

# FIOS DE MEMÓRIA

LIBER AMICORUM PARA FERNANDA HENRIQUES

Organização de Irene Borges-Duarte



## **FIOS DE MEMÓRIA**

LIBER AMICORUM PARA FERNANDA HENRIQUES

Organização: Irene Borges-Duarte

Capa e paginação: oficina grotesca

© Autores

Edições Húmus, 2018

End. Postal: Apartado 7081

4764-908 Ribeirão – V.N.Famalicão

Tel. 926 375 305

E-mail: humus@humus.com.pt

Impressão: Papelmunde, SMG, Lda. – V.N.Famalicão

1.ª edição: Dezembro de 2018

Depósito Legal: 448919/18

ISBN: 978-989-755-384-4

Apoios:



UNIVERSIDADE DE ÉVORA  
ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS



Centro de  
Investigação em  
Ciência Política



LABCOM.IFP  
Comunicação, Filosofia e Humanidades  
Unidade de Investigação  
Universidade da Beira Interior



**PRAXIS**

Centro de Filosofia, Política e Cultura

# Entre a Matemática e a Filosofia: educar o raciocinar em busca da compreensão

**ANA PAULA CANAVARRO**

*Professora auxiliar no Departamento de Pedagogia e Educação da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora. Presidente da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.*

## 1. O pretexto do texto

“Entre a Matemática e a Filosofia”, revelou a Fernanda Henriques ter estado na sua escolha para os seus estudos no ensino superior. Quis frisar, no dia da sua última lição, a sua atração pela Matemática e o gosto que dela retirou no seu percurso de jovem estudante – no entanto, a sua opção viria a ser a Filosofia.

Retive, do que Fernanda Henriques revelou, o prazer que ela sentia ao resolver com sucesso as famosas listas de exercícios propostos nos clássicos livros do Professor António do Nascimento Palma Fernandes, professor efetivo de Matemática do Liceu Pedro Nunes, que também foi assistente na Faculdade de Ciências de Lisboa.

Estes livros de exercícios, simplesmente designados como os “Palma Fernandes”, não sendo manuais escolares, eram extensamente usados pelos que estudavam Matemática nos Liceus nos anos 60 – e ainda muito posteriormente. Focados em diferentes temas matemáticos, dirigiam-se aos sete anos do antigo Liceu. Com uma média de 200 páginas cada, recheavam-se de extensas e compactas coleções de exercícios com diferentes graus de dificuldade, uns resolvidos e muitos outros por resolver – mas todos com soluções, o que permitia ao utente conferir a correção das resoluções que fazia, para grande entusiasmo dos que conseguiam progredir com sucesso em regime autónomo, conquistando alínea a alínea.

Para além dos exercícios tipo, os livros continham também, embora em número relativamente reduzido, os típicos *word problems*, destinados a ser resolvidos como “problemas para equacionar”. Um breve texto introduzia uma situação, na maior parte das vezes de uma realidade artificial ficcionada ou do domínio da própria Matemática, e sobre ela colocava uma questão não imediata. Requeria-se então a sua interpretação com o propósito de identificar a incógnita e, ultrapassada essa fase, havia que escrever a(s) equação(s) que a relacionavam com os restantes elementos numéricos presentes no texto, de modo a manipular os símbolos e, através do cálculo algébrico, obter a solução do problema. A incógnita era quase sempre designada por  $x$ , o misterioso  $x$  que por vezes era acompanhado do  $y$ , se duas incógnitas fossem necessárias, como no caso do exemplo reproduzido na figura 1, que extraio do livro de 5.º ano do Liceu:

“Ponha em equação e resolva o seguinte problema:

Num número, compreendido entre 800 e 900, o quociente da divisão do algarismo das dezenas pelo das unidades é 4 e o resto 1. Determinar o número sabendo que excede em 18 unidades o produto da soma dos seus algarismos por 46.”

Resposta:

Sistema de 2 equações:

$$x = 4y + 1$$

$$800 + 10x + y = 46(8 + x + y) + 18$$

$$892$$

Figura 1: Excerto de um problema de um livro de texto (Fernandes, 1964, p.182)

Estima-se que, no total, os livros de Palma Fernandes ofereciam mais de 10.000 exercícios. Não há dúvida de que constituíram um potente recurso para quem precisava de se “exercitar em Matemática”, muito popular para o “treino e a consolidação da matéria”, como então se costumava dizer – e, justamente, era esse o seu propósito.

## 2. Da Matemática do exercitar à Matemática do raciocinar – e seus ensinamentos

### 2.1. Mas que Matemática está por detrás dos Palma Fernandes?

Os Palma Fernandes constituem um volumoso e valioso legado com os seus méritos bem delimitados – são livros paradigmáticos da visão da Matemática escolar que então reinava e que se pretendia que os alunos aprendessem. É uma *Matemática do exercitar*, focada na execução de procedimentos matemáticos pré-adquiridos que, quando adequados e aplicados de forma rigorosa usando e abusando da manipulação simbólica, conduzem à solução.

A quantidade e a tipologia das tarefas propostas – exercícios e problemas para equacionar – são reveladores do pensar subjacente: há que treinar muito, repetir muitas vezes, praticar à exaustão os procedimentos previamente ensinados pelo/a professor/a, independentemente da obscuridade gerada pelo aparato simbólico e pela artilharia algébrica, tão poderosa mas, simultaneamente, tão escassa de significado. Os algoritmos, considerados entidades matemáticas máximas, surgem com eficácia inabalável sem que alguma vez se questione porque funcionam. É assim e pronto. “Em Matemática, tu não compreendes as coisas. Habitua-te a elas.”, é uma famosa citação de John von Neuman, influente matemático da primeira metade do séc XX, que, como muitos outros, ironiza sobre a falta de sentido que caracteriza um certo fazer mecanicista da Matemática.

## **2.2. Que consequências a valorização da Matemática do exercitar encerra para a educação matemática?**

Por um lado, esta visão da Matemática não faz justiça à verdadeira essência e natureza da matemática, criando concepções mutiladas sobre esta ciência. Como o célebre matemático George Pólya bem colocou no século passado, no original “How to solve it”, de 1945, amplamente traduzido, matemática é “resolução de problemas” – e problemas são, por definição, situações relativamente às quais não se sabe o que fazer (Pólya, 2003). Problemas não são exercícios. Para resolver um problema é preciso analisar, mobilizar conhecimentos diversos, esboçar estratégias alternativas, executá-las e refletir sobre elas, com vista à obtenção de uma solução (Abrantes, 1989). Este processo convoca o raciocínio criativo, pois não se basta com a aplicação direta de algoritmos computacionais standardizados que se sabem resultar. Não existem prescrições gerais e uniformes para a resolução de problemas. É o rasgo do intelecto do resolvidor que dita a forma de resolução, elaborada em resposta ao desafio que o motiva. Os problemas podem ser diversos, relacionados com a realidade, com outras áreas do saber, ou do domínio estrito da Matemática; podem ser rápidos de resolver ou exigir um tempo extenso ou indeterminado; podem ser fechados, como uma solução única, ou constituir terreno fértil a investigações que se estendem por caminhos imprevisíveis e geram novos conhecimentos e suscitam novos problemas (Ponte, 2005). Uma Matemática assente na prática rotineira de resolução de exercícios está muito longe de proporcionar uma experiência matemática plena, dando origem a visões redutoras e distorcidas sobre esta ciência.

Por outro lado, a Matemática do exercitar, com a sua ênfase mecanicista, comporta também riscos relativamente ao papel dos alunos na aprendizagem da disciplina, tratando-os como aprendentes passivos, dos quais se espera que reproduzam o que apreenderam por via do professor, alheios ao processo de construção de saber (matemático). Em geral, e mostram-nos estudos diversos (APM, 1998), este fazer da Matemática é sustentado por um ensino de tipo expositivo, em que o professor, o detentor do conhecimento, expõe aos estudantes a matéria que se espera que adquiram, acreditando-se no poder da transmissão e da prática que se lhe segue com vista à aplicação e consolidação das definições, regras e fórmulas transmitidas. Ao professor compete ser claro na exposição e proporcionar bons exemplos de como aplicar os conhecimentos em exercícios tipo que possam servir de referência em situações futuras, nomeadamente nos testes e exames. Ao aluno, sentado e virado para a frente na sua cadeira, compete registar no respetivo caderno a “matéria dada”, fazer os exercícios propostos e acompanhar a correção dos exercícios resolvidos a giz no quadro pelo professor. Quando os alunos são chamados ao quadro, o ritual da correção corresponde essencialmente a detetar erros e a eliminá-los, nem sempre importando a razão pela qual foram cometidos. A investigação em educação matemática mostra que no cenário deste tipo de ensino, um número considerável de estudantes não chega a estabelecer nenhuma relação significativa com o conhecimento abordado. Na maior parte do tempo, o aluno concentra-se em copiar para o caderno o que está escrito no quadro, tendencialmente de forma mecânica, por

vezes como se do desenho de hieróglifos se tratasse; na hora de aplicar um procedimento perante uma situação concreta, sente-se inseguro quanto ao que escolher, independentemente de o saber ou não executar, acabando muitas vezes por optar por uma aplicação cega do que lhe parece mais provável ou inscrito nos temas em leccionação. “Why Johnny can’t add” (1973) tornou-se um *best-seller* em que Morris Kline aponta críticas severas a este estilo de ensino dominante em décadas do século passado, assente num paradigma de matemática abstracta e dedutiva, denunciando a fragilidade e aridez do conhecimento que os alunos retêm – e, muitas vezes, só temporariamente até que passe a sua avaliação, após a qual tudo parece ser esquecido.

Por último, a *Matemática do exercitar*, com a sua ênfase na matemática abstracta e formalmente expressa e praticada, comporta um outro risco que é definitivamente o mais dramático e a que assistimos durante décadas e décadas em Portugal. Trata-se do insucesso a Matemática dos alunos que não são bem sucedidos com esta abordagem, embora consigam pensar matematicamente de outras formas legítimas – que a escola tem insistido em não valorizar, encarando-se o insucesso a Matemática como uma fatalidade genética a que nos devemos resignar. E o insucesso a Matemática tem sido, e continua a ser em Portugal, um dos principais inibidores da escolha do prosseguimento de estudos nos percursos em que esta disciplina marca presença forte e um fator determinante de exclusão dos jovens estudantes da escola.

### **2.3. À Matemática do exercitar *contrapõe-se* a Matemática do raciocinar.**

Do desafio suscitado por questões de natureza problemática, que estão na essência da matemática, decorre o processo de construção do conhecimento matemático. Trata-se de um processo em que a compreensão é essencial e se consegue pelo estabelecimento de conexões entre o que se conhece e aquilo a que se procura chegar. As intuições jogam um papel primordial na exploração de casos simples para a construção de ideias mais sólidas, mais completas, mais complexas. A associação da matemática à “ciência dos padrões” (Devlin, 2002), que se obtêm a partir da observação transversal e sistemática de um número suficiente de casos que se conseguem descrever e sintetizar, afortunadamente, por uma fórmula ou procedimento, evidencia o papel da intuição e a importância da justificação no raciocinar. O apurar de um algoritmo tem por detrás incomensuráveis horas de aturado trabalho e, apesar de a tradição escolar fazer deles objetos a usar sem questionar, existem sempre razões matemáticas que lhe subjazem. O eger de um modelo matemático tem por detrás ciclos de tentativas e aperfeiçoamentos em que as estimativas modeladas são testadas e confrontadas com os dados da realidade, para sua refutação ou aceitação. O processo de produção matemática é um processo exigente, que envolve a procura de sentido, mesmo quando apoiado na manipulação simbólica.

#### **2.4. Que consequências a valorização da Matemática do raciocinar encerra para a educação matemática?**

A *Matemática do raciocinar* proporciona uma visão da matemática como uma ciência viva, produto da razão humana, em busca da compreensão e do conhecimento. Desenvolvida no domínio estritamente matemático, oferece a possibilidade de compreender os conceitos e estabelecer conexões entre os diferentes domínios da matemática, com base em argumentos. Desenvolvida no âmbito das relações com outras áreas do saber, das aplicações ou modelação matemática, fornece a oportunidade de desocultar o poder da matemática como ferramenta para intervir e interpretar no que nos rodeia (NCTM, 2007), poder esse que é tantas vezes enunciado e tão poucas realmente apercebido.

A ênfase na *Matemática do raciocinar* tem naturalmente consequências marcantes relativamente ao papel dos alunos na aprendizagem da Matemática. Perspetivam-se como aprendentes ativos, valorizando-se o seu contributo para a construção do saber que se constitui dialogicamente na sala de aula, através do discurso matemático para a negociação de significados. É sustentado por um ensino baseado na inquirição – *inquiry-based-learning* (Maaß & Artigue, 2013), traduzido em Portugal por ensino exploratório (Ponte, 2005; Canavarro, 2011) – em que uma tarefa desafiadora é tomada como ponto de partida para o trabalho dos alunos, sendo as produções matemáticas que estes desenvolvem, individualmente ou em grupo, objeto de partilha, discussão e análise por toda a turma, com vista à sistematização de aprendizagens que decorrem da sua atividade matemática e da reflexão que em comum fazem sobre ela. Ao professor compete selecionar tarefas adequadas e preparar a sua exploração na sala de aula, onde tem de lançar a tarefa e, a partir dela, criar as condições que promovam a aprendizagem pelos alunos num ambiente de valorização dos seus raciocínios. Compete-lhe gerir as interações múltiplas e acompanhar o que os alunos vão pensando, identificando as diversas estratégias que vão surgindo e que importa discutir em plenário tendo em vista as que melhor servem a compreensão de todos, as que permitem esclarecer dúvidas e dificuldades, as que ampliam o saber, as que se aproximam do conhecimento que pretende que os alunos adquiram. Neste tipo de aula, os alunos trabalham autonomamente na resolução da tarefa, de seguida participam na discussão das estratégias decorrentes desse trabalho, explicando a sua própria ou ouvindo e tentando compreender as dos outros, que podem interrogar; por fim, com base nas apresentações feitas, sistematizam as principais ideias emergentes da discussão coletiva – que podem incluir uma forma produtiva de representar a situação problemática, uma nova estratégia utilizada para resolver um problema, um novo conceito usado informalmente pelos alunos, antecipadamente (im)previsto pelo professor, e que este aproveita para nomear e sintetizar. Estas ideias emergentes da produção dos alunos são, assim, objeto da busca de uma compreensão partilhada e ficam a fazer parte do património de conhecimento matemático coletivo da turma, sendo cada aluno seu co-autor.

A investigação em educação matemática mostra que no cenário deste tipo de ensino, os estudantes aumentam a motivação e o envolvimento na aula, desenvolvendo atitudes de maior predisposição para a Matemática (Hannula, 2006). Este aspeto é da maior importância se atendermos a que a Matemática é uma disciplina relativamente à qual existem concepções negativas, sendo a sua imagem social bastante pesada – e as atitudes desfavoráveis relativamente a uma disciplina são factores dificultadores da sua aprendizagem (Hannula, 2009). Lidar com conexões da matemática com outras áreas é também fonte de robustecimento da relação com esta área específica do saber e de valorização do seu papel na evolução científica (Canavarro, 2017). No quadro de um ensino da *Matemática do raciocinar*, os alunos melhoram a sua capacidade de resolver problemas, de investigar e de comunicar e argumentar matematicamente. Reforçam-se as interações aluno-aluno, a colaboração entre todos, e sentido crítico construtivo. Estas capacidades são elementos fundamentais do perfil do aluno que hoje em dia se procura educar, internacionalmente tidos como relevantes numa educação adequada à cidadania no século XXI (Gravemeijer, 2017).

### **3. Educar o raciocinar em busca da compreensão em Matemática**

#### ***3.1. Uma cultura que apoia o raciocínio em busca da compreensão partilhada***

A aula de ensino exploratório é uma aula difícil de implementar (Maaß & Artigue, 2013). O professor lida com diversos desafios, em especial com o de conseguir promover uma cultura de sala de aula em que os alunos adquiram hábitos convenientes para a concretização efetiva de discussões coletivas das suas produções matemáticas (Canavarro, 2011).

Por um lado, há que educar a turma para uma cultura de participação, o que requer normas sociais que apoiem uma prática de discussão e argumentação em coletivo – exigem o saber expressar com clareza as ideias a comunicar mas também o saber ouvir com atenção e respeito o que dizem os outros, em interação, esperando, colocando dúvidas, ajudando na busca da compreensão.

Por outro lado, há que ajudar os alunos a conseguirem exprimir da melhor forma as suas ideias de modo a que se tornem compreensíveis pelos outros e também a raciocinar sobre as dos outros para sua apreciação. E ainda a conseguirem discernir as características das diferentes produções matemáticas que resultam da actividade dos alunos perante a tarefa proposta, de modo a elegerem os contributos de cada uma e o que de valor deve ficar retido (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Sublinho que neste modelo de ensino, na apreciação sobre o trabalho dos alunos não se trata tanto de apontar o que está certo ou errado, embora o rigor seja muito importante. O maior relevo vai para a análise das estratégias de raciocínio, do como pensaram e porquê, pois é isso que revela o que os alunos compreendem e como, se é ou não



correto e se tem potencial para chegar mais longe. Note-se que em Matemática, uma solução certa pode ser obtida através de processos incorrectos e uma solução errada pode decorrer de uma mera distração num cálculo mais ou menos insignificante que se perde no meio de um raciocínio brilhante. Assim, quando se valoriza a *Matemática do raciocinar* não há lugar à correção de resoluções no sentido tradicional do termo, mas sim à discussão de resoluções diversas produzidas pelos alunos, intencionalmente selecionadas pelo professor tendo em conta as suas potencialidades.

### **3.2. Que ferramentas apoiam o raciocínio e a comunicação matemática?**

De alguma forma, poder-se-á afirmar que as ferramentas que apoiam a comunicação matemática são as que apoiam qualquer tipo de comunicação que busca o sentido – trata-se das representações que nos permitem reportar a objetos de toda a natureza, quer tenham existência física ou não, como é o caso dos entes matemáticos, puramente abstratos (Bruner, 1998). No ensino da *Matemática para exercitar*, os símbolos são as representações privilegiadas pois o que importa é a aplicação de fórmulas e algoritmos que têm um registo próprio muito específico, universalmente uniformizado (embora possam ser usados distintos algoritmos em diferentes países), sendo irreconhecível o seu significado por quem não estiver informado. É também a manipulação simbólica que permite obter resultados, através de cálculo numérico ou algébrico, sendo inexcedível o valor dos símbolos neste domínio (Smith, 2003).

Mas os símbolos matemáticos podem prestar pouca ajuda quando o raciocínio está em jogo. Outros tipos de representações são de grande utilidade no apoio tanto aos processos de pensar, como de registar e de comunicar as estratégias de raciocínio Goldin (2008). Bruner evidencia a diversidade de representações que estrutura qualquer domínio de conhecimento e classifica essas representações em ativas, icónicas e simbólicas: “A estrutura de qualquer domínio do conhecimento pode caracterizar-se de três maneiras: por um conjunto de acções apropriadas para alcançar certo resultado (representação activa); por um conjunto de imagens ou gráficos sumários que representam um conceito sem o definirem plenamente (representação icónica); e por um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições (representação simbólica)” (Bruner, 1999, p. 66).

O uso de diferentes formas de representação empodera os alunos no raciocínio em Matemática. O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) considera *Representar* (em Matemática) como uma das cinco capacidades transversais essenciais que as crianças de todos os níveis de escolaridade, desde a educação pré-escolar ao ensino pré-universitário, deverão ter possibilidade de desenvolver em Matemática e destaca o seu papel: “As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos

interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação” (NCTM, 2007, p. 75).

Permitir aos alunos que usem em Matemática as diversas representações, em especial representações icónicas e linguagem verbal (Arcavi, 2003) e não apenas as representações simbólicas associadas à linguagem formal matemática, é um contributo inestimável para que possam resolver problemas, para que possam criar as suas resoluções pelos próprios meios, para que possam dar sentido ao resultado a que chegam (NCTM, 2017). Reforço que o estabelecimento de conexões entre diferentes representações sobre o mesmo conceito amplia consideravelmente a compreensão que dele se pode ter – “(usar) diferentes representações é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, com cada lente a proporcionar uma perspetiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais aprofundada” (Tripathi, 2008, p.439). Quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões flexíveis entre as ideias matemáticas, demonstram uma compreensão mais profunda e uma capacidade fortalecida de resolução de problemas (Lesh, Post & Behr, 1987).

### **3.3. Que normas apoiam o raciocínio e a comunicação matemática?**

Um ponto alto do ensino exploratório da Matemática é, sem dúvida, a discussão coletiva, embora todas as fases da aula estejam interrelacionadas e o sucesso de uma contribua para o sucesso das outras. A condução da discussão começa a ser preparada pelo professor na fase do trabalho autónomo dos alunos, quando observa as estratégias diversificadas que são produzidas com vista à sua seleção e seriação para uma partilha orientada por critérios matemáticos, ou seja, potencialmente promissora de gerar uma experiência matemática genuína e favorável ao alcançar-se a compreensão por parte de todos os alunos. Neste cenário, não partilha o seu trabalho quem sente apetite de ir ao quadro mas sim quem tem uma resolução que se espera que possa contribuir para o entendimento e enriquecimento de todos. E como distinguir quais as resoluções mais adequadas? O conceito de norma sociomatemática, proposto por Yackel & Cobb (1996) pode ajudar o professor a eleger o conjunto das resoluções indicadas para a discussão coletiva. Estas normas são distintas das normas sociais da sala de aula que gerem as interações dos alunos em qualquer disciplina, pois elas são específicas dos aspectos matemáticos da actividade dos alunos. A primeira norma sociomatemática tem a ver com o que faz uma *justificação matemática aceitável*, que se prende com a utilização de formas de pensar e agir rigorosas aplicadas a objetos matemáticos, conceitos e procedimentos, que conduzem à produção de uma resposta legítima; a *diferença matemática* constitui outra destas normas e consiste na consideração de processos de raciocínio distintos, igualmente legítimos mas que exibam o estabelecimento da compreensão matemática de uma forma diferente de uma já conhecida; outra norma importante é a da *eficiência matemática*, que se foca no poder que o processo de raciocínio usado tem para gerar, de modo económico, sem derivações acessórias, uma resposta certa; por último, a norma da *sofisticação matemática* aponta modos de raciocínio a que se reconhece algum valor estético, como a simplicidade e a elegância.

Na educação dos alunos para a participação em discussões matemáticas, é essencial que os alunos se apercebam destas normas e as usem como critérios para apreciar as produções matemáticas em discussão. A sua consideração contribui para focar as discussões matemáticas não só no certo ou errado, mas nas diferentes características dos modos de raciocinar e nas suas consequências no valor, poder e estética das resoluções elaboradas. Com uma prática continuada que tome as normas sociomatemáticas como referencial, os alunos não só robustecem a sua visão acerca da Matemática enquanto domínio de fazer plural, onde modos diferenciados de raciocinar são válidos, como também desenvolvem a capacidade de se autorregular. O exercício das normas sociomatemáticas influencia favoravelmente nos alunos uma predisposição positiva para a Matemática bem como o desenvolvimento de uma autonomia intelectual crescente neste domínio (Yackel & Cobb, 1996). A este respeito, há que frisar que o que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objectivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes na aula, que regeneram e modificam as suas compreensões através das interações. Ao mesmo tempo, estes objectivos e as compreensões largamente implícitas são eles próprios influenciados pelo que é legitimado como actividade matemática aceitável. É neste sentido que as normas sociomatemáticas e os objectivos e crenças acerca da actividade matemática e da aprendizagem estão reflexivamente relacionados (McClain & Cobb, 2001).

### **3.4. Um exemplo real em sala de aula**

Ilustro a importância do uso de representações múltiplas, em particular as icónicas, e o exercício das normas sociomatemáticas com uma situação ocorrida numa sala de aula de uma escola pública portuguesa, numa turma do 3.º ano do 1.º Ciclo de escolaridade, à qual o professor colocou o problema “Cálcio para os meninos” (figura 2).

O Manuel contou à Carolina que no dia anterior foi ao medico e que este lhe receitou cálcio. Deverá tomar um comprimido de seis em seis horas. A Carolina riu-se. Há uma semana também foi ao médico e começou a tomar um comprimido de cálcio de oito em oito horas. O médico receitou a cada um deles duas caixas com duas placas com 24 comprimidos cada.

— “Tomo mais do que tu!” — disse o Manuel.

A Carolina pensou e respondeu hesitante:

— “Sim... mas... mas como comecei antes de ti, se calhar... parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo...”

Será que é mesmo assim?

*Figura 2: Enunciado do problema “Cálcio para os meninos” (Canavarro, 2008)*



Maria: “Primeiro fiz prá Carolina... tomou 3 comprimidos em cada dia... fui desenhando cada dia e contando os comprimidos até dar 48... depois contei os dias, demorou 16 dias a tomar os comprimidos todos. Depois fiz pró Manuel... tomava quatro comprimidos por dia, também fui desenhando e contando, demorou 12 dias... mas só começou a tomar os comprimidos uma semana depois da Carolina... por isso, para contar os dias do Manuel, comecei no dia oito... E foi até ao dia 19. Por isso a Carolina acabou três dias mais cedo que o Manuel – porque ela tomou em 16 dias.”

A apresentação da resolução de Diogo, do lado direito da figura 3, foi também feita no quadro e acompanhada de explicação pelo seu autor, como se pode observar no excerto do diálogo ocorrido com o professor:

Diogo: “A Carolina está em cima... demora 16 dias...”

O professor interrompe:

Professor: “Mas como sabes que são 16?!”

Diogo: “ $16 \times 3$  ... fiz mentalmente...”

O professor sorriu e anuiu acenando com a cabeça, dizendo:

Professor: “Continua!”

Diogo: “Sete dias está só ela a tomar...” – apontando para o primeiro arco.

Professor: “Sim, e depois?”

Diogo: “O Manuel é em baixo... demora 12 dias a tomar mas só começa no sétimo dia. Acabam com diferença de três dias” – apontando para o arco por debaixo do 3. E conclui:

Diogo: “Para acabarem no mesmo dia, o Manuel tinha de começar três dias mais cedo.”

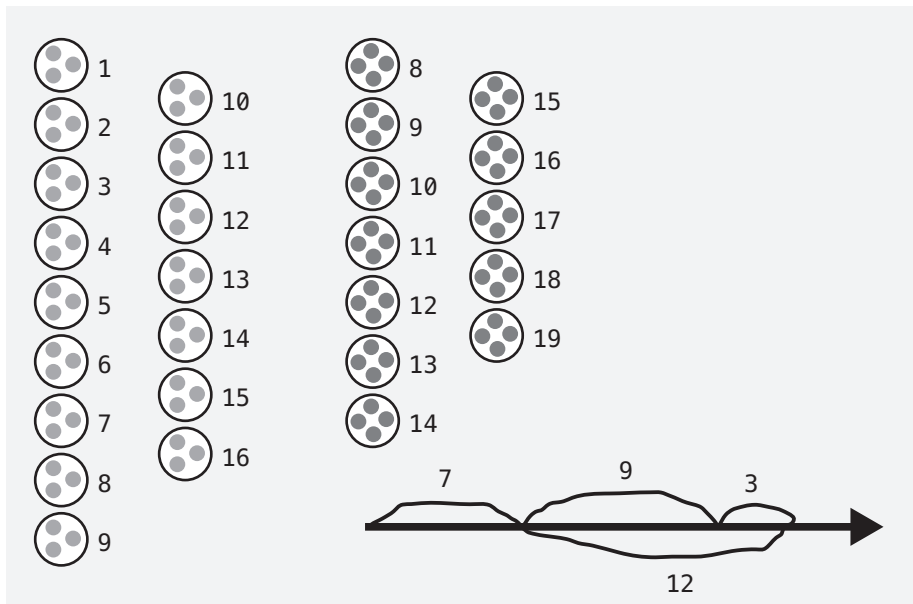


Figura 4: Resoluções de Maria (à esquerda) e de Diogo (à direita)

A análise destas resoluções evidencia, desde logo, a importância do uso de representações icônicas para a resolução do problema por Maria e Diogo. Na descrição que fazem, ambos se socorrem dos diagramas que elaboraram para se explicarem e, ao fazê-lo, denotam a importância que estes tiveram no desenvolvimento do raciocínio – sobretudo no caso de Maria, em que a simulação da situação da toma dos comprimidos decorreu à medida que ia desenhando. Os esquemas de Maria e Diogo mostram como se organizaram de modo a resolverem a maior dificuldade do problema: conseguir decidir se as crianças terminavam a toma dos comprimidos no mesmo dia ou em dias diferentes e com que diferença. Para lidar com esta dificuldade, a resolução do professor assenta num artifício socorrendo-se de um calendário que não estava previsto na formulação inicial do problema que era, note-se, completamente aberta quanto período do ano em que decorria a história. O calendário, embora possa ter algum mérito, “amarra” o período da história a novembro, a 9 de novembro, sem qualquer necessidade. Esta resolução, não obstante ser da autoria do professor, constitui uma estratégia menos eficiente do que as apresentadas pelos alunos, que resolveram o problema independentemente do(s) mes(es) em que a história se passa. As estratégias de Maria e Diogo são, por assim dizer, à prova do calendário da história, tendo um maior grau de generalidade, o que as torna mais poderosas.

Vale ainda a pena observar como os dois alunos se distinguem entre si na resolução da dificuldade da comparação: Maria iniciando a contagem do primeiro dia relativo a Manuel no que correspondia ao oitavo dia de Carolina; Diogo recorrendo a uma recta numérica a que associou o tempo para estabelecer a relação entre Manuel e Carolina. Este recurso facultou-lhe aumentar o alcance da sua resposta: Para que terminassem de tomar os comprimidos ao mesmo tempo, o Manuel teria de ter começado 3 dias mais cedo. É uma resposta que revela uma total compreensão da situação. Além disso, quer a estratégia propriamente dita, quer o seu registo escrito, podem ser considerados de uma enorme elegância matemática – o que deixou professor e colegas bastante surpreendidos e rendidos.

As estratégias das crianças são claramente diferentes da estratégia do professor também na forma como lidam com os cálculos implícitos. A primeira estratégia dá grande ênfase ao cálculo, expondo os algoritmos usados na determinação dos valores numéricos, apesar de deverem ser considerados triviais para crianças daquele ano de escolaridade. As resoluções das crianças socorrem-se do cálculo mental: o de Maria acompanhado dos registos consecutivos nas “bolinhas” que representam, segundo ela quis, cada um dos dias; o de Diogo que é concretizado, de forma breve, mentalmente, retendo o alunos os resultados que importam.

O confronto entre estas três resoluções presentes na discussão coletiva que aconteceu na aula teve o potencial de, por um lado, contribuir para a educação dos alunos relativamente ao papel das representações múltiplas, valorizando-se a linguagem verbal apoiada nas representações icônicas para proporcionar sentido e compreensão, e, por

outro lado, contribuir para a distinção relativa às características de resoluções matematicamente diferentes, elegendo-se as mais eficazes, poderosas e sofisticadas.

#### **4. Entre a Matemática e a filosofia: a concluir.**

Matemática e educadora matemática de formação e profissão, escrevi este texto expondo os meus pontos de vista, suportados em investigação, acerca da Matemática e seu ensino e aprendizagem, segura da importância decisiva que têm as características da prática do/a professor/a na formação de conceções e nas oportunidades de aprendizagem por parte dos/as alunos/as (Hiebert & Grouws, 2007). Ao longo do texto, defendo um ensino de natureza exploratória da Matemática, baseado em tarefas de natureza problemática, que desafia os alunos e permite a cada um/a:

Vivenciar uma experiência matemática genuína que faz justiça à natureza da ciência como ela é;

- Educar o raciocínio, com base em normas, em busca da compreensão;
- Desenvolver predisposição positiva em relação à Matemática;
- Assumir um papel com valor na construção coletiva, com participação de ideias próprias num discurso partilhado;
- Sentir-se incluído com espaço para praticar formas de pensar diferenciadas da do professor e/ou colegas e usando as representações que melhor se adequam ao seu raciocínio e apoiam a sua comunicação
- Desenvolver uma competência matemática que contribui para a formação de um perfil adequado aos desafios que se perspetivam para o século XXI.

Desta síntese, destaco duas ideias fundamentais da experiência matemática em sala de aula:

- O exercício normativo da racionalidade em busca da compreensão e do sentido das coisas (matemáticas).
- O modo de estar interrogativo e reflexivo, em que todos podem participar e ver legitimados os seus raciocínios (matemáticos) através do discurso partilhado.

E, sem querer arriscar deambulações sobre a Filosofia, não serão estas duas ideias o essencial da experiência filosófica?

Para concluir de vez, falta uma interrogação: se a Fernanda Henriques tivesse tido acesso a uma Matemática mais do raciocinar e menos do exercitar, ter-se-ia deixado tentar?

## Referências

- ABRANTES, P. (1989). “Um (bom) problema (não) é (só)...” *Educação e Matemática*, 8, 7-10.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- ARCAVI, A. (2003). “The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics.” *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-41.
- BRUNER, J. (1998). *Acts of meaning*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- BRUNER, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D’Água.
- CANAVARRO, A. P. (2017). “O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da Matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos.” *Educação e Matemática*, 144-145, 38-42.
- CANAVARRO, A. P. (2011). “Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios.” *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- CANAVARRO, A. P. (2008). “Raciocínio matemático na aula: Uma questão de confiança?” *Educação e Matemática*, 100, 34-36.
- DEVLIN, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- GOLDIN, G. (2008). “Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving”. In L. ENGLISH (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.
- GRAVEMEIJER, K. (2017). “How can Mathematics Education prepare students for their future?” In *Conferência Internacional Currículo para o Século XXI – “Pensar a Matemática”*, decorrida no Centro Cultural de Belém, Lisboa, 13 de janeiro de 2017. <http://www.dge.mec.pt/conferencia-internacional-currículo-para-o-seculo-xxi-pensar-matematica>
- HANNULA, M. (2006). “Motivation in Mathematics: goals reflected in emotions.” *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.
- HANNULA, M. (2009). “International trends in mathematics education research.” In M. LEPICK (Ed.), *Teaching mathematics: retrospective and prospective – Proceedings of the 10th International Conference* (pp. 11-19). Tallinn: Tallinn University Press.
- HIEBERT, J., & GROUWS, D. (2007). “The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning.” In Frank LESTER (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). Charlotte, N.C.: Information Age; Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.



- LESH, R., POST, T., & BEHR, M. (1987). “Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving”. In Claude JANVIER (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- MAASS, K., & ARTIGUE, M. (2013). “Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching – a synthesis”. *ZDM*, 45, 779-795.
- MCCLAIN, K., & COBB, P. (2001). “An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom”. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 236-266.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Lisboa: APM.
- PÓLYA, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.
- PONTE, J. P. (2005). “Gestão curricular em Matemática”. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- SMITH, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.
- STEIN, M., ENGLE, R., SMITH, M., & HUGHES, E. (2008). “Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell”. *Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- TRIPATHI, P. (2008). “Developing mathematical understanding through multiple representations.” *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-444.
- YACKEL, E. & COBB, P. (1996). “Sociomathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics.” *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.