Universidade de Évora

Desenvolvimento do Sentido de Número no Ensino Básico: Um Estudo no Sétimo Ano de Escolaridade

Ana Paula Lopes

Dissertação Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação e na Especialidade de Educação Matemática

Orientador: Prof. Doutor António Manuel Águas Borralho

2010

Universidade de Évora

Desenvolvimento do Sentido de Número no Ensino Básico: Um Estudo no Sétimo Ano de Escolaridade

Ana Paula Lopes

Orientador: Prof. Doutor António Manuel Águas Borralho

Mestrado em Educação: Variante Educação Matemática

2010

Resumo

A sociedade contemporânea exige do cidadão raciocínio quantitativo e os novos paradigmas económico-sociais colocam a Matemática escolar perante um novo desafio: desenvolver a literacia matemática dos alunos. A literacia matemática contempla um vasto conjunto de conhecimentos e capacidades entre eles o sentido de número. O desenvolvimento do sentido de número dos alunos tem suscitado alguns trabalhos de pesquisa, em particular ao nível dos primeiro e segundo ciclos do Ensino Básico. O objectivo desde estudo é recolher evidências sobre o sentido de número de alunos do terceiro ciclo, mais concretamente sobre o sentido de número racional dos alunos do sétimo ano de escolaridade. Para tal foi necessário considerar uma vasta e complexa rede de competências que caracterizam o sentido de número, entre elas o sentido de operação, mas também os subconstructos que definem os números racionais. Desta forma emergem deste objectivo duas questões: (i) que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, percentagens) dos números? (ii) como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações?

Este estudo é uma investigação de natureza qualitativa com recurso ao *design* de caso. A recolha de dados empíricos foi realizada ao longo do ano lectivo 2007/2008 numa turma de sétimo ano de escolaridade onde a investigadora era a docente da disciplina de Matemática. A investigadora assumiu um papel de observadora participante e foram considerados três estudos de caso: dois alunos e a turma. A informação analisada resultou de vários métodos de recolha: a) inquéritos – por questionário e entrevista com tarefas; b) observação da resolução das tarefas em ambiente de sala de aula; c) análise documental. A análise deste conjunto de contributos foi feita tendo em conta as questões de investigação e de forma individual para cada um dos casos.

O estudo mostrou que os alunos atribuem pouco significado aos números, às operações e aos contextos. Revelam alguma compreensão dos números racionais escritos na forma de fracção e na forma decimal mas têm dificuldade em compreender e manipular racionais escritos com recurso a outras formas de representação e a maioria dos alunos revela poucas competências de comparação e ordenação de números racionais. Nesta investigação ressalta também o fraco sentido de operação dos alunos. Mostram pouca compreensão do efeito das operações nos números e têm dificuldade em reconhecer, no contexto do problema, a operação que mais se adequa à situação, manifestando dificuldade quer na interpretação das situações quer na definição de estratégias apropriadas.

Palavras-chave: Literacia matemática, sentido de número, sentido de operação, números racionais.

Number Sense Development in Basic Education: a Study in the Seventh Grade

Abstract

Nowadays society requires of the citizen quantitative reasoning and the new economic-social paradigms place the school Mathematics before a new challenge: to develop the mathematical literacy of the pupils. The mathematical literacy contemplates a vast set of knowledge and capacities such as number sense. The number sense development has excited some works of research, in particular referring to grades 1-6. The aim of this study is to collect evidences about the number sense of pupils of grades 7-9, more concretely on the 7th grade pupils' sense of rational numbers. For such it was necessary to consider a vast and complex net of abilities that characterize number sense, including operation sense, but also the rational numbers' subconstructs. Therefore of this aim two questions emerge: (i) which understanding pupils have of the equivalents forms (entire, fractions, decimals, percentages) of numbers? (ii) how pupils understand the effect that operations have on numbers, the properties and relations between the operations?

This study is a qualitative nature investigation that resorts to case studies. Empirical data collection was carried along the school year of 2007/2008 in a 7th grade class where the investigator was the Mathematics teacher. The investigator assumed the role of participant observer and had been considered three studies of case: two pupils and the class. The analyzed data was collected by means of: a) survey - questionnaire and interview with tasks; b) observation of the resolution of the tasks in classroom environment; c) documentary analysis. The data analysis was made according to the questions of the study and individually for each one of the cases.

The study showed that pupils attribute slight meant to the numbers, to the operations and the contexts. They reveal some understanding of rational numbers represented as fractions or decimal numbers but disclose difficulty in understanding and manipulating rational numbers' other forms of representation. The majority of the pupils shows few abilities of comparison and ordinance of rational numbers. This investigation also revealed the weak sense of operation of the pupils. They show little understanding of the effect that operations have on numbers as well as difficulty in recognizing, according to the problem's context, the operation that more suits the situation. Pupils disclose difficulty in the interpretation of the situations and in the definition of appropriate strategies.

Key-words: mathematical literacy, number sense, sense of operation, rational numbers.

Agradecimentos

Ao concluir esta investigação gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que directa ou indirectamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor António Borralho pelas orientações e críticas pertinentes e pela disponibilidade e interesse com que me apoiou.

À Professora Graça Cebola pela disponibilidade e apoio.

Aos alunos Inês e José e aos alunos da turma, à directora de turma e ao Conselho Executivo da escola pela receptividade demonstrada.

Ao Zé Pedro e ao Zé Diogo e à minha família e amigos, pelo carinho e apoio que foram importantes estímulos para a evolução e conclusão deste estudo.

Índice Geral

Lista de Quadros

Lista de Figuras

Capítulo VII:

Capítulo I

Introdução

O papel dos números na sociedade moderna é cada vez maior. Estão presentes nas mais variadas áreas da actividade humana e o mundo em progresso exige do cidadão raciocínio quantitativo. Neste sentido a Matemática escolar deve corresponder às necessidades da sociedade actual e proporcionar uma educação matemática que fomente o desenvolvimento da literacia matemática dos alunos. O sentido de número é um dos vários elementos que definem esta competência. O presente estudo incidirá sobre o sentido de número, em particular sobre o sentido de número racional dos alunos do sétimo ano de escolaridade, procurando evidências sobre o desenvolvimento desta capacidade no terceiro ciclo do Ensino Básico.

Definição do Problema

Os números estão presentes nas mais variadas actividades do Homem e a sua compreensão é fundamental para o exercício pleno da cidadania – "não é o cálculo mas a literacia numérica a chave para a compreensão desta nossa sociedade impregnada de números e estatísticas" (Steen, 2001, p.2). O democratizado mundo ocidental exige do cidadão raciocínio quantitativo, competência do indivíduo para mobilizar conhecimentos matemáticos em contextos variados e que designaremos por literacia matemática. A literacia matemática é um conceito complexo que envolve um vasto conjunto de conhecimentos e capacidades e, segundo Steen (2001), pode caracterizar-se através da multiplicidade de componentes que a constituem: à-vontade na Matemática, valorização cultural, interpretação de dados, pensamento lógico, tomada de decisões, Matemática contextualizada, sentido do número, competências práticas, requisitos de conhecimento e sentido do símbolo. A Matemática escolar deve corresponder às exigências da sociedade e proporcionar aos alunos o desenvolvimento desta competência através do desenvolvimento dos seus vários elementos. Este estudo incidirá sobre um dos importantes elementos da literacia matemática – o sentido de número.

A expressão *sentido de número* refere-se à "compreensão geral que um indivíduo tem dos números e das operações assim como a capacidade para usar esta compreensão de formas flexíveis para fazer juízos matemáticos e desenvolver estratégias para lidar com os números e operações" (McIntosh, Reys e Reys, 1992, p.3). O conceito de sentido de número envolve portanto um conjunto lato de competências relativas aos números e operações mas que podem ser consideradas, segundo McIntosh, Reys e Reys (1992) em três blocos: (1) conhecimento e destreza com os números; (2) conhecimento e destreza com as operações; (3) aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo.

Esta investigação incidirá sobre o sentido de número dos alunos, elemento fundamental da literacia matemática, reconhecendo que esta capacidade abrange várias dimensões: compreensão dos números, forma como são usados e o contexto, interagindo com o sentido de operação.

Objectivo do Estudo e Questões de Investigação

O presente estudo pretende caracterizar o sentido de número dos alunos do sétimo ano de escolaridade. Como ao longo do sétimo ano de escolaridade a ênfase, no âmbito do tema Números e Operações, é colocada no conjunto dos números racionais e nas operações em Q, esta investigação centra-se no sentido de número racional e tem como objectivo caracterizar o sentido de número racional dos alunos.

Pretende-se procurar evidências sobre o sentido de número dos alunos considerando os elementos que o caracterizam: competências envolvendo o conhecimento e destreza com os números assim como o conhecimento e destreza com as operações e a aplicação destes conhecimentos em situações de cálculo, na resolução de problemas e em situações do quotidiano. Na base do problema estão, portanto, dois grandes domínios: i) sentido de número e ii) sentido de operação.

Por outro lado, é necessário considerar que o conceito de número racional se reveste também de alguma complexidade e cujas definição e caracterização devem ter em conta um conjunto de subconstructos propostos por Behr *et al.* (1983): relação parte-todo (1), decimal (2), rácio (3); quociente (4); operador (5) como medida de quantidades contínuas e discretas (6). A compreensão do conceito de número racional pressupõe não só o conhecimento dos seus vários subconstructos mas também da forma como se inter-relacionam. Neste sentido procura-se perceber a compreensão que os alunos têm dos números racionais, das formas equivalentes de os representar e a compreensão que têm das operações em Q.

Atendendo aos grandes domínios considerados na investigação – sentido de número e sentido de operação – e à importância da compreensão e atribuição de significados aos racionais (e das formas equivalentes dos representar) para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, foram formuladas duas questões de investigação:

1- Que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, percentagens) dos números?
2- Como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações?

O objectivo da investigação é recolher informação que permita compreender e caracterizar o sentido de número racional dos alunos. Paralelamente procurar-se-á uma análise interpretativa das evidências recolhidas sobre as representações dos alunos em relação aos números e operações. Neste sentido, e no que respeita à primeira questão de investigação, serão analisados aspectos em relação à compreensão que os alunos têm dos números e dos conjuntos numéricos atendendo a várias competências que o aluno com sentido de número deve evidenciar: compreensão dos números e das formas equivalentes de os representar; compreensão da grandeza relativa dos números e contextualização e adequação do uso dos números. Relativamente à segunda questão de investigação serão recolhidos elementos que permitam aferir sobre o sentido de operação dos alunos pois a forma como os alunos compreendem as operações, suas propriedades e relações, e o efeito que estas têm sobre os números são contributos fundamentais para o seu sentido de número.

O estudo tem como objecto este grupo de alunos e considera três estudos de caso: o José, a Inês e a turma. As conclusões obtidas dirão respeito apenas a este grupo de indivíduos e não é objectivo da investigação revestir o estudo de carácter indutivo ou fazer qualquer tipo de generalização. Pretende ser um contributo para a compreensão e reflexão sobre a aprendizagem dos números racionais, o sentido de número e o sentido de operação dos alunos do terceiro ciclo do Ensino Básico e sobre o contributo da formação Matemática escolar para o desenvolvimento da literacia matemática dos indivíduos.

Pertinência do Estudo

As necessidades económico-sociais confrontam a Matemática escolar com grandes desafios, quer ao nível curricular quer ao nível das práticas lectivas. É necessário formar cidadãos matematicamente competentes que mobilizem conhecimentos e competências para a resolução de problemas do quotidiano.

Durante um longo período de tempo, Números e Operações, foi em Portugal o tema dominante na Matemática escolar e o ensino centrava-se na aprendizagem de algoritmos e no treino de competências de cálculo, "saber fazer contas era fundamental" (Porfírio, 1998, p.33).

O progresso científico proporcionou a introdução das novas tecnologias o que fez repensar a ênfase colocada no cálculo e nos algoritmos. Desta forma, a educação matemática deve corresponder aos novos paradigmas proporcionando experiências que permitam o desenvolvimento da literacia matemática dos alunos, e no que respeita aos Números e Operações, o sentido de número.

Apesar da emergente necessidade de considerar o sentido de número na formação matemática dos indivíduos, esta capacidade de lidar com os números e com as operações não é referida no Programa do Ensino Básico (ME-DEB, 1991) ainda em vigor, nem em Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001). Contudo, apesar de neste documento não ser explícita a expressão sentido de número, as competências específicas consideradas no âmbito do tema Números e Operações, ao longo de todos os ciclos, contemplam as componentes do sentido do número e as capacidades que o aluno com sentido de número deve evidenciar, abrangendo os três grandes domínios do sentido de número, referidos na literatura: os números, as operações e o contexto.

No novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) a referência ao sentido de número está presente em todos os ciclos e de forma muito explícita. Esta nova proposta curricular, que está a ser aplicada apenas em escolas piloto apresenta, para todo o terceiro ciclo e em relação ao tema Números e Operações, como propósito principal de ensino o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, "a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos". (ME-DGIDC, 2007, p. 13; 32; 48). O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) e o documento Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001) enfatizam, portanto, uma abordagem dos Números e Operações centrada na compreensão global dos números e das operações e na utilização dessa competência no desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas. Neste sentido é urgente discutir o ensino-aprendizagem dos Números e Operações, e no caso do terceiro ciclo, dos números racionais. Emerge a necessidade de estudar e reflectir sobre o desenvolvimento do sentido de número dos alunos de forma a proporcionar-se a definição de estratégias e metodologias que, no contexto da Matemática escolar, permitam o desenvolvimento desta competência. Esta investigação pretende ser um contributo para essa reflexão.

Em Portugal, o desenvolvimento do sentido de número e do sentido de número racional foi recentemente objecto de estudo num projecto conjunto da ESE de Lisboa, ESE de Leiria e ESE de Setúbal. Este projecto contemplando duas vertentes, por um lado a construção, experimentação e avaliação de tarefas e, por outro a reflexão sobre as perspectivas curriculares e as práticas lectivas, incide sobre o sentido de número dos alunos dos primeiro e segundo ciclos. Reconhecendo que o sentido de número é uma competência que é necessária trabalhar ao longo de toda a escolaridade, desde o pré-escolar até ao décimo segundo ano de escolaridade, torna-se bastante pertinente a existência de investigações que se dediquem ao estudo do sentido de número dos alunos no terceiro ciclo permitindo a articulação com o trabalho desenvolvido nos ciclos anteriores e posteriores.

De forma a perceber, na transição para o terceiro ciclo, a representação que os alunos têm dos números e dos conjuntos numéricos, a compreensão que têm do conceito de número racional e das operações em Q e a forma como mobilizam os seus conhecimentos sobre números e operações para a resolução de problemas, esta investigação procura dar continuidade ao estudo e caracterização do sentido de número dos alunos portugueses.

Capítulo II

Revisão da Literatura

Sentido de Número

Os números estão presentes em todos os domínios da Matemática e em variados aspectos do nosso quotidiano. O sentido de número é uma importante componente da literacia matemática, competência do indivíduo para mobilizar conhecimentos matemáticos em contextos variados. O sentido de número envolve a compreensão do número, das formas de o representar e do seu valor relativo assim como das relações que se estabelecem entre os números. Compreende também a capacidade de operar com eles, interagindo com o sentido de operação. Tendo em conta estes aspectos a revisão da literatura, no que respeita ao sentido de número, encontra-se dividida em três secções. Assim, a primeira temática diz respeito à clarificação do conceito de literacia matemática destacando uma das suas componentes, o sentido de número cujo conceito será esclarecido atendendo às propostas de definição de vários autores e entidades. Na segunda secção discutem-se aspectos respeitantes à relação entre sentido de número e sentido de operação. Num terceiro momento é considerado o sentido de número numa perspectiva curricular tendo em conta o programa em vigor dos três ciclos do ensino básico, o documento Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001) e ainda o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007).

Literacia Matemática e Sentido de Número

Literacia Matemática

Em variados aspectos da sua vida, o cidadão é confrontado com a necessidade de lidar com números, usar raciocínio quantitativo ou outras capacidades envolvendo a Matemática. No local de trabalho, em momentos de lazer e em variadas situações do quotidiano o indivíduo, através de jornais e revistas, da televisão, da *internet* e de outras fontes é mergulhado em informação quantitativa. Informação que lhe surge em tabelas, figuras, gráficos e noutros formatos e que tem que interpretar e manipular para clarificar e resolver uma situação problemática, para corresponder, de uma forma activa e reflexiva, às exigências da sociedade contemporânea, uma sociedade emergida em números. Estas exigências irrompem da mudança de paradigmas económicos e da democratização dos estados pois, segundo Steen (2001):

> Os cidadãos quantitativamente letrados precisam de saber mais do que fórmulas e equações. Necessitam de uma predisposição para observarem o mundo através de olhos matematicamente críticos, para se aperceberem dos benefícios (e riscos) da aplicação do pensamento quantitativo nos assuntos quotidianos e para abordarem problemas complexos com confiança no valor do raciocínio ponderado. A literacia quantitativa confere às pessoas o poder de pensarem por si próprias, de colocarem questões inteligentes e de confrontarem as autoridades com confiança. Estas são competências necessárias para singrarem no mundo moderno (p.2).

Estas competências surgem associadas a vários termos, literacia quantitativa, numeracia, literacia numérica, literacia matemática, raciocínio quantitativo entre outras que, segundo o autor, podem assumir algumas nuances e diferentes interpretações. Nesta revisão é usada a designação literacia matemática.

Ponte (2002) reforça que a capacidade de utilizar conhecimentos matemáticos em situações problemáticas do dia-a-dia assim como a capacidade de lidar com informação estatística podem surgir associadas a vários termos conducentes a diferentes acepções e consequentemente a algumas questões relacionadas com a abrangência do conceito de literacia matemática. Segundo o autor a literacia matemática é perspectivada não tendo só em conta conceitos numéricos mas também outras áreas da Matemática (Geometria, Probabilidades, Estatística e Álgebra).

Steen (2001) apresenta contributos de algumas entidades para clarificar o conceito de literacia matemática nos quais se inclui a definição do *International Life Skills Survey*:

> "conjunto das competências, dos conhecimentos, convicções, disposições, hábitos mentais, capacidades comunicativas e de resolução de problemas necessárias a uma eficiente desenvoltura perante a variedade de circunstâncias quantitativas que surgem na vida e no trabalho" (p.7).

À semelhança de Steen (2001), Ponte (2002) reconhece que a literacia é a competência do indivíduo para mobilizar conhecimentos matemáticos em situações concretas, revelando sentido crítico no uso desses conhecimentos e da informação.

De acordo com GAVE (2004), a OCDE clarifica o conceito associando literacia matemática à capacidade de cada indivíduo de utilizar a Matemática em contextos reais, na construção da cidadania e do seu projecto pessoal de vida:

> (...) capacidade de um individuo de identificar e compreender o papel que a Matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados e de usar e se envolver na resolução matemática das necessidades da sua vida, enquanto cidadão construtivo, preocupado e reflexivo (p.7).

Nestas referências a literacia matemática surge associada ao uso de noções matemáticas em situações concretas do quotidiano e identifica-se uma preocupação em ressaltar a sua importância na construção da cidadania e no desenvolvimento do sentido crítico e da capacidade de reflexão dos indivíduos. Por outro lado, nestes contributos, é atribuído um sentido lato ao conceito de literacia quantitativa, contemplando um vasto conjunto de conhecimentos e capacidades. Tratam-se de definições vagas mas que procuram abranger uma grande rede de saberes e capacidades. Tendo em conta esta multiplicidade de componentes que constituem a literacia matemática e a complexidade em definir esta competência, Steen (2001) caracteriza-a através dos seus elementos: à-vontade na Matemática, valorização cultural, interpretação de dados, pensamento lógico, tomada de decisões, Matemática contextualizada, sentido do número, competências práticas, requisitos de conhecimento e sentido do símbolo.

O sentido de número surge assim como uma das componentes da literacia matemática. Desta forma, tendo em conta que nesta investigação a ênfase é colocada no sentido de número dos alunos, revela-se importante enquadrar o sentido de número num âmbito mais abrangente, a literacia matemática. O sentido de número é uma componente importante deste conjunto amplo de noções e capacidades matemáticas o que justifica a revisão teórica incluída nos parágrafos anteriores. Esta contextualização torna-se pertinente no sentido em que "mesmo quando na Matemática estamos apenas a discutir os números e o cálculo, estes não se reduzem a uma mera memorização de operações e suas propriedades, mas envolvem muito mais competências" (Silva, 2002, p.18).

Sentido de Número

Como definir sentido de número? O sentido de número é uma das componentes da literacia matemática que surge no âmbito dos Números e Operações. Trata-se de uma "ideia não fácil de definir mas que se refere a uma bem organizada rede conceptual que permite a uma pessoa relacionar as propriedades dos números e das operações" (Swoder, 1988, p. 183). Na tentativa de definir sentido de número é necessário considerar as diferentes componentes que abarca e ter em conta a sua natureza intuitiva e pessoal, assumindo que o seu desenvolvimento é um processo gradual. McIntosh, Reys e Reys (1992) referem que esta expressão, sentido de número, pode estar sujeita a diferentes interpretações e suscita discussão no domínio do ensino da Matemática. Segundo Markovits e Swoder (1994) a expressão sentido de número, utilizada para introduzir um conjunto de competências relativas a números e operações, assumiu um carácter mais preponderante no panorama da educação matemática com a publicação do documento *Everybody Counts* pelo National Research Council em 1989 e de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* pelo NCTM em 1989.

Esta entidade, o NCTM, caracteriza o sentido de número como uma intuição acerca dos números que se desenvolve a partir dos diferentes significados dos números abrangendo cinco componentes:

> (1) Desenvolvimento de significados acerca do número;
> (2) Exploração das relações entre os números, usando materiais manipuláveis;
> (3) Compreensão da grandeza relativa dos números;
> (4) Desenvolvimento de intuições acerca dos efeitos relativos das operações com números;
> (5) Desenvolvimento de padrões de medida de objectos comuns e de situações no seu meio ambiente.
>
> (APM, 1991, p.50)

Neste contributo o sentido de número refere-se à compreensão global dos números, atendendo aos seus significados, relações e ordem de grandeza mas também à compreensão do que acontece aos números quando se opera com eles. Para além destes dois aspectos, a quinta componente diz respeito à compreensão do contexto, tendo em conta a adequação de determinados números à situação a que dizem respeito. Por exemplo, um aluno com sentido de número consegue reconhecer que "é absurdo que um aluno do quarto ano tenha 316 cm de altura ou que pese 8 kg" (APM, 1991, p.50).

Do mesmo modo, Greenes, Schulman e Spungin (1993) caracterizam o sentido de número considerando estas três dimensões: compreensão dos números, forma como são usados e o contexto. Segundo os autores, o desenvolvimento do sentido de número, de alunos do ensino básico, deverá ser concretizado através do desenvolvimento das seguintes competências:

> (1) Reconhecer as várias utilizações dos números: para quantificar; para identificar, para medir e para identificar uma localização ou posição;
> (2) Reconhecer a adequação dos números [consoante os contextos];
> (3) Associar números de várias ordens de grandeza a objectos, acontecimentos e situações da vida real. Os alunos devem ser capazes de avaliar que números são mais adequados para descrever esses objectos ou acontecimentos;
> (4) Estimar resultados (estimar somas, diferenças, produtos e quocientes);
> (5) Identificar relações entre números e medidas;
> (6) Reconhecer conjuntos e subconjuntos e relações parte-todo;
> (7) Compreender expressões que estabelecem relações matemáticas e relações temporais: maior que; menor que; mais do que; menos do que; pelo menos, para todos, antes, depois, a partir de agora,...
>
> (Greenes, Schulman e Spungin, 1993, pp.279-280)

Também em McIntosh, Reys e Reys (1992) o sentido de número é considerado como um conjunto lato de competências relativas aos números e operações mas para estes autores o contexto e a compreensão da utilização dos números na vida real assumem especial importância na caracterização do sentido de número:

> Sentido de número refere-se à compreensão geral que um indivíduo tem dos números e das operações assim como a capacidade para usar esta compreensão de formas flexíveis para fazer juízos matemáticos e desenvolver estratégias para lidar com números e operações. Reflecte uma tendência e capacidade para usar os números e métodos quantitativos como meios de comunicação, processando e interpretando informação. Resulta na expectativa de que os números são úteis e de que a Matemática obedece a uma certa regularidade. (p.3)

Para além destes dois contributos, McIntosh, Reys e Reys (1992) e Greenes, Schulman e Spungin (1993), ressaltarem, de uma forma mais preponderante, a importância de incluir, na definição de sentido de número, componentes relativas à contextualização e adequação do uso dos números, também são introduzidas, na definição de sentido de número, competências relativas ao desenvolvimento de estratégias para lidar com os números. Segundo McIntosh, Reys e Reys (1992) o sentido de número desempenha um papel importante na escolha e na forma como os alunos usam um método de cálculo: cálculo escrito, cálculo mental, uso de calculadora ou estimativa. De acordo com os autores, indivíduos com sentido de número desenvolvem estratégias criativas, e muitas vezes eficazes, de operar com números, optando pelo uso de métodos informais em detrimento dos algoritmos tradicionais de papel e lápis.

Também em Greenes, Schulman e Spungin (1993) a capacidade de estimação é tomada como um dos elementos do sentido número e Markovits e Swoder (1994) apresentam uma proposta de definição de sentido de número, incluindo de uma forma explícita, a estimação e o cálculo mental. Segundo os autores possuir sentido de número contempla " (1) usar os números de uma forma flexível no cálculo mental; (2) estimar; (3) avaliar a grandeza de um número; (4) avaliar a razoabilidade de um resultado; (5) usar diferentes formas de representar números e (6) relacionar números, símbolos e operações" (p.5). Também Swoder e Klein (1993) reforçam a importância do cálculo mental e da estimação no desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Segundo os autores o cálculo mental e a estimação permitem uma utilização flexível de conceitos e operações, na definição e invenção de estratégias para resolver problemas e na compreensão dos números e do seu significado no contexto do problema.

Do mesmo modo, em Swoder (1988), associada ao sentido de número, surge a competência de escolher e usar formas flexíveis de lidar com números de acordo com o contexto. O autor refere que o sentido de número pode ser reconhecido através das seguintes competências:

> capacidade de usar o valor do número, relativo e absoluto, de fazer apreciações qualitativas e quantitativas, para, mas não só, comparar números, reconhecer resultados não razoáveis nos cálculos e utilizar formas não algorítmicas de efectuar cálculo mental. Uma pessoa que tenha sentido de número usa modos flexíveis e criativos de resolver problemas que envolvam números (p.183).

De um modo geral, nas referências apresentadas, o sentido de número é expresso através de um conjunto de componentes ou é caracterizado através das competências reveladas pelo indivíduo que possui sentido de número. Atendendo à proposta dos vários autores, na revisão teórica do conceito de sentido de número estas componentes e competências surgem contemplando três dimensões fundamentais: compreensão dos números, da forma como são usados e do contexto. As componentes e competências são referidas, com maior ou menor abrangência, mas não são organizadas e estruturadas de uma forma clara. Em McIntosh, Reys e Reys (1992) é apresentada uma estrutura do sentido de número que procura clarificar, organizar e relacionar os vários elementos que o constituem. Este modelo distingue precisamente as três áreas já identificadas: conceito de número, operações com números e as aplicações dos números e das operações. Desta forma os autores agrupam as componentes do sentido de número em três blocos: (1) Conhecimento e destreza com os números; (2) Conhecimento e destreza com as operações; (3) Aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo. Segundo a categorização proposta pelos autores, em cada um destes blocos são considerados pontos específicos que o aluno, com sentido de número, deve evidenciar:

Quadro 1 – *Estrutura do sentido de número* (adaptado de McIntosh, Reys e Reys, 1992, p.4)

1. Conhecimento e destreza com os números	1.1 Sentido de ordenação dos números 1.2 Múltiplas representações para os números 1.3 Sentido de grandeza absoluta e relativa dos números 1.4 Sistemas de referência
2. Conhecimento e destreza com as operações	2.1 Compreensão do efeito das operações 2.2 Compreensão das propriedades das operações 2.3 Compreensão da relação entre as operações
3. Aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo	3.1 Compreensão da relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário 3.2 Consciencialização da existência de múltiplas estratégias 3.3 Inclinação para utilizar uma representação e/ou método eficiente 3.4 Sensibilidade para rever os dados e os resultados

De acordo com esta proposta, o primeiro conjunto de competências diz respeito ao conhecimento e destreza com números. Este conhecimento contempla a compreensão global do sistema de numeração, reconhecendo diferentes tipos de números e relações entre eles e percebendo o valor posicional e a ordem dos números. O conhecimento e destreza com os números abarca também o reconhecimento de que os números surgem através de diferentes formas e que algumas representações são mais adequadas em determinados contextos. Nas múltiplas representações para os números, segundo McIntosh, Reys e Reys (1992), devem ser consideradas as representações gráficas/ simbólicas, formas numéricas equivalentes, a decomposição e recomposição e a comparação a um sistema de referência. Por outro lado, é necessário ter em conta o valor dos números, pois "compreender um número como uma quantidade de uma determinada grandeza, maior que, menor que ou igual à de um outro número é fundamental para o sentido de número" (Swoder, 1988, p.187). A compreensão global dos números pressupõe o reconhecimento do valor relativo de um número, em relação a outro número mas pressupõe também a compreensão da ordem de grandeza desse número, tendo em conta a sua grandeza absoluta. Segundo Markovits e Swoder (1994) compreender a grandeza de um número envolve as capacidades de comparar números, identificar qual de dois números está mais próximo de um terceiro número, ordenar números e identificar números entre dois números dados. Neste primeiro bloco de competências, relativas ao conhecimento e destreza com os números, McIntosh, Reys e Reys (1992) destacam também a importância da utilização de sistemas de referência. Referências como potências e múltiplos de 20, 10 ou pontos médios como ½ ou 50% podem ser utilizados para fazer comparações e avaliar a razoabilidade de um resultado.

O segundo bloco de competências apresentado no modelo de McIntosh, Reys e Reys associa o sentido de número ao conhecimento e destreza com as operações. É apresentado pelos autores um conjunto de categorias e subcategorias que dizem respeito à forma como os indivíduos entendem as operações entre os números. Este entendimento das operações engloba a compreensão do efeito que têm nos números, quer se trate de inteiros ou racionais, as suas propriedades – comutatividade, associatividade, distributividade, identidade e existência de elemento inverso, assim como as relações que se estabelecem entre elas – adição/ multiplicação; subtracção/ divisão; adição/ subtracção e multiplicação/ divisão. No que respeita ao número de conexões que o indivíduo pode estabelecer entre as operações, segundo os autores, com a introdução dos racionais aumenta esta rede de relações. A forma como o sentido de operação interage com o sentido de número e o modo como a compreensão das operações contribui para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos serão analisados no próximo subcapítulo desta incursão teórica, *Sentido de número e sentido de operação*.

Na estrutura proposta para sentido de número em McIntosh, Reys e Reys (1992) é apresentado ainda um terceiro bloco de componentes que dizem respeito à forma como os alunos utilizam os seus conhecimentos e competências, no âmbito dos números e operações, em situações de cálculo e resolução de problemas. Neste bloco, os autores consideram que para resolver situações problemáticas que envolvam números é necessário que os alunos consigam compreender o problema e mediante a informação quantitativa fornecida e a questão colocada decidir o tipo de solução que procuram, aproximada ou exacta, seleccionar uma operação apropriada ao contexto e depois de aplicada uma estratégia reflectir sobre a razoabilidade do resultado. O aluno deve ser capaz de reconhecer que existem diferentes estratégias de resolução e reformular ou aplicar uma nova estratégia quando a estratégia seleccionada inicialmente se revelar improfícua. Um aluno com sentido de número consegue compreender que em determinadas situações algumas estratégias ou ferramentas de cálculos podem revelar-se mais úteis e adequadas. Neste bloco de componentes os autores ressaltam a importância de incluir no sentido de número competências associadas à sensibilidade para rever e reflectir sobre os resultados obtidos atendendo ao contexto do problema.

Tendo em conta a perspectiva já apresentada de outros autores e o modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992), em síntese, o sentido de número é uma intuição acerca dos números que se refere à compreensão global dos números e das operações assim como à capacidade de usar esta destreza com os números e operações para desenvolver estratégias adequadas à resolução de problemas atendendo ao contexto ou à situação real. Contempla o conhecimento dos números, suas múltiplas utilizações e representações, a compreensão das relações entre os números e a percepção do seu valor relativo assim como o entendimento das operações e do efeito que têm sobre eles:

> Podemos dizer que os alunos com sentido do número desenvolveram significados para os números e para as relações numéricas, reconhecem a sua grandeza relativa e os efeitos das operações sobre os números, tendo desenvolvido referentes para as quantidades e para as medidas. Deste modo, são capazes de interpretar criticamente o resultado de um problema, verificar a sua razoabilidade e interpretá-lo à luz dos dados disponíveis. A competência matemática

no domínio dos números implica utilizá-los como instrumentos de formulação e resolução de problemas e de comunicação de ideias.

(Abrantes, Serrazina e Oliveira 1999, p. 60)

Sentido de Número e Sentido de Operação

Atendendo à caracterização de sentido de número proposta pelos vários autores não é possível dissociá-lo de competências relacionadas com o conhecimento e destreza com as operações. O sentido de operação interage com o sentido do número e confere ao indivíduo a capacidade de utilizar as operações de uma forma significativa e flexível.

De acordo com APM (1991) o sentido de operação é caracterizado através de quatro componentes: (1) compreensão da operação; (2) percepção dos modelos e das propriedades de uma operação; (3) identificação das relações entre as operações e (4) compreensão intuitiva dos efeitos de uma operação num par de números. Estes elementos também estão presentes no segundo bloco de competências do sentido de número apresentado em McIntosh, Reys e Reys (1992), e referido no quadro 1, no que respeita às operações. Segundo os autores, o conhecimento e destreza com as operações abrange a percepção do efeito que têm nos números, as suas propriedades e as relações que se estabelecem entre elas.

Compreender o efeito das operações implica pensar sobre os números envolvidos e o significado de cada operação. Por outro lado é necessário ter em conta que nas operações entre dois ou mais números estabelece-se um conjunto de propriedades matemáticas. O entendimento das propriedades das operações é um elemento fundamental do sentido de operação. Estas propriedades, como referem McIntosh, Reys e Reys (1992), são muitas vezes ensinadas como regras formais o que faz com que os alunos não tirem proveito delas quando operam com números. O sentido de número interage com os conhecimentos sobre operações quando os alunos aplicam propriedades para criar procedimentos de cálculo e as utilizam em situações concretas, manipulando com à vontade os números envolvidos. Do mesmo modo estes autores ressaltam a importância das conexões entre as operações na forma de pensar os números, e pensar e resolver os problemas, pois proporcionam aos alunos mais estratégias e formas de abordagem em cada situação. Alunos com bom sentido de número fazem conexões entre operações e sentem-se confortáveis em aplicar as suas propriedades em diferentes situações. Em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) é igualmente destacada a importância de trabalhar a compreensão das operações, suas propriedades e relações pois este entendimento, ilustrado através de situações concretas, facilita os cálculos, justifica os algoritmos e permite aos alunos compreender as diferentes ideias subjacentes a cada operação, proporcionando novas formas de pensar. Por outro lado a compreensão das operações é um elemento de desenvolvimento do sentido de número dos alunos na medida em que a reflexão sobre o efeito das operações nos números permite-lhes perceber e avaliar a ordem de grandeza dos números envolvidos e do resultado. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) ressaltam também a importância da compreensão das operações para a resolução de problemas pois é necessário que os alunos consigam estabelecer uma relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário e/ou acessível.

Desta forma é necessário que os alunos disponham do conhecimento de várias estratégias de cálculo possíveis e seleccionem a mais adequada. Os alunos com sentido de operação desenvolvem de forma criativa estratégias de cálculo que revelam compreensão das propriedades e relações entre as operações. As características da situação problemática que se pretende resolver determinam o procedimento de cálculo a utilizar e neste sentido nem sempre os algoritmos tradicionais se revelam os métodos mais adequados à tarefa em questão. A compreensão das operações, a par da compreensão dos números envolvidos, permite aos indivíduos adequar ao contexto uma determinada estratégia de cálculo. Esta selecção de estratégias de cálculo revela-se um importante elemento caracterizador da destreza com as operações do indivíduo: " parte da capacidade para efectuar cálculos com destreza pressupõe tomar decisões perspicazes sobre o tipo de ferramentas a usar e sobre quando as usar" (APM, 2007, p.38). Neste sentido é necessário destacar novamente, quer no que respeita à utilização flexível de conceitos e operações quer na invenção e selecção de estratégias para resolver problemas, o cálculo mental e a estimação. Os alunos deverão ser capazes de, consoante o contexto, o tipo de números que constituem os dados problema e o grau de exactidão pretendido para a resposta, optar por usar o cálculo mental, a estimativa, tradicionais estratégias de papel e lápis ou a calculadora, revelando sentido de número e sentido de operação.

Esta caracterização do sentido de operação e a sua importância no desenvolvimento do sentido de número dos alunos obriga a repensar a forma como é conduzido o ensino das operações. Segundo APM (1991) a compreensão das operações é uma competência fundamental para o conhecimento da Matemática, pelo que no ensino das operações a ênfase deve ser colocada nos conceitos, nas relações e nos significados e menos no cálculo. De acordo com McIntosh, Reys e Reys (1992), nas primeiras abordagens o fundamento conceptual para as quatro operações fundamentais é assegurado, a par com o desenvolvimento de competências específicas para realizar cada operação, através de procedimentos de papel e lápis. Os autores, contudo, ressaltam que com a evolução da tecnologia reduz-se a necessidade do cidadão recorrer ao cálculo através dos tradicionais algoritmos de papel e lápis mas as competências apresentadas, compreensão das operações, suas propriedades e relações revelam-se igualmente importantes quer para o uso das máquinas de calcular quer para cálculos através dos algoritmos tradicionais. "E, na vida de todos os dias, o recurso aos algoritmos tradicionais é cada vez menos importante, sendo maior o apelo à capacidade de estimar e de calcular de modo flexível" (Serrazina e Ferreira, 2006, p. 31). Desta forma é importante que o ensino das operações enfatize os vários elementos que constituem o sentido de operação. Durante muito tempo a Matemática escolar esteve associada ao treino dos algoritmos da adição, subtracção, multiplicação e divisão e os indivíduos utilizavam estes procedimentos para realizar cálculos o seu dia-a-dia. Actualmente, numa sociedade marcada pela evolução tecnológica, a presença das calculadoras e dos computadores suprimiu a necessidade dos cidadãos realizarem cálculos através de algoritmos de papel e lápis. Atendendo a esta realidade, e segundo Swoder e Schappelle (1994), a Matemática escolar deverá antes procurar articular o desenvolvimento do sentido de número e o ensino do cálculo de uma forma útil e significativa. Estes autores não defendem que se deixe de ensinar o cálculo através de algoritmos de papel e lápis mas consideram que é importante permitir aos alunos que descubram novas formas de realizar cálculos, focando-se mais no significado dos números e menos em actos rotineiros, difíceis de aprender e desnecessários. Para realizar cálculos com sentido de número é necessário que as crianças se libertem dos algoritmos tradicionais, pois muitos deles, segundo Swoder e Schappelle (1994), não correspondem à forma como pensamos os números. Também Fosnot e Dolk (2001) reforçam que os algoritmos não devem ser o objectivo principal do ensino dos números e operações dado que para realizar uma operação com sentido de número é necessário olhar primeiro para os números, jogar com as relações entre os números e de seguida procurar estratégias adequadas e eficientes para operar com eles. O uso dos algoritmos, a mesma série de passos, em todos os problemas é contraproducente ao cálculo com sentido de número. Contudo os alunos revelam dificuldade em compreender e utilizar procedimentos não formais registando-se uma "tendência generalizada para usar dois tipos de estratégias: informais com um baixo nível de sofisticação, limitando-se à contagem 1 a 1; formais utilizando o algoritmo" (Serrazina e Ferreira, 2006, p. 29). Estas conclusões dizem respeito à realidade portuguesa e emergem do projecto Desenvolvendo o Sentido de Número: Perspectivas e Exigências Curriculares, coordenado por Joana Brocardo, (também já designado por Competências de Cálculo e Sentido de Número) onde é reforçado o envolvimento destes dois conceitos: sentido de número e sentido de operação. De acordo com as autoras o desenvolvimento de competências de cálculo nas crianças deverá ter por base a compreensão dos números e a escolha de procedimentos de cálculo adequados ao contexto do problema e à natureza dos números envolvidos pelo que caberá ao professor facultar-lhes tarefas que não proporcionem apenas o treino mas correspondam a um avanço na construção do seu conhecimento e desenvolvimento do sentido de número e do sentido de operação. Por outro lado, o docente deverá desenvolver nos seus alunos a capacidade de reflectir sobre os procedimentos e processos utilizados, de modo a que possam optar pela melhor estratégia (Serrazina e Ferreira, 2006).

De acordo com o exposto nos parágrafos anteriores é, portanto, muito profunda e expressiva a relação que se estabelece entre sentido de operação e sentido de número assim como se revela significativo o contributo da compreensão das operações no desenvolvimento do sentido de número dos alunos. É neste sentido que, para caracterizar o sentido de número dos alunos do terceiro ciclo, esta investigação contempla também uma incursão no domínio das operações e da forma como os alunos entendem as operações.

Perspectiva Curricular – Números e Operações no Currículo de Matemática

> O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não

> basta aprender procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento.
>
> (Abrantes, Serrazina e Oliveira 1999, p. 46)

Como comentado nos subcapítulos anteriores, a sociedade contemporânea exige do indivíduo cultura matemática que contemple competências como a literacia matemática, sentido de número e sentido de operação. Contudo, durante um longo período de tempo, a Matemática escolar esteve associada ao treino dos algoritmos. Em Portugal o tema Números e Operações foi, ao longo de muitos anos, o tema dominante e o ensino centrava-se na aprendizagem de técnicas de cálculo. Actualmente, as exigências da democratizada, e tecnológica, sociedade ocidental levam-nos a perspectivar de uma forma diferente a abordagem dos Números e Operações. Reconhece-se a importância de desenvolver no indivíduo outro tipo de competências para além do domínio dos tradicionais algoritmos. A ênfase começa a ser colocada na compreensão dos conceitos e nos significados, destacando-se objectivos e propósitos, no que respeita ao ensino dos Números e Operações, relacionados com o desenvolvimento do sentido de número e sentido de operação dos alunos. Por outro lado, a evolução tecnológica tornou acessível a calculadora o que de facto leva a repensar a abordagem curricular dos Números e Operações nomeadamente no que respeita ao papel dos tradicionais algoritmos e à utilização da calculadora.

No que respeita à forma como em Portugal tem evoluído a presença dos Números e Operações no currículo Brocardo *et al.* (2006) destacam a preponderância do formalismo e do cálculo que marcaram a aprendizagem dos Números até finais dos anos 80. Esta perspectiva redutora da Matemática escolar fez notar a necessidade de renovação curricular que surgiu no início dos anos 90 com a implementação da reforma do sistema educativo. Esta reforma resultou na introdução de um novo currículo de Matemática, generalizado no ano de 1991. Segundo as autoras este novo documento constituiu um avanço significativo em relação ao currículo anterior atendendo às críticas de uma prática lectiva fortemente centrada no cálculo. Relativamente à ampliação do conceito de número e ao desenvolvimento do cálculo indica um conjunto de objectivos gerais, a desenvolver no terceiro ciclo:

Quadro 2 – *Objectivos Gerais – Matemática – 3ºciclo* (ME-DEB, 1991b, p.10)

Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo
Representar números reais sob diversas formas e utilizá-los para interpretar situações da vida corrente.
Dominar o cálculo com números racionais, por escrito, mentalmente ou usando calculadora, conforme seja mais conveniente.
Utilizar, de acordo com a situação, valores exactos ou aproximados, escolhendo a aproximação adequada.

Neste conjunto de objectivos encontram-se alguns importantes elementos do sentido de número embora a presença desta competência seja ainda muito tímida e não sejam referidos elementos fundamentais como a compreensão dos números e operações, o entendimento das relações que se estabelecem entre números e operações, a atribuição de significados no âmbito da resolução de problemas e a averiguação da razoabilidade dos resultados.

O sentido de número tendo sido, ao longo dos últimos anos, uma presença sistemática em documentos internacionais sobre o currículo de Matemática. É uma referência preponderante em Normas e Princípios para a Matemática Escolar (APM, 2007). Neste documento curricular é indicado o sentido de número como ponto-chave no que respeita ao trabalho a desenvolver com os alunos no âmbito dos Números e Operações, considerando-se três normas:

> Os programas de ensino do pré-escolar ao 12º ano devem habilitar todos os alunos para:
> - Compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos;
> - Compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si;
> - Calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis. (p. 34)

Nestas três normas já se perspectiva o sentido de número tendo em conta a caracterização e componentes apresentadas na fundamentação teórica apresentada no subcapítulo anterior, pois embora não se refiram aspectos da compreensão dos contextos e da adequação dos cálculos, estas normas têm em conta a compreensão e destreza com as operações, aspecto pouco considerado no quadro anterior, referente ao programa nacional.

O documento português de 2001, Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), que enquadra o programa de 1991 no que respeita a finalidades e competências, já inclui uma abordagem curricular mais próxima da perspectiva do NCTM (APM, 2007), integrando um conjunto mais abrangente de competências associadas ao desenvolvimento do sentido de número e sentido de operação dos alunos. O Currículo Nacional do Ensino Básico (ME-DEB, 2001) apresenta orientações curriculares na forma de competências articulando conhecimentos, capacidades e atitudes. Neste documento o ensino-aprendizagem dos Números e das Operações é perspectivado tendo em conta tópicos fundamentais considerados nas definições de sentido de número apresentadas na anterior revisão. Apesar de não ser usada explicitamente a expressão sentido de número, no currículo português, o sentido de número é uma competência a desenvolver ao longo de todos os ciclos e assume um papel importante na abordagem dos Números e Operações como se pode analisar no quadro seguinte:

Quadro 3 – *Competências específicas – Matemática – Números e Operações* – (ME-DEB, 2001, p. 60)

Ao longo de todos os ciclos
A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações;
O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações nesses conjuntos;
A aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;
A sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir a razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem;

A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados.

No que respeita ao Números e Operações, e atendendo às competências especificas presentes no Quadro 3 a ênfase é colocada na ampliação do conceito de número e no desenvolvimento do sentido de número. O trabalho com os alunos deve fomentar e ampliar o seu conhecimento e destreza com os números e com as operações. Centra-se na compreensão dos números (atendendo a diferentes formas de utilização e representação, relações de ordem, grandeza absoluta e relativa, relações e propriedades) e das operações (relações e propriedades) assim como do contexto, desenvolvendo competências no âmbito da interpretação dos valores numéricos, da selecção/ adequação de estratégias e reconhecimento da razoabilidade de um resultado. Este quadro, referente a Números e Operações no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), apresenta competências específicas muito próximas das componentes do sentido de número referidas pelos autores apresentados na medida em que são considerados aspectos relativos ao conhecimento e destreza com os números; conhecimento e destreza com as operações e aplicação destas competências em situações problemáticas atendendo ao contexto e à adequação das operações e estratégias.

A par com as competências específicas indicadas no Quadro 3 no Currículo Nacional do Ensino Básico são referidas opções metodológicas que permitem uma nova abordagem dos Números e das Operações e que procuram contribuir para aprendizagens mais significativas:

> A ênfase da Matemática escolar não está na aquisição de conhecimentos isolados e no domínio de regras e técnicas mas sim na utilização da Matemática para resolver problemas, para raciocinar e comunicar (...)
>
> (ME-DEB, 2001, p. 58)

Neste documento preconiza-se uma Matemática escolar, e neste caso particular a aprendizagem dos Números e Operações, baseados em experiências matemáticas ricas e diversificadas, envolvendo a resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos, jogos. O treino de cálculos rotineiros, as regras e as técnicas são preteridos em relação a tarefas que permitam a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões. A utilização de materiais manipuláveis, da calculadora e do computador são fortemente recomendados o que faz com que o treino de algoritmos não se torne o propósito único do ensino das operações. A compreensão das operações em detrimento do treino de cálculos assim como a introdução da calculadora é um aspecto muito importante no que respeita ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos pois "os algoritmos, os procedimentos de manipulação algébrica, a elaboração de gráficos não se tornam um fim em si mesmos. A calculadora liberta os alunos de cálculos repetitivos e fastidiosos permitindo-lhes concentrarem-se na compreensão do seu significado e na sua interpretação em contexto" (Brocardo *et al.*, 2006, p.70).

O número e o sentido de número são trabalhados pelos alunos ao longo de todos os anos do ensino básico. As aprendizagens iniciais revestem-se de grande importância pois "a compreensão dos números e do sistema de numeração constitui o alicerce sobre o qual a maioria das capacidades matemáticas é construída" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.42).

O documento Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001) apresenta perspectivas e orientações metodológicas para a Matemática escolar, em particular para Números e Operações, mas a apresentação dos aspectos a abordar e a distribuição dos conteúdos e da abordagem proposta para cada ano de escolaridade é feita no programa nacional dos anos 90, ainda em vigor.

Atendendo ao programa oficial, os Números e Operações são introduzidos no primeiro ciclo assumindo, ao longo dos quatro anos, um papel importante na Matemática escolar. O programa do primeiro ciclo enfatiza como actividade fundamental a resolução de problemas que deverá estar presente no desenvolvimento dos tópicos, organizados em três blocos de conteúdos: Números e Cálculo; Forma e Espaço e Grandezas e Medidas.

Relativamente ao bloco Números e Cálculo é referida "a construção progressiva do conceito de número, a compreensão do sistema de numeração decimal e o domínio das operações aritméticas elementares" (ME-DEB, 1990, p. 172). O documento refere a realização de experiências de manipulação de objectos – agrupar, separar, ordenar, quantificar, contar, distribuir; o estabelecimento de relações entre os números; o aparecimento de cálculos com uma finalidade significativa assim como o fomento do cálculo mental. O cálculo mental irá permitir ao aluno compreender o número, utilizar de uma forma útil as propriedades das operações e fazer estimativas, desenvolvendo sentido crítico em relação aos resultados obtidos, através de algoritmos ou calculadora. É importante que os alunos reconheçam que a adequação de uma estratégia depende do contexto inerente à tarefa que têm que realizar:

> O uso de diferentes estratégias para chegar ao mesmo resultado ajuda os alunos a compreender o sentido de número e a desenvolver estratégias de cálculo mental.
> No dia-a-dia, a maioria dos cálculos que fazemos são mentais. Nem sempre se pode usar papel e lápis, nem é necessário. Em muitas situações a resposta não tem que ser exacta, mas basta uma aproximação.
>
> (Ponte e Serrazina, 2000, p. 156)

No programa oficial os algoritmos são considerados os mais importantes meios auxiliares de cálculo salvaguardando contudo a sua pouca relevância, na aprendizagem dos alunos, quando são utilizados apenas como treino de habilidades. A máquina de calcular é referida como auxiliar em cálculos morosos e como potenciadora de actividades de exploração e descoberta.

No primeiro ano os alunos começam por descobrir progressivamente os números, primeiro os números naturais e depois o zero: ler e escrever números, efectuar contagens, ordenar números, com recurso à recta graduada e orientada, adicionar e subtrair, estabelecer relações entre estas operações e praticar o cálculo mental com números pequenos. No segundo ano são introduzidos os ordinais e as contagens por ordem crescente e decrescente, de 5 em 5 e de 10 em 10. São aprofundadas as relações entre as operações adição e subtracção. O aluno deverá ser capaz de explorar e usar regularidades e padrões na adição e subtracção assim como decompor os números em somas, diferenças e produtos pois é introduzida a multiplicação e a tabuada e ainda a divisão como operação inversa da multiplicação. Durante o primeiro ciclo começam a ser abordados os números racionais nas representações *operador* e *número decimal*. No segundo ano aparece a multiplicação por 0,1 e os operadores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e no terceiro ano é utilizada a notação $\frac{1}{3}\times, \frac{1}{5}\times$ e $\frac{1}{10}\times$ para representar o inverso de $3\times, 5\times, 10\times$. Durante o terceiro ano são trabalhados os números decimais com um máximo de duas casas decimais - leitura e escrita dos números. No quarto ano já são trabalhados com três casas decimais, identificando-se ordens e classes da milésima ao milhão. São exploradas as equivalências entre $\times 0{,}01$ e $\div 100$, $\times 0{,}001$ e $\div 1000$, $\div 0{,}1$ e $\times 10$, $\div 0{,}01$ e $\times 100$ e $\div 0{,}001$ e $\times 1000$.

No que diz respeito às orientações metodológicas é dada ênfase às construções e descobertas individuais promovendo o desenvolvimento do cálculo mental e da estimação de ordens de grandeza (antes da realização do cálculo). É também fomentada a procura de diferentes estratégias e a contextualização do trabalho com os números tornando a aprendizagem significativa. Por outro lado, é referida a introdução da máquina de calcular como um auxiliar em cálculos morosos e como potenciadora de actividades de exploração e descoberta. Desta forma, no final do primeiro ciclo os alunos conhecem, ordenam e operam com os inteiros e decimais. Note-se que um dos conjuntos numéricos em que muitos alunos revelam dificuldades é o dos números decimais (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Como referem os autores, a aprendizagem dos números decimais não se reduz a conhecer nomes e algumas regras de cálculo, mas envolve a interiorização de um conjunto de relações, a ligação a outros conceitos como o de fracção, a visualização e a sua concretização em contextos do mundo real.

O programa oficial do primeiro ciclo inclui, portanto, conceitos e competências relativos a números, numeração e sentido de número. O programa, quer ao nível dos conteúdos, quer ao nível das metodologias, embora não de um modo explícito, contempla o desenvolvimento do sentido de número na medida em que atende à compreensão gradual dos significados dos números, desenvolvimento de relações numéricas, reconhecimento da grandeza relativa e estimação, conhecimento e compreensão das operações com números.

No segundo ciclo, o tema Números e Cálculo surge associado à ampliação do conceito de número e ao desenvolvimento do cálculo.

Quadro 4 – *Objectivos Gerais – Conhecimento* (ME-DEB, 1991a, p. 7)

Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo
· Representar números racionais absolutos sob diferentes formas e utilizá-los em situações diversificadas;
· Operar com números racionais absolutos, por escrito, mentalmente, ou usando calculadoras, conforme seja mais adequado;
· Representar e utilizar números inteiros relativos para interpretar situações da vida corrente;
· Adicionar e subtrair números inteiros relativos.

Os alunos revêem as operações adição, subtracção, multiplicação e divisão e suas propriedades. Nestes anos a abordagem dos números racionais assume um papel fundamental e os alunos aprendem a operar com os números racionais nas suas diferentes representações: fracção, razão, decimal e percentagem. Aprendem também a passar de uma representação para outra de forma a perceber as vantagens que cada uma dessas representações pode ter em situações concretas. A compreensão da relação entre as diferentes representações permitir-lhes-á estabelecer relações de ordem entre os números racionais e utilizar a respectiva simbologia. É, portanto, ao nível das diversas representações dos números que estes anos assumem um papel fundamental. Números e Cálculo é o tema forte do segundo ciclo onde se pretende ampliar o conceito de número. Contudo, no que respeita à abordagem dos racionais não negativos nos primeiro e segundo ciclos, como é referido em Monteiro e Pinto (2007), as fracções são apenas trabalhadas no final do quinto ano e não é estabelecida uma relação com o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo do terceiro e quarto anos com os números decimais. Parece notar-se uma pobre articulação dos dois ciclos. Segundo as autoras "sendo as fracções e os numerais decimais representações dos mesmos números (os racionais), a separação que tradicionalmente tem sido feita não parece adequada. É necessário que as diferentes representações destes números sejam trabalhadas em paralelo, inclusive que as percentagens façam parte das representações possíveis" (p.5).

Ainda no sexto ano são introduzidos os inteiros relativos e os conceitos de valor absoluto e números simétricos. Em relação às operações com estes números são trabalhadas a adição e subtracção.

Também nestes anos as orientações metodológicas sugerem a visualização das representações e a contextualização dos cálculos, promovendo a estimação e o cálculo mental. A calculadora assume-se igualmente como potenciadora de experiências de investigação de relações numéricas e das operações com números negativos. É referido que a introdução dos números negativos seja exemplificada através de situações quotidianas ou episódios da história da Matemática. Os alunos devem compreender os problemas que proporcionaram a criação dos conjuntos numéricos e como se relacionam estes conjuntos com aqueles que já conheciam. A história da evolução do conceito de número, incluindo os aspectos humanos a ela ligados ajuda os alunos a compreender essa evolução (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, pp.45,46).

À semelhança dos outros ciclos, o programa do terceiro ciclo está subdividido em temas ou blocos. No que respeita ao tema Números e Cálculo, este surge ao longo dos três anos mas com especial incidência no sétimo ano de escolaridade. Para este ano de escolaridade o documento apresenta um primeiro subcapítulo para *conhecer melhor os números* cujo objectivo é envolver os alunos em actividades e tarefas com números, explorando relações e propriedades: são referidos os conceitos de número primo e número composto, potências de expoente natural assim como a operação radiciação envolvendo a raiz quadrada e a raiz cúbica. Neste contexto os alunos trabalham com estimativas, arredondamentos e aproximações. É sugerida a utilização e familiarização dos alunos com a máquina de calcular, suas potencialidades e limitações. Mais uma vez é enfatizada a importância do cálculo mental e da estimação. Também no sétimo ano é proposta, através de situações da vida real, a abordagem dos números racionais relativos e operações com os racionais relativos: adição, subtracção, divisão e multiplicação. Note-se que neste ano de escolaridade surge uma considerável ampliação do conceito de número pois são introduzidos os racionais relativos e também os números irracionais, quando, de modo informal, no contexto de resolução de exercícios e problemas surgem a raiz quadrada e a raiz cúbica. Apesar das primeiras abordagens se revestirem de especial importância e os racionais serem introduzidos e trabalhados em anos anteriores, no terceiro ciclo, o programa oficial, remete-nos para a consolidação e ampliação do sentido de número dos alunos. Mais uma vez a expressão não surge de forma explícita no documento, mas encontramos claras (mas insuficientes) referências a aspectos muito importantes do sentido de número:

Quadro 5 – *Objectivos Específicos (7ºano) – Os números racionais* (ME-DEB, 1991b, p. 16)

Os números racionais

- Interpretar situações reais usando números relativos;
- Comparar e operar com números racionais representados sob diversas formas, escolhendo o tipo de cálculo adequado à situação (aproximado, exacto, mental, à mão, com calculadora);
- Traduzir dados de um problema de uma linguagem para outra (verbal, gráfica, simbólica) e calcular o valor numérico de expressões com variáveis.

Relativamente ao oitavo ano, e no que respeita a Números e Cálculo, é enfatizado o cálculo algébrico embora sejam propostos no programa oficial conteúdos relacionados com a ampliação do conceito de número e problemas com números. Em (ME-DEB, 1991b), em relação a Números e Cálculo, no oitavo ano de escolaridade é referido que: "através de novos problemas e novas actividades desafiadoras da sua imaginação e do seu raciocínio, o aluno vai calcular o m.d.c e m.m.c entre dois números, trabalhar com potências de expoente inteiro e utilizá-las principalmente na escrita de números muito grandes ou muito pequenos, continuar ou inventar sequências de números, descobrir novas potencialidades para a sua calculadora" (p.32). Os aspectos referidos no documento para este ano de escolaridade são as sequências de números; problemas envolvendo o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum; as potências de expoente inteiro: comparar, ordenar e operar com potências de expoente inteiro. Neste ano de escolaridade são introduzidas as potências de base 10 na escrita de números. Os alunos contactam então como uma nova forma de representar uma quantidade: a notação científica. Através da abordagem da escrita de números em notação científica os alunos serão confrontados com grandezas que assumem valores muito grandes ou muito pequenos. A introdução da notação científica para interpretar, comparar, ordenar ou estimar a ordem de grandeza destes números é uma importante oportunidade para ampliar o conceito de número, formas de representação e consequentemente desenvolver o seu sentido do número. É uma possibilidade riquíssima para trabalhar exemplos do quotidiano e promover articulações com outras disciplinas nomeadamente as Ciências Físico-Químicas e as Ciências Naturais.

Desta forma percebe-se uma articulação, no que respeita aos universos numéricos, dos programas dos vários ciclos. Os naturais e inteiros surgem no primeiro ciclo assim como os racionais absolutos, já através de várias representações: fracção, numeral decimal, representações visuais. No segundo ciclo são consolidados os conhecimentos dos racionais absolutos e introduzidos os inteiros relativos. No terceiro ciclo é dada continuidade ao trabalho iniciado no segundo ciclo com os números racionais. Introduzem-se os números racionais relativos (representação na recta, ordenação, valores aproximados, Q e subconjuntos de Q) e são exploradas as operações em Q (adição algébrica, multiplicação, divisão; propriedades) e no nono ano são introduzidos os números reais.

No nono ano surge o conjunto dos números reais e os intervalos como subconjuntos de IR. Em relação ao conjunto IR, aos alunos é apresentada uma noção intuitiva de números reais isto é, como uma extensão dos números racionais quando se encontram dízimas infinitas que não são periódicas. O primeiro contacto dos alunos com os irracionais ocorre no sétimo ano quando, no contexto de resolução de exercícios e problemas, surgem a raiz quadrada e a raiz cúbica. Os valores aproximados são determinados com recurso à máquina de calcular e sem formalização mas no final do ciclo, no nono ano de escolaridade, o aluno irá dar "consistência à existência desses números, distinguindo-os dos números racionais, relacionando-os com dízimas infinitas e não periódicas" (ME-DEB, 1991b). É proposto no programa que em relação aos números reais, os alunos relacionem os números "com o tipo de dízimas que os representam, comparando-os, representando-os num eixo, usando aproximações adequadas a cada contexto." (ME-DEB, 1991b). O documento reflecte a importância desta unidade no último ano do terceiro ciclo, que permitirá aos alunos "tomar consciência e organizar o conjunto de todos os números com que têm vindo a trabalhar no ensino básico: o conjunto dos números reais." (ME-DEB, 1991b). Segundo Ferreira (2002) e tendo em conta as referências do programa, no final do ciclo, no nono de ano escolaridade, atendendo à situação apresentada e ao objectivo da tarefa, o aluno deve ser capaz de seleccionar o tipo de resultado que melhor se adequa - estimado, aproximado ou exacto e optar por uma forma de cálculo – mental, papel e lápis ou calculadora, revelando também competências de averiguação da razoabilidade das soluções obtidas no contexto do problema.

Mais uma vez, embora não surja de forma explícita, o sentido de número surge no programa oficial, e ainda em vigor, nomeadamente através do conhecimento e destreza com os números, uma das componentes de sentido de número, referida em McIntosh, Reys e Reys (1992). No final do terceiro ciclo os alunos conhecem e operam com números dos conjuntos IN, Z, Q e IR e no décimo segundo ano de escolaridade serão introduzidos os números complexos.

Desta forma, desde o quinto ano até ao nono ano de escolaridade o *number sense* é trabalhado para que os alunos compreendam e apreciem a necessidade da existência de números para além dos números inteiros – números fraccionários, decimais, inteiros relativos e números racionais; desenvolvam e usem relações de ordem assim como alarguem a sua compreensão das operações para estes números (APM, 1991, p.109).

Pelo exposto o desenvolvimento do sentido de número presente nos programas oficiais portugueses, atendendo a que estes devem ser interpretados tendo em conta as indicações de Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), está em concordância com as definições apresentadas anteriormente e contemplando as várias componentes que caracterizam o sentido de número de um aluno embora a expressão sentido de número não seja usada de forma explícita em nenhum dos documentos portugueses referidos.

Em 2007, a Direcção Geral da Inovação e do Desenvolvimento Curricular preparou um Reajustamento do Programa de Matemática para o Ensino Básico. Este novo programa, está a ser experimentado em escolas-piloto e entrará em vigor no ano lectivo 2010-2011. Organizado por ciclos, e não por anos de escolaridade, e estruturado em quatro grandes temas: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados, este novo documento contem referências explícitas ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos e refere de uma forma mais sistemática a compreensão dos números e a compreensão das operações, elementos importantes do sentido de número. Neste novo programa o tema, presente em todos os ciclos, aparece com a designação Números e Operações enquanto que no programa de 1991 era denominado Números e Cálculo. Este aspecto denota reflexão sobre a importância do sentido de operação na Matemática escolar. Segundo o documento, no ensino básico, o estudo dos Números e Operações tem por base três ideias fundamentais: "promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência do cálculo" (ME-DGIDC, 2007, p. 7). É, portanto, usada uma referência clara ao desenvolvimento do sentido de número dos alunos como finalidade na abordagem dos Números e Operações. Este documento acrescenta também aspectos muito importantes no que respeita a orientações metodológicas gerais que na revisão teórica do subcapítulo anterior surgiram como promotoras e potenciadoras do desenvolvimento do sentido de número nos alunos. São referidas a resolução de problemas, as actividades de investigação, os projectos, o confronto de resultados e a discussão de estratégias valorizando o cálculo mental e preconizada a utilização da calculadora e outras tecnologias:

> Ao longo de todos os ciclos os alunos devem usar a calculadora e computadores na realização de cálculos complexos (...) o seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. A calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição do cálculo mental.
>
> (ME-DGIDC, 2007, p. 9-10)

Em relação ao ensino básico (primeiro, segundo e terceiro ciclos) o novo programa, para Números e Operações, apresenta como propósito principal de ensino "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (ME-DGIDC, 2007, p. 13; 32; 48).

No que respeita às competências de cálculo dos alunos, embora o actual programa fomente o desenvolvimento do cálculo mental e da estimação assim como o uso de outras estratégias de cálculo a par com tradicionais algoritmos ao longo de todos os anos do primeiro ciclo do Ensino Básico, o novo programa remete apenas para os terceiro e quatro anos a compreensão e uso dos algoritmos para as operações adição, subtracção, multiplicação e divisão. Nos primeiro e segundo anos a abordagem proposta envolve o uso de outras estratégias:

> Nos dois primeiros anos, valoriza-se o cálculo numérico na representação horizontal, permitindo que seja levado a cabo um trabalho consistente com os números e as operações ligado ao desenvolvimento do sentido de número (...) devem ser trabalhadas diferentes estratégias de cálculo baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações.
>
> (ME-DGIDC, 2007, p. 13-14)

Todo o documento promove a articulação entre os conhecimentos adquiridos em cada ciclo. No primeiro ciclo os alunos desenvolvem o sentido de número e a compreensão das operações elementares e a destreza de cálculo com números naturais e racionais não negativos na representação decimal sendo que no segundo ciclo esta compreensão e destreza são aprofundadas e estendidas aos números inteiros e racionais não negativos na forma de fracção sendo explorados os seus múltiplos significados: quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador. Contudo, neste novo Programa os números racionais não negativos são, ainda no primeiro ciclo, representados por fracções e decimais, embora as operações sejam trabalhadas apenas na forma decimal. Um dos objectivos específicos referidos para o primeiro ciclo é "compreender, através da exploração intuitiva de problemas, fracções com os significados quociente, parte-todo e operador" (DGIDC, 2007, p.19). Esta mais forte presença da compreensão das fracções e das duas alternativas e complementares representações dos racionais (fracção e decimal) no primeiro ciclo permite colmatar a valorização da representação decimal em detrimento da fraccionária referida em Ponte (2006) e em Monteiro e Pinto (2005) em relação ao programa anterior e às práticas lectivas: "a representação através do numeral decimal é a mais usada e raramente é feita a conexão entre as duas representações." [em relação à décima como operador 1/10 e o numeral decimal 0,1] (Monteiro e Pinto, 2005, p. 98). A tradicional separação das representações decimal e na forma de fracção dos racionais é igualmente focada em Monteiro e Pinto (2007).

Por outro lado, a presença das fracções nos primeiros anos de escolaridade permite também articular melhor o sentido de número racional dos alunos entre o primeiro e o segundo ciclos. Por exemplo, neste novo programa é reconhecido que as crianças podem, desde muito cedo trabalhar a noção de metade e de quarta parte, através de problemas e introduzindo as fracções nos primeiros anos de escolaridade, como é sugerido em Monteiro e Pinto (2007). Segundo Monteiro e Pinto (2007) as fracções podem ser abordadas nos dois primeiros anos de forma intuitiva, através da resolução de problemas que conduzam à linguagem das fracções, sendo posteriormente introduzidas, de forma progressiva, as simbologias formais. Em (ME-DGIDC, 2007) pode ler-se, como objectivo específico para o primeiro ciclo, em relação aos números racionais não negativos: "identificar a metade, a terça parte, a quarta parte, a décima parte e outra partes da unidade e representá-las na forma de fracção" (p.17). Desta forma os alunos trabalham, já no primeiro ciclo, paralelamente com as formas decimal e de fracção dos racionais o que permite uma abordagem complemente diferente dos racionais em relação à proposta no programa em vigor.

O estudo dos números e operações é alargado no terceiro ciclo considerando-se os inteiros e racionais, positivos e negativos, passando-se à introdução dos irracionais e formalizando o conjunto dos números reais. Neste último ciclo, em relação a Números e Operações são enunciados no novo programa os seguintes objectivos gerais de aprendizagem:

Quadro 6 – *Objectivos Gerais de Aprendizagem (3°ciclo) – Números e Operações* (ME-DGIDC, 2007, p. 48)

Objectivos gerais de aprendizagem
Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:
· Compreender e ser capazes de usar as propriedades dos números inteiros e racionais, e desenvolver a noção de número real;
· Ser capazes de operar com números racionais, usar as propriedades das operações no cálculo e compreender os seus efeitos nos números;
· Ser capazes de estimar e calcular resultados aproximados, de apreciar ordens de grandeza e de avaliar a razoabilidade de um resultado;
· Desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;
· Ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.

Relativamente aos objectivos gerais apresentados neste quadro, respeitantes a Números e Operações no novo programa de Matemática, percebe-se uma clara consonância com a estrutura de sentido de número de McIntosh, Reys e Reys (1992), apresentada no Quadro 1. Estes objectivos abrangem os três blocos referidos pelos autores: (1) Conhecimento e destreza com os números; (2) Conhecimento e destreza com as operações; (3) Aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo. Por outro lado percebe-se uma implícita presença do sentido de operação na medida em que os objectivos apresentados contemplam a compreensão da operação (1); a percepção dos modelos e das propriedades de uma operação (2); a identificação das relações entre as operações (3) e a compreensão intuitiva dos efeitos de uma operação num par de números (4), componentes do sentido de operação enunciadas em APM (1991).

Neste novo programa percebe-se uma alteração dos propósitos do ensino-aprendizagem dos Números e Operações. Neste grande domínio da Matemática escolar a ênfase passa a ser colocada no desenvolvimento do sentido de número e na compreensão dos números e das operações. É reconhecido o sentido de número como um elemento chave da literacia matemática surgindo de forma explícita ao longo de todo o documento e é proposta uma abordagem articulada desta competência ao longo de todos os ciclos do ensino básico.

Os Números Racionais

A perspectiva curricular anteriormente apresentada revela uma forte presença dos Números e Operações na Matemática escolar desde o primeiro ao nono ano de escolaridade. O desenvolvimento do sentido de número é, no novo programa, uma finalidade articulada ao longo de todos os ciclos do ensino básico, onde se promove a ampliação do conceito de número fortemente assente na compreensão e manipulação dos números racionais.

Esta investigação assenta na compreensão do desenvolvimento do sentido de número dos alunos no sétimo ano de escolaridade pelo que, atendendo à perspectiva curricular apresentada nos conduz ao estudo do desenvolvimento do sentido de número racional dos alunos. Desta forma é necessário considerar, na revisão de literatura, alguns aspectos relacionados com o ensino dos racionais assim como com a aprendizagem destes números, isto é, a forma como os alunos compreendem e atribuem significados aos racionais em contexto escolar.

O conceito de número racional é um dos mais complexos mas também mais importantes conceitos da Matemática escolar. Na literatura são referidas dificuldades conceptuais dos alunos na abordagem dos números racionais o que se reflecte no seu sentido do número. A próxima incursão teórica pretende ser uma breve revisão sobre a presença dos racionais nos universos numéricos, considerando a definição de Caraça (2005) e incluindo a proposta de Behr *et al.* (1983) na definição e caracterização dos racionais através de um conjunto de subconstructos. Estes subconstructos, essenciais na construção do conceito de número racional dos alunos, revelam-nos a complexidade do conceito de número racional e serão analisados individualmente, assumindo-se também como diferentes significados para as fracções. Estes diferentes significados são referidos na literatura como originadores de confusões e erros comuns, que associados a determinadas práticas lectivas, comprometem a compreensão do conceito e o sentido de número racional dos alunos. Paralelamente será proporcionado um entendimento sobre algumas das dificuldades, reconhecidas na literatura, dos alunos na abordagem dos racionais e dos diferentes significados das fracções. Esta revisão tem como principais referências dois projectos de investigação no âmbito do ensino e aprendizagem dos números racionais: o projecto *RNP – Rational Number Project*, projecto norte-americano financiado pela National Science Foundation, que tem como investigadores principais, Merlyn J. Behr, Kathleen Cramer, Guershon Harel, Richard Lesh e Thomas Post e o Projecto Desenvolvimento do Sentido do Número – Perspectivas e Exigências Curriculares, projecto conjunto da ESE de Lisboa, ESE de Leiria e ESE de Setúbal, financiado pela FCT (2003-2007).

O Conjunto dos Números Racionais

Aos alunos são apresentados ao longo da escolaridade vários conjuntos numéricos. À semelhança do percurso da história da Humanidade, associando a contagens de objectos de uma colecção, os alunos contactam em primeiro lugar com os números naturais. Ainda no primeiro ciclo são introduzidos o inteiro zero e os racionais absolutos, mas como já foi referido apenas na representação numeral decimal e operador. Só no segundo ciclo contactam e operam em todo o Z sendo introduzidos os inteiros relativos. No final do segundo ciclo são exploradas as operações em Q_0^+, com os racionais escritos na forma de fracção e numeral decimal. O trabalho com os racionais é estendido aos racionais relativos no sétimo ano e nesta altura os alunos estudam todas as operações em Q. É proposta aos alunos uma sistematização dos seus conhecimentos sobre números e conjuntos numéricos sendo confrontados com a existência de três universos numéricos IN, Z e Q, reconhecendo os elementos que constituem cada conjunto assim como suas características e propriedades. Apenas no nono de escolaridade é introduzido o conjunto dos números reais e no décimo segundo ano os números complexos.[1]

[1] No novo programa de Matemática do Ensino básico, os conteúdos a abordar estão organizados por ciclos e não por anos de escolaridade. Neste sentido, abordagem dos conjuntos numéricos é proposta por ciclos: 1° ciclo – são introduzidos os números naturais e os racionais não negativos; 2° ciclo é dada continuidade ao trabalho desenvolvido com os naturais e os racionais não negativos e é introduzido o conceito de número inteiro e o conjunto dos números inteiros; 3° ciclo – são introduzidos os racionais relativos e os alunos operam em Q e é introduzido o conceito de número real.

A forma como são introduzidos os vários tipos de números ao longo dos vários anos de escolaridade proposta pelo programa em vigor está em consonância com a forma como surgiram estes números ao longo da história do Homem. Segundo Caraça (2005) o número natural não é um produto intelectual, independente da experiência. Estes números surgem da prática diária de contagens nos primórdios da Humanidade. Neste sentido a sucessão dos naturais considera apenas os inteiros positivos. Só muito posteriormente, naquilo que pode ser considerado "um dos actos mais audazes do pensamento" (J. Pelseneer citado em Caraça (2005), p. 6) é criado o símbolo 0 para representar o nada e os números relativos. Mas, para além do problema da contagem, o Homem é também confrontado com o problema da medição, a necessidade de medir. Contudo a medição pressupõe o estabelecimento de uma unidade de comparação, uma unidade de medida da grandeza a considerar. Emerge da medida a necessidade de um novo campo numérico: os racionais (Caraça, 2005). O conjunto dos racionais compreende o conjunto dos inteiros e os números fraccionários (relativos). Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) os alunos devem ser confrontados com o conhecimento destas "crises" que conduziram à criação de novos conjuntos numéricos explorando situações que reflictam a necessidade de números para além dos números inteiros que já conhecem (por exemplo, quando se pretende dividir duas tartes por sete pessoas).

Mas o que são números racionais? Como definir número fraccionário? Tomemos em consideração a proposta de definição de Caraça (2005): sejam dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u, $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u. Diz-se por definição que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se $\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{CD}$, quaisquer que sejam os inteiros m e n, n não nulo. Nestas circunstâncias se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n o número diz-se fraccionário. O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese racional. Neste contexto surge este novo campo numérico que envolve também quantidades não inteiras, os números fraccionários. A designação números fraccionários pode ser confundida com fracções mas note-se que nem todas as representações na forma de fracção dos racionais dizem respeito a números fraccionários. Existem fracções que representam quantidades inteiras. O conceito de número fraccionário revela-se sempre muito confuso para os alunos. Nesta proposta de definição dos racionais, Caraça (2005) esclarece a designação fraccionário, apresentando os fraccionários como um subconjunto de Q, o subconjunto de Q constituído pelas quantidades não inteiras. Esta proposta de definição dos números racionais enfatiza a representação na forma de fracção atribuindo-lhe o significado de quociente. Definindo os números racionais através da medida, estabelece-se naturalmente uma correspondência entre o conjunto dos pontos da recta numérica e os elementos do campo numérico racional. Ora é necessário ter em conta que entre dois quaisquer pontos da recta existe sempre uma infinidade de pontos, por mais próximos que eles estejam. O conjunto Q é denso o que não acontece com o conjunto dos inteiros.

O Conceito de Número Racional

> "É verdade que a contagem fornece um importante modelo intuitivo para a compreensão dos números naturais e a recta numérica fornece uma boa base de entendimento para os números relativos. No entanto, as coisas são muito mais complicadas para os números racionais (...) estes números admitem uma variedade de interpretações (parte-todo, quociente, razão, medida, operador...) e requerem portanto, uma diversidade de modelos intuitivos".
>
> (Ponte, 2006, p.7)

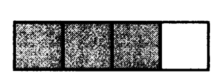
O conceito de número racional é complexo e a sua compreensão pressupõe não só o conhecimento dos seus vários subconstructos mas também da forma como se inter-relacionam, proporcionando o desenvolvimento de estruturas mentais importantes para futuras aprendizagens. A construção do conceito de número racional reveste-se de grande importância no sentido em que (a) numa perspectiva prática, o desenvolvimento deste conceito melhora a capacidade dos alunos em compreender e lidar com situações da vida real; (b) numa perspectiva psicológica, proporciona o desenvolvimento de estruturas mentais necessárias ao progresso intelectual das crianças e (c) numa perspectiva matemática, a compreensão dos racionais constitui a base para mais tarde serem trabalhadas as operações algébricas (Behr *et al,* 1983). De acordo com Monteiro e Pinto (2007) os conceitos não se desenvolvem isoladamente e no caso dos racionais a sua compreensão envolve os conceitos de multiplicação, divisão, razão e proporções.

A definição de Caraça (2005) toma o racional na perspectiva de quociente e medida mas este conceito envolve outros subconstructos que analisaremos a seguir. Behr *et al.* (1983) identificam seis formas distintas de interpretar os racionais que designam por subconstructos: relação parte-todo (1), decimal (2), rácio (3); quociente (4); operador (5) e como uma medida de quantidades contínuas e discretas (6). Para que os alunos obtenham uma completa compreensão dos números racionais é necessário confrontá-los com vários subconstructos do número racional (Kieren, citado por Behr *et al.* (1992)). É necessário ter em conta que algumas dificuldades dos alunos em compreender os números fraccionários são identificadas com os diferentes significados das fracções, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos (Monteiro e Pinto, 2005).

A relação parte-todo

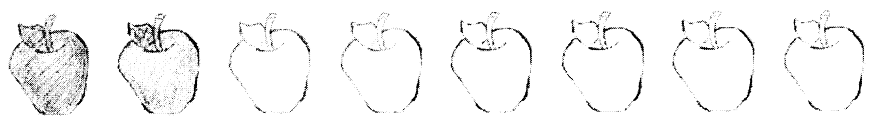
Segundo Behr *et al.* (1983), a interpretação parte-todo dos números racionais consiste na partição, quer de quantidades contínuas quer de um conjunto discreto de objectos, em partes ou subconjuntos iguais.

Considera-se a relação parte-todo de uma unidade contínua quando, por exemplo, se tem uma barra com três quartos pintados:



Neste caso tem-se uma comparação entre a parte e o todo considerando este a unidade. É necessário ter em conta o número de partes em que a unidade está dividida e o número de partes escolhidas.

Considera-se a relação parte-todo de uma unidade discreta quando se tem por exemplo uma parte de um conjunto de oito maçãs: um quarto das maçãs está pintado.



Neste caso o todo é a colecção das oito maçãs.

Numerais Decimais

Os números racionais são representados na base 10 atendendo ao sistema de numeração decimal.

Rácio

Quando se interpreta o número racional como um rácio é considerada uma relação que se estabelece entre duas quantidades referentes a duas partes diferentes de um todo. Esta relação surge na forma $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros e $q \neq 0$. Por exemplo, numa colecção de oito maçãs, em que três são da variedade Starking e cinco são da variedade Golden, a fracção $\frac{3}{5}$ lê-se três para cinco e representa a razão entre o número de maçãs *Starking* e o número de maçãs *Golden* ou, por exemplo, a razão entre o número de rapazes e de raparigas de uma turma. Os autores distinguem rácio de *rate*, razão entre duas quantidades que definem uma nova grandeza, por exemplo a velocidade relativamente à distância e ao tempo (Oliveira, 1994).

O quociente entre dois números inteiros representado pela fracção a/b

De acordo com Behr *et al.* (1983), na interpretação relação parte-todo dos racionais a simbologia $\frac{a}{b}$ ou *a/b* é geralmente utilizada para considerar uma parte de uma quantidade singular enquanto que na interpretação como rácio, a representação $\frac{a}{b}$ ou *a/b* é usada para estabelecer uma relação entre duas quantidades mas esta mesma simbologia, $\frac{a}{b}$ ou *a/b* pode ser usada como referência a uma operação. Neste caso $\frac{a}{b}$

indica uma divisão, *a* divide por *b*, um subconstructo dos números racionais. Fazendo a divisão pode-se representar o racional na forma de numeral decimal. Segundo os autores, interpretar $\frac{8}{4}$ ou $\frac{2}{3}$ como o resultado da divisão indicada corresponde a estabelecer uma equivalência entre $\frac{8}{4}$ e 2 ou entre $\frac{2}{3}$ e 0.(6).

Operador

Interpretar o racional como um operador requer uma interpretação algébrica de *a/b*, tomando-o como uma função que transforma os objectos considerados. Como transformador de figuras geométricas o operador amplia ou reduz os comprimentos; considerado como operador partitivo multiplicativo transforma o cardinal de um conjunto discreto. O numerador indica uma multiplicação e o denominador uma divisão. O número racional *a/b* transforma um conjunto com *n* elementos num conjunto com *an* elementos e depois este número é reduzido para *an/b*.

Medida

A interpretação do número racional como medida proposta em Behr *et al.* (1983) faz corresponder o número racional a uma coordenada linear. Os números racionais são considerados pontos numa recta numérica, enfatizando noções de densidade, vizinhança e distância. Atendamos mais uma vez à definição de Caraça (2005): Seja o racional $r = \frac{m}{n}$ e uma recta R sobre a qual se tomou um ponto O, arbitrário, como origem e um segmento $\overline{OA}$ como unidade. Dividindo $\overline{OA}$ em *n* partes iguais e a partir de O, para a direita, marquemos *m* dessas partes obtendo o ponto B. O número *r* é a medida do segmento $\overline{OB}$ tomando $\overline{OA}$ como unidade.

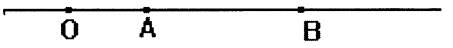


Figura 1 – A correspondência $Q_0^+ \leftrightarrow P_0$ (Adaptado de Caraça (2005))

Como já foi referido a compreensão dos números racionais pressupõe o entendimento dos vários subconstructos dos números racionais mas também das relações que se estabelecem entre eles. Em Behr *et al.* (1983) os conceitos partição e parte-todo, relativos a quantidades contínuas e discretas, são pilares do desenvolvimento do conceito de número racional e devem constituir o ponto de partida para o conhecimento dos racionais e de outros subconstructos. Por outro lado, o subconstructo rácio é referido como adequado para desenvolver o conceito de equivalência e os subconstructos operador e medida apresentados como potenciadores do desenvolvimento e compreensão das operações adição e multiplicação. Esta teia de relações entre os subconstructos dos números racionais e outros elementos da Matemática escolar e a forma como pode ser perspectivado o ensino dos racionais de forma a contemplar a sua natureza complexa e as diferentes formas que assumem, estão ilustrados no esquema seguinte, adaptado de Behr *et al.* (1983)

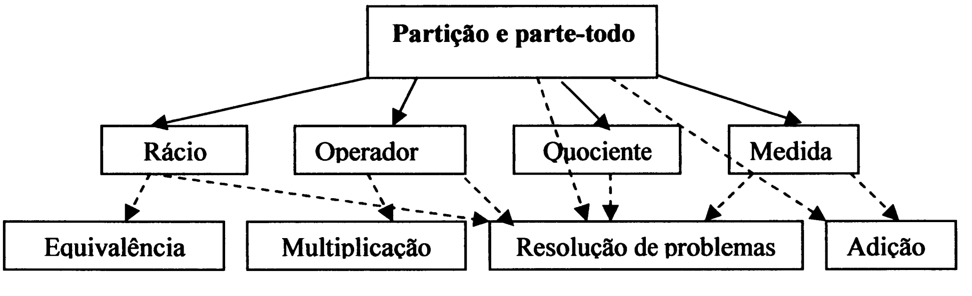


Figura 2 – Esquema conceptual para o Ensino dos Números Racionais (Adaptado de Behr *et al.* (1983))

Contudo a compreensão dos racionais, dos seus subconstructos e da forma como se relacionam, reveste-se de alguma complexidade e a forma como têm sido abordados os racionais origina algumas confusões que ultrapassam as primeiras aprendizagens e prolongam-se por toda a vida escolar (Monteiro e Pinto, 2006). Os alunos revelam dificuldades na transição dos números inteiros e decimais para o conjunto dos racionais e na interiorização de conceitos como: número inteiro, número decimal, operações com números inteiros e números decimais e fracção (Pinto, 2004).

Por um lado Monteiro e Pinto (2005) destacam a ênfase colocada nos aspectos formais do estudo das fracções e dos decimais através da aprendizagem dos algoritmos das operações pois a compreensão dos conceitos e a forma como se relacionam é preterida em relação ao "treino" dos procedimentos e utilização de regras. Segundo as autoras o facto dos alunos dominarem os cálculos rotineiros com racionais não implica que os alunos compreendam o que fazem. " O desenvolvimento de um conceito ou de uma teia de conceitos tem de estar enraizado em situações concretas e provavelmente a ênfase não pode ser desde logo dada à notação simbólica e aos algoritmos" (Monteiro e Pinto, 2005, p.96). Monteiro e Pinto (2006) consideram que a representação simbólica tradicional é introduzida demasiado cedo o que constitui, segundo as autoras, um obstáculo à compreensão do conceito de número racional. A apreensão de um conceito deve ser potenciada por modelos intuitivos, representações informais e em contextos da vida real surgindo, posteriormente, a notação simbólica e os algoritmos. Por outro lado, Monteiro e Pinto (2005) referem que, através da análise dos manuais do segundo ciclo, se conclui que a abordagem das fracções através do significado parte-todo é não só a preferida como denunciam a quase inexistência de outras.

Em Monteiro e Pinto (2007) é considerado que as várias representações dos racionais e os diferentes significados das fracções conduzem a um conjunto de erros e confusões dos alunos na compreensão do número e no desenvolvimento do sentido de número racional. "O facto de haver várias representações para estes números (fracção, numeral decimal) acrescenta aspectos particulares que dificultam a sua compreensão" (Monteiro e Pinto 2007, p.17). Em Monteiro e Pinto (2007) são identificados como mal entendidos mais comuns, relativamente aos números racionais, e que no diz respeito à forma decimal, a relação entre o número de algarismos e a quantidade; a dificuldade em perceber a densidade dos racionais, por exemplo perceber que entre 0,1e 0,2 existem uma infinidade de números racionais. A densidade do conjunto dos racionais, o facto de entre quaisquer dois racionais, ser possível identificar um outro racional, é uma característica que o distingue do conjunto dos inteiros onde é sempre possível identificar o sucessor de qualquer número. O facto do conjunto dos racionais ser um conjunto denso gera conflitos conceptuais nos alunos. Do mesmo modo são referidos erros relativos às noções de décima e centésima, pois segundo as autoras muitos alunos consideram que o numeral decimal representa dois números inteiros separados por uma vírgula, aspecto também referido em Oliveira (1994). "As crianças pensam que os números depois da vírgula representam um número diferente que também tem dezenas, unidades, etc." (p.137). Igual problema se coloca em relação às fracções. A representação dos racionais na forma de fracção revela-se confusa para os alunos pelo facto desta representação envolver dois números. Os alunos revelam dificuldades em perceber que não estão perante dois números (Monteiro e Pinto, 2005). As fracções envolvem dois números inteiros que estão relacionados. Muitas vezes os alunos ignoram o rácio numerador – denominador e na indicação de fracções equivalentes consideram os numeradores como constituindo um padrão e os denominadores outro. Também é usual adicionarem numeradores e adicionarem denominadores como se tratasse de números inteiros (Oliveira, 1994).

Pelo facto de poderem ser usadas para expressar diferentes relações as fracções levantam algumas dificuldades aos alunos. De um modo geral a maior parte destes erros revelam que os alunos têm dificuldade em passar do conjunto dos inteiros para o conjunto dos racionais e que as representações que usam são utilizadas e desligadas das quantidades que representam (Monteiro e Pinto, 2007). As autoras destacam também a ênfase das práticas lectivas no treino de algoritmos e a incapacidade dos alunos em lidar com os diferentes significados das fracções assim como a compreensão da unidade tomada, o todo que é fraccionado. Segundo Oliveira (1994) os problemas com o não reconhecimento da unidade surgem também quando é usada a representação através da recta numérica. Por outro lado, Monteiro e Pinto (2006) destacam a pouca conexão que é feita entre as várias representações dos racionais. O facto dos decimais, as fracções, as razões e percentagens surgirem no currículo como assuntos separados dificulta a compreensão do conceito de racional, dos seus subconstructos e a relação que se estabelece entre eles. Estas autoras referem ainda, como factor a ter em conta na análise das dificuldades conceptuais em relação aos racionais, o facto dos alunos contactarem demasiado tarde com a representação de números não inteiros em forma de fracção. No actual programa do 2º ciclo este aspecto é remetido para o final do 5ºano de escolaridade e muitas vezes trabalhado apenas no 6ºano de escolaridade. Como já foi referido, na revisão teórica da perspectiva curricular do ensino dos números racionais, a abordagem tardia das fracções foi um aspecto tido em conta na elaboração do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, onde se propõe que os alunos trabalhem, desde o primeiro ciclo e paralelamente, com as formas decimal e de fracção dos racionais.

Os erros e confusões frequentes dos alunos em relação ao reconhecimento e manipulação dos números racionais e as práticas lectivas centradas no treino do cálculo de papel e lápis, com pouca articulação entre os subconstructos dos racionais, a abordagem inicial dos racionais centrada exclusivamente na representação decimal, comprometem a compreensão dos números racionais e operações aritméticas com números racionais, isto é, o desenvolvimento do sentido de número racional dos alunos.

Capítulo III

Metodologia

Esta investigação pretende caracterizar o sentido de número e o sentido de operação de alunos do sétimo ano de escolaridade do Ensino Básico. Mais especificamente procura-se compreender o reconhecimento e a utilização, por parte dos alunos, de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos assim como do significado e propriedades das operações nesses conjuntos.

Opções Metodológicas

O estudo centra-se no sentido de número e de operação e pretende-se uma análise interpretativa dos significados atribuídos pelos alunos aos números e às operações entre eles. A ênfase desta investigação é colocada no "como" e no "porquê" e não nos resultados ou produtos e, neste sentido, assume um carácter indutivo pois não se testam conjecturas definidas à priori. A investigadora procura recolher informação predominantemente descritiva, transcrições de entrevistas, transcrições de diálogos de aula, grelhas de observação de aulas, registos escritos dos alunos (questionários preenchidos, fichas de trabalho resolvidas), que permita compreender as representações dos alunos em relação aos números e às operações. O estudo diz respeito a este conjunto de alunos em particular e tendo em conta os seus objectivos impõe-se um contacto directo entre os intervenientes e a investigadora em ambiente de sala de aula.

É portanto uma investigação que se enquadra no paradigma qualitativo reunindo as cinco características, referidas por Bogdan e Biklen (1994), dos estudos de natureza qualitativa: (1) o ambiente natural dos intervenientes é a fonte directa dos dados e o investigador o principal instrumento de recolha; (2) os dados recolhidos são descritivos; (3) o interesse do investigador encontra-se nos processos e não nos produtos; (4) a análise dos dados é indutiva; (5) é dada grande importância aos significados atribuídos pelos participantes.

Atendendo ao contexto e objectivos do estudo e às considerações anteriores o estudo de caso revela-se o design de investigação mais adequado. Segundo Matos e Carreira (1994) o recurso a estudos de caso adapta-se a investigações que envolvam fenómenos que ocorrem num determinado contexto natural, neste caso a sala de aula, e que não se podem dissociar dele. De acordo com Ponte (1994) permitem compreender uma dada situação tendo em conta a sua especificidade, singularidade e características. Segundo o autor pode recorrer a diversos instrumentos e estratégias que permitem obter dados "com um forte cunho descritivo" (Ponte, 1994, p.4). Contudo, não se limitam a uma dimensão descritiva podendo assumir também uma dimensão analítica. Segundo Bell (1997) a vantagem do estudo de caso é possibilitar ao investigador a análise de casos ou situações específicas tendo em conta processos interactivos que se estabelecem e que não são perceptíveis em grandes estudos.

Neste sentido, na realização deste estudo, é adoptada uma metodologia de natureza qualitativa com recurso a estudos de caso. Esta investigação incide sobre uma turma de sétimo de ano, considerando três estudos de caso: a Inês, o José e a turma, a partir dos quais se procuram evidências sobre as questões do estudo.

Selecção dos Participantes

Tratando-se de um estudo de natureza qualitativa com recurso a estudos de caso, os alunos assumem um papel fundamental ao longo de toda a investigação pois os dados recolhidos têm por base as suas perspectivas e concepções dos números e das operações. Neste sentido foi necessário estabelecer alguns critérios para a escolha dos intervenientes de forma a conseguir reunir informação empírica significativa e diversificada que constitua um contributo para a análise interpretativa do sentido de número dos alunos.

Deste estudo fazem parte três elementos fundamentais: (1) a professora-investigadora, professora profissionalizada de Matemática do terceiro ciclo e ensino secundário; (2) uma turma do terceiro ciclo; (3) dois alunos dessa turma.

Relativamente à escolha do ano de escolaridade optou-se pelo sétimo ano de escolaridade. De uma forma explícita ou implícita os números e o sentido de número estão presentes nos documentos curriculares em todos os ciclos do ensino básico e devem ser trabalhados pelos alunos ao longo de todos os anos de escolaridade. Apesar da ênfase dos Números e Operações ser maior nos 1° e 2° ciclos, o sentido de número é uma "competência genérica que se desenvolve ao longo de todo o ensino obrigatório e não obrigatório e mesmo ao longo de toda a vida" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.45). Em relação ao 3° ciclo, no 7°ano, reconhece-se uma forte presença dos números e operações através de dois grandes temas: "Conhecer melhor os números" e "Os números racionais". Em mais nenhum ano do 3ºciclo os números e sentido número assumem tão forte peso. Ao procurar compreender como os alunos interpretam as formas de representação dos números e como operam com eles ressalta a importância das primeiras abordagens e a forma como influenciam a percepção que alunos têm dos números e das operações. Desta forma optou-se pelo 7ºano de escolaridade pois assim é possível caracterizar o sentido de número dos alunos ao iniciar o terceiro ciclo, procurando perceber as aprendizagens já realizadas no que respeita ao desenvolvimento do sentido de número.

Em relação à selecção da turma atendeu-se a factores de natureza prática, inerentes à contratação profissional da investigadora no ano lectivo em que decorreu o estudo.

Nesta investigação foram considerados como estudos de caso a turma e, dentro da turma, foram seleccionados dois alunos, que constituíram os outros dois estudos de caso. A escolha destes dois alunos teve em conta alguns parâmetros de carácter geral mas também alguns critérios mais específicos atendendo à natureza do estudo. Considerou-se importante que os alunos possuíssem pelo menos um nível médio de desempenho a Matemática e que manifestassem alguma empatia em relação à disciplina, sendo desejável que pertencessem a grupos, de trabalho na sala de aula, diferentes. Sendo a entrevista com tarefas uma fonte importante de recolha de dados deste estudo, na escolha dos dois alunos foi necessário ter em conta a capacidade de comunicação e expressão em língua materna assim como a capacidade de comunicação de raciocínios e procedimentos. Procurou-se seleccionar dois alunos que manifestassem algum à-vontade na comunicação oral e escrita, que conseguissem manifestar as suas opiniões e concepções e verbalizar a forma como pensam e resolvem as tarefas propostas. A selecção destes dois participantes atendeu aos aspectos já referidos tendo em conta a informação recolhida no contacto directo da investigadora com a turma e através de um inquérito (Anexo 1) aplicado no início do ano a todos os alunos da turma.

Recolha de Dados

Tratando-se um estudo de natureza qualitativa, a investigadora assume-se como principal instrumento de recolha dos dados. Os dados empíricos deste estudo constituem um conjunto diversificado de informação resultante de vários métodos de recolha: a) inquéritos – por questionário e entrevista com tarefas; b) observação da resolução das tarefas em ambiente de sala de aula; c) análise documental.

Questionário

Na fase inicial do estudo foi recolhida informação relativa aos alunos da turma através de um questionário (Anexo 1). Procurou-se perceber a opinião dos alunos sobre a Matemática, a sua relação com a Matemática, a forma como encaram a sua aprendizagem e também averiguar se reconhecem a importância da literacia quantitativa na sociedade actual e dos contributos da Matemática para a resolução de problemas do quotidiano. Para além de permitir identificar concepções dos alunos da turma sobre a Matemática, este questionário facultou informação relevante para a escolha dos alunos para o estudo de caso. Como já foi referido, e porque se trata de uma investigação de natureza qualitativa, procurou-se, com este questionário, através de questões de resposta aberta, reconhecer os alunos com menos dificuldades na comunicação oral e escrita o que enriquece a entrevista e a própria investigação. A realização do questionário e seus objectivos foram comunicados antecipadamente aos encarregados de educação que autorizaram a participação dos alunos.

Entrevista com Tarefas

Questionar as pessoas é, de acordo com Tuckman (2005), o processo mais directo para conseguir informação sobre um determinado fenómeno, obtendo-se como resposta as percepções e interesses individuais de cada entrevistado. Neste estudo a entrevista constituiu um elemento importante no processo de recolha dos dados pois permitiu obter informações mais detalhadas sobre as perspectivas dos alunos em relação ao problema estudado. Contudo, neste caso a entrevista não é a estratégia dominante de recolha de informação funcionando em conjunto com os registos da observação das aulas, resultantes da observação participante, com os documentos produzidos pelos alunos e com os questionários. Segundo Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990) um número significativo de investigações qualitativas associam a técnica da entrevista à observação participante e análise documental com o objectivo de triangular os dados podendo também nela emergir novos contributos.

A observação da resolução das tarefas durante as aulas de trabalho de grupo levantou algumas dificuldades na compreensão e registo dos processos usados pelos alunos. Neste sentido optou-se por realizar uma entrevista com tarefas de modo a obter mais informação sobre o "como" e o "porquê". Durante a entrevista com tarefas foi proposto aos alunos Inês e José que resolvessem alguns exercícios/ problemas (guião da entrevista com tarefas – Anexo 2) e que explicassem como procederam e porque resolveram daquela forma. Foi possível recolher dados sobre as percepções dos alunos mas também sobre as razões que os levaram a adoptar certos procedimentos. Estes contributos revelaram-se uma mais valia na compreensão do sentido de número e, em particular, do sentido de operação dos alunos.

As entrevistas, segundo Bogdan e Biklen (1994), tendo em conta o seu grau de estruturação, podem classificar-se de estruturadas, semi-estruturadas e não estruturadas. Nesta investigação foi realizada uma entrevista semi-estruturada, que de acordo com os autores, mesmo conduzida por um guião, permite ao investigador abordar outros tópicos, moldando o conteúdo no decorrer da entrevista. A entrevista com tarefas foi realizada em simultâneo aos alunos Inês e José, com o conhecimento e autorização dos encarregados de educação. Na preparação da entrevista e elaboração do seu guião foram considerados cinco blocos temáticos apresentados no Quadro 7:

Quadro 7 – *Blocos temáticos considerados no guião da entrevista semi-estruturada*

Bloco A	Identificação – idade e ano de escolaridade
Bloco B	Concepções sobre a Matemática/ Reconhecimento da importância da literacia matemática/ Aplicabilidade dos conteúdos programáticos em situações quotidianas.
Bloco C	Sentido de número. Formas equivalentes de representar os números. Conjuntos numéricos.
Bloco D	Sentido de operação.
Bloco E	**Tarefas 1 e 2** (Sentido de número e sentido de operação).

Os cálculos que os alunos fizeram em papel durante a entrevista foram recolhidos. A entrevista foi conduzida pela investigadora, gravada em registo áudio e posteriormente transcrita.

Observação das Aulas com Tarefas

Na recolha de informação também foi usada a técnica da observação participante. Foram observadas várias aulas em que, em grupos ou pares, os alunos resolveram um conjunto de tarefas propostas em Fichas de Trabalho. Durante essas aulas a investigadora registou, em grelhas de observação (Anexo 6) informação relativa à forma como os alunos reagiram às tarefas, as dificuldades manifestadas assim como diálogos interessantes ocorridos durante a realização das tarefas e a discussão em grande grupo. Para além do papel de instrumento de recolha de dados e de inquiridor-ouvinte, segundo Matos e Carreira (1994), neste design de investigação, o estudo de caso, o investigador assume também o papel de observador.

Como observador, ao longo do estudo, a investigadora assumiu várias posturas. Em alguns momentos adoptou uma atitude de simples observadora e noutros interagiu com os grupos discutindo as tarefas, os procedimentos e as interpretações de cada grupo de trabalho.

Os alunos resolveram as fichas de trabalho em grupos e estas foram recolhidas e analisadas pela investigadora procurando evidências sobre o sentido de número e sentido de operação dos alunos da turma.

Análise dos Dados

Os dados recolhidos revelaram-se bastante variados e com origens diversas.

As respostas dos alunos a cada uma das questões do questionário foram analisadas individualmente logo após a sua realização. Para além das grelhas de observação, das aulas com tarefas resultaram também as tarefas resolvidas pelos grupos que foram recolhidas e analisadas grupo a grupo e as conclusões registadas em grelhas de análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula.

Dispondo dos elementos já referidos e da transcrição da entrevista a análise deste conjunto de contributos foi feita tendo em conta as questões do estudo: (1) Que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, percentagens, potências) dos números? e (2) Como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações? De forma a articular todos os dados num corpo de informação organizado e coerente, para cada um dos casos considerados – Inês, José e Turma, foram definidas categorias e subcategorias de análise como se mostra no Quadro 8:

Quadro 8 – *Matriz de categorização*

			Estudo de caso: TURMA	Estudo de caso: INÊS e JOSÉ
	Categorias de análise	**Sub-categorias**	**Instrumentos utilizados**	**Instrumentos utilizados**
	0. Concepções dos alunos sobre a Matemática	0.1 Concepções acerca da Matemática 0.2 Concepções sobre a aula de Matemática 0.3 Aplicabilidade da Matemática em situações quotidianas 0.4 Relação com a Matemática	Questionário	Questionário Entrevista com tarefas
1- Que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, e percentagens) dos números?	1. Conjuntos Numéricos	1.1 Números inteiros 1.2 Números relativos 1.3 Números fraccionários 1.4 Números racionais	Análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula Grelhas de Observação das aulas com tarefas	Análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula Grelhas de Observação das aulas com tarefas Entrevista com tarefas
	2. Representações de números racionais: formas equivalentes de representar números racionais	2.1 Modelos de visualização 2.2 Fracções e numerais decimais 2.3 Percentagens 2.4 Recta Numérica		
	3. Ordenação e comparação de números racionais	3.1 Ordenação e comparação de números racionais 3.2 Números racionais maiores que um		
	4. Compreensão dos valores e fundamentação de opiniões	4.1 Compreensão dos valores numéricos envolvidos num problema 4.2 Fundamentação de opiniões com base em valores numéricos		
2- Como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações?	5. Sentido de Operação	5.1 Compreensão das operações	Análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula Grelhas de Observação das aulas com tarefas	Análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula Grelhas de Observação das aulas com tarefas Entrevista com tarefas
		5.2 Propriedades e relações das operações		Análise das tarefas realizadas pelos alunos em situação de aula Grelhas de Observação das aulas com tarefas Entrevista com tarefas

Estas categorias e subcategorias constituíram uma base para a análise dos dados mas não funcionaram como divisões disjuntas. Alguns dos problemas resolvidos pelos alunos e questões da entrevista com tarefas foram considerados em mais do que uma categoria. A complexidade do problema do estudo, a relação entre as várias componentes do sentido de número e a interacção que se estabelece entre sentido de número e sentido de operação fazem com que alguns aspectos sejam passíveis de análise em várias categorias.

Após a análise dos dados para cada estudo de caso foi produzida uma reflexão a partir do quadro conceptual consultado e das evidências recolhidas durante a investigação.

Capítulo IV

O Contexto do Estudo

Este estudo realizou-se durante o ano lectivo de 2007/2008, numa escola EB 2,3 com Ensino Secundário do distrito de Santarém e recaiu sobre uma turma do sétimo ano de escolaridade. Um dos estudos de caso foi a referida turma e, dentro desta, foram escolhidos dois alunos sobre os quais incidiram os outros dois estudos de caso.

Durante os segundo e terceiro períodos foram implementadas Fichas de Trabalho, realizadas em pares/ grupos, observada a realização das tarefas e analisados os resultados obtidos pelos pares/grupos de trabalho nessas tarefas.

Aos alunos que constituíam os outros dois estudos de caso, Inês e José, foi realizada uma entrevista com tarefas.

No início do ano lectivo, foi aplicado um questionário, a todos os elementos da turma, para caracterizar a forma como perspectivam a Matemática e as aulas de Matemática e para seleccionar os alunos que constituiriam os outros estudos de caso.

Descrição da Escola

A escola encontra-se inserida num concelho da lezíria do Tejo, um meio rural onde a agricultura predomina como sector de actividade. O concelho abrange uma vasta área e é composto por muitas pequenas aldeias pelo que os alunos percorrem vários quilómetros até chegarem à escola.

A população escolar é heterogénea e os alunos têm diferentes origens sociais e estruturas familiares o que se reflecte na existência de perspectivas bastante diferentes em relação à escola e à sua importância para o futuro pessoal e profissional.

A escola é constituída por quatro edifícios e um pavilhão desportivo. No pavilhão administrativo funcionam Secretaria, Bar, Refeitório, Papelaria, Reprografia, Biblioteca e Centro de Recursos, Conselho Executivo e Sala de Professores. Os outros três edifícios têm salas de aula e cada um desses pavilhões é destinado a um ciclo de escolaridade: 2º ciclo, 3ºciclo e Secundário.

Apenas no âmbito das Ciências Naturais e Físico-químicas, Informática, Educação Visual e Educação Tecnológica existem salas próprias, equipadas com material específico para o ensino dessas áreas. Com excepção do pavilhão desportivo, as instalações não são recentes e encontram-se um pouco degradadas. A construção do pavilhão gimnodesportivo provocou um grande impacto na prática desportiva pelos alunos da escola, que participam activamente em acções promovidas no âmbito do Desporto Escolar.

Caracterização da Turma

A turma de sétimo ano é constituída por dezassete alunos, maioritariamente rapazes (apenas quatro raparigas) cuja média de idades, era, no início do ano lectivo, de 12 anos. Os alunos da turma têm percursos escolares heterogéneos. Apesar de apenas um se encontrar a repetir o sétimo ano, quatro alunos tiveram retenções nos primeiro e segundo ciclos. Três alunos encontram-se a frequentar o sétimo ano ao abrigo do Dec.Lei 319/91 usufruindo de condições específicas de avaliação e/ou adaptações curriculares.

Os resultados escolares dos alunos, em anos anteriores, foram satisfatórios embora a disciplina de Matemática seja uma das disciplinas onde se registaram mais níveis inferiores a três sendo uma das áreas onde os alunos revelam mais dificuldades. Em relação à disciplina de Matemática, seis alunos concluíram o segundo ciclo com nível inferior a três e apenas dois alunos da turma obtiveram nível quatro. Por outro lado, os alunos manifestam grandes dificuldades no domínio da língua materna: leitura e compreensão de textos e expressão oral e escrita.

Apesar dos resultados menos bons, e de alguns alunos terem uma opinião menos agradável em relação à disciplina, os alunos da turma mostraram-se empenhados e motivados durante as aulas.

Existe um bom relacionamento entre os elementos da turma. A maioria deles já pertencia à mesma turma no ano lectivo anterior. À excepção de alguns comportamentos descontextualizados e imaturos em situações pontuais e de alguma agitação, os alunos da turma não manifestam comportamentos de indisciplina. Proporcionou-se nas aulas de Matemática, um ambiente agradável para o processo de ensino – aprendizagem. Neste sentido, considero que foi importante, ao longo de todo o ano lectivo, o esforço da directora de turma e do Conselho de Turma em fomentar posturas assertivas e adequadas e desenvolver o espírito de cooperação e entreajuda dos alunos.

As Tarefas

Durante as aulas de Matemática foram propostas aos alunos da turma três Fichas de Trabalho para realizarem em pares/ grupos. A escolha das tarefas dessas Fichas de Trabalho teve em conta o objectivo deste estudo: compreender o reconhecimento e utilização, por parte dos alunos, de diferentes formas de representação dos elementos dos números e a capacidade de operar com eles. Desta forma, foram seleccionadas tarefas que envolvessem diferentes formas de representar números racionais: reapresentações visuais, fracções, decimais e percentagens, apresentadas por extenso ou através de algarismos. Foram escolhidas tarefas diversificadas, incluindo problemas, que permitem a utilização de diferentes abordagens e tratando-se de um estudo de natureza qualitativa, cuja ênfase é colocada no significado, procurou-se também propor tarefas que fomentassem a comunicação de raciocínios e procedimentos e a fundamentação de opiniões com base em valores numéricos. Procurou-se incluir situações próximas da vida real e que se tornassem interessantes para os alunos.

Ficha de Trabalho 1. "Formas equivalentes de representar números. Ordenação e comparação de números racionais"

Com esta proposta de trabalho (Anexo 3) pretende-se perceber como os alunos reconhecem e relacionam diferentes formas de representar números racionais e se compreendem a sua grandeza relativa.

Na primeira questão são apresentados diferentes modelos de visualização, quadrados, círculos, unidades discretas e contínuas, no sentido de perceber se todos os alunos compreendem a fracção como apenas representativa de uma relação parte todo ou se atribuem outros significados à notação $\frac{a}{b}$.

Nas questões seguintes (1.7 – 1. 9) pretende-se que os alunos reconheçam a ordem de grandeza dos racionais anteriores e que estabeleçam relações de ordem sem recorrer à representação decimal. Nestas questões é solicitado aos alunos que justifiquem as suas respostas. A justificação por escrito do raciocínio assume um papel fundamental na análise do sentido de número dos alunos e da compreensão que têm de uma fracção. As representações visuais foram retiradas de um manual de sexto ano pois optámos por, nesta fase, usar modelos de visualização que eram familiares aos alunos.

Já na segunda questão é sugerido aos alunos que utilizem a representação decimal dos números mas em relação a números apresentados recorrendo a um outro modelo de representação: a recta numérica. Esta representação é menos trabalhada no 2°ciclo e pretende-se averiguar se os alunos conseguem fazer corresponder um número racional a um ponto assinalado na recta numérica.

Como extensão do exercício é ainda solicitado aos alunos que representem esses números noutras formas: forma de fracção e em percentagem analisando assim a sua capacidade, de dado um racional na forma de numeral decimal, escrevê-lo na forma de fracção e através de percentagem.

Nas questões seguintes (3 e 4) os alunos são solicitados a comparar e ordenar números racionais que são apresentados na forma de fracção. A pergunta permite diferentes abordagens pois os alunos podem comparar e ordenar os números representados pelas fracções recorrendo a diferentes processos (representações visuais, comparação de numeradores e denominadores, redução ao mesmo denominador, representação na forma de numeral decimal, representação na recta numérica,...). Também neste conjunto de questões é solicitado aos grupos de alunos que justifiquem as suas respostas o que é bastante importante para percebermos o procedimento utilizado por estes para comparar e ordenar racionais e a percepção que os participantes têm da grandeza de um número quando este é apresentado através de uma fracção.

Ficha de Trabalho 2. "Operações com números racionais"

O grupo de problemas apresentado na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) pretende averiguar a compreensão que os alunos têm das operações. Por outro lado, dada uma situação problemática, pretende-se perceber se conseguem identificar a operação que melhor se adequa naquele contexto, revelando ou não compreensão do efeito das operações nos números. Este conjunto de tarefas permite analisar também se os alunos compreendem os valores numéricos que surgem no contexto dos problemas e se mediante um conjunto de informação quantitativa conseguem tirar conclusões e fundamentar as suas opiniões.

O primeiro grupo de duas questões, apresenta duas situações problemáticas, envolvendo os conceitos de terço, metade e dobro e raciocínios aditivos e subtractivos. São duas situações muito semelhantes às usualmente trabalhadas no 2º ciclo.

Na Questão 3 é considerada a adição de fracções. Esta tarefa permite analisar se, para além do conhecimento e utilização do algoritmo, os alunos atribuem significado à adição de fracções. Mais uma vez tratam-se de tarefas que fomentam a comunicação matemática e que nos permitem compreender os raciocínios dos alunos.

Os problemas 4 e 5 são situações muito próximas da vida real e que apresentam as fracções como operadores partitivos. Pretende-se averiguar se os alunos conseguem interpretar a informação numérica contida nos enunciados, manipulá-la e seleccionar operações adequadas que lhes permitam obter respostas às questões colocadas.

Ficha de Trabalho 3."Temperaturas"

A Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) apresenta temperaturas relativas a diferentes pontos do Globo e do Universo. Através de um conjunto de tarefas pretende-se averiguar o reconhecimento, por parte dos alunos, da presença dos números relativos no nosso quotidiano, como operam com eles e se compreendem as quantidades que representam. São também propostas tarefas no sentido de comparar e ordenar estes racionais relativos.

Pretende-se, também, averiguar se os alunos conseguem associar a operação subtracção à expressão "diferença" usada na definição de amplitude térmica (Tarefa 1, 1.1) e à expressão "variação" (Tarefa 2, 1.2) assim como seleccionar uma estratégia para identificar, por exemplo, quantos graus se prevêem a mais em determinada cidade em relação a uma outra.

Neste grupo de tarefas procura-se que os alunos fundamentem uma opinião com base em valores numéricos. Na Tarefa 1, questão 1.2.3 é-lhes solicitado que estabeleçam uma relação entre interioridade e amplitude térmica tendo por base os valores que calcularam anteriormente, construindo um pequeno texto para expor as suas conclusões. Já, nas questões 2 e 3 da Tarefa 3 a relação que se estabelece é entre a temperatura média à superfície do planeta e a proximidade do Sol. Estas duas tarefas possibilitam analisar se os alunos conseguem usar informação quantitativa para estabelecer relações entre conceitos e grandezas.

A informação que consta nas tabelas não é fictícia e resulta da consulta das fontes: www.meteo.pt; http://pt.wikipedia.org/wiki/Extremos_da_Terra).

Entrevista com Tarefas

Para além das Fichas de Trabalho que resolveram em pares/ grupos durante as aulas de Matemática, os alunos Inês e José trabalharam outro grupo de tarefas que lhes foi proposto durante a entrevista. Na escolha dessas tarefas foram tidos em conta os aspectos já referidos e assim seleccionadas tarefas que envolvam diferentes formas de representar números: representações visuais, fracções, decimais e percentagens e problemas e que possibilitem compreender o sentido de número e sentido de operação dos alunos.

Tarefa 1

No primeiro grupo de questões, 1.1, pretende-se compreender se os alunos reconhecem equivalentes formas de representar a mesma quantidade ou relação e se conseguem, dada uma representação de um número, obter uma outra, justificando raciocínios e procedimentos.

Através de um rectângulo dividido em quarenta partes, com seis quadrículas sombreadas, é-lhes solicitado que obtenham diferentes representações da relação parte-todo: percentagem, fracção e decimal. Neste grupo de questões é dada especial importância à representação em percentagem da área sombreada. Sendo uma representação equivalente da relação parte-todo menos trabalhada ao longo do 2º ciclo, pretende-se perceber como entendem os alunos as referências 50% e 25% e se conseguem exprimir a relação parte-todo em forma de percentagem. A pergunta e) permite diferentes abordagens pois os alunos podem obter essa representação partindo da representação visual, da forma decimal ou da fracção, já obtidas anteriormente. Mais uma vez é solicitado aos intervenientes que expliquem o procedimento utilizado o que nos permite perceber melhor a forma como os alunos compreendem e manipulam representações equivalentes dos números.

Na Questão 1.2 é proposto aos alunos que comparem duas misturas de sumo de laranja. É uma tarefa em que podem usar uma razão entre duas quantidades, em que a notação $\frac{a}{b}$ pode surgir, não para representar uma relação parte-todo mas antes uma razão entre concentrado de sumo e água. É uma situação problemática que permite uma multiplicidade de abordagens sendo a utilização da razão concentrado/ água apenas uma das estratégias possíveis. Pretende-se compreender se os alunos conseguem interpretar e analisar os números envolvidos no problema e tomar uma decisão com base nessa informação numérica.

Na mesma questão surge um outro exemplo da presença dos números em situações quotidianas (também envolvendo sumo de fruta) e do mesmo modo procura-se compreender a percepção que os alunos têm da informação numérica que chega até ao cidadão comum todos os dias e nas mais variadas situações. Neste caso trata-se do rótulo de uma embalagem de sumo de fruta com a informação numérica: "teor mínimo de sumo: 20%". É solicitado aos alunos que interpretem e expliquem esta afirmação.

O terceiro grupo de questões da Tarefa 1, 1.3, permite-nos perceber a compreensão que os alunos têm dos números relativos. Os alunos deverão comparar números positivos e negativos, manipulá-los e explicar o efeito das operações adição e subtracção num par de números relativos. A ênfase, neste grupo de perguntas, é colocada na comunicação matemática. Os alunos são solicitados a explicar os seus raciocínios e os procedimentos que utilizam em cada situação.

A Questão a) possibilita o diagnóstico de dificuldades na ordenação de números negativos e na própria compreensão destes números. Nas questões seguintes pretende-se averiguar se associam a expressão "subir a temperatura" a um raciocínio aditivo e a expressão "descer a temperatura" a um raciocínio subtractivo e perceber como entendem as operações adição e subtracção entre números relativos. A última pergunta permite avaliar se os alunos compreendem a ordem de grandeza dos números envolvidos e a realidade a que dizem respeito e se conseguem associar os números apresentados a uma estação do ano, em particular a um mês do ano.

Tarefa 2

Esta tarefa dá especial atenção ao sentido de operação dos alunos. Permite-nos compreender se os alunos percebem o efeito que as operações têm nos números adequando uma operação a um certo contexto.

Nas duas primeiras questões estão presentes os raciocínios aditivo e subtractivo. É-lhes solicitado que justifiquem a escolha de uma operação e que expliquem como vão proceder, o que nos permite compreender a forma como entendem as operações envolvidas, os conceitos apresentados "metade", "terço" e a expressão usada "restante". Estas duas questões permitem-nos também diagnosticar dificuldades nos procedimentos, em particular na adição e subtracção de fracções.

Em c) os alunos deverão calcular a quantidade bebida por cada um dos colegas. A divisão pode surgir associada aos conceitos de metade e terço mas os alunos podem também recorrer aos operadores $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ para determinar essas quantidades. Nesta pergunta pretende-se que os alunos justifiquem a adequação de uma operação ao cálculo de "metade", "um terço" e do "restante" de uma dada quantidade.

Seguidamente é-lhes solicitado que comparem quantidades, mas através de duas questões diferentes. Em d) devem indicar "quantos litros o Filipe bebeu a mais do que a Isabel" e pretende-se perceber como interpretaram os alunos a expressão " a mais" e que operação associam a esta comparação. Do mesmo modo e) permite compreender que operação e que significado atribuem os participantes a "quantas vezes mais" e como distinguem estas duas situações.

Em toda a Tarefa 2 é fomentada a comunicação de raciocínios e procedimentos.

Implementação das Tarefas

As Fichas de Trabalho foram resolvidas em pares ou em grupos. A investigadora permitiu que os grupos se organizassem livremente impondo, apenas como condição, que os alunos Inês e José não trabalhassem no mesmo grupo.

Na aula destinada à resolução da primeira Ficha de Trabalho os alunos mostraram-se muito agitados e expectantes. Como se tratava de um proposta de trabalho diferente das que estavam habituados pareceram normais as dúvidas e "alvoroço" dos alunos. Após a agitação inicial organizaram-se em quatro grupos de dois e três grupos de três alunos. Foram, de seguida, distribuídas as Fichas de Trabalho e a professora/investigadora introduziu a tarefa fazendo em voz alta a leitura de todas as questões. Informou os alunos que podiam utilizar régua e calculadora básica.

A professora referiu ainda que não iria tirar dúvidas nesta fase do trabalho e que no final do tempo estabelecido para a realização da tarefa as conclusões e respostas dos grupos seriam discutidas em grande grupo. Reforçou que deveriam justificar e explicar, sempre que solicitado, a forma como pensaram e resolveram o que lhes era solicitado.

Os alunos reagiram bem à proposta de trabalho mas apesar de empenhados mostraram dificuldades em estabelecer uma eficaz dinâmica de grupo. As tarefas propostas fomentavam a comunicação e discussão nos grupos e muitos alunos revelaram dificuldades na verbalização de raciocínios e comunicação de ideias aos colegas.

No Grupo 1, as tarefas propostas, pareceram-lhes familiares e resolveram sem problemas até 1.5 mas, nas questões seguintes, a maioria dos grupos solicitou a presença da professora para ajudar na leitura e interpretação de enunciados ou validar as suas respostas e/ou conclusões. A professora respondia de forma evasiva ou colocando questões e, com o decorrer da aula, os grupos foram-se tornando mais autónomos e os seus elementos mais participativos nas discussões.

A investigadora circulou pela sala para registar afirmações interessantes e discussões relevantes que ocorriam nos grupos e no final da aula recolheu a opinião dos alunos que constituíam o estudo de caso.

Quando os grupos concluíram a tarefa os resultados, raciocínios e procedimentos foram discutidos em grande grupo. Mais uma vez, por não estarem habituados a este tipo de aulas, mostraram-se agitados e tentaram participar de uma forma desorganizada. Com o evoluir da discussão os elementos dos grupos foram participando mais ordenadamente e mais confiantes na comunicação e justificação de ideias.

Para a resolução da segunda Ficha de Trabalho os alunos organizaram-se de modo diferente constituindo menos grupos: dois grupos de quatro e três grupos de três alunos. Foram distribuídas as folhas com a proposta de trabalho. Desta vez a professora não leu a tarefa e apenas referiu que era constituída por cinco questões. Informou os alunos que podiam utilizar a calculadora e explicou que pretendia fomentar o trabalho autónomo pelo que não iria tirar dúvidas nesta fase do trabalho e apenas observar o funcionamento dos grupos, registando algumas afirmações interessantes no contexto dos problemas propostos.

Nesta aula houve menos agitação inicial e os alunos começaram a trabalhar logo que a professora introduziu a tarefa, não levantando questões.

Os grupos reagiram bem à tarefa e apenas um dos grupos não encarou esta proposta de trabalho com seriedade, pois os seus elementos não se esforçaram para resolver os problemas apresentados.

Os alunos resolveram com relativa facilidade os dois primeiros problemas. As restantes questões geraram muita discussão nos grupos que solicitaram bastante a professora quer para intervir na interpretação do enunciado quer para dar pistas sobre a resolução das tarefas. Mais uma vez a investigadora/professora adoptou uma postura evasiva, devolvendo as questões ao grupo ou colocando mais questões. Mostraram-se menos confiantes nos problemas que lhes eram menos familiares e nestes casos revelaram dificuldades na definição de estratégias. O Problema 5, por se tratar de uma tarefa menos estruturada, levantou muitas dúvidas nos grupos de trabalho que hesitaram no estabelecimento de uma estratégia de abordagem da situação. Por outro lado, revelaram muitas dificuldades na análise e interpretação da informação envolvida pelo que a tarefa foi prolongada por mais 45 minutos para que os grupos pudessem discutir as propostas das duas lojas de electrodomésticos e realizar todos os cálculos que considerassem necessários. Seguidamente a tarefa foi resolvida e discutida em plenário e foram realizados alguns cálculos no quadro. Neste momento de discussão todos os grupos compreenderam as situações descritas e puderam tomar uma decisão apresentando um argumento para justificar as suas escolhas, tendo a discussão sido muito rica.

Apesar das dificuldades descritas, nesta Ficha de Trabalho, os alunos mostraram-se mais autónomos e registou-se uma melhor organização do trabalho nos grupos. Registaram-se discussões muito interessantes, empenho e motivação o que faz denotar que os alunos apreciam esta organização de aula. Também no final da aula foram registadas as opiniões dos dois alunos que constituíam o estudo de caso.

Na última aula destinada à resolução de Fichas de Trabalho, em grupo, os alunos sentaram-se nos mesmos grupos da Ficha de Trabalho anterior. Imediatamente a professora distribuiu as tarefas e os alunos começaram a trabalhar. A professora apenas esclareceu que deviam justificar as suas afirmações, sempre que solicitado, e indicar todos os cálculos realizados. Referiu também que podiam usar calculadora básica.

Apenas um dos grupos continuou a manifestar dificuldades no estabelecimento de uma eficaz dinâmica de grupo, não se empenhando na realização da tarefa e partilha de saberes e responsabilidades.

Os grupos solicitaram menos a presença da professora e apenas as operações com números relativos e a Questão 1.2.3 suscitou mais dúvidas. Na segunda parte da aula, quando os resultados e conclusões foram discutidos em plenário, foi esclarecido o conceito de amplitude térmica e a relação entre interioridade e amplitude térmica sugerida pelos dados numéricos.

Os alunos acharam a informação sobre as temperaturas em Portugal, no Globo e no Sistema Solar muito interessantes e questionaram a investigadora se eram mesmo reais. Contudo foi necessário discutir a localização de todas as cidades referidas na ficha, mesmo as de Portugal. A tabela que mais os impressionou foi a tabela relativa às temperaturas extremas já registadas no planeta Terra.

Nesta aula os grupos revelaram-se mais coesos e mais metódicos na organização do trabalho o que se traduziu numa melhor gestão do tempo e num ambiente de sala de aula produtivo e agradável. Contudo, alguns os alunos continuam a manifestar dificuldades em justificar, oralmente e por escrito as suas afirmações, assim como descrever raciocínios e procedimentos o que os inibe de participar activamente nas discussões em grupo e em plenário intervindo apenas quando solicitados.

As tarefas da entrevista foram propostas durante a realização da entrevista que foi gravada em áudio. Apesar das questões/ problemas serem introduzidas pela investigadora os alunos dispunham do enunciado em suporte de papel. Dispunham também de material de escrita e de uma calculadora básica. A investigadora esclareceu os alunos que não se deveriam preocupar se não soubessem responder pois estas tarefas não teriam qualquer influência na sua avaliação. Solicitou, sempre, que fossem explicitando a forma como pensavam pois esse contributo era muito importante para esta investigação. Foram realizadas e comentadas, pelos alunos Inês e José, todas as tarefas propostas. No final da entrevista foram recolhidas as folhas onde os alunos registaram alguns cálculos realizados.

Assim como os colegas da turma também a Inês e o José mostraram dificuldades em expor com clareza ideias, raciocínios e procedimentos. O José revelou-se menos confiante e menos à vontade sendo muitas vezes interrompido pela colega Inês que se mostrou entusiasmada pela participação na entrevista.

Capítulo V

O Caso turma

A turma de sétimo ano de escolaridade considerada para a realização deste estudo é composta por dezassete alunos, treze rapazes e quatro raparigas com 12 anos, de média, de idade. A maioria dos alunos frequenta o sétimo ano pela primeira vez. Apenas um aluno se encontra a repetir o sétimo ano mas quatro alunos têm retenções nos 1º e 2º ciclos do Ensino Básico. Três alunos integram a turma usufruindo de condições específicas de avaliação e adaptações curriculares, ao abrigo do antigo Dec.Lei 319/91.

Todos os alunos frequentaram o 2ºciclo do Ensino Básico na escola e o seu aproveitamento a Matemática, no ano anterior, foi variável: onze obtiveram nível igual ou superior a três e os restantes nível dois.

Para além da dificuldade revelada na disciplina de Matemática os alunos manifestam também muita dificuldade na comunicação oral e escrita em língua materna assim como na leitura e interpretação de enunciados.

Concepções dos Alunos da Turma sobre a Matemática

Os alunos da turma consideram que a Matemática é uma disciplina escolar importante mas difícil: "algo que nos faz falta no dia-a-dia mas que também é muito complicado" (Carlos, Questionário). Destacam a aplicabilidade do conhecimento matemático em situações quotidianas que envolvam compras, trocos e valores em euros referindo também a sua importância na construção civil e obras públicas – " quando se vai ao supermercado, para contar o dinheiro da carteira" (Mário, Questionário); "para comprar coisas e fazer construções de coisas" (Afonso, Questionário); "nas obras" (Diogo, Questionário).

Apesar da dificuldade que revela, a maioria dos alunos da turma gosta de Matemática considerando-se alunos "médios" nesta disciplina. Contudo, alguns alunos consideram que têm desempenhos menos bons e que a Matemática contribui para o seu insucesso escolar: "é muito complicada e já contribuiu para eu chumbar um ano" (Carlos, Questionário). Para estes alunos o facto de a considerarem uma disciplina difícil afasta-os da Matemática e desmotiva-os porque confessam não entender as tarefas propostas e os assuntos tratados. Exemplos deste sentimento são as seguintes afirmações, obtidas quando se questionou os alunos se gostavam de Matemática: "mais ou menos; não percebo metade dos problemas" (Pedro, Questionário); "não porque é muito difícil" (Rita, Questionário).

Concepções dos alunos da turma sobre a aula de Matemática

Relativamente à aula de Matemática alguns alunos restringem-na à resolução de exercícios e ao treino de algoritmos: "é fazer contas e mais contas" (Samuel, Questionário); "é uma aula para aprender a resolver exercícios" (Mário, Questionário).

Quando questionados como deve ser uma aula de Matemática os alunos sugerem abordagens mais divertidas e dinâmicas, "divertida, mas em que se aprenda coisas novas" (Luís, Questionário), com recurso a materiais manipuláveis, recursos audiovisuais e variedade de tarefas propostas: "não gosto dos exercícios mas gosto dos trabalhos" (Mário, Questionário); "coisas feitas com a calculadora e jogos" (Rita, Questionário).

Apesar da dificuldade e desmotivação de alguns alunos em relação à disciplina, a maioria dos alunos revela-se interessada e empenhada nas aulas de Matemática. São imaturos em alguns comportamentos e atitudes mas não se registam problemas de indisciplina. Gostam de realizar tarefas em grupos/pares mas reconhecem que não estão habituados a fazê-lo nas aulas de Matemática.

Todos reconhecem a importância da presença da tecnologia nas aulas de Matemática. Referem que a máquina de calcular lhes permite realizar cálculos rapidamente "para efectuarmos mais rápido as operações" (Rita, Questionário), alguns deles muito difíceis de resolver sem recurso à tecnologia – "porque há contas que só com a máquina de calcular conseguimos fazer" (Mário, Questionário). Quando questionado sobre o uso de máquina de calcular na aula, o Afonso referiu que "ajuda a fazer os cálculos e não enerva tanto os alunos (...) até ajuda os alunos a manterem-se interessados pela disciplina." (Afonso, Questionário). O contributo deste aluno remete para outro aspecto inerente à presença dos meios auxiliares de cálculo na aula de Matemática pois a utilização da calculadora para a realização de cálculos possibilita o envolvimento nas tarefas dos alunos com menos destreza de cálculo, impedindo que se desmotivem apenas porque não conseguem realizar as operações.

Sentido de Número

Os Conjuntos Numéricos

Ao longo deste estudo foi aplicado na turma um conjunto de três fichas de trabalho para realizar em pares ou grupos, onde as tarefas propostas envolviam elementos de vários conjuntos numéricos.

Os alunos reconhecem e manipulam números inteiros, fraccionários, racionais e relativos trabalhando com várias representações dos números.

Representações de Números Racionais: Formas Equivalentes de Representar Números Racionais

Modelos de Visualização

Os modelos de visualização propostos na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) revelaram-se familiares aos alunos que, para as seis representações visuais apresentadas, escreveram a fracção que traduz a relação parte-todo.

Para apresentar a fracção como comparação entre a parte e o todo, os alunos associaram ao numerador o número de partes coloridas, indicando no denominador o número de partes em que a unidade está dividida. Em 1.6 (Anexo 3) alguns grupos de trabalho não consideraram a necessidade de dividir a unidade em partes iguais associando à região sombreada a fracção $\frac{3}{5}$ (Figura 3):

1.6

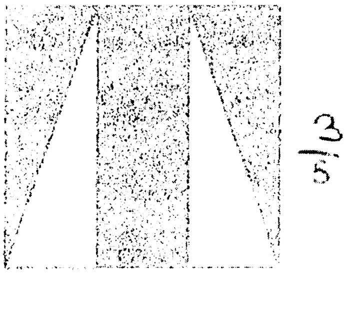


Figura 3 – Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 1, recolhida no final da aula.

Relativamente à representação visual 1.5 (Anexo 3) a maioria dos grupos escreveu uma fracção ($\frac{5}{6}$) para representar a relação parte-todo, tomando como a parte as bolas coloridas. Contudo, um dos grupos atribuiu à fracção o significado de razão entre o número de bolas coloridas e o número de bolas brancas (Figura 4):

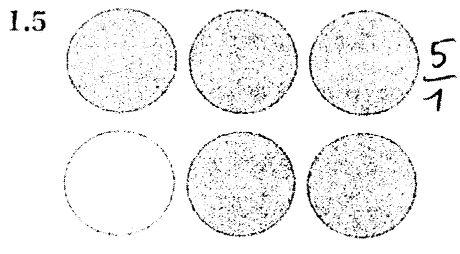


Figura 4 – Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 2, recolhida no final da aula.

Esta resolução revela uma outra compreensão da fracção: a fracção como razão entre duas partes do mesmo todo, neste caso o número de bolas coloridas e o número de bolas por colorir. Contudo, o grupo apenas atribuiu este significado no caso desta representação visual enquanto que nas outras representações assumiu a fracção como descritiva da relação parte-todo.

Com excepção dos casos analisados para 1.5 e 1.6 os grupos, sem dificuldade, associaram uma fracção à relação que se estabelecem entre a parte colorida de uma figura e a unidade considerada.

Fracções e Numerais Decimais

Os alunos da turma revelaram compreender que a fracção, para além de assumir os significados de relação parte-todo e razão, é também uma forma de representar números racionais.

Reconheceram que estes números podem assumir outras formas e, na resolução das tarefas propostas, não mostraram dificuldade em escrever na forma de numeral decimal números racionais apresentados na forma de fracção. Para obter a representação decimal de um racional dividiram o numerador pelo denominador. Desta forma, atribuíram, também, à fracção o significado de quociente entre dois números.

Paralelamente conseguiram obter, na forma de fracção, números racionais apresentados na forma de numeral decimal, usando uma fracção decimal. Contudo, nem todos os grupos conseguiram depois simplificar as fracções de forma a obter fracções equivalentes, irredutíveis, para representar o mesmo número racional.

Por outro lado, a maioria dos alunos da turma conseguiu atribuir à fracção o significado de operador partitivo. Por exemplo, na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) todos os grupos associaram à fracção $\frac{1}{6}$ uma divisão por seis e alguns grupos reconheceram as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ como operadores para calcular metade e a quarta parte dividindo respectivamente por dois e quatro.

Relativamente à fracção como operador partitivo multiplicativo os grupos, com excepção do grupo do José, não conseguiram identificar a fracção $\frac{2}{3}$ com uma divisão por três e uma multiplicação por dois. Os outros grupos não conseguiram responder correctamente à questão que envolvia $\frac{2}{3}$ de um bolo de 1200g, com excepção do Grupo 4 que procurou resolver o problema com recurso a um esquema (Figura 5):

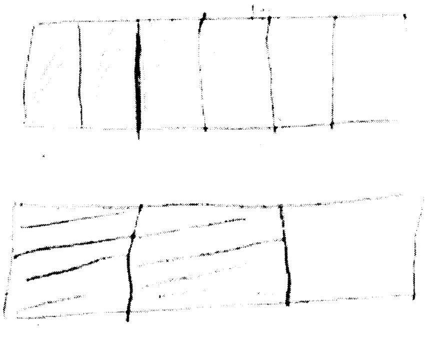


Figura 5 – **Resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo 4, recolhida no final da aula**

Como nas alíneas anteriores consideraram o bolo dividido em seis fatias, através deste esquema os alunos concluíram que $\frac{2}{3}$ correspondem a quatro fatias de bolo. Como já haviam calculado o preço de cada fatia, de seguida determinaram, sem dificuldade, o preço a pagar pelas quatro fatias, ou seja $\frac{2}{3}$ do bolo.

É interessante como os alunos obtêm uma fracção equivalente a uma fracção dada, usando apenas a representação visual. Parece que ao sentirem dificuldade na utilização de notação formal procuraram uma abordagem mais intuitiva recorrendo, antes à percepção do conceito envolvido para compreender a quantidade escrita.

Desta forma, percebe-se que a representação dos racionais utilizada pelos alunos é determinada pelas características de cada tarefa e pela dificuldade/facilidade que têm em compreender e manipular os números representados de uma certa forma: representação visual, numeral decimal, fracção, fracções equivalentes, percentagens.

Percentagens

Os alunos utilizaram, simultaneamente, as representações decimais e em fracção dos racionais, mas ao longo do estudo manifestaram pouca compreensão de outras representações possíveis, nomeadamente as percentagens.

Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) todos os grupos conseguiram associar à percentagem 50% uma representação visual onde metade do número total de partes em que foi dividida a unidade estava colorida justificando: "porque metade da figura está pintada" (Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 6). Nesta tarefa, para conseguir indicar quais das fracções apresentadas correspondiam a 50%, um dos grupos pondera escrever todas as fracções (1.1 a 1.6) na forma de percentagem. Contudo não conseguiram seleccionar um procedimento adequado: "é a dividir!"; "Não! Vamos fazer com a regra de três simples!" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1). Optaram por seguir uma abordagem mais intuitiva, analisando as representações visuais. Apesar dos alunos da turma perceberem a representação 50% revelaram dificuldade em compreender e trabalhar com outros valores percentuais.

Na Tarefa 2, da mesma Ficha de Trabalho (Anexo 3), os racionais também foram, inicialmente, apresentados através de uma representação visual (recta numérica). Contudo, apenas alguns alunos conseguiram associar aos números uma percentagem e uma parte dos alunos da turma conseguiu apenas fazê-lo para 0,5. O Grupo 4 revelou não compreender esta representação dos racionais fazendo corresponder por exemplo, a 0,9 a percentagem 0,9%.

Apesar de alguns grupos terem conseguido obter a representação em percentagem dos números apresentados, nem todos compreenderam o significado de uma percentagem superior a 100%. Para além dos grupos da Inês e do José apenas um outro grupo justificou que a percentagem associada ao número racional 1,2 é superior a 100% "porque é maior que 1" (Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 1).

Mas, por outro lado, quando uma percentagem surge associada à parte de um todo, e não a uma representação de um racional, os alunos conseguem, recorrendo ao raciocínio proporcional, calcular, no contexto do problema, o valor dessa percentagem. Por exemplo, na Tarefa 5, da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), os grupos não revelaram dificuldade em utilizar a regra de três simples para calcular 3% e 6% de certos valores em euros.

A Recta Numérica

Os alunos da turma têm dificuldade em associar um número racional a um ponto marcado na recta numérica. Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), a principal dificuldade dos alunos em fazer corresponder a cada um dos pontos um numeral decimal foi compreender a recta apresentada. Esta tarefa gerou afirmações interessantes na turma:

> - Não consigo perceber quanto dá cada tracinho! - Grupo 1.
> - Entre o 1 e o 2 está dividido em 5 partes iguais. - Grupo 1.
> - O A é ao meio por isso é 0,5. 0,5 é um meio porque 1 a dividir por dois é 0,5. - Grupo 6.
>
> (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1)

Após perceberem que a unidade de medida era 0,2 a maioria dos alunos conseguiu associar correctamente uma representação decimal a cada um dos racionais assinalados na recta. Apenas dois grupos identificaram, correctamente, um dos números, o racional representado pelo ponto A (0,5).

Ordenação e Comparação de Números Racionais

Os alunos da turma revelaram alguma dificuldade em comparar números racionais representados por fracções ou por esquemas.

Na Ficha de Trabalho 1, Questão 1.8 (Anexo 3), em relação às fracções $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{6}$, todos os grupos indicaram correctamente a fracção que representa um número maior, embora apenas alguns grupos tenham justificado a escolha (tendo por base as representações visuais): "é o 1.5 [$\frac{5}{6}$] porque é o que está mais colorido" (Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 6). Contudo, na questão seguinte, quando é solicitada a comparação das quantidades representadas em 1.1 e 1.5 (que correspondem às fracções $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{6}$) a maioria dos grupos não conseguiu responder correctamente e apresentar uma justificação válida para a análise das duas representações. Por exemplo, o Grupo 6 afirmou que a fracção maior é $\frac{5}{6}$ mas a justificação apresentada não faz sentido: "é o 1.5 porque é o que tem menos partes coloridas" (Resolução da Ficha de Trabalho 1,Grupo 6). Com excepção dos grupos da Inês e do José apenas o Grupo 1 conseguiu aproximar-se de uma justificação com sentido: "o maior é 1.5 [$\frac{5}{6}$] porque a maioria está pintada" (Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 1).

Na mesma Ficha de Trabalho, na Questão 4 (Anexo 3), para ordenar um conjunto de números racionais dados na forma de fracção, os alunos optaram por escrevê-los na forma de numeral decimal e só depois colocá-los por ordem crescente. Apesar de alguns erros de cálculo na obtenção da forma decimal dos números terem comprometido o desempenho correcto da tarefa, os alunos não revelaram dificuldade em ordenar números decimais positivos. Apenas um grupo optou por, depois de ter os números escritos na forma decimal, representá-los na recta numérica e seguidamente escrevê-los por ordem.

Os alunos reconheceram que é difícil comparar e ordenar um conjunto de números escritos na forma de fracção pelo que neste tipo de tarefas optaram pela representação decimal.

No que diz respeito às tarefas de ordenação e comparação envolvendo números racionais relativos, propostas na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5), os alunos da turma não revelaram dificuldade. Relativamente às temperaturas extremas já registadas no planeta Terra, todos os grupos ordenaram correctamente os valores da tabela. Mostraram compreender a relação de ordem que se estabelece entre números negativos: "-89,2 é antes de -71,2 porque é mais negativo" (Mário, Observação da realização da Ficha de Trabalho 3). Do mesmo modo, todos os grupos de trabalho identificaram correctamente a maior e a menor temperatura apresentadas na tabela da Tarefa 2 (Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5)) e apenas um grupo não conseguiu colocar por ordem as temperaturas médias relativas à superfície dos planetas que constituem o Sistema Solar. Este grupo de trabalho revelou dificuldade na ordenação dos inteiros negativos -150 e -237: "-150<-237" (Resolução da Ficha de Trabalho 3, Grupo 4).

Números Racionais Maiores que Um

Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) foram propostas algumas tarefas para reconhecer números racionais maiores que um. Quando os números racionais foram apresentados na forma de fracção os grupos optaram por escrevê-los na forma decimal para compreenderem a sua ordem de grandeza. Relativamente ao fraccionário $\frac{7}{4}$ apenas um grupo justificou tratar-se de um número maior que um atendendo à relação entre o numerador e o denominador – "porque [o numerador] é maior do que o denominador" (Resolução da Ficha de Trabalho, Grupo 1). Os restantes grupos justificaram que $\frac{7}{4}>1$ com base no decimal obtido.

Todos os grupos, com excepção do grupo do José, procederam deste modo (obtenção do numeral decimal) para seleccionar em 4.1 (Anexo 3) as fracções que representam números racionais maiores que um, justificando: "porque o número decimal é maior do que um" (Resolução da Ficha de Trabalho 1,Grupo 1).

Apesar de mostrarem facilidade em reconhecer quantidades maiores que um, mesmo quando os números são apresentados na forma de fracção, grande parte dos alunos, como já foi referido, não conseguiu associar a uma percentagem superior a 100% um número superior a um. Na questão 2.5 da Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) era solicitado aos alunos que comentassem a percentagem obtida para representar o ponto B (120%). Apenas os grupos da Inês e o do José justificaram que essa percentagem é maior que 100% porque o ponto representado corresponde a um número maior que um.

Compreensão dos Valores e Fundamentação de Opiniões

De um modo geral, e ao longo de todo o estudo, os alunos revelaram dificuldade em justificar, oralmente e por escrito, as suas afirmações assim como descrever raciocínios e procedimentos. Por outro lado, nem sempre conseguiram compreender e interpretar os valores numéricos envolvidos nas situações problemáticas apresentadas.

Por vezes, revelaram pouca competência no âmbito da utilização de informação quantitativa, facultada ou calculada, para tomar uma decisão e/ou fundamentar uma opinião.

Relativamente à primeira tarefa apresentada na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) os alunos compreenderam os conceitos presentes na tarefa: metade e terço. O cálculo do número de lápis partidos em cada um dos casos e a interpretação dos resultados obtidos geraram discussões interessantes nos grupos:

> - Metade é só dividir por dois que dá 6. – Afonso.
> - E o terço é $\frac{12}{3}$. – Mário.
> - O Pedro tem menos lápis. – Mário.
> - Não, tem menos lápis partidos por isso tem mais lápis bons. – Afonso.
>
> (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2)

Com base nos cálculos realizados os alunos conseguiram tomar uma posição em relação à questão colocada. Por exemplo, o grupo do Mário e do Afonso respondeu: "é a Ana [que está mais triste] porque tem 6 lápis partidos enquanto que o Pedro tem 4 lápis partidos" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo2). O Grupo 4 apresentou a seguinte justificação: " É a Ana que está mais triste porque um terço de 12 é 4 e metade de 12 é 6. A Ana tem 6 lápis partidos e o Pedro tem 4" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo 4).

Do mesmo modo, no Problema 2 (Anexo 4), todos os grupos identificaram o conceito de dobro e os raciocínios aditivo e subtractivo para resolver a tarefa. Apenas um grupo optou por não usar notação simbólica e resolveu o problema através de um esquema, usando um modelo de visualização circular (Figura 6):

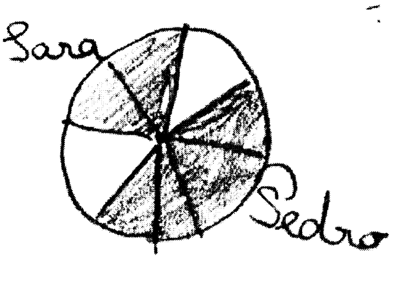


Figura 6 – Questão 2, resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo 2, recolhida no final da aula.

Através deste esquema conseguem, sem recorrer a algoritmos de papel e lápis, responder à questão colocada: "sobram duas fatias" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo 2).

Nestes dois problemas os alunos conseguiram compreender e interpretar os valores numéricos envolvidos nas situações descritas. Estas duas tarefas são muito semelhantes ao tipo de propostas usualmente utilizadas na abordagem das fracções ao longo do 2º ciclo do Ensino Básico. Perante estas situações, que lhes eram familiares, os alunos não revelaram dificuldade em manipular informação quantitativa.

No Problema 4 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) os alunos dispunham da informação que cada fatia correspondia a $\frac{1}{6}$ de um bolo com 1,2 kg. Todos os grupos fizeram corresponder o peso de cada fatia à sexta parte do peso do bolo. Um dos grupos apresentou a simbologia $\frac{1,2}{6}$ enquanto que os restantes escrevem $1{,}2 \div 6$ ou $1200 \div 6$. Desta forma mostram compreender que a fracção $\frac{1}{6}$, neste problema, representa a sexta parte de uma dada quantidade, neste caso 1,2 kg: "$\frac{1}{6}$ é dividir em seis fatias iguaizinhas. – Mário. – Por isso é só fazer as contas" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2). Contudo, em 4.3 (Anexo 4), a maioria dos grupos de trabalho, não interpretou correctamente a informação $\frac{2}{3}$ de um bolo de 1200g e não realizou a tarefa. Neste caso os alunos revelaram pouca compreensão do significado da fracção apresentada, $\frac{2}{3}$, no contexto do problema. O grupo do José considerou que, como o bolo está dividido em seis fatias, $\frac{2}{3}$ do bolo correspondiam a $\frac{2}{3}$ de 6 e calcularam $\frac{2}{3} \times 6$ obtendo 4 fatias. O Grupo 4 procurou resolver o problema com recurso ao suporte visual para obter uma fracção equivalente mas com denominador seis e assim concluiu que nesta tarefa deviam considerar 4 fatias do bolo. Neste problema, o preço apresentado era relativo a cada quilo de bolo e não a todo o bolo. Os alunos conseguiram compreender esta informação: "para saber quanto custa é dividir os 8€ por 6 fatias (...) mas 8€ não é o preço do bolo é de um quilo. Tem que se fazer 1 está para 8 e 200 está para *x*." – Rita (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2). Apenas um dos grupos respondeu incorrectamente a esta questão apresentando uma resposta sem qualquer sentido no contexto do problema.

Também na Tarefa 5, apresentada na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), os alunos da turma mostraram dificuldade na compreensão dos valores numéricos envolvidos nesta situação da vida real. Todos os grupos calcularam o custo total dos electrodomésticos em cada uma das lojas e reconheceram que o valor total da aquisição é igual nos dois estabelecimentos pelo que este não é um factor de decisão. Relativamente à parte do valor total que é necessário entregar aquando da aquisição dos produtos (½ na Super Loja e ¼ na Loja do Lar), e o valor em dívida depois de pagar a entrada, apenas dois grupos não reconheceram a informação numérica facultada no enunciado. Todos os grupos revelaram dificuldade em interpretar o sistema de juros aplicado a cada situação e dois grupos identificaram a loja que permite pagar uma mensalidade menor.

De um modo geral, conclui-se que os alunos revelaram muita dificuldade em compreender a situação apresentada e a informação numérica do problema, visto que nenhum dos grupos considerou todos os critérios para tomada de decisão: valor da entrada, prestação mensal, prazo de pagamento e juros aplicados.

Apenas dois grupos apresentaram, na primeira fase da tarefa, uma escolha fundamentada mas não suportada por cálculos - só baseada na interpretação do enunciado e não considerando todos os factores de análise:

> - Se fossemos a família Costa preferíamos comprar na Super loja porque paga-se mais na entrada mas temos mais tempo para pagar e cada prestação é mais barata (Grupo 4).
> - É melhor pagar menos de entrada e mais mensalmente durante um só ano (Grupo3).
>
> (Resolução da Ficha de Trabalho 2)

Como todos grupos revelaram dificuldade na compreensão e resolução da tarefa, a aula foi prolongada por mais 45 minutos para que os grupos pudessem discutir, mais aprofundadamente, as propostas das duas lojas de electrodomésticos. A tarefa foi resolvida e discutida em plenário e realizados alguns cálculos no quadro. Na discussão e reflexão todos os grupos compreenderam as situações descritas e puderam tomar uma decisão, apresentando um argumento para justificar a sua escolha. A discussão foi muito rica no sentido que permitiu o debate de ideias, comparação de estratégias e justificação de escolhas e decisões. Depois de entendidas as duas propostas – Loja do Lar e Super Loja – por todos os alunos, os grupos perceberam que ambas as situações têm vantagens e desvantagens consoante a gestão orçamental de cada agregado familiar: "dá mais jeito pagar menos por mês" (Gabriel, Observação da Ficha de Trabalho 2). Os grupos 3 e 4 mantiveram as suas decisões e os outros grupos escolheram uma das propostas apresentando argumentos válidos:

> - É entregue um valor maior de entrada mas o juro é menor (Grupo 1).
> - A mensalidade é menor (Grupo2).
> - A mensalidade é menor (Grupo5).
>
> (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2)

Para além da dificuldade na compreensão do problema, considera-se que os alunos hesitaram e não conseguiram concluir a tarefa pois esta constituía uma proposta de trabalho completamente diferente em relação aos exercícios/problemas que lhes foram sendo apresentados ao longo do seu percurso escolar. Desta forma, perante uma tarefa que não lhes era familiar, não conseguiram interpretar os números envolvidos e definir estratégias. Por outro lado, como referiram no início do estudo, não estavam habituados a trabalhar em grupos e de forma autónoma na aula de Matemática.

Em relação à Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5), nesta proposta os alunos trabalharam números racionais relativos associados a temperaturas do ar. Na primeira tarefa a maioria dos grupos não conseguiu estabelecer uma relação entre a localização das cidades e a amplitude térmica calculada e, assim, interpretar os diferentes valores obtidos. Apenas um dos grupos conseguiu estabelecer e justificar esta relação. Na segunda parte da aula foram discutidos, em grande grupo, os valores da tabela e foi esclarecido o conceito de amplitude térmica. Contudo, também foi necessário fazer referência à localização das cidades: "os locais com maior amplitude térmica são Évora e Bragança, agora já temos bem mas não sei onde fica Bragança. – Rita – deve ser no Norte" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3).

Durante o debate os alunos já revelaram alguma compreensão da relação que se estabelece entre interioridade e a amplitude térmica, identificando que os locais onde se regista maior amplitude térmica são cidades do interior do país enquanto que os locais onde se registam as mais baixas amplitudes térmicas são locais do litoral de Portugal. Mas, como já foi referido, apenas um grupo conseguiu interpretar a informação numérica e estabelecer esta relação sem a ajuda da professora.

Relativamente às temperaturas extremas já atingidas no planeta, os alunos revelaram compreender a ordem de grandeza dos números apresentados: "-89ºC é muito frio (...) e aquele onde estava -89ºC? – Gabriel – deve ser no Pólo Norte" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3).

Em relação aos dados da segunda tabela da Tarefa 2 (Anexo 5) também perceberam que para um dia de Janeiro as temperaturas de Jacarta e Luanda eram muito quentes mas não conseguiram estabelecer uma relação entre a localização das cidades e o facto de registarem temperaturas muito mais altas que os restantes valores da tabela. Foi necessário discutir a localização de todas as cidades referidas.

Os alunos também se revelaram particularmente interessados nos dados da Tarefa 3 – Temperaturas no Sistema Solar (Anexo 5). Associaram uma temperatura a um planeta e reconheceram que das temperaturas referidas apenas uma faria sentido para o planeta Terra:

> - Será 22º porque as outras temperaturas são muito baixas ou muito altas – Grupo 1.
> - 22º porque está a uma distância razoável do Sol – Grupo 4.
> - 22º porque é o mais natural de acontecer. – Grupo 5.
>
> (Resolução da Ficha de Trabalho 3)

Do mesmo modo associaram as temperaturas mais altas aos planetas mais perto do Sol – Vénus e Mercúrio:

> - 350ºC e 480º C porque estão mais perto do Sol (Grupo 2).
> - 350ºC e 480º C porque são as temperaturas mais altas (Grupo 4).
>
> (Resolução da Ficha de Trabalho 3)

Desta forma os alunos revelaram compreender a informação numérica que foi apresentada nas tarefas 2 e 3.

Sentido de Operação

Compreensão das Operações

Na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), os alunos associaram às expressões "metade", "terço" e "dobro" uma divisão por dois, uma divisão por três e uma multiplicação por dois, respectivamente, revelando adequação das operações aos conceitos referidos. Também identificaram, na maior parte dos casos, os raciocínios aditivos e subtractivos presentes nas situações apresentadas nas fichas de trabalho.

A maioria reconheceu que a palavra "diferença", utilizada para definir amplitude térmica, indica uma subtracção. Apenas um dos grupos de trabalho não determinou correctamente a amplitude térmica das temperaturas nas cidades, por não compreender a operação a ela associada: o Grupo 4 dividiu a temperatura máxima pela temperatura mínima. Mas relativamente à expressão "variação", usada para comparar temperaturas em diferentes locais, nem todos os grupos a associaram a uma subtracção.

Para além de alguma dificuldade em associar a subtracção às situações descritas, na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5), alguns grupos revelaram também dificuldades em subtrair números relativos (subtracção entre números positivos, subtracção entre dois números negativos, subtracção entre um número positivo e um número negativo). Como realizaram as operações sem lhes atribuir significado, depois não mostraram sentido crítico em relação aos valores incorrectos obtidos. Por exemplo, em 2.4 (Anexo 5), para determinar quantos graus centígrados se previam a menos em Oslo (-2,1°C) do que em Tallinn (-1,8°C) os alunos do Grupo 4 indicaram uma diferença entre os dois valores e obtiveram como resultado -3,9°C. Realizaram a operação sem ter em conta o contexto e não reconheceram que o valor obtido não fazia sentido em relação à questão colocada. Todos os alunos indicaram, para questões deste tipo, uma subtracção entre as temperaturas correspondentes às cidades referidas que realizaram simbolicamente e em alguns casos de forma incorrecta.

De facto, parece que os alunos realizam cálculos sem atribuir significado à operação que estão a realizar ou às quantidades e conceitos envolvidos. Por exemplo, na Questão 3, Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), era solicitado aos alunos que comentassem um grupo de adições envolvendo fracções (Figura 7):

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\stackrel{?}{=}\frac{4}{8} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\stackrel{?}{=}\frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\stackrel{?}{=}\frac{2}{7} \qquad \frac{0}{4}+\frac{1}{5}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9}$$

Figura 7 – Questão 3, enunciado da Ficha de Trabalho 2.

Todos os grupos concluíram que os cálculos apresentados estavam errados "porque não têm os denominadores iguais e os denominadores não se somam" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Grupo 4). Contudo, quando lhes foi solicitado que escolhessem uma das adições e criassem um problema por ela traduzida os alunos revelaram dificuldade em atribuir um significado à adição de fracções, pois apenas dois grupos responderam correctamente. Por exemplo, o Grupo 5 apresentou a seguinte situação (em relação a $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$): " A Joana comeu $\frac{1}{3}$ dum bolo e o Rui comeu mais $\frac{1}{3}$. Quanto sobrou?". Os alunos mostraram assim pouca compreensão do significado das operações adição e subtracção com fracções embora consigam descrever o procedimento correcto para realizar essas operações: " – Isto está bem: 3+3 dá 6 – Ricardo; - Não os denominadores não se somam – José" (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 2).

Em relação às fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, que surgem como operadores, nem todos os grupos de trabalho as associaram a uma divisão por dois e por quatro. Do mesmo modo, não conseguiram interpretar a fracção $\frac{2}{3}$ como operador e fazer-lhe corresponder uma divisão por três e uma multiplicação por dois. Contudo, todos os grupos reconheceram $\frac{1}{6}$ como operador da sexta parte e associaram-lhe uma divisão por seis.

Conclui-se que, para além de muitas vezes não atribuírem sentido às operações que realizam, os alunos em alguns momentos da resolução das tarefas em grupo, revelaram dificuldade em reconhecer, no contexto do problema, a operação mais adequada à situação.

Síntese

Os alunos da turma atribuíram diferentes significados ao símbolo $\frac{a}{b}$: relação parte-todo, quociente, razão, operador mas também representação de um número racional. Para além da representação na forma de fracção os alunos reconheceram outras formas equivalentes de representar os números racionais: decimais e representações visuais. Revelaram, contudo, dificuldade em compreender e manipular racionais escritos na forma de percentagem e não conseguiram estabelecer uma relação entre um número escrito nesta forma e outras formas de representação. A representação dos números na recta numérica também se revelou confusa para os alunos da turma, que nem sempre conseguiram fazer corresponder um número decimal ou uma fracção a um ponto marcado na recta.

Revelaram dificuldade em comparar números racionais representados por fracções ou esquemas, e na maior parte das tarefas, optaram pela representação decimal para estabelecer uma relação de ordem entre os números. Contudo, a ordenação e comparação de negativos não constituiu dificuldade para estes alunos.

De um modo geral, os alunos mostraram pouca compreensão e destreza com os números. Têm poucas competências adquiridas no âmbito da compreensão dos valores numéricos envolvidos num problema e no estabelecimento de uma relação entre o contexto e os cálculos a realizar. Atribuem pouco significado aos números, aos problemas e aos resultados. Neste sentido, revelaram dificuldade em fundamentar opiniões, tomar e justificar decisões, fazer comentários e estabelecer relações tendo por base valores numéricos.

Por outro lado, os alunos nem sempre conseguiram seleccionar a operação que melhor se adequa ao problema/situação pois manifestaram notórias dificuldades na interpretação e consequente definição de estratégias em situações que lhes são menos familiares.

Revelaram também pouca compreensão das operações pois, apesar de não manifestarem dificuldade nos algoritmos e na manipulação simbólica, não parecem entender o efeito das operações nos números.

Considera-se que as aprendizagens dos alunos, ao longo do seu percurso escolar e no âmbito dos Números e Operações, não fomentaram o desenvolvimento do seu sentido de número e sentido de operação. É notória a ênfase que foi colocada nos procedimentos e algoritmos e na abordagem das fracções através da relação parte-todo em tarefas pouco significativas que não favoreceram a compreensão dos conceitos e das relações que se estabelecem entre eles.

A discussão que se proporcionou a seguir à resolução de cada ficha permitiu trabalhar com os alunos competências de compreensão e interpretação de valores numéricos em contextos reais, assim como de argumentação/refutação com base em informação quantitativa desenvolvendo o sentido de número dos alunos.

Estas tarefas que envolviam exemplos reais revelaram-se significativas e despertaram o interesse dos alunos, nomeadamente a Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) que envolvia informação sobre temperaturas de Portugal, do Mundo e do Sistema Solar e da tarefa que consistia na aquisição de um conjunto de electrodomésticos (Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4)).

Capítulo VI

O Caso Inês

A Inês tem 13 anos e está a frequentar o sétimo ano pela primeira vez. Vive numa aldeia do concelho onde está inserida a escola que frequenta. Vive com os pais e o irmão de 20 anos.

É uma aluna muito responsável e que revela interesse pela escola e pelas actividades escolares. Empenha-se nas tarefas e projectos propostos o que se reflecte nos bons resultados que alcança. Foi eleita subdelegada de turma pelos colegas que a consideram uma referência, em termos pessoais e académicos, e com os quais mantém um bom relacionamento.

A Inês gosta das aulas de Matemática e das actividades/trabalhos realizados em grupos ou em pares nos quais assume quase sempre uma postura de líder, organizando o trabalho e distribuindo tarefas. Nas actividades de grupo/pares assume também uma atitude de entreajuda, revelando-se sempre disponível para esclarecer e ajudar os colegas com mais dificuldades. Considera que "aprende mais" quando tem que explicar aos outros.

Concepções da Aluna sobre a Matemática

A Inês encara a Matemática do ponto de vista curricular, isto é, como uma disciplina escolar. Nesta perspectiva refere que o conhecimento matemático é cumulativo o que torna a disciplina interessante: "é uma disciplina como as outras, mas é um pouco mais interessante porque vai-se sempre acrescentando coisas novas àquilo que já sabemos" (Questionário). Por outro lado, considera que se destaca das outras disciplinas também devido ao seu carácter prático (resolução de problemas) e à sua presença em situações quotidianas.

A Inês reconhece a importância da literacia quantitativa na sociedade actual. Quando lhe é solicitado que dê exemplos da presença da Matemática em situações do quotidiano, indica situações envolvendo compras e valores em euros – "por exemplo quando a minha mãe me pede para ir à loja comprar açúcar diz: levas 2 euros se der para comprar 4 pacotes compra, para isso é preciso a Matemática" (Questionário). Refere ainda situações em que é necessário comparar valores numéricos – "diferenciar um preço do outro, alguma coisa que seja mais cara naquela loja e mais barata noutra" e fazer divisões – "quando se vai almoçar a um restaurante para dividir a conta por todos" (Entrevista).

A aluna reconhece uma forte componente prática na Matemática - a resolução de problemas – e este é o aspecto que mais lhe agrada nesta disciplina. Refere que os problemas constituem desafios para si e podem ter vários processos de resolução – "são desafios para mim, têm várias maneiras de fazer, de pensar, não sei, que me podem encaminhar para o fazer bem" (Entrevista). Quando questionada sobre os aspectos que menos lhe agradam em Matemática, a Inês indica, sem hesitações, o cálculo algébrico e tudo o que envolva variáveis.

A Inês gosta de Matemática e considera-se uma aluna "média" a Matemática.

Concepções da Aluna sobre a Aula de Matemática

Quando questionada sobre como acha que deveria ser uma aula de Matemática a aluna responde: " divertida e trabalhosa" (Questionário). Considera, portanto, que a aula de Matemática é um espaço de trabalho onde se realizam exercícios e problemas mas reconhece que uma aula não deve ser apenas centrada no professor e deve assumir também um carácter divertido e dinâmico.

Em relação a anos anteriores refere-se às aulas de Matemática destacando a presença dos números, dos números decimais e das fracções que surgiam em "cálculos e problemas" (Entrevista). Com base nestas experiências a aluna parece associar a aula de Matemática à utilização de símbolos e algoritmos e à realização de cálculos. Ao longo da entrevista, por vezes, quando questionada sobre determinados conceitos, responde com referências a procedimentos e/ou algoritmos –" um número inteiro é um número que qualquer conta que façamos, (...) dá sempre número inteiro" (Entrevista [quando questionada sobre o que é um número inteiro]). Para além da notória falta de compreensão do conceito de inteiro a aluna descreve um procedimento para ilustrar um conceito. Do mesmo modo, em relação aos fraccionários, tenta esclarecer o conceito através de um procedimento – " os números fraccionários são os números que se divide o numerador pelo denominador" (Entrevista). Parece que as suas vivências de aula de Matemática foram, ao longo dos anos, caracterizadas por uma forte presença dos algoritmos – "aprendemos a resolvê-las... as mais complicadas, com números maiores. Várias vezes com mais de dois números como nós fazíamos na escola primária. E ... e só! (...) Eu sinto que a mais difícil de fazer, à mão, talvez seja a divisão (...) porque nos esquecemos de deixar o número para trás ou nos esquecemos de levar o número que vai de trás" (Entrevista [quando questionada como trabalharam nas aulas o tema Operações]).

Ao longo deste ano lectivo, e deste estudo, tornou-se evidente que a aluna aprecia as actividades de resolução de problemas e as tarefas em pares/grupos. Considera que "aprende mais" quando tem que explicar aos colegas (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1) embora tenha reconhecido que é difícil estabelecer uma boa dinâmica de grupo quando se evidenciam comportamentos irregulares de um dos colegas. Por outro lado, a aluna manifestou particular interesse pelas sessões de discussão em grande grupo. A Inês aprecia a resolução de tarefas em pares/grupos seguidas de discussão de conclusões em plenário onde pode explicitar raciocínios, procedimentos e conclusões. Manifesta-se particularmente interessada em actividades/problemas que envolvam situações reais. Neste estudo, por exemplo, envolveu-se bastante na resolução e discussão das tarefas propostas na Ficha de Trabalho 3, sobre temperaturas. Referiu que gostou de discutir estes assuntos na aula de Matemática e que nunca imaginou existirem temperaturas tão altas ou tão baixas. Afirmou que ficou a saber a localização de muitos locais que até então desconhecia (Observação da realização da Ficha de trabalho 3).

No que respeita à dinâmica de sala de aula, quando confrontada com a presença da tecnologia na aula de Matemática, a aluna reconhece a necessidade de recorrer à máquina de calcular para realizar alguns cálculos que surgem na resolução de exercícios e problemas. Percebe, que em certas situações, a natureza dos números envolvidos tornaria os cálculos muito difíceis e morosos pelo que é legítimo, nestas circunstâncias, o recurso a esta tecnologia. – "há contas muito grandes que se têm de fazer e perdíamos muito tempo a fazer os exercícios." (Questionário). A presença da tecnologia na aula é perspectivada apenas como meio auxiliar de cálculo.

Sentido de Número

Os Conjuntos Numéricos

Através da análise da entrevista com tarefas e do desempenho nas fichas de trabalho resolvidas em grupos (Ficha de Trabalho 1; Ficha de Trabalho 2; Ficha de Trabalho 3 (Anexos 3, 4 e 5)) parece claro que a aluna revela competências de identificação e exemplificação de elementos constituintes dos vários universos numéricos e os diferentes números que surgem no quotidiano. Contudo, não consegue apresentar uma definição clara para cada um dos conjuntos de números.

A Inês dá exemplos de números inteiros, incluindo nestes, sem dificuldade, os números negativos, reconhecendo, portanto, que existem inteiros negativos. Contudo, assegura que o zero não é inteiro mas, curiosamente, refere na entrevista dois subconjuntos dos números inteiros: os números pares e os números ímpares.

Quando lhe é solicitado que defina número inteiro a Inês afirma que "um número inteiro é um número que qualquer conta que nós façamos, dividir por um número par, dá sempre número inteiro" (Entrevista). Conclui-se que a aluna consegue dar exemplos de números inteiros mas não apropriou um conceito de número inteiro. A Inês refere ainda que em oposição aos inteiros existem os números decimais. Através destes contributos demonstra que, apesar de não conseguir definir número inteiro, possui uma noção intuitiva do conceito de inteiro.

A aluna reconhece que um número inteiro pode ser representado na forma de fracção mas que as fracções podem representar também um "número decimal". Afirma que é possível "passar" de uma fracção para um número inteiro e que por vezes é necessário escrever um número inteiro na forma de fracção. Inês refere que muitas vezes os dados dos exercícios/problemas envolvem quantidades inteiras e/ou não inteiras escritas ora na forma de fracção ora na forma de numeral decimal pelo que, para ser possível resolver esses exercícios/problemas, é necessário escrever todos os dados ou na forma de fracção ou na forma de número decimal.

Parece, portanto, não revelar dificuldade na utilização de símbolos e algoritmos, relativamente à representação de números racionais na forma de fracção, o que faz querer parecer que a ênfase das aprendizagens da Inês, no que diz respeito a Números e Operações, foi sendo, ao longo dos anos, colocada na notação simbólica e nos procedimentos desprezando os conceitos e as relações entre eles. A Inês refere na entrevista que, ao longo do 2º ciclo do Ensino Básico, o trabalho desenvolvido no âmbito do tema "Números" consistiu em escrever números na forma de fracção e/ou forma decimal distinguindo entre as fracções que representam números inteiros e as que representam números não inteiros, os números fraccionários. Contudo, a designação "números fraccionários" revela-se muita confusa para a aluna. A Inês não consegue distinguir entre número fraccionário e fracção. Considera que os números fraccionários são todas as fracções. Quando lhe foi solicitado que desse exemplos de números fraccionários a Inês indicou $\frac{2}{5}$ dizendo que é um número fraccionário " porque está numa fracção". Quando questionada sobre o que são números fraccionários a Inês refere que "os números fraccionários são os números em que se divide o numerador pelo denominador", mencionando de seguida que "a fracção é que é um número fraccionário!" (Entrevista).

Para além de não conseguir definir número inteiro também não consegue definir número fraccionário revelando uma grande confusão entre os conceitos "fraccionário" e "fracção".

Relativamente aos números racionais afirma que podem ser inteiros ou fraccionários e "que podem ter vírgulas" (Entrevista), mais uma vez manifestando confusão na utilização do termo fraccionário.

Na entrevista, quando confrontada com o conjunto dos Números Relativos, a aluna não conseguiu dar exemplos de números relativos mostrando desconhecer esta designação. Contudo, quando lhe foi solicitado que desse exemplos de números negativos não hesitou em referir vários casos do quotidiano. Considerou como exemplos da presença dos números negativos, em situações da vida real, o saldo da conta bancária e os andares do parque de estacionamento dos edifícios: "o rés-do-chão é o zero. Depois para baixo começam os negativos e para cima os positivos." (Entrevista). Inicialmente restringiu-se a dar exemplos de números negativos inteiros mas durante a entrevista chega a referir, juntamente com o colega, a existência de números negativos decimais. Mais uma vez revela possuir algumas noções intuitivas sobre os conjuntos numéricos embora não consiga clarificar os conceitos.

Pode-se concluir que possui uma noção intuitiva dos vários conjuntos numéricos e que consegue dar exemplos de elementos de cada um dos conjuntos mas que não reconhece o zero como inteiro, revelando grande confusão no uso da designação "número fraccionário".

Representações de Números Racionais: Formas Equivalentes de Representar Números Racionais

Modelos de Visualização

Durante a realização da entrevista com tarefas foi solicitado à Inês que identificasse o número racional que representa a área pintada de um rectângulo dividido em quarenta quadrados iguais (dos quais seis estavam sombreados). A Inês não revelou dificuldade em utilizar o modelo de visualização apresentado (rectângulo) para indicar a fracção que traduz a relação parte-todo, justificando que "o numerador é o número de quadrados pintados nos quarenta quadrados todos" (Entrevista).

Numa das tarefas propostas na aula, Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), o seu grupo também não revelou dificuldade em interpretar os modelos apresentados usando sempre a fracção como representação da relação parte-todo. Em 1.5, o grupo da Inês considerou também a relação parte-todo quando era apresentado um conjunto de seis bolas em que cinco dessas bolas estavam pintadas. Ao associarem a esta representação a fracção $\frac{5}{6}$ estão a considerar como o todo a colecção das 6 bolas e como a parte o subconjunto das bolas pintadas. Em 1.6 a aluna admite que inicialmente considerou o "esquema" confuso mas obtendo uma divisão em partes iguais da unidade o grupo conseguiu indicar correctamente a fracção que representa a relação parte-todo na situação ilustrada em 1.6:

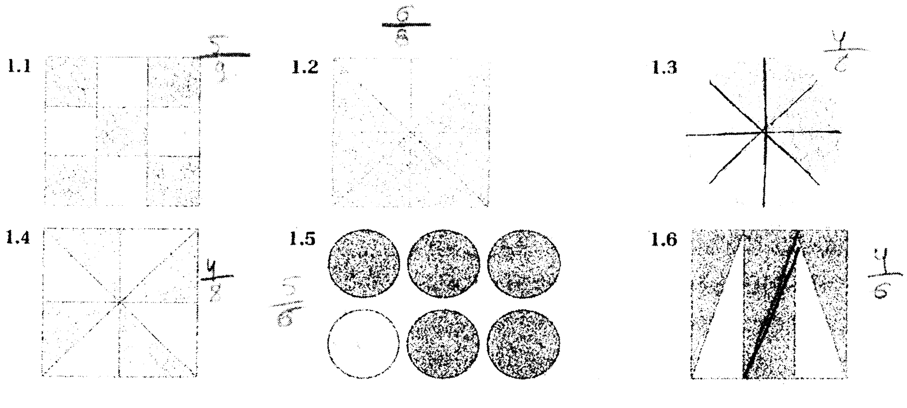


Figura 8 – Resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 3, recolhida no final da aula.

A Inês gosta de trabalhar com fracções quando tem "esquemas" com círculos ou quadrados divididos em partes iguais mas sente dificuldade quando são utilizados outros modelos de visualização.

Fracções e Numerais Decimais

Parece claro que a Inês consegue associar uma fracção, como representação da relação parte-todo, a uma determinada representação visual. Do mesmo modo compreende que a fracção é uma representação de um número racional que pode assumir outras representações. Partindo da representação em forma de fracção escreve o número racional na forma de numeral decimal fazendo uma divisão entre o numerador e o denominador. Paralelamente, a aluna, dado um racional escrito na forma de numeral decimal, consegue obter uma representação em forma de fracção. Para tal começa por representar o número racional através de uma fracção decimal e depois simplifica-a obtendo assim fracções equivalentes e/ou irredutíveis. Desta forma percebe-se que a Inês compreende a fracção como uma representação de um número (racional) mas também como um quociente, reconhecendo, como já foi referido, que pode representar números inteiros. Contudo, quando confrontada com a fracção $\frac{2}{3}$, que representa uma relação de parte-todo em que a unidade é um bolo com 1200g (Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4)), a aluna não conseguiu determinar a quantidade em causa. Consegue, portanto, utilizar as fracções para representar uma determinada parte de uma unidade contínua mas revela dificuldade em fazê-lo quando se trata de uma unidade discreta.

Percentagens

A Inês não revela dificuldade em representar por meio de uma percentagem uma quantidade quando a quantidade considerada é metade da unidade: "em 1.3 e 1.4 foi muito fácil encontrar a percentagem porque era metade, logo 50%, nos outros casos é necessário fazer contas" (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 1). Do mesmo modo, na entrevista (Tarefa 1, Questão 1.1 a)) percebe claramente que a região sombreada não poderia corresponder a 50% do rectângulo pois "metade de quarenta seria vinte quadrados que deveriam estar pintados. Neste caso só estão seis" (Entrevista), indicando de seguida, e sem fazer cálculos, o número de quadrados que é necessário preencher para atingir essa percentagem: "metade de 40 são 20. Temos 6 quadrados pintados e 20-6 são 14" (Entrevista). Contudo não reconhece a percentagem 25% como a quarta parte da unidade dividida em quarenta quadrados iguais. Refere que 25% é um terço e recorre à regra de três simples para determinar a percentagem correspondente à zona sombreada.

Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), para representar os números racionais na forma de percentagem, o grupo da Inês utilizou uma regra de três simples, usando como referência a fracção que representa o número racional. Por exemplo, para escrever $\frac{4}{5}$ na forma de percentagem os alunos fizeram 5 para 100% e 4 para x, obtendo assim 80%. Esta resolução revelou-se curiosa pois os alunos dispunham da representação decimal do número, 0,8. Do mesmo, e durante a entrevista com tarefas, a Inês fundamenta a percentagem de área sombreada na regra de três simples e não no numeral decimal já obtido, 0,15. A Inês denota que não consegue associar uma percentagem a um numeral decimal. Mais uma vez revela dominar os algoritmos mas não demonstra compreender os conceitos e as relações entre eles.

Na Questão 2.5 da Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) os alunos foram confrontados com o facto da fracção $\frac{6}{5}$ corresponder à percentagem 120%. Nesta situação o grupo da Inês já fez referência à representação decimal do número, justificando que a percentagem excede os 100% porque $\frac{6}{5}$ representa um número maior que a unidade (1,2). Na mesma ficha de trabalho usaram, novamente, o raciocínio proporcional para calcular a parte de um todo quando essa parte está representada na forma de percentagem (neste caso 3% e 6%).

A Recta Numérica

Através da resolução da Questão 2.1 da Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3) percebe-se que a Inês consegue associar um número decimal a um ponto marcado na recta numérica embora tenha referido que esta representação dos números racionais é um pouco confusa (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1).

Ordenação e Comparação de Números Racionais

Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), para comparar as visualizações 1.5 e 1.6 (que correspondem às fracções $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{6}$), a Inês e os elementos do seu grupo fizeram esta análise sem recorrer aos algarismos que constituem a fracção baseando-se, apenas, na representação das duas partes: " A figura maior é a 1.5 porque tem a mesma quantidade de divisões mas tem mais coloridas, logo é maior que a 1.6" (Resolução da Ficha de Trabalho 1, Questão 1.8). Da mesma forma procederam à comparação das visualizações 1.1 e 1.5 (que correspondem às fracções $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{6}$):

> - Têm o mesmo número de divisões pintadas mas como 1.1 tem mais divisões por pintar... Em 1.1 faltam pintar 4 e no 1.5 falta apenas 1, logo 1.5 é maior.
> - 1.1 é maior que 1.5 porque tem mais quadrados.
> - Mas a 1.5 tem menos quadrados por pintar.
>
> (Discussão no Grupo 3 – grupo da Inês)

A aluna conseguiu comparar números racionais recorrendo apenas a modelos de visualização, revelando compreender, claramente, a relação parte-todo.

Para ordenar números racionais, nas várias propostas incluídas nas fichas de trabalho, a aluna escreveu os números na forma de numeral decimal e de seguida representou-os na recta numérica, "para perceber qual vem primeiro" (Observação da Realização da Ficha de Trabalho 1). Procede do mesmo modo para comparar e ordenar números racionais relativos não revelando dificuldade em comparar quantidades negativas.

Na Questão 1.3 a) da Tarefa 1 da entrevista a aluna refere que entre os números 3, -2 e -5 o menor deles é -5 pois "tem mais valores abaixo de zero" (Entrevista).

A Inês não manifesta dificuldade em comparar e ordenar números racionais, quer surjam na forma de fracção quer noutras formas de representação.

Números Racionais Maiores que Um

Para identificar fracções que representam números racionais maiores que um, a aluna e o seu grupo de trabalho consideraram, mais uma vez, a fracção como representativa de um número e não como dois números (o numerador e o denominador). Desta forma não recorreram à comparação do numerador e do denominador para estabelecer uma ordem de grandeza do número racional que a fracção representa, optando por fazer a divisão entre o numerador e o denominador e escrever os números racionais na forma de numeral decimal. Com os números escritos na forma de numeral decimal puderam estabelecer e reconhecer a sua ordem de grandeza.

Compreensão dos Valores e Fundamentação de Opiniões

Quer na entrevista com tarefas quer nas fichas de trabalho propostas para a sala de aula a Inês tentou justificar as suas opiniões sobre as situações quotidianas apresentadas. Durante as discussões em grande grupo procurou intervir justificando as conclusões do seu grupo com base nos valores obtidos através de cálculos.

Relativamente à aquisição de um conjunto de electrodomésticos, proposta da Ficha de Trabalho 2, Tarefa 5 (Anexo 4), os elementos do seu grupo, inicialmente, não partilhavam da mesma opinião em relação à loja que proporcionaria a melhor compra. Foi o grupo onde assisti a uma discussão mais intensa sobre a decisão a tomar:

> - Bem, isto da entrada é o que se paga logo. Por isso na primeira a entrada é menos porque é só um quarto e na segunda é metade. – Inês.
> - Esta mensalidade é mais porque é só num ano que é 12 meses e na outra loja já se pode pagar em mais meses. – Carlos.
> - Por isso paga-se menos por mês. – Inês – mas tens que andar a pagar durante dois anos.
> - Isso depende do dinheiro que as pessoas têm – Carlos. - Eu prefiro a segunda loja a pagar em dois anos!
> - Mas se pagares só num ano ficas logo despachado. – Inês.
> - Olhem na Loja do Lar só se dá 505,15€ no início enquanto que na Super Loja paga-se logo 1010,30€. É muito dinheiro assim de uma vez. – Inês.
>
> (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2)

Neste diálogo a Inês revela compreensão dos valores numéricos envolvidos na situação. Sem realizar cálculos afirma, relativamente ao valor da entrada, que metade do total das compras é um valor maior que um quarto do total das compras. Só posteriormente realiza cálculos para confirmar a sua afirmação (também na Questão 1 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) afirma "metade de 12 é mais que um terço" sem realizar quaisquer cálculos). Nesta tarefa revela possuir percepção da ordem de grandeza dos valores em causa envolvidos, comentando, inclusive, o valor 1010,30€, muito provavelmente tendo por base a sua realidade socio-económica. Intuiu, também, que um maior prazo de pagamento implica uma menor prestação mensal mas, consequentemente um compromisso durante um maior período de tempo.

Após a discussão o grupo realizou um conjunto de cálculos optando, no final, pela "Loja do Lar", justificando que: " é melhor pagar menos de entrada e mais mensalmente durante um só ano" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Questão 5). A Inês percebeu que ambas as situações têm vantagens e desvantagens e que a opção depende, acima de tudo, das particularidades do orçamento familiar de cada família: "Cada pessoa é que escolhe o que dá mais jeito." (Observação da realização da Ficha de Trabalho 2).

Ainda em relação a esta tarefa a Inês confessou que o grupo sentiu dificuldade na compreensão de todos os dados do problema. Referiu que a situação foi lida muitas vezes por todos e que os juros lhes fizeram muita confusão. De facto, o juro aplicado em cada loja não constituiu um dos factores de escolha, pois, provavelmente, não estarão muito familiarizados com estes aspectos da vida real. Atendendo à justificação do grupo da Inês – " é melhor pagar menos de entrada e mais mensalmente durante um só ano" (Resolução da Ficha de Trabalho 2, Questão 5) – e tendo em conta que não apresentam quaisquer cálculos ou raciocínio envolvendo os juros propostos pelas duas lojas, das quatro condicionantes em jogo (entrada, mensalidade, prazo de pagamento e juros), os alunos apenas fundamentaram as suas opiniões com base nas três primeiras.

Na Tarefa 4, da mesma Ficha de Trabalho (Anexo 4), a aluna também revela alguma confusão na interpretação dos valores numéricos que ilustravam a situação. Refere que considera confuso o bolo ter 1,2 kg mas os 8€ ser o preço do kg e não o preço do bolo.

Uma outra tarefa em que a aluna revelou muitas dificuldades em interpretar a informação numérica que constituía os dados do problema foi a Tarefa 1.2, da entrevista. Neste caso a Inês não conseguiu perceber que os dados numéricos fornecidos se referiam a uma razão entre a quantidade de água e a quantidade de concentrado utilizados na preparação do sumo. Insistiu, sempre, que as duas preparações resultariam num sabor igual pois utilizou um raciocínio subtractivo para comparar os dois copos: o Copo B tem menos uma colher de concentrado que o A e tem menos uma colher de água que o A, o que resultaria numa preparação com igual sabor. Não conseguiu interpretar a situação, nem mesmo com a ajuda do colega.

Nessa mesma tarefa era apresentado um recorte de uma embalagem de sumo com a frase: "teor mínimo de sumo: 20%". Neste caso a Inês já decifrou a informação numérica da embalagem considerando que os 20% se referiam apenas à parte do refrigerante constituída por sumo de fruta: "20% do que o sumo contém é daquele sabor; é mesmo... é mesmo daquele sabor só! Sem estar junto com água ou outra coisa (...) que é só sumo; sem mais nada." (Entrevista).

Por outro lado, na entrevista envolvendo a Tarefa 1.3, a aluna mostrou compreender claramente os valores numéricos envolvidos na situação descrita que, neste caso, diziam respeito a temperaturas fictícias de localidades de Portugal Continental. Nessa tarefa os alunos foram confrontados com as temperaturas 3ºC, -2ºC e -5ºC. A Inês indicou o mês de Janeiro como a altura do ano provável para a situação descrita pois considerou que seriam temperaturas frias. Comentou ainda que, muito provavelmente, a primeira diria respeito à zona de Santarém e as outras duas a localidades do norte do país e indicou 20ºC como uma temperatura quente. A aluna conseguiu, portanto, associar a valores numéricos uma determinada característica (tempo frio/tempo quente) e estabelecer uma correspondência entre um determinado valor da temperatura e o mês do ano em que seria registado. Estabeleceu também uma relação entre os valores apresentados e a localização geográfica. Desta forma, pode-se afirmar que a Inês revela compreender bem a ordem de grandeza dos valores analisados nesta situação e a realidade que estes números traduzem, produzindo comentários e fundamentando as suas opiniões com base nesses valores numéricos.

As tarefas com situações envolvendo temperaturas foram muito apreciadas pela Inês. Na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) foram referidas temperaturas médias à superfície dos planetas que constituem o Sistema Solar. Nesta situação a aluna revelou compreender os números envolvidos e mais uma vez produziu comentários com base nos valores numéricos apresentados: "480º é calor demais. Não se pode lá estar". (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3). Conseguiu também associar uma temperatura a um planeta de acordo com a sua posição relativa ao Sol:

> - O mais frio é 237 negativos. Deve ser Júpiter. – Carlos.
> - Não! Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Úrano, Neptuno e Plutão – Inês – O último, o mais frio é Plutão.
>
> (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3)

Quando foi solicitado aos alunos que, das temperaturas apresentadas, indicassem a temperatura relativa ao planeta Terra, a Inês e o seu grupo de trabalho escolheram 22º, "porque as outras temperaturas não podem ser tão elevadas nem mais baixas." (Resolução da Ficha de Trabalho 3). Em relação a Vénus e Mercúrio indicaram sem dificuldade 350ºC e 480º C "porque é onde as temperaturas são maiores" (Resolução da Ficha de Trabalho 3). Desta forma, a Inês revela compreender a realidade, no que respeita à temperatura do ar, transmitida pelos valores apresentados.

Também na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) foram apresentadas temperaturas extremas já registadas no planeta Terra. A Inês ficou surpreendida com os valores da tabela pois "nunca imaginou existirem temperaturas tão altas ou tão baixas" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3). Reconheceu, portanto, que esses valores são muito diferentes das temperaturas máximas e mínimas que se registam no nosso país ao longo do ano. Percebeu que não são situações possíveis de encontrar actualmente em Portugal Continental.

Ainda na mesma Ficha de Trabalho foram apresentadas, para o mesmo dia de Janeiro, temperaturas relativas a várias cidades mundiais. O facto de se encontrar na tabela números muito elevados, comparativamente à realidade do nosso país nessa altura do ano, surpreendeu-a. Apesar de desconhecer a localização de algumas dessas cidades percebeu que estariam situadas em zonas mais quentes do planeta durante o mês de Janeiro, comentando: "Há sítios que mesmo no Inverno faz muito calor. – Inês. – Luanda é em África?" (Observação da Ficha de Trabalho 3).

Também a propósito da compreensão dos valores numéricos envolvidos num problema e da fundamentação de opiniões, com base em valores numéricos nesta mesma Ficha de Trabalho (Tarefa 1, Anexo 5), a Inês, em conjunto com o seu grupo de trabalho, conseguiu identificar alguns dos locais onde se registava maior e menor amplitude térmica. Contudo, não conseguiu estabelecer uma relação entre amplitude térmica e interioridade, contradizendo a sua resposta anterior. Começou por afirmar que as maiores amplitudes térmicas foram registadas em Évora e em Bragança e as menores em Lisboa e Porto (resposta incorrecta: deveria referir Lisboa e Faro) mas de seguida concluiu que "no litoral a amplitude térmica é maior e no interior a amplitude térmica é menor porque estão mais longe do mar" (Resolução da Ficha de Trabalho 3, Questão 1.2.3). Nesta tarefa a Inês teve um desempenho deficiente provavelmente porque, para além da compreensão e interpretação de valores numéricos, era necessário relacionar dois conceitos: amplitude térmica e interioridade o que se revelou muito complexo para a aluna. O desconhecimento da localização das cidades de Portugal também pode ter condicionado a compreensão da situação referida nesta tarefa.

Nas situações envolvendo temperaturas, negativas e positivas, a Inês, na maior parte das situações, compreende os números envolvidos nas situações descritas e consegue fundamentar as suas opiniões com base em valores numéricos.

Sentido de Operação

Compreensão das Operações

A Inês revelou, em algumas tarefas, dificuldade em reconhecer, no contexto de situações da vida real, a operação que se adequa à situação em causa.

Na Tarefa 2 da entrevista foi solicitado à aluna que indicasse um valor numérico correspondente à parte do sumo de laranja ingerida pelos rapazes. Nesta questão a Inês não teve dúvida em afirmar que seria necessário realizar uma adição. Afirma que é necessário "somar porque é para juntar o que os dois rapazes beberam" (Entrevista). Na questão seguinte, para determinar a parte consumida pela Isabel (parte restante do sumo), também não teve dúvidas em associar ao cálculo da parte consumida pela Isabel uma subtracção: "porque estamos a tirar do total aquilo que os rapazes beberam" (Entrevista). Neste problema a Inês associa um ao total da bebida, reconhecendo que quando trabalha com fracções que representam a relação parte-todo, a unidade, neste caso o jarro de sumo, é representada por um.

Mais uma vez a Inês parece só conseguir obter uma resposta com recurso a algoritmos (Figura 9).

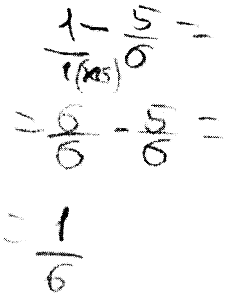


Figura 9 – Cálculos realizados pela aluna durante a entrevista com tarefas e registados na folha de rascunho recolhida pela investigadora no final da entrevista – Tarefa 2 b).

Foi questionada, então, se o resultado obtido fazia sentido no contexto do problema. A Inês revelou compreensão dos cálculos que tinha realizado: "faz porque um sexto mais cinco sextos é igual a seis sextos e seis sextos é igual a 1" (Entrevista).

Nesta fase da resolução da tarefa a Inês recorreu ao número um para representar toda a bebida, pois não sabia a quantidade de sumo que se encontrava no jarro. Seguidamente foi-lhe solicitado que considerasse que no jarro há 3 litros de sumo e que calculasse a quantidade, em litros, consumida por cada um dos amigos, isto é, pretendia-se que calculasse metade de 3 litros, um terço de 3 litros e a quantidade restante. A Inês associou de imediato o cálculo da metade a uma divisão por dois obtendo 1,5. Contudo, para continuar a tarefa, sentiu necessidade de registar conclusões na folha de papel. Ao fazê-lo já registou uma outra operação: a subtracção (Figura 10).

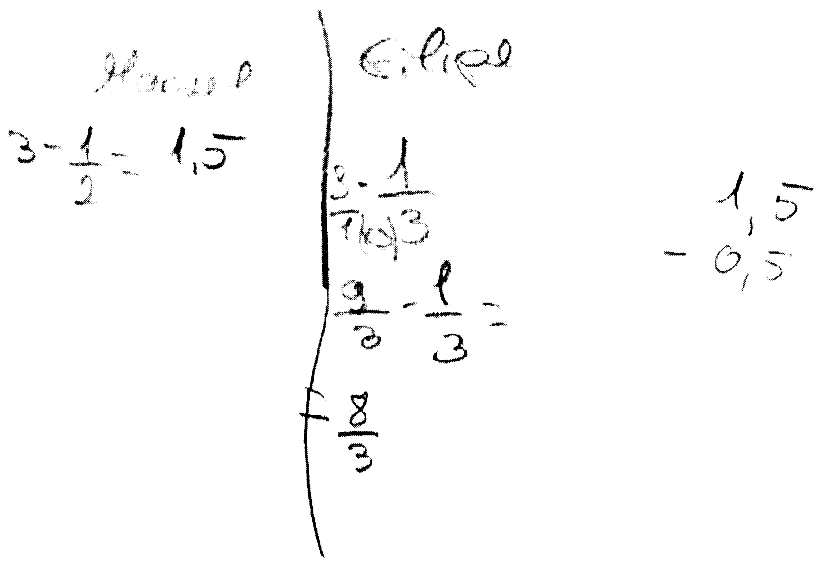


Figura 10 – **Cálculos realizados pela aluna durante a entrevista com tarefas e registados na folha de rascunho recolhida pela investigadora no final da entrevista – Tarefa 2 c).**

Parece que a Inês decidiu usar o raciocínio subtractivo anterior mas desta vez considerando o número três para representar a unidade, isto é, o jarro de sumo. Quando confrontada com a sua resolução reconheceu que os cálculos indicados e a operação escolhida (subtracção) não lhe iriam permitir determinar as quantidades solicitadas. Só com a ajuda do colega conseguiu perceber a resolução da tarefa.

Ainda analisando a mesma situação foi perguntado à aluna quantos litros tinha o Filipe bebido a mais do que a Isabel. Nesta questão a Inês decidiu realizar uma subtracção porque " estamos a comparar o que o Filipe bebeu em relação à Isabel" (Entrevista). Contudo, na questão seguinte, em que se pretende determinar quantas vezes mais a quantidade ingerida pelo Manuel é maior que a quantidade ingerida pela Isabel, a Inês voltou a usar uma subtracção fazendo 1,5 menos 0,5 obtendo um. Porém, reconheceu que este resultado não fazia sentido no contexto da questão colocada. Apercebeu-se, então, que o valor obtido (um) representa "o que ela bebeu a menos do que ele" (Entrevista). Para corrigir a sua resposta, e conseguir indicar quantas vezes mais a quantidade ingerida pelo Manuel é maior que a quantidade ingerida pela Isabel, a aluna procura, de uma forma intuitiva, estabelecer uma relação entre os valores envolvidos – 1,5 e 0,5, afirmando que 1,5 corresponde a três vezes 0,5 e concluindo que o Manuel ingeriu uma quantidade de sumo três vezes superior à quantidade ingerida pela Isabel – "a Isabel bebeu 0,5 que é 1 vez e depois como o Manuel bebeu 1,5 é 3 vezes 0,5" (Entrevista). Neste caso reconheceu que para comparar valores nem sempre se usa uma subtracção. Contudo não conseguiu identificar e justificar uma operação para a segunda questão da tarefa em causa.

A compreensão das operações, o seu efeito sobre os números e a escolha da operação que se deve realizar em cada situação foi também considerada nos trabalhos de grupo (Fichas de Trabalho 2 e 3). Na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), a Inês não teve dificuldade em reconhecer os conceitos de metade, terço e dobro e as operações a eles associadas (divisão por 2 e 3 e multiplicação por 2) assim como perceber os raciocínios aditivos e subtractivos presentes nas situações apresentadas. Identificou as palavras "diferença", utilizada para definir amplitude térmica, e "variação", usada para comparar temperaturas em diferentes locais, com uma subtracção. Do mesmo modo associa as expressões "restante" e "sobra" a subtracções. Na entrevista, Tarefa 1.2, à " subida" de temperatura a Inês associou uma adição e à "descida" de temperatura associou uma subtracção.

Relativamente às operações adição e subtracção com números relativos a Inês não revela dificuldade mostrando alguma compreensão do efeito que estas operações têm sobre os números: "Soma-se 2ºC aos negativos [-2] que vai dar 0 mais os outros 2 que vai dar 2 positivos" [a propósito de -2 + 4] (Entrevista). Relativamente à subida de temperatura de 4ºC na localidade que registava na altura -5ºC a Inês comenta: "dá -1. Sobe 4º mas como o número era maior continua a ser negativo" (Entrevista). Contudo, nesta situação, quando questionada sobre quantos graus centígrados teria então que subir a temperatura para atingir valores positivos a Inês não indicou uma quantidade superior a cinco. Na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) não revelou qualquer dificuldade em adicionar e subtrair números relativos.

Em relação às fracções $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, que surgem nesta Ficha de Trabalho como operadores partitivos, a Inês e o seu grupo de trabalho, associaram $\frac{1}{2}$ à metade fazendo uma divisão por dois, procedendo do mesmo modo para $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Em relação à fracção $\frac{2}{3}$, como operador partitivo multiplicativo, a Inês não conseguiu compreender este significado da fracção e calcular $\frac{2}{3}$ de 1200g (divisão por 3 e uma multiplicação por 2). A aluna afirmou que não conseguiu perceber quantas fatias representava $\frac{2}{3}$ porque o bolo foi dividido em seis e não em três.

Nem sempre a aluna conseguiu atribuir um significado às operações realizadas com um par de números. Na Questão 3.2 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) era solicitado que seleccionassem uma das operações indicadas e criassem um problema traduzido por essa operação. Para $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ a aluna considerou a seguinte situação: "A Ana comprou um chocolate de 50 g e comeu logo $\frac{1}{3}$. O David comprou um chocolate de 100g e comeu logo $\frac{1}{3}$. Qual deles foi o que comeu mais?". Através deste contributo percebe-se que a Inês não consegue interpretar o significado de adição de fracções quando estas representam uma relação parte-todo.

Relativamente a outros algoritmos analisados, nas Fichas de Trabalho, o cálculo de percentagens foi sempre obtido através do raciocínio proporcional com recurso à regra de três simples onde a Inês não revela dificuldade.

Propriedades e Relações das Operações

Durante a entrevista foi solicitado aos alunos que identificassem as operações que conheciam assim como dificuldades na realização dessas operações. A Inês referiu as operações adição, subtracção, multiplicação e divisão. Afirmou que "a mais fácil é a soma" (Entrevista) mas destacou a divisão como sendo aquela em que revela mais dificuldade: "eu sinto que a mais difícil de fazer, à mão, talvez seja a divisão (...) porque nós nos esquecemos de deixar o número para trás ou nos esquecemos de levar o número que vai de trás, e já vai mal" (Entrevista). A aluna considera que o algoritmo da divisão é difícil, e principalmente quando envolve números muito grandes. Nestes contributos a aluna considerou apenas as operações entre números inteiros positivos.

Quando confrontada com operações entre números racionais, a Inês não revelou grande dificuldade nos procedimentos. Nas operações com números escritos na forma de fracção, reconheceu que "os denominadores não se somam. Para somar deve-se ter os denominadores todos iguais" (Entrevista). Esta referência da Inês remete-nos para uma mecanização de um algoritmo e não para a real compreensão da adição/subtracção de fracções quando estas representam uma relação parte-todo, aspecto já considerado no subcapítulo anterior, a propósito da resolução do grupo de trabalho da Inês para a Questão 3.2 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) e do desempenho da aluna na Tarefa 2c) da entrevista.

No que respeita às operações com números relativos, a aluna e os restantes elementos do grupo, também não revelaram dificuldade. A Inês, contudo, comentou que: "números negativos com casas decimais ficam muito confusos e que é difícil fazer as contas" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 3).

Relativamente às operações identificadas pela Inês – adição, subtracção, multiplicação e divisão – a aluna referiu que se pode estabelecer uma relação entre a multiplicação e a divisão. Não conseguiu definir esta relação mas exemplificou-a: "3 a dividir por 2 é igual a um e meio e um e meio vezes 2 é igual a 3" (Entrevista), o que na sua opinião significa: "se nós multiplicarmos o resultado da divisão irá dar o primeiro número que nós metemos na divisão" (Entrevista). Não identificou mais relações entre as operações.

Em relação às propriedades das operações a Inês identificou a propriedade comutativa da adição e da multiplicação. Neste último caso refere que "na multiplicação os números trocados ou não vai dar sempre o mesmo resultado" (Entrevista).

No que respeita ao tema Operações, parece que a ênfase das suas aprendizagens foi colocada nos procedimentos. A aluna revela fraco conhecimento e compreensão do efeito das operações nos números, as relações que se estabelecem entre as operações e as propriedades das operações.

Síntese

A Inês revela possuir noções intuitivas sobre os vários conjuntos numéricos: números inteiros, números fraccionários, números relativos e números racionais. Identifica elementos de cada conjunto e reconhece a presença desses números em situações do quotidiano. Contudo, revela não conseguir distinguir entre números fraccionários e fracção. Não reconhece o zero como número inteiro e desconhece a designação "números relativos". As suas aprendizagens parecem ter sido centradas na notação simbólica e nos procedimentos pelo que a aluna não consegue clarificar conceitos.

A aluna identifica e manipula diferentes representações dos números racionais: fracções, numerais decimais, percentagens e representações visuais. No entanto, reconhece que existem representações mais úteis que outras consoante o problema. Consegue relacionar a representação em forma de fracção com outras representações equivalentes – em forma de numeral decimal, em forma de percentagem e representação visual. Contudo partindo da representação decimal apenas consegue obter a representação em fracção, revelando dificuldade em, dado um numeral decimal associar-lhe um valor em percentagem.

Para a Inês a fracção assume vários significados: forma de representar um número racional; relação parte-todo de unidades contínuas e discretas; quociente entre dois números; operador partitivo. No entanto, revela dificuldade em interpretar a fracção como operador partitivo multiplicativo.

A Inês revela competências no âmbito da comparação e ordenação de números racionais. Para comparar e ordenar racionais, escreve-os na forma de numeral decimal e representa-os na recta numérica. Utilizou quase sempre este procedimento embora também tenha revelado ser capaz de comparar números recorrendo a representações visuais.

A aluna nem sempre foi capaz de identificar e compreender os números envolvidos nas situações descritas. Manifestou dificuldade em perceber o problema em que lhe foi apresentado um bolo com 1200 g e na interpretação das razões água/concentrado de sumo na preparação de um copo de sumo de laranja. Em todo o estudo nunca associou a fracção a uma razão. Contudo, nas actividades envolvendo temperaturas médias do ar, a aluna reconheceu o valor relativo dos números apresentados, conseguiu manipular esses números e comentar as várias situações.

Revelou ser capaz, em vários momentos do estudo, de reflectir sobre os números e os seus significados. Mas, por outro lado, nem sempre a Inês mostrou compreender a relação entre o contexto do problema e os procedimentos necessários utilizando, por vezes, operações despropositadas, não atribuindo significado às operações realizadas.

Apesar de dominar os algoritmos, revela pouca compreensão do efeito das operações nos números, das suas propriedades e das suas relações.

Capítulo VII

O caso José

O José tem 13 anos e vive com os pais numa aldeia não muito perto da escola. É um rapaz calmo e introvertido mas mantém uma relação próxima com alguns dos colegas de turma.

É um aluno responsável, interessado e empenhado nas tarefas escolares. Gosta de Matemática e revela-se muito concentrado durante as aulas, participando activamente. Nas aulas com tarefas realizadas em grupos/pares assume uma postura assertiva ouvindo com atenção as propostas dos colegas e expondo as suas ideias/sugestões para a resolução dos exercícios e problemas. Contudo, por vezes, revela dificuldade em comunicar de uma forma clara, os seus raciocínios, aos colegas e à professora.

Concepções do Aluno sobre a Matemática

Também o José perspectiva a Matemática como uma disciplina escolar caracterizando-a através da sua aplicabilidade e importância na resolução de problemas da vida quotidiana: "a Matemática para mim é uma disciplina importante que nos vai ajudar toda a vida" (Questionário). Durante a entrevista reforça a sua ideia sobre a importância do conhecimento matemático para o cidadão actual: "a Matemática é uma disciplina que envolve problemas; que é boa para o dia-a-dia (...) podemos precisar dela a qualquer momento" (Entrevista). Refere como exemplos da aplicabilidade da Matemática em contextos reais as compras e as situações envolvendo cálculos com euros: "a Matemática serve para isso, quando vamos às compras sabermos quanto dinheiro é que temos de pagar e não sermos enganados" (Entrevista). Relativamente à questão das situações envolvendo aquisição de produtos o aluno destaca a importância da literacia matemática na comparação de preços: "qual é o mais barato, o mais caro; o IVA, se tem o IVA incluído, se não tem" (Entrevista) e na comparação dos preços com e sem desconto. O José revelou-se sempre muito interessado nestes exemplos durante as aulas de Matemática, em particular na comparação de preços de artigos similares apresentados com e sem IVA. Refere que este assunto foi, inclusivamente, discutido em casa, com os seus pais.

O José considera-se um aluno "médio" a Matemática. Refere que o que lhe agrada mais em Matemática são os problemas "porque temos que escrever, temos que interpretar e depois é que podemos fazer as contas" (Entrevista) e os exercícios envolvendo fracções. Em relação ao aspecto que menos lhe agrada em Matemática afirma não gostar quando resolve os exercícios e tarefas de forma errada.

Concepções do Aluno sobre a Aula de Matemática

O José gosta das aulas de Matemática revelando-se sempre interessado e concentrado. No início do ano lectivo, as suas expectativas sobre a aula de Matemática pareciam estar relacionadas com a resolução de exercícios, de uma forma exaustiva e mecanizada, associada apenas aos conteúdos e não ao desenvolvimento de competências: "eu acho que uma aula de Matemática deve ter bastante trabalho para conseguirmos aprender bem a matéria" (Questionário). Considero que esta perspectiva da aula de Matemática resulta da forma como os temas e conteúdos foram explorados e trabalhos em anos anteriores. Da análise das respostas na entrevista dos alunos Inês e José parece claro que, por exemplo em relação ao tema Números e Operações, a ênfase foi colocada nos algoritmos e procedimentos e que as tarefas foram sempre realizadas individualmente, sem espaço para discussão/comentário dos resultados.

Ao longo do ano lectivo o aluno reconheceu que as tarefas em grupos/pares seguidas de discussão em grande grupo lhe permitiram compreender melhor as situações descritas e aprender coisas "novas". Refere ter gostado muito destas aulas, mas afirma que foi mais fácil "chegar a acordo" quando o grupo era apenas constituído por dois elementos e destaca a importância da discussão no final da resolução das fichas de trabalho. Como já foi referido, o aluno revelou-se muito interessado nas aulas que envolveram problemas do quotidiano, nomeadamente sobre a tomada de decisão na aquisição de um determinado produto. O trabalho desenvolvido ao longo do ano permitiu ao José encarar de forma diferente as aulas de Matemática e a aprendizagem da Matemática.

O aluno refere, na entrevista, que os algoritmos de algumas operações se revelam por vezes complicados. Desta forma reconhece a necessidade da presença da máquina de calcular na aula de Matemática: "torna mais fácil as contas e porque eu penso, que no futuro, com a evolução da tecnologia, ninguém ou quase ninguém vai fazer contas de cabeça" (Questionário). Desta forma reconhece que a aprendizagem da Matemática não se deve dissociar das exigências da sociedade actual pelo que, na sua perspectiva, não parece fazer sentido insistir nas "contas". Reconhece também que a presença da tecnologia na aula permite trabalhar mais e mais variados exemplos pois sem a calculadora "só podíamos fazer aquelas fracções fáceis tipo $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ e não dava para fazer por exemplo o $\frac{11}{12}$ à mão ou mentalmente" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1).

Sentido de Número

Os Conjuntos Numéricos

O José revela possuir uma noção intuitiva dos elementos que constituem os conjuntos numéricos mas não consegue definir claramente cada um dos vários conjuntos.

Quando lhe é solicitado que dê exemplos de números inteiros, assim como a Inês, indica inteiros positivos e inteiros negativos e, à semelhança da colega, considera que o zero não é um número inteiro. Define números inteiros usando também uma referência à operação divisão mas numa abordagem mais próxima que a da Inês:

> Um número inteiro é um número que multiplicado ou dividido possa dar um número certo, que não tenha vírgulas e que não seja o zero.
>
> (Entrevista)

O uso da expressão "um número certo, que não tenha vírgulas" revela alguma compreensão do conceito de inteiro mas a referência à multiplicação e à divisão torna a sua definição de número inteiro confusa. É curioso que ambos os alunos sentem necessidade de associar os números a resultados de divisões. Considero que este facto está relacionado com o destaque que foi dado, em anos anteriores, à representação de racionais ora na forma de fracção ora na forma de numeral decimal ou número inteiro.

Também o José, quando é confrontado sobre o trabalho desenvolvido no 2º ciclo do Ensino Básico, no âmbito do tema "Números", destaca este tipo de tarefas: "no 5º e 6º anos foi números fraccionários; passar para números inteiros ou decimais" (Entrevista).

Por outro lado, esta afirmação remete-nos para uma confusão no uso das designações "fracção" e "número fraccionário" o que na minha opinião significa que o aluno possui uma ideia errada sobre o conceito de número fraccionário. O José considera que os números fraccionários "são os que estão na forma de fracção":

> Eu acho que um número fraccionário tem … é como uma divisão que está escrita na forma de fracção que, tem sempre um número por cima e depois tem um traço de fracção e outro por baixo que é o numerador e o denominador.
>
> (Entrevista)

Desta forma, o José associa número fraccionário a fracção mas, noutros momentos da entrevista, reconhece que existem fracções que representam números inteiros como, por exemplo, $\frac{4}{4}$. Em relação a $\frac{4}{4}$ o José afirma que não é um número fraccionário, o que contradiz a definição que usou para fraccionário mostrando ambiguidade em relação aos conceitos de fracção e de número fraccionário.

Apesar do desenvolvimento do sentido do número dos alunos exigir que, desde os primeiros anos de escolaridade conheçam e trabalhem com várias representações dos números, quando a ênfase das aprendizagens é colocada apenas nos procedimentos e não nos conceitos e na teia de relações entre eles, os alunos tendem a confundir e a não compreender o conceito.

Em relação aos números racionais o José refere que:

> Um número racional pode ser um número inteiro, fraccionário e natural. E também é os números que estão escritos em forma de … têm vírgulas.
>
> (Entrevista)

Através deste contributo percebe-se que o José compreende a abrangência da designação "número racional" e consegue dar exemplos de elementos pertencentes ao conjunto dos números racionais, o mais abrangente dos universos numéricos que os alunos conhecem nesta etapa do percurso escolar.

No que diz respeito à designação "números relativos", o aluno revela desconhecer esta expressão mas consegue dar exemplos da presença dos números relativos em situações do quotidiano: "quando vamos a um *shopping* ou a um prédio temos os andares positivos e depois temos os negativos" (Entrevista). Refere também que os números negativos são utilizados para expressar temperaturas: "quando a temperatura está a abaixo de zero é outra situação em usamos menos: -1, -2" (Entrevista).

Também o José revela possuir algumas noções intuitivas sobre os elementos dos conjuntos numéricos embora não consiga clarificar os conceitos de número inteiro, número fraccionário e número relativo.

Representações de Números Racionais: Formas Equivalentes de Representar Números Racionais

Modelos de Visualização

O José não revelou, na realização das fichas de trabalho e nas tarefas da entrevista, dificuldade em, através da representação visual, escrever a fracção que traduz a relação parte-todo e compreender que essa mesma fracção pode representar um número racional. Um número racional que também pode ser representado de outras formas.

Usando como modelos de visualização quadrados, círculos e rectângulos, consegue obter uma fracção em que o denominador indica o número de partes em que a unidade está dividida e o numerador, o número de partes coloridas.

Na Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), o aluno e o seu par, apresentam, para a situação 1.4, não a fracção $\frac{4}{8}$, mas antes a fracção $\frac{1}{2}$ (Figura 11).

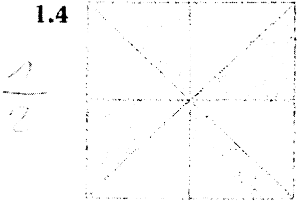


Figura 11 – Questão 1.4, resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 7, recolhida no final da aula.

Através desta resolução o grupo revela compreender, claramente, a relação que se estabelece entre a região sombreada e a unidade, assim como o conceito de metade. O José e o seu par reconhecem que a fracção $\frac{1}{2}$ é uma das representações possíveis para a metade e, por outro lado, mostram compreender e utilizar diferentes formas de representar a mesma quantidade, neste caso, fracções equivalentes.

Ainda na mesma Ficha de Trabalho (Anexo 3) não revela dificuldade em identificar a relação parte-todo de uma unidade discreta considerando a parte (cinco) de um conjunto de seis bolas (exercício 1.5, Anexo 3) e na situação 1.6 reconhece que a fracção, como tradução da relação parte-todo, só faria sentido se a unidade estivesse dividida em partes iguais.

Fracções e Numerais Decimais

Através dos contributos do aluno na entrevista e nas actividades realizadas em sala de aula, revela atribuir à representação $\frac{a}{b}$ vários significados: relação parte-todo, quociente entre dois números inteiros, operador partitivo multiplicativo mas também representação de um número racional.

Através da análise da resolução da Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), recolhida no final da aula pela investigadora, e atendendo aos registos escritos do Grupo de Trabalho 7 conclui-se que, partindo da representação de um número racional em forma de fracção, o aluno consegue obter outras representações desse número. Efectuando a divisão entre o numerador e o denominador da fracção o aluno obtém a representação decimal. Também, partindo da representação decimal, consegue obter a representação em forma de fracção usando uma fracção decimal e posteriormente fracções equivalentes, que obtém simplificando a fracção decimal. O aluno reconhece que, por vezes, as fracções representam números inteiros e dízimas infinitas periódicas que apresenta usando a notação correcta. Como já foi referido anteriormente o José, durante a entrevista, assume que, no 2º ciclo do Ensino Básico, as tarefas envolvendo fracções colocaram grande ênfase na verificação de quando uma fracção representa um número inteiro ou um número decimal.

O José sente necessidade de "compreender bem" os números envolvidos numa determinada tarefa para depois poder manipulá-los, compará-los e operar com eles: "os exercícios e problemas com fracções e números decimais no início parecem complicados mas depois quando se percebe bem aqueles números torna-se mais fácil" (Observação da realização da Ficha de Trabalho 1). Consoante as características de cada tarefa/ problema opta por trabalhar com os números escritos na forma de fracção ou na forma de numeral decimal. Por exemplo, na Ficha de Trabalho 1, Questão 1.8 (Anexo 3), porque os denominadores são iguais, para comparar os números envolvidos mantém a representação em fracção mas na mesma Ficha de Trabalho, Questão 4.2 (Anexo 3), começa por representar os racionais na forma de numeral decimal e só depois estabelece uma relação de ordem entre eles (Figura 12).

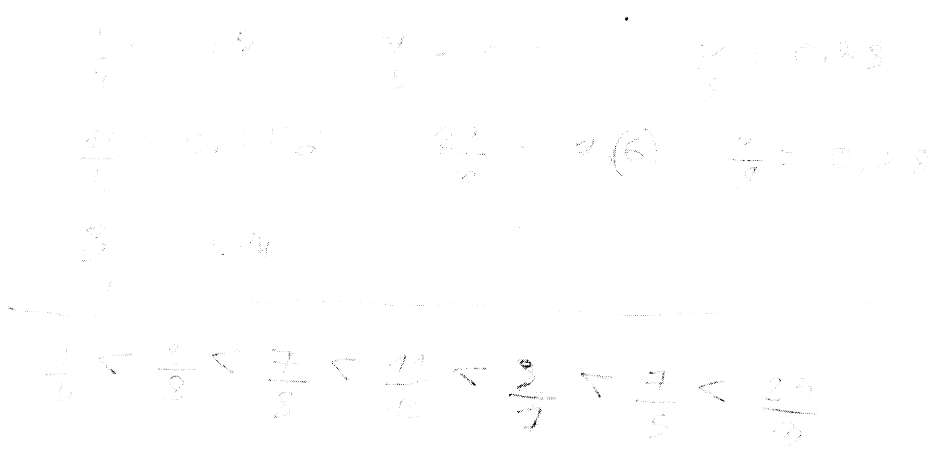


Figura 12 – Questão 4.2, resolução da Ficha de Trabalho 1, Grupo 7, recolhida no final da aula.

No que diz respeito às fracções como operadores partitivos o José e o seu grupo de trabalho, na resolução da Questão 1 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), utilizaram as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ como operadores para calcular metade e um terço de doze (fizeram $\frac{1}{2}\times 12$ e $\frac{1}{3}\times 12$). Procederam do mesmo modo para calcular o valor da entrada em cada uma das lojas da situação descrita na Questão 5 da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4). Nesta questão, na Loja do Lar, deveria ser pago inicialmente ¼ do valor total dos electrodomésticos enquanto que na Super Loja o valor a entregar de entrada representava ½ do valor total dos produtos. Os alunos do grupo calcularam ¼ e ½ do total a pagar fazendo $\frac{1}{4}\times 2020{,}60$ e $\frac{1}{2}\times 2020{,}60$. Contudo, os dados dos problemas referentes a estas fracções não foram apresentados da mesma forma. Em 1. (Anexo 4), no enunciado do problema, a informação surge por extenso ("um terço dos lápis da caixa de 12 lápis" e " metade dos lápis da caixa de 12 lápis") enquanto que em 5. (Anexo 4) as fracções $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ são referidas explicitamente ("¼ do valor total pago na entrada" e "½ do valor total pago na entrada"). Ao adoptar o mesmo procedimento nas duas questões, o aluno e os elementos do seu grupo de trabalho revelam compreender e aplicar correctamente o significado de operador partitivo de uma fracção. Relativamente à fracção como operador partitivo multiplicativo identificaram a fracção $\frac{2}{3}$ com uma divisão por 3 e uma multiplicação por dois. Reconhecem que quando se atribui este significado às fracções não existe qualquer vantagem em obter o numeral decimal representado pela fracção.

Percentagens

O José consegue associar à percentagem 50% representações visuais em que a região sombreada corresponde a metade da unidade considerada. Na Tarefa 1 da entrevista, em relação à região sombreada (seis dos quarenta quadrados considerados), o José reconhece, sem dificuldade, que a área desta região não pode corresponder a 50% da área total "porque 50% é metade e lá não está metade (...) a sombreado não" (Entrevista). Por outro lado, à percentagem 50% associa também a fracção $\frac{1}{2}$: "$\frac{1}{2}$ corresponde a metade e metade também corresponde a 50%" (Resolução da Ficha de Trabalho 1).

Na Tarefa 1 da entrevista reconhece ainda a percentagem 25% como representação da quarta parte. Nessa tarefa, em que dos quarenta quadrados apenas seis estavam sombreados, pedia aos alunos que indicassem quantos quadrados ainda eram necessários sombrear para que a área da região sombreada representasse 25% da área do rectângulo. O José começou por justificar que "$100 \div 4$ é 25%" o que na sua opinião significa que 25% correspondem a "um quarto de 100" (Entrevista). Para determinar a quantos quadrados correspondem a 25% de 40, o José fez $40 \div 4$ obtendo 10 e concluindo então que 25% de 40 são 10. Neste caso, para determinar 25% de uma dada quantidade o aluno não sentiu necessidade de recorrer à regra de três simples e fez apenas a quarta parte dessa mesma quantidade. Revela, portanto, uma clara compreensão da representação 25%.

O aluno consegue, também, estabelecer uma relação entre a representação decimal de um racional e uma percentagem. Por exemplo, associa a 0,8, oitenta centésimas, e consequentemente 80%. Justifica que o racional 1,2 corresponde à percentagem 120%, maior que 100%, porque o racional é maior que um.

Para o cálculo de outras percentagens que foram surgindo nas tarefas propostas na entrevista e nas fichas de trabalho o aluno utilizou o raciocínio proporcional recorrendo à regra de três simples.

A Recta Numérica

Na Ficha de Trabalho 1, Questão 2.1 (Anexo 3), o aluno e o seu colega, associaram a cada ponto marcado na recta numérica um número decimal. Quando comentou a resolução desta Ficha de Trabalho o aluno referiu que, inicialmente, o grupo sentiu dificuldade em interpretar e compreender a localização dos pontos na recta mas que depois de perceberem que "cada espaço [o aluno refere-se à unidade de medida] era 0,2 foi simples responder às questões colocadas" (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 1).

Ordenação e Comparação de Números Racionais

Para comparar e ordenar números racionais o aluno usou dois procedimentos diferentes. Em algumas tarefas analisou o numerador e o denominador das fracções que representavam os números. Noutras situações optou por escrever os racionais na forma de numeral decimal e então estabelecer uma relação de ordem entre eles.

Por exemplo, para comparar as visualizações 1.1 e 1.5 [que correspondem às fracções $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{6}$] (Anexo 3) o José e o seu par começaram por questionar se deveriam igualar os denominadores para poderem comparar estas duas fracções mas acabaram por, sem realizar cálculos, concluir que "a maior é a 1.5 porque quanto maior é o denominador menor é a fracção, se o numerador for igual em ambos" (Tarefa 1.9 da Ficha de Trabalho 1, Anexo 3). Na Questão 4.2, da mesma ficha de trabalho (Anexo 3), optaram por escrever todos os racionais na forma de numeral decimal e só depois os colocaram por ordem crescente.

Para comparar e ordenar números racionais relativos o José também não revela dificuldade. Na entrevista justifica que -5 é menor que -2 porque "é um número maior abaixo de zero. Quer dizer que é menor" (Entrevista).

Na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5) em que, em várias situações, são apresentadas temperaturas negativas o aluno não teve dificuldade em identificar o número maior e o número menor ordenando correctamente os números relativos apresentados.

Números Racionais Maiores que Um

Para identificar fracções que representam números racionais maiores que um o aluno, e o seu par, usaram dois procedimentos diferentes. Na Questão 3, da Ficha de Trabalho 1 (Anexo 3), afirmaram que $\frac{7}{4} > 1$ porque "o valor decimal da fracção $\frac{7}{4}$ é 1,75, logo é maior que um" (Resolução da Ficha de Trabalho 1). Na mesma Ficha de Trabalho, na Questão 4.1, das sete fracções apresentadas os alunos indicaram as três que representam racionais maiores que um, justificando que "as fracções que têm numerador maior que o denominador, são sempre maiores que um". Desta forma, percebe-se que o aluno compreende a fracção como representativa de um número mas também como relação entre dois números (o numerador e o denominador).

Compreensão dos Valores Numéricos e Fundamentação de Opiniões

O José revelou, ao longo do estudo, alguma dificuldade em justificar, oralmente, as suas opiniões e em comunicar ideias matemáticas e procedimentos. Mas, por outro lado, mostrou, na maioria das tarefas propostas, compreender os números envolvidos nos exercícios/problemas e usou valores numéricos fornecidos e/ou calculados para justificar as suas opiniões.

Na Ficha de Trabalho 2, Tarefa 1 (Anexo 4), o aluno e o seu grupo de trabalho compreenderam, sem dificuldade, os conceitos envolvidos no problema (metade e terço) e utilizaram os operadores $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ para determinar o número de lápis partidos em cada uma das situações. Interpretaram os valores obtidos através dos cálculos e com base nesses resultados fundamentaram a resposta à questão colocada inicialmente: "quem está mais triste é a Ana porque tem mais dois lápis partidos do que o Pedro" (Resolução da Ficha de Trabalho 2). Na mesma Ficha de Trabalho, na Tarefa 4, o aluno também compreendeu a situação descrita e os valores numéricos apresentados no enunciado. À fracção $\frac{1}{6}$ associou a sexta parte e dividiu o peso total do bolo por seis. Curiosamente para calcular o preço de cada fatia (que já sabe pesar 200g), dispondo do preço por quilo, utilizou a regra de três simples não para calcular o custo de 200g, mas para calcular o preço de todo o bolo (1,2 kg) que depois dividiu por seis mostrando, assim, compreensão da situação analisada e do significado de $\frac{1}{6}$. Relativamente à fracção $\frac{2}{3}$, apresentada na Questão 4.3 (Anexo 4), não hesitou em associar-lhe uma divisão por três e uma multiplicação por dois. Pode-se concluir que, também neste problema, o aluno não revelou dificuldade em compreender e interpretar números que surgem em contextos da vida real. Contudo, o aluno, no final da resolução da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), admitiu que, no seu grupo de trabalho, foi necessária especial atenção na leitura dos enunciados para perceber os dados dos problemas e o que estava a ser perguntado: "- Já leste bem o enunciado? Acho que não é isso que pergunta" (Maria, grupo do José, Observação da resolução da Ficha de Trabalho 2).

Neste grupo, a Tarefa 5, da Ficha de trabalho 2 (Anexo 4), gerou muita discussão para a escolha da loja que oferecia as melhores condições de aquisição dos electrodomésticos. Os alunos calcularam o custo total dos electrodomésticos em cada uma das lojas e determinaram o valor a pagar aquando da entrega dos produtos, em cada um dos estabelecimentos comerciais, ¼ do valor total dos electrodomésticos no caso da Loja do Lar e ½ do valor total no caso da Super Loja. Seguidamente determinaram o valor em dívida depois de pagar a quantia inicial e sobre o restante valor em dívida determinaram, em cada uma das situações, o valor a acrescentar correspondente a juros. Contudo, durante a resolução da tarefa, não optaram por uma das propostas apresentadas. O grupo, apesar de revelar ter compreendido a maior parte dos factores de escolha descritos, não conseguiu chegar a acordo em relação à proposta mais vantajosa para a compra dos produtos. Apenas durante o plenário tomaram uma decisão tendo por base os cálculos realizados. Escolheram a Super Loja apresentando um argumento: "é entregue um valor maior de entrada mas o juro é menor"

(Observação da resolução da Ficha de Trabalho 2). Apesar desta afirmação ser verdadeira os alunos suportaram-na com base em procedimentos incompletos. Para esta loja, calcularam o juro de 3% aplicado apenas uma vez ao valor em dívida após o pagamento da entrada quando o juro é considerado à taxa anual de 3% mas por um período de dois anos. Os alunos deste grupo não consideraram, na sua análise, um dos critérios pré-estabelecidos nas propostas nos dois estabelecimentos comerciais: o prazo de pagamento. Por outro lado, o José admitiu que os juros constituíram uma dificuldade durante a actividade. Afirmou serem muito confusos e que só depois da discussão em turma compreendeu o que são e como são utilizados. Para além do argumento usado pelo seu grupo o aluno, durante o plenário, fundamentou a escolha da Super Loja apresentando mais justificações suportadas pelos valores numéricos obtidos através dos cálculos. Afirma que o facto da entrada ser maior implica uma mensalidade menor: "mas já fica metade pago. – José. – O que quer dizer que vais pagar menos por mês." (Observação da resolução Ficha de Trabalho 2). O método de trabalho do grupo do José baseou-se numa primeira abordagem do problema através da realização de vários cálculos e só perante os resultados obtidos discutiram vantagens e desvantagens, registando conclusões.

Apesar de, ao longo do estudo, parecer compreender a informação numérica que consta dos enunciados das tarefas propostas e das quantidades que esses números representam, na Tarefa 1.2 da entrevista, o aluno mostrou alguma dificuldade em interpretar as razões entre a quantidade de água e quantidade de concentrado utilizadas na preparação do sumo de laranja. Começou por afirmar que os dois copos de sumo teriam sabor igual mas decidiu, de seguida, realizar alguns cálculos para confirmar a sua afirmação. Para os dois copos, A e B, utilizou um raciocínio proporcional para determinar a percentagem de concentrado em relação à quantidade de sumo. Desta forma considerou para 100% a soma das colheres de água com as colheres de concentrado, isto é o sumo resultante. Em relação ao copo A explicou:

> Eu tentei descobrir quanto é que quatro colheres de concentrado é por cento, em percentagem (...) Fiz uma regra com 10. (...) as quatro colheres de concentrado e as seis colheres de água. E então coloquei o 10, que é a soma de 4 com 6.
>
> (Entrevista)

Obteve dois valores percentuais: 40% e 37,5%. A entrevistadora questionou-o, então, sobre o que representavam estas percentagens e como é que estes dois valores ajudavam a responder à questão. Afirmou que os 40% e 37,5% são a percentagem de concentrado. Concluiu que, através dos valores obtidos "sabemos qual é que tem maior concentrado, mais percentagem de concentrado" (Entrevista) e esse será o copo com o sabor mais intenso "porque tem maior percentagem de concentrado" (Entrevista). Apesar da dificuldade inicial, o José compreendeu claramente a informação envolvida nesta situação e conseguiu tomar uma decisão, suportando as suas afirmações em dados numéricos.

A forma como resolveu este problema permitiu-lhe compreender melhor a situação seguinte, em que era apresentado um recorte de uma embalagem de sumo com a frase: "teor mínimo de sumo: 20%". Neste caso, o aluno afirmou sem hesitações: "é a quantidade de sumo (...) sem os açúcares e edulcorantes. Mais nada; só mesmo o sumo" (Entrevista).

Revelou compreender, também, as situações apresentadas na entrevista e Fichas de Trabalho envolvendo números relativos. Por exemplo, na entrevista afirma que 3° centígrados já é uma temperatura fria e que 30° centígrados corresponde a uma temperatura quente.

Do mesmo modo, na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5), na primeira situação descrita, o aluno e o seu grupo de trabalho, revelaram compreender os números que correspondiam a temperaturas quentes e a temperaturas frias (tendo por base a realidade do nosso país) interpretando e comentando os valores da tabela:

> - Já viram que estas do interior, Évora e Bragança, têm as temperaturas mais altas? – Maria.
> - Mas também é onde faz mais frio – José.
>
> (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 3)

Com base nesta análise das temperaturas máximas e mínimas e nos cálculos da amplitude térmica para cada cidade, os alunos conseguiram depois justificar a relação entre interioridade e amplitude térmica: "os locais que têm mais amplitude térmica são os do interior" (Resolução da Ficha de Trabalho 3). O José mostrou compreender muito bem esta relação e conseguiu, em grande grupo, justificar as suas conclusões: "Quer dizer que no interior faz mais frio de manhã e mais calor à tarde" (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 3).

Do mesmo modo, compreendeu e analisou as temperaturas apresentadas na Ficha de Trabalho 3 (Anexo 5), relativamente a situações extremas registadas no planeta, noutras cidades mundiais e temperaturas médias à superfície dos planetas do Sistema Solar. Por exemplo, no último grupo de questões, relativamente à temperatura média à superfície da Terra, o José afirmou que "será 22º porque as outras temperaturas são muito baixas e muito altas" reconhecendo que, dos valores numéricos apresentados, o único que se adequa ao caso da Terra é o 22º centígrados. Desta forma, revela compreender a ordem de grandeza e a razoabilidade dos números envolvidos na tarefa.

Sentido de Operação

Compreensão das Operações

O José reconhece, na maioria das tarefas propostas, a operação que melhor se adequa ao que se pretende calcular e que lhe permitirá obter informação útil para tirar conclusões e tomar decisões no contexto da situação descrita.

O aluno não revela dificuldade em identificar quando deve aplicar um raciocínio aditivo ou um raciocínio subtractivo. Por outro lado, mostra compreensão do significado da adição e subtracção de fracções. Por exemplo, na resolução da Tarefa 3, da Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4), o aluno e o seu grupo de trabalho envolveram-se numa discussão interessante quando lhes foi proposto que a uma das adições apresentadas fizesse corresponder um enunciado:

> - Já sei! Vamos escolher $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ porque os denominadores já são iguais. É mais fácil. Dividimos qualquer coisa em três, por exemplo um bolo. – Ricardo.
> - Já sei. A Rita comeu uma parte e o João outra. Quanto sobrou? – Maria.
> - Quanto sobrou não! É "mais". Quanto comeram? – José.
> - Quanto comeram juntos. – Ricardo.
>
> (Observação da resolução da Ficha de Trabalho 2)

Após esta discussão os alunos escolheram a adição $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ e registaram na Ficha de Trabalho a seguinte situação: "um bolo está dividido em três partes, o João comeu $\frac{1}{3}$ e o Nuno comeu outro $\frac{1}{3}$. Que parte do bolo comeram os dois?" (Resolução da Ficha de Trabalho 2). Desta forma, os alunos conseguiram atribuir um significado à adição de duas fracções com o mesmo denominador.

Neste grupo de trabalho também não houve dúvidas em reconhecer em que contextos utilizar a subtracção e associaram-na às expressões " sobrou", "restante", "diferença", "amplitude térmica" e "variação": "se é diferença é porque é menos" (José, Observação da resolução da Ficha de Trabalho 2).

De um modo geral, quer na resolução das fichas de trabalho em grupo, quer na entrevista com tarefas, o aluno não revelou dificuldade em compreender o significado das operações adição e subtracção mesmo quando envolviam números racionais na forma de fracção ou numeral decimal, ou quando envolviam números relativos.

Na entrevista com tarefas o José associou à subida de temperatura uma adição e à descida uma subtracção e conseguiu explicar o efeito que estas operações tinham nos números relativos que estava a analisar. Por exemplo, para justificar que na localidade C, onde se registam -5ºC, para a temperatura atingir valores positivos deve subir 6ºC, o José afirma: " (…) para ter os valores positivos tem que subir 6 para dar um (…) e um já é positivo porque se subisse só 5 dava 0 e 0 não é nem positivo nem negativo" (Entrevista). De seguida o aluno foi questionado sobre o que aconteceria se a temperatura subisse 5,1º. O aluno afirmou que: "também dá mas fica um numeral decimal" (Entrevista).

Relativamente às operações multiplicação e divisão, o aluno também não revela dificuldade na sua compreensão e em que contextos se tornam adequadas. Exemplo deste à-vontade com as operações e o seu significado é a resolução do José na Tarefa 2 da entrevista. Para calcular a quantidade de sumo ingerida pelo Manuel, metade do jarro de 3 litros, o aluno efectuou uma divisão por dois mas para determinar a quantidade que o Filipe ingeriu, um terço, o aluno já fez $\frac{1}{3}\times 3=1$. Desta forma mostrou que, compreende que no cálculo de uma determinada parte de uma certa quantidade, pode recorrer a uma divisão ou atribuir a uma fracção o significado de operador partitivo, indicando uma multiplicação (como já foi referido, ao longo deste estudo, o aluno não mostrou dificuldade em reconhecer e utilizar fracções como operadores partitivos e operadores partitivos multiplicativos). Também na entrevista com tarefas o aluno reconheceu que a divisão pode ser usada para comparar duas quantidades. Para determinar quantas vezes mais a quantidade consumida pelo Manuel é maior que a consumida pela Isabel, o José optou por fazer uma divisão: "Fiz uma divisão (...) 1,5 litros, que foi o que o Manuel bebeu, por 0,5, que foi o que a Isabel bebeu (...) deu 3." (Entrevista), concluindo que o Manuel bebeu três vezes mais do que a Isabel.

Propriedades e Relações das Operações

Quando lhe foi solicitado, durante a entrevista, que indicasse as operações que conhecia, identificando as dificuldades que associa à utilização dessas operações, o aluno referiu quatro operações: adição, subtracção, multiplicação e divisão. Pelo que já foi exposto, apesar de revelar compreensão das operações, referiu que sente dificuldade em aplicar alguns algoritmos. Refere que o algoritmo da divisão é difícil, especialmente quando envolve "números maiores": " é mais difícil porque temos que ver os números que vão de trás (...) se forem mais pequenos, pronto, é mais fácil (...) também é difícil (...) se o numerador for mais que dez" (Entrevista).

Assumiu que não tem dificuldade em realizar as outras operações mas, relativamente à adição e subtracção de fracções, na entrevista revelou muita confusão nos procedimentos. Na Tarefa 2 da entrevista, para determinar a parte do sumo ingerida pela Isabel, começou por determinar a quantidade já consumida pelos outros colegas fazendo $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$. Depois da intervenção da colega Inês reconheceu que o cálculo não estava correcto e que este resultado não faria qualquer sentido no contexto do problema.

Apesar da confusão que revelou na adição de fracções durante a entrevista, ao longo das fichas de trabalho já aplicou correctamente os algoritmos para adição e subtracção de fracções. Na Ficha de Trabalho 2 (Anexo 4) escreve: " para somar fracções tem que se ter denominadores iguais e os denominadores não se somam". Neste caso, o aluno parece saber como proceder para adicionar e subtrair fracções mas considero que o seu contributo revela apenas conhecimento do procedimento e não compreensão do significado destas operações entre fracções.

O José revelou dificuldade em estabelecer e reconhecer propriedades e relações das operações. Concorda com a colega quando esta refere que a multiplicação e a divisão são operações inversas mas não consegue estabelecer qualquer outra relação entre as operações que conhece e que mencionou no início da entrevista. Reconhece a propriedade comutativa da multiplicação "por exemplo 2 vezes 3 ou 3 vezes 2 é igual" mas designa-a por propriedade associativa.

Síntese

O José reconhece a presença dos números e suas diferentes formas de representação, no nosso quotidiano. Consegue dar exemplos de números inteiros, números decimais, números racionais e números relativos embora não consiga definir cada um dos universos numéricos.

Em relação aos conceitos de fracção e número fraccionário, o José atribui à fracção vários significados: relação parte-todo; quociente entre dois números inteiros, operador partitivo multiplicativo mas também representação de um número racional. Contudo, revela confusão no que respeita ao conceito de número fraccionário pois associa a designação *número fraccionário* apenas a números escritos na forma de fracção. Assumindo que a fracção pode ser considerada como uma representação de um número racional, paralelamente o aluno reconhece que o número racional pode ser representado de outras formas: através de representações visuais, numerais decimais, na recta numérica e através de percentagens. Não revela dificuldade em obter uma representação dos racionais através de outra e, consoante as características de cada tarefa ou problema, opta pela representação que lhe parece mais adequada.

Manipulando correctamente as representações equivalentes dos números racionais o aluno, para comparar e ordenar estes números, opta pela representação mais adequada, consoante a natureza dos números envolvidos e as características da tarefa. Ao longo deste estudo, para comparar e ordenar números racionais, o aluno usou dois procedimentos diferentes: em algumas tarefas analisou o numerador e o denominador das fracções e noutras situações optou por comparar os números racionais após os escrever na forma de numeral decimal. Utilizou também estes dois procedimentos para identificar quantidades maiores que um.

Ainda em relação aos conjuntos numéricos o aluno revelou alguma dificuldade no que respeita aos números inteiros e decimais. Por exemplo, em relação ao número zero, o José reconhece que se trata de uma quantidade que não é positiva nem negativa mas, no entanto, refere que é um número não inteiro.

Apesar da dificuldade que manifestou na comunicação oral de raciocínios e procedimentos, aos colegas e professora, o aluno compreendeu os números envolvidos nas situações descritas e conseguiu tomar decisões, fundamentando as suas opiniões através de argumentos numéricos. Apesar de alguma dificuldade, em casos pontuais e na leitura e interpretação dos enunciados, o aluno conseguiu compreender as quantidades e valores envolvidos nas tarefas, reconhecendo que a resolução dos problemas propostos exigiu uma leitura cuidadosa dos enunciados.

Para além de revelar compreensão dos valores numéricos envolvidos nas tarefas o aluno também conseguiu, em cada situação associar uma operação. Contudo, através dos contributos recolhidos durante a resolução das fichas de trabalho e a entrevista, revela pouca compreensão do significado das operações e o seu efeito sobre os números, apesar de dominar algoritmos e procedimentos. Não consegue estabelecer relações e propriedades das operações denunciando um fraco sentido de operação.

Capítulo VIII

Conclusões

Neste capítulo, após uma breve síntese do estudo, serão indicadas as principais conclusões obtidas tendo em conta a discussão de resultados apresentada para os estudos de caso Inês, José e turma. Este capítulo inclui, também, uma reflexão acerca da investigação realizada considerando as suas limitações e tendo em conta recomendações que se consideram pertinentes, emergentes do estudo, assim como sugestões e perspectivas de futuras pesquisas no âmbito do sentido de número.

Síntese do Estudo

Esta investigação teve como objectivo caracterizar e compreender o sentido de número racional dos alunos do sétimo ano de escolaridade do Ensino Básico.

Segundo Steen (2001) o sentido de número é um dos elementos da literacia matemática que, atendendo às necessidades da sociedade actual, é hoje uma competência fundamental que a educação matemática deve promover nos indivíduos. Trata-se de um conceito complexo, referente a uma bem organizada rede conceptual que relaciona as propriedades dos números e das operações (Swoder, 1988) envolvendo vários elementos. Estes elementos devem ser considerados em três blocos: (1) os números, (2) as operações e (3) o contexto. Desta forma, e reconhecendo que não é possível dissociá-lo de competências relacionadas com o conhecimento e destreza com as operações, para estudar esta problemática foram considerados dois grandes domínios: (i) o sentido de número e (ii) o sentido de operação. Por outro lado a análise da problemática do sentido de número racional deve ainda ter em conta que a compreensão dos racionais pressupõe o conhecimento dos seus vários subconstructos e da forma como se relacionam (Behr *et al.*, 1983) pelo que o aluno com sentido de número deve reconhecer e compreender formas equivalentes de representar os números racionais. De acordo com estes pressupostos foram definidas duas questões de investigação:

1. Que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, percentagens) dos números?

2. Como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações?

O estudo foi realizado numa turma de sétimo ano de escolaridade nas aulas de Matemática onde a investigadora era a docente da disciplina assumindo, portanto, o papel de observadora participante. Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa que considera três estudos de caso: dois alunos e a turma. A recolha de dados foi realizada no ano lectivo 2007/2008, com recurso a instrumentos diversos: questionário, entrevista, observação directa e fichas de trabalho. Procurou-se recolher informação predominantemente descritiva que foi interpretada caso a caso considerando como categorias de análise as concepções dos alunos sobre os conjuntos numéricos e seus elementos, as representações equivalentes dos números racionais, a ordenação e comparação de números racionais, a compreensão de valores numéricos e a fundamentação de opiniões, assim como o sentido de operação – compreensão das operações e propriedades e relações das operações (Quadro 8).

Conclusões

1. Que compreensão têm os alunos das formas equivalentes (inteiros, fracções, decimais, percentagens) dos números?

Para estudar a compreensão que os alunos têm dos números racionais e das formas equivalentes de os representar a informação obtida foi analisada tendo em conta o reconhecimento, por parte dos alunos, dos vários tipos de números e conjuntos numéricos, a compreensão dos subconstructos dos números racionais e formas equivalentes de os representar assim como competências de ordenação e comparação de números racionais. Paralelamente foi analisada a compreensão que os alunos têm dos valores numéricos envolvidos nas tarefas e a sua capacidade de usar argumentos quantitativos na fundamentação de opiniões. As evidências recolhidas sobre o reconhecimento que os alunos têm dos vários universos numéricos e dos elementos que os constituem foram obtidas através da entrevista com tarefas pelo que esta categoria de análise foi apenas considerada para os estudos de caso Inês e José. Da discussão dos resultados emergem as seguintes conclusões:

Os alunos conseguiram identificar e exemplificar elementos constituintes dos vários universos numéricos mas demonstraram pouca compreensão dos conceitos. Esta evidência surge também em Pinto (2004) onde é referida a dificuldade dos alunos na transição para o conjunto dos racionais associada à pouca interiorização dos conceitos de número inteiro, número decimal e fracção. Nesta investigação as referências dos alunos aos vários tipos de números foram tentativas de definição com recurso à descrição de procedimentos, associando os números a resultados de uma operação, sobretudo de uma divisão. No que respeita ao conceito de número inteiro revelaram possuir uma noção intuitiva de número inteiro mas mostraram dificuldade em apresentar uma definição coerente e com sentido. Contudo, reconheceram alguma abrangência do conceito de número inteiro (referindo subconjuntos do conjunto dos números inteiros, inteiros positivos, inteiros negativos, pares e ímpares) e curiosamente afirmaram que o zero não é um número inteiro. Mostraram também pouca compreensão do conceito de número fraccionário revelando confusão na utilização das designações *número fraccionário* e *fracção*. Por um lado afirmaram que os números fraccionários são todas as fracções, mas por outro reconheceram que as fracções, por vezes, representam números inteiros. De facto, como é referido em Monteiro e Pinto (2007), a transição para o conjunto dos números racionais pressupõe a ampliação da noção de número e o contacto com várias representações do mesmo número o que dificulta a compreensão do conceito de número racional. Relativamente ao conjunto dos números racionais mostraram compreender a abrangência deste universo numérico referindo que os números racionais podem ser inteiros, fraccionários ou naturais e manifestaram alguma compreensão dos vários subconstructos do conceito de número racional.

No que respeita à representação de números racionais na forma $\frac{a}{b}$, a maioria dos alunos atribuiu à fracção o significado de razão entre a parte e o todo embora alguns alunos tenham reconhecido a fracção como razão entre as partes. Este aspecto reforça o revisto em Monteiro e Pinto (2005) em relação à quase inexistência de atribuição de outros significados para a fracção para além da relação parte-todo nos manuais do segundo ciclo do Ensino Básico. Por outro lado, os alunos mostraram facilidade em, através da representação na forma de fracção, obter a equivalente representação do racional na forma de numeral decimal fazendo a divisão entre o numerador e denominador, revelando, também, compreensão da representação $\frac{a}{b}$ como um quociente entre dois números. Do mesmo modo conseguiram, partindo da representação decimal, obter uma fracção. Para representar na forma $\frac{a}{b}$ um dado racional, os alunos recorreram a fracções decimais. Mas, em relação à interpretação da representação $\frac{a}{b}$ como operador, os alunos reconheceram a fracção como operador partitivo contudo, com excepção do grupo do José, não lhe atribuíram significado como operador partitivo multiplicativo. Por outro lado, revelaram dificuldade em compreender e manipular racionais escritos na forma de percentagem e não conseguiram estabelecer uma relação entre um número escrito nesta forma e outras formas de representação. Neste estudo, e no que respeita à representação de racionais na forma de percentagem, a maioria dos alunos da turma apenas conseguiu relacionar 0,5; $\frac{1}{2}$ e 50%. A representação dos números na recta numérica revelou-se muito confusa para os alunos que nem sempre conseguiram fazer corresponder um número decimal ou uma fracção a um ponto marcado na recta, sendo que a sua principal dificuldade foi reconhecer a unidade de medida considerada. A questão do reconhecimento da unidade, na representação de números racionais na recta numérica, é um aspecto também referido em Oliveira (1994) e Monteiro e Pinto (2005) como uma das dificuldades dos alunos na compreensão dos números fraccionários e das diferentes formas de os representar. Deste estudo emerge a evidência que os alunos compreendem e reconhecem predominantemente duas formas de representação dos números racionais, a forma de fracção (atribuindo-lhe principalmente dois significados – relação parte-todo e quociente) e a forma de numeral decimal revelando dificuldade na compreensão de outras formas de representar os números racionais. Apenas no caso do José se evidenciaram notórias competências de identificação e manipulação das diferentes representações dos números racionais: fracções, numerais decimais, percentagens e representações visuais, embora ambos os alunos entrevistados, o José e a Inês, reconhecessem que existem representações mais úteis que outras consoante o problema ou tarefa em causa.

A maioria dos alunos revelou pouca competência de comparação e ordenação de números racionais. Mostraram dificuldade em comparar números racionais representados por fracções ou esquemas utilizando, na maior parte das tarefas, a forma decimal para estabelecer uma relação de ordem entre os números. O José, para comparar e ordenar números racionais, usou dois procedimentos diferentes: em algumas tarefas analisou o numerador e o denominador das fracções e noutras situações optou por comparar os números racionais após os escrever na forma de numeral decimal. Utilizou também estes dois procedimentos para identificar quantidades maiores que um.

Os alunos da turma revelaram facilidade em reconhecer quantidades maiores que um quando os números são apresentados na forma de fracção mas grande parte dos alunos não consegue relacionar uma percentagem superior a 100% com um número superior a um.

Ainda no que respeita à caracterização do sentido de número dos alunos, é necessário ter em conta competências relacionadas com a interpretação do contexto. Um aluno com sentido de número atribui significados aos números, interpreta criticamente o resultado de um problema e verifica a sua razoabilidade (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999). Os alunos considerados neste estudo evidenciaram pouca competência de compreensão dos números atendendo a um determinado contexto assim como de reconhecimento da razoabilidade de resultados. Conclui-se que, de um modo geral, atribuíram pouco significado aos números, aos problemas e aos resultados. Neste sentido revelaram dificuldade em justificar as estratégias e procedimentos adoptados e também em fundamentar opiniões, tomar e justificar decisões, fazer comentários e estabelecer relações tendo por base valores numéricos. Os debates em grande grupo que se seguiram à resolução de cada ficha de trabalho proporcionaram o desenvolvimento de competências no âmbito da compreensão e interpretação de valores numéricos em contextos reais, assim como de argumentação/refutação com base em informação quantitativa desenvolvendo o sentido de número dos alunos. As tarefas que envolviam problemáticas da vida real revelaram-se significativas e despertaram o interesse dos alunos.

2. Como entendem os alunos o efeito das operações nos números, as propriedades e as relações entre as operações?

De acordo com APM (1991) a compreensão das operações, a percepção dos modelos e das propriedades de uma operação, a identificação das relações entre as operações assim como a compreensão do efeito das operações nos números são importantes componentes a considerar quando se perspectiva o sentido de operação dos alunos. Desta forma, na presente investigação, o sentido de operação dos alunos foi analisado através da recolha de evidências sobre a compreensão que os alunos têm das operações e das suas propriedades assim como das relações que se estabelecem entre elas. Como a entrevista com tarefas foi o instrumento principal de recolha de dados sobre as propriedades e as relações das operações, as conclusões apresentadas no âmbito desta subcategoria dizem respeito aos estudos de caso Inês e José.

Os alunos da turma revelaram um fraco sentido de operação. Mostraram pouca compreensão do efeito das operações nos números e dificuldade em reconhecer, no contexto do problema, a operação que mais se adequa à situação em causa utilizando, por vezes, operações despropositadas. Manifestaram, na resolução das tarefas em grupos/pares, notória dificuldade na interpretação e consequente definição de estratégias em situações que lhes são menos familiares. Não conseguiram, como é referido em Fosnot e Dolk (2001), operar com sentido de número, isto é, olhar primeiro para os números, jogar com as relações que se estabelecem entre eles e consequentemente definir estratégias adequadas e eficientes para operar com esses números. Para além desta evidência destacam-se algumas conclusões relativas à compreensão que os alunos têm das operações. Os alunos conseguiram associar às expressões "metade", "terço" e "dobro" uma divisão por dois, uma divisão por três e uma multiplicação por dois e identificam, em alguns casos, raciocínios aditivos e subtractivos. Por exemplo, na resolução das propostas de trabalho, associaram à expressão "diferença" uma subtracção, mas relativamente à expressão "variação", usada para definir amplitude térmica, nem todos os alunos lhe associaram uma subtracção. Por outro lado, evidenciaram não compreender o significado da subtracção entre números relativos: subtracção de números positivos, subtracção de dois números negativos, subtracção de um número positivo e de um número negativo, e mostraram pouca compreensão do significado das operações adição e subtracção com fracções (embora alguns alunos conseguissem descrever o procedimento correcto para realizar essas operações). No que respeita à adição e subtracção com fracções alguns alunos da turma adicionaram ou subtraíram denominadores. Este procedimento transparece pouca compreensão dos números que as fracções representam e paralelamente pouca compreensão das operações adição e subtracção com fracções. Trata-se de um aspecto também revisto em Oliveira (1994) e Monteiro e Pinto (2005) e que segundo as autoras resulta do facto dos alunos considerarem o numerador e o denominador como números diferentes e não como elementos constituintes de um mesmo número. Para além destas dificuldades conceptuais os alunos parecem realizar cálculos sem atribuir significado à operação que estão a realizar ou às quantidades e conceitos envolvidos e como não evidenciam sentido crítico em relação aos resultados não se apercebem quando obtêm valores que não fazem sentido no contexto da situação. Destaca-se, contudo, o caso do José que conseguiu reconhecer, na maioria das tarefas propostas, a operação que melhor se adequava ao que se pretendia calcular e que, por outro lado, mostrou compreensão do significado da adição e subtracção de fracções.

Os alunos revelaram quase desconhecimento das propriedades e relações entre as operações: a Inês referiu que se pode estabelecer uma relação entre a multiplicação e a divisão (operações inversas) e em relação às propriedades das operações identificou a propriedade comutativa da adição e a propriedade comutativa da multiplicação; o José revelou dificuldade em estabelecer e reconhecer propriedades e relações das operações, referindo apenas a propriedade comutativa da multiplicação que designou por propriedade associativa. Nenhum dos alunos, durante a entrevista ou durante a realização das fichas de trabalho, usou ou fez referência à utilização das propriedades das operações para criar procedimentos de cálculo ou manipular os números envolvidos num determinado cálculo reforçando o exposto em McIntosh, Reys e Reys (1992) em relação ao facto destas propriedades serem muitas vezes ensinadas como regras formais sem que os alunos aprendam a tirar partido delas quando operam com os números.

Atendendo ao quadro conceptual revisto no capítulo dois e no que respeita aos elementos a ter em conta na caracterização do sentido de número, os alunos considerados nesta investigação mostraram fraco sentido de número. De acordo com a estrutura do sentido de número proposta em McIntosh, Reys e Reys (1992) (Quadro 1) os alunos com sentido de número deveriam evidenciar, para além de competências no âmbito do conhecimento e destreza com números, também competências de conhecimento e destreza com as operações assim como de aplicação dessas capacidades em situações problemáticas. De um modo geral, estes alunos conseguiram reconhecer e trabalhar com racionais escritos apenas nas formas decimal e de fracção e revelaram pouca compreensão dos números e do efeito das operações, das propriedades e relações entre as operações. Evidenciaram, ao longo desta investigação, dificuldade em estabelecer uma relação entre os contextos e os cálculos necessários, adequando a melhor estratégia e mostraram pouca sensibilidade para rever resultados e analisar a razoabilidade dos valores obtidos.

Através dos contributos dos alunos percebe-se que a suas experiências, no âmbito dos Números e Operações, foram, ao longo do seu percurso escolar, caracterizadas por uma forte presença das representações decimal e em forma de fracção dos números racionais, pela abordagem da fracção através da relação parte-todo e pela ênfase colocada nos procedimentos e algoritmos, aspecto também referido em Monteiro e Pinto (2007), a propósito do desenvolvimento do sentido de número racional nos primeiro e segundos ciclos do Ensino Básico.

Limitações

O sentido de número é um conceito vasto que, de acordo com o revisto na incursão teórica do capítulo dois, se caracteriza através de uma teia complexa de elementos. Não se pretendeu num único estudo conceber instrumentos de recolha de dados que permitissem obter evidências sobre todas as competências envolvidas na problemática do sentido de número. Reconhecendo a complexidade do objecto do estudo e atendendo à natureza da investigação foi necessário restringir os elementos do sentido de número a considerar de forma a garantir a exequibilidade da recolha e análise dos dados. Os elementos considerados, as tarefas e questões seleccionadas para as fichas de trabalho e entrevista com tarefas foram escolhidos de forma a obter informação que permitisse responder às questões de investigação. Em particular foram analisadas as competências dos alunos no que respeita ao reconhecimento, ordenação e comparação dos números racionais, compreensão das operações e seu efeito nos números assim como a interpretação dos contextos em detrimento de outras igualmente importantes competências do sentido de número como a estimação, o cálculo mental, a utilização de sistemas de referência – potências, múltiplos – o estabelecimento e exploração das relações entre os números entre outras. Estes elementos parecem constituir pertinentes pontos de partida para futuros estudos no âmbito da caracterização e desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

Por outro lado, um importante aspecto a considerar na promoção e desenvolvimento do sentido de número e sentido de operação dos alunos é o papel da tecnologia. Actualmente a utilização da tecnologia é uma orientação metodológica da educação matemática para todos os ciclos do Ensino Básico e segundo Fernandes (2000) a calculadora, como material didáctico, revela-se potenciadora de aprendizagens significativas, promovendo o desenvolvimento de competências matemáticas como a compreensão dos conceitos, o aprofundamento de diversos tipos de raciocínio, a capacidade de resolver problemas, a estimativa e cálculo mental e a descoberta de regularidades e padrões numéricos e consequentemente o desenvolvimento do sentido de número e do sentido de operação dos alunos. Nesta investigação a calculadora permitiu aos alunos explorar as formas equivalentes de representar os números – inteiros, fracções, decimais, percentagens, alargando o seu conhecimento dos números racionais. Mas a máquina de calcular pode ser utilizada na realização de tarefas de investigação, proporcionando experiências significativas no âmbito dos Números e Operações. Este tipo de tarefas permitirá a construção, compreensão e enriquecimento dos conceitos e a compreensão das operações assim como a investigação de propriedades, relações e regularidades numéricas e das próprias operações. O papel da tecnologia no desenvolvimento do sentido de número foi um aspecto pouco explorado nesta investigação e perante a presença inquestionável da tecnologia na aula de Matemática surge uma questão: como utilizar a máquina de calcular e/ ou computador para promover o desenvolvimento do sentido de número e o sentido de operação dos alunos? Esta questão parece potenciadora de investigações futuras que deverão também proporcionar a elaboração e implementação de actividades de investigação e exploração no âmbito do desenvolvimento do sentido de número.

É ainda necessário ter em conta que a presente investigação diz respeito apenas a este grupo particular de alunos do sétimo ano de escolaridade. Que evidências se recolheriam se um estudo deste tipo fosse realizado no final do terceiro ciclo? Será que, ao concluir a escolaridade obrigatória, os alunos revelam as competências-chave que um aluno com sentido de número deve possuir? De que modo se pode desenvolver o sentido de número no terceiro ciclo do Ensino Básico? Salienta-se desta forma a necessidade de outras investigações que contribuam para a compreensão do sentido de número racional dos alunos ao longo do terceiro ciclo, que paralelamente proporcionem a elaboração e implementação de tarefas destinadas aos sétimo, oitavo e nono anos de escolaridade e que constituam contributos de reflexão sobre as práticas lectivas e o desenvolvimento curricular ao nível do ensino-aprendizagem dos Números e Operações no terceiro ciclo.

Neste estudo a investigadora é a professora da turma assumindo, portanto, dois papéis distintos: observadora e participante. Muitas vezes foi difícil, durante as aulas destinadas à resolução das fichas de trabalho em pares/grupos o desempenho em simultâneo destes dois papéis, por um lado gerir a dinâmica da aula e moderar as discussões em plenário e, por outro observar e registar as reacções e contributos dos alunos. Em determinados momentos teria sido vantajosa a presença de um terceiro elemento, um observador que contribuísse na recolha de dados durante as aulas destinadas à resolução de tarefas, ou o recurso ao registo em vídeo. É de salientar que o facto da investigadora desempenhar em simultâneo os papéis de investigadora e professora da turma acrescenta ao estudo uma dimensão de reflexão sobre a prática. Desta forma, esta investigação permitiu também reflectir sobre metodologias e práticas pedagógicas que fomentam o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Dessa reflexão surgiram algumas recomendações que se consideram pertinentes.

Recomendações

Os alunos revelaram ao longo do estudo uma fraca compreensão dos conceitos e das relações entre eles. Através dos seus contributos percebe-se que nas suas experiências anteriores, no âmbito dos Números e Operações, foram enfatizados os procedimentos e os algoritmos. Para desenvolver o sentido de número e a compreensão das operações é necessário envolver os alunos em experiências significativas de aprendizagem que fomentem a apropriação dos conceitos. É fundamental que compreendam os números, as operações e o seu efeito sobre os números. As tarefas não devem proporcionar apenas a realização de cálculos e o treino de algoritmos mas devem propiciar o desenvolvimento de competências como o reconhecimento e manipulação de múltiplas representações para os números, o sentido de grandeza absoluta e relativa dos números, o sentido de ordenação dos números, a compreensão das operações e seu efeito sobre um par de números, a compreensão do contexto e do cálculo necessário e a capacidade de seleccionar uma estratégia adequada e de questionar a razoabilidade dos resultados. A resolução de problemas é um elemento importante no desenvolvimento destas competências. Em particular, as tarefas que envolvem exemplos da vida real revelam-se significativas e esses valores numéricos despertam interesse nos alunos, aspecto também referido em Monteiro e Pinto (2006). As aulas destinadas a este tipo de tarefas devem sempre incluir momentos de discussão em grande grupo onde os alunos possam explicitar raciocínios, procedimentos e conclusões. Os plenários permitem desenvolver capacidades no âmbito da fundamentação de opiniões, justificação de decisões e estabelecimento de relações com base em informação quantitativa desenvolvendo assim o seu sentido de número.

Por outro lado, neste estudo surge a evidência que os alunos reconhecem e manipulam com à vontade apenas duas formas de representação dos números racionais:

a forma $\frac{a}{b}$ e a forma de numeral decimal. A construção do conceito de número racional pressupõe não só o conhecimento dos seus vários subconstructos mas também da forma como se inter-relacionam pelo que é necessário proporcionar tarefas que permitam aos alunos compreender e utilizar outras formas de representar os números racionais e paralelamente explorar outros significados da fracção que os alunos utilizam quase exclusivamente como uma relação entre a parte e o todo.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

APM, (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional.

APM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Azevedo, M. (1996). *A aprendizagem da estimação matemática. Um estudo no 2ºciclo.* Tese de Mestrado. Lisboa: APM.

Bardin, L. (2006). *Análise de Conteúdo* (Tradução para Língua Portuguesa). Lisboa: Edições 70. [Original Publicado em 1977].

Behr, M., Lesh, R., Post, T., e Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. Em R. Lesh e M. Landau (Orgs.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press. (retirado em 18 de Outubro de 2008 de http://education.umn.edu/rationalnumberproject/).

Behr, M., Harel, G., Post, T., e Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. Em D. Grouws (Org.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing. (retirado em 18 de Outubro de 2008 de http: // education.umn.edu/rationalnumberproject/).

Bell, J. (1997). *Como Realizar um Projecto de Investigação. Um guia para a Pesquisa em Ciências Sociais e da Educação* (Tradução para Língua Portuguesa). Lisboa: Gradiva. [Original Publicado em 1993].

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I. e Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra – Desenvolvimento Curricular. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, e P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp.65-92). Lisboa: SEM-SPCE.

Caraça, B. (2005). *Conceitos Fundamentais de Matemática* (6ª Edição). Lisboa: Gradiva.

Carmo, G. e Ferreira, M. (1998). *Metodologia de Investigação*. Lisboa: Universidade Aberta.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido de Número. Em J. P. Ponte, C. Costa, A.I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: SEM-SPCE.

Estrela, A. (1994). *Teoria e Prática de Observação de Classes* (4ª Edição). Porto: Porto Editora.

Ferreira, N. (2002). *Caracterização do Sentido de Número: estudos de caso com alunos do 8ºano de escolaridade*. Tese de mestrado não publicada: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Fosnot, C.T. e Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at work: Constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

GAVE, (2004). *Pisa 2003: Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de avaliação Educacional. (retirado em 12 de Dezembro de 2008 de http:// www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=33&fileName=pisa_2003_lite_matem.pdf)

Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão em alunos do 1º ciclo: uma reflexão necessária. *Actas do Profmat 2003* (em CD-ROM). Lisboa: APM.

Greenes, C., Schulman, I. e Spungin, R. (1993). Developing sense about numbers. *Arithmetic Teacher, 40* (5), 279-284.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. e Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa. Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lima, J. e Pacheco, J. (2006). *Fazer investigação. Contributos para a elaboração de dissertações e teses*. Porto: Porto Editora.

Markovits, Z. e Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (1), 4-29.

Matos, J. e Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante, 3* (1), 19-52.

ME-DES, (2001-02). *Matemática A (10.º,11º.,12ºanos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

ME-DEB, (1990). *Programa do 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DEB, (1991a). *Programa de Matemática: Plano de Organização do ensino-aprendizagem* (2ºciclo do ensino básico). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DEB, (1991b). *Programa de Matemática: Plano de Organização do ensino-aprendizagem* (3ºciclo do ensino básico). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DEB, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DGIDC, (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Mendes, F. e Delgado, C. (2006). Sentido do Número: um estudo no 1º ciclo do ensino básico. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro, (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp.147-156). Lisboa: SEM-SPCE.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14* (1), 89-107.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2006). O sentido do número: o caso dos decimais e das fracções. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro, (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp.177-189). Lisboa: SEM-SPCE.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

McIntosh, A., Reys, B. J. e Reys, B. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12* (3), 2-8, 44.

Oliveira, I. (1994). *O conceito de número racional em alunos do 6º ano de escolaridade: estratégias e dificuldades conceptuais*. Tese de mestrado. Lisboa: APM

Pinto, H. (2004). *O número racional no 2º ciclo do ensino básico no contexto da Matemática Realista*. Tese de mestrado. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). Literacia matemática. Em M. N. Trindade (Org.), *Actas do Encontro Internacional Literacia e cidadania: Convergências e interfaces* (em CD-ROM). Universidade de Évora: Centro de Investigação em Educação e Psicologia.

Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação. *Quadrante, 3* (1), 3-18.

Ponte, J.P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro, (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. e Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Porfírio, J. (1998). Os currículos de Matemática como têm evoluído?. *Educação e Matemática, 50,* 32-38.

Post, T., e Cramer, K. (1987). Children's strategies when ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher, 35*(2), 33-35. (retirado em 18 de Outubro de 2008 de http: // education.umn.edu/rationalnumberproject/).

Quivy, R. e Campenhoudt, L. (1992). *Manual de Investigação em Ciências sociais*. (1ª edição). Lisboa: Gradiva. [Original Publicado em 1988].

Ralston, A. (2000). Fim à aritmética de papel e lápis. *Educação e Matemática, 58,* 13-15 e 36-41 .

Reys, B. E. (1998). Computation versus number sense. *Mathematics teaching in the Middle school, 4* (2), 110-112.

Santos, E., Menino, H., Rocha, I., Botas, P. e Lucas, T. (2005). Estratégias de multiplicação. Uma experiência curricular de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática,* 85, 3-6.

Serrazina, L. e Ferreira, E. (2006). Competências de cálculo? Sim! E também ... colaborando à distância. Em Equipa do projecto Desenvolvendo o sentido e número: perspectivas e exigências curriculares (Ed.), *Desenvolvendo o sentido de número: Perspectivas e exigências curriculares – Materiais para o educador e para o professor do 1º ciclo* (2ª Edição). Lisboa: APM.

Silva, J. (2002). A Matemática e a literacia quantitativa. *Educação e Matemática, 69*, 15-18.

Sowder, J.T. (1988). Mental Computation and Number Comparison: their roles in the development of Number Sense and Computational Estimation. Em Hiebert, J. e Behr, M. (Orgs.), *Number Concepts and Operations in the middle grades* (pp. 182-197). Reston, VA: NCTM.

Sowder, J.T. e Kelin, J. (1993). Number sense and related topics. Em D.T. Owens (Org.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.41-57). New York, NY: Macmillan.

Sowder, J. e Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher, 41* (6), 342-345.

Stake, R. (2007). *A arte de investigação com estudos de caso*. (Tradução para Língua Portuguesa). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. [Original Publicado em 1995].

Steen, L. A. (2001). A problemática da literacia quantitativa. Em L. A. Steen (Org.), *Mathematics and Democracy*. (retirado em 7 de Junho de 2007 de www.maa.org/ql/mathanddemocracy.html).

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de Investigação em Educação* (3ª Edição) (Tradução para Língua Portuguesa). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. [Original Publicado em 1994].

Anexos

Anexo 1 – Questionário

Nome: ____

Ano__________ Turma__________ Idade __________

Este questionário faz parte de um trabalho de investigação e é confidencial.

Destina-se a recolher as tuas opiniões sobre a Matemática e sobre as aulas de Matemática.

Responde com sinceridade às questões que te são colocadas.

1. O que é para ti a Matemática?

----

2. Dá exemplos da presença da Matemática em situações do quotidiano.

----

3. Gostas de Matemática? Justifica a tua resposta.

----

4. Consideras-te um bom, médio ou fraco aluno a Matemática?

----

5. Como achas que deve ser uma aula de Matemática?

----

6. Achas que se deve usar a máquina de calcular na aula de Matemática? Justifica.

Anexo 2 – Guião da Entrevista com tarefas

Blocos da Entrevista

Bloco A: Identificação – idade e ano de escolaridade.

Bloco B: Concepções sobre a Matemática/ Reconhecimento da importância da literacia matemática/ Aplicabilidade dos conteúdos programáticos em situações quotidianas.

Bloco C: Sentido de número. Formas equivalentes de representar os números.
Conjuntos numéricos.

Bloco D: Sentido de operação.

Bloco E: **Tarefa 1** (Sentido de número). **Tarefa 2** (Sentido de operação).

GUIÃO da 1ª entrevista aos alunos

. Identificação

- Que idade tens?

- Que ano de escolaridade frequentas?

. Concepções sobre a Matemática/ Reconhecimento da importância da literacia matemática/ Aplicabilidade dos conteúdos programáticos em situações quotidianas.

- O que é para ti a Matemática?

- O que te agrada mais em Matemática? E o que te agrada menos?

- Para que serve a Matemática?

- Consegues dar exemplos de situações do teu dia-a-dia em que utilizes a Matemática (com excepção das aulas)?

- Consegues dar exemplos de situações da vida real em que tenhas utilizado os assuntos que trabalhaste nas aulas?

. Sentido de número. Formas equivalentes de representar os números. Conjuntos numéricos.

- Nas aulas de Matemática, nos 5º e 6º anos, trabalhaste o tema "Números". Sobre este tema, que assuntos foram abordados? Que tipo de tarefas realizaste?

- Consegues dar exemplos de elementos dos diferentes conjuntos numéricos, por exemplo, dar exemplos de números inteiros? E de números fraccionários? E de números racionais?

- O que é para ti um número inteiro? E um número fraccionário? E um número racional?

- Consegues dar exemplos de situações da vida real em que utilizes números inteiros? E números fraccionários?

- Ao longo deste ano foram também referidos os números relativos. Consegues dar exemplos da vida real em que se utilizem os números negativos?

. Sentido de operação.

- O que consideras que aprendeste sobre o tema "Operações" nos 5º e 6º anos?

- Que operações conheces?

- Consegues estabelecer alguma relação entre as operações que conheces?

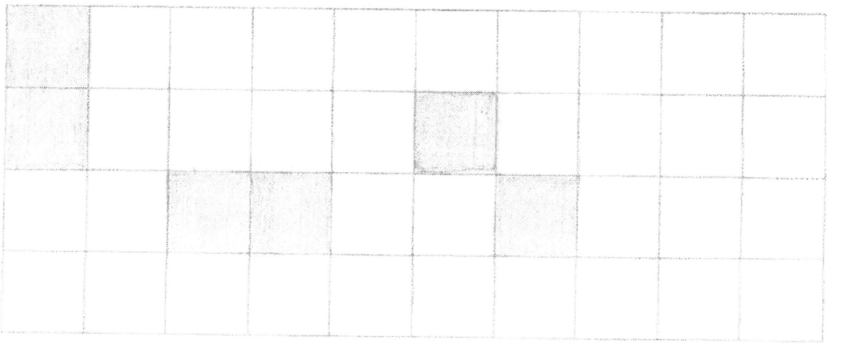
- Sentes dificuldades em realizar as operações que referiste. Quais? Em que situações? Porquê?

Agora vais realizar algumas tarefas sobre Números e Operações.
Não te deves preocupar se não souberes responder pois estas tarefas não têm influência na tua avaliação.
Peço-te que digas em voz alta tudo o que pensares enquanto resolves as tarefas. A forma como pensas é muito importante para esta investigação.

.Tarefa 1 / Tarefa 2

Tarefa 1

1.1 Observa o seguinte diagrama.



a) A afirmação: " A percentagem de área que está sombreada é 50%" é verdadeira? Porquê?

Quantos quadrados é necessário pintar de forma a atingir essa percentagem de área sombreada?

b) A afirmação: " A percentagem de área que está sombreada é 25%" é verdadeira? Porquê?

Quantos quadrados é necessário pintar de forma a atingir essa percentagem de área sombreada?

c) Qual a representação em forma de fracção da área que está sombreada? Explica o teu raciocínio.

d) Qual a representação decimal da área que está sombreada? Como procedeste?

e) Qual a percentagem de área que está sombreada? Explica como obtiveste esse valor.

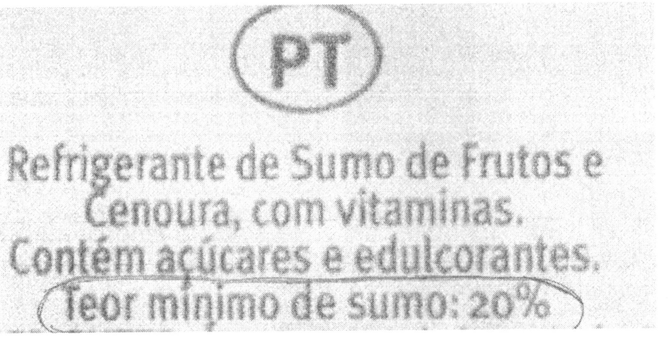
1.2 Gostas de sumo de laranja?

Qual das seguintes misturas tem um sabor mais forte a laranja? Têm sabor igual? Explica o teu raciocínio.

Copo A: quatro colheres de concentrado de sumo e seis colheres de água.

Copo B: três colheres de concentrado de sumo e cinco colheres de água.

Consegues explicar a informação destacada que foi retirada de uma embalagem de sumo de fruta?



1.3 Em três localidades diferentes foram registadas às 9 horas as temperaturas num determinado dia.

Localidade	Temperatura às 9 horas
A	**3º**
B	**-2º**
C	**-5º**

a) Qual das localidades registava, às 9 horas, a temperatura mais baixa?

b) Se a temperatura subir quatro graus durante a manhã que temperaturas serão atingidas nas várias localidades?

c) Quantos graus teria que subir a temperatura na localidade C para se registar valores positivos?

d) Quantos graus teria que descer a temperatura na localidade A para atingir valores negativos?

e) Na tua opinião estas temperaturas dizem respeito a que mês do ano? Porquê?

Tarefa 2

Num dia de Verão três amigos sentaram-se a conversar e a beber refresco de uma caneca. O Manuel bebeu metade, o Filipe bebeu um terço e o restante foi bebido pela Isabel.

a) Calcula a parte bebida pelos rapazes.

Que operação vais realizar? Porquê?

b) Determina a parte bebida pela Isabel. E agora como vais proceder? Explica o teu raciocínio.

c) Supõe que o jarro de sumo tem 3 litros.

Calcula, em litros, a quantidade de sumo bebida **por cada um** dos amigos.

Que operação vais realizar para determinar a quantidade de sumo bebida pelos colegas? Justifica.

d) Vamos comparar as quantidades bebidas por cada um.

Quantos litros bebeu o Filipe a mais do que Isabel? Que operação vais usar? Porquê?

O Manuel também bebeu mais do que a Isabel.

Quantas vezes mais?

Que operação vais fazer agora? Porquê?

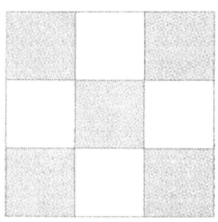
Anexo 3 – Ficha de Trabalho 1

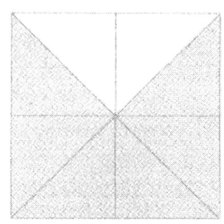
Ficha de trabalho 1

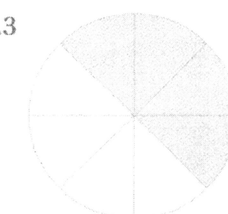
Formas equivalentes de representar números.

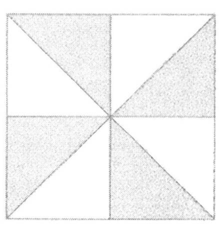
Ordenação e comparação de números racionais

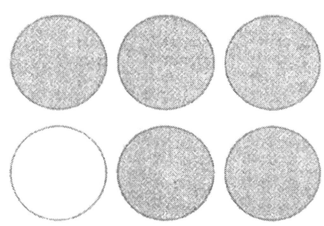
1. Para cada figura escreve a fracção correspondente à parte colorida.

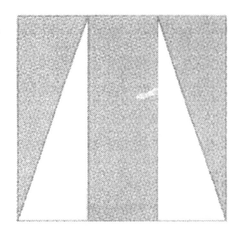
1.1


1.2


1.3


1.4


1.5


1.6


1.7 Sem realizares cálculos indica a figura (ou figuras) em que a parte colorida corresponde a 50%. Justifica.

1.8 Sem realizares cálculos, compara as fracções obtidas em 1.5 e 1.6. Qual é maior? Porquê?

1.9 Sem realizares cálculos, compara as fracções obtidas em 1.1 e 1.5. Qual é maior? Porquê?

2.1 Que número decimal corresponde a cada um dos seguintes pontos?

A= B= C= D=

2.2 Escreve os números indicados na alínea anterior na forma de fracção.

2.3 As fracções que apresentaste são irredutíveis? Simplifica-as.

2.4 Escreve as fracções indicadas na forma de percentagem.

2.5 Como explicas a percentagem indicada para o ponto B?

3. Considera o número fraccionário $\frac{7}{4}$. $\frac{7}{4} > 1$. Porquê?

4. Considera os números racionais:

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{7}{5} \qquad \frac{7}{8} \qquad \frac{11}{12} \qquad \frac{23}{3} \qquad \frac{3}{8} \qquad \frac{8}{7}$$

4.1 Indica os que são maiores que 1. Justifica.

4.2 Coloca-os por ordem crescente.

Explica teu raciocínio através de cálculos ou esquemas.

Anexo 4 – Ficha de Trabalho 2

Ficha de trabalho 2

Operações com números racionais

1. Um terço dos lápis da caixa de 12 lápis do Pedro está partido.
Metade dos lápis da caixa de 12 lápis da Ana está partida. Qual deles deve estar mais triste e porquê?

2. A Sara e o Rui compraram uma piza. A piza estava dividida em oito fatias iguais. A Sara comeu duas fatias e o Rui comeu o dobro de Sara. Que parte da piza sobrou?

3. Observa os seguintes exemplos.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\stackrel{?}{=}\frac{4}{8} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\stackrel{?}{=}\frac{2}{6}$$

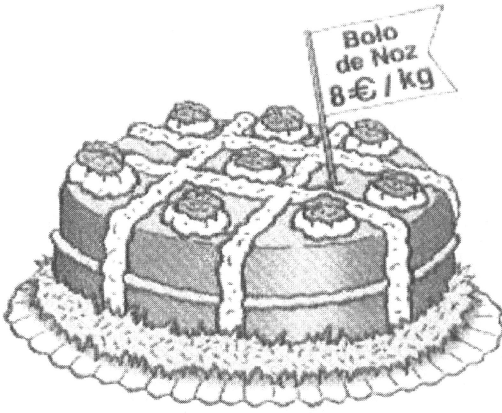
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\stackrel{?}{=}\frac{2}{7} \qquad \frac{0}{4}+\frac{1}{5}\stackrel{?}{=}\frac{1}{9}$$

3.1 Escreve um breve comentário indicando os exemplos que estão correctos ou não e porquê.

3.2 Selecciona uma das operações indicadas e inventa um problema que possa ser traduzido por ela.

4. Na Pastelaria Ideal há bolos que se vendem ao peso. O bolo de noz pesa 1.2 kg. Observa a figura.

4.1 Quantos gramas tem uma fatia correspondente a $\frac{1}{6}$ do bolo?



4.2 Quanto custa essa fatia?

4.3 A Sara Comprou $\frac{2}{3}$ do bolo.

Quantas fatias comprou? Quanto pagou?

5. Compra a Crédito

A família Costa vai comprar novos electrodomésticos para a sua cozinha, mas quer comprá-los a prestações. Depois de consultar duas lojas, que lhe ofereciam os mesmos preços mas condições de pagamento diferentes, continuam indecisos.

Vamos ajudá-los a tomar a melhor decisão.

Loja do Lar

Frigorífico . . . . € 599

Fogão . . . . € 448,9

Máquina de lavar loiça . . . € 972,7

Condições de pagamento

1/4 do valor total pago na entrada

O restante será pago num ano com juro à taxa anual de 6%

Super Loja

Frigorífico . . . . € 599

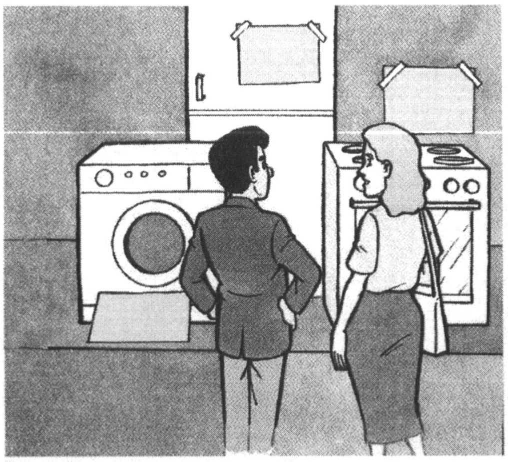
Fogão . . . . € 448,9

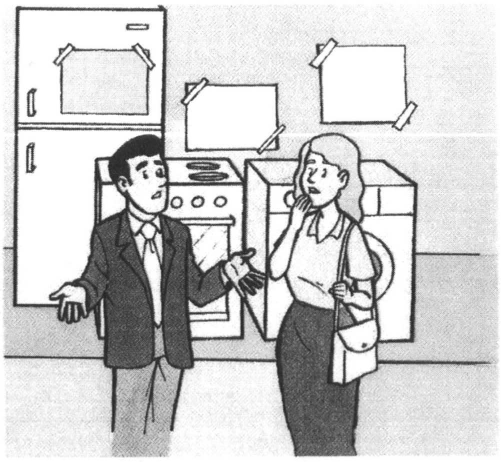
Máquina de lavar loiça . . . € 972,7

Condições de pagamento

1/2 do valor total pago na entrada

O restante será pago em dois anos com juro à taxa anual de 3%





Proposta de trabalho

- Calcular o preço total dos electrodomésticos em cada uma das lojas.
- Tomar decisões relativamente a critérios pré-estabelecidos.
- Indicar a loja que possibilita dar uma entrada menor.
- Escolher a loja que permite pagar uma mensalidade menor.
- Discutir e analisar as várias decisões possíveis.
- Apresentar adequadamente as conclusões.

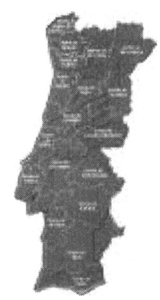
Anexo 5 – Ficha de Trabalho 3

Ficha de trabalho 3
Números Relativos. Operações com números relativos
Trabalho de Grupo - Temperaturas

TAREFA 1: Temperaturas em Portugal

Observa atentamente a tabela seguinte onde se indicam as temperaturas máximas e mínimas registadas, pelo Instituto Nacional de Meteorologia e Geofísica, no dia 22 de Janeiro de 2008, para alguns locais do país. *(fonte: www.meteo.pt)*

Local	*Temperatura Máxima*	*Temperatura Mínima*	*Amplitude Térmica*
Lisboa	12,1ºC	5,3ºC	
Porto	10,6ºC	3,4ºC	
Évora	16,1ºC	-1,2ºC	
Castelo Branco	12,3ºC	0,0ºC	
Bragança	15,0ºC	-3,2ºC	
Penhas Douradas	8,5ºC	-5,1ºC	
Faro	13,7ºC	9,9ºC	



1.1 A **Amplitude térmica** é a diferença de temperaturas entre o valor máximo registado e o valor mínimo registado. Para cada um dos locais calcula a amplitude térmica. Apresenta todos os cálculos que efectuares.

1.2 Para investigar…

1.2.1 Indica os dois locais onde é maior a amplitude térmica.

1.2.2 Indica os dois locais onde é menor a amplitude térmica.

1.2.3 Os locais onde é maior a amplitude térmica são locais do interior ou do litoral do país? Consideras que os valores que calculaste estabelecem alguma relação entre a amplitude térmica e a interioridade? (Responde a estas duas questões num pequeno texto de 4 linhas, expondo a tua opinião de uma forma clara e objectiva).

____

____

____

____

____

TAREFA 2: Temperaturas no Mundo

Observa atentamente a tabela seguinte onde são referidas temperaturas extremas já registadas no planeta Terra. *(fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Extremos_da_Terra)*

Local	Temperatura
Al Aziziyah (Líbia)	57,7º
Ifrane (Marrocos)	- 23,9º
Vostok (Antárctica)	- 89,2º
Sevilha (Espanha)	50,0º
Sarmiento (Argentina)	- 33º
Oymyakon (Sibéria, Rússia)	- 71,2º

1.1 Organiza as temperaturas por ordem crescente.

1.2 Qual a variação entre a mais alta temperatura registada e a mais baixa temperatura registada no planeta Terra? Apresenta todos os cálculos.

2.Considera a tabela seguinte onde são referidas as temperaturas máximas previstas para algumas cidades mundiais no dia 29/01/08. *(fonte: wmo.meteo.pt)*

Cidade	Temperatura
Jacarta	29,9º
Oslo	-2,1º
Roma	12,9º
Varsóvia	0,4º
Tallinn	-1,8º
Luanda	29,5º

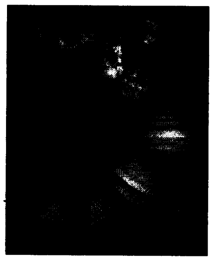
2.1 Dos valores apresentados, qual a mais alta temperatura prevista? E a mais baixa?

2.2 Qual a variação entre a mais alta temperatura prevista e a mais baixa temperatura prevista?

2.3 Em Luanda quantos graus se previam a mais do que em Roma?

2.4 Em Oslo quantos graus se previam a menos do que em Tallinn?

2.5 Em Jacarta quantos graus se previam a mais do que em Varsóvia?



TAREFA 3: Temperaturas no Sistema Solar

Considera as seguintes temperaturas médias à superfície relativas aos planetas que fazem parte do sistema solar:

-50ºC; 350ºC; 480ºC; 22ºC; -150ºC; -237ºC; -220ºC; -210ºC; -180ºC

1. Coloca por ordem crescente as temperaturas apresentadas.

2. Qual será a temperatura relativa ao planeta Terra? Explica a tua decisão.

3. Quais serão as temperaturas relativas a Vénus e a Mercúrio (planetas mais próximos do Sol)? Explica a tua decisão.

Anexo 6 – Grelhas de observação

Observação da realização das tarefas **Guião de observação** **Ficha de trabalho 1** *Formas equivalentes de representar números.* *Ordenação e comparação de números racionais*

1. Identificação

Data da aplicação	
Duração	
Organização da turma	Pares

2. Implementação da tarefa/ Realização da tarefa

Introdução da tarefa – professora	
Como reagiram os alunos	
Dificuldades manifestadas	
Autonomia na realização da tarefa	
Afirmações interessantes; diálogos interessantes	

Observações:

Observação da realização das tarefas Guião de observação Ficha de trabalho 2 - Trabalho de grupo Operações com números racionais

1. Identificação

Data da aplicação				
Duração				
Organização da turma	Grupos 3 a 4 alunos			
Grupo 1	**Grupo2**	**Grupo3**	**Grupo4**	**Grupo5**

2. Implementação da tarefa/ Realização da tarefa

Introdução da tarefa – professora	

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Como reagiram os alunos à tarefa					
Dinâmica de grupo – aspectos a salientar					
Dificuldades manifestadas					

Afirmações interessantes; diálogos interessantes (no grupo)					

Afirmações interessantes; diálogos interessantes (turma)	

Observações:

Observação da realização das tarefas
Guião de observação

Ficha de trabalho 3 - Temperaturas

1. Identificação

Data da aplicação				
Duração				
Organização da turma	Grupos 3 a 4 alunos			
Grupo 1	**Grupo2**	**Grupo3**	**Grupo4**	**Grupo5**

2. Implementação da tarefa/ Realização da tarefa

Introdução da tarefa – professora	

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Como reagiram os alunos à tarefa					
Dinâmica de grupo – aspectos a salientar					
Dificuldades manifestadas					

Afirmações interessantes; diálogos interessantes (no grupo)					

Afirmações interessantes; diálogos interessantes (turma)	

Observações: