

Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização / Matemática e Aplicações

Dissertação

Fractais Clássicos - Aplicações à sala de aulas em São Tomé

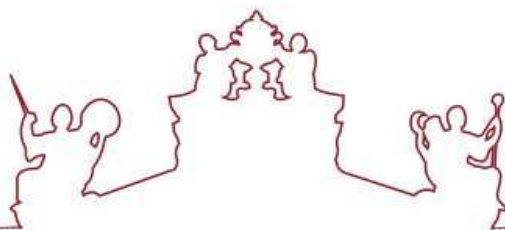
Nelson Pires dos Santos Neto Fernandes

Orientador(es) / Sara Luísa Dimas Fernandes

Fernando Manuel Lucas Carapau

Évora 2020





Universidade de Évora - Escola de Ciências e Tecnologia

Mestrado em Matemática e Aplicações

Área de especialização / Matemática e Aplicações

Dissertação

Fractais Clássicos - Aplicações à sala de aulas em São Tomé

Nelson Pires dos Santos Neto Fernandes

Orientador(es) / Sara Luísa Dimas Fernandes

Fernando Manuel Lucas Carapau

Évora 2020



Agradecimentos

Realizar este trabalho foi um desafio do ponto de vista pessoal, para o qual contribuíram de alguma forma muitos dos que me acompanharam, aos quais gostaria de deixar uma palavra de apreço.

A Deus, ao qual devo a minha existência terrena e espiritual, pela sua luz divina que orienta o dia à dia da minha vida, à minha família e amigos, que tanto apoiaram e que muito motivaram desde o início do curso, aos meus ilustres Professores de Mestrado em Matemática e Aplicações na Universidade de Évora, em particular, pelos conhecimentos transmitidos.

Em especial à Directora do Curso do Mestrado, a Professora Dulce Gomes, aos meus Orientadores Professora Sara Fernandes e Professor Fernando Carapau, sem esquecer o corpo administrativo da instituição Universidade de Évora em São Tomé, pelo seu entusiasmo, disponibilidade, apoio e a devida dedicação que implementou durante as tele secções em prol de uma dissertação de sucesso.

E, finalmente, aos meus colegas do curso pela motivação dada durante todo o percurso relativo ao mestrado, em especial, agradeço as boas conversas mesmo quando eu pensava que já não seria possível.

Sem vocês o fardo seria muito mais pesado.

São Tomé e Príncipe, 19 de Outubro de 2020

Nelson Pires dos Santos Neto Fernandes

Resumo

A ideia deste trabalho, é o de abordar o estudo dos fractais, evidenciando a sua beleza e importância matemática. Posteriormente, pretendemos mostrar que os fractais são um assunto relevante, estruturante e que o seu estudo deveria ser incorporado no ensino secundário de São Tomé e, nesse sentido, é importante os devidos contactos com as autoridades educativas do país para a possibilidade de introdução destes conceitos matemáticos nos programas de Matemática de S. Tomé e Príncipe.

Nesta perspectiva, ao longo do trabalho vamos apresentar os conceitos matemáticos relativos aos fractais, com vista a especificar actividades pedagógicas a decorrer na sala de aula com o devido apoio do corpo docente, actividades essas a realizar pelos alunos em grupo ou de forma individual, consolidando assim o tema em estudo, ou seja, os fractais. O trabalho está organizado em três capítulos, estruturados da seguinte forma:

- No primeiro capítulo, apresentamos uma breve nota histórica, de modo a preparar o leitor para uma acessível compreensão da geometria fractal e suas propriedades;
- No segundo capítulo, descrevemos, de forma breve, mas rigorosa, alguns dos mais conhecidos fractais que ao longo de vários anos têm fascinado alunos dos vários níveis de ensino permitindo, assim, uma melhor compreensão de certos conteúdos matemáticos;
- No terceiro capítulo, apresentamos algumas sugestões e/ou orientações, no sentido de proporcionar uma melhor identificação de aspectos essenciais do tema, e ajudar na selecção e implementação de estratégias que melhor rentabilizam o trabalho na sala de aula;
- Por fim, no quarto capítulo apresentaremos as conclusões desta dissertação.

De referir que este trabalho tem por base os trabalhos mencionados na bibliografia [1, 24].

Palavras-chave: Fractais, Fractais Clássicos, Sistemas Dinâmicos, Ensino da Matemática.

Abstract

Classic Fractals-Applications to the Classroom in São Tomé

The idea of this work is to approach the study of fractals, highlighting their beauty and mathematical importance. Subsequently, we intend to show that fractals are a relevant, structuring subject and that their study should be incorporated into secondary education in São Tomé and, in this sense, it is important to have the necessary contacts with the country's educational authorities for the possibility of introducing these concepts mathematicians in the Mathematics programs of S. Tomé and Príncipe.

In this perspective, throughout the work we will present the mathematical concepts related to Fractals, with a view to specific pedagogical activities taking place in the classroom with the proper support of the teaching staff, activities to be carried out by students in groups or individually, consolidating thus the subject under study, that is, fractals. The work is organized in three chapters, structured as follows:

- In the first chapter, we present a brief historical note, in order to prepare the reader for an accessible understanding of fractal geometry and its properties;
- In the second chapter, we describe, briefly but rigorously, some of the most well-known fractals that over the years have fascinated students at various levels of education, thus allowing a better understanding of certain mathematical content;
- In the third chapter, we present some suggestions and/or guidelines, in order to provide a better identification of essential aspects of the theme, and to help in the selection and implementation of strategies that better profit the work in the classroom;
- Finally, in the fourth chapter we will present the conclusions of this dissertation.

It should be noted that this work is based on the works mentioned in the bibliography [1, 24].

Keywords: Fractals, Classic Fractals, Iterative Systems, Mathematics Teaching.

Preâmbulo

Este trabalho é relativo à minha dissertação de Mestrado, que tem por objectivo motivar os alunos do Ensino Secundário de São Tomé e Príncipe (STP) para o conhecimento de uma área da matemática que apresenta uma beleza ímpar, os fractais. Posteriormente, pretendo que este trabalho possa ser usado pelos colegas professores de matemática como apoio pedagógico, didático e científico, a ter em conta, para a introdução dos fractais no ensino secundário. Este trabalho aponta direcções de como se pode melhorar o conhecimento do assunto via actividades concretas com os Fractais a desenvolver como uma intervenção pedagógica relevante nas aulas, melhorando assim o conhecimento científico dos alunos em geral, para este conceito relevante da área da matemática. Posteriormente, pretende-se que o tema dos fractais seja parte integrante dos programas de Matemática de São Tomé e Príncipe.

Nos últimos anos assistimos a mudanças marcantes no ensino da Matemática no sistema educativo de STP. Esta mudança é mais notável nos últimos anos do Ensino Básico e parte do Ensino Secundário. Tópicos que há anos eram considerados como matéria adequada para os primeiros anos do nível universitário foram reorganizados e estão sendo ensinados nos últimos anos do Ensino Secundário. Convencido de que esta reorganização continuará e se intensificará nos próximos anos, colocamos neste trabalho, que é destinado a ser usado como uma primeira introdução aos fractais, assuntos que até agora foram considerados avançados para este nível académico e que ainda não foram introduzidos no nosso sistema educativo.

Há sempre um grande perigo quando pretendemos apresentar temas novos para estudo constituídos por idéias abstratas. Nesse sentido, pretendemos introduzir estes novos conceitos de forma clara e, apresentado, sempre que possível, exemplos concretos de forma a tornar os assuntos em estudo naturais e de interesse científico relevante para os alunos e para a sociedade em geral. Para tentar mitigar isto, procuraremos motivar os conceitos previamente e ilustrá-los em situações concretas. Por conseguinte, este trabalho pode ser pioneiro nessa primeira abordagem de inovação para próximas revisões de programas dos ensinos da matemática em STP. De referir que este trabalho é encarado como uma primeira abordagem ao estudo dos fractais.

Não podemos ter receio de abordar assuntos que historicamente, ainda, não estão bem difundidos no meio acadêmico de STP. Nesse sentido, este trabalho é relevante pois aborda uma das áreas da matemática importantes para o estudo dos fractais, estou a falar da geometria fractal que foi aprofundada nos anos sessenta do século passado devido aos estudos de Benoit Mandelbrot, matemático francês de origem polaca. De reforçar a importância, nos dias de hoje, das aplicações da geometria fractal em várias áreas científicas e tecnológicas, entre outras, nas artes, na astronomia, na biologia, na engenharia, na medicina, na meteorologia, na química, na física e na matemática pura.

Este trabalho pode ser relevante como ponto de partida para a introdução do estudo dos fractais nos programas de matemática do Ensino Secundário em São Tomé e Príncipe. De mencionar a importância das referências tidas em conta na preparação deste trabalho, ver bibliografia [1, 24].

Conteúdo

1	Abordagem Histórica e Propriedades	9
1.1	Noções Preliminares	9
1.2	Nota Histórica	12
1.3	Conceitos	16
1.4	Propriedades	17
1.4.1	Auto-Semelhança	17
1.4.2	Complexidade Infinita	17
1.4.3	Dimensão	19
2	Fractais Clássicos	23
2.1	Exemplos de Fractais Clássicos	23
2.1.1	O Triângulo de Sierpinski	24
2.1.2	Floco de Neve de Koch	25
2.1.3	Conjunto de Julia	30
2.1.4	Conjunto de Mandelbrot	32
3	Fractais na Sala de Aulas	35
3.1	A Presença de Fractais no Programa do Ensino Secundário	35
3.2	Programa do Ensino Secundário Santomense da Disciplina de Matemática	36
3.2.1	Finalidades	37
3.2.2	Objetivos Gerais	38
3.2.3	Sugestões e Metodologias Gerais	39
3.2.4	Competências	40
3.2.5	Capacidades	41
3.2.6	Recursos	41
3.2.7	Tecnologia	42
3.2.8	Computadores	42
3.3	Tarefas com Fractais	43
3.4	Tarefas a Realizar com Fractais na Sala de Aulas	43
3.5	Relação do Floco de Neve com a Progressão Geométrica	45
3.6	Relação do Conjunto de Julia com Infinitésimos	48

3.7	Relação do Triângulo de Sierpinski e a Sucessão	50
4	Considerações Finais	53

Lista de Figuras

1.1	Benoit Mandelbrot.	10
1.2	Processo iterativo do fractal de Sierpinski (em cima) e de Von Koch (em baixo). . .	13
1.3	Fractal de Mandelbrot (vista global).	13
1.4	Fractal de Mandelbrot (vista do cardióide central).	14
1.5	Fecto Aspidiaceae.	14
1.6	Cascas de moluscos e concha do mar.	15
1.7	Imagem fractal via computador.	15
1.8	Cyatheaceae conhecido como “fia glêsa”.	16
1.9	Imagem auto-semelhante.	18
1.10	Iterações do floco de neve/estrela de Von Koch.	18
1.11	Praia Lodge na ilha do Príncipe.	19
1.12	Processo iterativo para o fractal de Von Koch.	21
1.13	Processo iterativo para o fractal de Sierpinski.	21
2.1	Triângulo de Sierpinski: Algumas iterações do seu processo recursivo.	24
2.2	Floco de neve ou estrela de Von Koch: Algumas iterações do seu processo recursivo.	26
2.3	Floco de neve: Iteração n ^o 1.	27
2.4	Floco de neve: Iteração n ^o 2.	28
2.5	Floco de neve: Iteração n ^o 3.	28
2.6	Conjunto conexo de Julia (<i>a</i>) e conjunto desconexo de Julia (<i>b</i>).	31
2.7	Conjunto de Julia: Usando o software Ultra Fractal.	32
2.8	Conjunto de Mandelbrot.	33
2.9	Beleza do conjunto de Mandelbrot.	34
2.10	Fractal de Mandelbrot: Amplificações de zonas distantes do cardióide principal. . .	34
3.1	Fractal floco de neve (ou estrela) de Von Kock.	45
3.2	Sequência iterativa do floco de neve, sendo F_n o perímetro de ordem n	46
3.3	Regra simples do processo iterativo do fractal de Von Kock.	46
3.4	Fractal via quadrados: Processo iterativo.	48
3.5	Característica infinitesimal no fractal de Julia.	49
3.6	Ilustração de um fractal infinitesimal.	49

3.7	O mundo maravilhoso do fractal de Sierpinski.	50
3.8	Ilustração interactiva do fractal de Sierpinski.	51
3.9	Ramificação de uma árvore, primavera a primavera.	52

Lista de Tabelas

1.1	Cronologia da história dos fractais.	12
2.1	Área e perímetro dos triângulos para o fractal de Sierpinski.	25

Capítulo 1

Abordagem Histórica e Propriedades

Neste capítulo, vamos apresentar uma breve introdução histórica ao tema dos fractais, apresentando alguns conceitos e propriedades relevantes do mundo fractal. Sempre que possível, mencionamos exemplos concretos para ilustrar as propriedades em estudo.

1.1 Noções Preliminares

A geometria euclidiana, desenvolvida à séculos atrás pelo matemático grego Euclides, que procura estudar assuntos associados a pontos, rectas, planos e volumes com base em axiomas, conjecturas, teoremas e corolários, foi considerada durante muitos séculos a geometria que melhor descrevia o nosso mundo e a natureza que nos rodeia, portanto, aquela que usualmente é ensinada nas escolas e bem como primeira abordagem a uma geometria. Mas o pensamento matemático a nível abstracto, diz-nos que a geometria euclidiana é em muitas situações limitada e, nesse sentido, é importante apresentar geometrias alternativas. Existem várias e específicas geometrias distintas da euclidiana, as quais aplicadas a estudos concretos.

Uma dessas geometria alernativas é a geometria fractal que, desde os anos setenta do século passado, é considerada como relevante e a ser considerada uma forma mais rigorosa de abordar os fenómenos naturais e as suas diferenciações. Isto porque nas últimas décadas do século passado os cientistas começaram a verificar que as figuras geométricas euclidianas não explicam na sua essência a natureza que nos rodeia e, por esse motivo, o nosso universo tem a necessidade de uma geometria alternativa.

Esta necessidade de uma nova geometria que apresente respostas a problemas colocados, deve-se em parte à capacidade do método abstractivo, que permitiu desenvol-

vimentos pertinentes na matemática, abrindo novos horizontes em novas áreas, para uma ideia mais precisa do método abstracto como ferramenta base para o progresso científico, consultar o trabalho de Wozny [24].

Com esta nova abordagem foi possível a descoberta de novas teorias, alternativas às existentes, permitindo desta forma que assuntos conhecidos e de demonstração complexa, passem a ser compreendidos de uma forma mais simples e elegante. A matemática tem evoluído com o recurso ao método abstrativo, conduzido de forma correcta.

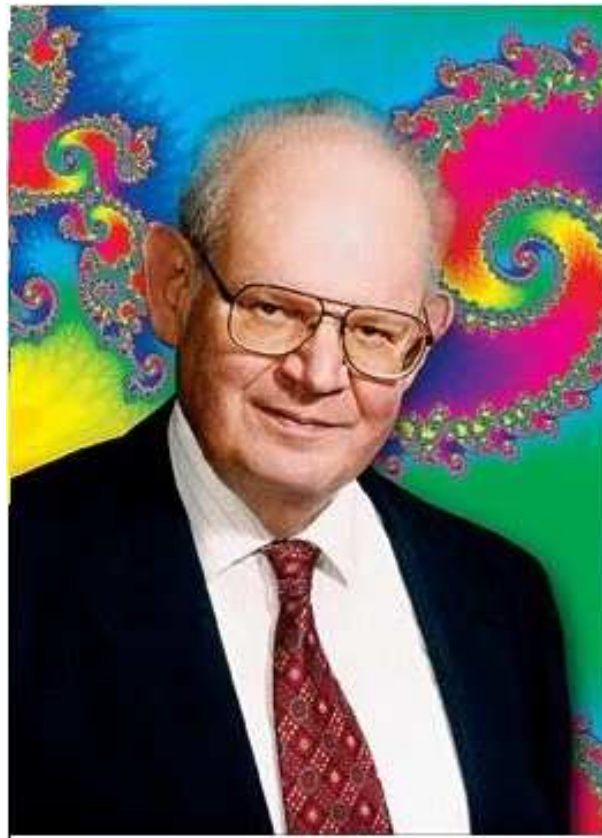


Figura 1.1: Benoit Mandelbrot.

Em 1982 o Matemático francês de origem polaca Benoit Mandelbrot, ver Figura 1.1, impulsionou o assunto dos fractais de forma decisiva com a publicação dos seus estudos sobre a geometria fractal na natureza, ver [10]. No final dos anos 60 do século passado e, no seguimento dos seus estudos relativo à teoria dos jogos, Mandelbrot com toda a sua genialidade, coloca uma questão que maravilhou os cientistas da época e que ficou mundialmente conhecida:

Quanto mede a costa Inglesa?

A partir desta questão Mandelbrot constatou que quanto menor fosse a unidade de medida em causa maior seria esse comprimento, uma vez que todos os pormenores de relevo do terreno estariam evidenciados por essa pequena escala de medida. Mandelbrot ao estudar esta e outras situações e, com a ajuda preciosa dos computadores pôde visualizar objectos matemáticos que no passado muitos autores tinham ignorado e colocado de parte por acharem que não tinham um grande valor científico.

Esses objectos ficaram conhecidos para a eternidade por “monstros matemáticos” ou por “equações patológicas” ou ainda por “uma praga lamentável de funções”, para mais detalhe consultar os trabalhos relevantes de Mandelbrot sobre os fractais, ver [10, 11]. Os fractais apresentam, entre outras, uma característica ímpar, ou seja, a ínfima parte da figura se confunde com o ponto de partida da mesma, para mais informações consultar o trabalho científico de Santos *et al*, em [21]. Em 1982, ocorre um acontecimento que marcou a evolução e compreensão do mundo fractal, Mandelbrot publica o seu trabalho pioneiro sobre fractais (ver [10]) onde aborda a constatação de que natureza que nos rodeia é mais profunda e complexa para ser explicada por uma simples geometria euclideana, contradizendo, assim, mais de 2000 anos de história euclidiana, qual foi e é importante como matéria fundamental de estudo.

Por conseguinte, nasceu, desta forma, uma nova geometria, a geometria fractal, também conhecida pela teoria da “rugosidade”. Mandelbrot, com o seu génio criativo, descobriu regras simples usadas pela natureza e da mesma forma como resultado do pensamento humano que, graças à sua repetição consecutiva, as partes menores se assemelham ao todo. Este procedimento recursivo apresenta-nos sistemas belos, únicos, complexos e podem ser caóticos. A geometria fractal, deu-nos a expressão fractal que passou a ser tida em conta para ser afecta a fenómenos que apesar do seu grau de divisibilidade, essa pequena parte preserva as características do fenómeno inicial. As consequências da geometria fractal passou a ter imensas implicações científicas e em várias áreas do conhecimento, entre outras, cinema, artes, ciências exactas, biologia, engenharia e medicina, para complemento ver o excelente trabalho de Santos *et al*, em [21]. Foi devido a esta nova abordagem de pensamento que Mandelbrot nos ofereceu e reforçou a geometria fractal. Este matemático francês e devido aos seus estudos relevantes na área fractal ficou conhecido por ser o “pai dos fractais”. Todos sabemos que o tema dos fractais é muito antigo e anterior ao génio de Mandelbrot. O termo fractal é conhecido desde o século XVI. O enorme feito de Mandelbrot foi o de saber olhar para os problemas em estudo de forma profunda, diferente, inovadora e identificando a necessidade de ideias novas, ver os trabalhos mencionados em [10, 11]. Contudo e relativamente aos fractais foi Mandelbrot que com o seu trabalho ímpar os agrupou e classificou com base em propriedades e características comuns, neste processo é de reforçar a importância da evolução computacional a que Mandelbrot teve acesso.

De seguida apresentamos na Tabela 1.1 uma cronologia importante relativa à evolução dos fractais, ao longo dos tempos, com base no trabalho de Rabay em [17]:

Descoberta	Ano	Autor
Construções fractais via polígonos regulares	1500	Durer
Curva de Cantor	1883	Cantor
Curva de Peano	1890	Peano
Curva de Hilbert via técnica quadrangular	1891	Hilbert
Curva e Ilha de Kock	1904	Kock
Fractais via Triângulos equiláteros	1904	Sierpinski
Estudos relevantes sobre topologia	1918	Hausdorf
Conjunto de Julia num campo complexo	1918	Juli
Trabalho de Fatou via trabalho de Julia	1918	Fatou
Esponja de Menger	1921	Menger
Curvas com propriedades de auto-similaridade	1938	Lévy
Topologia da costa da Grã-Bretanha	1967	Mandelbrot

Tabela 1.1: Cronologia da história dos fractais.

1.2 Nota Histórica

O conhecimento científico é o resultado de um trabalho árduo, intenso e demorado. O conhecimento científico é o fruto das tentativas sistemáticas pela procura de respostas para problemas concretos de natureza várias, ou seja, problemas do mundo real e tecnológico, ou do mundo abstracto. Este pensamento árduo, intenso e demorado permitiu a evolução sistemática e metódica da matemática como área científica relevante no mundo da ciência. Por conseguinte, os conceitos matemáticos evoluíram aos longos dos tempos de forma a permitir o devido desenvolvimento da teoria dos fractais. Conceitos matemáticos de sucessão, noção de convergência e a existência de limite, são conceitos relevantes no estudo dos fractais. Nesse sentido, a análise infinitesimal, ofereceu ao conhecimento matemático conceitos incrivelmente belos, entre outros, as sucessões, a convergência e a definição de limite, essenciais no estudo dos fractais. Em geral, as consequências da análise infinitesimal, por exemplo, conceitos como o cálculo diferencial e integral permitiu a partir do século XVII, um desenvolvimento considerado do conhecimento científico e nas suas mais variadas aplicações.

Podemos verificar pela Figura 1.2, que sucessivas iterações de uma específica imagem com base em determinadas regras podem gerar fractais com uma beleza ímpar. Estas iterações ficaram conhecidas por fractais de Sierpinski (em cima) de Von Koch (em baixo). Estes exemplos, simples, podem para as primeiras iterações ser recriados numa sala de aula apenas com uso de papel, régua, borracha e lápis. Este tipo de dinâmica em sala de aula pode despertar o interesse dos alunos para os conceitos matemáticos associados ao fenómeno apresentado e não só, pode despertar o interesse pelo

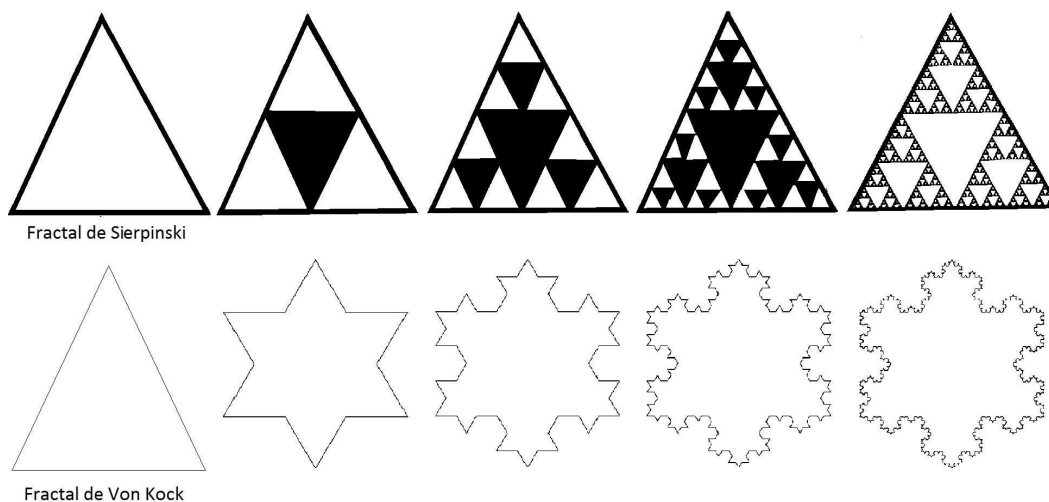


Figura 1.2: Processo iterativo do fractal de Sierpinski (em cima) e de Von Koch (em baixo).

estudo da matemática em geral. O uso dos computadores veio revolucionar a beleza de um fractal pelo facto de ser possível iterar a imagem inicial um número elevado de iterações, não acessível ao simples uso de papel, régua, borracha e lápis. Por conseguinte, dada uma imagem inicial e considerando a sucessão resultante do processo iterativo podemos ter uma ideia do fractal em causa, quantas mais interações forem efectuadas mais fino será o fractal.

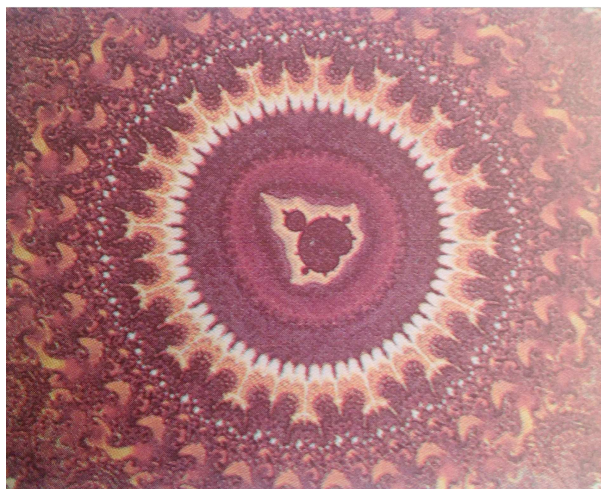


Figura 1.3: Fractal de Mandelbrot (vista global).

A Figura 1.3 e Figura 1.4, representam fractais de Mandelbrot obtidos pelas sucessivas iterações da seguinte sucessão de números complexos

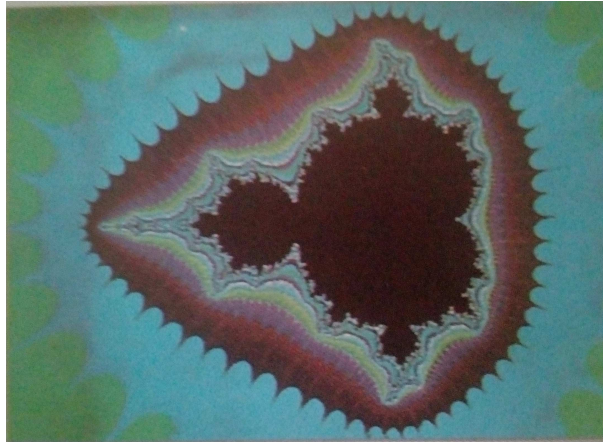


Figura 1.4: Fractal de Mandelbrot (vista do cardióide central).

$$v_1 = u \quad (1.1)$$

$$v_2 = u^2 + u \quad (1.2)$$

$$v_3 = (u^2 + u)^2 + u \quad (1.3)$$

$$\dots = \dots \quad (1.4)$$

De referir que uma determinada iteração apresenta as características de iterações anteriores, em particular da iteração inicial, característica principal da teoria associada ao mundo dos fractais, propriedade como o nome de auto-semelhança.



Figura 1.5: Fecto Aspidiaceae.



Figura 1.6: Cascas de moluscos e concha do mar.

A natureza pela sua forma intrínseca de ser nos fornece exemplos variados de sistemas iterativos que apresentam um carácter fractal incrível, por exemplo, entre outros, couve-flor, bróculos, pulmões, brônquios, rede capilar, redes hidrográficas, linhas de costa de um país, nuvens, rochas, fetos e musgo. A geometria fractal, oferece-nos e mostra-nos a natureza, ver por exemplo a Figura 1.5 e a Figura 1.6.

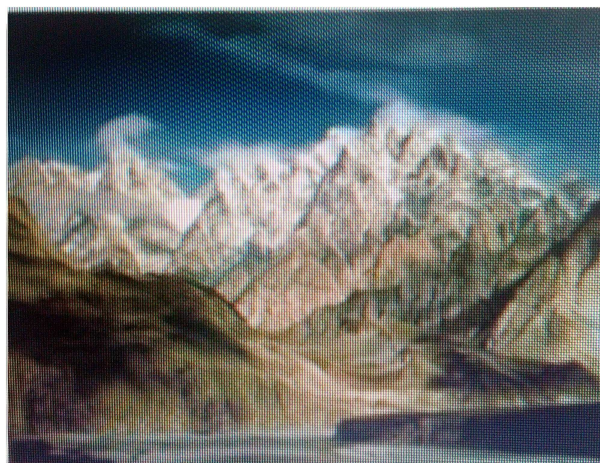


Figura 1.7: Imagem fractal via computador.

As imagens obtidas por técnicas fractais via computador, ver Figura 1.7, podem parecer mundos estranhas, mas de beleza ímpar e com aplicações fundamentais no mundo científico actual, por exemplo, entre outras situações: um vírus visto ao microscópio, paisagens de outros mundos, o génio abstracto de um pintor.

Mandelbrot diz-nos no seu livro (ver [10, 11]), considerado uma obra prima na área

da geometria fractal, que a natureza é singular e como ela nos é dada a conhecer a mesma pode ser estudado pela a sua interpretação fractal. Neste conceito o desenvolvimento computacional é sem dúvida uma ferramenta de apoio relevante a ter em conta no estudo dos fractais, o computador pode ir onde a mente humana nem sonha entrar. Nesse seguimento, e por consequência do mundo fractal, as aplicações à indústria do cinema têm tido um aliado digno de registo, no que diz respeito os efeitos especiais, destaque, em particular, os efeitos especiais criados pela Pixar Animation Studios para os seus filmes de animação. Sem a teoria fractal e suas aplicações computacionais, o realismo de mundo da animação e não só, ainda seria uma miragem. A geometria fractal tem aplicações que vão para lá do que possamos imaginar.

1.3 Conceitos

Não vamos apresentar uma definição matemática do conceito de fractal, vamos sim abordar a noção de fractal, mencionando o seu percurso histórico, apresentados propriedades relevantes. Nesse sentido, é pertinente colocar a seguinte questão:

O que são os fractais?

Os fractais são o resultado de iterações sucessivas de figuras geométricas com base em determinadas regras, em geral regras simples. Quantas mais iterações a realizar mais complexo é o fractal obtido. Por exemplo, a Figura 1.8 mostra-nos a beleza ímpar de um fractal, onde podemos ver a complexidade da natureza, de referir que ao ampliar uma secção da figura de uma escala pequena para uma escala maior verificamos a auto-semelhança existente na figura, característica comum num fractal.



Figura 1.8: Cyatheaceae conhecido como “fia glêsa”.

Deste modo, sempre que aumentamos ou reduzimos um objecto, ele parece ser o mesmo. O todo de um fractal parece como uma parte dele que por sua vez, se parece tal

e qual com a parte mais pequena seguinte. As iterações no processo recursivo tendem a preservar a essência do objecto.

1.4 Propriedades

Os fractais são o resultado de várias iterações de um processo recursivo para uma figura inicial, com regras estabelecidas inicialmente, de natureza simples em geral, a repetir a cada iteração e que apresentam propriedades específicas, as quais vamos apresentar de seguida: propriedade de auto-semelhança, propriedade de complexidade infinita e, por fim, a propriedade da dimensão.

1.4.1 Auto-Semelhança

Esta propriedade diz-nos que se ampliarmos uma determinada figura resultante de uma determinada iteração do processo recursivo e independentemente da sua iterada, vamos recuperar as características da figura que iniciou o processo iterativo que nos conduziu ao fractal em estudo. Um dos exemplos mais usados para ilustrar a auto-semelhança é o triângulo de Sierpinski, que vamos introduzir com mais detalhe no capítulo seguinte. Outra situação interessante a ter em conta para esta propriedade é o exemplo de um feto, ver Figura 1.8. No entanto, a imagem da Figura 1.9 que nos apresenta a ramificação dos troncos de uma árvore ilustra bem a propriedade de auto-semelhança. À medida que avançamos da base até ao topo da árvore, podemos verificar que existe o tronco principal que se ramifica em ramos mais pequenos que por sua vez também se ramificam em outros ramos, cada vez ainda mais pequenos, até à extremidade onde se encontram as folhas. Mais concretamente, o que podemos constatar é a existência de um padrão da ramificação muito semelhante em toda a árvore.

Outro exemplo usualmente apresentado e que podemos encontrar no nosso dia à dia, para ilustrar esta propriedade de auto-semelhança, é a couve-flor ou a ramificação pulmonar, entre outros exemplos. Mas também podíamos ilustrar esta propriedade via imagens da linha de costa de um país.

1.4.2 Complexidade Infinita

Em termos computacionais e à medida que vamos iterando uma determinada figura inicial com base em algumas regras, normalmente básicas, vamos apreciando a beleza do fractal em causa. Acontece que em termos computacionais é possível apresentar o resultado gráfico de um número muito elevado de iterações do processo iterativo, apresentando a imagem fractal uma complexidade gráfica devido ao elevado número de iterações, mas claro a auto-semelhança estará sempre presente. De mencionar,

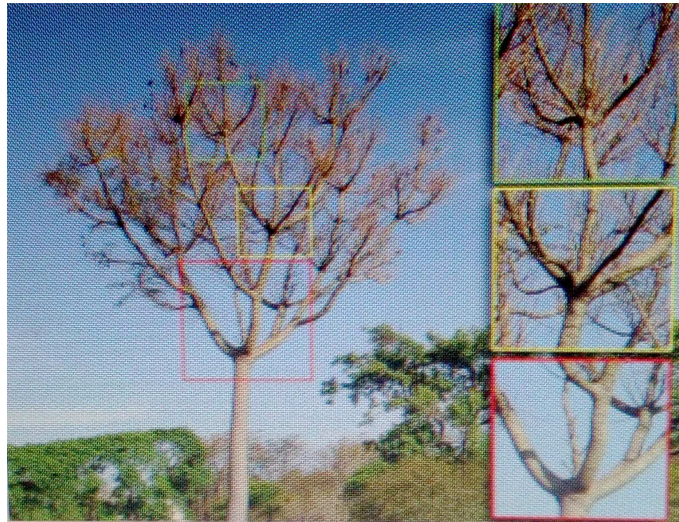


Figura 1.9: Imagem auto-semelhante.

que em termos de papel, régua, lápis e borracha, por vezes não temos uma ideia da complexidade infinita do fractal pela limitação gráfica de construção.

Por conseguinte, a complexidade infinita é uma propriedade muito importante a ter em conta nos fractais, por norma está associada ao elevado número de iterações do processo gerador de uma determinada figura inicial com base em algumas regras que por norma são regras básicas. Por conseguinte, um fractal é gerado de forma recursiva, admitindo um número infinito de iterações. De realçar que, quanto maior for o número de iterações maior é a complexidade do fractal, ou seja, maior é número de detalhes apresentados na figura. Por consequência de um número elevado de iterações no processo recursivo a complexidade da figura começa a ser um problema gráfico em termos de resolução visual, ou seja, não é possível representar a figura com o detalhe desejável e daí a designação de infinitamente complexa.

De seguida, apresentamos um exemplo da propriedade mencionada. Na Figura 1.10, o fractal conhecido por floco de neve ou estrela de Von Koch, ilustra bem o termo de complexidade infinita.

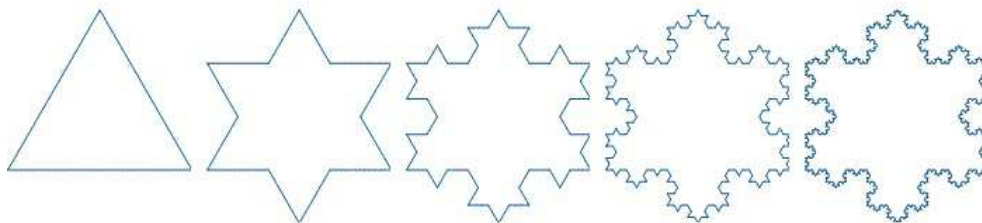


Figura 1.10: Iterações do floco de neve/estrela de Von Koch.

O exemplo da Figura 1.10, não é único, existem muitos mais fractais com esta complexidade infinita presente. Outro exemplo interessante é o resultado da dinâmica entre o mar e um continente ou ilha, o trabalho de Mandelbrot, menciona e muito bem a complexidade infinita associado a uma linha de costa, ver o exemplo apresentado na Figura 1.11.



Figura 1.11: Praia Lodge na ilha do Príncipe.

1.4.3 Dimensão

A propriedade conhecida como dimensão fractal de uma figura geométrica indica-nos a sua forma irregular iteração a iteração no processo recursivo e, além disso, indica-nos ainda, a sua estrutura e estabilidade, ou seja, o seu comportamento, para mais detalhe sobre a dimensão de um fractal, consultar o trabalho de Salvi e Marandola, ver [19]. Por outras palavras, a dimensão de um fractal é uma medida que nos indica o grau de complexidade iterativa de uma figura geométrica. Num sentido, muito geral, mede "quantos pontos" estão em um determinado conjunto.

Considerando a pergunta de "Quanto mede a costa Inglesa?", Mandelbrot, no seu génio, estabeleceu que a costa litoral tem uma dimensão fractal o que faz com que a noção geral de medida de comprimento não se aplique. Ou seja, o comprimento da costa depende do método usado na sua medição, bem como do grau de escala usado. Assim, a linha da costa tem sempre um valor aproximado, estimativa ponderada relevante no mundo fractal.

Em geral, o comprimento da linha de costa tem por base observação de satélites específicos para estudar a topografia do planeta. Caso a observação fosse feita num balão, as irregularidades da costa seriam mais visíveis, devido à proximidade da observação, e isso alteraria o comprimento prévio obtido por satélite. Mas se em vez de se usar fotografia se medisse directamente todos os contornos da costa, obter-se-ia um

comprimento de costa muito maior, procedimento não prático e de difícil execução. E se tivesse muito tempo livre para percorrer a costa a pé e se usasse uma fita métrica para ir medindo a costa, se obtia uma ainda maior precisão nas medidas dos contornos e o comprimento final obtido seria ainda muitíssimo maior. Estariamos perante o “Paradoxo do Litoral”.

Em conclusão, com base no procedimento iterativo, o comprimento de uma linha de costa é divergente, preservando o facto de estarmos perante áreas finita associadas ao processo recursivo, estamos a mencionar as áreas associadas à linha de uma costa. Um exemplo, disso mesmo, é o fractal floco de neve de Koch, ver Figura 1.10. Por conseguinte, uma questão pertinente, qual a dimensão de um fractal em geral e, em particular, do fractal floco de neve de Koch?

O génio de Mandelbrot no seu trabalho [10], constatou que as dimensões euclidianas não explicavam o essencial das formas irregulares e, assim, considerou, a noção de dimensão fraccionária, pensamento revolucionário. Através da noção de dimensão fraccionária pôde passar a definir-se, por exemplo, o grau de rugosidade, de fragmentação e de irregularidade de um certo objecto, pensamento notável.

Para o caso da medição da costa de Inglaterra, Mandelbrot (ver [10]), através da noção de dimensão fraccionária dos objectos reais, constatou que o grau de irregularidades era o mesmo qualquer que fosse a escala a usar. Nesse sentido, uma forma auto-semelhante tem um grau de irregularidade constante mesmo quando observado em diferentes escalas.

Posteriormente, com base nos trabalhos relevantes de Barbosa (ver [2]), foi apresentada uma fórmula com o objectivo de se calcular a dimensão fractal de um objecto, mais propriamente:

$$D := \frac{\ln(k)}{\ln(n)} \quad (1.5)$$

a letra k é relativa ao número de semelhanças, enquanto o natural n está associado à ampliação em curso.

Com base nos trabalhos de Capra (ver [3]), a dimensão fractal passou a ser uma medida relevante no estudo dos fractais, em particular, ficou demonstrado que por mais irregulares forem as imagens resultantes das iterações no processo recursivo maior será a sua dimensão fractal, para mais detalhe sobre o tema ver o trabalho de Janos (ver [6]) relativo à dimensão fractal.

De seguida a dimensão de dois fractais, ambos de simples aplicação em sala de aulas:

Considerando as duas primeiras iterações para o fractal de Niels Koch, ver Figura 1.12, verificamos que um lado foi substituído por quatro situações, então, temos: $k = 4$, comprimento de $1/3$ de u.m., $n = 3$. Com base na equação 1.5, vem dimensão fractal dado por $D = 1,262$. De mencionar, que o exemplo exposto na Figura 1.12 não

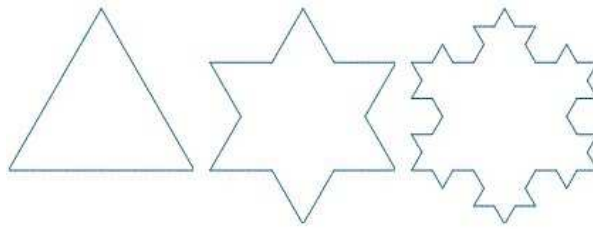


Figura 1.12: Processo iterativo para o fractal de Von Koch.

apresenta nem dimensão $D = 1$, nem dimensão $D = 2$. Isto mostra o quanto rugoso é este objecto, ou seja, a dimensão mede a complexidade do objecto, no sentido de que quanto maior for a dimensão fractal de um objecto, mais densa é o mesma, como se fosse uma nuvem de pontos em termos gráficos.

Outro exemplo, relevante e oportuno a ter em conta o seu estudo para sala de aula:

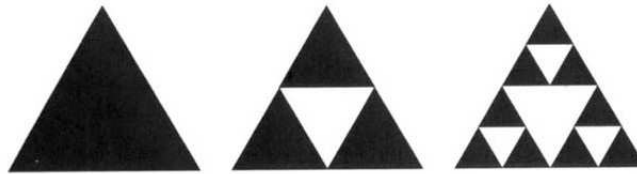


Figura 1.13: Processo iterativo para o fractal de Sierpinski.

A regra fractal para as iterações em cusa deram origem a 3 triângulos, então: $k = 3$, comprimento de $1/2$ de u.m., $n = 2$. Por conseguinte, com base na equação 1.5, vem dimensão fractal dado por $D = 1,58$. Nesse sentido, no fractal de Sierpinski a dimensão fractal é superior à dimensão do fractal conhecido por curva de Koch. Isto significa que ele está mais próximo de ser um triângulo todo pintado em relação à curva de Koch, por conseguinte uma figura mais densa. Já agora, para acentar ideias, os objectos de dimensão $D = 1$ são objectos do tipo linha recta, enquanto objectos de dimensão $D = 2$ são como um quadrado, ou seja, quanto mais próximo da dimensão $D = 2$, implica que o objecto está mais próximo de ser um quadrado e, quanto mais próximo da dimensão $D = 1$, mais próximo o objecto está de ser uma linha recta.

Capítulo 2

Fractais Clássicos

Neste capítulo, vamos apresentar exemplos específicos de alguns fractais, referindo as regras simples para cada exemplo, que ao iterar de forma recursiva nos apresentam figuras de beleza ímpar. Por conseguinte, o mundo fractal é relevante e pertinente, com imensas aplicações no mundo científico e tecnológico actual.

2.1 Exemplos de Fractais Clássicos

De seguida, vamos apresentar exemplos de fractais clássicos, que pela sua simplicidade e beleza podem ser abordados no espírito pedagógico de uma sala de aulas, promovendo assim a aprendizagem matemática do assunto. Sempre que possível, os assuntos na sala de aula deverão numa primeira fase ser abordados de forma construtiva com folha, régua, lápis e borracha. Posteriormente, recorrer à tecnologia via computador para estudar os fractais em causa de forma a apresentar aos alunos com mais detalhe.

Desde sempre o homem olhou para a natureza com o seu olhar profundo, metódico e científico tentando, desta forma, explicar a mesma em termos matemáticos e físicos. Muitos cientistas ao longo dos tempos estudaram toda a dinâmica associada aos fractais, entre outros (ver Tabela 1.1, sobre o percurso fractal aos longo dos tempos): Durer, Cantor, Peano, Hilbert, Koch, Hausdorff, Julia, Fatou, Menger, Lévy, Sierpinski e, claro, Mandelbrot, que se dedicaram os seus estudos sobre figuras que ao serem iteradas de forma recursiva nos forneceram figuras complexas, estranhas e cheia de magia matemática. Estes estudos revelaram-nos que haveria alguns conceitos absoletos, em particular, na área da geometria, da lógica, da análise infinitesimal e da álgebra. Em contra partida surgiram novas ideias e novas formas de abordar assuntos complexos, por exemplo, surgiu a geometria fractal. De seguida uma abordagem breve sobre alguns fractais interessantes para abordar na sala de aula.

O matemático Cantor, como base nos seus trabalhos científicos nos ofereceu o maravilhoso conjunto de Cantor, o qual é formado por linhas construídas pela remoção contínua da terça parte do meio dos segmentos de linha anteriores. Ao considerar este processo de remover sempre a terça parte do meio de cada segmento obtém-se divisões continuamente menores. Ao aplicar indefinidamente esta ideia de configuração inicial, vamos obter um número infinito de "partículas" infinitamente pequenas semelhantes a pó, por conseguinte este processo ficou conhecido no mundo matemático por Poeira de Cantor.

Relativamente ao fractal conhecido por triângulo de Sierpinski, usamos como figura inicial um triângulo equilátero, com regra de iteração muito simples, que tem por base formar 4 triângulos equiláteros usando as metades dos segmentos do triângulo em causa como vértice, aplicando sucessivamente este processo retirando sempre o triângulo do meio.

No caso dos fractais de Kock, de Peano e de Hilbert os mesmos são o resultado de um processo iterativo de um sistema recursivo com base na configuração inicial, com ideias muito simples a permitir a repetição do processo.

De seguida iremos ilustrar com mais pormenor alguns destes diferentes tipos de fractais, salientando algumas das suas características, que serão úteis para a consolidação do conceito de fractal. De mencionar, que estes exemplos apresentam propriedades matemáticas relevantes a apresentar aos alunos durante a devida abordagem destes fractais nas aulas regulares da unidade curricular da matemática para o ensino secundário.

2.1.1 O Triângulo de Sierpinski

No início do século passado, mais propriamente em 1904, o cientista Sierpinski, com uma ideia muito simples de sistema recursivo criou um dos fractais mais interessantes para a época, a contribuição de Sierpinski em termos fractais, deu origem a um fractal que ficou conhecido para a imortalidade da matemática por triângulo de Sierpinski, ver Figura 2.1.



Figura 2.1: Triângulo de Sierpinski: Algumas iterações do seu processo recursivo.

Como descrito previamente, dada a figura inicial de um triângulo, em geral equilátero, a regra simples de iteração recursiva é de considerar nas metades dos segmentos novos vértices de outros triângulos, repetir recursivamente este processo, retirando deste

processo o triângulo central. Este fractal é muito interessante para abordar numa sala de aula de forma construtiva e manual. Claro, este fractal apresenta uma beleza ímpar quando usamos o computador como meio de auxílio relevante para o processo educativo. No computador e aumentando o número de iterações podemos apreciar a sua complexidade infinita. A Figura 2.1, mostra-nos todo o processo iterativo, constatamos que numa iteração a superfície plana para cada triângulo apresenta uma área de $3/4$ da área do triângulo inicial, já o perímetro de cada triângulo é dado pelo valor de $3/2$ do perímetro inicial.

n.º de iterações	área dos triângulos	perímetro dos triângulos
0	A	P
1	$A_1 = (3/4)A$	$P_1 = (3/2)P$
2	$A_2 = (3/4)^2 A$	$P_2 = (3/2)^2 P$
3	$A_3 = (3/4)^3 A$	$P_3 = (3/2)^3 P$
...
n	$A_n = (3/4)^n A$	$P_n = (3/2)^n P$

Tabela 2.1: Área e perímetro dos triângulos para o fractal de Sierpinski.

Por conseguinte, com base na Tabela 2.1, podemos concluir que para a iteração de ordem n , temos que a área da superfície plana do triângulo é dada por

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A \quad (2.1)$$

e, o seu perímetro vem

$$P_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n P. \quad (2.2)$$

Para um olhar mais atento, podemos constatar que ambas as sucessões iterativas são progressões geométricas, para o caso da sucessão associada às áreas temos uma razão de $3/4$ e, para a sucessão associada ao perímetro uma razão de $3/2$. Nesse sentido, podemos afirmar que quando o número de iterações n tende para infinito, a área dos triângulos converge para 0 e o perímetro dos triângulos diverge, ou seja, tende para infinito.

2.1.2 Floco de Neve de Koch

À semelhança de Sierpinski, também no ano de 1904, Von Koch, apresentou um processo iterativo para uma figura inicial que ficou conhecido pelo fractal de floco de neve ou estrela de Koch.

Dada a figura inicial de um triângulo equilátero, em geral, o fractal de Koch obtém-se, com uma regra muito simples, a qual consiste em: dividindo os lados do triângulo

inicial em 3 lados iguais e na parte do meio construir um triângulo. Este processo iterativo apresenta de forma recursiva um fractal a que chamamos de floco de neve ou estrela de Von Kock. No limite este processo iterativo apresenta-nos um fractal com uma complexidade muito interessante, ver Figura 2.2.

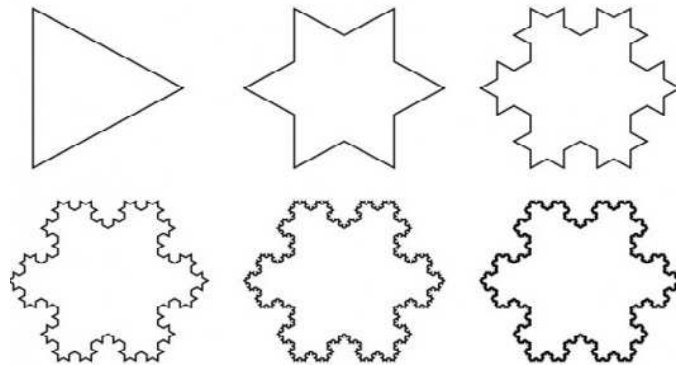


Figura 2.2: Floco de neve ou estrela de Von Kock: Algumas iterações do seu processo recursivo.

De seguida, vamos apresentar o pensamento inerente à sucessão das áreas e do perímetro para o processo iterativo. Relativamente ao perímetro vamos ter que deduzir a expressão P_n para uma iteração de ordem n , generalizando assim o conceito de sucessão. Nesse sentido, na fase inicial, vamos deduzir a expressão P_1 .

Considerando que para a figura inicial, sem perda de generalidade, que cada lado do triângulo tem medida 1 (u.m.), então o perímetro P_1 é igual a 3 u.m.. Na iteração seguinte, ver Figura 2.2, temos 3×4 segmentos cada um de comprimento $1/3$ u.m.. Então, o perímetro na iteração 2, terá medida:

$$P_2 = 3 \times 4 \left(\frac{1}{3}\right) = 3 \left(\frac{4}{3}\right). \quad (2.3)$$

Na iteração 3, ver Figura 2.2, o número de segmentos em contagem atinge o valor de $(3 \times 4) \times 4$, isto é, 3×4^2 . Logo, o comprimento associado a cada segmento é dado por $1/9$ u.m., ou seja, $(1/3)^2$ u.m.. Por conseguinte, para a expressão do perímetro P_3 , vem:

$$P_3 = 3 \times 4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^2. \quad (2.4)$$

Na iteração seguinte, ou seja na iteração número 4, ver Figura 2.2, temos $(3 \times 4^2) \times 4$ segmentos, isto é, 3×4^3 segmentos com medida $1/27$ u.m., ou seja $(1/3)^3$ u.m.. Consecutivamente, a expressão para o perímetro nesta iteração é dada por

$$P_4 = 3 \times 4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^3. \quad (2.5)$$

Com base neste processo iterativo e generalizando para uma iteração de ordem n , vamos ter $3 \times 4^{n-1}$ segmentos com medida $(1/3)^{n-1}$ e, assim, a expressão geral para o perímetro P_n , vem:

$$P_n = 3 \left(4^{n-1} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}. \quad (2.6)$$

Analisando a sucessão obtida, podemos concluir que a mesma é uma progressão geométrica de razão $4/3$. Por conseguinte, quando o número de iterações n aumenta, o perímetro P_n também aumenta, ou seja, é tão grande quanto se queira. Nesse sentido, a sucessão do perímetro é divergente quando o número de iterações n tende para infinito. Com efeito, embora contrariando o que seria de esperar em termos de senso comum, o estudo agora realizado indica-nos que o perímetro do fractal em causa tende para infinito.

Relativamente à sucessão das áreas. A área do triângulo, para cada iteração n , é dada pela área anterior somando a área de um triângulo com lado $1/3$ menor que o anterior, considerando todos os casos possíveis. A área A_1 , para a iteração número 1, é dada por $A_1 = \sqrt{3}/4$, que é a área do triângulo branco da Figura 2.3. Considerando o triângulo preto por trás do triângulo branco (ver Figura 2.3), com os vértices em sentido oposto, podemos visualizar a área que vamos ter que acrescentar na iteração seguinte.



Figura 2.3: Floco de neve: Iteração nº1.

Pela propriedade de semelhança entre figuras planas, sabemos que se houver a redução de $1/3$ na medida de um lado de um polígono, então a área vai sofrer uma redução de $1/9$ em termos de u.m..

Para a iteração número 2 e com base na Figura 2.4, a área A_2 do triângulo é dada por

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (2.7)$$

ou seja,

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{9 \cdot 4}, \quad (2.8)$$

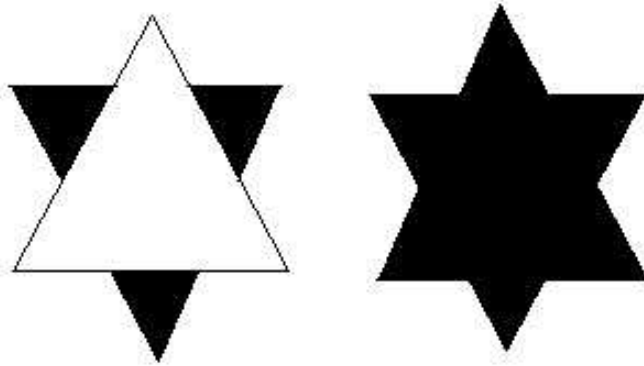


Figura 2.4: Floco de neve: Iteração n^o2.

e, assim, simplificando, vem

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(1 + \frac{1}{3}\right). \quad (2.9)$$

Na interação seguinte, ou seja, na interação número 3, com base na Figura 2.5, temos 3×4 segmentos. Por conseguinte, a área A_3 , vem

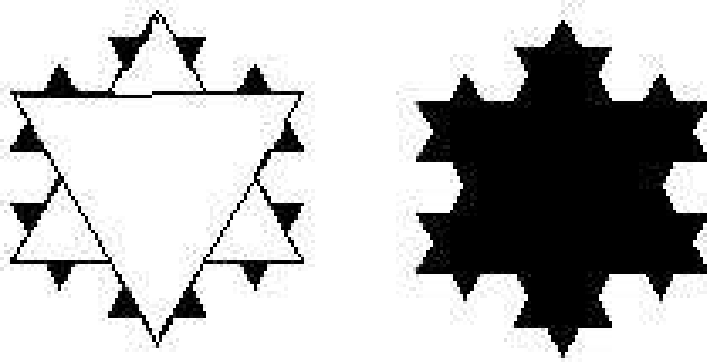


Figura 2.5: Floco de neve: Iteração n^o3.

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + (3 \times 4) \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (2.10)$$

e, simplificando, temos

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right]. \quad (2.11)$$

Na iteração seguinte, ou seja, na iteração número 4, temos 3×4^2 segmentos e, assim, temos a seguinte expressão para a área

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \right] + (3 \times 4^2) \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{9} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (2.12)$$

ou seja,

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \right] + (3 \times 4^2) \left(\frac{1}{9} \right)^3 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad (2.13)$$

e, assim, vem

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 \right]. \quad (2.14)$$

Via pensamento recursivo em curso e generalizando para uma iteração qualquer de ordem n , vamos obter:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^{n-2} \right]. \quad (2.15)$$

Com o objectivo de simplificar a expressão anterior, vamos reorganizar o termo n para $n + 2$ e, assim, a expressão simplificada é dada por:

$$A_{n+2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n}_{*} \right]. \quad (2.16)$$

Por observação, podemos verificar que o termo designado por $*$ em (2.16) está associada a uma progressão geométrica com razão $4/9$. Por conseguinte, podemos simplificar a expressão (2.16) por

$$A_{n+2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + H_n \right], \quad (2.17)$$

sendo H_n a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica, dada por:

$$H_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9} \right)^n. \quad (2.18)$$

De referir que quando o termo n tende para mais infinito, ou seja, $n \rightarrow +\infty$, vem que a sucessão H_n tende para o valor $3/5$ e, por consequência, a sucessão A_{n+2} vai convergir para o valor $(2\sqrt{3})/5$.

2.1.3 Conjunto de Julia

Deve-se ao Matemático francês Gaston Maurice Julia grandes contribuições matemáticas no campo dos sistemas dinâmicos complexos, os quais evoluem com o tempo, ainda nos dias de hoje os seus trabalhos são referência na área dos sistemas dinâmicos. De referir uma situação interessante, visto que, tanto Fatou (outro matemático francês) como Julia apresentaram trabalhos recursivos no campo complexo e, daí se dizer que os seus trabalhos fractais em campo complexo serem complementares, tudo isto no início do século passado, mais propriamente no ano de 1918.

O fractal de Julia apresenta uma característica que o tornou famoso, pois para pequenas oscilações nos dados iniciais, vamos obter situações totalmente diferenciadas. Estamos perante uma situação de não estabilidade de solução de uma iteração para iteração. Contrariamente, os trabalhos de Fatou apresentam um bom comportamento da solução para pequenas oscilações iniciais. Nesse sentido, a dinâmica fractal de um conjunto de Julia é caótica, enquanto um conjunto de Fatou nos apresenta uma dinâmica regular. Ambos os cientistas em causa estudaram o sistema dinâmico complexo com base na sucessão S_n de números complexos, que se segue

$$S_{n+1} = S_n^2 + C, \quad (2.19)$$

sendo n o número de iteração do sistema dinâmico e C um número complexo fixo. De referir que um sistema recursivo à base de uma sucessão de números complexos veio dar uma profunda ímpar ao estudo dos fractais e não só pela sua beleza gráfica. Em concreto, estudaram a evolução das diferentes órbitas com base no sistema recursivo mencionado para diferentes complexos C .

Para termos ideia do que está em causa, vamos estudar o caso mais simples, ou seja, vamos considerar $C = 0$ na expressão (2.19), isto é:

$$S_{n+1} = S_n^2. \quad (2.20)$$

De seguida, vamos estudar as órbitas correspondentes ao sistema anterior considerando dois casos distintos, com base em duas distintas condições iniciais:

$$S_0 = 2 \text{ e } S_0 = 0, 1.$$

A órbita que começa com a condição inicial $S_0 = 2$, vai levar-nos à seguinte sucessão

$$S_0 = 2, S_1 = 4, S_2 = 16, S_3 = 256, \dots, S_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty, \quad (2.21)$$

e, podemos observar que estes números vão crescendo de uma forma muito rápida para infinito à medida que o número de iterações aumenta.

No caso em que a órbita começa na condição inicial $S_0 = 0, 1$ a iteração recursiva origina a seguinte sequência:

$$S_0 = 0, 1, S_1 = 0, 01, S_2 = 10^{-4}, S_3 = 10^{-8}, \dots, S_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (2.22)$$

Neste caso, podemos observar que estamos a convergir para um número cada vez mais pequeno de maneira que podemos concluir que quando as iterações tendem para infinito a órbita tende para zero. Portanto, podemos concluir que para dois tipos de condições iniciais, uma condição inicial produz uma órbita divergente enquanto a outra condição inicial produz uma órbita convergente para zero.

Considerando para C e S_0 números complexos a situação apresenta resoluções confusas e complicadas, ou seja, resoluções complexas, mas continua a ser verificado que a parte correspondente à condição inicial, S_0 , em um ambiente de origem, é atraída para certos pontos do plano complexo enquanto que para aqueles que estão mais longe acabam por divergir.

Nesse sentido, podemos distinguir dois tipos de pontos que constituem duas regiões distintas. A fronteira que separa essas duas regiões diferentes é chamada de conjunto de Julia, que representam uma estrutura fractal formada por pontos fixos instáveis. Ao representar estes conjuntos com ajuda de um computador podemos apreciar a sua grande beleza e riqueza de formas. Por conseguinte, Julia e Fatou verificaram que esses conjuntos podiam distribuir-se em dois grupos distintos: grupos conexos ou grupos desconexos.

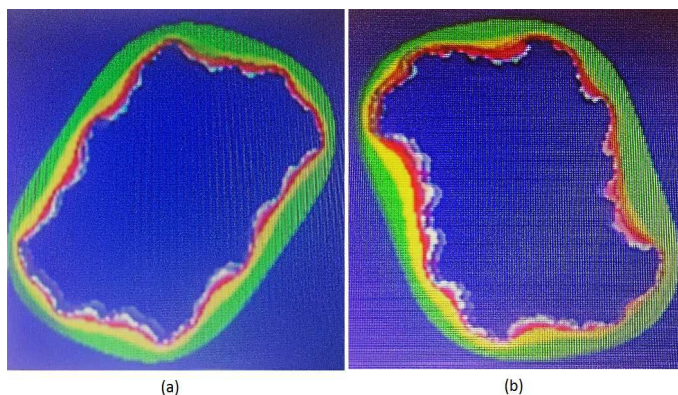


Figura 2.6: Conjunto conexo de Julia (a) e conjunto desconexo de Julia (b).

Os conjuntos conexos, são conjuntos formados por uma só peça como as imagens que se mostram na situação (a) da Figura 2.6 e, por outro lado, os conjuntos desconexos são conjuntos formados por uma infinidade de pontos dispersos, ver situação (b) da Figura 2.6.

Julia acabou por mostrar que o conjunto de Julia, em estudo, é conexo, para um número complexo C , se e só se, a órbita que começa na origem em $S_0 = 0$ não diverge, observação notável e com consequências gráficas pertinentes para os sistemas dinâmicos complexos. Num conjunto de Julia, devido ao facto de ser conexo, a propriedade de semelhança relativo ao objecto inicial passou a ser aproximada, ver Figura 2.7.

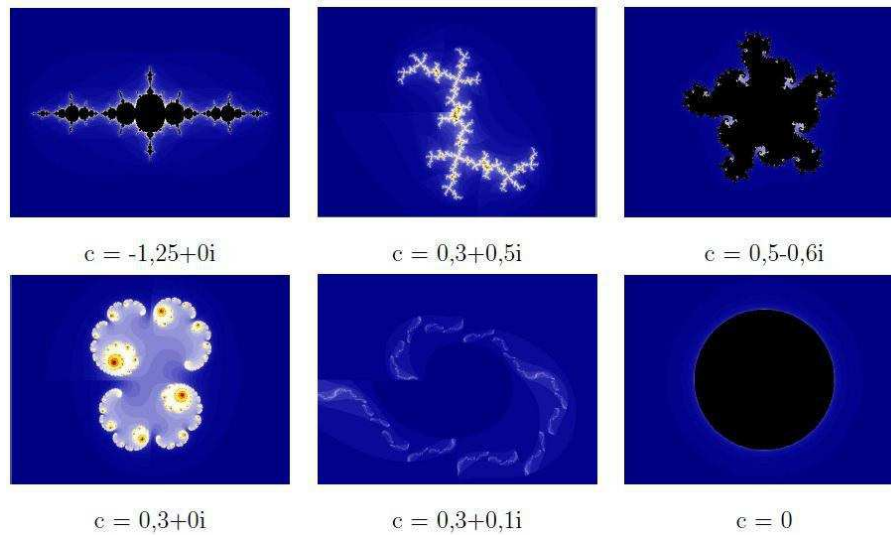


Figura 2.7: Conjunto de Julia: Usando o software Ultra Fractal.

2.1.4 Conjunto de Mandelbrot

É o conjunto de pontos C associados ao processo recursivo, ou seja, ao sistema iterativo:

$$S_{n+1} = S_n^2 + C \quad (2.23)$$

onde verificámos pela secção anterior que o conjunto de Julia deste sistema é conexo.

Com base nos conhecimentos de um fractal de Julia, para se obter um fractal de Mandelbrot, basta considerar a condição inicial $S_0 = 0$ e idênticar os números C , para os quais a órbita fica infinita. Por conseguinte, nesse sentido, basta estudar o sistema dinâmico apresentado na equação (2.23) para a condição inicial $S_0 = 0$. Uma órbita do sistema iterativo (2.23) para $S_0 = 0$ fica infinita, se e só se, algum ponto da órbita apresenta módulo maior ou igual que 2.

O conjunto de Mandelbrot apresentada via Figura 2.8, apresenta ser claramente, um dos objectos mais belos e complicados da matemática moderna, só sendo possível visualizar devido ao desenvolvimento computacional, entretanto ocorrido ao longo do último século.

A imagem da Figura 2.8, apenas foi possível de revelar-se aos olhos humanos devido ao desenvolvimento computacional. Mandelbrot, teve o privilégio de ver a execução iterativa e o esforço computacional relevante que foi necessário para se produzir tal imagem. Infelizmente, Fatou e Julia não tiveram tal privilégio devido há falta de recursos tecnológicos durante o seu tempo. De mencionar, que hoje em dia existe software que nos permite obter este e outros fractais, por exemplo o software Ultra Fractal ou Fractint. O fractal de Mandelbrot está fora do alcance da simples construção via folha, régua, lápis e borracha.

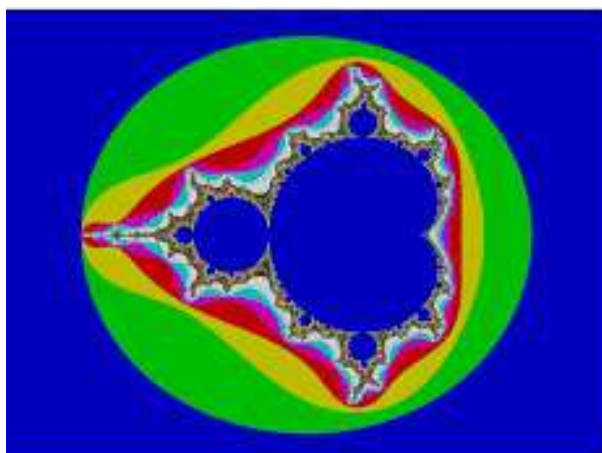


Figura 2.8: Conjunto de Mandelbrot.

As imagens que representam os conjuntos de Mandelbrot e de Julia são em branco e preto, no sentido de haver pontos pertencentes ou não ao conjunto fractal. Frequentemente, estes fractais são representados a várias cores e com um determinado significado. De referir que estes fractais foram revelados ao mundo devido ao desenvolvimento computacional, em particular à capacidade de cálculo iterativo. Para cada iteração, as cores estão associadas ao número de iterações necessárias para atingirem uma certa distância da origem. Por conseguinte, assim obtém-se uma gradação de cores de acordo com a velocidade de escape, ver por exemplo a Figura 2.8.

Em 1982, Mandelbrot com o seu livro sobre objectos fractais [10], que foi mais tarde em 1991 publicado em português pela editora Gradiva, ver [11], fez dos fractais um assunto popular entre a comunidade científica e na sociedade em geral. Com base na definição apresentada para um fractal de Mandelbrot, temos para todo o elemento do conjunto C , ou seja, considerando $C = x + iy$ e com base no processo iterativo, vem, de mencionar que $i = \sqrt{-1}$ é a variável imaginária no corpo complexo:

$$S_0 = 0, \quad (2.24)$$

$$S_1 = (S_0)^2 + C = x + iy, \quad (2.25)$$

$$S_2 = (S_1)^2 + C = (x + iy)^2 + x + iy = x^2 - y^2 + i(2xy + y), \quad (2.26)$$

$$\dots = \dots \quad (2.27)$$

E, assim, podemos apresentar os elementos do conjunto C em termos de sua parte real e da sua parte complexa.

Ao analisar a Figura 2.9, podemos constatar que um fractal de Mandelbrot na sua parte central tem um cardióide, as suas margens ao serem ampliadas acabam por nos apresentar a figura central, ou seja, aparecendo novamente um cardióide central nessa ampliação. De mencionar que esta figura apenas é possível pelos avanços tecnológicos

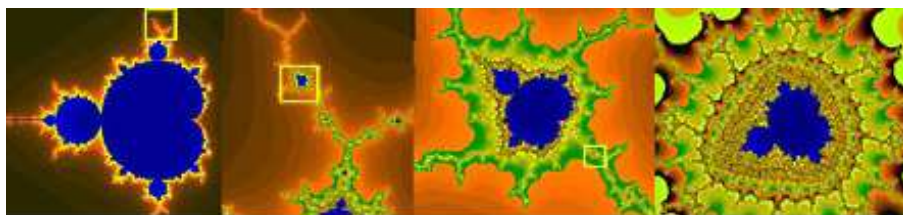


Figura 2.9: Beleza do conjunto de Mandelbrot.

verificados no campo computacional. Ao iterar recursivamente a aplicação dada e nas condições estabelecidas o fractal de Mandelbrot apresenta uma magia ímpar em termos matemáticos, o mesmo já foi considerada como a imagem matemática mais bela de todos os tempos. Para pormenores interessantes sobre este fractal, recomendamos o trabalho apresentado por Janos, ver [6]. De referir que a Figura 2.10, apresenta ampliações de zonas que ficam para lá da zona cardióide, esta figura mostra-nos que o cardióide central acaba por ser recriado, noutra escala, em zonas distantes do objecto central principal. A característica da auto-semelhança com as ampliações está presente, como seria de esperar.

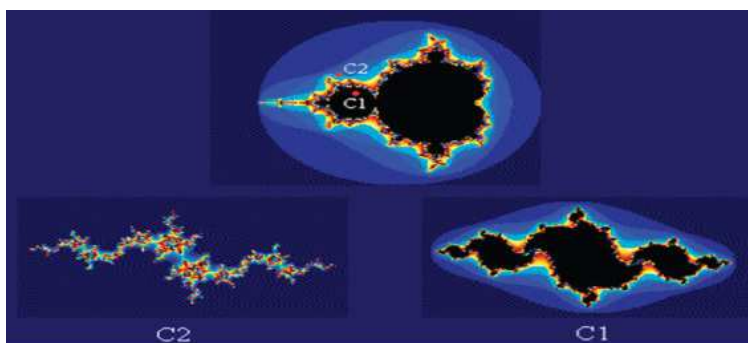


Figura 2.10: Fractal de Mandelbrot: Ampliações de zonas distantes do cardióide principal.

Capítulo 3

Fractais na Sala de Aulas

Neste capítulo, vamos mostrar a importância que tem a, devida inclusão do estudo dos fractais e de toda a matemática associada aos fractais no ensino regular das escolas do ensino básico e secundário de São Tomé e Príncipe, com mais ênfase no ensino secundário. É relevante em termos pedagógicos e científicos a inclusão dos fractais no regular funcionamento de aprendizagem matemática numa sala de aulas. Ao longo do capítulo, vamos apresentar exemplos concretos de fractais e associá-los, na medida do possível, com conceitos importantes da matemática.

3.1 A Presença de Fractais no Programa do Ensino Secundário

A ciência ao longo dos séculos tem evoluído de forma metódica, por vezes muito lenta e por vezes com erros que posteriormente acabam por ser corrigidos, este é o processo natural do avanço científico. A área científica da matemática não foge à regra da evolução científica, em particular da necessidade constante de actualizações dos conteúdos programáticos do ensino da matemática no ensino básico e secundário, nestas actualizações à que registar a componente pedagógica e científica que a evolução progressiva das ciências da computação permitiu nas últimas décadas, em termos de software e de hardware.

Nos dias de hoje o computador e tudo o que o envolve não pode estar longe do ensino que se deseja promover numa sala de aulas, claro, deverá ser usado de forma correcta, como “ferramenta” a usar, que possa permitir um melhor conhecimento das matérias em estudo. O computador pode ser importante para a motivação extra dos alunos para estudar os conteúdos matemáticos, mesmo os mais abstractos.

Devido às imensas aplicações dos fractais no mundo que nos rodeia quer em termos

científicos quer em termos tecnológicos, em junção com a capacidade de cálculo dos computadores, seria oportuno para o ensino da matemática introduzir o estudo dos fractais na dinâmica pedagógica e científica de uma sala de aulas. Todos tínhamos a ganhar com tal inclusão, mais propriamente os alunos, os professores, a sociedade e o país em geral.

Esta inclusão, pode permitir um amadurecimento matemático nos alunos, relativos aos conceitos matemáticos em estudo. Pode motivar os alunos a estudar matemática, permitindo mais tarde uma boa adaptação aos cursos de ciências a serem administrados no ensino universitário e politécnico. A inclusão dos fractais nos conteúdos programáticos do ensino básico e secundário deverá ser um processo natural da evolução da necessidade da aprendizagem do ensino da matemática no progresso pedagógico e científico dos alunos.

3.2 Programa do Ensino Secundário Santomense da Disciplina de Matemática

No ano de 2003, mais propriamente a 2 de junho, a lei que gere o sistema educativo de São Tomé e Príncipe, permitiu que de forma oportuna fosse possível reorganizar e reformular os conteúdos programáticos, permitindo uma visão pedagógica e a visão científica inovadora para o ensino em geral nas escolas do ensino básico e secundário do país. Um sistema educativo que se permite a si próprio reformar ciclicamente é um sistema educativo sólido e com uma visão de futuro. O projecto Escola+, recentemente, implementado no país, está a possibilitar uma desejada reorganização do sistema educativo do país e para as mais várias áreas do ensino básico e secundário, esta é uma oportunidade única para reformar o ensino da matemática com a introdução de novos conteúdos programáticos, em particular, com a introdução do estudo dos fractais. Esta reorganização pode estimular a actividade científica e pedagógica do ensino da matemática na sala de aulas de São Tomé e Príncipe.

A reforma em curso para os conteúdos matemáticos do ensino da matemática para os 10º, 11º e 12º anos em São Tomé e Príncipe, apresenta linhas de orientação, relevantes, a saber: finalidades, objetivos gerais do tema e indicações metodológicas, competências gerais e recursos/equipamentos. Estão a ser considerados temas estruturantes da área da geometria, da área da análise infinitesimal e, ainda, da área da estatística e probabilidades. Esta reorganização irá permitir formar cidadãos com mais conhecimento científico na área da matemática a pensar nas necessidades do país a nível de emprego científico e não só. Nesta reorganização existe um aspecto relevante que é o de constatar que a computação em termos de software deverá ter um peso considerável como “ferramenta” indispensável no ensino em geral e, em particular, no ensino da matemática. Permitindo abordar assuntos complexos de forma estimulante

para os alunos, estes podem descobrir que afinal a matemática tem uma beleza que os pode seduzir e surpreender.

De seguida, vamos comentar as linhas de orientação da reforma em curso para os conteúdos matemáticos do ensino da matemática para os 10º, 11º e 12º anos em São Tomé e Príncipe, evidenciando que estas linhas de orientação validam de forma inequívoca a inclusão do estudo dos fractais no ensino da matemática, podendo ser, sem dúvida, uma mais valia para todos os intervenientes no sistema educativo do país, com vista a um acréscimo positivo na reforma educativa do país.

3.2.1 Finalidades

O ensino da matemática, começa de forma inocente desde do início da nossa vida terrena, de forma mais acentuada a partir da nossa infância, prolongando-se pela vida, até ao fim da mesma. O ensino da matemática de forma contextualizada, estruturada e planeada, irá nos permitir adquirir conhecimentos úteis para o normal desenvolvimento intelectual e social dos alunos, ao longo da sua formação académica e para a sua vida. O estudo da matemática é importante não apenas para os estudos de suas diferentes áreas, permitindo o desenvolvimento e conhecimento em outras áreas, algumas muito distantes da matemática. Por conseguinte, de seguida algumas considerações relevantes sobre a importância do ensino da matemática ao longo da formação académica dos alunos:

- Capacidade de observação metódica e de meditação profunda sobre um determinado problema, quer real quer abstracto;
- Capacidade de usar conceitos matemáticos de forma a encontrar as soluções ideais relativos a problemas pedagógicos, científicos e tecnológicos de forma a permitir o desenvolvimento de determinadas áreas do conhecimento;
- O estudo da matemática de forma adequada, metódica e estruturada vai permitir o normal desenvolvimento cognitivo dos alunos, permitindo um conhecimento mais profundo da ciência em geral, de suas aplicações e da sua importância no regular funcionamento de uma sociedade;
- O estudo da matemática de forma adequada, metódica e estruturada com a visão de que a mesma é uma “ferramenta” que promove o saber, a ciência, a tecnologia e o desenvolvimento de uma sociedade poderá contribuir para a autoestima, confiança e realização pessoal e profissional de uma sociedade;
- O ensino da matemática, a par do ensino de outras ciências em geral poderá contribuir para que uma sociedade tenha uma consciência interventiva, solidária, humanista e crítica.

Ora a introdução do estudo dos fractais nos programas educativos do ensino da matemática na sala de aulas de São Tomé e Príncipe, poderá contribuir na perfeição aos objectivos das finalidades mencionadas, seria uma mais valia a ter em conta para o processo evolutivo do conhecimento matemática, necessário numa sociedade, em particular em São Tomé e Príncipe.

3.2.2 Objectivos Gerais

Com base nas finalidades expostas na anterior subsecção, vamos apresentar de forma resumida os objectivos gerais do ensino da matemática no ensino básico e secundário, onde podemos constatar que os mesmos valorizam o conhecimento e o saber da matemática, ou seja, motivam os alunos para a curiosidade científica, desenvolvem o conhecimento e a devida interação positiva entre a matemática e as outras áreas científicas, preocupação com a componente de aplicação prática dos conteúdos teóricos, com destaque aos conteúdos teóricos e ao pensamento abstracto, mais concretamente:

- Entender e compreender as bases da matemática, fruto do pensamento abstracto relativo a problemas reais ou não. Com as bases da matemática, ter a capacidade de estabelecer conexões entre conceitos, métodos, procedimentos, axiomas, definições e, assim, obter-se teoremas com a capacidade de os aplicar a situações matemáticas ou em aplicações tecnológicas;
- Entender e compreender a necessidade de usar a matemática como “ferramenta” que contém características únicas, importante para a interpretação de fenómenos físicos através da modelação permitindo, desta forma, estudos numéricos;
- Entender a importância da capacidade de abstração como método indutivo importante para a obtenção de abstrações e raciocínios lógicos, permitindo assim uma argumentação forte da matemática em geral;
- Entender a necessidade de fornecer à matemática uma linguagem própria que possibilite uma comunicação oral e escrita universalmente aceite, permitindo desta forma que a matemática e as suas consequências sejam universais.

Todos estes objectivos gerais contemplam alguns dos pilares fundamentais do ensino da matemática, mais propriamente: raciocínio matemático; linguagem matemática e aplicações matemáticas. Ora, a inclusão do estudo dos fractais nas salas de aulas do ensino da matemática, está sem dúvida alguma em sintonia com tudo o que foi exposto. O estudo dos fractais, entre outras situações, permite-nos abordar conceitos de geometria não explorados na Geometria Euclidiana, permitindo assim a abordagem de uma outra geometria, a Geometria Fractal, a qual é relevante na matemática, em particular nas suas aplicações. Além disso, o estudo dos fractais irá possibilitar a

visualização da utilidade de outros conceitos matemáticos da análise infinitesimal. Mais propriamente, irá reforçar a importância do estudo da análise infinitesimal em geral.

3.2.3 Sugestões e Metodologias Gerais

Como forma de implementar os objetivos do programa, com base nas finalidades da disciplina, o corpo docente deverá ter em conta a realidade das suas turmas, ou seja, deverá elaborar o seu plano pedagógico e científico com base na especificidade do conhecimento dos seus alunos, não perdendo de vista o conhecimento científico pretendido e previamente estabelecido. Deverá abordar este assunto com os alunos de forma a os envolver no processo educativo, sempre com a visão da situação ideal para a sala de aula, que deverá ter em conta a melhor ensino para os conteúdos programáticos. O corpo docente, para lá do trabalho individual deverá recorrer ao trabalho em grupo entre alunos de forma a os motivar para a evolução dos seus conhecimentos matemáticos. Na sala de aulas a autonomia dos alunos é de salientar e relevante, mas a cooperação a desenvolver com actividades de grupo deverá ser valorizada. Mesmo os melhores alunos, podem desenvolver capacidades extras via cooperação em actividades de grupo.

As actividades podem ser implementadas, entre outras, com a resolução de problemas concretos, com aplicações reais de preferência, de forma a que os alunos possam visualizar a importância dos conceitos matemáticos. Alguns conceitos relevantes a ter em conta como método geral para o processo educativo de forma a enriquecer a experiência dos alunos:

- Despertar a sua intuição via curiosidade intelectual para o saber científico e para o conhecimento em geral;
- Ter o sentido de observação apurado para um determinado problema, de forma a fazer a ligação matemática com o problema em estudo;
- Com os conceitos adquiridos, reforçado com um espírito de observação cuidado, conseguir com critério científico e pedagógico ter a noção do poder da dedução, da reformulação, passando pela prova dos conceitos e do saber pelo expor das conclusões;
- Criar hábitos de trabalho que promova o acréscimo do saber científico, quer individual quer de grupo, permitindo a aprendizagem de todos os intervenientes com o debate de ideias, opiniões e observações do grupo;
- Ter o espírito de perseverança, de cooperação e, ainda, o gosto pelo conhecimento em geral.

3.2.4 Competências

Desenvolver conceitos de autoconfiança, culturais e de hábitos de trabalho com base num correcto estudo dos conteúdos programáticos é relevante no processo educativo. Por conseguinte, um programa educativo, deverá incutir nos alunos, entre outros, os seguintes itens:

- A importância de saber apresentar as suas ideias e opiniões com uma argumentação fundamentada;
- A importância, face um dado problema, ter um espírito pedagógico e científico que apresente o seu lado crítico, de rigor e de confiança de forma fundamentada;
- Importância de ter iniciativa própria para estudar novos problemas, de forma a exprimir toda a sua criatividade com base nos conhecimentos pedagógicos e científicos adquiridos ao longo dos anos;
- Importância de pesquisar os assuntos em estudo de forma a complementar o seu conhecimento e das áreas científicas necessárias para a sua compreensão;
- Ter a capacidade de tomar decisões de forma ponderada com base em todo o conhecimento adquirido;
- Manifestar o gosto e o interesse pelo conhecimento científico via pesquisa bibliográfica, de forma a ter uma opinião mais acertiva sobre os assuntos em estudo;
- Ter o cuidado de ler com regularidade revistas científicas sobre as suas áreas de interesse científico;
- Compreender que o estudo da matemática de forma correcta poderá ser uma resposta aos problemas que o homem e a natureza nos apresentam;
- Considerar sempre a opinião de terceiros de forma a valorizar uma decisão de grupo ou individual, o debate científico em grupo é oportuno pois permite uma resposta mais credível face aos problemas;
- Sentido de responsabilidade individual ou inserida num grupo de forma a permitir um trabalho individual ou de grupo de qualidade humanista, social, pedagógica e científica;
- Preocupação pelo cuidado humanista, social, pedagógico e científico como apresenta as suas ideias (de forma individual ou em grupo) e os seus trabalhos de forma a transmitir confiança e organização.

3.2.5 Capacidades

No estudo da Matemática é importante os alunos desenvolverem capacidades e aptidões que lhes permitam usar a matemática como uma “ferramenta” útil para conhecer, aprofundar, desenvolver o raciocínio, o pensamento, a comunicação e o interpretar dos assuntos em estudo de cariz abstracto ou prático no campo das aplicações. Nesse sentido, são importantes os seguintes itens:

- Usar a modelação matemática como forma de interpretação de problemas concretos da natureza ou de âmbito tecnológico, contribuindo assim para uma resposta científica aos problemas em estudo;
- Ter estratégias diferenciadas para abordar um determinado assunto, escolhendo por análise e critério as mais adequadas de forma a se obter respostas;
- Ter o espírito crítico ao ponto de formular as hipóteses adequadas a um problema, ter a capacidade científica de prever os resultados e ter uma atitude crítica dos mesmos, contribuindo assim para a resolução dos problemas;
- Usar a matemática de forma adequada para resolver problemas concretos no âmbito das várias áreas das ciências, sejam elas mais teóricas, práticas ou tecnológicas;
- Usar o raciocínio matemático de forma adequado para a ligação de conceitos, relações, axiomas, teoremas, conjecturas e experiências permitindo desta forma generalizar novas metodologias e teorias que possam permitir a evolução matemática em áreas específicas do saber;
- Saber usar os conceitos matemáticos nas mais diferenciadas áreas da ciência de modo que a ciência permita o progresso sustentado da humanidade;
- Usar a linguagem matemática de forma lógica através de símbolos, conceitos, teoremas, teorias e vocabulário específico de forma a tornar a matemática e suas aplicações perceptíveis a qualquer leitor com conhecimentos matemáticos, permitindo desta forma para uma clarificação, necessário, nas exposições de trabalhos que envolvem conceitos e generalizações matemáticas.

3.2.6 Recursos

A aprendizagem adequada dos conteúdos matemáticos no ensino básico e secundário está intimamente ligada aos recursos e equipamentos disponíveis nas escolas para uso dos alunos e agentes educativos. Por conseguinte, na sala de aula deverá haver o essencial para a devida metodologia pedagógica e científica a ser implementada pelo corpo docente, mais propriamente: quadro preto, quadro branco e canetas feltro, régua,

giz, apagador, esquadro, compasso, transferidor, sólidos geométricos, apontador, livros de referência para consulta, retroprojector, projector de vídeo, computador, acesso à rede de internet, acetatos e canetas de acetatos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, calculadoras gráficas, entre outros itens que o corpo docente considere oportuno para a regular dinâmica na sala de aula que permita a devida aprendizagem dos alunos.

3.2.7 Tecnologia

É sabido que a tecnologia e o seu desenvolvimento é um factor relevante para o conhecimento pedagógico e científico dos alunos nos vários ciclos de formação educativa de um país e, São Tomé e Príncipe não foge à regra. O recurso à tecnologia na sala de aula como apoio relevante no processo educativo, neste momento, em São Tomé e Príncipe ainda é deficitário o acesso à tecnologia, esperamos que no futuro próximo esta situação seja invertida. Para o estudo das várias ciências, a tecnologia é relevante, pertinente e pode desempenhar um papel activo no conhecimento adquirido pelos alunos no processo educativo do país. A ideia da tecnologia não é substituir o corpo docente nem o regular ensino de quadro e giz, mas sim o de complemento sustentado de forma a aprofundar o conhecimento dos conceitos em estudo. Mesmo a nível do ensino da matemática, seria importante o recurso regular à tecnologia na sala de aula, pois os alunos podiam ter acesso a software específico como complemento do regular funcionamento das aulas, permitindo uma motivação extras para o estudo da matemática em geral e para os conteúdos em estudo. O uso da tecnologia na sala de aulas seria relevante para o complemento do estudo dos fractais. Seria relevante explorar a tecnologia para revelar a complexidade gráfica dos fractais quando o processo recursivo atinge um número de iterações elevado. A tecnologia na sala de aulas seria motivadora para o processo educativo em geral do país, esperamos que em breve a tecnologia seja possível de forma generalizada na sala de aulas como complemento à dinâmica pedagógica e científica que desejamos implementar em São Tomé e Príncipe com o estudo de assuntos concretos, em particular com o estudo dos fractais.

3.2.8 Computadores

Uma das tecnologias a ter em conta é o uso do computador como apoio pertinente na sala de aula de forma a permitir uma evolução na aprendizagem dos conteúdos matemáticos e de outras ciências. Existe software matemático muito interessante, por exemplo, Maple, XMáxima, Mathematica, Geogebra e o \mathbb{R} , em que os alunos podem testar e verificar os seus conhecimentos relativos aos distintos conteúdos programáticos dos programas de matemática do ensino básico e secundário, entre outros assuntos, podem testar os seus conhecimentos em: estatística, probabilidades, álgebra, geometria euclidiana e fractal, análise infinitesimal e métodos numéricos. Além disso, podem

usar este software para se iniciarem na programação matemática, assunto muito relevante quando recorreremos aos computadores como forma de auxiliar as aulas. O uso do computador na sala de aula de forma correcta por ser um factor motivacional relevante no processo de aprendizagem. Relativamente aos fractais existe software próprio para gerar fractais, por exemplo: Ultra Fractal e Fractint. Com este software podemos acompanhar todo o processo iterativo de uma sucessão recursiva e verificar a complexidade e a beleza de um fractal.

3.3 Tarefas com Fractais

Com base no programa de matemática de São Tomé e Príncipe que entrou em vigor em 2013 com a designação Escola +, vamos apresentar actividades concretas a realizar na sala de aula de forma a explorar os conteúdos matemáticos relativos à geometria fractal.

As tarefas e actividades serão planeadas pelo corpo docente de forma a envolver toda a dinâmica de grupo a criar para o efeito. Os grupos numa primeira fase vão realizar actividades simples de fractais clássicos recorrendo apenas a papel, lápis, borracha e régua, permitindo de forma simples iterar algumas figuras concretas com base em regras simples, podendo assim apreciar a beleza gráfica inerente a um fractal. Claro, nesta abordagem gráfica os conteúdos matemáticos associados ao processo iterativo serão recordados e aprofundados com base neste conhecimento prático.

Como forma de motivação, podemos solicitar aos alunos ideias concretas de forma a que cada grupo tente apresentar uma figura que com ideias simples e de forma recursiva seja possível apresentar um fractal. Alguns problemas podem ser colocados aos alunos como base de trabalho, de forma a colocarem em prática os conhecimentos adquiridos. Posteriormente, com o recurso ao computador e usando o software específico mencionado podemos apreciar e verificar a beleza complexa de um fractal, iteração a iteração.

3.4 Tarefas a Realizar com Fractais na Sala de Aulas

De seguida e para ilustrar toda a dinâmica de grupo ou de forma individual, vamos considerar algumas actividades e/ou tarefas de forma a apresentar o conceito de fractal na sala de aula, permitindo desta forma uma aprendizagem sequencial e metódica destes conceitos, para uma abordagem interessante sobre o tema ver também o trabalho referenciado no trabalho de Maria, ver [9]. Estas actividades e/ou tarefas são entendidas como introdutórias e, nesse sentido, vamos apresentar numa primeira fase apenas quatro actividades.

Numa primeira actividade, o corpo docente irá apresentar aos alunos um conjunto de fotos, em particular fotos com ênfase na natureza, podendo ser variadas, por exemplo, entre outros: vales, rios, montanhas, picos, vegetação variada, linha de costa de um continente, ramificação de árvores, tronco de uma árvore, folhas de árvores, conchas, cove-flor, ramificação pulmonar e o fruto ananás. A ideia é os alunos por observações afectarem figuras geométricas euclidianas de forma a descrever os exemplos dados. Posteriormente, pretende-se que os alunos façam uma apresentação oral sobre as suas escolhas euclidianas para as suas escolhas de fotos, verificando que as irregularidades apresentadas nas figuras nos indicam que a geometria euclidiana não é a que melhor nos descreve a natureza. E, assim, introduzimos, por necessidade a geometria fractal.

Numa segunda actividade, o corpo docente faz uma abordagem histórica à geometria fractal, recorrendo ao apoio da tecnologia, em particular ao computador, de forma a expôr e mostrar figuras existentes na natureza ou criadas pelo homem para mostrar, assim, que a geometria euclidiana apresenta falhas quando tentamos perceber a génese das figuras em estudo, fazendo desta forma a ponte para a geometria fractal. Com esta tarefa pretendemos mostrar aos alunos a importância da geometria fractal, falando dos seus conceitos e das suas propriedades, mostrando sempre exemplos concretos para clarificar os temas em estudo.

Numa terceira actividade, o corpo docente apresenta aos alunos ideias simples, consideradas como regras, de forma a permitir a iteração recursiva de algumas figuras obtendo assim uma figura fractal. Tais iterações serão obtidas apenas com a disponibilidade de papel, borracha, lápis, régua, compasso, transferidor, entre outros, utensílios de forma a se obter figuras que ilustrem o processo recursivo associado. Os fractais em estudo podem ser o fractal de Von Kock e o triângulo de Sierpinski. Nesta tarefa, pretende-se, ainda, recorrer ao computador para a devida ilustração das iterações via o software livre Fractint disponível para o efeito, de referir que o software Ultra Fractal é um pacote não livre. Por fim, os alunos podem ter ideias concretas sobre figuras a iterar com base em regras simples, para se ver o resultado e se analisar os mesmos.

Numa quarta actividade, via proposta do corpo docente, os alunos vão expor os trabalhos realizados na tarefa anterior e, evoluindo, com uma apresentação, entendida como uma primeira abordagem os fractais de Julia e de Mandelbrot. Os alunos serão convidados a falar sobre os mesmos em termos históricos, conceitos, propriedades, evidenciando as suas dúvidas e questões. Neste processo, os alunos devem apresentar e desenvolver os conceitos matemáticos associados aos fractais expostos. Devem ainda, apresentar uma reflexão sobre a importância computacional inerente a todo o processo fractal. O ideal seria um evento aberto à comunidade da escola, permitindo assim que alunos e professores de outras áreas tenham conhecimento desta área da matemática, com o nome de geometria fractal. A exposição do trabalho deverá ser apresentada com recursos tecnológicos de preferência com recurso a exemplos dos fractais em estudo no computador, tornando assim a exposição um momento interessante para os partici-

pantes. No fim da exposição, o corpo docente irá complementar as apresentações com informação mais técnica e precisa sobre os temas apresentados. Haverá espaço para um pequeno debate entre os intervenientes para perguntas livres ou introduzidas pelo corpo docente de forma a debater o assunto dos fractais de forma o mais completa possível.

3.5 Relação do Floco de Neve com a Progressão Geométrica

O estudo relativo às progressões em geral e, em particular, sobre as progressões geométricas é realizado no 11^o ano do ensino secundário, via programa de matemática. As progressões geométricas podem ser aplicadas a imensas situações reais e abstractas. A geometria fractal é um campo onde as progressões geométricas podem ter imensas aplicações práticas, em particular no estudo do fractal conhecido por floco de neve, ver Figura 3.1.

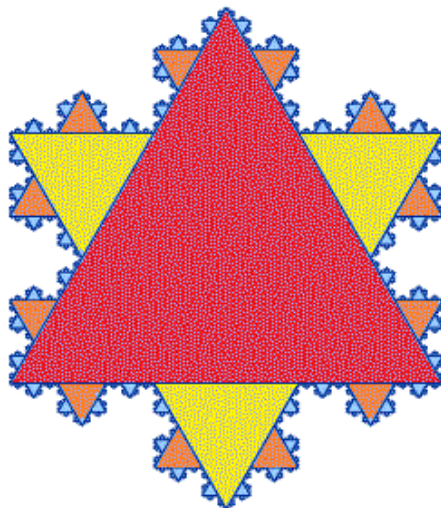


Figura 3.1: Fractal floco de neve (ou estrela) de Von Kock.

Nesta secção pretendemos mostrar aos alunos que os fractais estão envolvidos por conceitos matemáticos, de estudo geral no sistema educativo. Por conseguinte, de seguida, vamos deduzir uma expressão geral para o processo iterativo do perímetro total dos triângulos associados ao fractal mencionado na Figura 3.1. Este fractal, por vezes é usado para ilustrar a linha de costa de um país. Nesta apresentação, consideramos por aprendidos por parte dos alunos todos os conceitos relativos às sucessões, limites, convergência, continuidade e suas propriedades em geral.

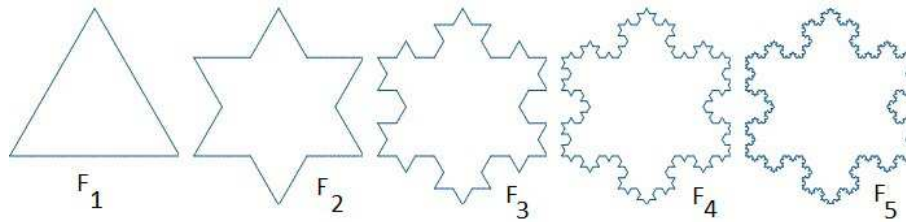


Figura 3.2: Sequência iterativa do floco de neve, sendo F_n o perímetro de ordem n .

Dado um triângulo equilátero e com base no esquema iterativo da Figura 3.2, podemos deduzir uma sucessão para os perímetros dos triângulos iteração a iteração. A regra simples a ter em conta iteração a iteração é ilustrada na Figura 3.3.

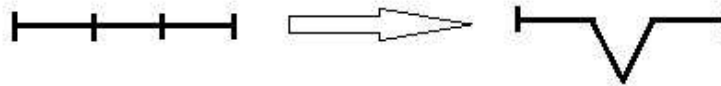


Figura 3.3: Regra simples do processo iterativo do fractal de Von Kock.

Com base no sistema iterativo ilustrado na Figura 3.3 e, tendo em conta as deduções apresentadas na subsecção 2.1.2 deste trabalho, podemos concluir que a sucessão dos perímetros dos triângulos, designado por F_n para uma iteração generalizada de ordem n , é dada por:

$$F_n = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

De seguida, vamos mostrar que a sucessão dos perímetros é monótona crescente. Para tal basta mostrar que

$$F_{n+1} > F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Por outras palavras para mostrar a condição (3.2), basta mostrar que para qualquer iteração de ordem n , se tem

$$F_{n+1} - F_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Com base na sucessão dada pela expressão (3.1) e considerando uma iteração arbitrária n , vem:

$$F_{n+1} - F_n = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n - 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1} \quad (3.4)$$

$$= 3 \left[\left(\frac{4}{3} \right)^n - \left(\frac{4}{3} \right)^n \left(\frac{4}{3} \right)^{-1} \right] \quad (3.5)$$

$$= 3 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[1 - \frac{3}{4} \right] \quad (3.6)$$

simplificando, temos

$$F_{n+1} - F_n = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

como, pretendíamos mostrar.

De seguida, vamos mostrar que a sucessão dos perímetros é uma progressão geométrica. Para tal basta mostrar que a razão entre termos consecutivos quaisquer é sempre constante, ou seja, não depende da razão dos termos a considerar. Por outras palavras temos que mostrar que:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Sabendo que para qualquer iteração n , temos

$$F_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \text{ e } F_{n+1} = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

vem para qualquer arbitrário n , a seguinte razão entre termos consecutivos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{3 \left(\frac{4}{3}\right)^n}{3 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} = \frac{3 \left(\frac{4}{3}\right)^n}{3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}} \quad (3.9)$$

$$= \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

ou seja, como a razão entre termos consecutivos qualquer é constante para qualquer n , significa que estamos perante uma progressão geométrica de razão $4/3$. É de verificação imediata, via noções básicas de limites que a sucessão dos perímetros, quando o número de iterações tende para infinito, o limite da sucessão tende também para infinito, ou seja, a sucessão é divergente.

Com base na apresentação anterior é relevante indicar trabalhos para os alunos, numa primeira fase, apenas com dados das aulas, posteriormente o corpo docente promove uma apresentação em grupo de forma a promover um debate de ideias sobre as resoluções e corrige os trabalhos esclarecendo todas as dúvidas relativas às propostas indicadas. Nesse sentido, seria pertinente o seguinte trabalho a realizar pelos alunos.

Ao verificar a Figura 3.4, em que cada quadrado se obtém do anterior unindo os pontos médios dos lados. Podemos verificar que é uma sequência de quadrados que a cada iteração a medida dos lados diminuí de forma acentuada. A situação descrita acontece porque a área de um quadrado inscrito noutra quadrado é dada pela metade do valor da área do quadrado anterior. Por outras palavras, os quadrados de menores lados estão inscritos em quadrados de maiores lados. Sem perda de generalidade vamos supor que o quadrado maior tem lados com medida de uma unidade de medida, ver Figura 3.4.

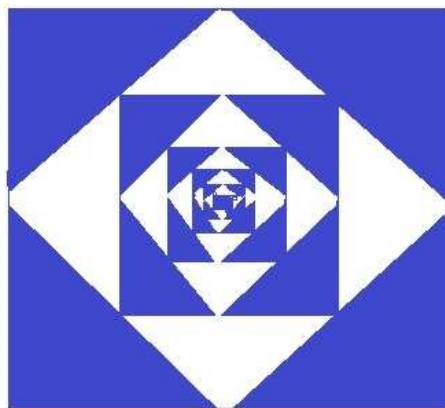


Figura 3.4: Fractal via quadrados: Processo iterativo.

Questões a colocar aos alunos como trabalho relevante onde conceitos matemáticos do programa de matemática do ensino secundário são usados de forma a se entender a natureza do fractal em estudo:

- Escrever os 5 primeiros termos da sucessão das áreas e deduzir uma expressão geral para a sucessão;
- Mostrar que a sucessão das áreas constitui uma progressão geométrica e indicar a sua razão. O que acontece quando o número de iterações tende para infinito?

3.6 Relação do Conjunto de Julia com Infinitésimos

O fractal de Julia é um bom exemplo de um processo iterativo em que bastam poucas iterações para o processo ficar com uma característica infinitesimal. Por outras palavras, o processo iterativo rapidamente apresenta figuras com dimensão muito pequena, em que apenas o uso do computador nos permite visualizar a beleza do momento recursivo, ver Figura 3.5.

Para ilustrar esta característica infinitesimal de um fractal, vamos apresentar o exemplo ilustrado na Figura 3.6. A regra a considerar é muito simples, dado um triângulo equilátero vamos ter em conta os pontos médios dos lados e esses pontos vão ser os vértices de um triângulo equilátero central de área menor inserido no triângulo inicial. Posteriormente, vamos aplicar a mesma regra ao novo triângulo e, assim, sucessivamente de forma recursiva. Podemos constatar que para poucas iterações a sucessão de triângulos passa a ter áreas muito pequenas, evidenciando desta forma a característica infinitesimal de um fractal. Podemos verificar, que a área dos triângulos considerados neste processo decresce iteração a iteração evidenciando um decrescimento muito acentuado.



Figura 3.5: Característica infinitesimal no fractal de Julia.

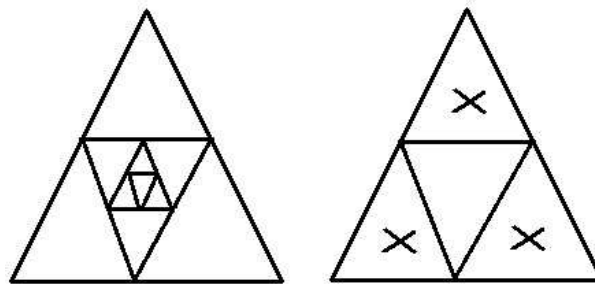


Figura 3.6: Ilustração de um fractal infinitesimal.

Para evidenciar o pensamento descrito na Figura 3.6, vamos considerar a área do triângulo inicial como sendo a unidade, para uma determinada unidade de medida, ou seja, a área do triângulo T_1 é dada por $A_1 = 1$. Por conseguinte, na iteração número $n = 2$ o triângulo T_2 inscrito no triângulo T_1 apresenta uma área $A_2 = 1/4$. Por consequência, com o pensamento recursivo presente, na iteração número $n = 3$, temos

$$A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2. \quad (3.11)$$

Na sequência, para a iteração $n = 4$, vem

$$A_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \quad (3.12)$$

e, generalizando o processo iterativo para uma iteração arbitrária de ordem n , vem que a área associada ao triângulo T_n é dado pela expressão

$$A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}. \quad (3.13)$$

Podemos concluir de forma muito simples, que para este exemplo, o decréscimo do valor das áreas é um processo muito acelerado. Por exemplo, considerando a iteração número $n = 10$, vem

$$A_{10} = \left(\frac{1}{4}\right)^9 = 0,0000038. \quad (3.14)$$

Com noções básicas de limites podemos constatar que o limite da sucessão A_n tende para zero, quando n tende para infinito. Por conseguinte, a sucessão das áreas A_n é um infinitésimo, isto é,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |A_n| < \delta \quad (3.15)$$

ou seja, dado um número real δ qualquer e positivo tão pequeno quanto se queira, então podemos afirmar que existe sempre uma ordem natural p a partir da qual todos os termos da sucessão são tão pequenos quanto se queira, por outras palavras, tão próximo de zero quanto se queira. Ilustrando o conceito com um valor de δ pequeno, por exemplo, $\delta = 10^{-9}$. Então ao considerar $|A_n| < 10^{-9}$ é possível deduzir que existe uma ordem $p = 15$ para a qual a partir de tal ordem $n \geq 15$ temos que todos os termos da sucessão estão tão próximos de zero quanto se queira.

Outro trabalho interessante para os alunos a ter em conta para futura abordagem em grupo, nas condições descritas anteriormente, seria: Considerar a área do triângulo equilátero inicial com medida de duas unidades de medida. Por consequência, a ideia seria deduzir a expressão geral para sucessão das áreas dos triângulos resultantes do processo iterativo e, verificar que a expressão geral é um infinitésimo.

3.7 Relação do Triângulo de Sierpinski e a Sucessão

De seguida e com base na Figura 3.7, vamos apresentar algumas sucessões interessantes associadas ao processo iterativo de um triângulo de Sierpinski.

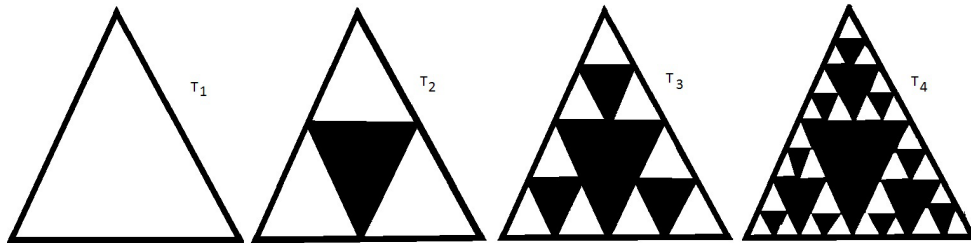


Figura 3.7: O mundo maravilhoso do fractal de Sierpinski.

Considerando o processo iterativo descrito na Figura 3.7 que permite a passagem T_1 , para T_2 e depois para T_3 e sucessivamente, podemos pensar em duas situações

destintas: a situação dos triângulos vazios representados a branco e os triângulos preenchidos, representados a cor preta. Numa primeira fase, vamos considerar a sucessão dos triângulos representados a branco, a qual vamos designar por U_n , mais propriamente esta sucessão designa o número de triângulo representados a branco.

Na iteração $n = 1$, vem $U_1 = 1$. Para a iteração $n = 2$, vem $U_2 = 3$. Na iteração $n = 3$, temos $U_3 = 3^2$. Para a iteração $n = 4$, obtém-se $U_4 = 3^3$. O processo iterativo em causa é simples e, por conseguinte, para uma iteração de ordem n , vamos obter a expressão geral

$$U_n = 3^{n-1}, \quad (3.16)$$

esta sucessão é conhecida por ser uma sucessão exponencial, a qual é uma sucessão divergente. Portanto, o número de triângulos brancos tende para infinito, ver a ilustração interessante via Figura 3.8. A situação dos triângulos iteração a iteração representados a cor preta fica como proposta de trabalho para os alunos, para apresentar os resultados de forma individual ou em grupo.

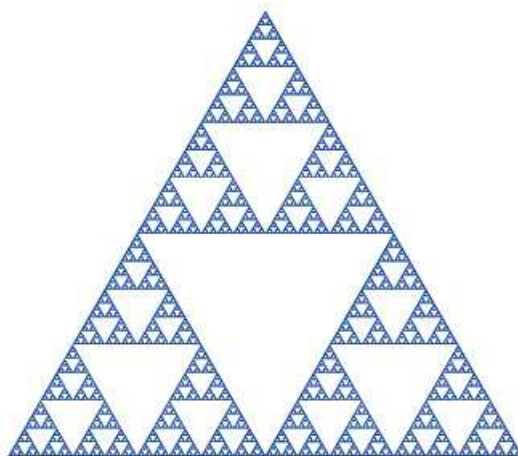


Figura 3.8: Ilustração interactiva do fractal de Sierpinski.

Considerando agora outra situação interessante via Figura 3.7, a questão da sucessão das áreas dos triângulos brancos, a qual vamos designar por A_n . Supondo que a área do triângulo inicial é uma unidade de medida. Nas condições descritas a sucessão das áreas totais da parte branca numa iteração T_n é dada por

$$B_n = U_n A_n. \quad (3.17)$$

Pretende-se que o aluno, identifique a expressão geral da sucessão e mostre que o limite da sucessão em causa, a designar por B_n , converge para zero, quando n tende para infinito. Outra questão pertinente para trabalho dos alunos, nas condições descritas anteriormente: considerando a sucessão da área total dos triângulos coloridos numa

iteração T_n , dada por C_n , indentifique a expressão geral da sucessão e indique o valor para a qual converge, quando n tende para infinito.

Outra actividade interessante para os alunos é a situação representada na Figura 3.9. A figura representa, o crescimento de uma árvore a cada primavera. Sempre que ocorre uma primavera, os seus ramos bifurcam, criando assim um fractal muito interessante para estudo.

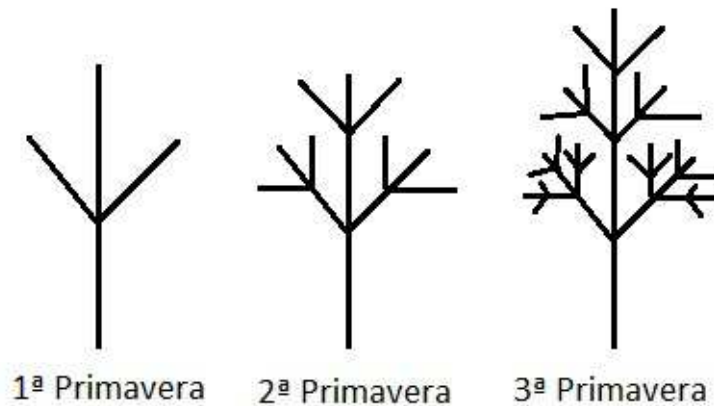


Figura 3.9: Ramificação de uma árvore, primavera a primavera.

O trabalho a realizar pelos alunos consiste em determinar a expressão geral da sucessão associada às primaveras da árvore numa iteração arbitrária n e, consecutivamente, responder às seguintes questões:

- Quantos rebentos novos (ramificações) surgem na 10ª primavera?
- Quantos troncos há ao todo na 8ª primavera?

Capítulo 4

Considerações Finais

O matemático Negri em 2009, no seu trabalho [16], escreve: “Quando a geometria euclidiana já não responde às exigências do meio onde vivemos, urge então recorrer a outras ferramentas para solucionar as diversas questões que nos afligem no dia à dia. Nesse sentido, a geometria fractal tornou-se uma aliada na leitura dos objectos da natureza”. Nesse sentido, Mandelbrot, tinha razão quando disse algo do estilo em [10]: “basta observar a natureza no mais pormenor possível, pois é incrível que ao estudar fractais comecei a ter um olhar fractalista em tudo que olhava, parecia que havia uma similaridade. Por conseguinte, após estudar o assunto dos fractais, posso concluir que não é o mundo que muda, mas sim a nossa maneira de observar o mundo“. Pensamentos profundos tanto de Negri como de Mandelbrot, a geometria fractal acaba por entrar em nós de forma simples pela forma como a mesma se expõe ao nosso pensamento, a geometria fractal é uma necessidade natural do nosso pensamento face ao mundo que nos rodeia e vivemos.

Por conseguinte, a geometria fractal mostra a aplicabilidade da matemática em diversas áreas, por exemplo, entre outras, nas artes, nas ciências e nas tecnologias. A geometria fractal é relevante para ser estudada em contexto de sala de aulas, na sua vertente mais pedagógica e de inovação científica dos programas do ensino da matemática. Mas é importante o devido acautelar, pois com base no trabalho de Stewart, ver [19], onde aparece a expressão “a aplicabilidade dos fractais é ampla, mas não é universal”. Nesse sentido, os fractais apresentam-nos representações da natureza que podem ser modelados matematicamente para posteriormente se obter respostas numéricas, trazendo consigo uma nova maneira de entender as complexidades e as irregularidades do mundo em que vivemos.

Assim, o objectivo deste trabalho não foi o de esgotar o estudo sobre o tema dos fractais, mas sim, o de apresentar sugestões e ideias que possam motivar os professores e os alunos do ensino secundário de São Tomé e Príncipe para realidades diferentes

em que ensino dos fractais na sala de aulas permita ao aluno compreender a existência e as aplicações de um fractal. Também não foi desejo nosso aprofundar as aplicações dos fractais em geral, mais sim o de trabalhar o assunto dos fractais numa perspectiva de estudo com vista a sua introdução na regular actividade pedagógica e científica a desenvolver na sala de aulas.

É, desta forma, importante salientar, que a introdução deste conceito dos fractais no sistema educativo Santomense, nos tempos mais próximos, pode ser condicionado devido à falta de meios tecnológicos nas salas de aulas, mais propriamente a falta de computadores. Nesse sentido, todos os agentes educativos e em conjunto com as autoridades políticas do país devem fazer um esforço para que os meios tecnológicos sejam parte integrante do sistema educativo do nosso país. O país em geral e a sociedade de São Tomé e Príncipe só tinha a ganhar com tal actualização tecnológica para uso das diferentes áreas científicas associadas ao processo educativo.

É imperativo que, ao lerem esta dissertação, os leitores sintam-se cada vez mais motivados e mais persistentes na realização das tarefas que envolvam fractais e que este trabalho seja um fio condutor para futuras revisões dos programas educativos do ensino da matemática no ensino básico e secundário em São Tomé e Príncipe. Confiando inteiramente na força da cooperação entre professores e alunos para eliminar obstáculos e vencer dificuldades, esperamos que **Fractais Clássicos-Aplicação à Sala de Aula de São Tomé**, possa constituir uma boa ajuda, como instrumento de trabalho, na resposta aos desafios colocados e na descoberta dos horizontes sempre e sempre renovados com a matemática, que no dia à dia, vai descobrindo e nos apresentando o mundo real e abstracto de uma forma única, inovadora e bela.

Por fim, é gratificante sentir que apesar de todo o esforço na preparação deste trabalho, valeu a pena, pois tudo é possível desde que a alma não seja pequena, como disse o poeta Fernando Pessoa.

Bibliografia

- [1] Assis, T.A., Miranda, J.G.V., Mota, F.B., Andrade, R.F.S. e Castilho, C.M.C.C., Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, no.2, 2304, pp. 1-10. 2008.
- [2] Barbosa, R.M., Descobrimo a Geometria Fractal: Para a Sala de Aula, *Belo Horizonte: Autêntica*, 3^o Edição, 2007.
- [3] Capra, F.A., A Teia da Vida: Uma Nova Compreensão Científica Dos Sistemas Vivos *São Paulo: Pensamento-Cultrix*, 1^a Edição, 2012.
- [4] Gomes, F. e Lima, Y., XEQMAT, Matemática 11^o ano, *Lisboa: Editorial O Livro.*, 1997.
- [5] Hohenwarter, M., Ajuda do GeoGebra, *versão portuguesa Jorge Geraldes*, 2006.
- [6] Janos, M., Geometria Fractal, *Rio de Janeiro: Ciência Moderna*, 2008.
- [7] Jorge, A.M., Alves, C.B., Fonseca, G. e Barbedo, J., Infinito 11, Parte 1, *Porto: Areal Editores*, 2004.
- [8] Lorenzato, S., Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis, *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*, São Paulo: Autores Associados, pp. 3-38, 2006.
- [9] Maria, S., Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica, *VIDYA*, V.32, n.2, p.113-132, 2012.
- [10] Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature, *New York: Freeman*, 1982.
- [11] Mandelbrot, B.B., Objectos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão, *1^a Edição. Lisboa: Gradiva*, 1991.
- [12] Ministério da Educação, Cultura e Formação de São Tomé e Príncipe, Carta Política educativa de São Tomé e Príncipe, *Ministério da Educação, Cultura e Formação, (Visão 22)*, Primeira Versão, Maio 2012.

- [13] Ministério da Educação, Cultura e Formação de São Tomé e Príncipe, Programa da Disciplina de Matemática-Ensino Secundário, *MEC/IMPV*, 2013.
- [14] Nascimento, M., Silva, S.C.R., Maciel N.A., Uma Proposta Didática para o Ensino de Geometria Fractal em Sala de Aula na Educação Básica, *VIDYA*, vol. 32, no. 2, pp. 113-132, 2012.
- [15] Navaz, M.B., Machado, A.I., Souza, J.C. e Lucena, M.E.R., A Geometria das Dobraduras: Trabalhando o Lúdico e Ressignificando Saberes, *IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática (Caxias do Sul)*, 2006.
- [16] Negri, M.G., Introdução ao Estudo dos Fractais, *Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia*, 2009.
- [17] Rabay, Y.S.F., Estudo e Aplicações da Geometria Fractal, *Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exactas e da Natureza*, 2013.
- [18] Salustino, H.P.R., Caos e Fractais na Sala de Aula, *Universidade de Évora, Departamento de Matemática*, 2010.
- [19] Salvi, R.F. e Marandola, E.J., Geografia e Interfaces de Conhecimento: Debates Contemporâneos sobre Ciência, Cultura e Ambiente, *Eduel (Edição Portuguesa)*, 2011.
- [20] Santana, A.M. e Marques de Sá, L.A.C., Abordagem Histórica da Teoria dos fractais na Generalização Cartográfica, *VI Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação*, Recife, 24-25 de Agosto, 2016.
- [21] Santos, C.P., Neto, J.P. e Silva, J.N., Os fractais + Puzzle "Torres de Hanói", *Edimpresa*, 2007.
- [22] Stewart, I., Será que Deus Joga aos Dados? A Nova Matemática do Caos, 1ª Edição. *Rio de Janeiro: Zahar (Edição Portuguesa)*, 1991.
- [23] Viegas, C., Gomes, F. e Lima, Y., Matemática A, 11º ano, *Texto Editora*, 1ª ed., 2011.
- [24] Wozny, J., How We Understand Mathematics: Conceptual Integration in the Language of Mathematical Description, *Springer International Publishing*, 2018.