 5.5: Espaço H_0^1

$$“ H_0^1(\Omega) = \{w : w \in H^1 \wedge w(0) = w(l) = 0\}.”$$

iv. Em termos conclusivos a formulação fraca pretendida é:

“Determinar uma função $u = u(x) \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} (k(x)u'(x)v'(x) + c(x)u'(x)v(x) + b(x)u(x)v(x))dx = \int_{\Omega} \bar{f}(x)v(x)dx + \hat{f}_1 v(x_1) + \dots + \hat{f}_{n-1} v(x_{n-1}) + k(l) \left(\frac{\gamma_l - \beta_l u(l)}{\alpha_l} \right) v(l) - k(0) \left(\frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0} \right) v(0), \quad (5.4)$$

se verifique para todas as funções $v = v(x) \in H^1(\Omega)$ ”. Note que para funções admissíveis é suficiente exigir que u e v pertençam ao espaço $H^1(\Omega)$.

É importante referir que o procedimento anterior é apenas válido para o caso de condições de fronteira naturais, para outras c.f.'s, é necessário considerar umas pequenas alterações, apenas em termos de condições adicionais que podem ser necessárias impor a u e v . As alterações a realizar são apenas na expressão final (5.4).

-Problema de Dirichlet: neste problema como conhecemos o valor da solução na fronteira, e não os valores da derivada que aparecem na solução “obrigamos” a que a função de teste seja nula nestes pontos para que possamos determinar uma solução com a f.f. encontrada. Os valores da incógnita são impostos “à parte”;

-Problema de Neumann: como já foi referido para que a solução exista e necessário que os dados verifiquem a equação de compatibilidade (2.6). Esta equação que foi introduzida como uma definição, pode ser obtida a partir da formulação fraca fazendo $v(x)=1$, ou qualquer outra constante. A solução pode desta forma ser determinada a menos de uma referência que se fixe;

- Condições de fronteira naturais: sem ser um problema de Neumann, então conhecemos o valor da derivada nesses pontos e introduzimo-lo na própria formulação, não sendo por isso necessário impor nada as funções de tentativa.

Uma das características mais importantes que uma f.f. pode apresentar é o facto de ser ou não simétrica, o que motiva a seguinte definição.

Definição 5.6: Formulação Fraca Simétrica

“Uma formulação diz-se simétrica se não existir o termo $c(x)u'(x)v(x)$, i.e., se $c(x) = 0$ ”.

Este aspecto terá vantagens computacionais inerentes quando se pretender obter soluções numéricas a partir destas formulações fracas. Bem como terá uma grande importância quando se pretender obter soluções usando métodos variacionais.

EP5.1: Sem construir a formulação explique porque a seguinte equação diferencial conduz a uma formulação fraca simétrica:

$$-xu''(x) - u'(x) + xu(x) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad u(0) = u(l) = 0$$

Sugestão: Coloque a edo na forma da equação (2.4) e identifique o $c(x)$ deste problema.

Exemplo 5.2: Mostre que uma formulação fraca do problema de valores de fronteira definido pela equação diferencial:

$$-x u''(x) - u'(x) + u(x) = \sin x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

é a seguinte:

$$\text{"Determinar } u \in H_0^1 : \int_0^1 (x u' v' + u v - v \sin x) dx = 0, \quad \forall_{v \in H_0^1} \text{"}$$

Resolução:

A construção da formulação segue o procedimento habitual:

i. função resíduo: $r(x) = \underbrace{-x u''(x) - u'(x) + u(x)}_{1^\circ \text{ membro}} - \underbrace{\sin x}_{2^\circ \text{ membro}}$

ii. ponderar o resíduo: $\int_{\Omega} r(x) v(x) dx = 0, \quad \forall_{v \text{ "suficiente regular"}}, \quad \Omega =]0,1[$

iii. $\int_0^1 (-x u'' - u' + u - \sin x) v(x) dx = 0$, integra-se por partes o termo de segunda ordem,

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x u' v' + u' v' - u' v' + u v - v \sin x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x u' v' + u v - v \sin x) dx = 0,$$

Q.E.D.

Nota final: a formulação fraca obtida é simétrica, embora a equação diferencial apresenta-se um termo em u' . Porquê? Porque poderíamos ter colocado a edo na forma $-[x u'(x)]' + u(x) = \sin x$, que permite concluir imediatamente que $c(x) = 0$.

Exemplo 5.2 □

EP5.2: Estabeleça as f.f.'s correspondentes aos problemas modelo (§3.1 e §3.2), indicando os espaços de funções tentativa e teste admissíveis. Tome especial atenção ao (§3.2), no qual necessitará de efectuar duas integrações por partes (definições 5.2 e 5.3 com $p=2$).

§6 Método de Galerkin

Definição 6.1: Base de H^1

“Um conjunto de funções $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$ forma uma base de H^1 se:

- i. $\phi_i \in H^1$, $i = 1, \dots, n, \dots$;
- ii. os ϕ_i 's permitirem satisfazer as c.f.'s essenciais;
- iii. os ϕ_i 's forem linearmente independentes;
- iv. toda a função $v \in H^1$ se pode exprimir por: $v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \phi_i(x)$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ ”.

Note que H^1 é um espaço (de funções) de dimensão infinita.

O método de *Galerkin* consiste em procurar uma solução aproximada para a nossa incógnita u , num sub-espaço n -dimensional de H^1 , este de dimensão finita, em vez de procurar a solução exacta deste problema, mesmo que ela exista. Denotando por $H_{(n)}^1$ o sub-espaço em questão. Podemos agora escrever as formas aproximadas para a função incógnita e para a função tentativa:

$$v_n(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i(x) \text{ e } u_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \quad (6.1)$$

em vez das séries que representam a solução exacta. Note que $u_n(x)$ e $v_n(x)$ pertencem ao mesmo espaço e foram escritas recorrendo à mesma base. A formulação fraca (5.2) é substituída pela seguinte formulação:

“Determinar uma função $u_n \in H_{(n)}^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} (k(x)u_n'(x)v_n'(x) + c(x)u_n'(x)v_n(x) + b(x)u_n(x)v_n(x))dx = \int_{\Omega} \bar{f}(x)v_n(x)dx + \hat{f}_1 v_n(x_1) + \dots + \hat{f}_{n-1} v_n(x_{n-1}) + k(l) \left(\frac{\gamma_l - \beta_l u_n(l)}{\alpha_l} \right) v_n(l) - k(0) \left(\frac{\gamma_0 - \beta_0 u_n(0)}{\alpha_0} \right) v_n(0), \quad (6.2)$$

se verifique para todas as funções $v = v_n(x) \in H_{(n)}^1(\Omega)$ ”.

Como os ϕ_i 's são conhecidos, este problema fica reduzido a determinar os coeficientes α_i 's. Note-se que em todos os termos existe $v_n(x)$ ou $v_n'(x)$ pelo que os coeficientes β_i 's não influenciam, naturalmente, a solução. A estes coeficientes α_i 's é usual designar por graus de liberdade (g.l.) da aproximação construída.

Introduzindo (6.1) em (6.2) obtemos um sistema de equações lineares na forma:

$$K_{ij}\alpha_j = F_i, \quad (6.3)$$

com:

$$K_{ij} = \int_0^l (k(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + c(x)\phi'_j(x)\phi_i(x) + b(x)\phi_i(x)\phi_j(x))dx + \dots \quad (6.4)$$

$$F_i = \int_0^l \bar{f}(x)\phi_i dx + \dots \quad (6.5)$$

Exemplo 6.1: Considere a aproximação de *Galerkin*:

$$\int_0^1 (u'_N v'_N + u_N v_N) dx = \int_0^1 (x v_N) dx, \quad \forall_{v_N \in H_0^{(N)}},$$

Seja $N=3$ e escolha-se $\phi_i(x) = \sin i\pi x$, $i=1,2,3$.

- calcule K_{ij} e F_i .
- resolva o sistema construído.
- construa uma solução aproximada deste problema com os coeficientes encontrados.
- os coeficientes determinados em b. são valores nodais? Justifique.

Resolução: A partir da formulação fraca dada obtemos que para este problema¹¹:

$$k(x)=1, \quad c(x)=0, \quad b(x)=1 \text{ e } f(x)=\bar{f}(x)=x.$$

$$\text{a. Matriz de rigidez, } K_{ij} = \int_0^1 (\phi'_i \phi'_j + \phi_i \phi_j) dx = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2 + 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\pi^2 + 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi^2 + 1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Vector de carga, } F_i = \int_0^1 x \phi_i(x) dx = \begin{bmatrix} 1/\pi \\ -1/2\pi \\ -1/3\pi \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \alpha_1 = 2/(\pi^3 + \pi), \quad \alpha_2 = -1/(4\pi^3 + \pi), \quad \alpha_3 = 2/(12\pi^3 + 3\pi)$$

$$\text{c. } u_h(x) = \frac{2}{\pi^3 + \pi} \sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3 + \pi} \sin(2\pi x) + \frac{2}{12\pi^3 + 3\pi} \sin(3\pi x)$$

d. naturalmente não.

¹¹ por comparação com 6.2.

Notas finais:

- i. a diferença entre a aproximação de *Galerkin*¹² e o M.E.F. propriamente dito é que no 1º caso as funções de base são admitidas (fornecidas), ao passo que no 2º caso as funções de base são construídas;
- ii. neste exercício assumiu-se $\phi_i(x) = \sin(i\pi x)$, $i=1,2,3$, estas funções não são funções de base no sentido do MEF;
- iii. a matriz K é diagonal por “coincidência”, i.e., em geral não é diagonal, neste caso é devido à ortogonalidade das funções escolhidas;
- iv. em a usou-se $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$; $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ para calcular as primitivas:

$$P[\sin^2 x] = P\left[\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right] = \frac{x - \sin(2x)/2}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$$

$$P\left[\sin(\pi x) \underbrace{\sin(2\pi x)}_{2\sin(\pi x)\cos(\pi x)}\right] = P[2\sin^2(\pi x)\cos(\pi x)] = 2\sin^3(\pi x)/3$$

Exemplo 6.1 □

EP 6.1: Pretende-se resolver aproximadamente o problema modelo (§3) pelo método de *Galerkin*, utilizando para funções de aproximação/interpolação:

$$\phi_1(x) = \sin \pi x \quad \text{e} \quad \phi_2(x) = \sin 2\pi x$$

- a. justifique que estas funções são admissíveis para resolver este problema;
- b. estabeleça o sistema que permite obter a solução numérica aproximada.

¹² e analogamente, para os casos em que seja aplicável, aproximação de *Ritz*.

§7 Formulação Fraca Variacional

§7.1 Introdução. Exemplos físicos de funcionais

Exemplo 7.1: Considere uma barra perfeitamente elástica de secção transversal com área $A(x)$ e módulo de elasticidade¹³ E , com deslocamento longitudinal $u(x)$. Tem apenas uma extensão: $\varepsilon_{xx} = u'(x)$ e a correspondente tensão: $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Eu'(x)$, pelo que a energia de deformação é:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \left(E[u'(x)]^2 \left(\iint_{A(x)} 1 dA \right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (EA(x)[u'(x)]^2) dx$$

Note que neste exemplo $dA = dydz$.

Exemplo 7.1 □

Exemplo 7.2: Considere o modelo estrutural à flexão: viga de *Euler-Bernoulli*¹⁴. Este modelo simplificado¹⁵ é adequado à análise de vigas esbeltas, diz-nos que os deslocamentos elásticos são:

$$u = -zw'(x); \quad v = 0; \quad w = w(x)$$

A única extensão não nula é: $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw''(x)$

e a correspondente tensão: $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ezw''(x)$. A energia de deformação da viga é:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \left(E[w''(x)]^2 \left(\iint_{A(x)} z^2 dA \right) \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (E[w''(x)]^2 I(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^l (EI(x)[w''(x)]^2) dx$$

Em que $I(x) = \iint_{A(x)} z^2 dA$ é o segundo momento de área¹⁶, portanto uma

propriedade geométrica, muitas vezes incorrectamente designado momento de inércia (que em particular depende do tipo de material-distribuição de massa).

Exemplo 7.2 □

¹³ Módulo de Young, após Thomas Young, 1773-1829.

¹⁴ Leonhard Euler (1707-1783) e Daniel Bernoulli (1700-1782).

¹⁵ Estudado em disciplinas de Mecânica dos Materiais.

¹⁶ Em bibliografia de Mecânica é ainda designado por 2º momento estático.

§7.2 Minimização de funcionais de energia

Depois de termos estabelecido funcionais de energia para dois casos muito conhecidos, da mecânica (dos materiais) vamos fazer um estudo destas entidades matemáticas.

Genericamente considere-se a seguinte expressão onde $v \in H_0^1$:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l (k(v')^2 + bv^2 - 2fv) dx. \quad (7.1)$$

A expressão (7.1) permite associar a cada função $v(x)$, um número real, $J(v)$. Um operador que transforma funções de um espaço (linear) de funções em valores reais designa-se por funcional (real). Um funcional é uma “função de funções”.

Pretende-se resolver o seguinte problema:

“Determinar a função $u \in H_0^1$ que minimiza o valor do funcional $J(v)$ dado pela expressão (7.1)”. Por outras palavras, pretende-se procurar $u \in H_0^1$ tal que $J(u) \leq J(v)$, $\forall v \in H_0^1$.

Notando que qualquer função do espaço admissível, i.e. neste caso $\eta \in H_0^1$, se pode escrever na forma: $\eta(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$

com :

- $u(x) \rightarrow$ função que minimiza J ;
- $v(x) \rightarrow$ qualquer função pertencente ao espaço admissível;
- $\varepsilon > 0 \rightarrow$ perturbação tão pequena quanto se queira, número real.

Neste caso é equivalente escrever:

$$J(u) \leq J(\eta), \quad \forall \eta \in H_0^1 \quad \text{ou} \quad J(u) \leq J(u + \varepsilon v), \quad \forall v \in H_0^1.$$

Recorrendo à expressão (7.1) pode-se escrever:

$$J(\eta) = J(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2} \int_0^l (k(u' + \varepsilon v')^2 + b(u + \varepsilon v)^2 - 2f(u + \varepsilon v)) dx$$

desenvolvendo esta expressão obtém-se:

$$\begin{aligned} J(u + \varepsilon v) &= J(u) + \varepsilon \int_0^l (ku'v' + buv - fv) dx + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^l (k(v')^2 + bv^2) dx \\ &= J(u) + \delta J(u) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2} \delta^2 J(u) \cdot \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Em que se obteve as variações a partir de (7.1):

$$\delta J(u) \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} J(u) \right]_{\varepsilon=0} = \int_0^l (ku'v' + buv - fv) dx \quad (7.3)$$

$$\delta^2 J(u) \equiv \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(u) \right]_{\varepsilon=0} = \int_0^l (k(v')^2 + bv^2) dx \quad (7.4)$$

Para que u seja um minimizador do funcional $J(u)$, é condição necessária que:

$$\delta J(u) = 0 \Leftrightarrow \int_0^l (ku'v' + buv) dx = \int_0^l fv dx, \quad v \in H_0^1 \quad (7.5)$$

Todo este estudo foi para chegar exactamente a este ponto, pois esta expressão foi obtida como a minimização de um funcional corresponde à formulação fraca do problema:

$$\begin{cases} -(ku')' + bu = f, & x \in (0, l) \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases} \quad (7.6)$$

A expressão (7.5) designa-se por formulação (fraca) variacional do problema (7.6). A condição (7.5) garante apenas que u é um ponto de estacionaridade de J . É necessário verificar se $\delta^2 J(u) > 0$, o que facilmente se conclui observando (7.4).

EP7.1: Obtenha o problema de valores de fronteira que caracteriza o mínimo do seguinte funcional de energia:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (k(v')^2 + bv^2 - 2fv) dx + \frac{1}{2} \beta_0 [v(0)]^2 - \frac{1}{2} \beta_l [v(l)]^2 - v(0)\gamma_0 - v(l)\gamma_l.$$

§8 Método de Ritz

Com a função u obtida no ponto anterior, que minimiza o funcional J em todo o espaço $v \in H_0^1$, podemos obter um minimizador aproximado não em todo H_0^1 , mas num sub-espaço $H_{(N)}^1$ de H_0^1 . Nestas condições substituindo: $u_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$ na expressão do funcional obtém-se:

$$J(u_h) = \frac{1}{2} \int_0^l (k(u_h')^2 + bu_h^2 - 2fu_h) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_i k_{ij} \alpha_j - \sum_i F_i \alpha_i \quad (8.1)$$

em que:

$$\text{Matriz de rigidez, } K_{ij} = \int_0^l (k(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) + b(x)\phi_i(x)\phi_j(x)) dx \quad (8.2)$$

$$\text{Vector de carga, } F_i = \int_0^l \bar{f}(x)\phi_i dx \quad (8.3)$$

Como os ϕ_i 's são conhecidos, este problema fica reduzido a determinar os coeficientes α_i 's. A estes coeficientes α_i 's é usual designar por graus de liberdade (g.l.) da aproximação construída.

A solução (aproximada) pretendida obtém-se para a minimização de (8.1):

$$\frac{\partial J(u_h)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.4)$$

i.e., todas as derivadas parciais da expressão (8.1) em ordem aos g.l.'s, α_i , têm que ser nulas.

O que conduz ao sistema de equações lineares:

$$K_{ij} \alpha_j = F_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.5)$$

Este processo de construir soluções aproximadas de equações diferenciais através da minimização (num sub-espaço apropriado) do funcional associado à equação diferencial é conhecido como Método de Ritz. O Método de Ritz é de aplicação mais restrita do que o Método de Galerkin, porque não é possível associar a todas as equações diferenciais um funcional. Para aplicar o método de Ritz e/ou obter uma formulação variacional é necessário ter o funcional. Para os casos em que este não seja fornecido podemos estabelecê-lo por: (i) comparação com as expressões (2.4) e (8.1); (ii) adaptação a partir da f.f. correspondente na qual um dos membros da equação é nulo, e substituímos u por $v/2$ no membro não nulo da f.f. obtendo-se o $J = J(v)$.

EP8.1: Um veio de aço de diâmetro $D=2\text{cm}$, comprimento $L=25\text{cm}$, condutibilidade térmica $k=50\text{ W/mK}$, é exposto ao ar ambiente ($T_\infty = 25^\circ$), sendo $\beta = 64\text{ W/m}^2\text{K}$ o coeficiente de convecção. A extremidade esquerda do veio é mantida a $T=125^\circ\text{C}$ e a outra é exposta ao ar. O problema é descrito pelas equações:

$$-\frac{d^2\theta}{dx^2}(x) + c\theta(x) = 0 \quad (1)$$

$$0 < x < L, \quad \theta(0) = T(0) - T_\infty = 100^\circ\text{C}, \quad k \frac{d\theta(x)}{dx} + \beta\theta \Big|_{x=L} = 0, \quad c \equiv \frac{4\beta}{kD} = 256\text{m}^{-2}$$

Determine a distribuição de temperaturas usando a aproximação:

$$\theta_h(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \quad (2)$$

usando o método de:

- a. *Galerkin*
- b. *Ritz*

§9 Exercícios Propostos

EP9.1. Considere o seguinte problema de valores de fronteira

$$-u''(x) + u(x) = \delta(x - 1/2); \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0$$

- calcule u .
- esboce os gráficos de u , u' e u'' , recorrendo a um programa comercial¹⁷.
- a formulação clássica ou forte deste problema faz sentido em $x = 1/2$?

EP9.2. a. Construa uma formulação fraca apropriada do problema:

$$-u''(x) = \delta(x - 1/2); \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0.$$

b. verifique que a solução $u \in H_0^1(]0,1[)$.

EP9.3. Construa formulações fracas para os seguintes problemas:

a. $-(ku')' + u' + u = 0; \quad 0 < x < 1; \quad 1 < x < 2; \quad 2 < x < 3; \quad 3 < x < 4;$

$$\begin{aligned} \llbracket k(1)u'(1) \rrbracket = \llbracket k(2)u'(2) \rrbracket = 0; \quad \llbracket k(3)u'(3) \rrbracket = 10; \\ k(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < 4 \end{cases}; \quad u(0) = 0; \quad u'(4) = 3. \end{aligned}$$

b. $-u'' + u = \delta(1-x); \quad 0 < x < 2; \quad u'(0) = 2; \quad u'(2) + u(2) = 3.$

c. $-u'' + u' = 0; \quad 0 < x < 1; \quad 1 < x < 2; \quad u(0) = u(2) = 0; \quad \llbracket u'(1) \rrbracket = 1.$

EP9.4. Obtenha os problemas de valores de fronteira que caracterizam o mínimo dos seguintes funcionais de energia:

a. $J(v) = \frac{1}{2} \int_0^l [(v')^2 + v^2 - 2fv] dx; \quad v(0) = v(l) = 0.$

b. $J(f) = \frac{1}{2} \int_0^l [(f'')^2 - 2(f')^2 + f^2 - 2gf] dt; \quad f(0) = f'(0) = 0; \quad f(l) = f'(l) = 0.$

¹⁷ E.g. Maple ou Mathematica.

EP9.5. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -((1+x)u')' = \exp x, 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u'(1) = 2 \end{cases}$$

- obtenha e respectiva formulação fraca, indicando as classes de funções teste e tentativa admissíveis.
- pretende-se obter uma solução aproximada da forma:
 $u_n(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$
 É esta forma admissível? Justifique.
- como se obtêm os coeficientes α_i ?
- quais as desvantagens deste tipo de aproximação relativamente ao MEF?

EP9.6. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -(1+t)v'' - v' + v = t^2, 0 < t < 1 \\ v(0) = 0, v'(1) = 0 \end{cases}$$

- estabeleça uma formulação fraca, indicando as classes de funções teste e tentativa admissíveis.
- indique se possível, o funcional de energia que permite resolver o problema aproximadamente usando o método de *Ritz*.

EP9.7. É dado o seguinte problema: $\begin{cases} -((1+x)u')' = \sin x, 0 < x < 1 \\ u'(0) = 0, u'(1) = 1 \end{cases}$

- estabeleça uma formulação fraca, indicando as classes de funções teste e tentativa admissíveis;
- classifique este problema de: *Dirichlet, Neumann ou Robin*;
- comente a afirmação: "Este problema é indeterminado".

EP9.8. Considere a seguinte formulação fraca:

"Determinar $u \in H^1 \wedge u(-1) = 1$, tal que

$$\int_{-1}^{+1} [(x^2 + 1)u'v' + 2uv - xv] dx = v(0) + v(1) - u(1)v(1), \quad \forall v \in H^1 \wedge v(-1) = 0$$

- estabeleça a formulação forte correspondente, indicando o(s) ponto(s) onde esta não tem significado;
- determine um funcional de energia cuja minimização conduz a esta formulação fraca.

Referências Bibliográficas

- [1] Oden, J.T. et al. : *Finite Elements, an Introduction*, Vol. I, Prentice Hall, 1981.
- [2] Reddy, J.N.: *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 2nd Edition, 1986.
- [3] Lebedev, L.P., et al.: *Funcional Analysis: Applications in mechanics and inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

Sugestões/Soluções dos Exercícios Propostos

EP 4.1:

i. Em $x=0$ temos deslocamento nulo ($w(0)=0$) e rotação nula ($w'(0)=0$). Na outra extremidade da viga, $x=L$, temos um momento concentrado aplicado ($M(L)=M_0$ a que por sua vez corresponde $EI(L)w''(L)=M_0 \Leftrightarrow w''(L)=M_0/EI$) e não temos nenhuma força aplicada, pelo que o esforço transversal é nesta extremidade nulo ($V(L)=0 \Leftrightarrow d/dx[EI(L)w''(L)]=0 \Leftrightarrow w''(L)=0$).

ii.
$$w(x) = \frac{2M_0 - f_0L^2}{4EI}x^2 + \frac{f_0L}{6EI}x^3 - \frac{f_0L}{24EI}x^4.$$

EP5.2: Determinar $u \in H_0^1 : \int_0^1 ATu'v'dx = \int_0^1 Apgvdx + Pv(a) = 0, \forall v \in H_0^1.$

EP 7.1: Qualquer função do espaço admissível pode ser representada:

$$\eta(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$$

com :

- $u(x)$ → função que minimiza J

- $v(x)$ → qualquer função pertencente ao espaço admissível

- $\varepsilon > 0$ → perturbação tão pequena quanto se queira.

i)
$$J(\eta) = J(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (k(u' + \varepsilon v')^2 + b(u + \varepsilon v)^2 - 2f(u + \varepsilon v)) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_0 [(u(0) + \varepsilon v(0))]^2 + \frac{1}{2} \beta_l [(u(l) + \varepsilon v(l))]^2 - (u(0) + \varepsilon v(0))\gamma_0 - (u(l) + \varepsilon v(l))\gamma_l$$

ii)
$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (2k(u' + \varepsilon v')v' + 2b(u + \varepsilon v)v - 2fv) dx$$

$$+ \beta_0 [(u(0) + \varepsilon v(0))]v(0) + \beta_l [(u(l) + \varepsilon v(l))]v(l) - v(0)\gamma_0 - v(l)\gamma_l$$

iii) a formulação variacional é obtida fazendo:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \varepsilon}(u + \varepsilon v) \right|_{\varepsilon=0} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (k(u')v' + b(u)v - fv) dx + \beta_0 u(0)v(0) - \gamma_0 v(0) + \beta_l u(l)v(l) - \gamma_l v(l) = 0$$

usando agora a fórmula da integração por partes "ao contrário", obtém-se a formulação forte:

- equação diferencial: $-ku'' + bu = f$

- condições de fronteira: $u'(0) = \frac{1}{k}[\beta_0 u(0) - \gamma_0]$, $u'(l) = -\frac{1}{k}[\beta_l u(l) - \gamma_l]$.

EP 8.1:

a. o primeiro passo do método de *Galerkin* é a construção da formulação fraca:

i. $-\theta'' + c\theta = 0$

ii. $r(x) = -\theta'' + c\theta$

iii. $\int_{\Omega} r(x)v(x) dx = \int_{\Omega} (-\theta'' + c\theta)v dx = 0$

iv. $\int_0^1 (\theta'v' + c\theta v) dx - [\theta'v]_{x=0}^l = 0$

v. $\int_0^1 (\theta'v' + c\theta v) dx + \frac{\beta}{k} \theta(l)v(l) = 0$, $v(0) = 0$ (#)

Introduz-se aproximações:

$$\theta_h(x) = \sum_{j=1}^3 c_j \phi_j(x), \quad v_h(x) = \sum_{j=1}^3 c_j \phi_j(x)$$

na formulação (#), tal como sugerido no enunciado do problema.

$$\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = x \text{ e } \phi_3(x) = x^2$$

$$\phi_1'(x) = 0, \phi_2'(x) = 1 \text{ e } \phi_3'(x) = 2x$$

Pelo que se obtém o sistema final antes da introdução das condições fronteira é:

$$K_{ij}c_j = F_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} cl + \frac{\beta}{k} & \frac{cl^2}{2} + \frac{\beta}{k}l & \frac{cl^3}{3} + \frac{\beta}{k}l^2 \\ l + \frac{cl^3}{3} + \frac{\beta}{k}l^2 & l^2 + \frac{cl^4}{4} + \frac{\beta}{k}l^3 & \frac{4l^3}{3} + \frac{cl^5}{5} + \frac{\beta}{k}l^4 \\ \text{sim.} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \vec{0}$$

Temos uma condição de fronteira essencial, a saber $\theta_h(0) = c_1 = 100^\circ C$, pelo que o sistema a resolver é:

$$\begin{bmatrix} l + \frac{cl^3}{3} + \frac{\beta}{k}l^2 & l^2 + \frac{cl^4}{4} + \frac{\beta}{k}l^3 \\ l^2 + \frac{cl^4}{4} + \frac{\beta}{k}l^3 & \frac{4l^3}{3} + \frac{cl^5}{5} + \frac{\beta}{k}l^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c_1 \left(\frac{cl^2}{2} + \frac{\beta}{k}l \right) \\ -c_1 \left(\frac{cl^3}{3} + \frac{\beta}{k}l^2 \right) \end{Bmatrix}$$

b) à equação diferencial dada (1), pode-se associar, através da formulação fraca (#), o seguinte funcional de energia:

$$i) \quad J(v) = \frac{\beta}{k} \frac{v^2}{2}(l) + \int_0^l [(v')^2 / 2 + cv^2 / 2] dx$$

ii)

$$\begin{aligned} J(\theta_h) &= \frac{\beta}{k} \frac{\theta_h^2}{2}(l) + \int_0^l [(\theta_h')^2 / 2 + c\theta_h^2 / 2] dx = \\ &= \frac{\beta}{k} \frac{(c_1 + c_2x + c_3x^2)^2}{2}(l) + \int_0^l [(c_2 + 2c_3x)^2 / 2 + c(c_1 + c_2x + c_3x^2)^2 / 2] dx \end{aligned}$$

iii) o passo seguinte do método de *Ritz* consiste em:

$$\frac{\partial J(\theta_h)}{\partial c_j} = 0; j = 1, 2, 3, \text{ o sistema encontrado é naturalmente o mesmo da alínea a).}$$

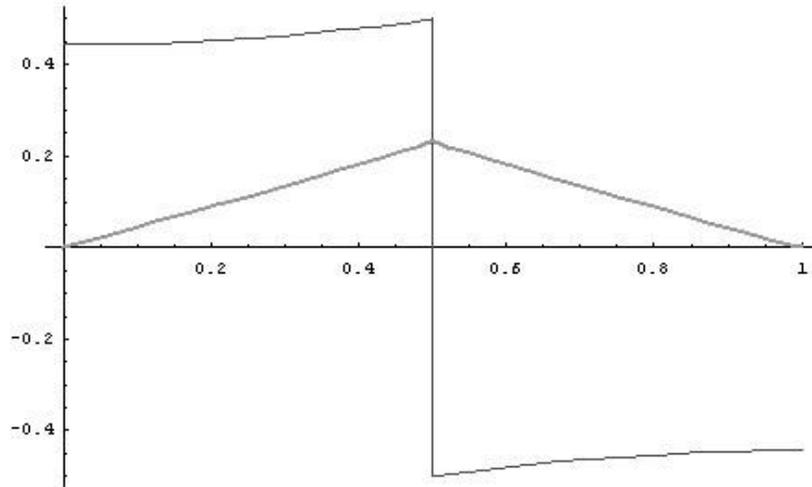
Nota final: As unidades de c_1 são em $^\circ$, as unidades de c_2 são em $^\circ/m$ e as unidades de c_3 são em $^\circ/m^2$.

EP9.1. [[1], 1.2.3].

a. Do exemplo 4.1 sabemos que $u_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$, usando o teorema 4.3 com $u_1(x) = e^x$ e $u_2(x) = e^{-x}$, obtém-se $u_p(x) = \sinh(1/2 - x)H(x - 1/2)$. A solução geral é:

$$u(x) = \frac{\sinh(1/2)}{\sinh(1)} \sinh(x) - \sinh(x - 1/2)H(x - 1/2).$$

b. Gráficos pedidos recorrendo ao programa comercial *Mathematica*



c. Não, pois a edo não tem sentido nesse ponto.

EP9.2. [[1], 1.3.2]. Análogo ao **EP9.1.**.

EP9.3. [[1], 1.3.2].

a.

$$\text{Determinar } u \in H^1 \wedge u(0) = 0 : \int_0^1 (u'v' + u'v + uv) dx + \int_1^2 (2u'v' + u'v + uv) dx + \\ + \int_2^3 (u'v' + u'v + uv) dx + \int_3^4 (u'v' + u'v + uv) dx + 4v(3) - 3v(4) = 0, \forall_{v \in H^1 \wedge v(0)=0}$$

b. Determinar $u \in H^1 : (u(2) - 3)v(2) + 2v(0) + \int_0^2 (u'v' + uv) dx = v(1), \forall_{v \in H^1}$ ”.

c. Determinar $u \in H_0^1 : \int_0^1 (u'v' + uv) dx + \int_1^2 (u'v' + uv) dx + v(1) = 0, \forall_{v \in H_0^1}$ ”.

EP9.4.

a. $u'' + u = f ; u(0) = u(l) = 0$

b. $u^{(iv)} + 2u'' + u = f ; u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$

EP9.5. [IST-Exame 90/2/28]

a. Determinar $u \in H^1 \wedge u(0) = 1 : \int_0^1 ((1+x)u'v') dx = \int_0^1 e^x v dx + 4v(1), \forall_{v \in H^1 \wedge v(0)=0}$

b. A função $u_h(x)$ é um polinómio pelo que pertence a H^1 , por outro lado $u_h(0) = 1$, pelo que se verifica a c.f. essencial.

c. É necessário conhecer o valor de $u(x)$ em n pontos distintos. Com esta informação aplica-se a expressão $u_h(x)$ a cada um desses pontos e constrói-se um sistema não linear de n equações a n incógnitas, α_1 a α_n .

EP9.6. [IST-Exame 89/2/22]

a. Determinar $v \in H^1 \wedge v(0) = 0 : \int_0^1 ((1+t)w'v' + wv)dt = \int_0^1 wt^2 dt, \forall_{w \in H^1 \wedge w(0)=0}$

b. Sim porque a f.f. é simétrica.

EP9.7. [IST-Exame 89/2/22]

a. Determinar $u \in H^1 : \int_0^1 (1+x)u'v'dx = 2v(1) - \int_0^1 \sin(x)v dx, \forall_{v \in H^1}$.

b. *Neumann*

c. Impossível.

EP9.8. [IST-Exame 95/2/21]

a. A formulação forte não tem significado em $x=0$, para os outros pontos do domínio temos:

$$-[(x^2 + 1)u'] + 2u = x + \delta(x), \quad u(-1) = 0 \quad \text{e} \quad u'(1) = (1 - u(1))/2.$$

b. $J(v) = \int ((x^2 + 1)(v')^2 + 2v^2 - 2xv)dx - v(0) + v(1) + [v(1)]^2 / 2$ e $v(-1) = 0$.