Matemática I

Feliz Minhós

2018

Conteúdo

Objectivos Gerais

Considerando esta unidade curricular no âmbito da formação pessoal e científica, em geral, e da formação matemática em particular, o aluno deverá:

- Desenvolver capacidades de abstracção, dedução lógica e análise.
- Adquirir métodos e técnicas estruturantes do raciocínio científico e matemático que proporcione um espírito crítico.
- Dominar conteúdos matemáticos associados à Análise Real, nomeadamente sucessões, funções, séries, Cálculo Diferencial e Integral em R, ao nível de conceitos e aplicações.
- Utilizar conhecimentos matemáticos na resolução de problemas e interpretação da realidade.
- Adquirir competências matemáticas que possam vir a ser desenvolvidas e aplicadas em contexto profissional empresarial, de investigação ou de ensino.

Capítulo 1

Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Nesta secção apresentam-se algumas noções importantes para o estudo de funções definidas nalgum conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}$, nomeadamente para as propriedades que envolvam os conceitos de limite e continuidade.

1.1 Vizinhança de um ponto

Comecemos pela definição topológica de bola:

Definição 1.1.1 *Chama-se **bola (aberta)** de centro c e raio r, ao conjunto*

$$\begin{aligned} B_r(c) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\} \\ &= \,]c - r, c + r[\,. \end{aligned}$$

*O conjunto de elementos $x \in \mathbb{R}$ tais que $|x - c| \leq r$ é uma **bola fechada de centro** c **e raio** r.*

Definição 1.1.2 *Chama-se **vizinhança** de c, $V(c)$, a qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ que contenha uma bola (aberta) de centro em c.*

Observação 1.1.3 *Em particular, pode-se escrever*

$$V_r(c) = \,]c - r, c + r[\,.$$

Exercício 1.1.4 *Representе, usando intervalos de números reais:*

1. $V_{0.2}(4)$
2. $V_{0.03}(2.37)$

Exercício 1.1.5 *Defina como uma bola ou vizinhança os seguintes conjuntos:*

1. $]2, 4[$
2. $[2.16, 2.36]$
3. $\{x \in \mathbb{R} : |x - 5| < 0.03\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : 1.21 \leq x \leq 1.29\}$

Definição 1.1.6 *Um conjunto diz-se limitado se existir alguma bola que o contenha.*

1.2 Conceitos topológicos

Para estabelecer a posição relativa entre um ponto e um conjunto necessitamos de alguns conceitos:

Definição 1.2.1 *Seja S um conjunto tal que $S \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in S$.*

(i) *a diz-se um **ponto interior** de S se existir uma bola (aberta) de centro em a, totalmente contida em S.*

(ii) *O conjunto de todos os pontos interiores de S designa-se por **interior de** S e representa-se por int S. Em linguagem simbólica*

$$a \in int\ S \Longleftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq S.$$

(iii) *a é um **ponto exterior** de S se existir uma bola (aberta) de centro em a, totalmente contida em $E \backslash S$.*

(iv) *Chama-se **exterior de** S, ext S, ao conjunto de todos os pontos exteriores de S. Assim,*

$$\begin{aligned} a \in ext\ S &\Longleftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \subseteq \mathbb{R} \backslash S \\ &\Longleftrightarrow \exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \varnothing. \end{aligned}$$

(v) *a é um **ponto fronteiro** de S se não for ponto interior nem ponto exterior. Isto é, se qualquer bola centrada em a contém pontos de S e do seu complementar.*

(vi) *Designa-se por* ***fronteira de*** S*,* $fr\ S$*, o conjunto de todos os pontos fronteiros. Então*

$$a \in fr\ S \Longleftrightarrow \forall r > 0, (B_r(a) \cap S \neq \varnothing) \wedge (B_r(a) \cap \mathbb{R} \backslash S \neq \varnothing).$$

(vii) *Chama-se* ***aderência*** *ou* ***fecho*** *de* S*,* $ad\ S$*, ao conjunto*

$$ad\ S = S \cup fr\ S.$$

(viii) S *é um conjunto* ***aberto*** *se, e só se,* $S = int\ S$*.*
S *é um conjunto* ***fechado*** *se, e só se,* $S = ad\ S$*.*

(ix) *Um ponto* $a \in S$ *diz-se um* ***ponto isolado*** *se existir uma bola centrada em* a*, que só tenha o ponto* a *em comum com* S*. Isto é,*

$$a \text{ é um ponto isolado sse } \exists r > 0 : B_r(a) \cap S = \{a\}.$$

(x) *Um ponto* $a \in E$ *diz-se um* ***ponto de acumulação*** *de* S *se toda a bola centrada em* a *contém pelo menos um ponto de* S*, distinto de* a*. Assim*

$$a \text{ é um ponto de acumulação de } S \text{ sse } \forall r > 0, B_r(a) \cap (S \backslash \{a\}) \neq \varnothing.$$

(xi) *Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de* S *chama-se conjunto derivado de* S*,* S'*.*

Exercício 1.2.2 *Determine o interior, a aderência eo derivado de cada um dos conjuntos e indique se, eventualmente, são abertos ou fechados.*

a) $]0,1[\cup [3,5] \cup [7,9[$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x-2}\right\}$

e) $[1,3] \cap \mathbb{Q}$

Exercício 1.2.3 *Indique o conjunto de todos os pontos de acumulação dos conjuntos:*
a) $M = \{-1,5\} \cup [0,2]$
b) $N = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$

Exercício 1.2.4 *Prove que um conjunto finito não tem pontos de acumulação.*

Capítulo 2

Funções reais de variável real

2.1 Limite de uma função

Recordando a definição de limite de uma função num ponto:

Definição 2.1.1 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função real definida em* X *e* a *um ponto de acumulação de* X. *Diz-se que* $b \in \mathbb{R}$ *é o limite de* $f(x)$ *no ponto* a *e escreve-se* $f(x) \to b$ *quando* $x \to a$ *ou*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

quando

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0\text{: } \forall x \in X, \ \ |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Intuitivamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$:

- significa que $f(x)$ está arbitrariamente próximo de b quando x está suficientemente perto de a.
- não dá informação sobre o valor de $f(x)$ no ponto a, isto é, sobre $f(a)$.

Exercício 2.1.2 *Prove por definição que*

$$\lim_{x \to a} \left(x^2 + 4\right) = a^2 + 4.$$

Recordemos algumas propriedades dos limites das funções reais de variável real, que estão resumidas na próxima proposição:

Proposição 2.1.3 *Sejam $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X.*

1. *(Unicidade do limite) Se existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ então é único.*
2. *Se $f(x) = g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ e existem $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ então*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$
3. *Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que*
$$f(x) < g(x), \forall x \in V_\varepsilon(a).$$
4. *Se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ então*
$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x),$$
caso existam os respectivos limites.
5. *Se $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap X$ e se $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e*
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

2.2 Limites em $\overline{\mathbb{R}}$

A noção de limite pode estender-se ao caso em que $a = \pm\infty$ e a situações em que o valor do limite é $\pm\infty$.

Definição 2.2.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X.*

(i) *Diz-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ quando para qualquer $L > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap (X \backslash \{a\})$ se tem $f(x) > L$.*
Simbolicamente quando
$$\forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0\text{: } \forall x \in X,\ 0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) > L.$$

(ii) *Analogamente*
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\ \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in X, 0 < |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < -L.$$

Exercício 2.2.2 *Prove por definição que*

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{2}{x^2-x}\right| = +\infty.$$

Algumas propriedade algébricas dos limites resumem-se na seguinte proposição

Proposição 2.2.3 *Admitindo que* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *tem-se que:*

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b+c$;
2. $\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = b\times c$;
3. $\lim_{x\to a}|f(x)| = |b|$
4. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, *se* $c\neq 0$.
5. $\lim_{x\to a}|h(x)| = 0 \iff \lim_{x\to a} h(x) = 0.$

Exercício 2.2.4 *Considere a função* $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = x\ sen\left(\frac{1}{x}\right).$$

Calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2.3 Limites laterais

Os limites laterais reforçam a informação sobre o comportamento da função quando os objectos se aproximam de um certo ponto.

Definição 2.3.1 *(i) Seja a um ponto de acumulação de X para valores maiores que a. Chama-se limite lateral de f à direita de a , notando-se* $f(a^+)$ *ou* $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$, *se*

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0: x\in X,\ a<x<a+\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-b|<\delta.$$

(ii) Analogamente, chama-se limite lateral de f à esquerda de a , notando-se $f(a^-)$ *ou* $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$, *se*

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0: x\in X,\ a-\varepsilon<x<a \Longrightarrow |f(x)-b|<\delta.$$

Observação 2.3.2 *Se a um ponto de acumulação de X então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

Exercício 2.3.3 *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *sendo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3}{2} & se \quad x \geq 1 \\ 1 - x^2 & se \quad x < 1. \end{cases}$$

2.4 Funções contínuas

Geometricamente, uma função é contínua num ponto se, nesse ponto, não houver saltos.

Definição 2.4.1 *Considere-se* $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X$.
A função f é contínua em a quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *isto é,*

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 : \ \forall x \in X, \ \ |x - a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Observação 2.4.2 *Se a é um ponto isolado, a função f é necessariamente contínua em a, uma vez que, tomando* $\varepsilon > 0$ *tal que* $V_\varepsilon(a) \cap X = \{a\}$ *a condição* $|x - a| < \varepsilon \Longrightarrow x = a$ *e obviamente se verifica*

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \delta, \ \forall \delta > 0.$$

Exercício 2.4.3 *Considere a função real de variável real definida por*

$$m(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} & se \quad x \neq 2 \\ 3k + 2 & se \quad x = 2. \end{cases}$$

Determine o valor do parâmetro k de modo a que a função seja contínua em $x = 2$.

2.5 Continuidade lateral

Definição 2.5.1 *Seja a um ponto de acumulação de X e* $f : X \to \mathbb{R}$.

(i) $f(x)$ *diz-se contínua à direita de a se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

(ii) *$f(x)$ é contínua à esquerda de a se*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Observação 2.5.2 *Se $f(x)$ é contínua em a então $f(x)$ é contínua à esquerda e à direita de a.*

As propriedades algébricas das funções contínuas num ponto podem sintetizar no próximo resultado:

Proposição 2.5.3 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto de acumulação a de X. Então:*

(i) *$(f+g)\,,\ (f \times g)\,,\ |f|$ e $(-f)$ são funções contínuas em a;*

(ii) *$\frac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a) \neq 0$.*

Dem. Resulta directamente das propriedades algébricas dos limites. ■

Proposição 2.5.4 *(Continuidade da função composta) Considere-se $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $\varphi(D) \subset E$.*
Se φ é contínua em $a \in D$ e f é contínua em $\varphi(a) \in E$ então $(f \circ \varphi)$ é contínua em a.

Dem. Pretende-se provar que $\lim\limits_{x \to a} (f \circ \varphi)(x) = (f \circ \varphi)(a)$.

Seja $x_n \in D$ uma sucessão tal que $x_n \to a$, por valores diferentes de a.

A sucessão correspondente $\varphi(x_n) \to \varphi(a)$ porque φ é contínua em a. Por sua vez a função f transforma a sucessão $\varphi(x_n)$ na sucessão $f[\varphi(x_n)]$ que converge para $f[\varphi(a)]$ visto que f é contínua em $f[\varphi(a)]$.

Então qualquer que seja a sucessão $x_n \to a$, temos que

$$(f \circ \varphi)(x_n) = f[\varphi(x_n)] \to f[\varphi(a)],$$

isto é, $\lim\limits_{x \to a} (f \circ \varphi)(x) = (f \circ \varphi)(a)$. ■

Observação 2.5.5 *Da proposição anterior resulta a possibilidade de permutar a passagem ao limite com a função, isto é,*

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to a} \varphi(x)\right].$$

É esta propriedade que permite o cálculo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} sen\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = sen\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{3}}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

2.6 Continuidade num intervalo

Continuidade num intervalo

Definição 2.6.1 *(a) A função* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se contínua no intervalo* $]a, b[\subset D$ *se e só se for contínua em todos os pontos desse intervalo.*
(b) A função f *é contínua no intervalo* $[a, b] \subset D$ *se:*

- f *é contínua à direita de* a;
- f *é contínua em* $]a, b[$;
- f *é contínua à esquerda de* b.

Exercício 2.6.2 *Determine* λ *e* μ *de modo a que a função*

$$f(x) = \begin{cases} 2+\lambda & se & x \leq 0 \\ \frac{x^2-x}{x^2-4x+3} & se & 0 < x < 1 \\ 1-3\mu & se & x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua no intervalo $[0, 1]$.

2.7 Descontinuidades

Definição 2.7.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) *O ponto* $a \in D$ *é um ponto de descontinuidade se* $f(x)$ *não é contínua em* a.

(ii) *A função* f *tem uma descontinuidade de 1ª espécie em a se* $f(x)$ *não é contínua em* a *e admite limites laterais finitos.*

(iii) *Um ponto de descontinuidade diz-se de 2ª espécie se pelo menos um dos limites laterais em* a *é infinito.*

Por vezes é conveniente definir o salto de f :

Definição 2.7.2 *Chama-se* <u>*salto*</u> *de* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *num ponto* $a \in D$*, que admite limites laterais* $f(a^+)$ *e* $f(a^-)$ *a:*

- $\sigma(a) = \max\{|f(a^+) - f(a)|, |f(a^-) - f(a)|\}$, *caso existam ambos os limites laterais;*

- $\sigma(a) = |f(a^+) - f(a)|$ *ou* $\sigma(a) = |f(a^-) - f(a)|$ *se existirem apenas* $f(a^+)$ *ou* $f(a^-)$, *respectivamente;*

- $\sigma(a) = 0$, *se* a *é um ponto isolado.*

Exercício 2.7.3 *Determine e classifique os pontos de descontinuidade de*

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 2 \\ -x^2 + 2x & , \quad 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Em cada ponto de descontinuidade calcule o salto de f.

2.8 Teoremas fundamentais sobre continuidade

Teorema 2.8.1 *(de Bolzano ou do valor intermédio) Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e* k *é um valor compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$ *então existe pelo menos um valor* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = k$.

Dem. Suponhamos que $f(a) \le f(b)$ e $f(a) \le k \le f(b)$.

Divida-se o intervalo $[a, b]$ ao meio. Dos dois intervalos obtidos seja $[a_1, b_1]$ o que verifica $f(a_1) \le k \le f(b_1)$.

Se verificarem os dois subintervalos escolhe-se arbitrariamente um deles para $[a_1, b_1]$.

Por nova divisão ao meio do intervalo $[a_1, b_1]$ obtêm-se dois intervalos. Seja $[a_2, b_2]$ o intervalo que verifica $f(a_2) \le k \le f(b_2)$. Prosseguindo indefinidamente desta forma obtem-se uma sucessão de intervalos

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

que verifica $f(a_n) \le k \le f(b_n)$. Seja c o número real comum a todos estes intervalos $\left(c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \right)$. Assim, $a_n \to c$ e $b_n \to c$ e, passando ao limite nas últimas desigualdades, tem-se, pela continuidade de f, $f(c) \le k \le f(c)$, pelo que $f(c) = k$.

Se se supuser $f(b) \le f(a)$ e $f(b) \le k \le f(a)$ a demonstração é análoga.

■

Numa versão mais simplificada pode enunciar-se assim:

"Se f é uma função contínua então não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios."

Um importante corolário deste teorema para $k = 0$ diz o seguinte:

Corolário 2.8.2 *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *com* $f(a) \times f(b) < 0$ *então* f *tem pelo menos um zero em* $]a, b[$*,isto é,*

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Exercício 2.8.3 *Provar que a equação*

$$x^3 = 3x^2 - 1$$

tem pelo menos uma raiz real.

Teorema 2.8.4 *(Teorema de Weierstrass) Toda a função contínua num conjunto não vazio, limitado e fechado tem máximo e mínimo nesse conjunto.*

Dem. Seja f uma função contínua em $D \neq \varnothing$, limitado e fechado. Como $f(D)$ é limitado e $f(D) \neq \varnothing$ então existe $s = \sup f(D)$.

Pela definição de supremo (o menor dos majorantes), para qualquer $\delta > 0$ existem pontos de $f(D)$ que pertencem ao intervalo $]s - \delta, s[$. Então

$$s \in \overline{f(D)} = f(D), \text{ porque } f(D) \text{ é fechado.}$$

Como $s \in f(D)$ e $s = \sup f(D)$ então s é o máximo de $f(D)$. ∎

2.9 Assímptotas

Definição 2.9.1 *(i) Sejam* f *e* h *duas funções reais definidas para* $x > x_0$. *Diz-se que a linha de equação* $y = h(x)$ *é assímptota ao gráfico de* $f(x)$ *para a direita (ou quando* $x \to +\infty$*) se e só se*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

Geometricamente, significa que o gráfico de $f(x)$ *não difere muito do gráfico de* $h(x)$ *quando* x *é grande e positivo.*
(ii) Analogamente, se f *e* h *duas funções reais definidas para* $x < x_0$, *a linha de equação* $y = h(x)$ *é assímptota ao gráfico de* $f(x)$ *para a esquerda (ou quando* $x \to -\infty$*) se e só se*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - h(x)] = 0.$$

Exemplo 2.9.2 *A função $h(x) = x^2$ é uma assímptota ao gráfico de $f(x) = \frac{x^5-1}{x^3}$ para a direita, porque*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^5-1}{x^3} - x^2\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Se em particular as assímptotas $h(x)$ são rectas então pode considerar-se dois casos: rectas verticais e não verticais.

Definição 2.9.3 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D. A recta $x = a$ é uma assímptota vertical ao gráfico de $f(x)$ se se verificar pelo menos uma das quatro igualdades*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Proposição 2.9.4 *A recta $y = mx + b$ é uma assímptota não vertical ao gráfico de $f(x)$, definida para $x > x_0$, se e só se*

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad e \quad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$$

existirem e forem finitos.
De modo análogo se define a assímptota para a esquerda.

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponha-se que a recta $y = mx + b$ é uma assímptota ao gráfico de $f(x)$.

Considere-se a definição de assímptota com $h(x) = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$.

Então, para o caso de assímptota para a direita de f, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - b] = 0$$

donde

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[f(x) - mx - b] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - m\right], \end{aligned}$$

pelo que

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Então m e b têm os respectivos limites finitos.

A demonstração para o caso da assímptota para a esquerda é análogo.

($\Longleftarrow$) Se existirem e forem finitos os dois limites então

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - b] = 0,$$

pelo que $y = mx + b$ é uma assímptota ao gráfico de $f(x)$ para a direita. ■

Exercício 2.9.5 *Determine a equação de todas as rectas que são assímptotas ao gráfico de*

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

2.10 Função inversa

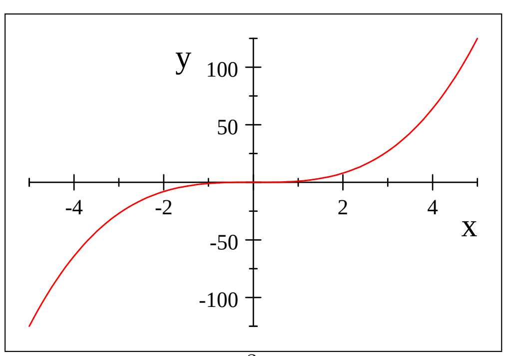
Definição 2.10.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função injectiva. Diz-se que a função $g : f(D) \to \mathbb{R}$ é a função inversa de f se $g[f(x)] = x$, $\forall x \in D$.*

Observação 2.10.2 **(i)** *Só as funções injectivas admitem função inversa e neste caso as equações*

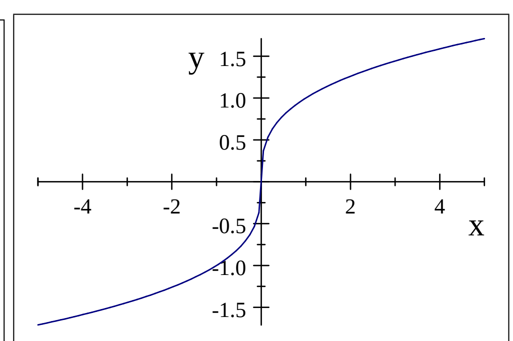
$$y = f(x) \quad e \quad x = g(y)$$

são equivalentes.

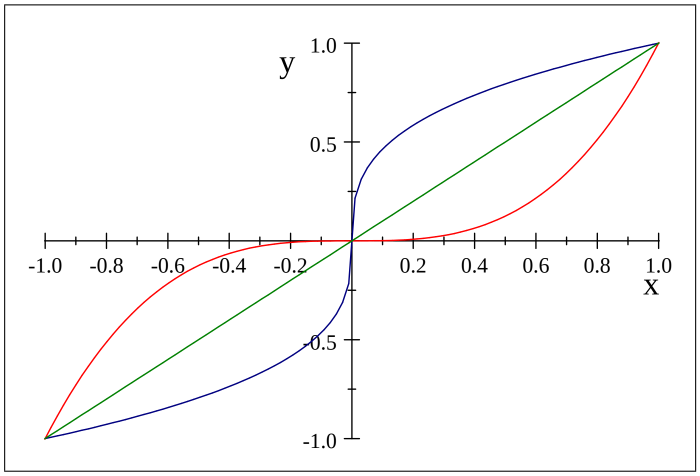
(ii) *Sendo g a função inversa de f, para obter o gráfico da equação $y = g(x)$ basta efectuar sobre o o gráfico de $y = f(x)$ uma simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.*



x^3



$\sqrt[3]{x}$



Os gráficos são simétricos relativamente a $y = x$

(iii) *Se f é monótona (sendo injectiva é estritamente monótona) e crescente (decrescente) então a sua inversa é também estritamente monótona crescente (decrescente).*

Com efeito, para $x_1, x_2 \in Df$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$, se f for crescente. Notando por g a função inversa de f, tem-se

$$g[f(x_1)] = x_1 < x_2 = g[f(x_2)],$$

pelo que g é crescente.

(iv) *Não confundir $f^{-1}(x)$ com $\frac{1}{f(x)}$. Repare-se que para $f(x) = x^3$ se tem $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ mas $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$.*

2.11 Função exponencial

À aplicação $x \mapsto a^x$ dá-se o nome de função exponencial de base a.

As principais propriedades resumem-se no seguinte resultado:

Teorema 2.11.1 *A função exponencial a^x $(a > 0)$ é contínua e satisfaz as propriedades:*

1. $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. $a^{x+y} = a^x \times a^y$; $(a^x)^y = a^{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

3. *Se* $a > 1$, a^x *é estritamente crescente,* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

4. *Se* $a < 1$, a^x *é estritamente decrescente,* $\mathit{lim}_{x\to+\infty}\, a^x = 0$, $\mathit{lim}_{x\to-\infty}\, a^x = +\infty$.

5. *Se* $a = 1$, $a^x \equiv 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dem. A demonstração do teorema é consequência das propriedades algébricas dos limites e da sucessão exponencial.

A título de exemplo prove-se a alínea 3.

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2$ e fixem-se racionais r_1 e r_2 tais que $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$.

Tomando as sucessões $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ com $r_n \to x_1$ e $s_n \to x_2$ tem-se, a partir de uma certa ordem $n_{0,}$

$$r_n < r_1 < r_2 < s_n$$

e, por consequência,

$$a^{x_1} = \lim a^{r_n} < a^{r_1} < a^{r_2} < \lim a^{s_n} = a^{x_2}.$$

■

No estudo que se segue fixa-se uma determinada base : e (número de Neper)

Proposição 2.11.2 *Tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Proposição 2.11.3 *Tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} x\ e^x = 0.$$

Corolário 2.11.4 *Para* $k \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k} = +\infty \quad e \quad \mathit{lim}_{x\to-\infty} |x|\ e^x = 0.$$

Isto é, «e^x é um infinito superior a todas as potências de x».

Dem. Para $x \to -\infty$ aplica-se o resultado anterior com a mudança de variável $x = -y$. ■

Exercício 2.11.5 *1. Indique o domínio e o contradomínio de cada um das expressões:*

a) $f(x) = 2 - 5^{1-3x}$

b) $g(x) = \frac{8}{3^{1-3x}+7}$

2. Resolva em $\mathbb{R}$ *cada uma das condições:*

a) $2^{x^2-5x} = \frac{1}{16}$

b) $0,25^{x^2} \geq \left(\frac{1}{16}\right)^{2x}$

3. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ e^{\frac{x^3}{2}}$

2.12 Função logarítmica

Como a aplicação $f : x \mapsto a^x$ para $a \in \mathbb{R}^+ \backslash\{1\}$ é uma bijecção de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$, então admite uma aplicação inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que se designa por função logaritmo de base a e se representa por

$$\begin{array}{rccc} \log_a & : &]0,+\infty[\to & \mathbb{R} \\ & & x \to & \log_a x \end{array}, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}.$$

Como a^x é estritamente monótona e contínua, a sua inversa, $log_a x$ também o será. Além disso o seu gráfico será simétrico ao da exponencial, em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Recorde-se as propriedades mais comuns em função da base do logaritmo.

Se $a > 1$ tem-se que:

- $log_a x$ é estritamente crescente;
- $log_a x > 0 \iff x > 1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} log_a x = +\infty \ ; \ \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = -\infty.$

Se $0 < a < 1$ obtem-se que:

- $log_a x$ é estritamente decrescente;
- $log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} log_a x = -\infty \;\; ; \;\; \lim\limits_{x\to 0^+} log_a x = +\infty$.

Do conceito de função inversa resultam directamente várias consequências:

- $a^{log_a x} = x$
- $log_a (a^x) = x$
- $log_a x = y \iff x = a^y$.

Exercício 2.12.1 *1. Calcular:*

a) $\log_{\sqrt{2}} 64$
b) $\log_{0,1} 1000$

2. Determinar o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_2 (4 - 3x)$
b) $g(x) = 3 + \log_{\frac{1}{3}} \left(9 - x^2\right)$

3. Resolva em $\mathbb{R}$ as condições:

a) $\log_{\frac{1}{e}} \left(2x^2 - x\right) \geq \log_{\frac{1}{e}} x$
b) $\log_3 \left(x^2 - 7\right) < 2$.

Teorema 2.12.2 *(Propriedades operatórias dos logaritmos) Sejam x e y números positivos e $a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

1. $\log_a (x \times y) = \log_a (x) + \log_a (y)$

2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y)$

3. $\log_a (x^p) = p \times \log_a (x)\,, \quad \forall p \in \mathbb{R}$

4. $\log_b (x) = \log_a (x) \times \log_b (a)$ *(mudança de base do logaritmo)*

Proposição 2.12.3 *Para todo o $k > 0$, tem-se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^k} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0^+} x^k \log(x) = 0.$$

Intuitivamente a proposição significa que: $log\,(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ mais lentamente que qualquer potência arbitrariamente pequena de x.

Proposição 2.12.4 *Tem-se*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad e \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercício 2.12.5 *1. Calcular o valor dos limites::*

a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{3\ \log(2-x)}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(5+x^4\right)-\ln 5}{x^4}$

2. Determine os valores reais que verificam as condições:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 2 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x}\right)$

b) $\log(x+3) > \log(x-1) - \log(2+x)$

2.13 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas $sen\ x$, $\cos x$, $tg\ x$ e $\cot g\ x$ não são injectivas nos respectivos domínios. Assim essas funções não seriam invertíveis.

Para garantir a invertibilidade consideram-se restrições dessas funções a intervalos contidos no seu domínio.

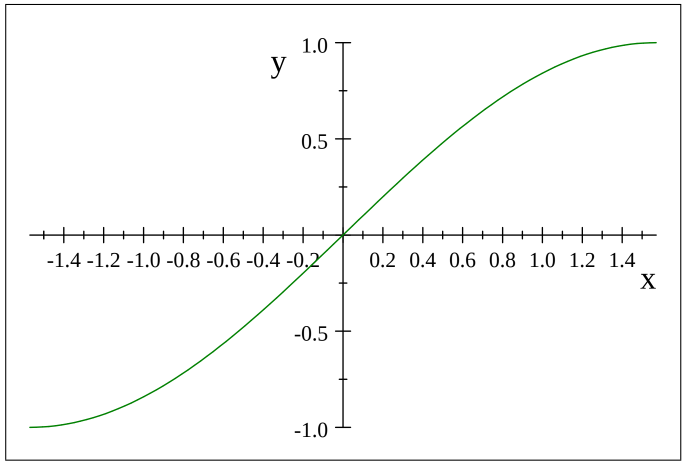
Das infinitas restrições considerar-se-á uma restrição principal de modo a que o contradomínio seja igual ao da função inicial.

2.13.1 Arco-seno

Para a função $f(x) = sen\ x$, qualquer restrição de f a intervalos do tipo $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, é invertível.

Considera-se a restrição principal para $k = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Isto é

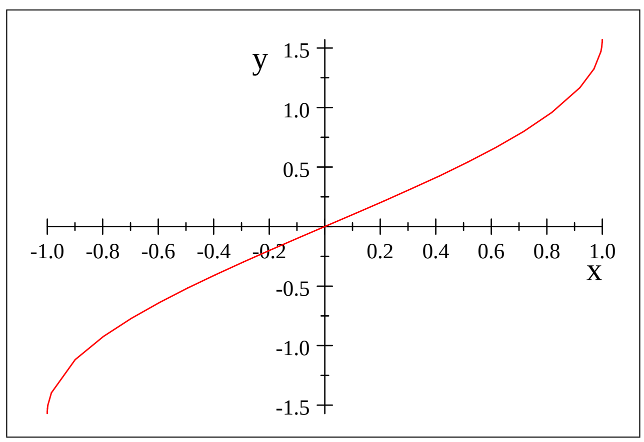
$$\begin{array}{rcrl} f & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to & [-1, 1] \\ & & x \mapsto & sen\ x \end{array}$$



$\sin x$

admita a função inversa

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1} & : & [-1,1] \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & & x \mapsto & arcsen\ x \end{array}$$



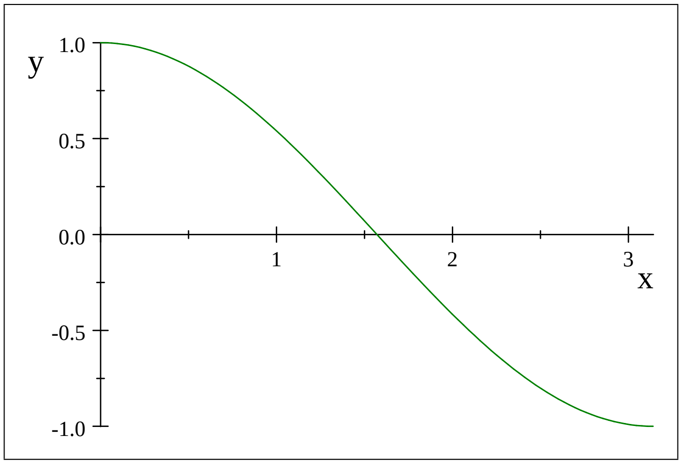
$\arcsin x$

2.13.2 Arco-cosseno

Dada a função $g(x) = \cos x$, qualquer restrição de g a um dos intervalos $[k\pi, \pi + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, é invertível.

A restrição principal para $k = 0$, $[0, \pi]$. Assim

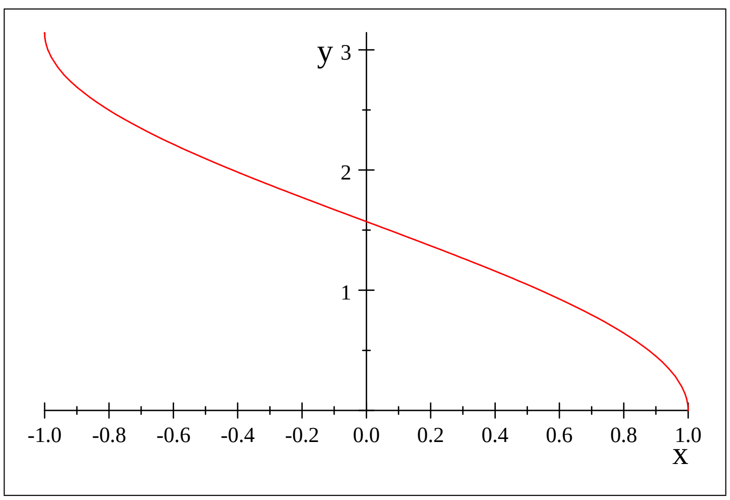
$$\begin{array}{rrcl} g & : & [0,\pi] \rightarrow & [-1,1] \\ & & x \mapsto & \cos x \end{array}$$



$\cos x$

admita a função inversa

$$
\begin{array}{rcrc}
f^{-1} & : & [-1,1] \rightarrow & [0,\pi] \\
 & & x \longmapsto & arc\cos\ x
\end{array}
$$



$\arccos x$

2.13.3 Arco-tangente

A função $h(x) = tg\ x$ de domínio

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

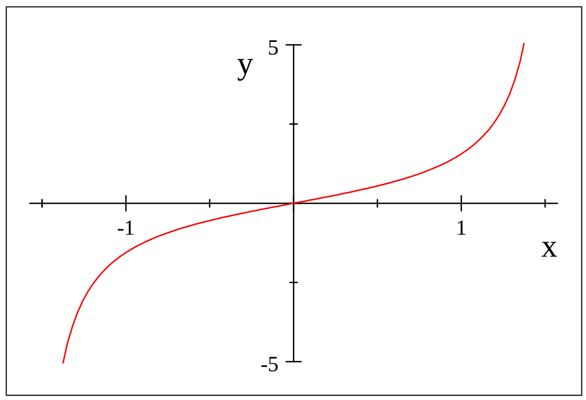
e contradomínio $\mathbb{R}$ tem como restrições invertíveis as que tenham por domínios intervalos do tipo

$$\left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[, \ k \in \mathbb{Z}.$$

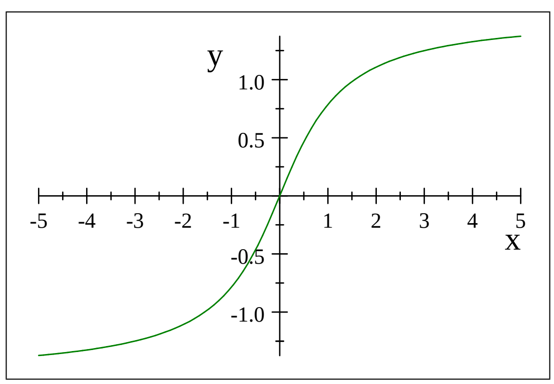
Para $k = 0$, obtem-se a restrição principal. Isto é,

$$h \ : \ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & tg\ x \end{array} \quad \text{e} \quad h^{-1} \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & arctg\ x \end{array}.$$

Graficamente



$tg\ x$



$arctg\ x$

Exercício 2.13.1 *1. Dada a função* $h(x) = 2 + arcsen\,(2x+1)$ *determine:*

a) *Domínio de* h

b) $h(0)$ *e* $h\left(-\frac{1}{6}\right)$

c) *Contradomínio de* h

d) *As soluções da equação* $h(x) = 2 + \frac{\pi}{3}$.

2. *Calcular:*

a) $\cos\left(arcsen\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

b) $tg\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

Capítulo 3

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

3.1 Derivada de uma função num ponto

Fermat foi um dos primeiros matemáticos a definir o conceito de derivada ao interessar-se em determinar o máximo e o mínimo de uma função.

Deve-se a Cauchy a formulação clássica da noção de derivada por volta de 1823:

Definição 3.1.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D$ um ponto de acumulação de D.*
Chama-se derivada de f no ponto a, e presenta-se $f'(a)$, a

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se o limite existir e for finito então a função f diz-se <u>derivável</u> ou <u>diferenciável</u> no ponto a.

Exercício 3.1.2 *Utilizando a definição calcular a derivada de $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$ em $x_0 = 1$.*

3.2 Interpretação geométrica da derivada

A interpretação geométrica do conceito de derivada permite, em particular, definir rigorosamente tangente a uma curva cujo gráfico é definido por $y = f(x)$.

Não é possível definir a recta tangente a uma curva como sendo a recta que tem apenas um ponto comum com a curva. É preciso um conceito mais forte.

Considere-se uma recta secante ao gráfico de $f(x)$, intersectando-a nos pontos P_1 e P_2.

O declive da recta t tangente a $f(x)$ no ponto P_1 vai ser o limite dos declives das rectas secantes quando P_2 se aproxima de P_1, ou seja, quando $x \to x_1$.

Então

$$m = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1).$$

Assim, de um ponto de vista geométrico, a derivada de uma função $f(x)$ em $x = a$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abcissa $x = a$.

A sua equação é então dada por

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)$$

ou

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exercício 3.2.1 *1. Escreva uma equação da recta tangente à curva* $y = \frac{2}{x-4}$ *no ponto de abcissa* 2.

2. Determine as coordenadas dos pontos da curva $y = x^3 - 4x$ *em que a tangente nesses pontos é uma recta horizontal.*

3.3 Derivadas laterais

Uma função $f(x)$ pode não ter derivada num ponto a (não existir recta tangente ao gráfico de $f(x)$), mas existirem semi-tangentes nesses pontos, isto é, tangente à esquerda e/ou à direita de a.

Considere-se a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 7 & \text{se} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Para estudar a existência de $f'(2)$ é necessário recorrer ao conceito de derivadas laterais.

Definição 3.3.1 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in D$ *um ponto de acumulação de* D.

(i) *f é derivável à esquerda de a se existe e é finito.*

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ou \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que se representa por $f'(a^-)$.

(ii) *f é derivável à direita de a se existe e é finito.*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad ou \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

que se nota por $f'(a^+)$.

Observação 3.3.2 *1. Da definição anterior resulta que f é derivável em a se e só se f é derivável à esquerda e à direita de a. Neste caso $f'(a)=f'(a^-)=f'(a^+)$.*

2. *Geometricamente $f'(a^-)$ representa o declive da semi-recta tangente à esquerda de a, enquanto $f'(a^+)$ será o declive da semi-recta tangente à direita de a.*

3. *A existência de derivada de uma função num ponto pode depender apenas da existência de uma derivada lateral. Por exemplo, para $f(x)=\sqrt{x-3}$, $D_f=[3,+\infty[$ e*

$$f'(3)=f'(3^+)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x-3}}{x-3}=+\infty.$$

4. *As funções não têm derivada nos pontos angulosos dos seus gráficos, já que as semi-tangentes nesse ponto não estão no prolongamento uma da outra.*

3.4 Derivadas infinitas

Diz-se que a derivada de f em a é $+\infty$ (respectivamente $-\infty$) se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty\ (-\infty).$$

As derivadas infinitas à esquerda e à direita de a definem-se de modo análogo.

Geometricamente, se f derivada infinita em a, o gráfico de $f(x)$ admite tangente em $(a,f(a))$, paralela ao eixo das ordenadas.

3.5 Derivabilidade e continuidade

Proposição 3.5.1 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $a \in D$, então f é contínua nesse ponto.*

Dem. Se f é uma função derivável em $a \in D$, então admite derivada finita nesse ponto, isto é,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ é finito.}$$

Escrevendo

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

e passando ao limite em ambos os membros, tem-se

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) = 0.$$

Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja $f(x)$ é contínua em $x = a$. ∎

Observação 3.5.2 1. *A existência de derivada infinita, $f'(a) = \pm\infty$, não garante a continuidade de f em a.*
Por exemplo, a função sinal

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

tem $f'(0) = +\infty$ e é descontínua no ponto 0.

2. *A recíproca da Proposição 3.5.1 não é verdadeira.*
Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ e não tem $f'(0)$.

3.6 Função derivada

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função derivada ou simplesmente derivada de uma função f, $x \longmapsto f'(x)$, é uma nova função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita;

- a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Se f derivável em todos os pontos de D, diz-se que f é derivável (diferenciável) em D ou apenas que f é derivável (diferenciável)

Exercício 3.6.1 *Caracterize a função derivada de cada uma das funções seguintes:*

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $g(x) = \left|x - x^2\right|$

3.7 Regras de derivação

Para evitar o recurso constante à definição de derivada, utilizam-se as regras de derivação:

Proposição 3.7.1 *Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in D$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:*

1. *$(kf)(x)$ é derivável em a e $(kf)'(a) = kf'(a)$*
2. *$(f+g)(x)$ é derivável em a e $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*
3. *$(f \times g)(x)$ é derivável em a e $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$ Em particular, $f^n(x)$ é derivável em a e $(f^n)'(a) = n\ f^{n-1}(a)\ f'(a)$, para $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Se $g(a) \neq 0$ então $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é derivável em a e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\ g(a) - f(a)\ g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Dem. 1. $(kf)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(kf)(x)-(kf)(a)}{x-a} = k \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = kf'(a)$.

2. $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a) + g'(a)$.

3. $(f\times g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)+f(a)g(a)}{x-a}$
$= \lim\limits_{x\to a} \left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(a)[f(x)-f(a)]-f(a)[g(x)-g(a)]}{(x-a)}$

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left[g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$

$= \frac{f'(a)\ g(a)-f(a)\ g'(a)}{(g(a))^2}$. ■

3.8 Derivadas de funções trigonométricas

3.8.1 Derivada da função $f(x) = sen\ x$

Provemos que a função $f(x) = sen\ x$ é derivável em $\mathbb{R}$ e determinemos a sua expressão:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{sen\ x - sen\ a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{2\ sen\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a. \end{aligned}$$

Então $(sen\ x)' = \cos x$.

3.8.2 Derivada da função $\cos x$

A função $\cos x = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ pode ser considerada como a composição da função $sen\ x$ com a função $x+\frac{\pi}{2}$.

Então, a função é diferenciável em todos os pontos, sendo a sua derivada

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \left[sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)' \\ &= -sen\ x. \end{aligned}$$

3.8.3 Derivada das funções $tg\ x$ e $\cot g\ x$

A derivabilidade da função $tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ resulta directamente das regras de derivação

$$\begin{aligned} (tg\ x)' &= \left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + tg^2 x. \end{aligned}$$

Para a função $\cot g :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned}(\cot g\ x)' &= \left(\frac{\cos x}{sen\ x}\right)' \\ &= -\frac{1}{sen^2 x} = -co\sec^2 x = -\left(1 + \cot g^2 x\right).\end{aligned}$$

Exercício 3.8.1 *Calcular a derivada das funções*

a) $f(x) = tg\left(\frac{1}{x+3}\right)$

b) $g(x) = \cot g^2\left(x^2\right)$

3.8.4 Derivada das funções trigonométricas inversas

A função $x \longmapsto arcsen\ x$ é a função inversa de $y \longmapsto sen\ y$, isto é, designando por $x = f(y) = sen\ y$ então $y = f^{-1}(x) = arcsen\ x$.

Assim, obtem-se

$$\begin{aligned}(arcsen\ x)' &= \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(sen\ y)'} \\ &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

Então a função $y = arcsen\ x$ é diferenciável em todo o seu domínio e

$$(arcsen\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Da relação $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ tem-se

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{(\cos\ y)'} \\ &= -\frac{1}{sen\ y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\end{aligned}$$

pelo que

$$(\arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

A partir da relação $y = arctg\ x \Leftrightarrow x = tg\ y$ obem-se

$$(arctg\ x)' = \frac{1}{(tg\ y)'} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

As fórmulas anteriores permanecem válidas se se substituir x por uma função $u(x)$, diferenciável nos respectivos domínios e se aplicar o teorema da derivada da função composta. Assim

$$\begin{aligned}(arcsen\ u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\\ (arctg\ u)' &= \frac{u'}{1+u^2}.\end{aligned}$$

3.9 Derivadas das funções exponencial e logarítmica

A função exponencial é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$(e^x)' = e^x$$

pois, considerando $f(x) = e^x$ tem-se

$$f'(a) = \lim_{h\to o}\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = e^a \lim_{h\to o}\frac{\left(e^h-1\right)}{h} = e^a.$$

Sendo $u: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável, a função composta $e^{u(x)}$ é ainda diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\ e^{u(x)}, \forall x\in D.$$

A função $x\longmapsto a^x$, com $a>0$, é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(a^x)' = a^x\ \log a,$$

pois $a^x = e^{\log a^x} = e^{x\log a}$ e aplicando a regra anterior obtem-se

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{x\log a}\right)' = e^{x\log a}\ (x\log a)'\\ &= a^x\ \log a.\end{aligned}$$

Analogamente para $u(x)$ uma função diferenciável,

$$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}\ \log a\ u'(x).$$

A função $f(x) = \log x$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e, para $a>0$, tem-se

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h\to o}\frac{\log(a+h)-\log a}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\log\left(\frac{a+h}{a}\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to o}\frac{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a}\lim_{h\to o}\frac{\log\left(1+\frac{h}{a}\right)}{\frac{h}{a}} = \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Então

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

e, para $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $u(x) > 0$, $\forall x \in D$, a função composta $\log(u(x))$ é diferenciável e

$$(\log(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)},\ \forall x \in D.$$

A função $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e notando que

$$\log_a x = \log x\ \ \log_a e$$

obtem-se

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x\ \log a},$$

pois

$$1 = \log_e e = \log_a e\ \ \log_e a = \log_a e\ \ \log a,$$

pelo que

$$\log_a e = \frac{1}{\log a}.$$

Sendo $u(x)$ uma função diferenciável com $u(x) > 0$, $\forall x \in D$, então a derivada de $y = \log_a(u(x))$ é

$$(\log_a(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)\ \log a}.$$

Exercício 3.9.1 *Calcular as derivadas de*

a) $y = \log_5(arctg\ x)$

b) $y = e^{\sqrt{3x}} + 5^{\cos x}$.

3.10 Teoremas fundamentais do cálculo diferencial

A possibilidade de aproximar localmente as funções diferenciáveis por funções "muito simples"(geometricamente corresponde a aproximar curvas por rectas tangentes no ponto de contacto), permite simplificar o estudo de funções reais de variável real e constitui o interesse fundamental do conceito de derivada.

Outra utilidade baseia-se na busca de máximos e mínimos de funções diferenciáveis.

Definição 3.10.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$.*

(i) *Diz-se que f tem um máximo local (ou relativo) em a (ou que $f(a)$ é um um máximo local ou relativo de f) se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

(ii) *Analogamente, f tem um mínimo local (ou relativo) em a (ou que $f(a)$ é um um mínimo local ou relativo de f) se e só se existir $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D$.*

(iii) *Se as desigualdades anteriores forem estritas, isto é, $f(x) < f(a)$ $(\text{ou } f(a) < f(x))$, $\forall x \in V_\varepsilon(a) \cap (D \backslash \{a\})$ então diz-se que $f(a)$ é um um máximo local (mínimo local) estrito.*

(iv) *Se se falar, indistintamente, de máximos ou mínimos diz-se extremo local (ou relativo).*

(v) *Se se verificar $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in D$, então diz-se que $f(a)$ é um máximo absoluto de f em D.*
Analogamente, se $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in D$, $f(a)$ é um mínimo absoluto de f em D.

Um resultado importante para a pesquisa de extremos locais de uma função é o seguinte:

Proposição 3.10.2 *Seja D um intervalo de $\mathbb{R}$ com mais do que um ponto e $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto interior $a \in D$.*
Se f tem um extremo local em a então $f'(a) = 0$, isto é, a é um ponto crítico de f.

Dem. Suponhamos que f tem um máximo local em a. Então

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq f(a) \text{ em }]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\,,$$

pelo facto de a ser um ponto interior a D.

Para $x \in]a - \varepsilon, a[\,$, $f(x) \leq f(a)$ e $x < a$. Como f é diferenciável em a então existe e é finito

$$f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Analogamente para $x \in]a, a + \varepsilon[\,$, $f(x) \leq f(a)$, $x > a$ e

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Como f é diferenciável em $x = a$ então

$$0 \leq f'(a^-) = f'(a) = f'(a^+) \leq 0,$$

pelo que $f'(a) = 0$.

Se supusermos que $f(a)$ é um mínimo local, a demonstração é semelhante. ■

Observação 3.10.3 *O recíproco desta proposição não é verdadeira, isto é, existem funções com derivada nula num ponto que, contudo, não é extremo local.*
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$ *é estritamente crescente não tendo portanto nenhum extremo local. Todavia* $f'(0) = 0$.

Teorema 3.10.4 *(Teorema de Rolle) Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a,b]$ *e com derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de* $]a,b[$.
Se $f(a) = f(b)$ *então existe* $c \in]a,b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Dem. Como f é contínua no conjunto limitado e fechado $[a,b]$, pelo Teorema 2.8.4 f tem máximo e mínimo (absolutos) relativos em $[a,b]$.

Se o máximo e o mínimo são atingidos nas extremidades, como $f(a) = f(b)$ então $f(x) \equiv k$ e, portanto, $f'(c) = 0$, $\forall c \in]a,b[$.

Caso contrário o máximo é atingido num ponto interior $c \in]a,b[$ e, pela Proposição 3.10.2, $f'(c) = 0$. ■

Corolário 3.10.5 *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a,b]$ *e tem derivada (finita ou infinita) em todos os pontos de* $]a,b[$ *então entre dois zeros consecutivos de* f' *não pode haver mais que um zero de* f.

Dem. Sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de f'.

Suponha-se, com visto à obtenção de um absurdo, que existem α e β tais que $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ e $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Então, pelo Teorema 3.10.4, existe $d \in]\alpha, \beta[$ tal que $f'(d) = 0$. Isto é absurdo porque assim x_1 e x_2 não podem ser dois zeros consecutivos de $f'(x)$.

Portanto entre dois zeros consecutivos de f' não pode haver mais que um zero de $f(x)$ (note-se que pode até não haver nenhum). ■

Corolário 3.10.6 *Seja* f *uma função que satisfaz as condições do Teorema de Rolle.*
Então entre dois zeros de f *há pelo menos um zero de* f'.

Dem. Sejam x_1 e x_2 dois zeros consecutivos de f, isto é, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Então pelo Teorema 3.10.4, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = 0$. ■

Exercício 3.10.7 *Considere a função $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - x$.*
Prove que $f(x)$ admite um único zero no intervalo $\left]-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right[$.

Teorema 3.10.8 *(Teorema do valor médio de Lagrange ou Teorema dos acréscimos finitos) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e com derivada (finita ou infinita) em $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dem. Considere-se uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Esta nova função verifica as hipóteses do Teorema 3.10.4 em $[a,b]$, pois:

- $h(x)$ é contínua em $[a,b]$
- $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ tem derivada em $]a,b[$, pois f também tem.
- $h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a = \frac{(b-a)f(a)-[f(b)-f(a)]a}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} = h(b)$.

  Então
  $$\exists c \in]a,b[: h'(c) = 0.$$
  Isto é,
  $$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Interpretação geométrica:

A existência de $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ significa que existe um ponto $c \in]a,b[$ no qual a tangente ao gráfico de $f(x)$ tem um declive igual ao declive da recta secante definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Interpretação física:

Se f verificar as condições do Teorema de Lagrange, se a e b forem instantes distintos no tempo e $f(t)$ for a posição em cada instante t de um ponto que se move no eixo real, então existe um instante c onde a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ entre os referidos instantes. (Daí o nome de teorema do valor médio aplicado ao Teorema de Lagrange)

Uma importante extensão do Teorema de Lagrange constitui o resultado seguinte:

Teorema 3.10.9 *(Teorema de Cauchy).Se f e g são duas funções contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$ e se para $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$ então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dem. Considere-se a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

A função $F(x)$ é contínua em $[a,b]$, porque f e g também o são, e diferenciável em $]a,b[$,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x).$$

Por outro lado, como

$$F(a) = 0 \text{ e } F(b) = 0,$$

o Teorema de Rolle garante a existência de $c \in]a,b[$ tal que $F'(c) = 0$, ou seja

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

Como $g'(c) \neq 0$ tem-se

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Uma das aplicações mais importantes deste teorema é a utilização de uma regra para levantar indeterminações.

Teorema 3.10.10 *(Regra de Cauchy) Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a,b[$ tais que:*

a) *$g'(x) \neq 0$ para cada $x \in]a,b[$;*

b) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ou então* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*;*

c) *existe* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *em* $\overline{\mathbb{R}}$*;*

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dem. Se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (finito)}$$

então existe $\beta \in]a,b[$ tal que para $x \in]a,\beta[$ e para $\delta > 0$ arbitrário se tem

$$l - \delta < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \delta.$$

Sejam x e y dois pontos distintos de $]a,\beta[$. Então pelo Teorema de Cauchy existe ξ situado entre eles tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Portanto para quaisquer pontos nestas condições obtem-se

$$l - \delta < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < l + \delta. \tag{3.10.1}$$

No caso de $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, fixemos arbitrariamente $x \in]a,\beta[$ e fazendo $y \to a$ conclui-se que as desigualdades

$$l - \delta < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \delta$$

têm que ser verificadas para $\forall x \in]a,\beta[$, o que prova que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

No caso em que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, fixa-se $y \in]a,\beta[$ e determina-se γ tal que, para $x \in]a,\gamma[$ se tenha

$$g(x) > 0 \;\text{ e }\; g(x) > g(\gamma).$$

Das desigualdades (3.10.1) resulta que, para $x \in]a, \gamma[$, se tem

$$\frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l - \delta) < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)(l + \delta).$$

Quando $x \to a$ o primeiro membro tende para $l - \delta$ e o segundo membro para $l + \delta$, pelo que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ o processo é análogo.

Se $l = \pm\infty$ então obrigatoriamente existe um intervalo $]a, d[$ $(d > a)$ onde $f'(x) \neq 0$,pois caso contrário, como $g'(x) \neq 0$ em $]a, b[$, isso seria incompatível com o facto de

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

Assim trocando no enunciado do Teorema f por g e g por f fica-se com o caso de $l = 0$, que já foi considerado na primeira parte da demonstração. ■

3.11 Derivadas de ordem superior

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $a \in D$. No caso de f' ser por sua vez também diferenciável num ponto a interior do seu domínio D', então diz-se que f é duas vezes diferenciável em a, e representa-se por $f''(a)$.

Em geral, a derivada de ordem n da função f, representa-se por $f^{(n)}$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$.

A função f diz-se n vezes diferenciável no ponto a do respectivo domínio $D^{(n)}$ se existir e for finita a derivada $f^{(n)}(a)$.

A função f é indefinidamente diferenciável no ponto a se for n vezes diferenciável em a para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: A função $f(x) = e^x$ é indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}$, tendo-se para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x.$$

A derivada de 1^a ordem, como já foi referido anteriormente, pode ser entendida como o "contacto"da função com a recta tangente ao gráfico nesse ponto.

Para as derivadas de ordem n de f podem-se admitir "contactos"de ordem n, o que permite aproximar uma função diferenciável qualquer por um polinómio cujos termos serão constituidos pelos vários "contactos".

Definição 3.11.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função n vezes diferenciável em $a \in D$. Chama-se polinómio de Taylor de ordem n de f no ponto , a*

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,.$$

Se $a = 0$ o polinómio de Taylor é designado por polinómio de MacLaurin e assume uma forma mais simplificada

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Teorema 3.11.2 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função n vezes diferenciável em $a \in D$ então para qualquer $x \in D$ é válida a fórmula de Taylor*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n(x)$$

verificando o resto $R_n(x)$ a condição

$$\lim_{x \to a} R_n(x) = 0.$$

No caso particular de $a = 0$, a fórmula de Taylor é também chamada fórmula de Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\;x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

O interesse da fórmula de Taylor será acrescido se for possível explicitar o termo complementar $R_n(x)$ possibilitando uma estimação do seu valor, isto é, uma aproximação do erro cometido quando se substitui a função pelo correspondente polinómio de Taylor.

3.12 Aplicações da fórmula de Taylor à determinação de extremos, convexidade e inflexões

Anteriormente viu-se que, para uma função f, diferenciável num ponto a, tenha um extremo local neste ponto, é necessário, embora não suficiente, que $f'(a) = 0$.

Chamam-se **pontos críticos** ou **estacionários** de uma função f aos zeros da sua função derivada. Para decidir se um ponto crítico é ou não um ponto de máximo ou de mínimo, pode recorrer-se ao sinal da 1^a derivada.

Nos casos em que não seja possível estudar o sinal de $f'(x)$em pontos próximos de a o recurso à fórmula de Taylor dá um método alternativo, que pode ser útil se forem conhecidos os valores assumidos no ponto a por algumas das derivadas de ordem superior à primeira.

Exemplo: Se f é duas vezes diferenciável em a , $f'(a) = 0$ e $f''(a) \neq 0$ então a fórmula de Taylor com resto de Lagrange será

$$f(x) = f(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$$

com $\lim\limits_{x \to a} R_2(x) = 0$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para $x \in V_\epsilon(a)$ se tem que $|R_2(x)| < |f''(a)|$. Assim o sinal da soma $f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x)$, em $V_\epsilon(a)$, será o sinal do primeiro termo.

Se $f''(a) > 0$ tem-se

$$f(x) - f(a) = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(x) \geq 0,$$

isto é, $f(x) > f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$. Se for $f''(a) < 0$ tem-se $f(x) < f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$ No primeiro caso tem-se um mínimo local estrito e no segundo caso um máximo local também estrito.

Se $f''(a) = 0$ o processo não era aplicável e ter-se-ia que realizar o mesmo processo para a primeira ordem da derivada que não se anulasse em a. Assim:

Teorema 3.12.1 *Seja f uma função n vezes diferenciável em a, com $n \geq 2$, e suponha-se $f^{(n)}(x)$ é a primeira derivada que não se anula em a Então:*

1. *se n é ímpar, f não tem qualquer extremo no ponto a;*
2. *se n é par, $f(a)$ é um máximo ou um mínimo local (estrito) de f, conforme $f^{(n)}(a) < 0$ ou $f^{(n)}(a) > 0$.*

Dem. Como f é uma função n vezes diferenciável em a então, numa vizinhança de a, $V_\epsilon(a)$, pode ser representada pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

para $x \in V_\epsilon(a)$.

Como $f^{(n)}(x)$ é a primeira derivada que não se anula em a então

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}(x-a)\right]. \end{aligned}$$

Como $(x-a)$ pode ser arbitrariamente pequeno então o sinal dominante do último factor será o sinal de $f^{(n)}(a)$.

Se n é ímpar, o primeiro membro $f(x) - f(a)$ toma sinais contrários quando x toma valores à esquerrda ou à direita de a, mas suficientemente próximos. Logo $f(a)$ não é um extremo.

Se n é par, o sinal de $f(x) - f(a)$ é o mesmo que o sinal de $f^{(n)}(a)$.

Assim se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f(x) < f(a)$ para $x \in V_\epsilon(a)$, pelo que $f(a)$ é um máximo. Se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f(a)$ é um mínimo local ■

Exemplo 3.12.2 *A função* $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ *tem unicamente dois pontos estacionários:* 0 *e* 1 *Como* $f''(1) = 12 > 0$ *então* $f(1) = 1$ *é um mínimo de* f*. No ponto* 0, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -24$ *pelo que ´*$f(0)$ *não é um ponto de extremo.*

Outra aplicação da fórmula de Taylor está relacionada com a noção de convexidade, isto é, com a posição do gráfico da função f, diferenciável em a,:em relação à respectiva tangente no ponto $(a, f(a))$:

Se existe $\epsilon > 0$ tal que em $V_\epsilon(a)$ o gráfico de f está acima do da função $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ diz-se que a função f é convexa em a ou que tem a concavidade voltada para cima nesse ponto.

Se o gráfico de g está acima do de f diz-se que a função f é côncava em a ou que tem a concavidade voltada para baixo nesse ponto.

Pode acontecer que exista um intervalo à esquerda de a e outro à direita de a em que o gráfico de f esteja acima do de g num deles e abaixo noutro. Neste caso diz-se que a é um ponto de inflexão de f.

Exercício 3.12.3 *Estude quanto ao domínio, existência de assímptotas, monotonia, existência de extremos, concavidades e inflexões as funções:*

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
2. $g(x) = x^4 - 18x^2$

3. $h(x) = \frac{x-1}{x+2}$
4. $j(x) = \left(2x^2 + 3x\right) e^{-x}$
5. $i(x) = \frac{x^2}{2x-2}$
6. $l(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

Capítulo 4

Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

4.1 Primitivas

Definição 4.1.1 *$F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, num certo intervalo I, se*

$$F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

Isto é $Pf(x) = F(x) \Longrightarrow F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Resulta imediatamente desta definição que a operação de primitivação é a operação inversa da derivação.

Como $[F(x) + c]' = F'(x)$ para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$, então existe uma infinidade de primitivas de uma certa função.

Assim designa-se por expressão geral das primitivas de $f(x)$ a

$$Pf(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Proposição 4.1.2 *Duas primitivas de uma mesma função, num certo intervalo I, diferem sempre de uma constante.*

Dem. Sejam $F(x)$ e $G(x)$ duas primitivas de uma mesma função $f(x)$. Então $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$ e

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

■

A hipótese de se considerar um intervalo I é fundamental, porque a função pode não ser primitivável para todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Veja-se, por exemplo, a função definida em $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Suponhamos que existe uma primitiva de$f(x)$, $F(x)$, em $\mathbb{R}$.

Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]x, 0[$ tal que

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c) = f(c) = -1, \text{ porque } c < 0.$$

Pela definição de derivada lateral

$$F'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} F'(c) = -1.$$

Contudo não é possível ter uma situação de

$$F'(0) = F'(0^-) = F'(0^+) = -1 = f(0)$$

porque $f(0) = 1$.

Então $f(x)$ não é primitivável em $\mathbb{R}$, embora o seja em $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

4.2 Primitivas imediatas e quase imediatas

Estas primitivas obtêm-se utilizando apenas as regras de derivação, eventualmente com operações preliminares.

Seja $f(x)$ uma função primitável num certo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

4.2.1 Primitiva de uma constante

Como $(kx)' = k$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$Pk = kx + c, \quad k, c \in \mathbb{R}.$$

Generalizando, como $(kPf(x))' = k\ (Pf(x))' = kf(x)$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$P\left(k\ f(x)\right) = k\left(Pf(x)\right).$$

4.2.2 Primitiva de uma potência de expoente real

Para $m \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, tem-se $\left(\frac{f^{m+1}}{m+1}\right)' = f^m\ f'$, pelo que

$$Pf^m(x)\ f'(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad m \neq -1.$$

Exercício 4.2.1 *Calcular:*

1. $P\sqrt{2x+1}$
2. $P\frac{\log x}{x}$
3. $P\frac{4}{(1+5x)^3}$

No caso de $m=-1$ tem-se que $\frac{f'}{f}=(\log f)'$, e assim

$$P\frac{f'(x)}{f(x)}=(\log f(x))+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Exercício 4.2.2 *Calcular:*

1. $P\frac{x^3}{x^4+a^2}, \quad a\in\mathbb{R}.$
2. $Ptg\ x.$

Se se substituir x por uma função $f(x)$ diferenciável, tem-se

$$Ptg\,(f(x))\ \ f'(x)=-\log|\cos(f(x))|+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

4.2.3 Primitiva de funções exponenciais

Como $\left(e^f\right)'=e^f\ f'$ então

$$P\left(e^{f(x)}\ f'(x)\right)=e^{f(x)}+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P\left(a^{f(x)}\ f'(x)\right) &= P\left(e^{f(x)\ \log a}\ f'(x)\right)=\frac{e^{f(x)\ \log a}}{\log a} \\ &= \frac{a^{f(x)}}{\log a}+c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercício 4.2.3 *Calcular:*

1. $P\left(xe^{-x^2}\right).$
2. $P\frac{3^{arcsen\ x}}{\sqrt{1-x^2}}.$

4.2.4 Primitiva de funções trigonométricas

Como $(-\cos(f))' = f'\ sen(f)$ tem-se

$$P\left[f'(x)\ sen(f(x))\right] = -\cos(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e, analogamente,

$$P\left[f'(x)\ \cos(f(x))\right] = sen(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pelo mesmo processo $(tg(f))' = f'\ \sec^2(f)$ e

$$P\left[f'(x)\sec^2(f(x))\right] = tg(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Partindo novamente das derivadas $(arcsen(f))' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$, pelo que

$$P\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = arcsen(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

e

$$P\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = arctg(f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

Exercício 4.2.4 *Calcular:*

1. $P(sen(2x))$.
2. $P\sec^2(3x)$.
3. $P\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.
4. $P\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
5. $P\frac{x^2}{1+x^6}$

4.3 Métodos de primitivação

Se uma função não pode ser primitivada só por aplicação das regras de derivação (primitivas imediatas) ou após alguns artifícios (primitivas quase imediatas) recorre-se a um ou mais métodos de primitivação.

4.3.1 Primitivação por decomposição

Baseia-se na linearidade da primitiva:

Teorema 4.3.1 *Sejam f_i funções primitiváveis num domínio $I \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, e $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Então*

$$P\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n\right) = \alpha_1\ Pf_1 + \alpha_2\ Pf_2 + \cdots + \alpha_n\ Pf_n.$$

Alguns casos particulares merecem atenção:

- Para $n \in \mathbb{N}$, $P\,(sen\ x)^{2n+1} = P\left(sen^2\ x\right)^n\ sen\ x = P\left(1 - \cos^2 x\right)^n$ $sen\ x$.
  Desenvolvendo $\left(1 - \cos^2 x\right)^n$ obtêm-se potências de $\cos x$ multiplicadas por $sen\ x$ e a cada uma delas pode aplicar-se a relação
  $$P\left(\cos^k x\ \ sen\ x\right) = -\frac{\cos^{k+1} x}{k+1},\ k = 0, 2, ..., 2n.$$
- Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $Ptg^n\,(x) = Ptg^{n-2}\,(x)\ tg^2\,(x) = Ptg^{n-2}\,(x)$ $\left(\sec^2 x - 1\right) = Ptg^{n-2}\,(x)\left(\sec^2 x - 1\right) = Ptg^{n-2}\,(x)\sec^2 x - Ptg^{n-2}\,(x)$.
  Desta forma obtem-se a fórmula por recorrência
  $$Ptg^n\,(x) = \frac{tg^{n-1}\,(x)}{n-1} - Ptg^{n-2}\,(x).$$
- Para fracções racionais com aplicação do método dos coeficientes indeterminados pode decompor-se a fracção inicial em fracções "mais simples":
  Exemplo:
  $$P\frac{2x^5}{x^2+1} = 2P\left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right).$$

4.3.2 Primitivação por partes

Este método baseia-se na fórmula para a derivada do produto de funções

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

pelo que:

Teorema 4.3.2 *Sejam u e v duas funções reais definidas e diferenciáveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Se o produto $u'v$ for primitivável então*

$$P\left[u'(x)v(x)\right] = u(x)v(x) - P\left[u(x)v'(x)\right].$$

Como indicação geral, será conveniente escolher o factor correspondente à função v aquele que se simplificar mais por derivação. Contudo há algumas excepções, como se verifica no próximo exercício:

Exercício 4.3.3 *Calcular:*

1. $P\left(x^2 sen\,(x)\right).$
2. $Px\ arctg\,(x).$
3. $Px^3 \log x.$
4. $P\log x.$
5. $P\cos x\ e^x$

4.3.3 Primitivação por substituição

O método de substituição baseia-se na regra de derivação das funções compostas.

Teorema 4.3.4 *Sejam $f: I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável, $J \subseteq Df$ e $\varphi: I \to J$ uma aplicação bijectiva e diferenciável em I. Então $(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)$ é primitivável e, designando por $\Phi(t)$ uma sua primitiva , isto é, $\Phi(t) = P\left[(f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\right]$, obtem-se que $\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ é uma primitiva de $f(x)$.*
Em resumo

$$Pf(x) = P\left[(f\circ\varphi)(t)\ \ \varphi'(t)\right], \quad \textit{sendo } t = \varphi^{-1}(x).$$

Dem. Aplicando a derivada da função composta e a derivada da função inversa tem-se

$$\begin{aligned}\left(\Phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)' &= \Phi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\ \left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \\ &= f(\varphi(t))\ \varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)\end{aligned}$$

■

Exercício 4.3.5 *Calcule em $I =]0, +\infty[$,*

$$P\left(\frac{1}{e^x - 1}\right),$$

utilizando a substituição $x = \varphi(t) = \log t$.

4.3.4 Primitivação de funções racionais

Definição 4.3.6 i) *Função racional é uma função do tipo* $\frac{p(x)}{q(x)}$, *onde* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são polinómios em* x, *não sendo* $q(x)$ *identicamente nulo.*

ii) *Uma fracção racional diz-se própria se o grau de* $p(x)$ *é menor que o grau de* $q(x)$

Para efeitos de primitivação basta considerar fracções próprias, pois caso a fracção seja imprópria, por uma divisão inteira é sempre possível decompô-la na soma de uma parte inteira com uma fracção própria. Isto é, se $gr\ p(x) \geq gr\ q(x)$ então existem polinómios $a(x)$ e $r(x)$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Condideremos então vários casos na primitivação de fracções racionais que estão directamente relacionados com o número de zeros do denominador e com a sua natureza, ilustrados com exemplos:

1^o caso: As raízes de $q(x)$ são reais de multiplicidade 1:

A fracção racional decompõe-se em "fracções mais simples"e calcula-se a sua primitiva por decomposição.

Exemplo 4.3.7 $P\frac{4x^2+x+1}{x^3-x} = P\frac{4x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = P\frac{-1}{x}+P\frac{3}{x-1}+P\frac{2}{x+1} = \log\left|\frac{1}{x}\right|+ \log|x-1|^3 + \log(x+1)^2 + c = \log\left|\frac{(x-1)^3(x+1)^2}{x}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

2^o caso: As raízes de $q(x)$ são reais e algumas com multiplicidade superior a 1:

O processo é análogo ao anterior.

Exemplo 4.3.8 $P\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)^3} = P\frac{-3}{x} + P\frac{1}{x^2} + P\frac{3}{x+1} + P\frac{4}{(x+1)^2} - P\frac{1}{(x+1)^3} = -3\log|x| - \frac{1}{x} + 3\log|x+1| - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

3^o caso: Algumas raízes de $q(x)$ são complexas de multiplicidade 1:

Na decomposição as fracções cujo denominador têm raízes complexas possuem uma função afim como numerador.

Exemplo 4.3.9 $P\frac{x+2}{x^3-1} = P\frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} = P\frac{1}{x-1} - P\frac{x+1}{x^2+x+1} = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{4\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

4^o caso: Algumas raízes de $q(x)$ são complexas com multiplicidade superior a 1:

Exemplo 4.3.10 $P\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x^2+2)^2} = P\frac{1}{x-1} - P\frac{x+1}{x^2+2} - P\frac{2x}{(x^2+2)^2} = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{x^2+2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Nalguns casos é possível e recomendável combinar os métodos de substituição com o das fracções racionais. Vejam-se alguns exemplos:

Exemplo 4.3.11 *Numa função racional com argumentos do tipo* e^x *, simbolicamente,*

$$FR(e^x),$$

deve tentar-se a substituição

$$x = \log t \quad ou \quad e^x = t.$$

Assim

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1-e^{3x}}{e^{2x}-4}\right) &= P\left(\frac{1-t^3}{t^2-4}\times\frac{1}{t}\right) = P\left(-1+\frac{1-4t}{t^3-4t}\right) \\ &= -e^x - \frac{x}{4} - \frac{7}{8}\log|e^x-2| + \frac{9}{8}\log|e^x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.12 *Numa função racional do tipo*

$$FR(\log x) \times \frac{1}{x}$$

deve tentar-se a substituição

$$\log x = t \quad ou \quad x = e^t.$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\log(2x)}{x\log^3 x}\right) &= P\left(\frac{\log 2+\log x}{\log^3 x}\times\frac{1}{x}\right) = P\left(\frac{\log 2 + t}{t^3}\right) \\ &= \frac{\log 2}{2}\frac{1}{\log^2 x} - \frac{1}{\log x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.13 *Para uma função do tipo*

$$FR(sen\ x) \times \cos x$$

recomenda-se a substituição

$$sen\ x = t \quad ou \quad x = arcsen\ t.$$

Analogamente para

$$FR\,(\cos x) \times sen\ x$$

aplica-se

$$\cos x = t \quad ou \quad x = \arccos t.$$

Assim

$$\begin{aligned} P\frac{\cos^3 x \quad sen\ x}{\cos^2 x + 2\cos x + 1} &= P\frac{t^3\ \sqrt{1-t^2}}{t^2+2t+1} \times \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= P\left(-t+2-\frac{8}{(t+1)^2}\right) \\ &= -\frac{\cos^2 x}{2} + 2\cos x + \frac{8}{\cos x + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.14 *Para*

$$FR\,(sen\ x, \cos x)$$

aplica-se a substituição

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad ou \quad x = 2\ arctg\ t,$$

e, pelas fórmulas trigonométricas dos ângulos duplos,

$$sen\ x = 2\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad e \quad \cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Como exemplo:

$$\begin{aligned} P\frac{\cos x}{sen\ x - \cos x} &= P\left(\frac{1-t^2}{t^2+2t-1} \times \frac{2}{1+t^2}\right) \\ &= 2P\left[\frac{1-t^2}{\left(t+1-\sqrt{2}\right)\left(t+1+\sqrt{2}\right)\left(1+t^2\right)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\log\left|tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2tg\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right| - \frac{1}{2}\log\left(\sec^2 x\right) - \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.15 *No caso de*

$$FR\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right]$$

a substituição indicada será

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q, \quad sendo\ q = m.m.c.\,(q_1, ..., q_n)\,.$$

Ilustre-se com o exemplo:

$$P\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-1} = P\left(\frac{t^2}{t^3-1}\times 6t^5\right) = 6P\left(t^4+t+\frac{t}{t^3-1}\right).$$

4.4 Integral de Riemann

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.

4.4.1 Somas integrais de uma função

Seja f uma função real de variável real definida em $[a,b]$.

Considere-se este intervalo decomposto em n intervalos pelos pontos $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, tais que

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ao conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ chama-se uma decomposição ou partição de $[a,b]$.

Desta forma $[a,b]$ fica decomposto em subintervalos $I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], ..., I_n = [x_{n-1}, x_n]$, de diâmetros

$$diam\ I_1 = x_1 - x_0,\ diam\ I_2 = x_2 - x_1,\ diam\ I_n = x_n - x_{n-1}.$$

Ao maior destes diâmetros chama-se diâmetro da decomposição e nota-se por $|P|$.

Definição 4.4.1 *Chama-se soma integral ou soma de Riemann de uma função f relativamente à decomposição P de $[a,b]$ e ao conjunto*

$$U = \{u_i : u_i \in \left]x_i, x_{i+1}\right[, i = 1, ..., n-1\},$$

designando-se por $S(f,P,U)$ ou abreviadamente porS_P, a

$$\begin{aligned} S(f,P,U) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\ \ (x_i - x_{i-1}) \\ &= f(u_1)(x_1-x_0) + f(u_2)(x_2-x_1) + \cdots + f(u_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Definição 4.4.2 *Se substituirmos na soma anterior a imagem de um ponto intermédio pelo supremo (ínfimo) da função $f(x)$ em cada um dos subintervalos obtem-se a soma superior de Darboux, $\overline{S}$, ou a soma inferior de Darboux, $\underline{S}$.*

Exercício 4.4.3 *Para $f(x) = x^2$ definida em $[0,1]$ decomposto por $P = \{0,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.7,\ 1\}$, calcular:*

1. *A soma de Riemann S_P relativamente a $U = \{0.1,\ 0.45,\ 0.6,\ 0.8\}$.*
2. *As somas superior e inferior de Darboux.*

Proposição 4.4.4 *Seja f uma função limitada em $[a,b]$. As somas superior e inferior de Darboux, $\overline{S}$.e $\underline{S}$, são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann, no conjunto de todas as partições possíveis de $[a,b]$.*

Dem. Para uma mesma partição P de $[a,b]$ tem-se

$$\underline{S} < S_P < \overline{S}. \tag{4.4.1}$$

Defina-se

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1,...,n,$$

e escolha-se $\alpha > 0$ de modo a que para os pontos intermédios u_i em cada um dos subintervalos se tenha

$$f(u_i) > M_i - \alpha, \quad i = 1,...,n.$$

A soma de Riemann será

$$\begin{aligned} S_P &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} (M_i - \alpha)\ \ (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i\ \ (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha\ \ (x_i - x_{i-1}) = \overline{S} - \alpha(b-a). \end{aligned}$$

Pelo mesmo processo, definindo

$$m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1,...,n,$$

se pode provar que

$$S_P < S + \alpha(b-a),$$

pelo que $\overline{S}$.e $\underline{S}$, são, respectivamente, o supremo e o ínfimo das somas de Riemann. ■

Note-se que as somas anteriores, de um ponto de vista geométrico, corresponde a vários modos de obter a soma da área de vários rectângulos com alturas diferentes mas bases iguais em cada um dos casos.

4.4.2 Definição de integral de Riemann

Definição 4.4.5 *Uma função $f(x)$ diz-se integrável à Riemann em $[a,b]$ se for finito*

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(x) = S = \int_a^b f(x)dx,$$

em que $S_P(x)$ designa a soma de Riemann de f relativamente à decomposição P, $|P|$ o diâmetro da decomposição, $f(x)$ a função integranda, x a variável de integração e $[a,b]$ o intervalo de integração

Observação 4.4.6 *O valor do integral depende da função f e do intervalo $[a,b]$, mas é independente da variável de integração. Isto é,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

Proposição 4.4.7 *(Condição necessária de integrabilidade) Se $f(x)$ é integrável em $[a,b]$ então $f(x)$ é limitada em $[a,b]$.*

Dem. Pela definição de limite tem-se

$$\lim_{|P|\to 0} S_P(x) = S \Longleftrightarrow \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\text{: } \forall P,\ \ |P| < \varepsilon \Longrightarrow |S_P(x) - S| < \delta.$$

Assim quando o diâmetro da partição for suficientemente pequeno tem-se, para $\delta > 0$,

$$S - \delta < S_P < \delta + S.$$

Como $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,|x_i - x_{i-1}|$ com u_i pontos arbitrários em cada um dos subintervalos. Separamndo a primeira parcela,

$$S_P = f(u_1)\,|x_1 - a| + \sum_{i=2}^{n} f(u_i)\,(x_i - x_{i-1})\,.$$

Considerando fixos os pontos $u_i, i = 2, ..., n$, o somatório terá uma certa soma k. Assim

$$S_P = f(u_1)\,|x_1 - a| + k$$

e

$$S - \delta < f(u_1)\,|x_1 - a| + k < \delta + S$$

ou seja

$$\frac{S - \delta - k}{|x_1 - a|} < f(u_1) < \frac{\delta + S - k}{|x_1 - a|}.$$

Como u_1 é um ponto arbitrário em $[a, x_1]$ a função $f(x)$ é limitada em $[a, x_1]$.

Pelo mesmo processo é possível provar que $f(x)$ é limitada em qualquer dos subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$.Logo $f(x)$ é limitada em $[a, b]$. ■

Igualmente útil é a sua recíproca.

Se $f(x)$ não é limitada em $[a, b]$ então $f(x)$ não é integrável em $[a, b]$.

Proposição 4.4.8 *(Condição necessária e suficiente de integrabilidade) A função $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ se e só se as somas de Darboux têm o mesmo limite finito.*

Dem. ($\Longrightarrow$) Se $f(x)$ é integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$ então $\lim\limits_{|P| \to 0} S_P(x) = S$, ou seja para um certo $\varepsilon > 0$ tal que $|P| < \varepsilon$ se tem $|S_P(x) - S| < \frac{\delta}{2}$, ou seja,

$$S - \frac{\delta}{2} < S_P < S + \frac{\delta}{2}.$$

Como

$$\underline{S} - \overline{S} \leq 0 < \delta,$$

então, para $|P| < \varepsilon$, $\left|\overline{S} - \underline{S}\right| \leq \delta$, pelo que

$$\lim_{|P| \to 0} \left(\overline{S} - \underline{S}\right) = 0,$$

isto é,

$$\lim_{|P| \to 0} \overline{S} = \lim_{|P| \to 0} \underline{S}.$$

Além disso, pelo enquadramento (4.4.1), tem-se

$$\lim_{|P| \to 0} \overline{S} = \lim_{|P| \to 0} \underline{S} = \lim_{|P| \to 0} S_P = S = \int_a^b f(x) dx.$$

($\Longleftarrow$) Se as somas de Darboux $\overline{S}$ e $\underline{S}$ têm o mesmo limite finito, pelo enquadramento (4.4.1), tem-se

$$\lim_{|P| \to 0} \overline{S} = \lim_{|P| \to 0} \underline{S} = \lim_{|P| \to 0} S_P = S = \int_a^b f(x) dx,$$

pelo que $f(x)$ é integrável em $[a, b]$.. ■

Alguns resultados ajudam a formar ideias sobre classes de funções integráveis:

Proposição 4.4.9 *Toda a função contínua em $[a, b]$ é integrável à Riemann nesse intervalo.*

4.4.3 Interpretação geométrica do conceito de integral

Vimos anteriormente que as somas superior e inferior de Darboux, $\overline{S}$ e $\underline{S}$, são aproximações por excesso e por defeito, respectivamente, da área do trapezóide limitado pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

Se se diminuir o diâmetro da partição obtêm-se aproximações com um erro menor, da área do trapezóide referido.

Ao considerar partições mais finas, $\overline{S}$ e $\underline{S}$ serão valores tão próximos quanto de queira, por excesso e por defeito, do valor dessa área.

Assim se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

4.5 Propriedades dos integrais

A maior parte das propriedades que se seguem podem ser demonstradas por aplicação directa da definição de integral.

Proposição 4.5.1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis em $[a, b]$.*

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. *Se $f(x)$ é uma função par então*
$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$
3. *Se $f(x)$ é uma função ímpar então*
$$\int_{-a}^{-b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$
4. *Para $k \in \mathbb{R}$,*
$$\int_a^b k\ dx = k\,(b-a)\,.$$
5. *Para $k \in \mathbb{R}$,*
$$\int_a^b k\ f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

6. *Se* $f(x) \geq 0$ *então*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. *Se* $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *então*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

8.
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

9. *Se* $f(x)$ *é uma função limitada em* $[a,b]$ *tal que* $|f(x)| \leq M$, *com* $M > 0$, *então*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M\,(b-a)\,.$$

10. *(Aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração)*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

11. *(Aditividade do integral relativamente à função integranda)*
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dem. Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ uma decomposição de $[a,b]$ e $U = \{u_i : u_i \in \,]x_i, x_{i+1}[\,, i = 1, ..., n-1\}$ um conjunto de pontos arbitrários em cada um dos subintervalos.

1.
$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_{i-1} - x_i) = -\int_b^a f(x)dx.
\end{aligned}$$

2. Uma decomposição de $[-a,-b]$ será $P^* = \{-x_0, -x_1, -x_2, ..., -x_{n-1}, -x_n\}$ e um conjunto de pontos respectivos pode ser $U^* = \{-u_i\}$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = -\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{-b} f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f(-u_i)(-x_i + x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

4.

$$\int_a^b k\ dx = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

5.

$$\begin{aligned}
\int_a^b k\ f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} kf(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= k\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

6.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

7.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \int_a^b g(x)dx.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1})\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(u_i)(x_i - x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f(u_i)|(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

9.

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \leq \int_a^b M\ dx = M(b-a).$$

10. (Interpretar geometricamente como adição de áreas)

11.

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx &= \sum_{i=1}^n [f(u_i)+g(u_i)](x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(u_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.5.2 *(Teorema da média do cálculo integral) Se $f(x)$ é integrável num intervalo $I := [a,b]$ então existe $\lambda \in [m,M]$, com $m := \inf_{x\in I} f(x)$ e $M := \sup_{x\in I} f(x)$, tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a).$$

Dem. Suponhamos que $b > a$. Como $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$, então

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

pela Proposição anterior (7),

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

e, como $b-a>0$,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

Definindo

$$\lambda := \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

obtem-se o resultado pretendido.

Se $b<a$ tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

e aplica-se a primeira parte da demonstração. ■

Observação 4.5.3 **i)** *Se $f(x)$ é uma função contínua em I então existe $c \in I$ tal que $f(c)=\lambda$, pelo que se obtem*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)\,.$$

ii) *Se $f(x) \geq 0, \forall x \in I$ então $\int_a^b f(x)dx$ dá o valor da área de um trapezóide, pelo que $f(c)$ é a altura de um rectângulode comprimento $b-a$, com áea igual à do trapezóide.*

Proposição 4.5.4 *(Desigualdade de Schwarz) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis em $[a,b]$ então*

$$\left(\int_a^b f(x)\times g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx.$$

Dem. Comece-se por calcular

$$\int_a^b [\alpha f(x)+g(x)]^2\,dx = \alpha^2 \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx}_{A} + 2\alpha \underbrace{\int_a^b f(x)\times g(x)dx}_{B} + \underbrace{\int_a^b g^2(x)dx.}_{C}$$

Como $[\alpha f(x)+g(x)]^2 \geq 0$ então

$$\int_a^b [\alpha f(x)+g(x)]^2\,dx \geq 0$$

e, simplificando a notação,

$$\alpha^2 A + 2\alpha B + C \geq 0$$

apenas acontece para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo se $A > 0$ e $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, isto é,

$$B^2 \leq AC.$$

Voltando à notação inicial

$$\left(\int_a^b f(x) \times g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx.$$

■

Exercício 4.5.5 *Determine o sinal dos integrais, sem os calcular:*

a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\ x}{x} dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\ sen(x)dx$

Exercício 4.5.6 *Obtenha um majorante e um minorante para os integrais, sem os calcular:*

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ tg(x)dx$

4.6 Integral indefinido

Definição 4.6.1 *Seja $f(x)$ uma função integrável em I e $\alpha \in I$. Chama-se integral indefinido com origem em α à função*

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \ \forall x \in I.$$

Proposição 4.6.2
1. *Integrais indefinidos de origens diferentes diferem de uma constante.*
2. *O integral indefinido é uma função contínua.*

Dem. Considerem-se

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt \quad \text{e} \quad \Psi(x) = \int_b^x f(t)dt.$$

1. Então

$$\Phi(x)-\Psi(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{b} f(t)dt=\int_{\alpha}^{b} f(t)dt\in\mathbb{R}.$$

2. Comecemos por provar que $\Phi(x)$ é uma função contínua.em $x=\alpha$, isto é que

$$\lim_{x\to\alpha}\Phi(x)=\Phi(\alpha).$$

Note-se que o limite, a existir, terá que ser 0 e que, pela condição necessária de integrabilidade, (Proposição 4.4.7) $f(x)$ é limitada em $[a,b]$, digamos por uma constante $M>0$. Assim

$$|\Phi(x)-0|\leq\int_{\alpha}^{x}|f(t)|\,dt\leq\int_{\alpha}^{x} M\ dt=M(x-\alpha)$$

e como $\lim\limits_{x\to\alpha} M(x-\alpha)=0$, então $\lim\limits_{x\to\alpha}\Phi(x)=\Phi(\alpha)=0.$

Prove-se agora que $\Phi(x)$ é contínua.em $x=c\neq\alpha$.

Então

$$\begin{aligned}|\Phi(x)-\Phi(c)| &= \left|\int_{\alpha}^{x} f(t)dt-\int_{\alpha}^{c} f(t)dt\right|\\ &= \left|\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\int_{c}^{\alpha} f(t)dt\right|=\left|\int_{c}^{x} f(t)dt\right|\\ &\leq \int_{c}^{x}|f(t)|\,dt\leq\int_{c}^{x} M\ dt=M(x-c)\leq M\,|x-c|\end{aligned}$$

e conclui-se como na primeira parte da prova. ■

Teorema 4.6.3 *(Teorema fundamental do Cálculo Integral) O integral indefinido tem por derivada a função integranda nos pontos em que esta seja contínua, isto é,*

$$\Phi'(c)=f(c),\ \text{se } f \text{ for contínua em } c.$$

Dem. Viu-se anteriormente que

$$\Phi(x)-\Phi(c)=\int_{c}^{x} f(t)dt=\lambda\,(x-c)\,,$$

com λ compreendido entre $f(x)$ e $f(c)$.

Por definição de derivada

$$\Phi'(c)=\lim_{x\to c}\frac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\lambda\,(x-c)}{x-c}=\lambda=f(c).$$

■

Corolário 4.6.4 *Sejam $\alpha, x \in I$ e f uma funçaõ contínua em I. Então*

$$\Phi'(x) = f(x),\ \forall x \in I.$$

Observação 4.6.5 **i)** *Sendo $\Phi\left[u(x)\right] = \int_{\alpha}^{u(x)} f(t)dt$, pela derivada da função composta obtem-se*

$$\Phi'\left[u(x)\right] = f\left[u(x)\right] \times u'(x),\ \forall x \in I.$$

ii) *Se $\Phi(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ então*

$$\Phi'(x) = f\left[u(x)\right] \times u'(x) - f\left[v(x)\right] \times v'(x).$$

Exercício 4.6.6 *Estude quanto aos extremos e intervalos de monotonia a função*

$$\Phi(x) = \int_{2}^{x} (t^2 - 6t + 8)dt.$$

Exercício 4.6.7 *Sendo $f(x) = \int_0^{\log x} (x\ e^{t^2})dt$ prove que $f'(1) = 1$ e $f''(1) = 0$.*

Exercício 4.6.8 *Para $f(x) = \int_{x^2}^{k \log x} (e^{-t^2})dt$, calcule k tal que $f'(1) = 0$.*

Exercício 4.6.9 *Recorrendo à desigualdade de Schwarz encontre um majorante para*

$$\int_0^1 e^{5x} \sqrt{arctg(x)}dx.$$

Teorema 4.6.10 *(Fórmula de Barrow) Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma primitiva qualquer de f em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dem. A fórmula geral das primitivas de $f(x)$ é dada por

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$F(b) = \int_{\alpha}^{b} f(t)dt + k \ \text{ e } \ F(a) = k.$$

Então

$$F(b) - F(a) = \int_{\alpha}^{b} f(t)dt.$$

■

Exercício 4.6.11 *Calcule o valor dos integrais:*

1. $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{7+3x}}$
2. $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-25} dx$

4.7 Métodos de integração

Os métodos de integração são análogos aos métodos de primitivação.

4.7.1 Integração por decomposição

Sejam f_i funções integráveis em $[a,b]$. Então

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

4.7.2 Integração por partes

Sejam u e v duas funções integráveis num intervalo $[a,b]$. Se o produto $u'v$ for integrável então

$$\int_a^b \left[u'(x)v(x)\right] dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b \left[u(x)v'(x)\right] dx.$$

4.7.3 Integração por substituição

Considere-se: f uma função contínua em $[a,b]$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ uma função bijectiva e diferenciável com $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Então é válida a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right] \times \varphi'(t)\, dt.$$

Exercício 4.7.1 *Calcular o valor dos integrais:*

1. $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$
2. $\int_1^2 x^{-3} \log x \; dx$
3. $\int_0^1 x \; arctg(x) \; dx$
4. $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

5. $\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1}\ dx$

6. $\int_0^{63} \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}\ dx$

4.8 Extensão da noção de integral

Nos casos em que o intervalo de integração não é limitado ou a função integranda não é limitada no intervalo de integração, a teoria naterior não se aplica e é necessário um novo conceito de integral: o integral impróprio.

4.8.1 Integral impróprio de 1^a espécie

Definição 4.8.1 *Seja um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por integral impróprio de 1^a espécie de f em I a qualquer das seguintes situações:*

a) *Se $I = [a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*

b) *Se $I =]-\infty, b[$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$*

c) *Se $I =]-\infty, +\infty[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.*

Pode perguntar-se se neste caso, em que a região não está completamente limitada, o integral ainda representa o valor da área dessa região ilimitada.

A resposta é afirmativa caso o integral impróprio de 1^a espécie tenha um valor finito.

Assim é necessário estudar a natureza do integral.

Definição 4.8.2 i) *O integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é convergente se existir e for finito*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt.$$

Nesse caso

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\ dt$$

representa o valor da área pretendida.

ii) *Análogamente, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ é convergente se*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$$

existir e for finito.

Definição 4.8.3 iii) *Do mesmo modo* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

existir e for finito.

iv) *Se algum dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o respectivo integral diz-se divergente.*

Exercício 4.8.4 *Estude a natureza dos integrais e calcule o seu valor, se possível:*

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$

Exercício 4.8.5 *Estude a natureza do integral*

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \quad (a > 0)$$

discutindo-a em função de α.

4.8.2 Integral impróprio de 2ª espécie

Nestes casos consideram-se as situações em que a função integranda não é limitada em pelo menos um ponto do intervalo de integração.

Definição 4.8.6 *Seja* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* f *uma função integrável em subintervalos de* $[a, c[\cup]c, b]$, *sendo* c *um ponto em que* f *não é limitada Designa-se por integral impróprio de 2ª espécie o integral*

$$\int_a^b f(x)dx$$

em que existe pelo menos um $c \in [a, b]$ *em que* $f(c)$ *não é limitada*

Definição 4.8.7 *O integral integral impróprio de 2ª espécie diz-se convergente se existirem e forem finitos*

$$\lim_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\ dt \quad e \quad \lim_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\ dt$$

Nesse caso

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\ dt + \lim_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\ dt.$$

Se pelo menos um dos limites anteriores não existir ou for infinito, então o integral diz-se divergente.

Observação 4.8.8 *Se em $[a,b]$ existirem n pontos $c_1,...,c_n$ onde a função não é limitada então deve decompor-se o integral de forma a isolar esses pontos apenas num dos extremos de integração.*

Exercício 4.8.9 *Estudar a natureza dos integrais:*

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$,*discutindo-a em função de* $\alpha\in\mathbb{R}$.

c) $\int_{-10}^{10} \frac{x}{x^2-1}dx$

4.8.3 Integral impróprio de 3^a espécie ou mistos

Neste caso estão os integrais que são simultaneamente de 1^a e 2^a espécie, isto é, integrais em que pelo menos um dos extremos de integração é infinito e existe pelo menos um ponto onde a função não é limitada.

Tal como na secção anterior deve decompor-se o integral misto na soma de integrais que sejam apenas de 1^a ou 2^a espécie.

O integral é convergente se forem convergentes todos os integrais em que se decomponha. Caso contrário o integral diz-se divergente.

Exercício 4.8.10 *Estude a natureza dos integrais:*

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1}dx$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$

4.9 Critérios de convergência para integrais impróprios

Na prática torna-se útil analisar a natureza dos integrais impróprios sem ter de os calcular.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções localmente integráveis.

Proposição 4.9.1 *Se*

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{\alpha} f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

então:

- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente se* $\alpha > 1$;
- $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é divergente se* $\alpha \leq 1$.

Exemplo 4.9.2 *O integral* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ *é divergente pois*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \frac{x}{x^2+1} = 1 \text{ para } \alpha = 1.$$

Proposição 4.9.3 *(Critério de comparação) Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são duas funções tais que existe* $k \in \mathbb{R}$ *de modo que* $f(x) \leq g(x)$,*para* $x \geq k$, *então:*

a) *Se* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é divergente então* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *é divergente;*

b) *Se* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *é convergente então* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *é convergente.*

Exemplo 4.9.4 *Para analisar a natureza do integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *pode começar-se por estabelecer as relações*

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1 + sen^2 x \\ \frac{1}{\sqrt{x}} &\leq \frac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}}, \text{ para } x \geq 1. \end{aligned}$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *é divergente então* $\int_1^{+\infty} \frac{1+sen^2 x}{\sqrt{x}}dx$ *é também divergente.*

Proposição 4.9.5 *(Critério da existência do limite) Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são duas funções tais que*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ é finito e não nulo}$$

então os integrais $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *e* $\int_c^{+\infty} g(x)dx$ *têm a mesma natureza.*

Exemplo 4.9.6 *Para estudar a natureza do integral* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ *pode ver-se que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{x^\alpha} = 1 \text{ se } \alpha = \frac{3}{2}.$$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ *é convergente então* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$ *é da mesma natureza, isto é, é convergente.*

Proposição 4.9.7 *(Critério do integral) Seja* $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função decrescente e, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *seja* $a_n = f(n)$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e o integral* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *são da mesma natureza (ambos convergentes ou ambos divergentes).*

Proposição 4.9.8 *Seja* $\int_a^b f(x)dx$ *um integral impróprio de 2ª espécie em que* $f(c)$ *não é limitada. Se*

$$\lim_{x \to c} (x - c)^\alpha f(x) \text{ é finito e não nulo}$$

então:

a) $\int_a^b f(x)dx$ *é convergente se* $\alpha < 1$;

b) $\int_a^b f(x)dx$ *é divergente se* $\alpha \geq 1$.

Exemplo 4.9.9 *O integral* $\int_3^4 \frac{2}{(x-3)^2} dx$ *é divergente pois*

$$\lim_{x \to 3} (x - 3)^\alpha \frac{2}{(x - 3)^2} = 2 \text{ para } \alpha = 2.$$

4.10 Aplicações dos integrais

4.10.1 Áreas planas

Se $f(x)$ é uma função contínua não negativa, a área da região limitada pelo seu gráfico, pelo eixo das abcissas e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Exercício 4.10.1 *Calcular a área:*

1. *De um círculo de centro na origem e raio* r;
2. *Da região definida pelo conjunto*
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq (x+1)\,e^{x+1}\right\};$$
3. *Da região limitada pela parábola* $y = x^2$ *e a recta* $y = 3 - 2x$.
4. *Da região definida por*
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 5, 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right\}.$$

4.10.2 Comprimento de curvas planas

O comprimento de um arco P_0P_1 duma curva representada pela aplicação $y = f(x)$, tendo por coordenadas cartesianas $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ é dado por
$$C = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Exercício 4.10.2 *Determine os comprimentos dos arcos das curvas definidas por:*

1. $y = \cosh(x)$ *entre* $A = (0,1)$ *e* $B = \left(1, \frac{e^2+1}{e}\right)$
2. $y = 2\log x$ *entre* $A = (1,0)$ *e* $B = \left(\sqrt{3}, 2\log\sqrt{3}\right)$

4.10.3 Volumes de sólidos de revolução

O volume do sólido que se obtem pela rotação da região limitada pelo gráfico de $y = f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, em torno do:

a) eixo das abcissas é dado por
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

b) eixo horizontal $y = k$ é dado por
$$V = \pi \int_a^b [f(x) - k]^2\, dx.$$

Exercício 4.10.3 *Calcular o volume de um cone de revolução de altura* h *e raio da base* r.

4.10.4 Áreas laterais de sólidos de revolução

A área lateral de um sólido gerado pela rotação da região limitada pelo eixo das abcissas, pelo gráfico de $f(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$A_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Exercício 4.10.4 *Calcular a área lateral de um cone de revolução de altura h e raio da base r.ntegral de Riemann*

O conceito base no cálculo diferencial é a noção de derivada. No cálculo integral esse papel é desempenhado pela noção de integral.

O método mais intuitivo para abordar este conceito é considerá-lo como uma área.

Capítulo 5

Sucessões

5.1 Definição

As sucessões são funções reais de varíável natural.

Definição 5.1.1 *Dado um conjunto* $A \neq \varnothing$*, chama-se* <u>*sucessão*</u> *de termos em* A *a qualquer aplicação de* $\mathbb{N}$ *em* A*.*

Exemplo 5.1.2 *As aplicações*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ & n & \longmapsto & 3n-4 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & n & \longmapsto & \frac{5n+2}{n+1} \end{array}$$

são exemplos de sucessões.

Se o conjunto de chegada for $\mathbb{R}$ então diz-se uma <u>sucessão de números reais</u>.

Designa-se por u_n.

Aos valores imagens da sucessão chamam-se termos da sucessão e designam-se por $u_1, u_2, ...u_n, , ...$, isto é, 1^o termo, 2^o termo,...,enésimo-termo ou <u>termo de ordem n</u>.

À expressão u_n chama-se <u>termo geral</u> da sucessão.

Ao contradomínio da aplicação chama-se <u>conjunto de todos os termos</u> da sucessão.

Modos de definir uma sucessão:

1. <u>Dado o termo geral</u>

Dada a "lei"que permite obter as imagens a aplicação fica definida, já que o seu domínio é sempre $\mathbb{N}$.

Exercício 5.1.3 *Considere a sucessão* $u_n = \frac{2n-5}{n+3}$.
a) Calcule o 2^o *e o* 10^o *termos.*
b) Determine u_{p+2}.

2. Por recorrência

Os termos da sucessão são calculados a partir dos termos anteriores.

Exemplo 5.1.4 *a)* $\begin{cases} u_1 = 3 \\ \\ u_{n+1} = 2u_n + 4, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 3 \\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exercício 5.1.5 *Calcule os quatro primeiros termos de cada uma das sucessões anteriores e represente-os graficamente.*

Exercício 5.1.6 *Considere a sucessão*

$$w_n = \frac{3n+4}{5n+2}.$$

Verifique se $\frac{7}{11}$ *e* $\frac{5}{7}$ *são termos da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.*

5.2 Subsucessão

Definição 5.2.1 *Designa-se por subsucessão de* u_n *qualquer sucessão que resulte da supressão de alguns termos de* u_n *.*

Exercício 5.2.2 *(i) Dada a sucessão* $u_n = (-1)^n (n+3)$, *calcule:*
a) A subsucessão de u_n *dos termos de ordem par.*
b) A subsucessão de u_n *dos termos de ordem ímpar.*
c) A subsucessão de u_n *dos termos cuja ordem é multipla de* 5.
(ii) Represente gráficamente os três primeiros termos de cada subsucessão.

5.3 Sucessões monótonas

Definição 5.3.1 *Seja* u_n *uma sucessão.*
(i) u_n *diz-se crescente se* $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) u_n *é estritamente crescente se* $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(iii) u_n *diz-se decrescente se* $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) u_n *é estritamente decrescente se* $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *isto é, se* $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definição 5.3.2 *Uma sucessão crescente ou decrescente, em sentido lato ou estrito, é uma* <u>*sucessão monótona*</u>.

Exercício 5.3.3 *Estude e classifique quanto à monotonia as sucessões:*
a) $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b) $b_n = \frac{1-4n}{n+1}$

c) $c_n = \cos(n\pi)$

d) $d_n = -3n$

Observação 5.3.4 *Uma sucessão crescente é limitada inferiormente, isto é, minorada. Pode ser, ou não, limitada superiormente (majorada). Analogamente, qualquer sucessão decrescente é majorada, podendo ser, ou não, minorada.*

5.4 Sucessões limitadas

Definição 5.4.1 *Uma sucessão* u_n *diz-se* <u>*limitada*</u> *se o conjunto dos seus termos for um conjunto limitado. Isto é, se existirem números reais A e B tais que*

$$A \leq u_n \leq B, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo pode definir-se sucessão <u>limitada</u> se

$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 5.4.2 *Das sucessões seguintes indique as que são limitadas, referindo neste caso um majorante e um minorante para o conjunto dos seus termos:*
a) $a_n = \frac{3n}{n+2}$

b) $d_n = -3n$

c) $c_n = \cos(n\pi)$

Exercício 5.4.3 *Prove que a sucessão* $d_n = -3n$ *não é limitada.*

Exercício 5.4.4 *Considere a sucessão* $u_n = \frac{2+3n}{2n+3}$. *Prove que a partir de* u_{11} *(exclusive) todos os termos verificam*

$$u_n \in V_{0,1}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Interprete graficamente.

5.5 Sucessões convergentes. Propriedades

Definição 5.5.1 *A sucessão* u_n *converge para um valor* $a \in \mathbb{R}$ *se, para qualquer valor positivo* δ, *existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão pertencem a* $V_\delta(a)$.
Simbolicamente

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\text{: } n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Exercício 5.5.2 *Provar por definição que*

$$\lim \frac{2+3n}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

Definição 5.5.3 *(i) As sucessões que têm por limite um número finito dizem-se convergentes.*
(ii) As sucessões que não são convergentes dizem-se divergentes.
(iii) Uma sucessão convergente para 0 *diz-se um infinitésimo.*

Proposição 5.5.4 *O elemento* $a \in \mathbb{R}$ *é ponto de acumulação de* $A \subset \mathbb{R}$ *se, e só se, é limite de uma sucessão de pontos de* A *distintos de* a.

Dem. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$.

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem pontos $u_n \in V_{\frac{1}{n}}(a) \cap (A \backslash \{a\})$, ou seja, $|u_n - a| < \frac{1}{n}$ e $u_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Seja $u_n \in A$, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $u_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que $u_n \to a$.

Então $|u_n - a| < \delta$, $\forall \delta > 0$. Assim $u_n \in V_\delta(a)$, $\forall \delta > 0$, pelo que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A. ■

Teorema 5.5.5 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Todo o conjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *infinito e limitado admite, pelo menos, um ponto de acumulação.*

Corolário 5.5.6 *Toda a sucessão limitada em $\mathbb{R}$ admite, pelo menos, uma subsucessão convergente.*

Dem. Seja U o conjunto de termos da sucessão limitada u_n.

Se U é finito então existe $a \in U$ que se repete infinitas vezes e, por consequência, é limite de uma subsucessão constante igual a a, pelo que é convergente para a.

Se U é um conjunto infinito, como é limitado, pelo Teorema 5.5.5, tem pelo menos um ponto de acumulação.

Então, pela Proposição 5.5.4, a é limite de uma sucessão de pontos de U. ■

Vejamos algumas propriedades das sucessões convergentes e as suas relações com as sucessões limitadas.

Teorema 5.5.7 *(Unicidade do limite) O limite de uma sucessão convergente, quando existe, é único.*

Dem. Suponha-se, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão u_n tal que $u_n \to a$ e $u_n \to b$ com $a \neq b$.

Dado $\delta > 0$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \exists n_0 &\in \mathbb{N} : n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\ \exists n_1 &\in \mathbb{N} : n > n_1 \Longrightarrow |u_n - b| < \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Tomando $p := \max\{n_0, n_1\}$ tem-se que para $n > p$ são válidas as duas desigualdades anteriores e

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

O que está em contradição com a hipótese de $a \neq b$.

Logo $a = b$. ■

Teorema 5.5.8 *Se u_n é uma sucessão convergente então qualquer das suas subsucessões é convergente para o mesmo limite.*

Dem. Seja u_n uma sucessão tal que $u_n \to a$ e v_n uma subsucessão de u_n.

Assim os termos de v_n também são termos de u_n, pelo que também verificam a proposição

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon\ n > p \Longrightarrow |v_n - a| < \delta,$$

ou seja $v_n \to a$. ■

Teorema 5.5.9 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Dem. Suponhamos $u_n \to a$ e fixe-se um valor real $\delta > 0$. Então para $n > p$ tem-se que $u_n \in \left]a-\delta, a+\delta\right[$, isto é, $a - \delta < u_n < a + \delta$.

Então fora deste intervalo estão um número finito de termos. Concretamente $u_1, ..., u_p$

Considere-se

$$M := \max\{|u_1|, ..., |u_p|, |a-\delta|, |a+\delta|\}.$$

Então

$$-M \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que u_n é limitada. ■

Teorema 5.5.10 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Dem. Seja u_n uma sucessão monótona e limitada. Como o conjunto dos termos da sucessão é majorado (e minorado) então existe supremo desse conjunto. Designe-se $c := \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Pela definição de supremo, c é o menor dos majorantes, pelo que, para cada $\delta > 0$, $c - \delta$ não é majorante. logo existe pelo menos uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $c - \delta < u_p$.

Sendo u_n uma sucessão monótona ela poderá ser crescente ou decrescente.

Suponhamos que u_n é crescente.

Assim teremos

$$c - \delta < u_p \leq u_n \text{ para } n \geq p.$$

Como c é supremo, é maior que todos os termos de u_n e então

$$c - \delta < u_n < c < c + \delta.$$

Ou seja

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}: \ n > p \Longrightarrow c - \delta < u_n < c + \delta,$$

isto é, $u_n \to c$. Então u_n é uma sucessão convergente (para o supremo do conjunto dos termos da sucessão).

Se u_n f uma sucessão decrescente.a demonstração é semelhante mas utilizando

$$d := \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

■

5.6 Operações algébricas com sucessões

As operações consideradas em $\mathbb{R}$ estendem-se naturalmente às sucessões reais.

Considerem-se duas sucessões u_n e v_n.

Define-se soma de u_n e v_n à sucessão que se obtem adicionando os termos da mesma ordem das duas sucessões e cujo termo geral se obtem como $(u+v)_n$.

Isto é, $(u+v)_n = u_n + v_n$

De modo análogo se define a diferença, o produto e o cociente de u_n e v_n, admitindo-se este último apenas na condição de $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em resumo,

$$\begin{aligned} (u-v)_n &= u_n - v_n \\ (u \times v)_n &= u_n \times v_n \\ \left(\frac{u}{v}\right)_n &= \frac{u_n}{v_n},\ v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

As definições de soma e produto estendem-se de forma óbvia a casos em que se adicione ou multiplique um número finito de sucessões.

Os próximos teoremas jogam com a noção de limite e a relação de ordem no conjunto dos reais.

Teorema 5.6.1 *(Passagem ao limite numa desigualdade) Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes.*
Se a partir de certa ordem se verifica $u_n \leq v_n$ então

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$

Dem. Considerem-se duas sucessões convergentes u_n e v_n tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$. Assim

$$\begin{aligned} \forall \delta &> 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \delta, \\ \forall \delta &> 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}:\ n > n_1 \Longrightarrow |v_n - b| < \delta \end{aligned}$$

e seja n_1 a ordem a partir da qual se verifica $u_n \leq v_n$.

Suponha-se, com vista a uma contradição, que $a > b$ e considere-se $\delta := \frac{a-b}{2}$ (> 0 porque $a > b$).

Seja $p := \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Então para $n \geq p$ tem-se

$$v_n - b < \delta = \frac{a-b}{2},\ -\delta < u_n - a$$

e
$$v_n < b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < u_n.$$
Ora esta desigualdade contradizo facto de a partir da ordem p se tem $u_n \leq v_n$.

Logo $a \leq b$, isto é, $\lim u_n \leq \lim v_n$. ■

Corolário 5.6.2 *Se a partir de certa ordem a sucessão convergente v_n verifica $v_n \geq 0$, então*
$$\lim v_n \geq 0.$$

Dem. Basta fazer na demonstração anterior $u_n \equiv 0$. ■

Teorema 5.6.3 *O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*
Isto é, se u_n é uma sucessão limitada e v_n um infinitésimo, então

$$\lim (u_n \times v_n) = 0.$$

Dem. Seja u_n uma sucessão limitada e v_n um infinitésimo.
Então
$$\exists L > 0 : |u_n| \leq L, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
e como $v_n \to 0$ então

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N}\colon \ n > p \Longrightarrow |v_n| < \frac{\delta}{L}.$$

Assim, para $n > p$,

$$|v_n \times u_n - 0| = |v_n| \times |u_n| \leq |v_n| \times L \leq \frac{\delta}{L} \times L = \delta.$$

Então $(v_n \times u_n) \to 0$, isto é, $(v_n \times u_n)$ é um infinitésimo. ■

5.7 Propriedades algébricas dos limites

Os teoremas que se seguem relacionam as propriedades algébricas fundamentais com as noções de convergência e limite.

Teorema 5.7.1 *Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes.*
1. $(u+v)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (u+v)_n = \lim u_n + \lim v_n$.

2. $(u \times v)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (u \times v)_n = \lim u_n \times \lim v_n$.

3. $(k \times u)_n$ *é uma sucessão convergente e* $\lim (k \times u)_n = k \times \lim u_n$.

4. $\left(\frac{u}{v}\right)_n$ *é uma sucessão convergente desde que* $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,*e* $\lim \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$, *se* $\lim v_n \neq 0$.

5. $(u_n)^p, p \in \mathbb{Z}$, *é uma sucessão convergente (com* $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *se* $p < 0$*) e* $\lim (u_n)^p = (\lim u_n)^p$.

6. $\sqrt[p]{u_n}$ *é uma sucessão convergente, se* $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *e* $\lim \sqrt[p]{u_n} = \sqrt[p]{\lim u_n}$.

Se p for ímpar e $u_n < 0$ *a propriedade permanece válida.*

Dem. Sejam u_n e v_n duas sucessões convergentes tais que $u_n \to a$ e $v_n \to b$. Ou seja

$$\begin{aligned}
\forall \delta &> 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \; n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \frac{\delta}{2}, \\
\forall \delta &> 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \; n > n_1 \Longrightarrow |v_n - b| < \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

1. Considerando $p := \max\{n_0, n_1\}$, tem-se que para $n \geq p$ são válidas as duas proposições e

$$\begin{aligned}
|(u_n + v_n) - (a + b)| &= |(u_n - a) + (v_n - b)| \\
&\leq |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Então $\lim (u_n + v_n) = a + b = \lim u_n + \lim v_n$.

2. Note-se que

$$\begin{aligned}
(u_n \times v_n) - (a \times b) &= u_n v_n - u_n b + u_n b - ab \\
&= u_n (v_n - b) + (u_n - a) b,
\end{aligned}$$

u_n é uma sucessão limitada (pois é convergente), $v_n - b$ e $u_n - a$ são infinitésimos.

Então

$$\lim (u_n v_n - ab) = \lim [u_n (v_n - b)] + \lim [(u_n - a) b] = 0.$$

3. É um caso particular de 2. com $v_n \equiv k$ $(k \in \mathbb{R})$.

4. Como $v_n \to b \neq 0$, por 2., tem-se que $v_n b \to b^2 > 0$, ou seja $-\delta < v_n b - b^2 < \delta$.

Escolha-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que existe $p \in \mathbb{N}$ em que para $n \geq p$ se tem $v_n b > b^2 - \delta > 0$.

Assim, considerando apenas os termos cuja ordem é maior que p (os que não forem são em número finito), obtem-se

$$0 < \frac{1}{v_n b} < \frac{1}{b^2 - \delta},$$

pelo que a sucessão (ou subsucessão se for necessário) $\frac{1}{v_n b}$ 'e limitada.

Note-se que se tem:

· $\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{u_n b - a\ v_n}{v_n b} = (u_n b - a\ v_n)\,\frac{1}{v_n b}$.

· $\lim (u_n b - a\ v_n) = \lim (u_n b) + \lim (-a\ v_n) = ab - ab = 0$.

Então

$$\lim \left(\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right) = \lim (u_n b - a\ v_n)\,\frac{1}{v_n b} = 0,$$

pelo que $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

5. Se $p = 0$, $(u_n)^p \equiv 1$ e $\lim (u_n)^p = \lim 1 = 1 = (\lim u_n)^p$.

Se $p \in \mathbb{N}$, demonstra-se por indução.

Para $p = 1$ a proposição é verdade.

Para provar a tese,

$$\begin{aligned} \lim (u_n)^{k+1} &= \lim \left[(u_n)^k\, u_n \right] = \lim \left[(u_n)^k \right] \lim u_n \\ &= (\lim u_n)^k \lim u_n = (\lim u_n)^{k+1} . \end{aligned}$$

Se $p \in \mathbb{Z}^-$ coloca-se $p = -k$, com $k \in \mathbb{N}$ e para $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\lim (u_n)^{-k} = \lim \left(\frac{1}{(u_n)^k} \right) = \frac{1}{\lim (u_n)^k} = \frac{1}{(\lim u_n)^k} = (\lim u_n)^{-k} .$$

6. Provar primeiro por indução em p, que a relação

$$u^p - v^p = (u - v)\left(u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \cdots + uv^{p-2} + v^{p-1}\right)$$

é válida para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$.

Para $n = 1$, $u - v = u - v$, verdade.

Para $p = k + 1$,

$$\begin{aligned} u^{k+1} - v^{k+1} &= \left(u^{k+1} - uv^k\right) + \left(uv^k - v^{k+1}\right) = u\left(u^k - v^k\right) + v^k (u - v) \\ &= u (u - v)\left(u^{k-1} + u^{k-2}v + u^{k-3}v^2 + \cdots + uv^{p-2} + v^{p-1}\right) + v^k (u - v) \\ &= (u - v)\left(u^k + u^{k-1}v + u^{k-2}v^2 + \cdots + u^2v^{p-2} + uv^{p-1} + v^k\right). \end{aligned}$$

Considere-se $a > 0$. Substituindo na igualdade anterior $u = \sqrt[p]{u_n}$ e $v = \sqrt[p]{a}$, obtem-se

$$(\sqrt[p]{u_n})^p - \left(\sqrt[p]{a}\right)^p = \left(\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}\right)\left[(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \cdots + (\sqrt[p]{u_n})\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-2} + \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}\right]$$

e

$$\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a} = \frac{u_n - a}{\left(\sqrt[p]{u_n}\right)^{p-1} + \cdots + \left(\sqrt[p]{u_n}\right)(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}}.$$

Assim

$$\left|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}\right| = \frac{|u_n - a|}{\left|\left(\sqrt[p]{u_n}\right)^{p-1} + \cdots + (\sqrt[p]{a})^{p-1}\right|} \leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}},$$

pois as parcelas do denominador da fracção do 2^o membro são todas positivas e então

$$(\sqrt[p]{u_n})^{p-1} + \cdots + \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1} \geq \left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}.$$

Como $u_n \to a$, tem-se

$$\forall \delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \Longrightarrow |u_n - a| < \delta\left(\sqrt[p]{a}\right)^{p-1}$$

e obtem-se

$$\left|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}\right| \leq \frac{|u_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} < \frac{\delta\,(\sqrt[p]{a})^{p-1}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} = \delta.$$

Se $a = 0$ então $\lim u_n = 0$ e neste caso considera-se, na definição de limite $|u_n| < \delta^p$ e $u_n < \delta^p$, pois $u_n \geq 0$.

Então obtem-se

$$\left|\sqrt[p]{u_n} - \sqrt[p]{a}\right| = |\sqrt[p]{u_n}| = \sqrt[p]{u_n} \leq \sqrt[p]{\delta^p} = \delta.$$

■

Teorema 5.7.2 *Se u_n é uma sucessão convergente então*

$$\lim |u_n| = |\lim u_n|.$$

Dem. Seja $u_n \to a$, isto é,

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}:\ n > p \Longrightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Como $||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \delta$ o que é equivalente a $|u_n| \to |a|$, isto é, $\lim |u_n| = |\lim u_n|$. ■

O próximo teorema é útil para o cálculo de limites de sucessões cujos termos gerais incluam somatórios ou fracções com razões trigonométricas, entre outras situações.

Exercício 5.7.3 *Calcule, caso existam:*

a) $\lim \frac{3n^2+1-2n}{1-n^3}$

b) $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

c) $\lim \left(3 + 2n^2 + 5n^4\right)$

5.8 Sucessão exponencial

O comportamento, a existência e a natureza do limite da sucessão exponencial a^n $(a \in \mathbb{R})$ depende do valor da base.

Casos possíveis:

- Se $a = 0$ ou $a = 1$ a sucessão é constante. Logo é convergente para 0 ou para1, respectivamente.
- Se $a > 1$ a sucessão é monótona crescente.
  Escrevendo $a = 1 + h$, $h > 0$, resulta pela Prop. **??** que
  $$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
  Como a sucessão $1 + nh \to +\infty$, então, pelo Teorema **??**, $a^n \to +\infty$.
- Se $0 < a < 1$ a sucessão é monótona decrescente e $a^n \to 0$. (Provar)
- Se $-1 < a < 0$ a sucessão não é monótona e $a^n \to 0$. (Provar)
- Se $a \leq -1$ a sucessão toma alternadamente termos positivos e negativos pelo que não é monótona e a^n não tem limite

Exercício 5.8.1 *Calcular:*

$$a) \ \lim \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^{n+1}}; \qquad b) \lim \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 5^{n+1}}.$$

5.9 Sucessão do tipo potência-exponencial

O limite da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tem um papel importante na Análise Matemática.

Exemplo 5.9.1 *A sucessão*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é monótona crescente, limitada e convergente.

Convencionou-se que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2,71828....$$

Capítulo 6

Séries de Números Reais

No Capítulo anterior a adição ficou perfeitamente definida para um número finito de parcelas.

Pretende-se generalizar o conceito de adição por forma a dar significado à adição de infinitas parcelas e de modo a conservar tanto quanto possível as principais propriedadesda adição.

Seria lógico esperar que a soma de infinitas parcelas positivas não desse um número finito. Mas tal facto contradiz alguns fenómenos observáveis no quotidiano. Exemplo:

Paradoxo de Zenão: Um corredor desloca-se do ponto A para a meta B a uma velocidade constante.

Seja A_1 o ponto médio de $[AB]$, A_2 o ponto médio de $[A_1 B]$, e assim sucesivamente, designado por A_{n+1} o ponto médio de $[A_n B]$.

Se o tempo gasto para percorrer $\overline{AA_1}$ for designado por t, será $\frac{t}{2}$ o tempo gasto de A_1 a A_2, $\frac{t}{2^2}$ de A_2 a A_3, ...

O tempo total T, necessário para completar a corrida será a "soma"de uma infinidade de tempos parciais todos positivos:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + ... + \frac{t}{2^n} + ...$$

Se pela "lógica"o tempo total fosse infinito o corredor nunca chegaria à meta. Tal estava em contradição com o "observável"e com a "dedução"de otempo total T ser o dobro do que o corredor gastava na primeira metade.

Só passado cerca de 2000 anos este facto foi explicado com recurso à teoria das séries.

6.1 Definição e generalidades

Seja a_n uma sucessão de números reais.

A esta sucessão pode associar-se uma outra sucessão

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

a que chamamos sucessão das somas parciais de a_n.

Definição 6.1.1 *(i) Chama-se série ao par ordenado (a_n, S_n) e representa-se por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Aos números $a_1, a_2, ..., a_n, ...$chamam-se termos da série e à expressão a_n o termo geral da série.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se convergente se existir em $\mathbb{R}$ (for finito) $\lim S_n = S$ e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S.$$

Ao número real S chama-se soma da série.

(iii) Se não existir em $\mathbb{R}$ $\lim S_n$, série diz-se divergente

Observação 6.1.2 *Por vezes é conveniente utilizar séries do tipo*

$$\sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ com } p \in \mathbb{Z},$$

mantendo-se o mesmo tipo de definição.

Exercício 6.1.3 *Estude a natureza das séries:*

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} n \quad ; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad ; \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t}{2^n}, \quad com\ t \in \mathbb{R}^+.$$

O estudo das séries é composto por duas vertentes:

a) determinar a natureza da série (convergente ou divergente);

b) no caso de convergência, calcular a soma da série.

Esta última questão apresenta bastantes dificuldades, podendo mesmo ser impossível o cálculo exacto da soma das séries (recorrendo à aproximação numérica).

Vejam-se dois exemplos de séries para as quais se torna possível calcular o valor da sua soma, caso sejam convergentes.

6.2 Série geométrica

Definição 6.2.1 *Chama-se série geométrica à série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *em que* a_n *é uma progressão geométrica.*

Como é conhecido a sucessão das somas parciais correspondente é

$$S_n = a_0 \frac{1-r^n}{1-r}, \text{ com } r \neq 1.$$

Como

$$\lim S_n = \frac{a_0}{1-r} \lim (1-r^n) = \frac{a_0}{1-r}, \text{ se } |r| < 1,$$

tem-se que:

Proposição 6.2.2 *A série geométrica converge se e só se* $|r| < 1$. *Neste caso*

$$S = \frac{a_0}{1-r}.$$

6.3 Série de Mengoli

Definição 6.3.1 *Um série é de Mengoli (também designada por decomponível ou telescópica) se o termo geral* a_n *for decomponível numa diferença do tipo*

$$a_n = u_n - u_{n+k}.$$

Veja-se a natureza destas séries:

1. Caso de $k = 1 : a_n = u_n - u_{n+1}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = u_1 - u_2 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = u_1 - u_3 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = u_1 - u_4 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Assim

$$\lim S_n = \lim (u_1 - u_{n+1}) = u_1 - \lim u_n.$$

Proposição 6.3.2 *A série de Mengoli é convergente se e só se* u_n *é convergente. Em caso afirmativo*

$$S = u_1 - \lim u_n.$$

2. Caso de $k = 2 : a_n = u_n - u_{n+2}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 = u_1 - u_3 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = u_1 - u_3 + u_2 - u_4 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = u_1 + u_2 - u_4 - u_5 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim S_n = \lim (u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}) = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

Proposição 6.3.3 *A série de Mengoli é convergente se e só se u_n é convergente. Em caso afirmativo*

$$S = u_1 + u_2 - 2 \lim u_n.$$

3. Caso geral: $a_n = u_n - u_{n+k}$

Proposição 6.3.4 *A série de Mengoli é convergente se e só se u_n é convergente. Neste caso*

$$S = u_1 + ... + u_k - k \lim u_n.$$

Exercício 6.3.5 *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 5n + 4}$$

e calcule a sua soma, se possível.

Observação 6.3.6 *Saliente-se que:*

1. A natureza de uma série não se altera se lhe suprimirmos um número finito de termos.

2. A natureza da série não depende do valor dos seus n primeiros termos.

Corolário 6.3.7 *(Condição necessária de convergência) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.*

Dem. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente com $\lim S_n = l$.

A sucessão das somas parciais é dada por $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ e $S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$, para $n > 1$.

Então $S_n - S_{n-1} = a_n$ e como $\lim S_n = \lim S_{n-1}$ obtem-se

$$0 = \lim (S_n - S_{n-1}) = \lim a_n.$$

■

Observação 6.3.8 *A condição* $\lim a_n = 0$ *é necessária mas não é suficiente.*
Um exemplo clássico para este facto é a <u>*série harmónica*</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Apesar de $\frac{1}{n} \to 0$ *a série harmónica é divergente, pois a sucessão das somas parciais* $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ *não é uma sucessão de Cauchy (logo não é uma sucessão convergente) uma vez que*

$$\begin{aligned}
|S_{2n} - S_n| &= \left| \left(1 + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + ... + \frac{1}{n}\right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \\
&> \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Exercício 6.3.9 *Prove que a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é divergente.

6.4 Propriedades algébricas das séries

Alguns resultados que permitem avaliar a natureza das séries resultam das suas operações algébricas.

Proposição 6.4.1 *(i) Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries convergentes de somas* A *e* B*, respectivamente. Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *é convergente e a soma é* $A + B$.
(ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente de soma* A*, para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$ *é convergente para* λA.

Dem. (i) Represente-se por S'_n e S''_n as sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = S'_n + S''_n \to A + B. \end{aligned}$$

Pelo que S_n é convergente para $A+B$ e, portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e tem por soma $A + B$.

(ii) Seja S^*_n a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ e S_n a de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Então

$$S^*_n = \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda (a_1 + \cdots + a_n) = \lambda S_n \to \lambda A.$$

∎

Observação 6.4.2 *Caso ambas as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *sejam divergentes, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *pode ser convergente ou divergente.*
Exemplos:

1. *As séries* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ *são ambas divergentes e contudo* $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n+(-1)^{n+1}\right]\equiv 0$ *é convergente.*

2. *As séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$ *são ambas divergentes e* $\sum_{n=1}^{+\infty}[n+2n]=\sum_{n=1}^{+\infty}3n$ *é divergente.*

Observação 6.4.3 *Poder-se-ia esperar que sendo* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *convergentes, a série "produto"*$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\times b_n)$ *também fosse convergente. Contudo tal não se verifica.*

Os próximos resultados darão alguma informação sobre os casos em que é possível *a priori* estabelecer a natureza da série "produto".

6.5 Séries de termos não negativos

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se de termos não negativos se $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tendo-se apenas $a_n \geq 0$, para $n \geq p$, esta série é da mesma natureza que uma série de termos não negativos, pois a natureza da série não depende pos primeiros p termos.

Neste tipo de séries o estuda da convergência ou divergência torna-se mais simples, uma vez que permite estabelecer vários critérios de convergência.

Proposição 6.5.1 *Uma série de termos positivos* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é majorada.*

Dem. Observe-se que sendo $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então a sucessão das somas parciais $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ é crescente.

Portanto S_n será convergente se e só se for majorada. ■

Teorema 6.5.2 *(Critério de comparação) Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *séries de termos não negativos e tais que* $a_n \leq b_n$ *para* $n \geq p$. *Então:*

a) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente.*

Dem. Podemos supor $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que não há perda de generalidade (pois a natureza da série não depende dos primeiros p termos).

Considere-se

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \quad \text{e} \quad B_n = b_1 + \cdots + b_n$$

as respectivas sucessões das somas parciais. Então $A_n \leq B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pela Proposição 6.5.1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ é convergente} \Leftrightarrow B_n \text{ é majorada} \Leftrightarrow B_n \leq B \ \left(B \in \mathbb{R}^+\right).$$

Assim, como $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $A_n \leq B_n \leq B$ e A_n é majorada$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente então $A_n \to +\infty \Longleftrightarrow A_n \geq A$ $(\forall A \in \mathbb{R})$.

Então $A \leq A_n \leq B_n$ e $B_n \to +\infty$ porque $B_n \geq A$ $(\forall A \in \mathbb{R})$,.pelo que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente. ■

Exemplo 6.5.3 *1. (Séries de Dirichlet) Se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \leq 1$ *então a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textit{é divergente.}$$

Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente, pelo critério de comparação (b),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é divergente para* $\alpha \leq 1$.

2. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, porque* $n^2 \geq n^2 - 1$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$ $(n > 1)$.
Como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ *é uma série de Mengoli convergente, então pelo critério de comparação (a),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

3. Para $\alpha \geq 2$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente, pois* $n^\alpha \geq n^2$,. $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$.
Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, então pelo critério de comparação (a),* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente para* $\alpha \geq 2$.

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$.

Aqui não é possível aplicar o critério de comparação pois os termos da série não são não negativos,.

É necessário o conceito de convergência absoluta.

Definição 6.5.4 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diz-se* <u>*absolutamente convergente*</u> *se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ é convergente.}$$

A relação entre estes dois tipo de convergência pode ser expressa no seguinte resultado:

Teorema 6.5.5 *Toda a série absolutamente convergente é convergente.*

Dem. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente, isto é, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente.

Além disso $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, porque $|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$ e passando ao limite em ambos os membros da desigualdade.

Como $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|a_n|$ é convergente, pela Proposição 6.4.1,.então pelo Teorema 6.5.2, a), a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ é convergente.

Assim $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente. ■

Observação 6.5.6 *Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pode ser convergente sem contudo ser absolutamente convergente. Nestes casos a série diz-se simplesmente convergente.*

Exemplo 6.5.7 *Na série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ tem-se que*

$$\left|\frac{sen\ n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente (razão $\frac{1}{2}$) , então pelo critério de comparação (a) a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{sen\ n}{2^n}\right|$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ é absolutamente convergente. Finalmente pelo Teorema 6.5.5, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen\ n}{2^n}$ é convergente.

Os dois resultados seguintes referem-se à natureza de séries cujo termo geral é o produto de duas sucessões:

Teorema 6.5.8 *(Teorema de Dirichlet) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série (não necessariamente convergente) com a sucessão das somas parciais limitada e b_n é uma sucessão decrescente que tende para zero então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \times b_n) \text{ é convergente.}$$

6.6 Séries alternadas

Se os termos da série não têm sinal fixo, isto é, vão alternando o sinal, a série será do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, b_n, \quad (b_n \geq 0)\,,$$

a série diz-se alternada.

O estudo da natureza deste tipo de séries faz-se com recurso à convergência absoluta ou se se pretender apenas a convergência simples ao critério de Leibniz:

Teorema 6.6.1 *(Critério de Leibniz) Se $b_n \geq 0$ é uma sucessão decrescente com limite zero então*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, b_n \;\text{ é convergente.}$$

Dem. A a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ é limitada (embora não convergente). Como b_n é uma sucessão decrescente com $\lim b_n = 0$, então fazendo no Teorema 6.5.8 $a_n = (-1)^n$ obtem-se o resultado pretendido. ■

Observação 6.6.2 *A condição de b_n ser decrescente para zero não pode ser retirada.*
Sem a monotonia de b_n a série pode divergir.

Exercício 6.6.3 *Prove que a sucessão $b_n = \frac{1}{n}\left[2 + (-1)^n\right]$ tende para 0 mas não é monótona e a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{1}{n}\left[2 + (-1)^n\right]$$

é divergente.

Resolução: Suponha-se, com vista um absurdo, que a a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{1}{n}\left[2 + (-1)^n\right]$ é convergente.

Então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} \right]$$

seria convergente pela Proposição 6.4.1. Ora isto é absurdo porque a série harmónica é divergente.

Exercício 6.6.4 *Estude a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Resolução: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ não é absolutamente convergente pois

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} {}^{n}\frac{1}{n}$$

Pelo Critério de Leibniz a série é convergente.

Logo a série é simplesmente convergente.

Observação 6.6.5 *Este exercício prova que a recíproca do Teorema 6.5.5 não é verdadeira, isto é, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes.*

6.7 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Além dos critérios já apresentados, indicam-se de seguida uma colecção de critérios para séries de termos não negativos.

Teorema 6.7.1 *(Corolário do critério de comparação) Se* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = l, \quad (0 < l < +\infty)$$

então as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são da mesma natureza.*

Dem. Aplicando a definição de limite à sucessão $\frac{a_n}{b_n}$, obtem-se

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\colon\ n > p \Longrightarrow l - \delta < \frac{a_n}{b_n} < l + \delta.$$

Fixando δ tal que $0 < \delta < l$ tem-se, para $n > p$,

$$b_n\left(l - \delta\right) < a_n < b_n\left(l + \delta\right).$$

Pelo Teorema 6.5.2, se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, e se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente. ■

Exemplo 6.7.2 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

é divergente porque

$$\lim \frac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente.*

Observação 6.7.3 *A aplicação do teorema anterior exige que a natureza de uma das séries seja previamente conhecida. Para tal é útil o resultado seguinte:*

Corolário 6.7.4 *A série de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *é convergente se e só se* $\alpha > 1$ *(*$\alpha \in \mathbb{R}$*).*

Dem. Para $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ não é um infinitésimo, logo pelo Corolário 6.3.7, a série é divergente.

Para $\alpha > 0$ a sucessão $\frac{1}{n^\alpha}$ está nas condições do teorema anterior. Assim para $b_n = 2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{(1-\alpha)n}$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-\alpha)n}$ é uma série geométrica de razão $2^{1-\alpha}$, que converge se, e só se, $1 - \alpha < 0$, isto é, $\alpha > 1$. ■

Em situações em que o limite apresente algumas dificuldades ou não exista, pode optar-se pela comparação das razões entre dois termos consecutivos.

Teorema 6.7.5 *(Critério da comparação das razões) Sejam* a_n, $b_n > 0$ *e, a partir de uma certa ordem* p,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Então:

a) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é divergente.*

Dem. A desigualdade da hipótese é equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

o que prova que a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é decrescente, a partir de uma certa ordem p, pelo que é majorada por $\frac{a_p}{b_p}$, para $n \geq p$. Ou seja, $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_p}{b_p}$ e $a_n \leq b_n \frac{a_p}{b_p}$, para $n \geq p$.

Aplicando o Teorema 6.5.2 obtem-se a conclusão pretendida. ■

Exercício 6.7.6 *Estudar a natureza das séries*

a). $\frac{1}{2} + \frac{1\times 3}{2\times 4} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6} + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times \cdots \times (2n-1)}{2\times 4\times \cdots \times (2n)}$

b). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$.

Teorema 6.7.7 *(Critério da razão) Seja* $a_n > 0$.

a) *Se existe um número* r *tal que* $0 < r < 1$ *e* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, *a partir de uma certa ordem, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se a partir de uma certa ordem,* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Dem. a) Aplicando a alínea a) do teorema anterior às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, em que a segunda é convergente porque é uma série geométrica com $|r| < 1$, pois

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} = r.$$

b) Aplicando a alínea b) do Teorema 6.7.5 às séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$, sendo esta divergente. Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Teorema 6.7.8 *(Critério de D'Alembert) Se* $a_n > 0$ *e* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *finito ou* $+\infty$, *então*

a) *Se* $l < 1$, *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $l > 1$ *então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Dem. a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l < 1$, escolha-se δ suficientemente pequeno de modo que $l + \delta < 1$. Aplicando o Teorema 6.7.7 com $r = l + \delta < 1$ conclui-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l > 1$, escolha-se $\delta > 0$ de modo que $l - \delta > 1$. Assim $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \delta > 1$ e pelo Teorema 6.7.7 a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Observação 6.7.9 *Se $l = 1$ este critério não é conclusivo, contudo se*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+$$

decorre do teorema anterior que a série é divergente.

Exercício 6.7.10 *(i) Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente.*
(ii). Discuta a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n n!}{n^n}$$

em função do parâmetro λ.

Teorema 6.7.11 *(Critério da raiz) Seja $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Então*

a) *Se $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, com $r < 1$, a partir de uma certa ordem, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.*

b) *Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, para uma infinidade de valores de n,. então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.*

Dem. a) Como $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ então $a_n \leq r^n$, para $n \geq p$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente,.porque $r < 1$, então, pelo Teorema 6.5.2, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para uma infinidade de valores de n então $\lim a_n \neq 0$. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. ■

Teorema 6.7.12 *(Critério da raiz de Cauchy) Seja $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que* $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$, *finito ou $+\infty$. Então*

a) *Se* $l < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

b) *Se* $l > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Observação 6.7.13 *Se* $l = 1$ *este critério não é conclusivo.*

Dem. a) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} < l + \delta, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l < 1$, escolhe-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $l + \delta < 1$ e em seguida escolhe-se tal que $r = l + \delta < 1$.

Assim $\sqrt[n]{a_n} < r$ e, pelo Teorema 6.7.11, a série é convergente.

b) Pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : l - \delta < \sqrt[n]{a_n}, \text{ para } n \geq p.$$

Como $l > 1$, escolhe-se $\delta > 0$ tal que $l - \delta > 1$ e, assim $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Pelo Teorema 6.7.11, a série é divergente.

Se $l = +\infty$, pela definição de limite,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} > l.$$

Em particular para $\delta = 1$, $\sqrt[n]{a_n} > 1$. ■

Exemplo 6.7.14 *(i) A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}}$ *é convergente porque, pelo critério da raiz de Cauchy*

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

(ii). Para a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}$$

não é possível calcular

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{[3 + (-1)^n]^{2n}}} = \lim \frac{1}{[3 + (-1)^n]^2}$$

porque o limite não existe. Contudo decompondo a série e pode calcular-se os dois sub-limites:

$$\begin{array}{ll} n \text{ par}, & \lim \frac{1}{[3+(-1)^n]^2} = \frac{1}{16}, \\ n \text{ ímpar}, & \lim \frac{1}{[3+(-1)^n]^2} = \frac{1}{4}. \end{array}$$

Como ambos são menores que 1, então a série convergente.

6.8 Séries de funções

O conceito de soma infinita de números reais, que se estudou no caítulo das séries numéricas, pode agora ser generalizado à soma infinita de funções. Este aspecto coloca novos desafios, por exemplo permite que a "mesma série função"possa ser simultaneamente convergente ou divergente, dependendo da concretização da variável.

Comecemos por definir o que se considera por série de funções:

Definição 6.8.1 *Chama-se série de funções a uma expresão do tipo*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

isto é, $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$, *em que* $f_1, f_2, ..., f_n, ...$*funções definidas num certo domínio* $D \subset \mathbb{R}$.

A série é convergente num ponto $x_0 \in D$ se for convergente a série numérica

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + ... + f_n(x_0) + ...$$

Neste caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x),$$

designando-se $f(x)$ por função soma.

O domínio da função soma é o conjunto onde a série converge.

Definição 6.8.2 *O conjunto de valores de* x *para os quais a série de funções é convergente chama-se intervalo de convergência.*

Exercício 6.8.3 *Estudar a convergência das séries:*

Exemplo 6.8.4

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$

6.9 Séries de potências

Um caso particular de séries de funções são as séries de potências de x,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Para determinar os pontos onde esta série é convergente pode começar-se por determinar o raio r de convergência (absoluta)

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

e depois determinar o intervalo de convergência, isto é o conjunto $x \in]-r, r[$.

Em alternativa, pode aplicar-se directamente o critério de D' Alembert

$$\lim \frac{|a_{n+1}| \ \ |x^{n+1}|}{|a_n| \ \ |x^n|} = \ |x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

por este processo a série é convergente para os vlores que verifiquem a inequação

$$|x| \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Nos pontos $x = -r$ ou $x = r$, substitui-se x por r e estuda-se a série directamente utilizando os critérios das séries numéricas.

No intervalo de convergência uma série de potências de x define uma função contínua.

Exercício 6.9.1 *Estudar quanto à convergência a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Séries de potências de $(x-a)$ são séries do tipo

$$a_0 + a_1\,(x-a) + a_2\,(x-a)^2 + \cdots + a_n\,(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-a)^n\,.$$

Sendo r o raio de convergência da série, nestes casos o intervalo de convergência será $]a-r, a+r[$.

6.10 Série de Taylor para funções reais de variável real

Definição 6.10.1 *Se a função real de variável real f for indefinidamente diferenciável no ponto a obtem-se a fórmula*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)\,(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

que se designa por série de Taylor.

Se a série de Taylor representar $f(x)$ numa vizinhança de a diz-se que $f(x)$ é analítica em a.

No caso de $a=0$, a série de Taylor designa-se por série de Mac-Laurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Exercício 6.10.2 *Determine a série de Mac-Laurin das funções:*

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = sen\ x$

Exercício 6.10.3 *Desenvolva em série de potências de x a função*

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)\,(1+2x)}.$$

Capítulo 7

Equações Diferenciais Ordinárias

7.1 Definições e generalidades

Uma **equação diferencial ordinária** (EDO) é uma igualdade que contem: uma variável independente (real), $x \in \mathbb{R}$, uma variável (real) dependente, y, e algumas das suas derivadas, $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Exemplos:

$$xy' + 3y = 6x^3 \tag{7.1.1}$$

$$\left(y'\right)^2 - 4y = 0 \tag{7.1.2}$$

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \tag{7.1.3}$$

$$2x^2y'' - \left(y'\right)^2 = 0. \tag{7.1.4}$$

Designa-se por **ordem da EDO** a maior ordem da derivada (com coeficiente não identicamente nulo). Assim as equações (7.1.1) e (7.1.2) são de 1^a ordem, enquanto (7.1.3) e (7.1.4) são de 2^a ordem.

Se a igualdade tiver mais de uma variável independente, então será designada por **equação diferencial parcial.** Exemplo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Neste curso estudam-se apenas as equações diferenciais ordinárias, pelo que se passarão a designar apenas por equações diferenciais.

De uma forma geral uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita na forma

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{7.1.5}$$

sendo F uma função conhecida.

Uma relação funcional entre as variáveis dependente y e independente x, num certo intervao I, que verifique a equação diferencial, chama-se **solução** da equação diferencial.

A solução pode estar definida num intervalo limitado, do tipo $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, ou ilimitado, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, b[$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Por exemplo, $y(x) = 7e^x + x^2 + 2x + 2$ é solução da equação diferencial

$$y' - y = -x^2$$

para $I = \mathbb{R}$. De modo análogo $y(x) = x \tan(x + 3)$ é solução da equação diferencial

$$xy' - y^2 - y = x^2$$

para $I = \left]-\frac{\pi}{2} - 3, \frac{\pi}{2} - 3\right[$.

A **solução geral** de uma equação diferencial de ordem n depende de n constantes arbitrárias. Ou seja, a solução y depende de x e das constantes reais $c_1, c_2, ..., c_n$.

Por exemplo, as funções

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^3 + \frac{c}{x^3}, && (7.1.6)\\ y_2(x) &= x^2 + cx + \frac{c^2}{4}, \\ y_3(x) &= c_1x + c_2x^3, \\ y_4(x) &= \frac{2x}{c_1} - \frac{2}{c_1^2}\log(1 + c_1x) && (7.1.7) \end{aligned}$$

são soluções gerais das equações (7.1.1),(7.1.2), (7.1.3) e (7.1.4), respectivamente.

Obviamente $y_1(x)$ está definida em qualquer intervalo que não contenha o valor 0, $y_2(x)$ e $y_3(x)$ estão definidas em $\mathbb{R}$, e $y_4(x)$ coloca restrições quer à constante c_1 quer à variável x, nomeadamente $c_1 \neq 0$ e $1 + c_1x > 0$.

A função $y_1^*(x) = x^3$ é uma **solução particular** da equação (7.1.1) que se obtem considerando, em (7.1.6), $c = 0$.

Note-se que $y_4^*(x) = x^2$ é uma solução de (7.1.4) mas, contudo, não está incluida em (7.1.7). Esta solução "extra", que não pode ser obtida a partir de (7.1.7) atribuindo valores à constante, chama-se **solução singular** de (7.1.4).

Ao designar uma função por solução geral, o termo "geral"não deve ser considerado no sentido de "completa". À totalidade das soluções de uma equação diferencial chama-se **solução completa**.

Considere-se uma equação diferencial de 1^a ordem na forma $F(x, y, y') = 0$. A função $y = \phi(x)$ diz-se uma **solução explícita** se $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ no intervalo I.

A relação $\psi(x, y) = 0$ diz-se uma **solução implícita** de $F(x, y, y') = 0$, desde que represente uma ou mais funções $y = \phi(x)$ que verifiquem $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$.

Em geral é difícil, e por vezes mesmo impossível, determinar explicitamente y na relação $\psi(x, y) = 0$. Contudo poder-se-á testar a solução obtendo y' pela derivada duma função implícita: $y' = -\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$ e verificar se $F(x, y, -\frac{\psi'_x}{\psi'_y}) \equiv 0$.

Sem perda de generalidade, considerar-se-á sempre a equação (7.1.5) escrita na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{7.1.8}$$

onde f é uma função conhecida. Desta forma evita-se que (7.1.5) represente mais que uma equação. Por exemplo $(y')^2 = 4y$ representa duas equações diferenciais $y' = \pm 2\sqrt{y}$.

As equações diferenciais são classificadas em dois grupos: **lineares** e **não lineares**. Uma equação diferencial é **linear** se é linear em y e em todas as suas derivadas. Assim uma equação diferencial linear de ordem n tem a forma

$$P_n[y] := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

As equações (7.1.1) e (7.1.3) são exemplos de equações diferenciais lineares enquanto (7.1.2) e (7.1.4) são equações não lineares.

Se $P_n[y](x) \equiv 0$ a equação diferencial diz-se **homogénea**, caso contrário dir-se-á **não homogénea**.

No campo das aplicações é vulgar pretender-se soluções de (7.1.8) que verifiquem determinadas restrições, chamadas **condições iniciais** ou **condições de fronteira**. Por exemplo, por condições iniciais para a equação (7.1.8) entende-se n condições do tipo

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{7.1.9}$$

em que $y_0, ..., y_{n-1}$ e x_0 são constantes dadas. Um problema que englobe a equação diferencial (7.1.8) e as condições (7.1.9) chama-se **problema de valor inicial**. É vulgar procurar soluções do problema (7.1.8), (7.1.9) num intervalo I que contenha x_0.

Repare-se que a equação diferencial $xy' - 3y + 3 = 0$:

- não tem nenhuma solução que satisfaça $y(0) = 0$;
- tem uma única solução, $y(x) \equiv 1$, que verifica $y(1) = 1$;
- tem infinitas soluções $y(x) = cx^3 + 1$, $c \in \mathbb{R}$, que satisfazem $y(0) = 1$.

Esta variedade de situações coloca uma questão essencial: a existência de solução. Infelizmente a classe das equações diferenciais solúveis é muito restrita. Assim um dos principais objectivos da teoria das Equações Diferenciais Ordinárias é encontrar condições suficientes para garantir a existência de, pelo menos, uma solução para uma certa equação ou problema de valor inicial.

Constituem também áreas de interesse nesta Teoria:

- calcular o número de soluções (sem as determinar);
- demonstrar algumas propriedades das soluções (caso existam);
- construir processos de aproximar soluções.

Como base de trabalho considere-se o problema de valor inicial composto pela equação diferencial de 1^a ordem

$$y' = f(x, y) \tag{7.1.10}$$

e pela condição

$$y(x_0) = y_0.$$

7.2 Equações exactas e factores integrantes

Considerando, em (7.1.10), o caso particular $f(x, y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ obtem-se a equação

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{7.2.1}$$

onde M e N são funções contínuas, $N \neq 0$, com as derivadas parciais M'_y e N'_x contínuas, no rectângulo

$$S = \left\{(x, y) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < b,\ a, b \in \mathbb{R}^+\right\}. \tag{7.2.2}$$

A equação (7.2.1) é **exacta** se existir uma função $F(x, y)$ tal que

$$F'_x(x, y) = M(x, y) \ \text{ e } \ F'_y(x, y) = N(x, y). \tag{7.2.3}$$

O tipo de designação advem do facto de $M+Ny' = F'_x + F'_y y$ ser exactamente a derivada de F em relação à variável independente x. Então

$$F(x,y) = c$$

é solução de (7.2.1), a qual poderá ser encontrada seguindo a metodologia da demonstração (construtiva) do seguinte teorema:

Teorema 7.2.1 *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ duas funções contínuas com as derivadas parciais $M'_y(x,y)$ e $N'_x(x,y)$ contínuas, no rectângulo S dado por (7.2.2). Então a equação diferencial (7.2.1) é exacta se, e só se,*

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y). \tag{7.2.4}$$

Dem. Se (7.2.1) é exacta então, por (7.2.3), $F''_{xy} = M'_y$ e $F''_{yx} = N'_x$. Pela continuidade de M'_y e N'_x tem-se $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Reciprocamente, suponha-se que M e N verificam (7.2.4) e construa-se, para provar que (7.2.1) é exacta, uma função F que satisfaça (7.2.3).

Integrando ambos os membros de $F'_x(x,y) = M(x,y)$ em ordem a x, obtem-se

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + g(y), \tag{7.2.5}$$

sendo $g(y)$ uma função arbitrária, só dependendo de y, que desempenha o papel da "constante de integração" e que pode ser obtida através da segunda relação $F'_y(x,y) = N(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + g'(y) = \int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds + g'(y) = N(x,y),$$

e

$$g'(y) = N(x,y) - \int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds. \tag{7.2.6}$$

Derivando em ordem a x tem-se

$$N'_x(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds = N'_x(x,y) - M'_y(x,y) = 0,$$

pelo que a expressão (7.2.6) depende apenas de y.

Portanto, a função g pode ser obtida a partir de (7.2.6) e, por consequência, uma função F, que verifique (7.2.3), obtida por (7.2.5). ∎

Observação 7.2.2 ***(i)*** *Integrando (7.2.6) entre y_0 e y, a função g é dada, explicitamente, por*

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + g(y_0).$$

Substituindo em (7.2.5), obtem-se a solução da equação diferencial (7.2.1):

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds = c. \tag{7.2.7}$$

(ii) *A escolha de x_0 e y_0 é arbitrária, sendo apenas necessário garantir que os integrais permaneçam próprios.*

Exemplo 7.2.3 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$2x \; seny + e^x \cos y + (x^2 \cos y - e^x seny)y' = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Quando a equação diferencial (7.2.1) não é exacta pode procurar-se uma função não nula $\mu(x,y)$, chamada **factor integrante**, para a qual a equação equivalente

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0 \tag{7.2.8}$$

já é exacta.

Como determinar um factor integrante?

Para que a equação (7.2.8) seja exacta ter-se-á

$$[\mu(x,y)M(x,y)]'_y = [\mu(x,y)N(x,y)]'_x \, ,$$

pelo que o factor integrante μ deverá verificar a equação

$$\mu'_y M + \mu M'_y = \mu'_x N + \mu N'_x. \tag{7.2.9}$$

Resolver esta equação com derivadas parciais não é tarefa fácil. Contudo como é apenas necessário uma solução particular de (7.2.9) pode considerar-se o factor integrante na forma

$$\mu(x,y) = A(x)B(y),$$

com $A(x)$ e $B(y)$ funções não nulas a determinar.

Substituindo em (7.2.9):

$$A(x)B'(y)M + A(x)B(y)M'_y = A'(x)B(y)N + A(x)B(y)N'_x$$

ou seja

$$\frac{A'(x)N}{A(x)} - \frac{B'(y)M}{B(y)} = M'_y - N'_x. \tag{7.2.10}$$

Definindo

$$g(x) := \frac{A'(x)}{A(x)}, \;\; h(y) := \frac{B'(y)}{B(y)}$$

e primitivando, tem-se que (7.2.10) é verificada desde que

$$A(x) = e^{\int g(x)dx} \;\text{ e }\; B(y) = e^{\int h(y)dy}.$$

Exemplo 7.2.4 *A equação diferencial*

$$y - y^2 + xy' = 0 \tag{7.2.11}$$

não é exacta. Procure-se um factor integrante do tipo $\mu(x,y) = x^m y^n$. Neste caso a equação (7.2.10) assume a forma

$$m - n(1-y) = -2y$$

pelo que $m = n = -2$. Assim, multiplicando (7.2.11) por $\mu(x,y) = x^{-2}y^{-2}$, obtem-se a equação exacta

$$x^{-2}(y^{-1} - 1) + x^{-1}y^{-2}y' = 0,$$

cuja solução, por (7.2.7) com $y_0 = 1$, é dada por

$$F(x,y) = \int_1^y x^{-1}t^{-2}dt = c$$

ou seja

$$y = \frac{1}{1-cx}.$$

Exemplo 7.2.5 *De um modo mais geral pode olhar-se para um factor integrante do tipo $\mu = \mu(v)$ com v uma função de x e y, conhecida. Neste caso, de (7.2.9), obtem-se*

$$\frac{1}{\mu}\mu'(v) = \frac{N'_x - M'_y}{v'_y M - v'_x N}. \tag{7.2.12}$$

Se o 2º membro de (7.2.12) depender apenas de v, por exemplo uma função $\phi(v)$, então o factor integrante é dado por

$$\mu(x,y) = e^{\int \phi(v)dv}.$$

Exercício 7.2.6 *Determine uma expressão para o factor integrante nos casos particulares em que $v = x$ e $v = y$.*

Curiosamente, a partir de dois factores integrantes de (7.2.1) é possível encontrar uma solução:

Lema 7.2.7 *Se a equação (7.2.1) for exacta e admitir o factor integrante $\mu(x, y)$ constante, distinto de $c \in \mathbb{R}$, então $\mu(x, y) = c$ é uma solução de (7.2.1).*

Dem. Por (7.2.9) e pela hipótese, $\mu'_y M = \mu'_x N$.

Multiplicando (7.2.1) por μ'_y obtem-se

$$\mu'_y M + \mu'_y N y' = N\left(\mu'_x + \mu'_y y'\right) = N\ \frac{d\mu}{dx} = 0,$$

pelo que $\mu(x, y) = c$ é solução de (7.2.1). ∎

7.3 Equações elementares de 1^a ordem

Existem equações diferenciais de 1^a ordem que se podem solucionar por técnicas elementares de primitivação precedidas, eventualmente, por uma mudança de variável

7.3.1 Equação de variáveis separáveis

Considerando em (7.2.1) o caso particular de $M(x, y) = X_1(x)Y_1(y)$ e $N(x, y) = X_2(x)Y_2(y)$ então tomará a forma

$$X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y)y' = 0. \tag{7.3.1}$$

Se $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$ para $(x, y) \in S$, dado por (7.2.2), então (7.3.1) pode ser escrita como uma equação exacta

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)} + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}y' = 0 \tag{7.3.2}$$

na qual as variáveis estão separadas. Assim a equação diferencial (7.3.2) diz-se de **variáveis separadas** e a sua solução, por (7.2.7), é dada por

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = c, \tag{7.3.3}$$

em que as constantes de primitivação estão contidas em c.

Esta relação contem todas as soluções de (7.3.1) em que $Y_1(y)X_2(x) \neq 0$. Ao dividir (7.3.1) por $Y_1(y)X_2(x)$ pode ter-se perdido algumas soluções, que devem ser anexadas a (7.3.3), bem como as que não estejam aqui incluidas para algum c, de modo a serem obtidas todas as soluções de (7.3.1).

Exemplo 7.3.1 *A equação (7.2.11) também pode ser escrita como*

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2 - y}y' = 0, \quad xy(y-1) \neq 0.$$

Por (7.3.3) tem-se as soluções

$$y = (1 - cx)^{-1}. \tag{7.3.4}$$

Outras possíveis soluções para os quais $x(y^2 - y) = 0$ são $x = 0, y = 0$ e $y = 1$.
Contudo $y = 1$ já está incluida em (7.3.4) (caso de $c = 0$) e $x = 0$ não é solução.
Assim todas as soluções de (7.2.11) são dadas por (7.3.4) e $y = 0$.

7.3.2 Equação homogénea

Uma função $f(x, y)$ definida num domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$, aberto e conexo, diz-se **homogénea** de grau k se, para todo o parâmetro real λ e $(x, y) \in D$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Considerando $\lambda = \frac{1}{x}$ a relação ficará

$$x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

o que permite concluir que uma função homogénea de grau 0 é uma função de uma única variável $u := \frac{y}{x}$.

Uma equação diferencial

$$y'(x) = f(x, y) \tag{7.3.5}$$

diz-se **homogénea** se f for uma função homogénea de grau 0.

Nestes casos, com a mudança de variável indicada, procuram-se soluções do tipo $y(x) = xu(x)$, sendo u uma função a determinar. Substituindo $y'(x) = u(x) + xu'(x)$ em (7.3.5) obtem-se, pelo facto de f ser homogénea de grau 0,

$$u + xu' = f(x, xu) = f(1, u) := \varphi(u)$$

o que conduz a uma equação de variáveis separadas do tipo

$$\frac{u'}{\varphi(u)-u}=\frac{1}{x}.$$

Exemplo 7.3.2 *Determinar a solução da equação homogénea*

$$y'(x)=\frac{2xy}{x^2-3y^2}.$$

7.3.3 Equação linear de 1^a ordem

O aspecto geral de uma equação diferencial linear de 1^a ordem será

$$p_0(x)y'+p_1(x)y=r(x).$$

Considere-se $p_0(x)$, $p_1(x)$ e $r(x)$ funções contínuas e $p_0(x)\neq 0$ num certo intervalo I. Neste caso a equação anterior pode escrever-se na forma

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{7.3.6}$$

com $p(x)=\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$ e $q(x)=\frac{r(x)}{p_0(x)}$ funções contínuas em I.

A equação homogénea correspondente

$$y'+p(x)y=0 \tag{7.3.7}$$

pode ser resolvida por uma separação de variáveis

$$\frac{1}{y}y'=-p(x)$$

e, com a correspondente primitivação,

$$y(x)=c\ e^{-\int p(x)dx}. \tag{7.3.8}$$

Ao dividir-se (7.3.7) por y, "perdeu-se" a solução $y\equiv 0$, que é designada por **solução trivial**, já que (7.3.7) admite sempre esta solução nula. Contudo, apesar disso, esta solução já está incluida em (7.3.8) (basta fazer $c=0$).

Para um problema de valor inicial formado por (7.3.7) e $y(x_0)=y_0$, com $x_0\in I$, então a solução será

$$y(x)=y_0\ e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

A resolução da equação completa (7.3.6) também pode ser reduzida a um caso de primitivação: multiplicando-a por $e^{\int p(x)dx}$ obtem-se

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx}\left[y' + p(x)y\right] &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\ \left(y\ e^{\int p(x)dx}\right)' &= e^{\int p(x)dx}q(x) \\ y\ e^{\int p(x)dx} &= c + \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx \end{aligned}$$

sendo a solução dada por

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx\right). \tag{7.3.9}$$

Observação 7.3.3 *Esta solução $y(x)$ é da forma $c\ u(x) + v(x)$, pelo que a solução geral da equação linear completa (7.3.6) se pode obter pela adição entre a solução (geral) da equação homogénea (7.3.7) e uma solução particular de (7.3.6).*

Caso se pretenda a solução do problema de valor inicial correspondente, tratar-se-ia apenas de encontrar o elemento da família de soluções (7.3.9) que passa pelo ponto (x_0, y_0), isto é,

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)ds}q(t)dt\right).$$

Note-se que se $p(x)$ e $q(x)$ forem funções constantes, por exemplo, $p(x) \equiv p$ e $q(x) \equiv q$, a solução ficará

$$y(x) = \left(y_0 - \frac{q}{p}\right)e^{p(x_0 - x)} + \frac{q}{p}.$$

Exemplo 7.3.4 *Determinar a solução do problema de valor inicial*

$$xy' - 4y + 2x^2 + 4 = 0, \quad x \neq 0, \quad y(1) = 1.$$

Se forem conhecidas duas soluções particulares de (7.3.6), $y_1(x)$ e $y_2(x)$, então

$$\begin{aligned} y_1'(x) - y_2'(x) &= -p(x)y_1(x) + q(x) + p(x)y_2(x) - q(x) \\ &= -p(x)\left[y_1(x) - y_2(x)\right]. \end{aligned}$$

Assim a função $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ é solução da equação homogénea associada e, pela Observação 7.3.3, as funções

$$y(x) = c\,(y_1(x) - y_2(x)) + y_1(x) \quad \text{e} \quad y(x) = c\,(y_1(x) - y_2(x)) + y_2(x)$$

são soluções gerais da equação completa (7.3.6).

Algumas equações diferenciais não lineares de 1^a ordem podem ser reduzidas a equações lineares recorrendo a mudanças de variável adequadas:

7.3.4 Equação de Bernoulli

Uma equação da forma

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)\ y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{7.3.10}$$

com $p_1(x)$, $p_0(x)$ e $r(x)$ funções contínuas, $p_1(x) \neq 0$, designa-se por **equação de Bernoulli**.

Exclui-se $n = 0$ e $n = 1$ porque nestes casos a equação seria linear.

A equação anterior é equivalente a

$$p_1(x)\ y^{-n}y' + p_0(x)y^{1-n} = r(x)$$

e, fazendo a substituição $v = y^{1-n}$, obtem-se a equação linear de 1^a ordem

$$\frac{1}{1-n}p_1(x)\ v' + p_0(x)v = r(x).$$

Exemplo 7.3.5 *Calcular a solução do problema de valor inicial*

$$y' + x^2y = e^{x^3}\frac{y^4}{3}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

As equações diferenciais lineares de 1^a ordem têm um leque muito variado de aplicações.

A variável independente x representa vulgarmente "tempo". O 2^o membro $q(x)$ pode ter um significado físico, como uma força. A solução $y(x)$ poderá significar um deslocamento ou uma outra quantidade física.

De uma forma geral, a equação (7.3.6) pode modelar uma relação de *input-output,* considerando $q(x)$ como as quantidades de **input** e $y(x)$ como a resposta de **output.**

7.4 Equações lineares de 2^a ordem

Para a equação homogénea linear de 2^a ordem com coeficientes variáveis

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{7.4.1}$$

com $p_2(x)\,(> 0)\,,\, p_1(x)$ e $p_0(x)$ funções contínuas num intervalo I, não existe nenhum método para a resolver, excepto em alguns casos particulares.

Os resultados que se seguem resultam da adaptação à 2^a ordem da teoria mais geral de sistemas de equações diferenciais lineares de 1^a ordem, a desenvolver mais tarde no próximo capítulo, mais concretamente nos Teoremas **??** a **??**.

Teorema 7.4.1 *Existem exactamente duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de (7.4.1) linearmente independentes num intervalo I. Isto é, não existe uma constante c tal que $y_1(x) = c\; y_2(x)$, para $x \in I$.*

Teorema 7.4.2 *Duas soluções de (7.4.1), $y_1(x)$ e $y_2(x)$, são linearmente independentes em I se o seu **Wronskiano** definido por*

$$W(x) = W(y_1, y_2)(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \tag{7.4.2}$$

for diferente de 0 para algum $x = x_0 \in I$.

Teorema 7.4.3 *O Wronskiano (7.4.2) verifica a igualdade de Abel*

$$W(x) = W(x_0)\; e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt}, \quad x_0 \in I.$$

Assim, se o Wronskiano se anula para algum $x_0 \in I$ então anula-se para todo o $x \in I$.

Teorema 7.4.4 *Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são duas soluções de (7.4.1) e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, então $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é também uma solução de (7.4.1).*
Além disso, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$, são linearmente independentes então qualquer solução $y(x)$ de (7.4.1) pode ser escrita na forma $y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$, com k_1 e k_2 constantes adequadas.

7.4.1 Solução particular da equação não homogénea

Para encontrar uma solução particular para a equação não homogénea

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \tag{7.4.3}$$

sendo $r(x)$ uma função contínua em I, utilizar-se-á o **método da variação dos parâmetros**:

Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções de (7.4.1) e as "constantes"c_1 e c_2 consideradas como funções da variável independente x.

Suponha-se que

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

é solução de (7.4.3). Para determinar as duas funções incógnitas $c_1(x)$ e $c_2(x)$ necessita-se de duas condições:

Como

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$$

a primeira condição a exigir será

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \tag{7.4.4}$$

Diferenciando

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$

tem-se

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2'.$$

Substituindo em (7.4.3), obtem-se

$$c_1(p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1) + c_2(p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2) + p_2(c_1'y_1' + c_2'y_2') = r(x)$$

e, como y_1 e y_2 são soluções de (7.4.1),

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{r(x)}{p_2(x)}. \tag{7.4.5}$$

Resolvendo o sistema (7.4.4)-(7.4.5), ter-se-á

$$c_1' = -\frac{\frac{y_2(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}, \quad c_2' = \frac{\frac{y_1(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Assim, uma solução particular de (7.4.3), $y_p(x)$, será

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \\ &= -y_1(x)\int \frac{\frac{y_2(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1,y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{\frac{y_1(x)\ r(x)}{p_2(x)}}{W(y_1,y_2)(x)}dx. \end{aligned}$$

A solução geral de (7.4.3) obtem-se adicionando a esta solução particular a solução geral da equação homogénea associada:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).$$

7.4.2 Equação homogénea com coeficientes constantes

Definida uma técnica para encontrar a solução particular, como obter a solução da equação homogénea associada? No caso de os coeficientes serem constantes, isto é, para

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{7.4.6}$$

será "razoável" esperar que, à semelhança do que sucedia nas equações de 1^o ordem, as soluções assumam a forma de exponenciais, já que as derivadas de e^{rx} conduzem sempre à mesma exponencial multiplicada por uma constante.

Se se experimentar $y = e^{rx}$ e procurar os valores de r adequados, obtem-se

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = \left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} = 0.$$

Então e^{rx} é solução de (7.4.6) se r for solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{7.4.7}$$

designada por **equação característica**.

Como é conhecido há três casos possíveis:

1. Se existirem **duas raízes reais distintas**, r_1 e r_2, então e^{r_1x} e e^{r_2x} são duas soluções de (7.4.6), e a solução geral será
$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

2. Se existir **uma raiz real dupla**, $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$, e^{rx} é uma solução. A segunda solução pode ser encontrada por (**??**):
$$y_2(x) = e^{rx}\int \frac{1}{(e^{rx})^2}\ e^{-\int \frac{b}{a}dx}dx = e^{rx}x,$$
sendo a solução geral dada por
$$y(x) = (c_1 + c_2x)\,e^{rx}.$$

3. Se existirem **duas raízes complexas conjugadas**, $r = \alpha \pm \beta i$, então as soluções serão da forma

$$e^{(\alpha\pm\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x \pm i\mathrm{sen}\beta x\right).$$

Como a parte real $(e^{\alpha x}\cos\beta x)$ e o coeficiente da parte imaginária $(e^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x)$ são ambas soluções de (7.4.6), a solução geral será

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\mathrm{sen}\beta x$$

Exemplo 7.4.5 *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' - 5y' + 6y = e^x.$$

Apesar de os casos anteriores serem obtidos para equações com coeficientes constantes, esta metodologia pode ser aplicada a outras situações:

Exercício 7.4.6 *Utilizando uma função do tipo $y(x) = x^m$ discuta, em função de m, as várias formas que a solução geral da equação de Cauchy-Euler*

$$x^2y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0, \tag{7.4.8}$$

pode assumir.

Resolução: Calculando as derivadas e substituindo, obtem-se

$$x^2 m\,(m-1)\,x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

e

$$m\,(m-1) + am + b = 0,$$

que é a equação característica de (7.4.8). Assim a natureza das raízes determina a solução:

· Raízes reais distintas $m_1 \neq m_2$: a solução será $y(x) = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$;

· Raíz real dupla $m = m_1 = m_2$: a solução será $y(x) = c_1x^m + c_2\ln x\; x^m$;

· Raízes complexas conjugadas $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$: a solução será

$$y(x) = c_1x^\alpha\cos\left(\beta\ln x\right) + c_2x^\alpha sen\left(\beta\ln x\right).$$

7.5 Exercícios

1. Resolva os problemas de valor inicial:

a) $3x^2y + 8xy^2 + \left(x^3 + 8x^2y + 12y^2\right)y' = 0,\ \ y(2) = 1$

b) $ye^{xy} + 4y^3 + \left(xe^{xy} + 12xy^2 - 2y\right)y' = 0,\ \ y(0) = 2.$

2. Determine o valor de k de modo a que as equações sejam diferenciais exactas e encontre a expressão geral das soluções:

a) $\left(kx^2 + 4y\right)y' = -x^3 - 3xy$

b) $\frac{kx+1}{y^3}y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

3. Determine a solução geral das equações diferenciais:

a) $y' - (\cot x)\, y = 2x \operatorname{sen} x$

b) $y' + y + x + x^2 + x^3 = 0$

c) $2(1 + y^3) + 3xy^2y' = 0$

d) $(1 - x^2)y' + y^2 - 1 = 0$

4. Numa situação "ideal" de divisão celular, o número de células no instante t, $N(t)$, cresce exponencialmente e pode ser traduzido pela relação

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\ N,$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ a razão de crescimento. Contudo, nos tumores sólidos, existe uma constante, α, de retardamento do crescimento, que está relacionada com a necrose das células centrais do tumor. Neste caso o número de células é modelado por

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\ e^{-\alpha t}\ N$$

a) Determine a expressão que permite calcular o número de células do tumor sólido em função do tempo.

b) Qual o número de células limite que o tumor poderá atingir?

c) Suponha que, quando foi detectado, o tumor possuía 10^4 células, crescia à razão de 20% por unidade de tempo, sendo a constante de retardamento de $0,02$.

Qual o número de células limite que o tumor irá atingir ?

5. **A**rnesto, o desgraçado, foi encontrado morto na sua casa às 23h.

Bicente, o detective, chegou ao local do crime às 23h 30m e registou a temperatura da vítima: $30°C$.

Chico, o esperto, observou que às 00h 30m a temperatura do corpo era de $25°C$ e que a temperatura da sala se mantinha constantemente igual a $20°C$.

Diga a que horas ocorreu o crime.

E não esqueça a lei do arrefecimento de Newton: *a velocidade de arrefecimento de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura em cada instante e a do meio ambiente.*

6. Encontre a solução completa das equações não homogéneas:

a) $y'' + 4y = sen(2x)$

b) $y'' + 4y' + 3y = e^{-3x}$

c) $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}$.

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1995

[2] Feliz Minhós, *Análise Matemática I*, 2012, 142 pags. http://hdl.handle.net/10174/7876

[3] James Stewart, *Cálculo, Vol. I e Vol. II*, Pioneira, Thompson Learning, 2001

[4] G. Strang, *Calculus*, MIT, Wellesley-Cambridge Press, 1993

[5] Earl W. Swokovski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 1 e Vol. 2, McGraw-Hill, 1983