O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões — ideias da teoria ilustradas com exemplos

Ana Paula Canavarro

Ponto prévio

Este artigo tem como propósito sintetizar ideias da investigação atual em educação matemática sobre a aprendizagem de conexões pelos alunos, procurando debruçar-se sobre as potencialidades das conexões relativamente à visão dos alunos sobre a Matemática e aos conhecimentos e processos matemáticos que podem desenvolver. Para tal, discuto o que se entende por conexões, considerando a sua diversidade e propósito, e apresento duas estratégias produtivas para a abordagem de conexões com os alunos — a exploração de representações múltiplas e a utilização da modelação matemática. Isto porque não basta convocar a unânime bondade das conexões, é preciso saber como as promover, na teoria e na prática. As ideias aqui abordadas são válidas para qualquer ciclo de escolaridade — ilustro-as sobretudo com exemplos dos primeiros ciclos de escolaridade pela atual oportunidade que me oferece o projeto MatDance em que estou envolvida com Mercedes Prieto, um projeto de desenvolvimento curricular e investigação que corporiza ele mesmo as conexões entre a Matemática e a Dança, concretizadas no 1.º ciclo de escolaridade. Esclareço ainda que para a elaboração deste artigo contribui um conjunto vasto de referências bibliográficas mas apenas refiro as mais incisivas e acessíveis para não sobrecarregar o texto. Recordo ainda que a Revista *Educação e Matemática* nº 110, de 2010, é uma revista temática dedicada às Conexões, que tem como editora convidada Susana Carreira, e constitui um excelente recurso para aprofundar este tema.

DUAS IDEIAS SOBRE AS CONEXÕES

O conceito de conexão, reportado com este vocábulo, projetou-se em 2000, quando o NCTM elegeu as conexões como um processo matemático essencial a desenvolver pelos alunos de qualquer idade, desde a educação infantil ao 12.º ano (NCTM, 2000). Até então, era mais vulgar ouvir-se referências às relações da Matemática com outras áreas, às suas aplicações ou até à modelação matemática. A adoção de um termo específico até então quase nada usado e a atribuição de um estatuto igual ao da resolução de problemas ou raciocínio matemático, evidenciaram a importância da abordagem das conexões na aula de matemática.

Mas a que se referem afinal as conexões? Destacam-se na literatura duas ideias transversais.

A primeira ideia tem a ver com a diversidade das conexões. Em geral, a literatura especifica conexões entre a Matemática e as outras disciplinas ou domínios do saber como a Física, a Medicina ou as Artes, entre a Matemática e a vida real, incluindo as práticas culturais diárias como tomar banho, fazer desporto ou ir ao supermercado, entre a Matemática e as profissões ou mundo do trabalho, como a engenharia, a pastelaria ou a produção de tapetes de Arraiolos. São também muito frequentes as referências às conexões dentro da própria Matemática, quer entre conteúdos de domínios distintos como, por exemplo, a Aritmética e a Geometria, quer entre conceitos e procedimentos, como por exemplo entre o conceito de área e o(s) procedimento(s) adotado(s) para determinar o seu valor. Referidas talvez com menos ênfase são as conexões relativas aos diferentes estádios de desenvolvimento das ideias e conceitos matemáticos, que deveriam ter as conceções e conhecimentos prévios que os alunos transportam consigo para a escola como ponto de partida para novas aquisições e ampliações de conhecimentos com vista à construção progressiva de um corpus mais formalizado e abstrato.

A segunda ideia tem a ver com o propósito das conexões. Muitas são as ideias que se encontram na literatura relativas a conexões e que têm a ver com ligar, relacionar, ancorar, articular, associar... mas o seu objetivo fundamental não se basta com proporcionar o conhecimento de relações mais ou menos engraçadas, mais ou menos insuspeitadas, entre diferentes domínios da Matemática ou para além dela. Por exemplo, pode ser interessante reparar que a soma de n números ímpares consecutivos é um número quadrado e a ilustração deste resultado com desenhos de quadrados progressivamente maiores é muito sugestiva, mas a mera observação não garante ir além da curiosidade. O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa — em vez de ser perspetivada, como recorrentemente acontece, como uma coleção de regras ad-hoc a aplicar em situações particulares pré-determinadas e sem outra utilidade para além da de passar nos testes.

A intencionalidade desta abordagem às conexões é bem patente nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, que defendem que os alunos devem ser capazes de reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas, de compreender como as ideias se inter-relacionam e se constroem umas com as outras de modo a produzir um todo coerente e, por último, de reconhecer e aplicar a Matemática em contextos exteriores à Matemática (NCTM, 2000).

Como tirar então partido das conexões para ampliar a compreensão da Matemática pelos alunos? Naturalmente, não basta enunciar a sua existência ou apresentar exemplos esporádicos. As conexões precisam de integrar a experiência matemática dos alunos, de forma intencional e continuada. A investigação tem vindo a mostrar que existem duas estratégias que apoiam de forma eficaz a abordagem das conexões: uma delas é a exploração de representações múltiplas e suas inter-relações, a outra é a da utilização da modelação matemática como uma tarefa estruturante do trabalho na aula. O que referir sobre cada uma delas?

A EXPLORAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS COMO ESTRATÉGIA PARA AS CONEXÕES

A representação — considerada também pelo NCTM (2000) como um processo matemático fundamental — constitui a possibilidade de comunicação acerca dos entes matemáticos, por natureza abstratos e, portanto, sem existência palpável no mundo dos objetos em que vivemos. Muitas vezes se esquece que, por exemplo, o quadrado não existe senão na nossa imaginação. O desenho que dele fazemos num papel, o quadrado que recortamos em cartolina, a descrição que dele fazemos, a designação [ABCD], todas são meras representações desse ente perfeito que idealizamos, representações apenas aproximadas mas que têm a vantagem de nos permitir lidar com o quadrado em diversas situações. E assim é para todos os conceitos matemáticos, a começar pelos próprios números.

O uso de representações múltiplas e a exploração das suas inter-relações, frequentemente referidas como conexões entre representações, oferece uma oportunidade ímpar para o estabelecimento de conexões, nomeadamente de conexões dentro da própria Matemática — mas não só. A investigação tem vindo a revelar que quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, conseguem aprofundar a sua compreensão sobre essas ideias (NCTM, 2014). Vários estudos mostram que a profundidade da compreensão está relacionada com a força das conexões entre as representações matemáticas que os alunos tiverem interiorizado. Cada representação funciona como uma lente e a sua conjugação proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito (Tripathi, 2008). Isto significa que não basta conhecer diferentes representações sobre uma mesma ideia. Para se ganhar compreensão, é necessário estabelecer pontes entre as diferentes representações disponíveis e interpretar umas à luz das outras.

O esquema de Lesh, Post e Behr (1987) (figura 1) reporta-se a cinco diferentes representações que podem ser convocadas para cada conceito, evidenciando as relações entre essas diferentes representações.

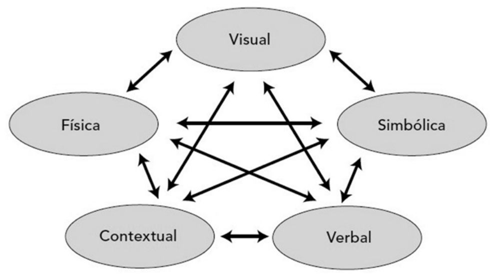


Figura 1. Representações matemáticas e suas conexões

A representação simbólica é uma representação por excelência da Matemática. Os símbolos têm um lugar único, o seu uso simplifica eficazmente a forma de referenciar algo e a sua manipulação permite alcançar resultados que, sem eles, seriam de todo impossíveis. No entanto, a artilharia simbólica não é tudo e por detrás dela ficam camuflados os significados que se revelam através da visualização das imagens (a que Bruner chama representação icónica), da experiência com os objetos físicos que se movem no espaço (a que Bruner chama representação ativa), situados em determinados contextos, e que podem ser explicados pelo uso da palavra oral ou escrita.

A título ilustrativo, podemos recorrer ao exemplo da fração. O símbolo ½ é muito eficaz e utiliza-se bem desde que negociados os significados dos dois números usados e separados por um traço. Além disso, nomeia-se facilmente: um sobre dois ou um meio. Mas a imagem que recorre ao círculo, por exemplo, mostra quanto é o todo inteiro, a sua meia parte e até que sobra outra meia parte e que as duas meias partes juntas se completam — e mostra-o de forma intuitiva sem qualquer negociação prévia — tal como acontece se um círculo de papel for dobrado ao meio e intencionalmente manipulado. Pode até experimentar-se que se se dobrar o semicírculo obtido também ao meio, se obtêm quatro partes iguais, aproveitar para introduzir o conceito de um quarto, representá-lo por ¼, observar que dois quartos correspondem a um meio, escrever ¼ + ¼ = ½ ... Até ao momento, já implicámos, à exceção da contextual, as diferentes representações, relacionando o universo numérico e o geométrico, mantendo-nos dentro da Matemática. No entanto, se ½ se reportar, por exemplo, à amplitude da volta que um dançarino executa ao girar sobre os seus próprios pés, a representação contextual vem estabelecer a conexão das anteriores com a realidade. Neste caso, a designação "um meio" passa a ser "meia volta" e não há dúvidas de que dois quartos de volta são meia volta e que meia volta mais um quarto de volta são três quartos de volta — abrindo lugar ao aparecimento natural da escrita simbólica que acompanha a perceção do movimento físico do corpo, de um seu possível registo por imagem (figura 2), da sua explicação por palavras… Daqui podem despoletar muitas ideias interessantes — por exemplo, se se girarem meias voltas um número par de vezes, completam-se voltas inteiras e fica-se voltado para o mesmo ponto; mas se se girarem meias voltas um número ímpar de vezes, completam-se voltas e meia e fica-se voltado para o ponto oposto. É um excelente ponto de partida para iniciar a adição ou mesmo a multiplicação de frações, podendo as regras derivar da análise dos casos concretos que são experienciados e têm sentido.

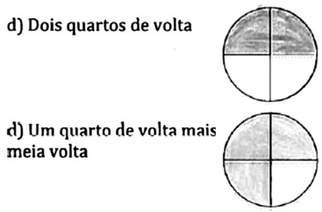


Figura 2. Representação visual de voltas e quartos de volta de alunos no Projeto MatDance

Quando se convocam diferentes representações para um mesmo conceito, em geral conectam-se diferentes domínios da Matemática pois a representação visual recorre com frequência a figuras geométricas e a representação física a objetos tridimensionais, entre os quais está o próprio corpo com a sua inserção e ocupação espacial. A representação contextual, quando pertinente, possibilita a relação do(s) conceito(s) com a situação extra-matemática em exploração.

Note-se que para estabelecer conexões não basta apresentar aos alunos diferentes representações. A presença de diversas representações não garante o aprofundamento da compreensão per si. Gojak (2013), por exemplo, refere-se ao uso de materiais manipuláveis para a introdução de conceitos mas, como ela afirma, muitas vezes estes surgem com intuito de motivação dos alunos ou de ilustrar alguma ideia sem que revertam para a exploração ou articulação da representação física com a(s) outra(s) utilizada(s). O estabelecer de conexões tem de ser intencionalmente preparado pelo professor. Os alunos precisam de ter experiências em que sejam apoiados nos seus esforços de estabelecer conexões entre o que fazem com os materiais manipuláveis e as ideias matemáticas que estes representam — e isto é válido para quaisquer representações.

A MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA PARA AS CONEXÕES

A modelação matemática é um processo composto por uma sequência de fases bem identificadas em que se estabelecem pontes entre o mundo não matemático e o matemático. Rita Borromeo Ferri propôs um ciclo de modelação para o trabalho na sala de aula que pode ser adotado em qualquer nível de escolaridade e não apenas em anos mais avançados, como por vezes tende a pensar-se. Este ciclo foi publicado na Educação e Matemática 110, de onde recupero a figura 3.

Como a figura 3 bem ilustra — adotando uma representação visual — a modelação consiste essencialmente em matematizar, através de um objeto matemático, uma dada situação de um contexto extra-matemático, a qual se analisa e simplifica de modo a ficar tratável, retirando dessa matematização a possibilidade de agir sobre a situação real, tirando benefícios desse uso da Matemática.

Assim, o ciclo de modelação constitui uma ferramenta para o estabelecimento de conexões, nomeadamente, de conexões entre a Matemática e o que está para além dela, sejam outras disciplinas, outros domínios do saber, sejam ciências, humanidades ou artes, ou a vida do dia-a-dia e suas práticas reais. Muito embora se adeque na perfeição a situações que podem ser matematizadas através de funções matemáticas, também funciona no âmbito de modelos matemáticos de outros tipos, como, por exemplo, um esquema que traduz uma situação.

Ilustro este cenário menos comum recorrendo de novo ao projeto MatDance. Os alunos, que haviam recentemente aprendido

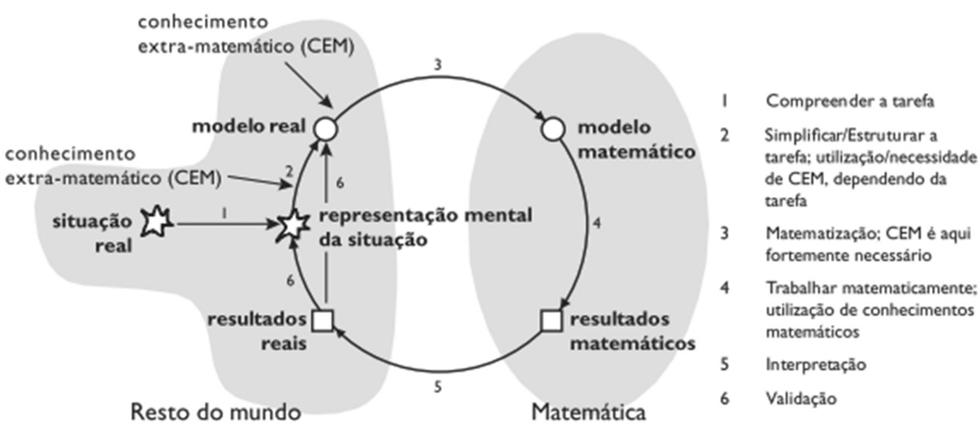


Figura 3. Ciclo de modelação matemática (Ferri, 2010)

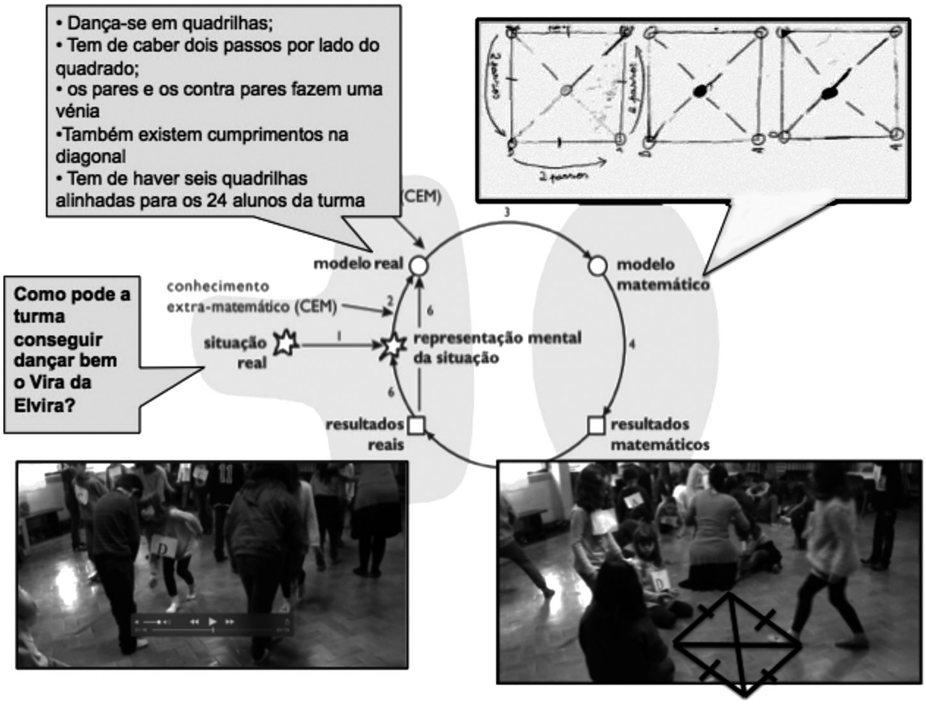


Figura 4. Conexões entre a matematica e a dança, com o modelo dos quadrados para marcar o chão e dançar melhor

uma nova dança, a do Vira da Elvira, procuravam melhorar a imagem global da coreografia executada pela turma, ainda muito desconcertada. Surgiu a ideia de se marcar o chão com pontos chave que permitissem a cada um dançar no(s) sítio(s) certo(s). Revistos em conjunto os conhecimentos extra-matemáticos relativos às condicionantes da dança, cada grupo de crianças apresentou uma proposta e foi eleito o esquema que se observa na figura 4, correspondendo ao modelo que explica a dança das quadrilhas (grupos de quatro dançarinos). E aqui o quadrado já não é só um quadrado desenhado numa folha de papel. Trata-se de um quadrado simultaneamente estático que se refere a posições de dançarinos, mas também de um quadrado dinâmico que incorpora o percurso realizado pelos dançarinos quando "percorrem" o quadrado e se detêm nas vénias sobre os seus lados e sobre as suas diagonais. E a designação [ABCD] já não é uma mera representação simbólica porque A, B, C e D são os quatro dançarinos que compõem a quadrilha e que trazem vestidos dorsais com as correspondentes letras. E a solução gerada pelo modelo para o problema, que se traduz por dançar sobre as marcas entretanto desenhadas no chão em função da proposta desenhada, pode ser apreciada e validada tal e qual ou ajustada e melhorada. Com esta experiência, os alunos têm a oportunidade de estabelecer diversas conexões, aprofundando a compreensão sobre o que é um quadrado, os elementos que o compõem, as relações entre eles e até as funções que podem ter.

A modelação matemática proporciona a oportunidade de os alunos relacionarem efetivamente as situações extra-matemáticas com a Matemática que se lhes adequa, que as explica e que, de algum modo, as controla. Esta experiência, que deve contemplar a implicação dos alunos em todas as fases do processo, reverte para o desenvolvimento de múltiplas capacidades e para a atribuição de sentido e valor aos conhecimentos matemáticos, sendo o reconhecimento da utilidade da Matemática pelos alunos uma das principais vantagens que a investigação reporta deste tipo de abordagem (Pierce & Stacey, 2006).

A modelação e a experiência que ela comporta pode constituir uma oportunidade para proporcionar uma prática matemática mais realista e completa aos alunos. Na realidade, a investigação tem vindo a revelar que a Matemática escolarizada que os alunos aprendem diariamente nas salas de aulas não os prepara necessariamente para lidar com situações efetivamente reais (Bonotto, 2001). Nestes casos, a utilização de estratégias matemáticas locais situadas no contexto são mais eficazes do que os algoritmos que são em geral ensinados na escola — estes são procedimentos genéricos poderosos mas que acabam por ter dificuldade em se adequar a muitos contextos extra-escolares. Levar para a sala de aula exemplos de situações da realidade não é suficiente para o estabelecimento de conexões. É necessário que os alunos tenham oportunidade "de experiência" que lhes permita conectar os dois mundos apartados: a vida além da sala de aula e a Matemática da sala de aula.

SÍNTESE: O QUE PROPORCIONAM AS CONEXÕES EM TERMOS DA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS?

Sistematizando resultados da investigação sobre a aprendizagem da matemática com conexões, destaco os seguintes pontos relevantes que diversos estudos evidenciam de forma transversal:

- Os alunos aprendem com maior aprofundamento

da compreensão, nomeadamente quando diversas representações são conectadas;
- Os alunos conseguem conceber a Matemática como uma atividade que faz sentido;
- Os alunos desenvolvem capacidades transversais, nomeadamente de interrogar e interpretar no contexto das conexões abordadas;
- Os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável relativamente à Matemática, apreciando o seu valor como explicação das situações extra-matemáticas e possibilidade de predição/intervenção sobre essas situações;
- Os alunos aprendem não só conteúdos da matemática como também dos assuntos extra-matemáticos que são abordados.

A investigação mostra também que estas aprendizagens requerem intencionalidade por parte do professor e trabalho sistemático, sendo mais eficazes quando as conexões são assumidas como uma forma de abordar a Matemática nas práticas diárias — o que tem vindo a acontecer, que haja registo, no contexto de projetos interdisciplinares. A investigação mostra também que esta abordagem ainda tem muito caminho a fazer e que se depara com grandes desafios no que diz respeito ao currículo de matemática a diversos níveis — o currículo oficial é exclusivamente focado nos seus conteúdos disciplinares, os materiais curriculares têm uma lógica eminentemente disciplinar, o currículo de matemática praticado pelos professores estabelece conexões de forma esporádica e o currículo avaliado ainda não contempla as conexões nos conteúdos avaliados.

Referências

Bonotto, C. (2001). How to Connect School Mathematics with Students' Out-of-School Knowledge, *ZDM, 33*(3), 75–84.

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática, 110,* 19-25.

Gojak, L. (2013). *Making mathematical connections.* http://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Linda-M_-Gojak/Making-Mathematical-Connections/

Lesh, R. Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in Mathematics learning and problem solving. In Janvier, C. (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

NCTM (2000). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (tradução em 2007).

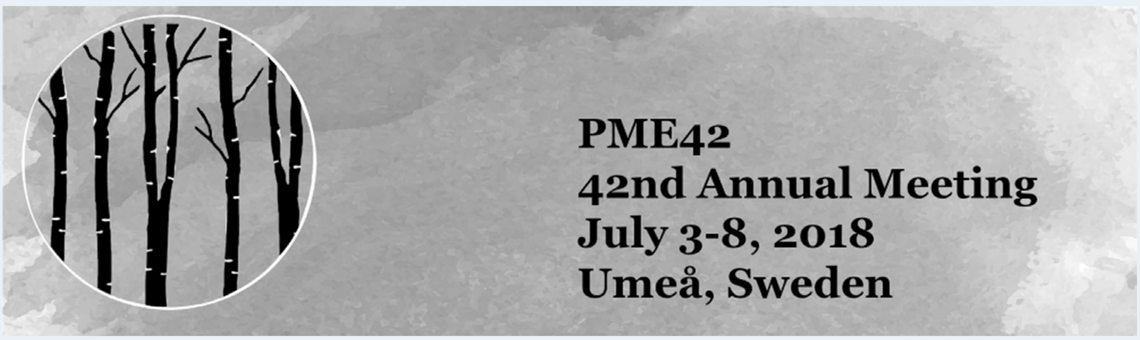
NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática.* Lisboa: APM (tradução em 2017).

Pierce, R. & Stacey, K. (2006). Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts. *ZDM, 38(*3), 214-225.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-444.

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora & UIDEF - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa



O **42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)** realiza-se entre 3 e 8 de julho de 2018, na cidade de **Umeå, situada no norte da Suécia**. Este ano dedica-se ao tema "Delight in Mathematics Education", focando-se nos aspetos que contribuem para um ensino e uma aprendizagem da Matemática divertidos, significativos e inspiradores, tanto para os professores como para os alunos.

As datas de inscrição e de submissão de propostas, o programa e outras informações úteis estão disponíveis no site: **http://www.pme42.se/**