UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA E EDUCAÇÃO

A Utilização da Tecnologia na Sala de Aula como Instrumento de Visualização e Algebrização dos Objetos Matemáticos

Marisa do Carmo Alves da Silva

Orientação: Professor Doutor António Borralho

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Relatório de Estágio

Évora, 2016

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGIA E EDUCAÇÃO

A Utilização da Tecnologia na Sala de Aula como Instrumento de Visualização e Algebrização dos Objetos Matemáticos

Marisa do Carmo Alves da Silva

Orientação: Professor Doutor António Borralho

Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Relatório de Estágio

Évora, 2016

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à minha família, que tornou possível a realização do curso de Mestrado a que se refere este Relatório e que me protege no prosseguimento da minha caminhada.

Em particular, ao meu filho, pela forte motivação que me inspira.

Um agradecimento muito expressivo ao Prof. Doutor António Borralho, Orientador do meu Estágio, e à Profª. Doutora Ana Paula Canavarro, por tudo aquilo que me ensinaram e por terem sempre mostrado grande disponibilidade para comigo.

Aos Professores Cooperantes Prof. Artur Bruno e Prof. Paulo Veiga, pela generosidade com que me receberam nas suas aulas e por terem revelado bastante interesse na minha progressão, respondendo prontamente às minhas solicitações.

Ao Diretor da Escola Severim de Faria, pela abertura que demonstrou em relação à minha presença na escola e no que respeitou à realização do Projeto e do Relatório de Estágio.

Ao Prof. Doutor João Pedro da Ponte, que me motivou a concluir o Relatório de Estágio e que acreditou em mim no sentido da prossecução dos meus estudos.

À minha colega de Estágio Clara Durão, por tudo aquilo que vivemos e por todas as dificuldades que fomos superando em conjunto.

Às minhas amigas Isabel Faria e Rute Pereira pelos sorrisos que me proporcionaram.

Aos Professores do Curso de Mestrado e aos meus colegas: Obrigada por este ter sido um período tão agradável da minha vida, no qual aprendi bastante.

À Carina Maximino pelo apoio moral e indicações preciosas durante a realização do Relatório.

Resumo

No presente relatório da Prática de Ensino Supervisionada são referidas opções de ensino, procedimentos e reações dos alunos ao processo de ensino. É dada uma grande ênfase ao ambiente de aprendizagem baseado na tecnologia e suportado por uma comunidade de aprendizagem, que tem lugar na própria sala de aula ou na sala de informática. A tecnologia é assumida como um recurso constante na maior parte das aulas através do recurso a tarefas escolhidas intencionalmente tendo em vista a possibilidade de introdução da tecnologia na sua resolução. Esta implementação assumiu várias formas, tais como a exploração de calculadoras, a manipulação do GeoGebra ou simplesmente através da apresentação de ficheiros acabados, o que constitui uma forma de obter uma boa visualização dos objetos matemáticos. A aplicação dos recursos tecnológicos foi progressivamente tornada mais intensiva, atingindo o seu culminar no Projeto de Estágio, designação atribuída a duas aulas concebidas explicitamente para a exploração da temática: "Estabelecimento de um Paralelismo entre a Geometria Tridimensional Dinâmica e as Funções".

Palavras-chave: Tarefas de investigação, formalização, intencionalidade, recursos tecnológicos, justificação de procedimentos, melhoramento da linguagem matemática, propriedades fundamentais, ensino exploratório

Abstract

The Use of Technology in the Classroom as an Instrument of Visualization and Algebrization of the Mathematical Objects

In this paper we refer to teaching options, procedures, and to students' reactions to the teaching processes. We give a lot of reinforcement in the learning environment based on technology and supported by a community of learners, which take place in their own classroom or in the Informatics Class. Technology is assumed as a constant resource in most part of the classes through the intentional tasks' choosing taking into account the possibility of technology introduction in their resolution. This implementation has assumed several forms, like calculators' exploration, GeoGebra manipulation or simply by presenting finished files, which is a way of getting a great visualization of mathematical objects. The technological resources' application turned itself progressively more intensive, presenting its center point on *Practice Project*, name who was gave to two classes conceived explicitly for the thematic exploration: "The establishment of a parallelism between Dynamic Tridimensional Geometry and the Functions".

Key words: Investigation tasks, formalization, intentionality, technological resources, procedures justification, mathematical language improvement, fundamental properties, mathematical communication, explorative teaching

ÍNDICES

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

No texto que segue, é realizada uma reflexão sobre os conteúdos lecionados, as opções metodológicas, os recursos utilizados como suporte das mesmas e os ambientes de aprendizagem implementados.

A projeção de imagens, nas primeiras aulas do 10º ano, consistiu um recurso amplamente utilizado, quer fossem digitalizações do manual adotado, quer construções realizadas, aquando da planificação das aulas, com recurso ao GeoGebra. Esta opção prendeu-se ao facto de o conteúdo a lecionar estar contido no tema *Geometria Euclideana*, pelo que se revelaram importantes as explicitações acompanhadas de algo palpável, para o qual eu pudesse fisicamente direcionar a minha postura. Nesta fase inicial de construção da identidade profissional, considerei muito útil munir-me destes recursos para facilitar a minha atuação junto da turma, apoiando-me em recursos que favorecessem a visualização dos objetos matemáticos e, deste modo, potenciassem os processos algébricos associados a resoluções de tarefas. Posteriormente, foram introduzidos outros recursos como o *software* TI-Inspire que permitia exposições relativas à calculadora gráfica com a mesma designação (comum à maioria dos alunos da turma) de modo a assegurar a todos os alunos a visualização mediante a projeção através do vídeo projetor. As calculadoras gráficas permitiram quer a visualização gráfica, quer a algebrização de funções, pelo que introduziram uma evolução no ensino do conteúdo. Avançando em termos de aplicação da tecnologia na sala de aula, os alunos foram por fim direcionados a fazerem uso do programa GeoGebra, completando desta forma o ciclo de utilização da tecnologia nas aulas de Matemática. Esta apropriação do *software* foi designada por Projeto de Estágio como a seguir se especifica.

Fez parte do quadro conceptual de suporte à lecionação a ideia da conexão entre a Geometria e a Álgebra, que teve o seu culminar no projeto de estágio implementado na turma do 10º ano. Dentro deste, a noção do estabelecimento de uma relação efetiva e evidente entre estes dois campos da Matemática foi a base para a construção de tarefas, cuja resolução esteve estreitamente vinculada ao programa GeoGebra 3D. Estas pressupunham a conexão entre as representações geométrica, gráfica e algébrica de um determinado objeto matemático, no qual se introduziu uma dinâmica por intermédio de um seletor. A ideia, que atingiu o seu culminar neste projeto final, estava ligada ao facto de assumir a importância da compreensão de um objeto matemático em termos das suas propriedades essenciais do ponto de vista da Matemática, ou seja, prendia-se à análise conceptual de determinados objetos considerados importantes no sentido da apreensão de conceitos fundamentais.

Também no 9º ano se procurou estabelecer uma relação entre a expressão visual e a expressão gráfica / algébrica. As representações dos objetos estiveram ligadas à visualização dos mesmos, mas também à compreensão destes enquanto estruturas representativas de um conjunto de propriedades matemáticas. Também na turma 9ºB foi implementada uma aula na sala de informática com a finalidade de abordar um conjunto de conceitos relativos aos lugares geométricos. Pretendia-se que os alunos desenvolvessem gosto pelo conteúdo, bem como acentuar as propriedades caracterizantes dos objetos construídos. Apesar de não substituir em absoluto as construções no caderno, afigurou-se como um poderoso complemento, quer motivacional, quer estrutural como suporte à aprendizagem desta matéria.

Os aspetos considerados importantes na estruturação das aulas são também tidos em linha de conta, bem como as questões mais pertinentes, relativas a metodologias que podem ser melhoradas. Ao longo do texto, assiste-se a um esforço no sentido de compreender a razão justificativa do recurso a determinadas estratégias de ensino e à escolha de tarefas, sendo depois avaliada a sua pertinência, numa reflexão relativa aos seus pontos fortes e fracos no que diz respeito à aprendizagem dos alunos.

A experimentação, o risco, foram até certo ponto levados para as aulas, não procurando seguir o caminho mais fácil, mas aquele que pudesse levar os alunos a interessar-se mais e a nutrir um maior gosto pela Matemática. Foi também muito tido em linha de conta a possibilidade de autonomia dos alunos, com o necessário apoio por mim proporcionado.

Creio que o recurso aos materiais, ainda que diminuto, cumpriu a função de transmitir certos conceitos que visualmente ofereciam algumas dificuldades.

As aulas descritas, apesar de não terem sido as únicas lecionadas, foram selecionadas tendo em conta a sua representatividade no âmbito do tema da Prática de Ensino Supervisionada.

Espero, acima de tudo, ser suficientemente elucidativa no discurso, de modo a constituir-se um documento demonstrativo do sucesso das metodologias e recursos introduzidos nas turmas em questão.

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1. RELACIONANDO A GEOMETRIA E A ÁLGEBRA ATRAVÉS DA GEOMETRIA DINÂMICA INTERATIVA

2.1.1. A Natureza dos Objetos Matemáticos e o Papel Crucial das Representações

Como já foi tantas vezes referido desde o tempo da Grécia antiga, a natureza dos objetos matemáticos é na sua essência abstrata. Os objetos matemáticos são apenas indiretamente acessíveis através das *representações*, o que contribui para o carácter paradoxal do conhecimento matemático. A única forma de conseguir o acesso aos referidos objetos é utilizando sinais, palavras ou símbolos, expressões ou desenhos. No entanto, paralelamente, os objetos matemáticos não devem ser confundidos com as representações que fazemos deles. (Duval, 1999, p.4)

Os objetos matemáticos são algo de concreto, apesar de abstrato, e são estabelecidos através do recurso a definições da sua significância, ou seja, tornam-se algo real, do ponto de vista matemático quando o conceito que lhe está associado é definido de forma unívoca ou, pelo menos, utilizando definições equivalentes. O que habitualmente os alunos tendem a fazer é imaginar um determinado objeto matemático e, a partir desta idealização, realizar a sua representação; não por recorrência às suas propriedades fundamentais, mas por invocação da imagem que têm desse mesmo objeto. (Duval, 2006)

Vejamos dois exemplos.

1. Construir uma reta tangente a um círculo para os alunos é usualmente realizado através do desenho de uma linha tocando o círculo, unicamente utilizando a acuidade visual e não por recorrência a uma propriedade geométrica da reta tangente: a existência de perpendicularidade entre esta reta e um "único raio" do círculo.

2. Quando lhes é solicitado que representem um ângulo, será que têm presente que o conceito de ângulo se refere a uma região do plano que é delimitada por duas semirretas com uma origem em comum?

Nesta ótica, há que frisar que um processo é considerado *operacional* se o uso da representação se realiza tendo em conta a relação com outra representação ou se o seu uso é controlado por esta relação. (Usiskin, 2010)

No entanto, as representações podem ser realizadas tendo como pano de fundo um quadro mental onde estão presentes os conceitos associados aos objetos, ou seja, a representação surge por intermédio de uma ideia conceptual e não diretamente pela imagem do objeto. (Duval, 2006)

2.1.2. Representação dos Objetos Matemáticos em Ambientes de Geometria Dinâmica e Interativa

A questão essencial dos ambientes de Geometria Dinâmica reside na natureza específica dos seus diagramas (imagens geométricas dos objetos). Estes diagramas são variáveis e podem ser continuamente modificados, mantendo as suas propriedades geométricas quando deformados (Roy, 2008).

No entanto, existem outros tipos de representações que também estão disponíveis em alguns ambientes de Geometria Dinâmica, como os gráficos de funções ou de famílias de funções paramétricas e as expressões algébricas. No entanto, o novo aspeto introduzido por este tipo de ambientes diz respeito ao facto de todas estas representações se encontrarem interligadas. Enquanto uma das representações é continuamente modificada, as outras representações dependentes da primeira também vão variando. Não são apenas os elementos geométricos que variam, mas também os números representativos de medidas, coordenadas, resultados de cálculo e números presentes em expressões simbólicas de funções ou em equações de curvas (Laborde, 2010).

A variação e as variáveis constituem a essência de muitos objetos matemáticos. Estas noções podem tornar-se tangíveis na Geometria Dinâmica, que implementa a variação de ambos: objetos e números. Num certo sentido, os ambientes de Geometria Dinâmica constituem uma versão material dos processos mentais fundamentais desenvolvidos pelos alunos (Andersen, 2010).

Com as múltiplas representações dos objetos matemáticos ligadas e “comportando-se matematicamente”, os ambientes de Geometria Dinâmica constituem um local onde é possível conceber tarefas que contribuem para a conexão entre representações e, em particular, entre representações geométricas e expressões algébricas de funções. Tarefas nas quais os estudantes são levados a interpretar ou a produzir os comportamentos esperados das representações encontram nos ambientes de Geometria Dinâmica o seu lugar por excelência.

Vamos ilustrar este tipo de tarefa com um exemplo no ambiente de Geometria Dinâmica Tridimensional GeoGebra.

Sejam A, B e C três pontos distintos não colineares, ou seja, definindo um plano. A sua equação surge na folha algébrica. Os alunos podem observar que movendo um ponto destes (utilizado para definir o plano) a equação do plano varia (com a salvaguarda da equivalência entre ambas as equações).

Em seguida, são apresentadas duas imagens relativas a duas posições do ponto B e as respetivas equações do plano por este movimento geradas.

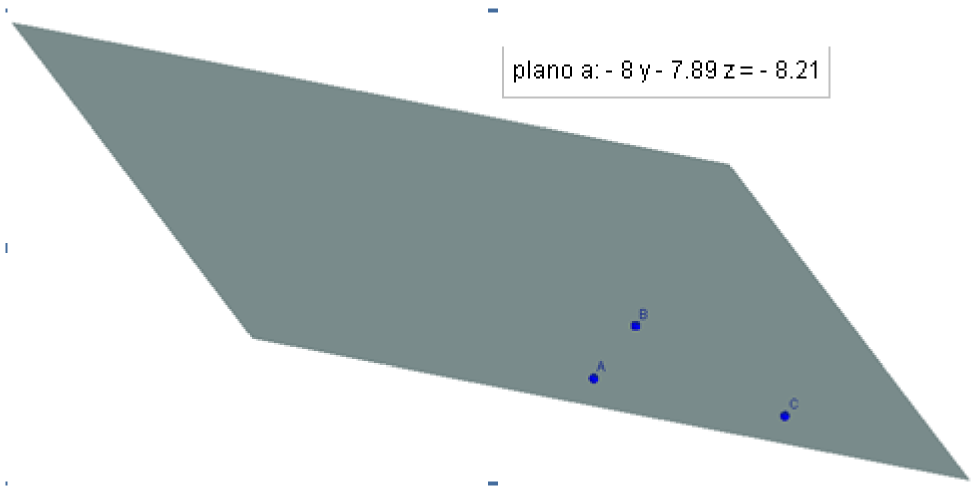


Figura 1: *Plano a definido através dos pontos A, B e C, cuja equação é dada pela igualdade que pode ser observada na figura*

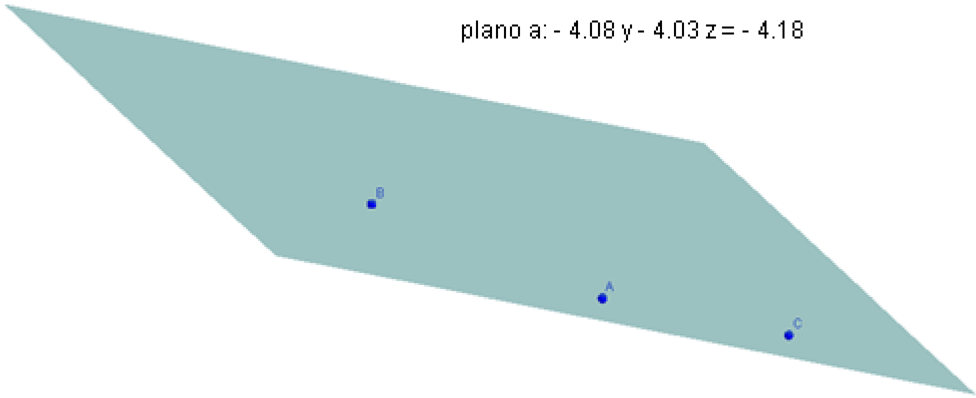


Figura 2: *Plano a definido por A, C e, digamos B', pois o ponto B foi movido, estando agora numa posição distinta da inicial. A equação apresentada é equivalente à primeira.*

Podemos observar que o plano continua o mesmo, igualmente posicionado no espaço, pois o ponto B foi movido através de um deslocamento dentro do próprio plano. Deste modo, a nova equação obtida, dependente da posição atual do ponto B, é equivalente à primeira.

No momento seguinte, é dado um ponto P não pertencente ao plano. A tarefa consiste em aproximar o ponto P do plano dado. A figura seguinte dá-nos uma ideia da situação inicial.

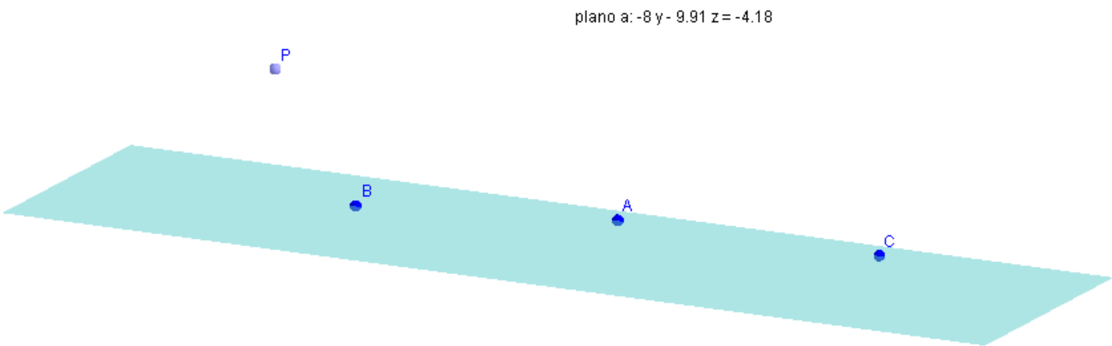


Figura 3: *Tomemos um ponto P não pertencente ao plano com o objetivo de o aproximar continuamente do plano*

A **Álgebra** é o recurso infalível de modo a controlar a posição do ponto P relativamente ao plano. Se tentarmos mover o ponto P até inseri-lo no interior do plano, poderá não ser possível ou então constituir uma questão de destreza manual. Para evitar a aleatoriedade, há que manipular as coordenadas do ponto P, de modo a torná-lo um ponto pertencente ao plano, ou tão próximo quanto queiramos. No limite, querendo que o ponto P seja um ponto pertencente ao plano, então as suas coordenadas devem satisfazer a respetiva equação, enquanto para aproximar continuamente o ponto, é necessário que os valores assumidos pelos membros da equação do plano, quando concretizadas as variáveis, se vão sucessivamente tornando mais próximos até, por fim, ser atingida a igualdade.

É exatamente por este facto que a tarefa é interessante: porque permite que os alunos compreendam o que significa, por um lado, o ponto pertencer ao plano, e, por outro, como poderão modificar as coordenadas do ponto de modo a aproximá-lo do plano. Ou seja, a resolução da tarefa implica que o raciocínio do tipo conceptual seja aplicado. Para além disto, na ótica da conexão entre representações, a tarefa leva a que cada alteração realizada nas coordenadas do ponto P, correspondente a uma transformação algébrica, conduza a uma transformação geométrica, podendo este paralelismo ser apreciado instantaneamente no ambiente GeoGebra.

Obviamente, esta tarefa apenas pode ser proposta num ambiente dinâmico no qual as representações geométricas e algébricas estejam ligadas.

Em análise da tarefa, há que salientar que os alunos são designados, por um lado, para descreverem todos os movimentos que podem ser concebidos no espaço, ao moverem o ponto, e, por outro, para imaginar perpetuamente no espaço o movimento que cada operação analítica reproduz.

Tarefas como esta, dadas num ambiente de Geometria Dinâmica, podem contribuir para a aprendizagem por duas razões:

1. A própria tarefa e as suas exigências;

2. O feedback dado pelo ambiente às ações dos alunos e, em particular, quando os objetos são arrastados e postos em movimento, os alunos podem observar os efeitos da construção realizada: se a forma é preservada ao movimentar o objeto e descobrir o

seu comportamento real, averiguando se este se realiza de acordo com o esperado (Zotto, 2010).

2.1.3. Construindo o Sentido da Noção de Gráfico de uma Função

O conceito de função é caracterizado pelo número alargado de representações possíveis introduzidas no ensino de Matemática, incluindo tabelas de valores, gráficos, expressões simbólicas e tabelas de variação (nas quais as variações da função, assim como os seus mínimos e máximos locais são registados). (Goldin, 2008)

A título de exemplo, o Programa Nacional de Matemática para o 10º ano preconiza a importância de aprender como transitar facilmente de um para outro tipo de representação. As normas NCTM recomendam que "os alunos no 8º ano de escolaridade se movam entre representações de funções: verbais, tabulares, gráficas e algébricas; e descrevam aspetos de uma função, tais como o seu declive e os pontos de intersecção do seu gráfico com o eixo das ordenadas nas diferentes representações".

Cada representação contribui para as diferentes características centrais do conceito de função e é relevante para diferentes utilizações e problemas (Laborde, 2010). Por exemplo, os problemas numéricos são melhor abordados com expressões simbólicas, enquanto se torna mais acessível ter uma visão global do comportamento de uma função através de uma representação gráfica.

No entanto, parece que para os alunos subsiste a falta de uma relação explícita entre função e gráfico associado. Surgem frequentemente dificuldades em interpretar a informação gráfica em termos da função que lhe diz respeito.

Em geral, os alunos não consideram o gráfico de uma função como sendo a representação de uma relação existente entre duas variáveis, nem se detêm a analisar as suas características.

Em suma, os alunos são avessos à interiorização da ideia de uma função como uma relação entre variáveis (uma dependente da outra). Têm uma ideia circunscrita de função, na qual se processa uma relação entre pares separados de números, cada um dos quais podendo ser considerado como uma inserção que devolve outro número como resultado.

A Geometria Dinâmica introduz uma assimetria nas variáveis e permite aos alunos detetarem a diferença entre *variáveis independentes* e *variáveis dependentes* na definição de uma função. A variável independente pode ser arrastada diretamente, enquanto a variável dependente apenas pode ser movida indiretamente, por arrastamento da variável independente. A distinção teórica entre duas variáveis é materializada no ambiente de Geometria Dinâmica. (Laborde, 2010)

Com base nestes pressupostos, foi delineada uma sequência de ensino com o objetivo de introduzir a noção de função e de gráfico de uma função. A ideia principal era introduzir os alunos no tema das Funções através do ambiente GeoGebra, tendo em conta que este proporciona a mediação entre as ferramentas de arrastamento e as de desenho (esboço), de modo a familiarizar os alunos com as noções de variáveis independentes e dependentes e de função.

Os alunos interiorizaram muito bem a diferença entre variáveis independentes e dependentes, apenas por invocação do movimento direto ou indireto das variáveis quando já não estavam a trabalhar no ambiente de Geometria Dinâmica. Provaram ainda ser capazes de utilizar de um modo operacional o gráfico, de encontrar a imagem e o domínio de uma função, bem como evidenciaram a capacidade de determinar a pré imagem de conjuntos do domínio de uma função numérica.

A acessibilidade dos ambientes digitais veio permitir que representações com conexões múltiplas sejam possíveis. No entanto, somente apresentar aos alunos este tipo de ambientes pode não ser suficiente para promover a aprendizagem. Estes ambientes tornaram possíveis novos tipos de tarefas, nos quais as questões matemáticas são essencialmente resolvidas através de representações gráficas, podendo representar um contributo para o desenvolvimento de uma utilização operacional destas representações e, consequentemente, auxiliar no sentido de uma conceptualização mais rica. O desenho curricular deve tirar partido destas contribuições. (Jones, 2007)

2.1.4. Geometria Analítica: Convergência entre a Álgebra e a Geometria

A mais óbvia ligação entre a Álgebra e a Geometria é, naturalmente, a histórica: a Geometria Analítica. Nesta abordagem, o primeiro domínio representa os pontos geométricos por pares de coordenadas e os objetos geométricos por variadas equações de coordenadas e relações e, seguidamente, explora maquinaria simbólica acessível, simultaneamente, para a análise da existência de configurações geométricas e para a construção (ou especificação) de novas.

A Geometria Analítica provocou a primeira grande revolução no desenvolvimento matemático da Geometria, após Euclides, e já faz parte de algum do tratamento escolar da Álgebra elementar.

Antes de considerar a perspetiva de um *software* dinâmico subordinado à Geometria Analítica, surgiram alguns constrangimentos em considerá-lo como uma fundação para uma integração pedagógica entre a Álgebra e a Geometria.

Em primeiro lugar, uma quantidade expressiva de elementos interessantes de Geometria - triângulos, por exemplo – resistiu à representação através de equações analíticas ou com recurso a curvas algébricas. Em segundo, e em interligação, uma desunião notável, muitas vezes existente, entre a expressividade geométrica e a maquinaria analítica. Introduzimos os círculos no Jardim de Infância, no entanto, as equações quadráticas que os representam analiticamente não são estudadas até ao ensino secundário. Em terceiro lugar, persiste a questão da primazia - na Geometria Analítica, o que deve ser considerado primário: a Álgebra ou a Geometria? Através do seu veículo, qual se sobrepõe? Historicamente, a Análise foi implementada para resolver problemas em Geometria, mas no currículo contemporâneo a situação inversa é bastante mais frequente. Dito de outro modo, a presença de uma ponte matemática entre as duas áreas contribui pouco, *à priori*, para a nossa compreensão relativa à viabilidade ou configuração de uma ponte pedagógica possível entre os referidos ramos da Matemática. (Usiskin, 2010)

Estas limitações plausíveis e riscos tornam-se atuais e reais quando a ponte atual - a Geometria Analítica - é operacionalizada como o princípio fundador da integração entre a Álgebra e a Geometria no *design* do *software* dinâmico. Muitos destes constrangimentos, por exemplo, minam a coerência do GeoGebra: *software* de Matemática Dinâmica para escolas que combina Geometria, Álgebra e Cálculo, ou mais simplesmente, descrito pela equação: Geogebra=Geometria+Álgebra. O *software* utiliza a Geometria Analítica como a perspetiva unificadora, de modo a combinar estes dois domínios e a questão central do interface de um utilizador é que um objeto matemático aparece simultaneamente em ambas as representações: a forma simbólica ou algébrica surge no lado esquerdo e a forma gráfica ou geométrica no lado direito, como é possível observar na figura seguinte:

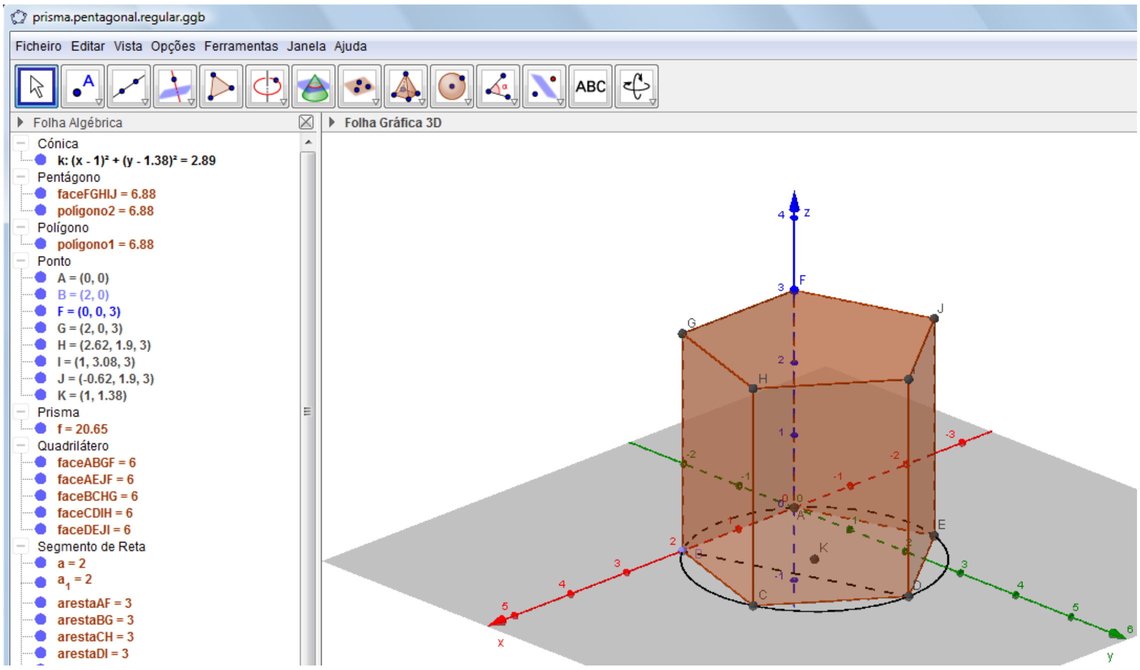


Figura 4: *A equação da circunferência que constitui a base da construção do prisma pentagonal é visível na "Folha Algébrica"; constatamos que, por exemplo, o prisma pentagonal não surge definido de forma analítica, sendo apenas apresentado o seu volume na mesma secção*

À primeira vista, a ideia parece natural e atrativa: quando preferimos as características geométricas de uma forma, focamos a sua imagem visual à direita, mas para uma perspetiva mais analítica, voltamo-nos para a sua equação ou coordenadas à esquerda. Essencialmente importante é o facto de sermos recordados continuamente a respeito da equivalência matemática, ou mesmo, identidade entre estas ideias ou representações.

Quando selecionamos a representação de um objeto numa das janelas (folhas), a sua representação correspondente surge iluminada na outra janela; e quando o programa solicita uma das representações, aceita a outra em sua substituição, porque afinal, o *software* lembra-nos constantemente que, matematicamente, o objeto e a sua equação representam a mesma realidade. Esta é claramente a forma da ponte que a Geometria Analítica representa. (Andersen, 2010)

2.1.5. Limitações Relativas à Unificação entre a Álgebra e a Geometria

Mas sem demora, o tráfico da Matemática escolar começa a mover-se através desta ponte e, assim, a sua robustez como uma metáfora total, como uma solução totalizante para os problemas de ligação pedagógica entre a Álgebra e a Geometria, começa a tornar-se frágil.

A figura seguinte contempla um "raio" adicionado à circunferência ilustrada e mostra que, no seio deste paradigma de equivalência matemática, o segmento geométrico r (que designámos por "raio") é o número real 1.58 (à esquerda).

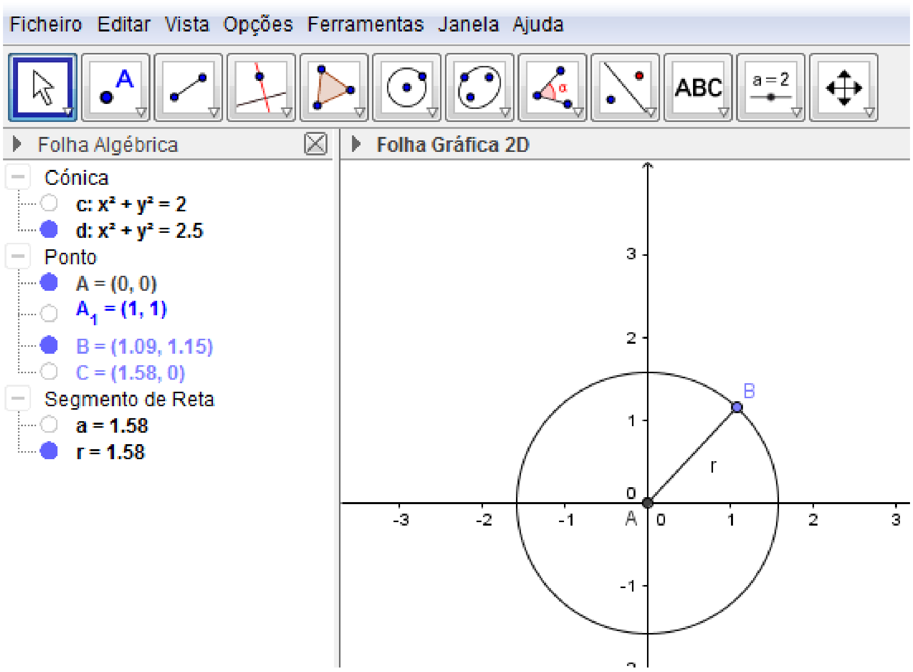


Figura 5: *Paradigma de equivalência matemática entre o segmento r e a sua norma*

Como educadores podemos cair neste erro antes de compreender a sua lógica interna. Ou seja, as imprecisões encontradas cumprem a função de tornar o *software* acessível aos alunos, deixando um espaço para a intervenção do professor, no sentido da clarificação de conceitos que possam ser apresentados com alguma ambiguidade. No caso da ilustração 5, o segmento que é designado por r, da mesma forma que a medida do seu comprimento, leva-nos a concluir que esta forma de apresentação simplifica o conceito de raio, tendo em conta que ofereceria certamente alguma controvérsia o recurso à definição exata: a medida do comprimento de qualquer segmento de reta cujos extremos são um qualquer ponto da circunferência e o seu centro, isto é, o número que surge na janela algébrica. Tendo em conta a necessidade natural de uma certa simplicidade com vista a facilitar a interação com o GeoGebra por parte dos alunos, o papel do professor ganha importância, precisando os conceitos em que estes *handicaps* ocorram.

Tal significa que a referida decisão pedagógica no *design* do *software* é motivada pela discrepância existente entre os conceitos fundamentais veiculados pelo programa e os níveis de ensino nos quais são introduzidos. Desta forma, enquanto, por um lado, podemos compreender a lógica da decisão, podemos igualmente lamentar as suas consequências para os estudantes caso a influência do professor não se faça sentir. Se o *software* implica que 1.58 é o segmento raio da circunferência dada, então como poderão os alunos dar sentido a (1.58,1.58), sendo que o seu significado passa pela representação do par ordenado constituído por duas entradas do mesmo número real, não podendo ser tomado como (r, r). (Usiskin, 2010)

A figura seguinte mostra um exemplo mais fundamental das limitações associadas a este tipo de unificação entre a Álgebra e a Geometria. A circunferência construída é imutável – centrada na origem e com raio igual a $\sqrt{2}$ (de tal forma que a sua equação permanece inalterada), no entanto, a unidade de medida do eixo vertical do espaço de coordenadas foi alterada, o que se refletiu num alongamento da circunferência, dando origem, aparentemente, a uma elipse geométrica. Ou seja, apesar de não aparentar ser uma circunferência, na verdade, de acordo com a sua equação podemos assertivamente afirmar que se trata deste tipo de cónica.

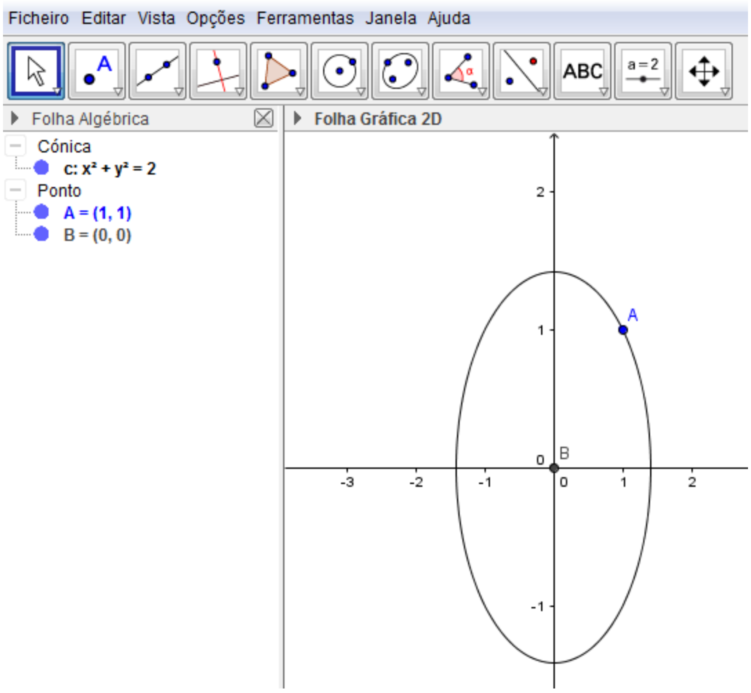


Figura 6: *Circunferência deformada por alteração da escala dos eixos*

2.1.6. Estudo relativo à Avaliação das Aprendizagens no Ensino da Matemática com Recurso à Tecnologia

(Reed, 2010)

Amostra considerada N=521

A investigação efetuada mostrou os efeitos das atitudes dos estudantes na aprendizagem matemática com recurso ao computador. A tecnologia foi utilizada para auxiliar os alunos a desenvolver um conceito matemático de função. Em geral, uma atitude favorável face à matemática foi um prenúncio de pontuações positivas nos testes efetuados. No entanto, os alunos mais hábeis, que estavam disponíveis relativamente à utilização de ferramentas computacionais, atingiram pontuações baixas. Os comportamentos descritos relacionados com o seu posicionamento face à questão em estudo não estavam relacionados com as pontuações dos testes. A observação de um pequeno número de alunos (n=8) revelou que atitudes favoráveis face à matemática e à tecnologia inserida na aprendizagem matemática incrementaram as demonstrações externas de aprendizagens realizadas e ambas: uma atitude positiva face ao recurso à tecnologia no desenvolvimento dos processos matemáticos e uma aprendizagem exteriorizada beneficiaram a aquisição de boas *performances* na operacionalização da tecnologia. Apesar de a excelência na utilização da tecnologia e as pontuações obtidas nos testes estarem intimamente relacionadas, os processos reflexivos parecem surgir como mediadores desta relação.

Promover a aprendizagem com recurso à tecnologia deverá tomar em consideração vários fatores, incluindo o desenvolvimento das atitudes dos alunos, o aumento dos níveis de comportamentos de aprendizagem e a abertura de oportunidades suficientes para a construção do conhecimento matemático no quadro de um discurso matemático significativo.

2.1.7. Comunidade de Aprendizagem

Este tipo de ambiente de aprendizagem refere-se, numa primeira abordagem, a uma constituição de grupos a partir do conjunto de alunos da turma, sendo estes constituídos por um certo número de elementos, em geral, 3 ou 4 alunos. Cada um destes grupos constitui uma unidade de aprendizagem onde é desenvolvido um conjunto de processos sociais e cognitivos que constituem a base do conhecimento produzido no interior da célula. Por este facto se considera (Watkins, 2005, p.54) que as aprendizagens realizadas são o resultado da interação social desenvolvida pelos indivíduos no interior da célula – grupo. A heterogeneidade intra grupo é tomada como uma mais-valia no desenvolvimento de processos de aprendizagem ricos na sua essência, pois estes são desenvolvidos por alunos com níveis sócio culturais e cognitivos distintos, onde a chave para a conjugação dos diversos contributos até à obtenção de um produto final reside no processo de socialização. O professor atua junto dos grupos como um facilitador das aprendizagens (Rogoff, 2000), colocando questões que propiciem o desenvolvimento de raciocínios produtivos e atuando também no sentido de levar os alunos a compreenderem o erro.

Sob estes pressupostos, este é um ambiente de aprendizagem que favorece a integração social e que configura um forte contributo no combate à exclusão social. Em países como a Suécia ou a Austrália este cenário é amplamente utilizado tendo em conta a existência, no primeiro caso, de um elevado número de imigrantes e, no segundo, pelo facto de se colocar, em particular, a questão da integração do povo aborígene na sociedade australiana. A tecnologia afigura-se como um elemento potenciador deste tipo de interação social, como um fator de referência no emergir da motivação e como de grande importância no quadro de uma sociedade do século XXI onde a tecnologia ocupa um espaço central no quotidiano dos alunos.

Numa *comunidade de aprendizagem* existe a dimensão do trabalho no seio do grupo e, após este, o momento da discussão coletiva onde é possível comparar as resoluções das tarefas realizadas, discutir os processos de resolução e as soluções obtidas em conjunto com os vários grupos integrantes da *comunidade de aprendizagem*. Neste momento, os alunos têm a oportunidade de comparar as estratégias desenvolvidas pelos vários grupos e assim tornar o processo de aprendizagem ainda mais rico. Nesta fase do processo, o professor intervém no sentido de moderar a discussão final e promover a presença das estratégias diversas que foram utilizadas, bem como criar um espaço para as estratégias contendo falácias de raciocínio, no sentido de evidenciar, perante a turma, erros importantes de modo a que os alunos os evitem em momentos futuros.

CARACTERIZAÇÃO DO CONTEXTO EDUCATIVO

3.1. A ESCOLA

3.1.1. Espaço Físico

À entrada da escola, podemos observar do lado direito um espaço verde com vários eucaliptos que proporcionam um aroma característico a quem acede ao espaço. O edifício principal é constituído por três pisos: o rés-do-chão, o 1º e o 2º andares, todos eles acessíveis aos alunos, havendo salas de aula em qualquer um destes pisos. O último piso, no entanto, é fundamentalmente utilizado para aulas de Ciências e Informática Os corredores têm a forma quadrangular, acompanhando cada um dos pisos. As paredes estão revestidas num tom azul-escuro, contrastando com portas claras, conferindo assim uma certa elegância ao ambiente. Existem amplas janelas de um dos lados do corredor, enquanto do lado oposto se encontram as salas de aula. A vista de qualquer uma destas janelas reflete-se num pátio interior com algumas flores e plantas e uma pequena esplanada.

No rés-do-chão do edifício principal, onde outrora se encontrava o ginásio, fica sediada a biblioteca. Ampla e luminosa, dispõe de vários equipamentos informáticos e de uma ampla coleção de obras literárias e científicas. Um local privilegiado para o estudo e para a realização de trabalhos de grupo e pesquisas várias. Neste mesmo piso, os alunos têm disponível o bar, local destinado ao consumo de bebidas e refeições ligeiras. Um espaço de convívio, por excelência. O ginásio, recentemente construído e bem equipado, fica num edifício contíguo ao edifício principal. A sua envolvente é também constituída por espaços verdes.

Em frente à entrada da Escola Severim de Faria existem várias hortas. Através de um percurso pedestre de 15 minutos é possível chegar ao Continente, a 5 minutos encontram-se as bombas da Galp e, à mesma distância, a piscina da associação AMINATA. Nas traseiras da escola fica situada uma zona residencial - a Vila Lusitano”- um Centro Veterinário, a Associação de Jovens Empresários (ANJE) e um snack-bar. A 10 minutos encontra-se o Ginásio do Lusitano, assim como o prolongamento da área residencial. A 20 minutos fica situada a Praça do Giraldo.

3.1.2. Caracterização Sócio Cultural

O agrupamento de Escolas nº3 de Évora, com sede na Escola EB2,3 de Santa Clara, do qual faz parte a Escola Secundária de Severim de Faria, foi criado no ano letivo de 2000-2001, com mais duas Escolas Básicas do 1º Ciclo do Ensino Básico (EB1), segundo um critério de afinidade. Em 2004-2005, alargou o seu âmbito a outros estabelecimentos de educação e de ensino, alguns com características rurais, adquirindo a atual composição. No presente ano letivo, além das 47 crianças da Educação Pré-Escolar, há 1071 alunos, no Ensino Básico, distribuídos por 73 turmas: 497 no 1º Ciclo, 531 nos 2º e 3º Ciclos, 15 no Curso de Educação e Formação, Tipo 2, de Operador de Informática, 14 no Programa Integrado de Educação e Formação (PIEF), a que acrescem outros 14, numa turma de Percursos Curriculares Alternativos. Cerca de 43,3% beneficiam da Ação Social Escolar, a maioria do Escalão A. Dos 55 alunos estrangeiros, 34 são brasileiros. Dispõem de computador pessoal 56% (68% com acesso à internet).

A educação e o ensino são assegurados por 124 docentes, dos quais 108 fazem parte dos Quadros de Agrupamento de Zona Pedagógica e 34 destes são professores titulares. Aproximadamente 51% têm 20 ou mais anos de experiência profissional e 69% idade superior a 40 anos. As funções técnicas e operacionais estão a cargo de 51 trabalhadores.

No que respeita às habilitações literárias dos encarregados de educação, 51% têm o Ensino Básico (29% o 1º Ciclo, 40% o 2º e 31% o 3º Ciclo), 15% o Ensino Secundário e 13% o Ensino Superior (79% uma licenciatura). Quanto às suas atividades profissionais, surgem como mais representativas as seguintes categorias: Pessoal dos Serviços Diretos e Particulares, de Proteção e Segurança (10%); Empregados de Escritório (6%); Operários e Artífices e Trabalhadores Similares das Indústrias Extrativas e de Construção Civil (6%); Trabalhadores não Qualificados dos Serviços de Comércio (5%); e Docentes do Ensino Secundário, Superior e Profissões Similares (4%).

3.2. TURMA 9ºB

A turma do 9º ano, com 28 alunos, apresentava um carácter heterogéneo, manifestando-se esta característica numa divisão em dois grupos distintos em termos de níveis de desempenho. Um grupo caracterizado por alunos mais aplicados e participativos na aula, e um outro grupo, que também procurava acompanhar as aulas mas que por vezes apresentava focos de distúrbio que comprometiam vários elementos, dificultando o trabalho em sala de aula. Na junção dos dois grupos, há que salientar as boas relações existentes entre os elementos de ambos, havendo lugar a um clima de harmonia na turma, não se identificando, no geral, situações de elementos postos de parte, à exceção de um. Apenas um aluno se encontrava numa situação crítica em termos sociais, mas tal tendência teve lugar apenas no início do ano letivo. Conseguiu, em pouco tempo, integrar-se num grupo, um dos grupos mais ruidosos e desafiantes. No entanto, o que é facto é que persistia a preocupação na manutenção do respeito por parte dos elementos mais críticos. Houve ainda alguma expressão no sentido de os alunos mais atentos chamarem a atenção, com uma certa exaltação de ânimos, daqueles que geravam mais turbulência, havendo nestes casos resoluções pacíficas e harmoniosas, voltando a turma a prestar atenção à aula.

De salientar o bom ambiente na turma, onde se sentia que todos faziam parte.

3.3. TURMA 10ºCT2

A turma do 10º ano, composta por 29 elementos, era constituída maioritariamente por alunos de nível elevado, com desempenhos elevados em termos das tarefas propostas em sala de aula. Esta característica provinha, em larga medida, do trabalho realizado fora das aulas, que era nitidamente testemunhado através das suas boas / excelentes *performances*. Os alunos evidenciavam a realização de uma quantidade expressiva de exercícios extra aula, o que se afigurava como um desafio para um professor. Tendo um amplo conhecimento de cada tópico da matéria, eram alunos que tinham a necessidade de realizar tarefas desafiantes e que apresentassem um fator surpresa. Quando lhes eram propostas tarefas similares àquelas que já tinham realizado, a turma tendia a realizá-las com uma rapidez notável e a passar à próxima tarefa que o professor lhes designasse ou que eles próprios selecionassem do manual. Poderia falar-se em “sede de conhecimento”.

Esta forma de estar teve repercussões ao nível da participação que desenvolveram no momento de discussão das tarefas propostas, havendo uma certa dificuldade em interromper a sequência de tarefas que se tinham proposto realizar.

Este comportamento representava adicionalmente um fator de perturbação, aquando da existência de alunos com mais dificuldades, ainda que, nesta turma, estes fossem em número pouco expressivo, subsistindo uma dicotomia, com a qual o professor tinha que lidar: por um lado, a importância de despertar a motivação dos alunos de excelência e, por outro, a necessidade de apoiar os alunos com mais dificuldades ou que apresentassem um desempenho caracterizado por um ritmo mais reduzido.

Há que salientar, no entanto, a preocupação que tinham em respeitar o professor e em estar atentos, apesar dos seus trabalhos. Sentia-se a sua educação, que, em particular, se revelava na forma como se dirigiam ao professor quando necessitavam de realizar uma intervenção.

OBSERVAÇÃO DE AULAS

4.1. AULAS LECIONADAS À TURMA 9ºB RELATIVAS AO TEMA "PROPORCIONALIDADE DIRETA"

4.1.1. Aulas de 2, 3 e 9 de Novembro de 2015 – 45 + 90 + 90 minutos

4.1.1.1. Introdução do Tema

As aulas do 9º ano tiveram início com a visualização de um filme alusivo ao *número de ouro*, procedido pela introdução de uma tarefa experimental. O filme foi selecionado tendo em conta o tema a introduzir: a Proporcionalidade Direta, no intuito de realizar a sua revisão. O objetivo primordial prendia-se com a ligação entre este tema matemático e a realidade, tendo em conta as inúmeras aplicações, nomeadamente através do número de ouro.

O aspeto motivacional da aula foi conseguido através da exibição do filme. Como complemento, ficou para casa a realização de um trabalho de duas páginas, onde poderiam ser inseridas imagens adequadas ao conteúdo, desde que equilibradas com o texto, em termos de peso representativo. Pretendia-se que os alunos escolhessem um dos elementos da natureza onde estivesse presente o número de ouro e que ilustrassem a sua compreensão através de um texto com recurso às próprias palavras e algumas imagens.

Os alunos dispuseram de duas semanas para o realizarem. Uma minoria da turma não entregou o trabalho dentro do prazo estipulado, pelo que não foram consideradas as suas produções. Quanto à correção dos trabalhos, foram definidos parâmetros de acordo com aquilo que considerava ser mais relevante, a saber: apresentação, coerência do texto, nível de explicitação, compreensão do tema e profundidade da abordagem. As cotações relativas aos vários elementos considerados, foram colocadas numa tabela em *Excel*, de modo a apurar-se o resultado final RF, através do cálculo da média aritmética entre os valores encontrados para as diferentes variáveis. Os resultados foram bastante interessantes, tendo em conta que os alunos que não se aplicavam tanto, numa análise global da dinâmica de turma, obtiveram um resultado superior àquele que, em média, atingiam nos testes de avaliação. Tal dado leva-nos a refletir sobre a importância da heterogeneidade dos métodos de avaliação e a considerar que, assim sendo, o processo poderá tornar-se mais justo, tendo em conta a diversidade de perfis presentes na turma.

4.1.1.2. A Tarefa

A tarefa exploratória consistiu na construção de uma sequência de retângulos de ouro, constituindo a base para o esboço da espiral dourada (anexo A). O objetivo central desta proposta de trabalho era o reconhecimento da existência de uma constante de proporcionalidade, resultante da razão entre as medidas das grandezas *comprimento c* e *largura l* de cada um dos retângulos presentes na construção. Ou seja, procurava-se que os alunos compreendessem que as referidas grandezas eram diretamente proporcionais.

Paralelamente a esta ideia houve a intenção de interpretar o erro associado ao processo, compreendê-lo e justificá-lo no intuito de dar sentido ao erro. Inserindo-o no seu devido lugar, através do cálculo do erro máximo cometido, os alunos puderam constatar que este era pouco significativo e consequentemente ganhar consciência da existência de uma relação entre as variáveis.

Subsistiu a preocupação pela ausência da sobre proteção face à ocorrência de desvios relativos à aproximação, com três casas decimais, do *número de ouro: 1,618*. O mesmo é afirmar que foi importante que os alunos sentissem que os resultados dos processos experimentais não são perfeitos, como ocorre na teoria. Foi tomada, como ponto de partida da análise, uma tabela com dados obtidos por um grupo de alunos, que constituíram os valores de referência.

4.1.1.3. Recurso: GeoGebra

O GeoGebra foi utilizado como instrumento de elaboração de um gráfico de pontos isolados, representativos do quociente c / l calculado para cada um dos retângulos de ouro, e também para o respetivo esboço da reta de regressão que lhe estava associada (anexo B). O programa forneceu-nos ainda a sua expressão algébrica, através da forma $ax + by = 0$, sendo a=-8.8 e b=5.34. A partir desta, surgiu a necessidade da sua transformação na expressão final:

$$y = -\frac{a}{b}x$$

com vista a que pudessem visualizar a relação entre as variáveis na forma usual quando se consideram grandezas diretamente proporcionais. A expressão da igualdade nesta forma cumpria o objetivo de evidenciar a dependência de y relativamente a x. Deste modo, foi transposta a relação de proporcionalidade direta para a função de proporcionalidade direta. Foi, ao mesmo tempo, cumprida a finalidade de demonstrar aos alunos que a constante $\frac{a}{b}$ representava um valor próximo, a menos de uma décima, da constante de proporcionalidade por eles estimada no final do processo de construção.

O suporte GeoGebra foi muito importante tendo em conta que possibilitou a confirmação, gerada por um dado adicional, de que existia uma relação de proporcionalidade direta entre as grandezas consideradas, visto que a reta de regressão ajustada representava o gráfico de uma determinada função de proporcionalidade direta.

Com as várias constantes a que os sete grupos chegaram e com a constante obtida a partir do GeoGebra, todas elas com valores muito próximos entre si, constituiu-se um universo de "prova" experimental que os levou a validar a existência de proporcionalidade direta. Naturalmente que esta validação se considerou válida tendo em linha de conta o nível de ensino. Ou seja, não podemos falar em *demonstração* relativa ao facto de as grandezas serem diretamente proporcionais, mas sim em constatação desta relação num contexto experiencial. Com o decurso dos níveis de escolaridade, a necessidade de prova vai ganhando importância, sendo um dos elementos integrantes do processo de aprendizagem matemática, devendo ser adquirido gradualmente. Neste momento, em consonância com o tipo de exigência preconizado quer pelo programa quer pelo manual, apenas se optou pela *constatação* através de uma experiência significativa.

4.1.1.4. Trabalho dos Alunos

A constituição de uma comunidade de aprendizagem na sala de aula surtiu um dos efeitos esperados: o envolvimento ativo na tarefa de todos os alunos, numa fase inicial; com um contributo especial dos alunos mais desinteressados à partida. Foi particularmente interessante ver como todos compreenderam o que lhes era pedido na construção. Dentro de cada grupo, ocorreu a divisão de tarefas, nem sempre bem conseguida, oferecendo o meu apoio aos grupos que demonstraram menor capacidade de organização. Este suporte foi particularmente importante decorrido algum tempo, quando teve lugar a desmotivação, justificada pelo facto de os quocientes c / l se terem desviado do número procurado: 1,618 – a aproximação com três casas decimais do número de ouro, o que implicava a revisão da construção. Assistiu-se à desistência de alguns elementos dentro de alguns dos grupos. Tendo em linha de conta que, em particular, nestes casos, a intervenção do professor é fundamental, assim fiz, procedendo à reorganização dos papéis dentro dos grupos em questão. Persistia a relutância dos grupos em construir explicitamente a tabela associada aos dados que iam obtendo, pelo que foi designado um elemento, em cada grupo, para efetuar o referido registo.

4.1.1.5. Discussão da Tarefa

A discussão da tarefa teve início na segunda aula lecionada, sendo esta de 45 minutos. No entanto, a decisão do início da discussão da tarefa revelou-se precipitada. Isto porque a morosidade associada ao rigor necessário à construção, levou a que a maioria dos alunos não se distanciasse facilmente do seu trabalho, permanecendo em sucessivas tentativas de conclusão do mesmo. Esta questão foi determinante para que o início do momento estipulado à partida se tenha revelado infrutífero. Houve uma séria dificuldade, por parte dos grupos, em aceitar que deveria ter início o momento da análise, partindo de um conjunto de dados obtidos por um grupo em particular. A relutância evidenciada justificava-se por haver pequenas discrepâncias entre os vários conjuntos de dados.

Reconheço a importância da assertividade neste ponto crítico. Sinto que a dificuldade no estabelecimento do início da discussão partiu, em última análise, do adiar do momento da decisão: a conclusão do trabalho de grupo, passando pela dissolução física da *comunidade de aprendizagem* implementada e a definição de que a análise teria por base uma única tabela de um grupo que a tivesse concluído, sendo esta considerada a tabela de referência.

Desta forma, o momento em questão acabou por ser conseguido efetivamente na terceira sessão. Foi realizado através da análise das respostas dos alunos às questões da ficha de trabalho, previamente distribuída. A forma adotada foi a leitura das perguntas, seguida do acolhimento das sugestões dos alunos e a consequente ida ao quadro para registarem as suas propostas de resolução. Intencionalmente foi incentivada a explicitação dos seus raciocínios perante a turma, cumprindo assim várias finalidades: a consolidação do raciocínio produzido, a explicitação do raciocínio através de uma linguagem comum à turma e ainda o favorecimento da desinibição, o desenvolvimento da autoestima e o acréscimo da sua coragem.

4.1.1.6. Dificuldades Sentidas

Como já foi referido, o GeoGebra forneceu uma expressão algébrica do tipo $ax + by = 0$, como forma de descrever a relação linear entre as grandezas c e l. A transformação desta expressão em:

$$y = -\frac{a}{b}\,x \qquad (1)$$

conduziu à recordatória sobre as equações literais e a sua resolução relativamente a uma das variáveis. A escrita na forma (1) não foi facilmente conseguida. A turma evidenciou uma lacuna ao nível das equações do 1º grau, pelo que optei por recomendar aos alunos que selecionassem cinco equações deste tipo para resolverem como trabalho de casa, de modo a que compreendessem quais eram exatamente as suas dificuldades. O *handicap* mais evidente foi na passagem $by = -ax$ para $y = -\frac{a}{b}\,x$ e na respetiva justificação, sendo evidente que o aluno que estava no quadro não conseguia fazer a passagem e a turma também não demonstrou a existência deste conhecimento em particular.

4.1.1.7. Conexões

Considerei importante referir que, sendo as grandezas c e l diretamente proporcionais, então os retângulos construídos seriam semelhantes, evidenciando assim o paralelismo existente entre as grandezas-base de uma figura e o seu aspeto/forma.

4.2. AULAS LECIONADAS À TURMA 10ºCT2 RELATIVAS AO TEMA “REFERENCIAIS NO ESPAÇO”

4.2.1. Aula de 2 de Novembro de 2015 – 90 minutos

4.2.1.1. Introdução do Tema

O tema da representação de pontos espaciais num referencial cartesiano foi introduzido através de uma recordatória relativa à representação de pontos de um plano no referencial cartesiano bidimensional.

Foi estabelecida a existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pontos de um plano e o conjunto de pontos passíveis de serem representados no referencial em questão. A introdução do tema teve ainda o enfoque na necessidade de uma representação tridimensional, sendo apresentados dois problemas: a questão da navegação dos aviões e a representação da posição de um aluno na sala de aula – os seus pés e a sua cabeça associados a diferentes representações.

Continuando o prosseguimento da estratégia de abordagem progressiva do tema em questão, foi analisada a planificação de uma caixa e a respetiva montagem, efetuando-se assim a passagem do plano ao espaço. Um ponto importante foi a determinação das coordenadas dos pontos antes e depois, de modo a sensibilizar os alunos para este processo. A realização do exercício prendia-se à ideia da determinação das coordenadas de uma forma intuitiva.

4.2.1.2. Formalização

Após este prelúdio introdutório, surgiu o momento de apresentar a definição de referencial cartesiano tridimensional, os respetivos eixos e planos coordenados. Foi tomada a opção de definir formalmente os planos coordenados, sendo três dos alunos da turma a realizarem este exercício no quadro. A decisão de colocar os alunos a escreverem formalmente prendeu-se à intenção de desmistificar a linguagem algébrica e a uma tentativa de a introduzir no quotidiano das aulas de Matemática, a par dos exercícios práticos.

4.2.1.3. Trabalho Prático

O exercício fundamental da aula referiu-se à representação de nove pontos espaciais no referencial cartesiano tridimensional, ficando estabelecida, através deste, a forma de representar um ponto espacial. A quantidade relativamente elevada de pontos a representar, teve que ver com a questão da prática e da compreensão efetiva do processo de representação. A regra do paralelogramo foi considerada como determinante na resolução. A gestão da aula passou pelo apoio dos alunos nas suas dificuldades, paralelamente à resolução no quadro dos exercícios, por parte dos alunos, escolhidos aleatoriamente.

Como trabalho de casa, ficaram exercícios associados à determinação das coordenadas de pontos-vértice de construções dadas e ainda uma tarefa relativa à representação de pontos-vértice, situados nas extremidades de uma pirâmide quadrangular. A sua representação correta originava a visualização de uma pirâmide desta natureza, pelo que foi importante, com vista a consolidar este ponto.

Do exposto, se conclui que, na primeira aula, o objetivo central foi assegurar que os alunos efetivamente compreendiam a associação entre a localização de um ponto no referencial cartesiano e as suas componentes.

4.2.2. Aula de 4 de Novembro de 2015 – 90 minutos

4.2.2.1. Abordagem Intuitiva

Na segunda aula, após a correção do trabalho de casa, foi introduzido o conceito de octante. A abordagem do conteúdo foi realizada numa perspetiva de, em qualquer momento, ser possível a compreensão do octante a que pertencia um determinado ponto. Ou seja, a ideia tinha por referência os quadrantes: os primeiros quatro octantes foram associados aos quadrantes, com o acréscimo da cota positiva. Foi feita referência ao sentido positivo na ordenação dos octantes. Os restantes octantes foram também associados aos quadrantes, introduzida a alteração da cota negativa. Foi projetada uma imagem relativa a este tópico, no intuito de assegurar a melhor compreensão dos alunos, sendo reforçada a questão dos sinais.

4.2.2.2. Visualização Tridimensional

A escolha do exercício de aplicação deste conteúdo teve como fundamento a dificuldade inerente ao processo de visualização. A opção tomada para tornar este processo mais eficaz foi efetuar uma construção do objeto dado, um paralelepípedo colocado num referencial ortonormado, no GeoGebra, rotacionando a figura por ângulo de aproximadamente 30 graus, no sentido positivo, em torno do *eixo de rotação* Oz (anexo C). Este posicionamento oferecia uma nova oportunidade para se apropriarem do objeto e de compreenderem como os eixos o intersetavam. A questão da ortogonalidade dos eixos foi explanada, com o recurso a materiais manipuláveis para auxiliar o processo de visualização. A questão da visualização era absolutamente fulcral em todo o processo, tendo em linha de conta que era requerida a seleção de todos os pontos da figura pertencentes aos planos coordenados e ainda a compreensão do octante em que se encontravam.

4.2.2.3. Conexões

Para a última parte da aula, a tarefa escolhida dizia respeito à determinação das coordenadas dos vértices de um cubo, partindo de três origens distintas de um referencial ortonormado, situadas em pontos do cubo. Esta tarefa solicitava ainda a aplicação do Teorema de Pitágoras.

4.2.3. Aula de 9 de Novembro de 2015 – 90 minutos

O enfoque da terceira aula foi a introdução dos planos paralelos aos planos coordenados. Para o efeito, a abordagem do conteúdo passou pela projeção inicial de três imagens, cada uma delas alusiva a um exemplo de um plano paralelo a um dos planos coordenados, inserido num referencial ortonormado. Depois, à semelhança da opção que já tinha sido tomada para os planos coordenados, três alunos foram convidados a irem ao quadro procederem à algebrização dos planos visíveis. Desta forma, puderam exercitar novamente a utilização da linguagem matemática formal. Não evidenciaram dificuldades de maior.

4.2.3.1. Recurso: *GeoGebra*

Como instrumento de aplicação do conteúdo em referência, foi proposto um exercício que tinha por base uma pirâmide quadrangular. A estratégia de resolução subjacente era a de seccionar a mesma por planos paralelos aos planos coordenados, culminando na compreensão do processo de cálculo da área das secções produzidas, bem como a determinação da relação existente entre os lados de cada uma destas secções. O exercício aludia ao caso particular da semelhança de quadrados, com extrapolação para a semelhança de pirâmides quadrangulares. A estratégia de abordagem deste exercício passou pela construção, no GeoGebra, de uma pirâmide análoga e também de três planos seccionantes, paralelos ao plano x0y (anexo D). Deste modo, foi assegurada a visualização de maneira mais eficaz, sendo possível direcionar a abordagem para uma imagem, em substituição do recurso isolado à imaginação. O GeoGebra permite que o ensino se possa basear em algo concreto, visível, por oposição a metodologias assentes num discurso mais vago, recorrendo à terminologia "imaginemos, pensemos,…". As equações dos planos seccionantes: z=3, z=6 e z=9 foram úteis no sentido de estabelecer referências estruturantes na reflexão sobre as questões propostas. Finalmente, a "regra de três simples" ou, de forma equivalente, a lei fundamental da proporcionalidade direta, constituiu um método suficiente para relacionar a altura de duas pirâmides visíveis na imagem produzida pelo GeoGebra, assim como o lado das respetivas bases e, deste modo, encontrar um dos lados em falta.

4.2.3.2. Recordatória

Na parte final da aula, foram abordadas as simetrias de pontos relativamente aos eixos coordenados. A opção tomada passou por relembrar em sala de aula o significado de pontos simétricos relativamente a uma determinada reta, designada por *eixo de simetria*. A recordatória delineou ainda os elementos relativos à respetiva imagem gráfica, bem como a representação algébrica no plano. A sua expressão efetiva foi realizada através da ida ao quadro de dois alunos, que apresentaram aos seus colegas, através de um esboço, a ideia de pontos simétricos relativamente a cada um dos eixos coordenados. Foi reforçada a importância da ortogonalidade da projeção, relativamente ao eixo considerado e também a necessidade de manutenção das mesmas distâncias do ponto-objeto e do ponto-imagem ao *eixo de simetria*. Foi ainda enfatizada a representação algébrica e a noção de que a coordenada do eixo não muda. Após esta reflexão para o plano, a transposição para o espaço foi automática. Uma das preocupações centrais que me assistiram foi munir os alunos das ferramentas necessárias para, em caso de esquecimento, poderem retomar as noções básicas e, por si próprios, atingir a ideia global de simetria. Tal intuito tinha subjacente a noção da compreensão efetiva do conceito, permitindo que pudessem tatear de forma autónoma. Em suma, o processo idealizado estava associado ao desenvolvimento da autonomia dos alunos, fornecendo-lhes bases sólidas que pudessem funcionar como pilares de apoio, essencialmente estruturantes do conhecimento matemático. Foi muito importante marcar a essência de um ensino construtivista, onde, em particular neste caso, para obter o significado de simetria de pontos em dimensão 3, considerei importante retroceder primeiro à dimensão 1 e depois à segunda dimensão. A ideia de suporte passa por promover na base a assimilação relativa ao conceito de simetria para que, usando um caminho lógico, este se possa transpor para dimensões superiores.

4.2.3.3. Generalização

Na passagem ao espaço, foram projetadas imagens construídas no *Geogebra*, relativas a pares de pontos simétricos, colocados num referencial cartesiano tridimensional, associados a cada um dos eixos coordenados (anexo E). O posicionamento da construção foi cuidadosamente pensado, de modo a permitir uma melhor visualização e a consequente interiorização do significado de pontos simétricos relativamente a um determinado eixo. Às imagens apresentadas, foram ainda associadas as respetivas representações algébricas dos pontos simétricos e, novamente, os alunos concluíram que a coordenada do eixo se mantinha inalterada.

4.2.3.4. Dificuldades Sentidas

Esta é uma turma com uma certa heterogeneidade, o que dificulta a ação do professor, pois verifica-se um fenómeno bastante interessante que consiste na solicitação para que sejam definidos n *exercícios de desenvolvimento*. Como a própria designação indica, são exercícios à frente daquele que o professor está a trabalhar no momento, em sala de aula. Portanto, para além de o professor estar preocupado em assegurar a compreensão do exercício atual e com o apoio nos lugares deste mesmo exercício, ainda se coloca a questão de uma série de dúvidas relativas a outros exercícios, às quais o professor deve oferecer uma resposta. A opção que tomei, após compreender que se tornava complicado não dar atenção absoluta à tarefa atual, assim como à resolução no quadro da mesma, por um aluno, foi explicar que iríamos desenvolver os exercícios seguintes num momento posterior, ainda que dentro da mesma aula, pelo que seria melhor concentrarmo-nos no presente. No entanto, sinto que tem que ser assegurada uma gestão mais eficaz, estando esta ainda em processo de construção.

4.3. AULAS LECIONADAS À TURMA 9ºB RELATIVAS AO TEMA "LUGARES GEOMÉTRICOS"

4.3.1. Aula de 19 de Fevereiro de 2015 – Aula de 90 minutos realizada na sala de informática TIC2

Esta aula foi idealizada de modo realizar a transmissão dos conteúdos "mediatriz, bissetriz, circunferência circunscrita a um triângulo – circuncentro e circunferência inscrita num triângulo – incentro".

4.3.1.1. Implementação do Modelo de Aula: Comunidade de Aprendizagem

A distribuição dos computadores correspondeu a dois ou três alunos por cada um deles. Foi distribuída uma ficha de trabalho por cada aluno, constituída por quatro páginas (anexo F). A ficha de trabalho, para além de conter um conjunto de questões, a realizar com recurso ao programa de Geometria Dinâmica GeoGebra, também foi pensada de modo a constituir um suporte teórico, de consulta rápida, sempre que os alunos considerassem importante a recordatória dos conceitos abordados. Nas questões propostas, é dada a indicação dos ícones a que os alunos deveriam recorrer, ao utilizarem o referido programa, com o intuito de tornar a manipulação do *software* tão autónoma quanto possível.

A aula foi constituída em ambiente de *comunidade de aprendizagem*, tendo sido implementada na sala de informática TIC2. Os objetivos centrais da aula prendiam-se com o desenvolvimento da compreensão e da capacidade de construção associadas aos lugares geométricos: circuncentro, bissetriz e incentro, recorrendo ao GeoGebra 2D, a par da implementação do *know how* associado ao programa.

4.3.1.2. Introdução da Aula

De modo a possibilitar a construção do primeiro dos lugares geométricos referidos, foi fundamental a revisão relativa ao conceito de mediatriz em associação com a respetiva formalização matemática. Com efeito, ficou estabelecida a seguinte definição:

<u>Mediatriz</u> de um segmento de reta [AB] é o conjunto de pontos do plano equidistantes de A e de B, ou seja, o conjunto de pontos P tais que:

$$\overline{PA} = \overline{PB}.$$

Foi ainda feita a representação do referido conjunto de pontos no quadro, reforçando a ideia da igualdade anterior:

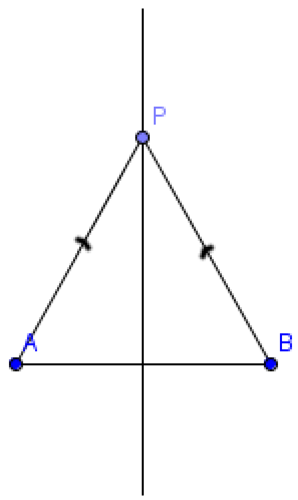


Figura 7: *Mediatriz do segmento de reta [AB]. O ponto P pertence a esta reta*

Foi também feita referência à propriedade caracterizante da mediatriz, que refere que esta é a única reta que passa no ponto médio do segmento de reta [AB], com a característica de ser perpendicular relativamente a [AB].

4.3.1.3. Desenvolvimento da Aula

A definição apresentada e a propriedade enunciada serviram de base ao momento seguinte da aula: a determinação do *circuncentro* de um triângulo arbitrário.

4.3.1.3.1. Determinação do Circuncentro e Esboço da Circunferência Circunscrita ao Triângulo

Para o efeito, os alunos começaram por criar no programa um triângulo à sua escolha, de vértices A, B e C. Em seguida, com recurso ao ícone "ponto médio", marcaram os respetivos pontos médios de cada um dos lados do triângulo. Por estes pontos fizeram passar retas perpendiculares, com a garantia da sua unicidade (propriedade da mediatriz), para cada um dos pontos médios, sendo possível afirmar que cada uma destas retas era, de facto, a mediatriz do lado que lhe correspondia. O ícone "reta perpendicular" (a uma reta dada, passando por um determinado ponto) foi a opção considerada adequada para o efeito pretendido.

A questão fulcral dizia respeito ao ponto de intersecção entre as três retas, digamos D, pois seria este ponto que deveria ser definido como o "*circuncentro do triângulo*". Porém, previamente ao estabelecimento da definição, estava implícita na condução da aula a necessidade de associar o ponto de intersecção encontrado à circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, ao lugar geométrico dos pontos equidistantes do centro D, ao qual pertenciam os vértices do triângulo. Para obter esta circunferência, bastou clicar em "circunferência (centro, ponto)", com centro em D, passante num dos vértices do triângulo à escolha. Os alunos puderam constatar que a circunferência assim definida continha, de facto, todos os vértices do triângulo e, deste modo, poderia ser designada por circunferência circunscrita ao triângulo, contendo o mesmo. O espaço "completa" da ficha de trabalho permitiu a síntese das conclusões obtidas, constituindo uma oportunidade para os alunos escreverem o resultado das suas próprias conclusões.

Após a construção da circunferência circunscrita a triângulo arbitrário, o caminho passava por esboçar a circunferência inscrita ao triângulo definido, estando implícita no processo a construção da bissetriz. Neste sentido, foi importante realizar um momento de síntese, aquando da qual os alunos deveriam estar voltados para o quadro, prontos a participar ativamente na aula, colocando ou respondendo às minhas questões, pondo em prática a escuta ativa. Para além do trabalho em vista, com recurso ao computador, era fundamental que os alunos compreendessem os processos subjacentes às construções e que os assimilassem. Nesta ótica, optei por ilustrar a construção da bissetriz no quadro.

4.3.1.3.2. Construção da Bissetriz Utilizando Material de Desenho

No que se refere a este ponto, utilizei compasso de quadro para mostrar aos alunos como poderiam construir a bissetriz nos seus cadernos. Assim, comecei por esboçar no quadro duas semirretas com um ponto de origem comum: o ponto B.

Em seguida, coloquei o compasso em B e, escolhendo um raio arbitrário, esbocei o arco $\widehat{AC}$. O passo seguinte passou por colocar o compasso em A, considerando o mesmo raio e esboçar um arco de circunferência; procedendo de modo análogo, considerando o centro C, de forma que os arcos se intersetassem, obtendo a representação seguinte:

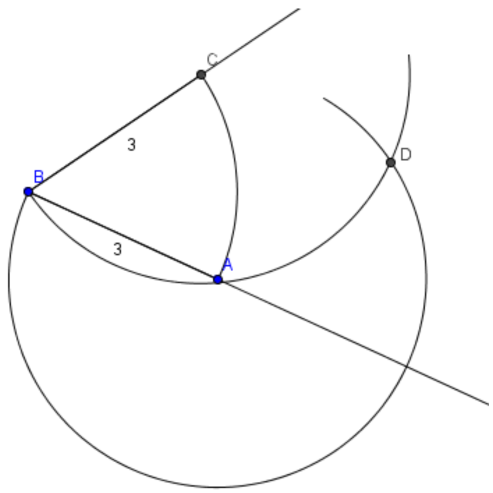


Figura 8: *Para o esboço desta figura ilustrativa, o raio escolhido foi igual a 3 unidades. O ponto D é um dos pontos de intersecção entre as circunferências de raio igual a 3 - centrada em A e centrada em C, respetivamente*

Finalmente, unindo D com B, os alunos puderam visualizar a bissetriz do ângulo $< ABC$.

Propriedade 1

Relativamente à bissetriz de um ângulo $< ABC$, em primeiro lugar, foi feita referência à seguinte propriedade:

A **bissetriz** é o lugar geométrico dos pontos que se caracterizam por estar localizados a igual distância dos lados do ângulo a que se refere.

Esta propriedade surge ilustrada na ficha de trabalho e foi também ilustrada no quadro, imediatamente após a exposição relativa à forma de construção da bissetriz com material de desenho. Com efeito, temos o registo de um caderno com estas indicações:

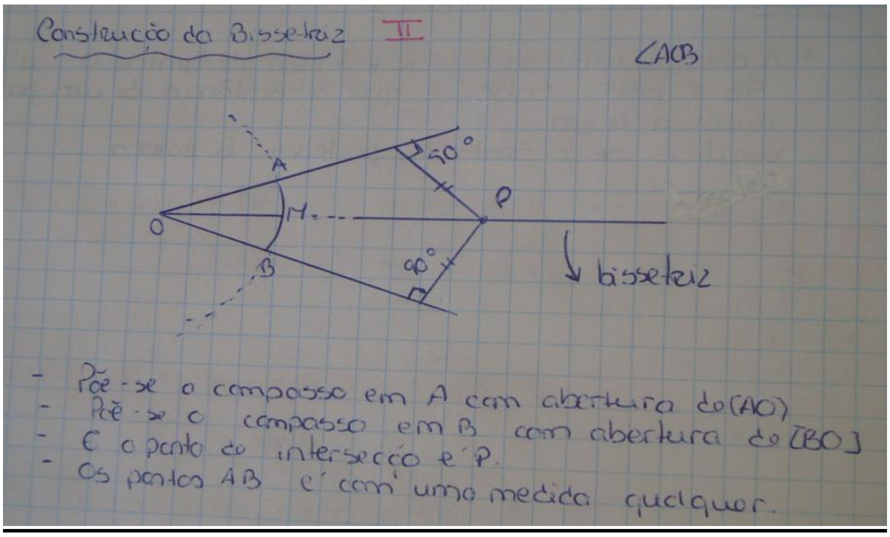


Figura 9: *Construção da bissetriz; referência à Propriedade 1- a distância de qualquer ponto da bissetriz a ambos os lados do ângulo é igual*

4.3.1.3.3. A Bissetriz no GeoGebra

De acordo com a indicação da ficha, o esboço da bissetriz deveria ser obtido por inserção da palavra “bissetriz” na linha de entrada do Geogebra, tendo ainda que ser dada a indicação, utilizando três letras, do ângulo a que se referia este lugar geométrico. Portanto, foi necessário, em primeiro lugar, criar um ângulo, digamos $< ABC$, enfatizando a particularidade de o GeoGebra identificar os ângulos no sentido positivo:

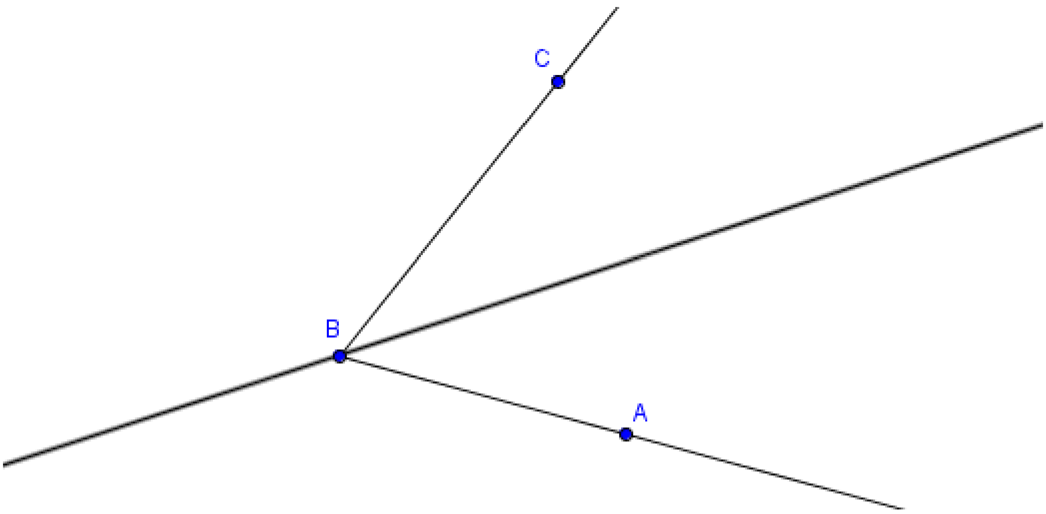


Figura 10: *Esboço no GeoGebra da bissetriz do ângulo* $< ABC$

Propriedade 2

Após o surgimento da bissetriz do ângulo definido, considerei importante que os alunos pudessem experienciar uma das propriedades da bissetriz, recorrendo às potencialidades do GeoGebra. Dei-lhes a indicação relativa ao seguinte procedimento: deveriam colocar um ponto móvel, digamos P, sobre a bissetriz e, em seguida, medir as distâncias entre o ponto P e os pontos A e C, respetivamente, como podemos observar na figura:

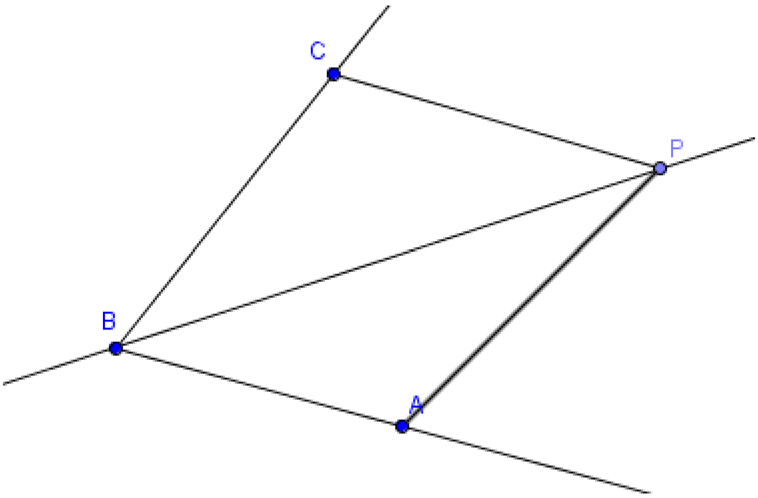


Figura 11: *Análise da distância de um ponto P pertencente à bissetriz a cada um dos pontos A e C, pertencentes aos lados do ângulo*
$< ABC$

Movendo o ponto P, os alunos deveriam retirar uma conclusão relativa à relação existente entre estas distâncias.

Surgiu uma questão interessante, por obtenção, por alguns alunos, de distâncias distintas. Foi necessário clarificar a razão justificativa de tal facto. Esta prendia-se com o facto de os pontos A e C aparentarem pertencer ao mesmo arco de circunferência, o que, na verdade, não ocorria. Foi necessário redefinir um arco de circunferência com vértice no ponto B e com origem em A, como veremos em seguida. Esta questão destaca uma das inúmeras vantagens da utilização do GeoGebra, tendo em conta que nos alerta para a existência de um ou vários erros, sendo, em particular, a partir destes que se produz o conhecimento matemático.

Assim, para além da necessidade de definir o ângulo $< ABC$, de acordo com a seguinte imagem:

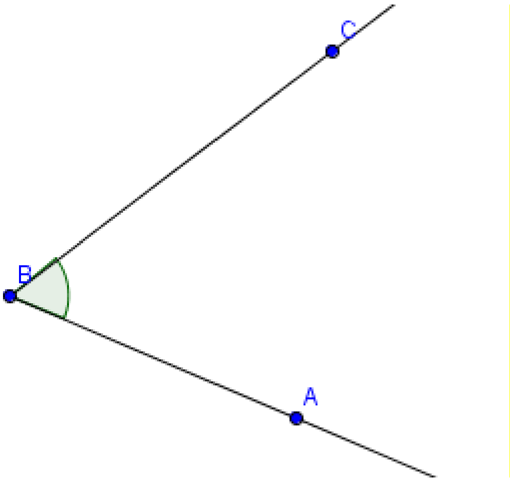


Figura 12: *Definição do ângulo* $< ABC$ *através dos pontos A, B e C*

Para que fosse possível enunciar a referida propriedade, seria necessário criar um arco de circunferência centrado em B, com origem no ponto A (de modo que o arco definido surgisse no sentido positivo), obtendo-se a representação seguinte:

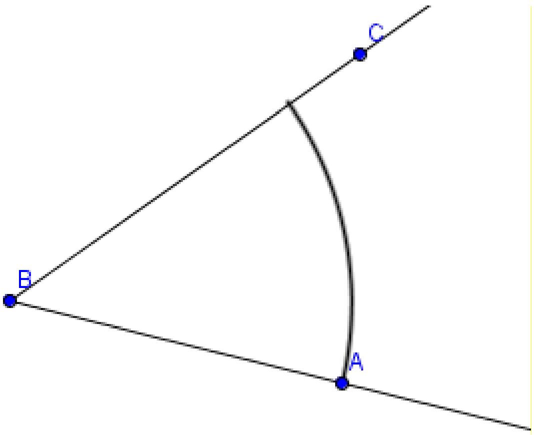


Figura 13: *Esboço do arco de circunferência centrado em B e com origem em A*

Por fim, através do ícone "*intersecção de dois objetos*", intersectando a semirreta $\dot{B}C$ com o arco produzido, obtinha-se a definição do ponto D. Obtendo-se, deste modo, a seguinte imagem final:

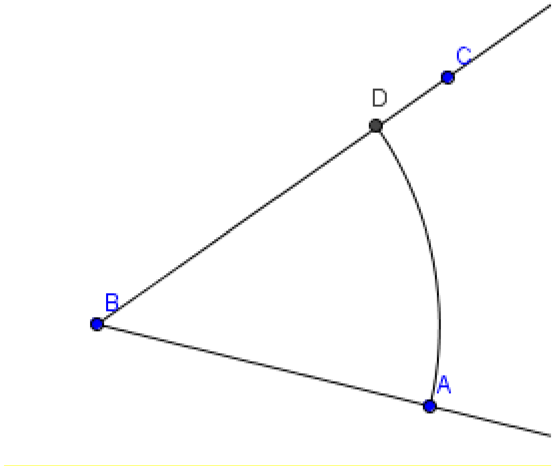


Figura 14: *Intersecção do arco de circunferência centrado em B e com origem em A com a semirreta $\dot{B}C$*

O processo acabaria por fim com a ocultação ou afastamento do ponto C.

Desta forma, voltando à propriedade da bissetriz que estava em causa, os alunos puderam medir as referidas distâncias, desta feita, relativamente aos pontos A e D, como podemos observar na figura:

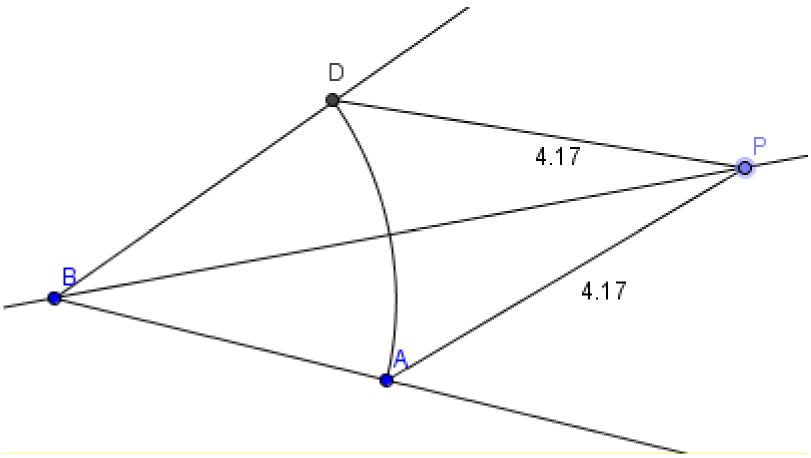


Figura 15: *Distância de um ponto P pertencente à bissetriz a cada um dos extremos de um arco de circunferência centrado em B intersetando ambos os lados do ângulo nos pontos A e D, respetivamente*

Finalmente, através do deslocamento do ponto P ao longo da semirreta, os alunos puderam constatar a invariância relativa à igualdade entre as distâncias $\overline{PA}$ e $\overline{PD}$, o que os levou ao enunciado da propriedade:

A distância entre qualquer ponto da bissetriz a ambos os extremos de um qualquer arco circular centrado no vértice do ângulo e de amplitude igual à do respetivo ângulo é invariante.

4.3.1.3.4. Determinação do Incentro e Esboço da Circunferência Inscrita no Triângulo

Relativamente à circunferência inscrita no triângulo, a ficha tornou suficientemente claros os procedimentos, passando estes pela construção das bissetrizes de, pelo menos, dois dos ângulos internos do triângulo. Os alunos utilizaram a linha de entrada do GeoGebra e, para cada bissetriz necessária, surgiu-lhes a opção “bissetriz (<ponto>,<ponto>,<ponto>)”, onde colocaram os pontos de definição do ângulo respetivo. Em seguida, por “intersecção de dois objetos”, mais concretamente, duas das bissetrizes, obtiveram um ponto, digamos I, que designariam por *incentro*, constituindo o centro da circunferência inscrita no triângulo.

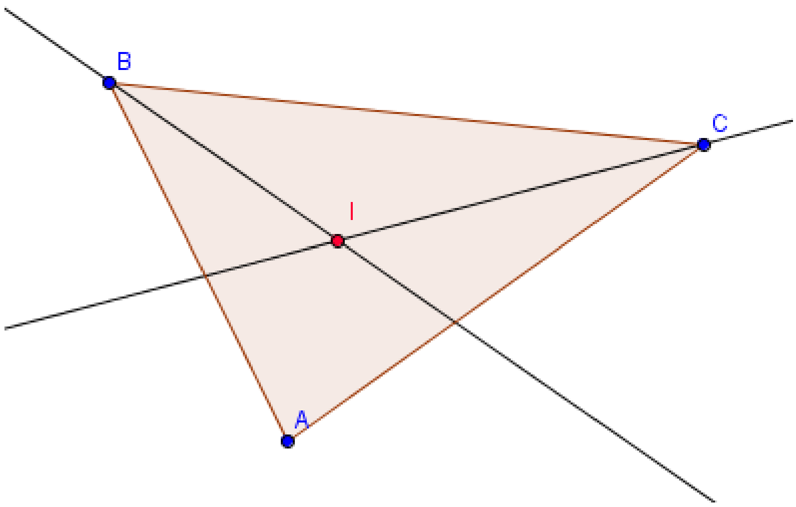


Figura 16: *Determinação do incentro do triângulo [ABC], através da intersecção de duas bissetrizes dos seus ângulos internos*

I: Incentro

Nesse momento, colocava-se a questão da obtenção da referida circunferência, ou seja, qual deveria ser o raio a considerar?

Esta formulação serviu de mote à introdução da **propriedade fundamental do incentro**: *o ponto que se encontra igualmente distanciado dos lados do triângulo*. Tal facto resultava do facto de constituir o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo e, como tal, a distância deste ponto a cada um dos lados do triângulo mantinha-se invariante, como vimos pela propriedade fundamental da bissetriz.

Deste pressuposto ressaltava a questão fundamental, ou seja, a determinação de uma destas distâncias, tendo por garantia que as restantes eram iguais. A informação foi acompanhada por um esboço no quadro.

Em suma, os alunos estavam agora presos à questão da determinação da distância do incentro a um dos lados do triângulo, digamos [AB]. A opção a considerar foi tomar uma reta perpendicular, digamos r, à reta que continha o segmento de reta [AB], passante pelo incentro.

Utilizando a intersecção entre os objetos "reta AB" e a "reta r", os alunos obtiveram um ponto, designadamente P, que se caracterizava por ser o pé da perpendicular r ao segmento [AB] e constituiria um dos pontos da circunferência inscrita no triângulo, de tal modo que $\overline{PI}$ constituia o raio procurado da referida circunferência.

Considerando a opção "circunferência (centro, ponto)", com centro I e ponto P, os alunos conseguiram obter a circunferência pretendida.

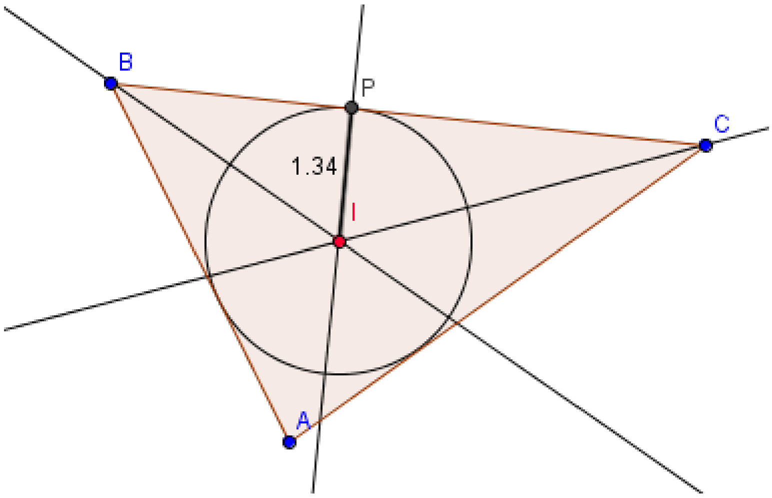


Figura 17: *Esboço da reta perpendicular ao segmento de reta [BC] passante por I. Determinação do pé da referida perpendicular – o ponto P. Esboço da circunferência inscrita no triângulo, centrada em I, com raio* $\overline{PI}$

Ficou pendente a questão da possibilidade do esboço recorrendo apenas a material de desenho, tendo sido protelada para a aula seguinte. A clarificação passou pelo recurso a material de desenho específico para quadro, designadamente, o esquadro.

O aluno Vasco voluntariou-se para ilustrar à turma como seria fácil o procedimento. Com efeito, colocou o esquadro de modo a que o ângulo reto estivesse localizado sobre o ângulo BPI, tornando o ponto P congruente ao vértice do ângulo reto. O Vasco assumiu o comando das operações e evidenciou como seria fácil obter o objeto final, após a determinação do ponto de intersecção das bissetrizes.

4.3.1.4. Trabalho dos Alunos

Marcou-me particularmente o grupo constituído pelos alunos Francisco e Ricardo. O Francisco, com um perfil de bom aluno, sempre por dentro dos conteúdos, com poucas dúvidas e, frequentemente, com uma postura de quem compreende facilmente tudo aquilo que lhe é transmitido. Por outro lado, numa vertente diametralmente oposta, o Ricardo, aluno com tendência para a desmotivação, frequentemente alheado das aulas de Matemática e com a noção enraizada de que não compreende os conteúdos matemáticos.

Apesar destes registos aparentemente antagónicos, o que é facto é que, na prática, também o Francisco apresentava tendência para desmotivar. Para ambos, a introdução da tecnologia afigurou-se como uma luz que despertou o seu interesse. Senti-os como "peixe na água" e senti, essencialmente, que estavam felizes. Utilizaram a expressão: "assim é que é fixe!".

Pelo modo como a ficha de suporte à aula se apresentava, com a indicação dos procedimentos a realizar suficientemente clara, o par desempenhou um excelente trabalho, tendo o Ricardo exclamado: "eu estou a perceber tudo!". Creio que as suas palavras e o seu entusiasmo, estes alunos fizeram-me reforçar a consciência no sentido da importância de ir ao encontro das formas de aprendizagem dos alunos. Fez-me refletir sobre o quão fundamental é a realização de uma busca no sentido da compreensão daquilo que, para os alunos, é significativo. Isto porque, por vezes, o professor pode estar a insistir num percurso que se revela inócuo e que para o qual não estão naturalmente predispostos para acolher. Neste caso particular que agora descrevo, a tecnologia foi a chave, mas é extremamente útil o reconhecimento de que, para além do ensino usual, baseado no modelo expositivo, caracterizado pela explicação do professor seguida da resolução de exercícios pelos alunos, o professor deve perspetivar um leque suficientemente abrangente de opções de ensino, de modo a abarcar a panóplia de perfis existente nas turmas que leciona.

4.3.1.5. Estratégias na Sala de Aula

Tendo em conta que a aula estava inserida numa sala de computadores, optei por rentabilizar o computador, sobrepondo-o ao quadro no seguinte sentido. Disse aos alunos para enviarem os ficheiros produzidos para o seu email e para o meu, constituindo elementos de estudo, para os próprios, e de avaliação da sua postura em sala de aula, inseridos na cotação de 25% referente ao trabalho desenvolvido na sala de aula. Desta forma, assumia uma grande importância a sua completude, o que implicava, para além do rigor do desenho, a necessidade de escrever uma conclusão associada à construção de cada lugar geométrico. Utilizei o computador central e o videoprojector, com o apoio dos alunos e incentivando a comunicação matemática, para escrever as referidas conclusões.

Em suma, pretendia que a ficha de trabalho e os ficheiros pudessem ser revistos pelos alunos posteriormente e, como tal, deveriam estar irrepreensíveis, tornando, desta forma, o seu estudo inequívoco.

Em consonância com esta ideia, a ficha continha quadros de definições dos lugares geométricos, paralelamente a quadros a completar pelos próprios alunos, com propriedades associadas aos vários lugares geométricos. Através desta abordagem, procurava que os alunos evidenciassem a compreensão do conteúdo, também através da comunicação escrita. Isto, para que aprendessem, não somente a realizar as construções, mas também a utilizar os termos matemáticos adequados, quer de forma oral, quer escrita, potenciando, desta forma, as aprendizagens.

O preenchimento destes quadros foi feito pelos alunos nas fichas individuais, recorrendo à síntese oral.

4.3.2. Aula de 23 de Fevereiro – 45 minutos

4.3.2.1. Introdução da Aula

Nesta aula, consistindo numa aula de continuidade do conteúdo, considerei importante reforçar duas importantes propriedades dos lugares geométricos estudados. A primeira das quais dizia respeito ao *circuncentro*. Tendo em conta que o circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo dado e como, por definição, os pontos da mediatriz são equidistantes dos extremos do lado a que se referem, concluiu-se que o circuncentro era o único ponto do plano que se caracterizava por ser *equidistante dos vértices do triângulo*, estabelecendo-se desta forma a primeira propriedade a que foi feita referência nesta aula. Foi esboçada no quadro uma ilustração de suporte ao conteúdo referido, como a seguir se exemplifica:

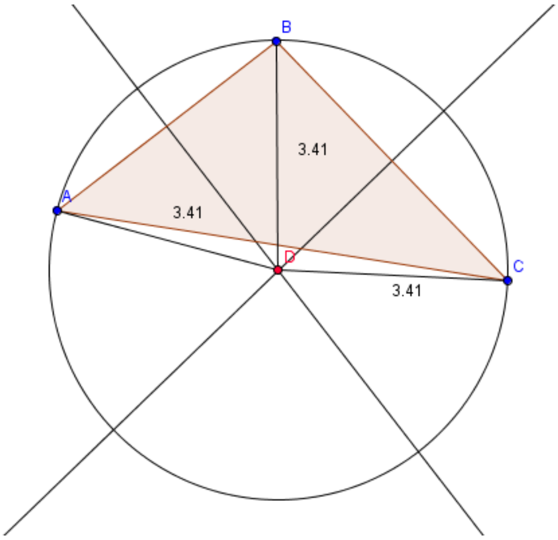


Figura 18: *Propriedade do circuncentro – a distância deste ponto a qualquer vértice do triângulo é invariante, pelo facto de esta distância constituir o raio da circunferência circunscrita ao triângulo*

D: circuncentro

Aos alunos foi requerido que esboçassem nos seus cadernos os lugares geométricos que na aula anterior tinham sido abordados através do ambiente de Geometria Dinâmica GeoGebra. Considerei importante que se mantivessem a par das construções tradicionais, com recurso ao material de desenho, nomeadamente, pelo facto de ser esta a forma a que devem recorrer ao realizarem as suas fichas de avaliação e o exame nacional.

Observando os cadernos dos alunos pudemos encontrar as seguintes representações do circuncentro e da respetiva circunferência circunscrita:

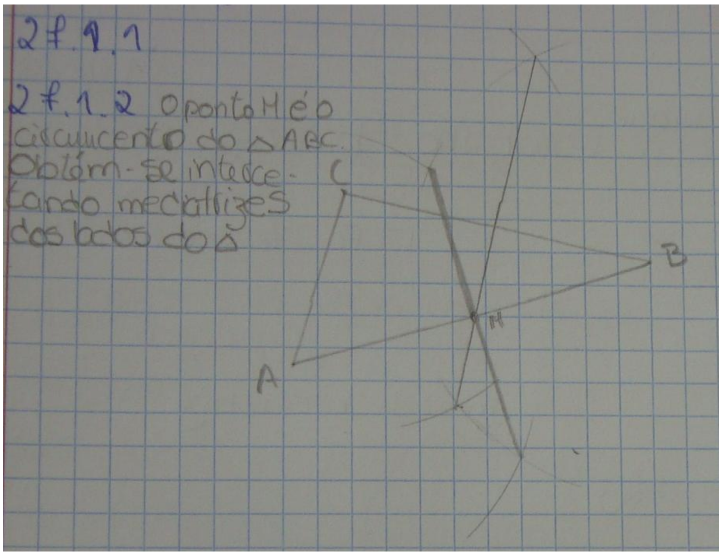


Figura 19: *Pode ler-se "O ponto M é o circuncentro do triângulo ABC. Obtém-se intersetando as mediatrizes dos lados do triângulo"*

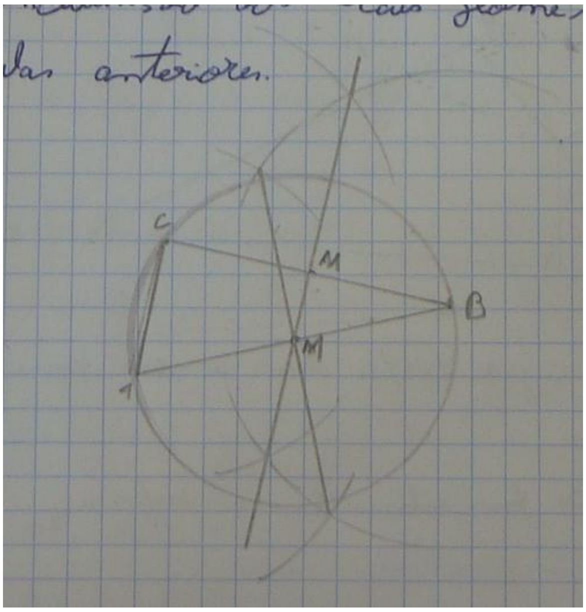


Figura 20: *Construção das mediatrizes de dois lados do triângulo, determinação do circuncentro e esboço da circunferência circunscrita ao triângulo*

<u>*Propriedade do Incentro*</u>

A propriedade seguinte referia-se ao *incentro*. Sendo o incentro o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, então, pela primeira propriedade da bissetriz, os pontos da bissetriz são equidistantes dos lados do ângulo a que se referem, portanto, o incentro é o único ponto do plano que se caracteriza por ser equidistante dos lados do triângulo. O esboço apresentado no quadro estava relacionado com a representação seguinte:

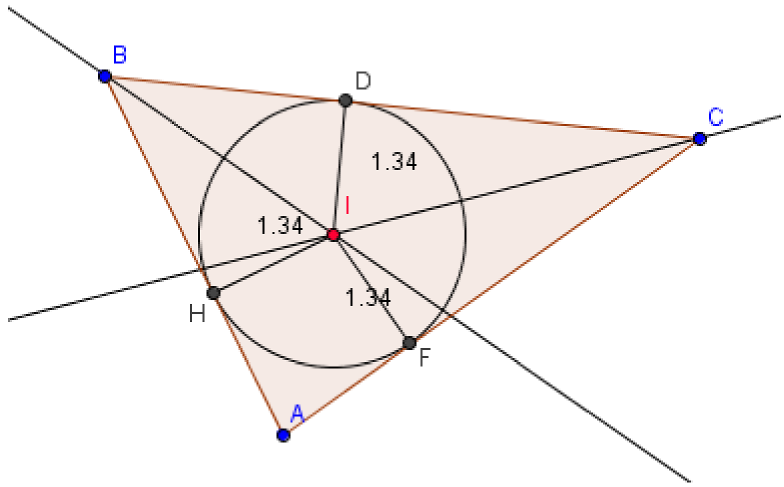


Figura 21: *Representação do incentro do triângulo e da circunferência circunscrita. Referência à propriedade do incentro, que refere que este se encontra igualmente distanciado dos lados do triângulo*

4.3.2.1.1. Produções dos Alunos

À semelhança do circuncentro, considerei também importante que os alunos realizassem o esboço do incentro nos seus cadernos. As figuras seguintes ilustram as construções que tiveram lugar:

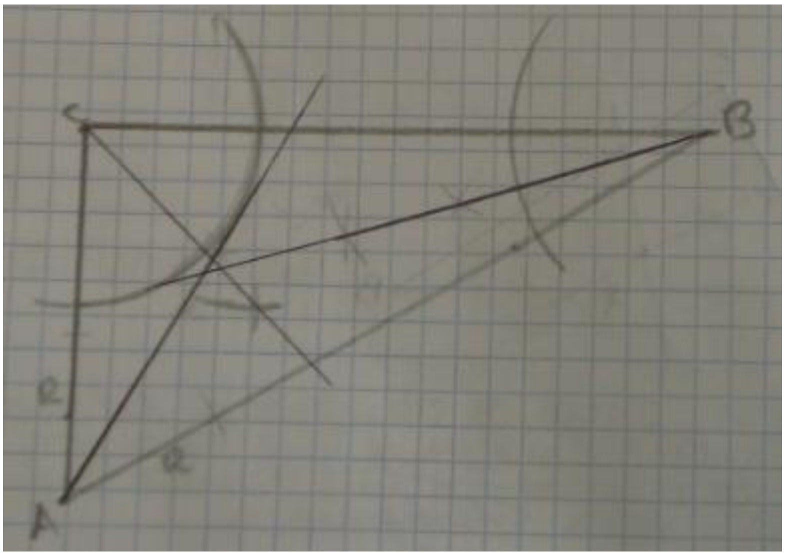


Figura 22: *Esboço das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo*

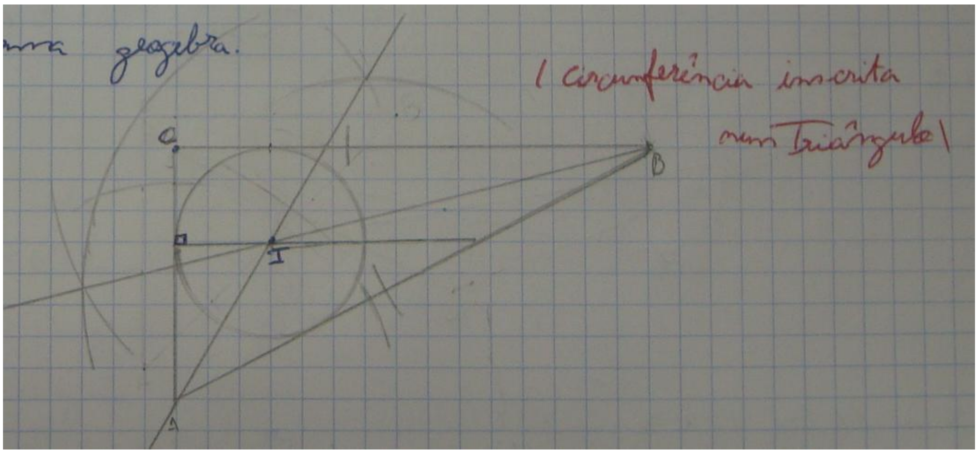


Figura 23: *Determinação do incentro e esboço da circunferência inscrita no triângulo. Determinação da distância do incentro aos lados do triângulo*

Surgiu ainda o registo de duas observações relativas à circunferência inscrita:

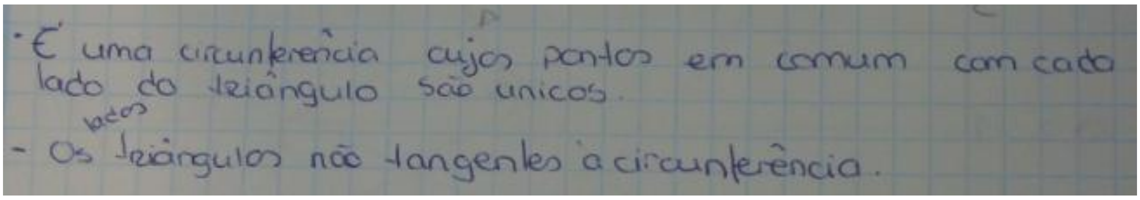


Figura 24: *Alusão ao facto de os lados do triângulo serem tangentes à circunferência inscrita*

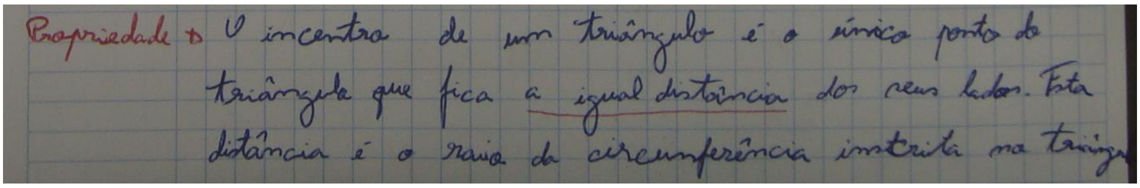


Figura 25: *Referência à propriedade do incentro - "O incentro de um triângulo é o único ponto do triângulo que fica a igual distância dos seus lados. Esta distância é o raio da circunferência inscrita no triângulo".*

4.3.2.2. Tarefas de Consolidação

<u>Proposta 27</u>

A proposta apresentava um triângulo [ABC], do qual deveriam ser escolhidos dois lados e determinadas as mediatrizes que lhes estavam associadas. Destas, procurava-se o seu ponto de intersecção M e a justificação que suportava o facto de este ponto ser equidistante dos vértices do triângulo, ou seja, a tarefa ia ao encontro da propriedade fundamental do circuncentro, convidando a um momento de destaque do referido conteúdo.

Seguidamente, a proposta seguia um caminho natural, no sentido do esboço da circunferência circunscrita ao triângulo, centrada no ponto M, com ênfase nas designações, quer da própria circunferência, quer na do seu centro.

Com efeito, as respostas registadas foram as seguintes:

Resolução 1:

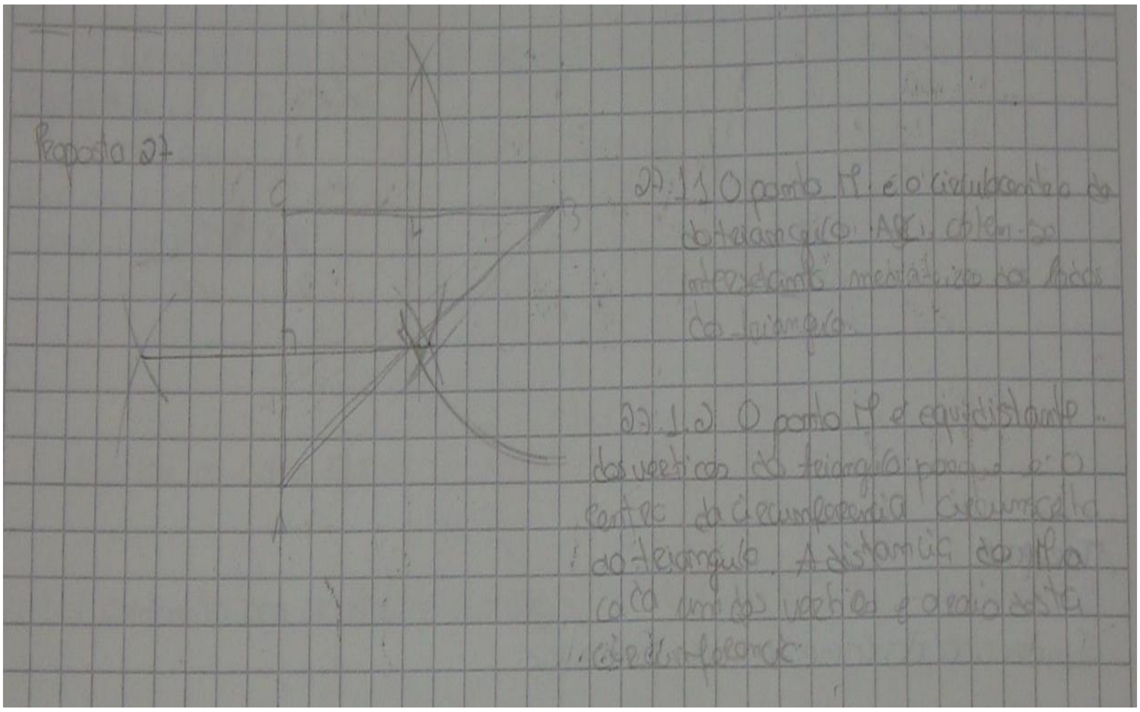


Figura 26: *“27.1.1) O ponto M é o circuncentro do triângulo ABC. Obtém-se intersetando as mediatrizes dos lados do triângulo; 27.1.2) O ponto M é equidistante dos vértices do triângulo porque é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. A distância de M a cada um dos vértices é o raio desta circunferência.”*

Resolução 2:

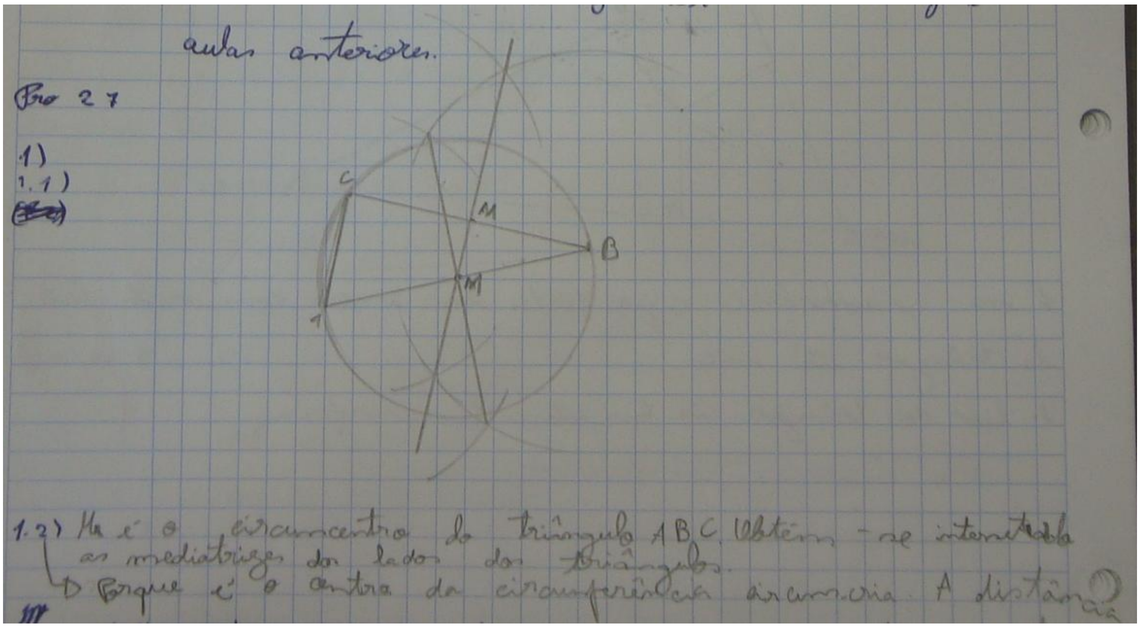


Figura 27: *Nesta construção é possível observar a circunferência circunscrita ao triângulo, após a determinação do circuncentro*

O percurso trilhado prosseguiu na direção da determinação do incentro do triângulo, procedida pelo esboço da circunferência inscrita no triângulo. Também para este lugar geométrico, a proposta aludia ao facto de os lados do triângulo serem perpendiculares a três raios da circunferência inscrita, ou seja, acompanhava-a, de forma implícita, um raciocínio associado ao facto de o incentro estar a igual distância dos lados do triângulo, subsistindo, portanto, um convite à reflexão relativa à propriedade fundamental do incentro, como acabámos por relembrar e registar no quadro com vista à consolidação deste conhecimento, conforme se observa na figura seguinte:

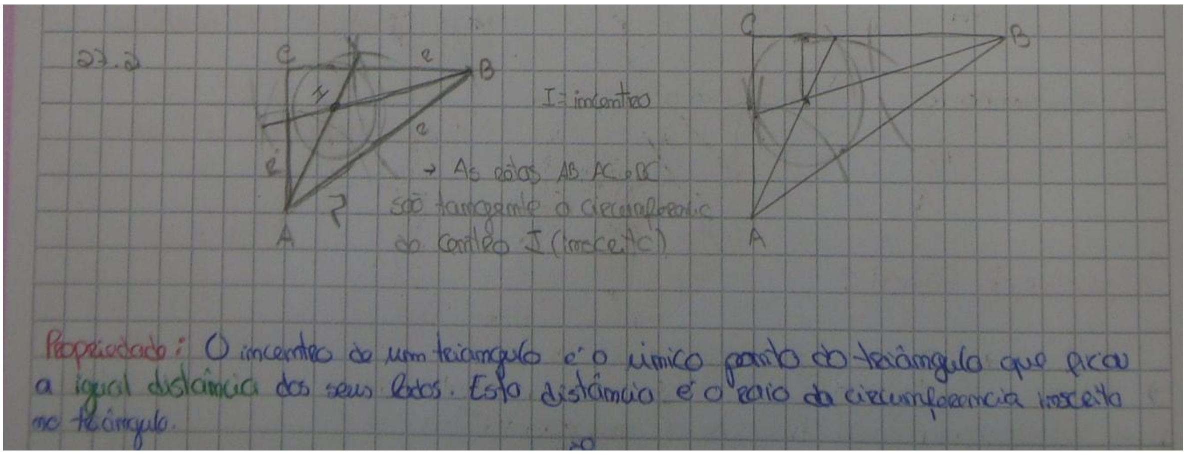
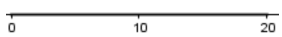


Figura 28: *27.2) "As retas AB, AC e BC são tangentes à circunferência de centro I (incentro).* *__Propriedade__: O incentro de um triângulo é o único ponto do triângulo que ficou a igual distância dos seus lados. Esta distância é o raio da circunferência inscrita no triângulo."*

__Proposta 29__

A primeira questão prendeu-se com a construção rigorosa do triângulo [ABC], tendo em linha de conta que os alunos deveriam efetuar a resolução da tarefa nos seus cadernos. Assim, foi necessário assegurar-me de que os alunos tinham a noção de que deveriam considerar como "base" o lado maior, ou seja [AC], pois a medida do comprimento deste segmento de reta era igual a 10 cm e, em seguida, centrar o compasso no ponto A e tomar como raio a medida de 5 cm, de modo que a medida do comprimento do segmento [AB] fosse igual a 5 cm. De forma similar, ao centrarem o compasso em C, deveriam considerar raio igual a 6 cm, para que a medida do comprimento do segmento [BC] respeitasse a indicação de 6 cm. Num dos pontos de intersecção das duas circunferências deveria ficar localizado o ponto B, encontrando-se, deste modo, o terceiro vértice do triângulo. Constatei que a larga maioria da turma detinha este conhecimento, não tendo sido necessário alongar-me na explicação.

A proposta surgia colocada em termos de distâncias reais, pelo que considerei ainda importante certificar-me de que os alunos compreendiam a legenda:



Em que cada unidade de comprimento correspondia a 1 cm.

Pretendia-se determinar geometricamente o conjunto dos pontos que ficavam a menos de 30 m do ponto A e a menos de 30 m do ponto B, notando-se a preocupação numa conjugação entre lugares geométricos, rebuscando o conceito de círculo.

Estratégia de abordagem da tarefa

Os alunos realizaram a tarefa nos seus lugares, tendo circulado com vista a dar apoio na resolução das suas dificuldades. Após a conclusão das duas alíneas, houve duas apresentações no GeoGebra, realizadas por dois alunos que se voluntariaram: o Vasco e o Melvin.

Considerei importante realçar a coragem de ambos, tendo em conta que tinham tido apenas um primeiro contacto com o GeoGebra e estavam dispostos a realizar os procedimentos necessários perante a turma.

As suas intervenções acabaram por representar uma forma de a turma rever alguns procedimentos no GeoGebra, de entre as funcionalidades que já tinham experienciado na aula realizada na sala de computadores TIC2. Representou também a possibilidade de tirar algumas dúvidas e de esclarecer os vários processos de resolução.

4.3.2.2.1. Produções dos Alunos nos Seus Cadernos

As figuras seguintes representam o produto final das três alíneas que compunham a tarefa:

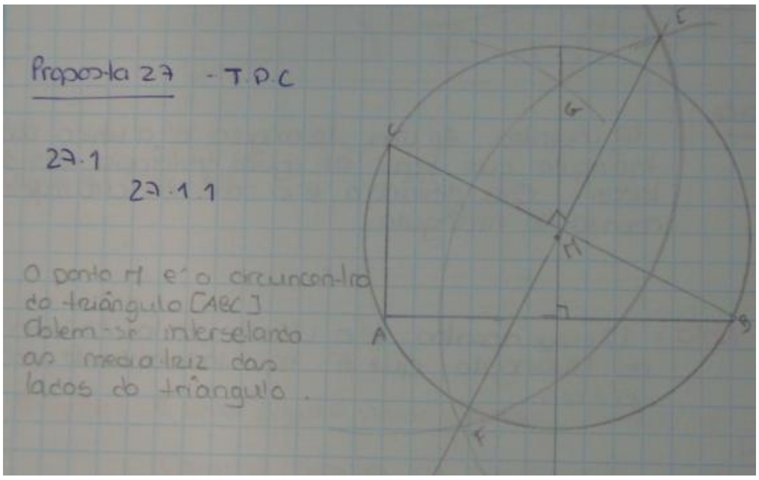


Figura 29: *"27.1.1) O ponto M é o circuncentro do triângulo [ABC]. Obtém-se intersetando as mediatrizes dos lados do triângulo."*

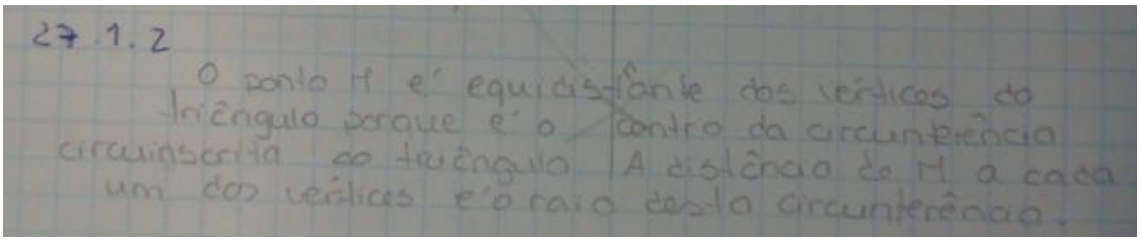


Figura 30: *"O ponto M é equidistante dos vértices do triângulo porque é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. A distância de M a cada um dos vértices é o raio desta circunferência."*

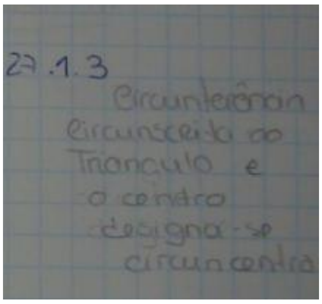


Figura 31: *27.1.3) "Circunferência circunscrita ao triângulo e o centro designa-se circuncentro."*

Construção rigorosa do triângulo, intersecção de lugares geométricos

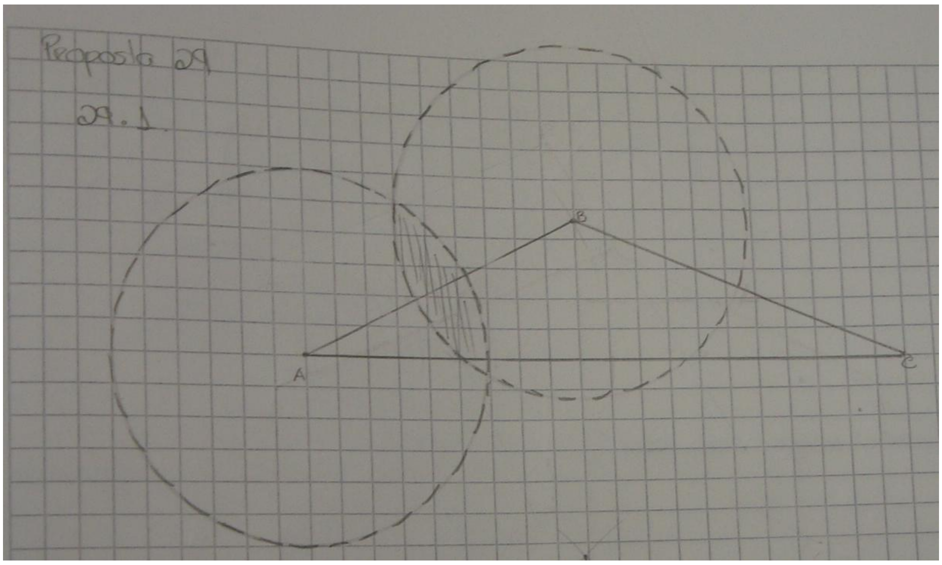


Figura 32: *Procurava-se o lugar geométrico dos pontos situados a uma distância inferior a 3 cm do ponto A e do ponto B, correspondendo à intersecção dos dois círculos com raio igual a 3 cm*

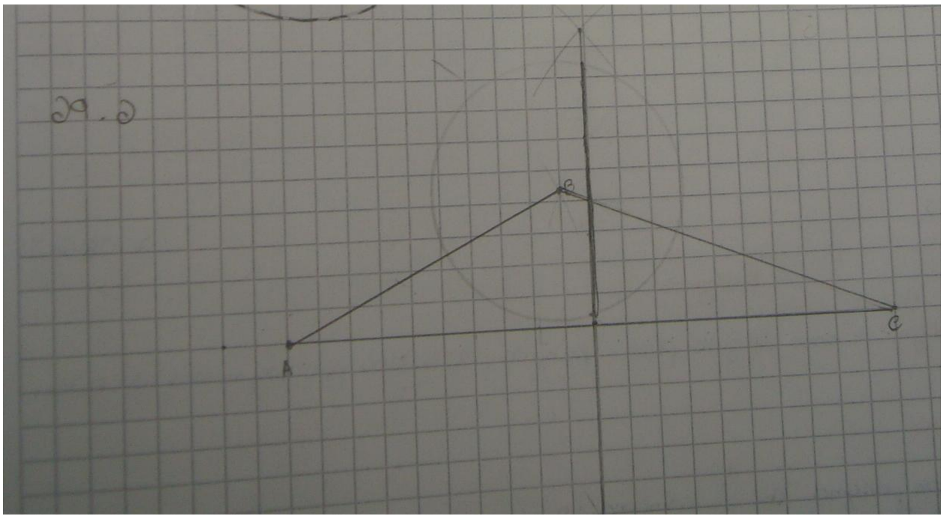


Figura 33: *Procurava-se o lugar geométrico dos pontos situados simultaneamente sobre a mediatriz do lado [AC] e no interior do círculo centrado em B, com raio igual a 3 cm*

4.3.2.3. Discussão das Tarefas

- *Primeira parte*

O Vasco realizou a primeira parte da tarefa no computador da sala de aula, enquanto os seus colegas puderam observar o seu raciocínio, a par da vantagem na visualização do *modus operandi* no Geogebra, retirando, deste modo, benefícios relacionados com a aprendizagem em duas vertentes.

Em seguida, é possível observarmos o modo como o Vasco procedeu:

Passo 1

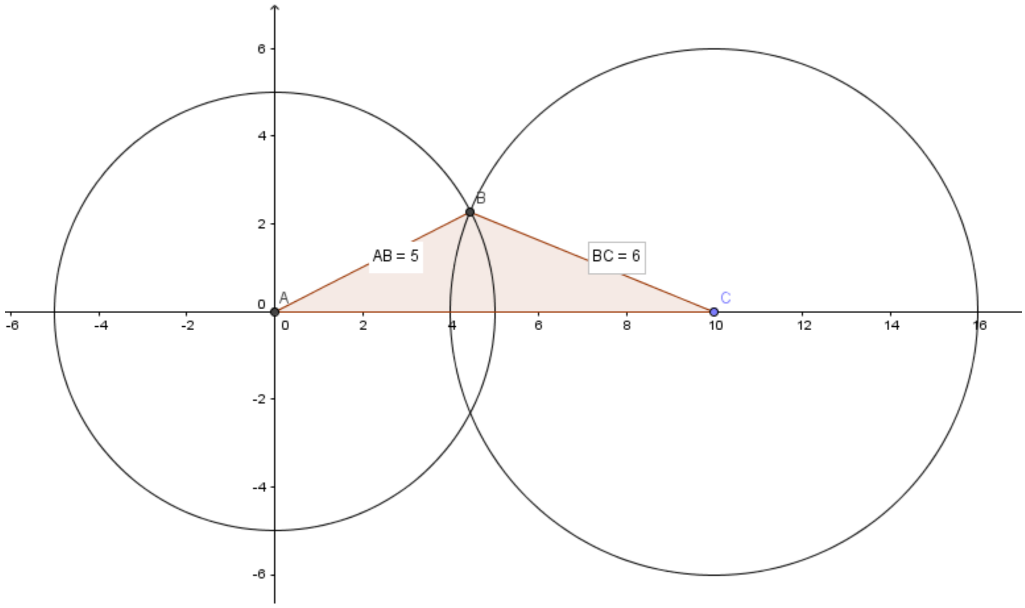


Figura 34: *Construção rigorosa do triângulo [ABC,] de acordo com as medidas definidas para os seus lados.*

Passo 2

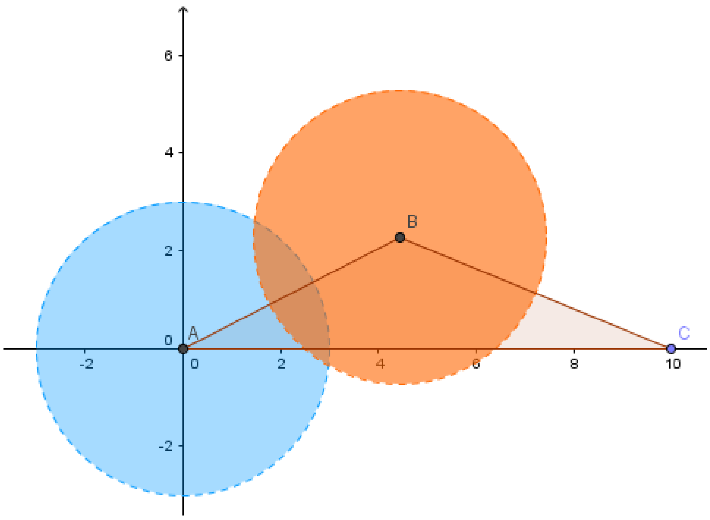


Figura 35: *A intersecção dos dois círculos corresponde à zona do plano cujos pontos distam menos de 3 cm (30 metros na realidade) do ponto A e menos de 3 cm do ponto B.*

Foi importante que o Vasco clarificasse algumas questões relativas às várias técnicas por si utilizadas, por forma a colmatar algumas lacunas que tivessem ficado após a primeira utilização do programa, na aula precedente.

- *Segunda parte*

O aluno Melvin voluntariou-se para resolver no Geogebra a segunda parte da proposta 29. Para a resolução desta alínea, havia que evidenciar a compreensão relativa ao lugar geométrico dos pontos que se caracterizam por estar situados a igual distância dos extremos de um dado segmento, em referência, neste caso particular, ao segmento [AC]. O aluno mostrou que associava o referido conjunto de pontos à *mediatriz* de [AC], tendo procedido ao seu esboço, partindo da determinação prévia do ponto médio M deste segmento e fazendo passar por este ponto a reta perpendicular a [AC], ou seja, a mediatriz do segmento em questão.

Simultaneamente, os pontos procurados não deveriam estar a uma distância superior a 20 m do ponto B, o que se traduzia em 2 cm, de acordo com a escala considerada.

O raciocínio do Melvin passou pelo esboço de dois conjuntos, dos quais determinou posteriormente a sua intersecção. Estes conjuntos diziam respeito à mediatriz do segmento de reta [AC], como já vimos, e ao círculo aberto, centrado no ponto B, com raio igual a 2 cm. A intersecção obtida, o segmento de reta [DE] correspondia ao segmento de reta aberto, contido na referida mediatriz e também no círculo em questão, como se observa na figura:

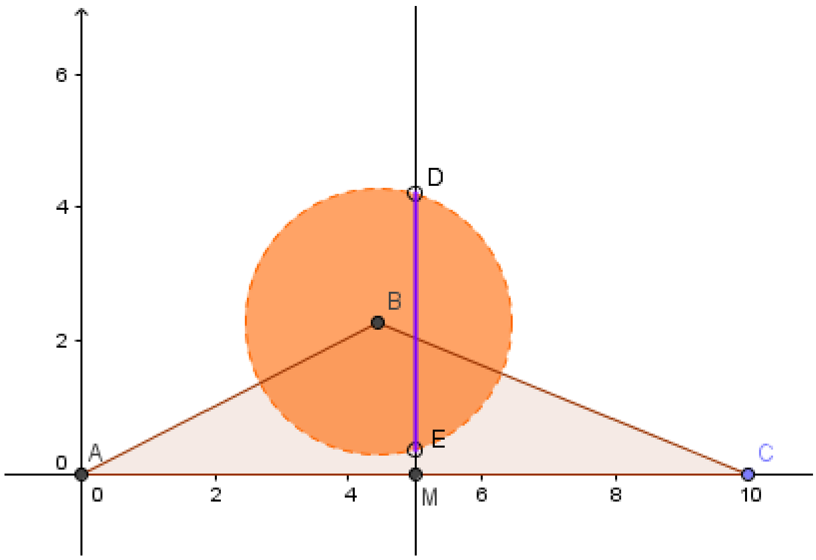


Figura 36: *Segmento de reta [DE]: Intersecção da mediatriz do segmento de reta [AC] com o círculo aberto centrado em B, de raio 2 cm*

Questões essenciais

- *Primeira parte*

1. Relativamente à construção rigorosa do triângulo, uma minoria dos alunos questionaram-me sobre como tal poderia ser feito. Optei por lhes explicar a razão de recorrer à utilização de duas circunferências, cada uma das quais centrada num dos extremos do segmento de reta considerado como base do triângulo, tendo por raios, respetivamente, os valores definidos para as medidas dos restantes dois lados do triângulo. Expliquei-lhes que como o ponto B deveria satisfazer simultaneamente duas condições (estar à distância de 5 cm de A e de 6 cm de C), então B deveria estar simultaneamente em duas circunferências de raios iguais a 5cm e 6 cm, respetivamente, recordando assim a definição de circunferência.

2. A resolução das tarefas em questão tinha implícita a necessidade do conhecimento dos conceitos de circunferência e círculo, dando ênfase à questão do reconhecimento da linguagem corrente quando utilizada para descrever uma realidade matemática. Desta forma, as tarefas foram úteis também no sentido de recordar aos alunos o significado destes objetos matemáticos, a par de irem ao encontro de dúvidas relativas a estes conceitos, que acabaram por se refletir nas respostas de alguns dos alunos quando foram colocadas questões à turma.

3. No que diz respeito ao esboço da mediatriz do segmento de reta [AC], esta construção teve por base a *propriedade fundamental da mediatriz*, cujo enunciado refere que esta reta é a única reta perpendicular ao segmento dado que passa pelo seu ponto médio. Por tal facto, não foi necessário, no GeoGebra, efetuar a construção da mediatriz da maneira usual mas utilizando um processo relacionado com este resultado.

4. Na segunda parte da tarefa, uma das questões essenciais que foi levantada teve que ver com a abertura dos extremos do segmento resultante da intersecção. Como é possível observar na construção no caderno (Figura nº33), verificamos que não houve o cuidado de ilustrar o facto de o círculo ser um conjunto aberto, assim como também permanece indefinida a caracterização quanto ao fecho dos extremos do segmento. Esta foi uma questão interessante, que tive o cuidado de não deixar passar sem que o seu registo ficasse bem claro. Foi também bastante importante que os alunos compreendessem quais os processos de suporte no GeoGebra, nomeadamente, a questão do tracejado da fronteira do círculo, bastando apenas alterar o tipo de linha utilizado na construção do lugar geométrico.

Em suma, estas questões evidenciam o poder da tarefa escolhida, no seguinte sentido: a tarefa em questão afigurou-se como um elemento de revisão de um conjunto de tópicos fundamentais relacionados com os lugares geométricos, tais como o conceito de circunferência e círculo, de mediatriz de um segmento de reta e a propriedade fundamental que lhe está associada.

4.4. AULAS LECIONADAS À TURMA 10ºCT2 RELATIVAS AO TEMA "FUNÇÕES QUADRÁTICAS"

4.4.1. Aula de 4 de Fevereiro de 2015 – 90 minutos

4.4.1.1. Introdução da Função Quadrática

4.4.1.1.1. Definição Analítica de Função Quadrática e de Parábola

A introdução da função quadrática foi feita através do exemplo $y = x^2$. O seu esboço foi realizado no quadro, realçando o facto de a curva produzida ser designada por parábola.

Em seguida, foram introduzidas as definições formais de função quadrática e de parábola:

1.Uma função real de variável real, definida por uma expressão do tipo:
$y = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$ ***é designada por <u>função quadrática</u>.***

2.O gráfico de uma função quadrática designa-se por <u>parábola</u>.

No momento seguinte da aula, foram esboçadas no quadro um conjunto de parábolas, conforme as que vemos representadas na imagem:

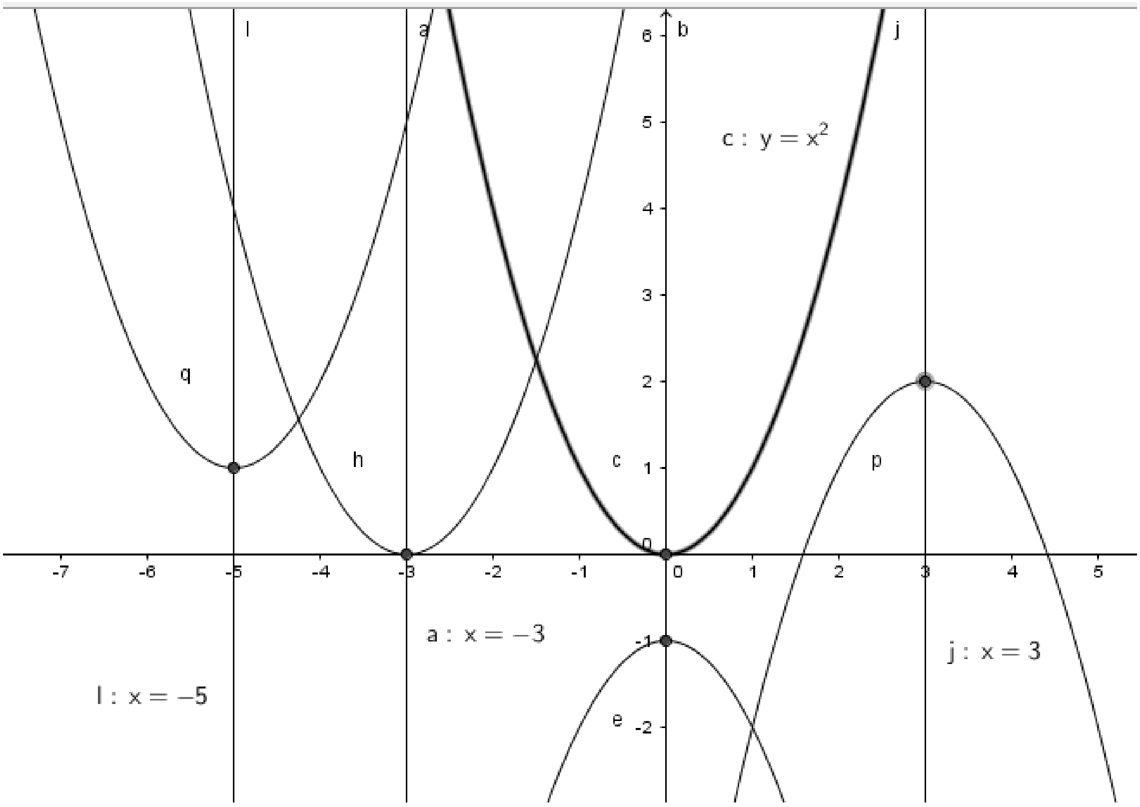


Figura 37: *Conjunto de parábolas definidas pelos respetivos vértices e eixos de simetria, das quais ainda não se conhecem as expressões algébricas (apenas se conhece a parábola de referência)*

Para cada uma destas parábolas, foi feita referência ao seu vértice (x_1, y_1) (para alguns x_1,y_1 pertencentes a $\mathbb{R}$) e ao seu eixo de simetria $x = x_1$, subsistindo a preocupação em salientar que todo o ponto do eixo de simetria tem abcissa igual à abcissa do vértice, sendo esta a sua caracterização específica.

Foram enfatizadas questões relativas à abertura maior ou menor de cada parábola, assim como o facto de as concavidades serem voltadas para cima ou para baixo e ainda a questão de os vértices associados às várias parábolas pertencerem, ou não, ao eixo Ox.

Para todas estas variantes, considerei fundamental referir que todas elas representavam gráficos de funções quadráticas, como iríamos constatar com o progresso do conteúdo.

4.4.1.1.2. Definição Geométrica de Parábola

Para além da definição de parábola exposta, este conceito foi ainda abordado numa ótica geométrica:

<u>Parábola</u> é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto F (foco) e de uma reta d (diretriz) que não contém esse ponto.

Foi apresentado no quadro o esboço seguinte:

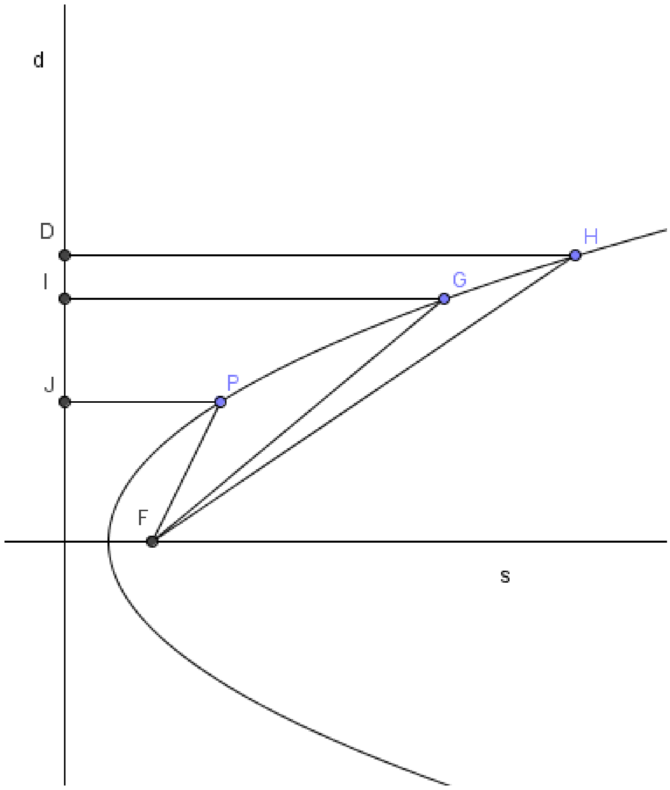


Figura 38: *Representação de pontos arbitrários de uma parábola tomada como exemplo, tendo estes a particularidade de ser equidistantes da reta diretriz d e do foco F, o que se traduz na congruência dos pares de segmentos (cada par partindo de um dos pontos da parábola) presentes na figura.*

A figura precedente resulta de uma construção rigorosa, como pode ser observado na figura seguinte:

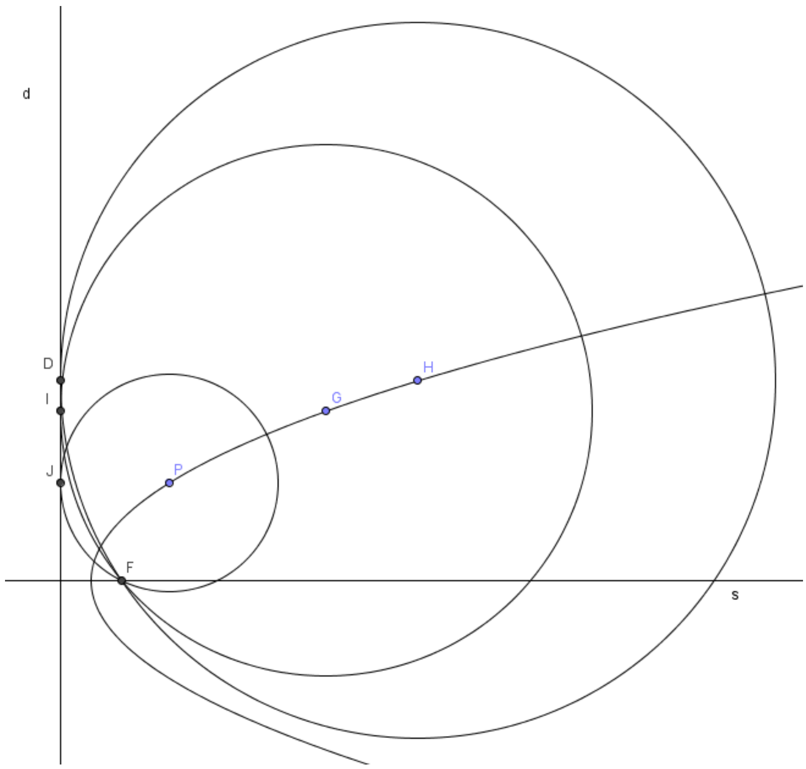


Figura 39: *Reta s: eixo de simetria da parábola; Os pontos assinalados na parábola: P, G e H são equidistantes do foco F e da reta diretriz d, pois são centros de circunferências com a particularidade de conterem o ponto F e serem tangentes à reta d nos pontos D, I e J. A distância entre cada ponto da parábola e o foco F e entre cada um destes e a reta d é igual ao raio da respetiva circunferência centrada no ponto em questão.*

Foi realçado o facto de esta ser também uma estratégia de obtenção de uma parábola, ficando assim o registo de duas formas de definir uma parábola. Foi ainda feita referência ao facto de que o caminho a percorrer teria por base a definição analítica de parábola.

A aula prosseguiu na direção de um exemplo prático, que constava do manual.

4.4.1.1.3. Introdução da Tarefa

A tarefa estava relacionada com um jogo de pingue-pongue, com a particularidade da bola descrever arcos de parábola. A questão em estudo foi formalizada e referenciada de acordo com o seguinte referencial ortogonal e monométrico:

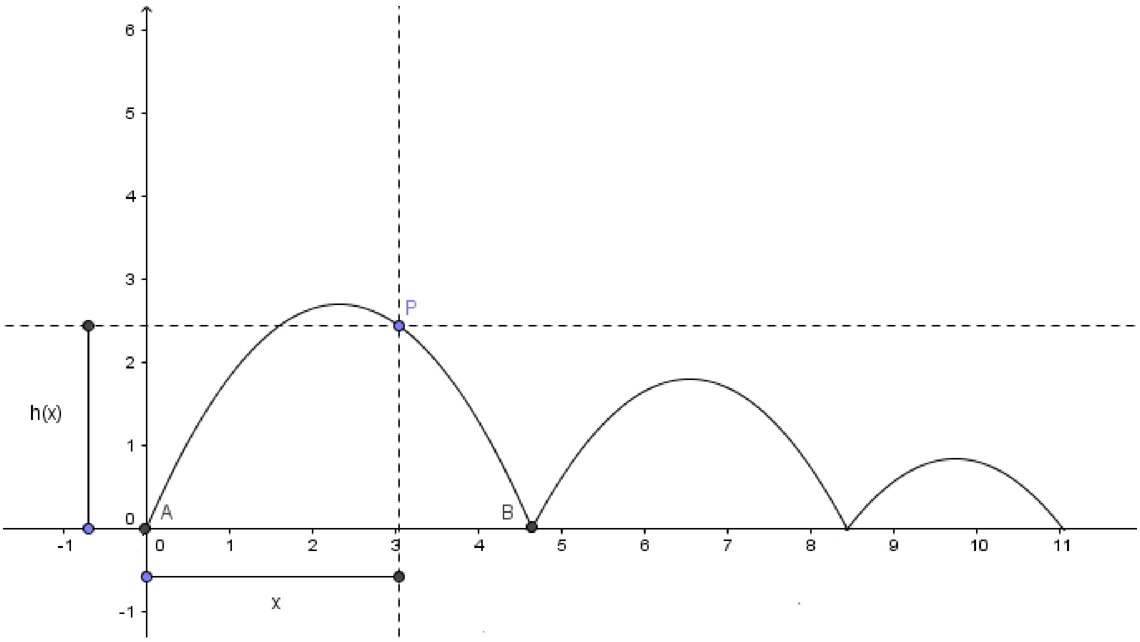


Figura 40: *Gráfico que representa a trajetória típica de uma bola de pingue-pongue*

A altura da bola $h(x)$, em relação à mesa, é dada em função de x, que representa a distância da projeção da bola ao ponto inicial (onde a bola bateu pela primeira vez na mesa imediatamente após a primeira tacada do jogador). O ponto P refere-se à posição em que a bola se encontra, ou seja, representa o par ordenado $(x, h(x))$.

A expressão algébrica de $h(x)$ é dada por: $h(x) = -0{,}03x^2 + 3x$, em centímetros.

4.4.1.1.4. Realização da Tarefa

Um dos pressupostos da tarefa era a determinação da distância entre A e B.

Sendo o ponto A é da forma A(0,0) e B do tipo B(x_1,0), para algum $x_1 \in \mathbb{R}$, então os alunos puderam concluir que, para encontrar a referida distância, bastava descobrir a abcissa do ponto x_1. Colocando a expressão da função na calculadora gráfica através da funcionalidade *"y=... "* e ajustando os valores da janela, definindo os valores de x no intervalo [0,100] e y no intervalo [0,80], os alunos tiveram a oportunidade de observar nos visores das suas calculadoras o esboço do gráfico da função. No entanto, para melhor compreender e visualizar o gráfico da função em estudo, houve a necessidade de proceder a um alargamento dos valores da janela de visualização, que acabaram por estar mais próximos do quadro seguinte:

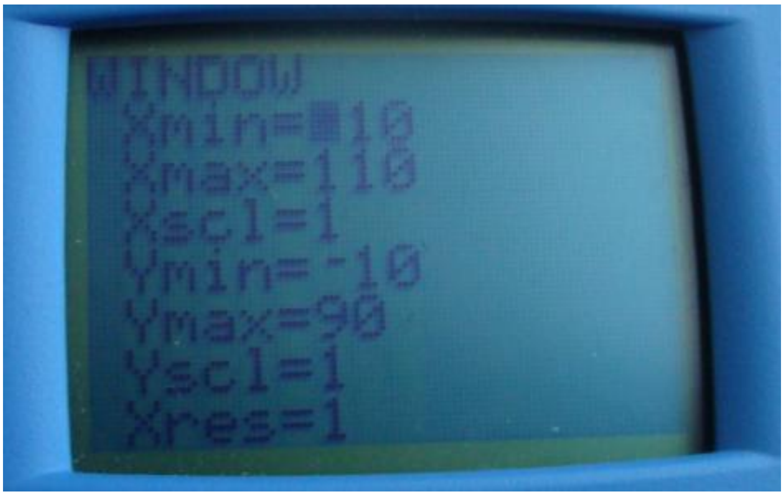


Figura 41: *Janela de visualização com valores escolhidos de modo a permitir a visualização de uma parte representativa do gráfico da função em estudo*

Deste modo, o gráfico obtido foi o seguinte:

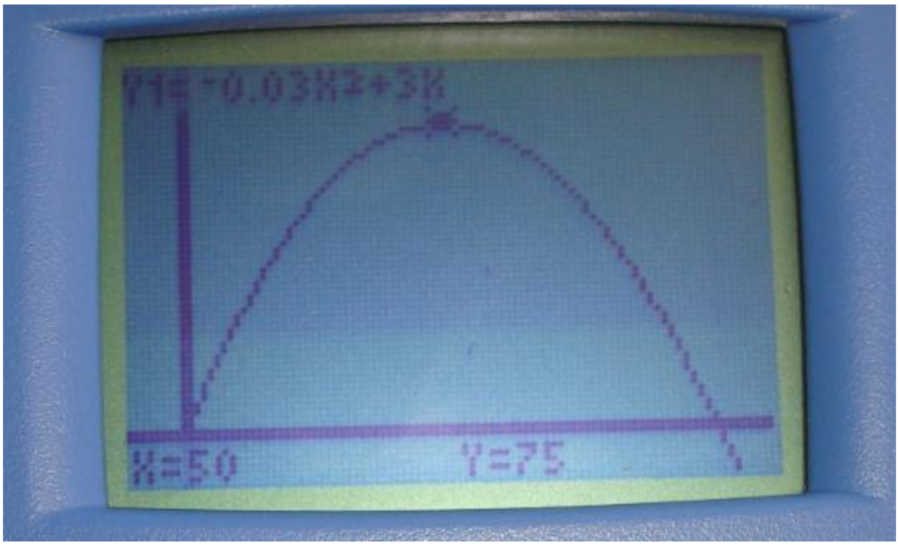


Figura 42: *Parte do gráfico da função em estudo onde podem ser observados o vértice da parábola e a existência de dois zeros, sendo um dos quais igual a x=0*

Foi importante assinalar o significado do gráfico, no sentido de os alunos tomarem consciência de que os pontos com ordenada negativa não deveriam ser considerados no contexto em que o problema se insere, tendo em conta que estas ordenadas representam alturas da bola de pingue-pongue.

Por observação do gráfico, os alunos confirmaram que um dos zeros da função era $x = 0$. Para encontrar o outro zero, bastou constatar que a distância do primeiro zero à abcissa do vértice era igual a 50 unidades de medida, logo, a distância entre o zero seguinte e x=50 também deveria ser igual a 50 (por simetria da parábola), donde resultou unicamente a possibilidade x=100 para o segundo zero da função.

Finalmente, a proposta passava por determinar a distância da origem à projeção da bola, relativa a uma altura de 60 cm. O processo utilizado pelos alunos teve por base a introdução na calculadora da reta $y = 60$, donde resultou o seu esboço, intersetando o gráfico precedente em dois pontos, de abcissas, digamos, x_2 e x_3.

Constataram que a distância que procuravam era afinal, não uma, mas duas, precisamente os valores x_2 e x_3. A questão que se colocava estava relacionada com a forma de os encontrar. Para o efeito, utilizaram a opção *"second calc – intersect"*, o que lhes permitiu atingir o objetivo, subsistindo a necessidade de aplicação dupla. A imagem seguinte ilustra este tópico:

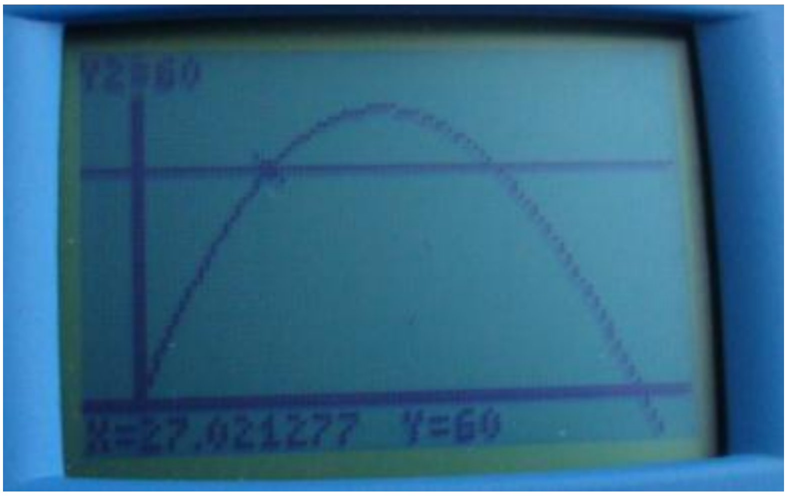


Figura 43: *Intersecção entre o gráfico da função em estudo e a reta y=60*

4.4.1.1.5. Reflexão Sobre a Pertinência da Tarefa

Esta tarefa foi uma primeira abordagem ao estudo pormenorizado de uma função quadrática. Como vimos, a primeira questão que surge prende-se com a visualização do gráfico da função na calculadora. Nesta primeira análise, o método adotado pelos alunos foi o sistema tentativa / erro, em que os valores da janela de visualização, quer das abcissas, quer das ordenadas, foram sendo sucessivamente aumentados, de modo a tornar possível a visualização.

A partir deste momento, a determinação dos zeros da função surgiu automaticamente. Esta foi uma tarefa importante, no sentido da transmissão do processo de determinação do vértice, conhecidos os zeros, sendo posteriormente utilizado em várias tarefas de aplicação. Mais à frente, seriam abordados outros processos, também conducentes ao conhecimento do vértice da parábola.

Um outro ponto fundamental no estudo desta função quadrática, que se revelou particularmente importante na análise das aplicações, teve que ver com a determinação de objetos do domínio da função, conhecidas as suas imagens, utilizando, para o efeito, a calculadora gráfica.

Em suma, a tarefa permitiu adiantar um conjunto de procedimentos-chave que viriam a ser consolidados, no decurso do processo de aprendizagem.

4.4.1.2. Caso Particular: Família de Funções do Tipo

$y = ax^2, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

No momento seguinte da aula, teve início o estudo de um dos casos particulares de funções quadráticas. Foi introduzida a família $y = ax^2, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

A primeira questão que se colocava era relativa ao gráfico de funções deste tipo. Pretendia-se analisar o tipo de alterações no gráfico da função de referência: $y = x^2$, por acréscimo do parâmetro *a*. Era esta a questão a que procurávamos responder.

4.4.1.2.1. Tarefa de Investigação

A estratégia de abordagem passou por propor aos alunos a inserção na calculadora gráfica de algumas funções deste tipo, sugeridas por uma tarefa do livro:

$a)\ y = 2x^2$,

$b)\ y = -0{,}5x^2$,

$c)\ y = \sqrt{3}x^2$,

$d)\ y = -x^2$,

$e)\ y = 0{,}2x^2$.

Os resultados obtidos deveriam permitir obter uma conclusão. Caso as funções anteriores não fossem em número ou qualidade suficientes, os alunos deveriam testar ainda outras funções que considerassem pertinentes. A abordagem é colocada numa ótica de investigação, tendo os alunos que estar preparados para encontrar os recursos adequados, de modo a conseguirem obter uma conclusão fiável.

O estudo foi bastante produtivo, com expressivas evidências de compreensão relativa ao tipo de influência do parâmetro *a* no comportamento do gráfico da função de referência.

4.4.1.2.2. Discussão da Tarefa

Foi destacado um aluno para ir até ao quadro escrever as conclusões relativas à investigação levada a cabo, tendo sido efetuado o seguinte registo:

À medida que o módulo de *a* assume valores mais elevados, o gráfico da função quadrática $y = ax^2$ vai contraindo. Se $\|a\|$>1, então o gráfico da função $y = x^2$ sofre uma contração e, se $\|a\|$<1, o resultado obtido é uma dilatação do referido gráfico.

Foram também esboçados no quadro, pelo mesmo aluno, os gráficos obtidos. Em seguida, é apresentada uma representação dos resultados obtidos:

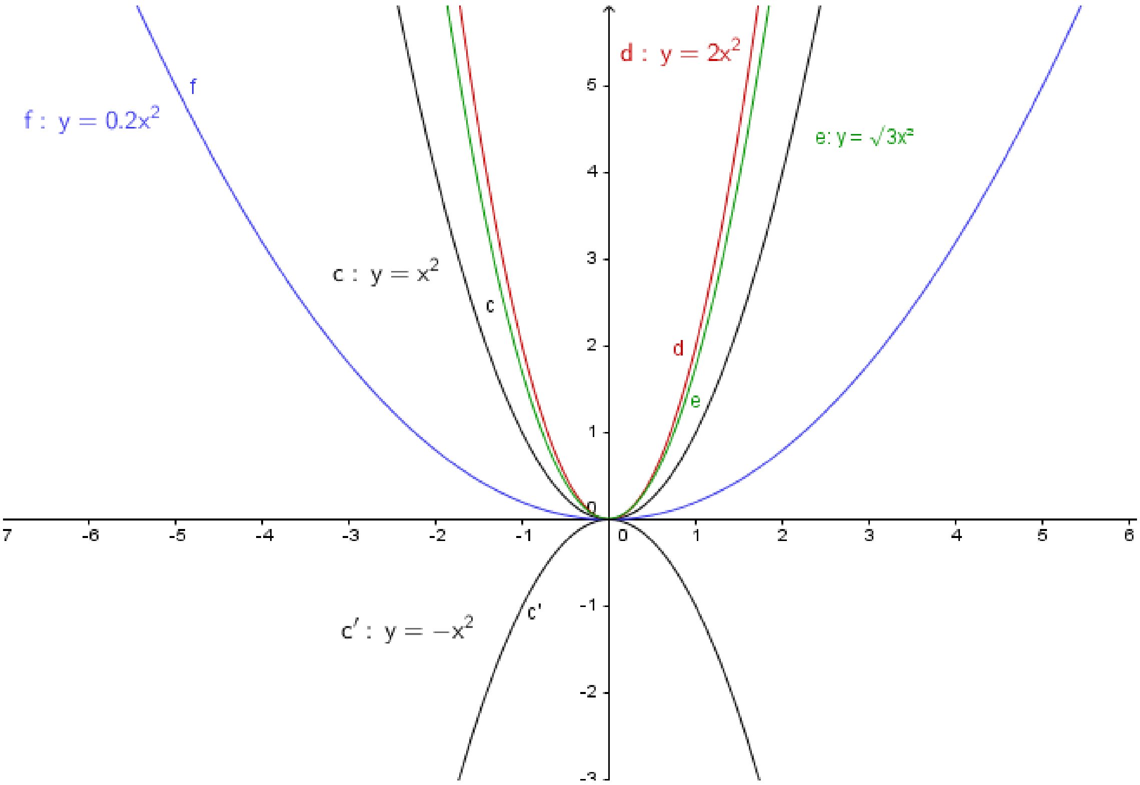


Figura 44: *Conjunto de parábolas que foram introduzidas na calculadora gráfica, possibilitando aos alunos a análise da influência do parâmetro a*

4.4.1.2.3. Tarefa de Consolidação

Foi, em seguida, proposta aos alunos uma tarefa de consolidação. Nesta, era dada uma função real de variável real f, definida por: $f(x) = 3x^2$, da qual se conhecia o seu gráfico, dado pela imagem apresentada em seguida:

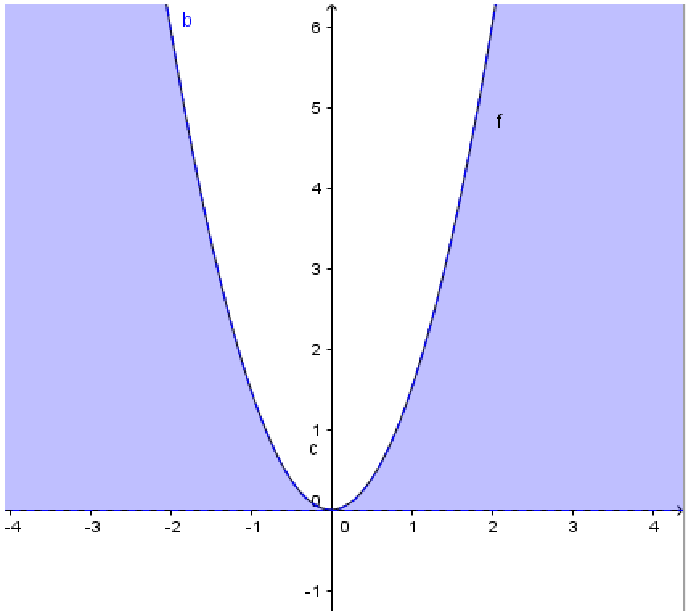


Figura 45: *O gráfico da função f e a representação de uma zona sombreada correspondente a transformações do gráfico da função f cujo resultado se traduz no seu alargamento*

Paralelamente, era dada uma função g, definida por: $g(x) = 2px^2, p \in \mathbb{R}$.

O objetivo passava por determinar os valores do parâmetro *p,* de modo que o gráfico da função g ficasse situado na região sombreada identificada na imagem anterior. Como a função f foi definida através da particularização do parâmetro *a*, tomado igual a três unidades, então, a questão essencial prendia-se com a escolha dos valores possíveis a assumir pelo parâmetro *a*, na definição da função g (estando este implícito através da expressão 2*p*, para algum *p* real), no sentido de o considerar superior ou inferior a três, de modo a resultar num alargamento do gráfico de f, ficando assim situado na região sombreada.

Para responder à questão, afigurava-se essencial a total assimilação da conclusão fundamental, de maneira a tornar-se possível a sua aplicação.

Os alunos, alguns deles através de consulta do resultado anterior, concluíram que o valor do parâmetro *a=2p* deveria ser estritamente inferior a três unidades de medida, o que originaria um alargamento do gráfico de f, como se pretendia, o que significava que p deveria assumir valores estritamente inferiores a dois terços.

4.4.1.2.4. Reflexão Sobre a Tarefa

Apesar de ser uma tarefa simples, revelou-se importante, pois funcionou como um instrumento de avaliação da compreensão da conclusão fundamental. Incentivou os alunos a recordarem a influência do parâmetro *a* no comportamento da função quadrática de base $f(x) = x^2$. Permitiu uma aplicação imediata do resultado, facilitando assim a sua compreensão e aquisição efetiva. Pelo facto da tarefa ser apresentada noutros moldes fez com que os alunos revissem a conclusão e que, mais uma vez, refletissem sobre ela, de modo a estarem inteiramente convencidos da sua validade.

Uma tarefa com estas características parece-me fundamental, pois origina uma revisão, uma confirmação, ou seja, permite que os alunos antecipem o seu estudo e o façam *in loco*, no decurso da aula, facilitando as aprendizagens e tornando-as mais sólidas.

Subsiste a preocupação em selecionar este tipo de tarefas: que exijam uma reflexão e que não sejam de aplicação direta, porque vão acrescentar algo mais, indo ao fundo da questão.

4.4.2. Aula de 5 de Fevereiro de 2015 – 90 minutos

4.4.2.1. Caso Particular: Família de Funções do Tipo:

$y = a(x-h)^2, a, h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

4.4.2.1.1. Introdução

Ao ser apresentada a família que iria ser estudada em seguida, foi colocada a questão à turma: a função definida pela expressão algébrica: $f(x) = a(x-h)^2$ pode ser considerada uma função quadrática?

Tendo em conta a definição analítica de função quadrática, a resposta à questão colocada somente seria positiva se fosse possível escrever *f(x)* na forma: $f(x) = Ax^2 + Bx + C,\ para\ alguns\ coeficientes\ A, B, C\ \in\ \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Portanto, era fundamental realizar a demonstração de tal ser efetivamente verdade, o que implicava a determinação dos coeficientes *A*, *B* e *C*.

Questionei a turma relativamente à existência de um voluntário para desenvolver o quadrado, ou seja, para aplicar um dos *casos notáveis da multiplicação*.

O aluno que se prontificou para resolver a tarefa procedeu do modo seguinte:

$$f(x) = a(x-h)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a(x^2 - 2hx + h^2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^2 - 2ahx + ah^2$$

Com a expressão algébrica que definia a função f escrita desta forma, facilmente o aluno deduziu os coeficientes que procurava, estando os mesmos diretamente relacionados com os parâmetros dados inicialmente: *a* e *h*.

Concluiu escrevendo:

$$A = a, B = -2ah \; e \; C = ah^2$$

De facto, todos os coeficientes são não nulos, justificada esta característica pela sua dependência relativamente aos parâmetros referidos.

Portanto, foi possível demonstrar que as funções pertencentes à família que iria ser estudada eram efetivamente funções quadráticas.

4.4.2.1.2. Tarefa Exploratória

Para dar início ao estudo da família $y = a(x-h)^2, a, h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, no sentido da compreensão relativa à influência do novo parâmetro *h*, (sendo que a ação de *a* já tinha sido estabelecida), foi proposta aos alunos a inserção nas suas calculadoras gráficas das seguintes funções:

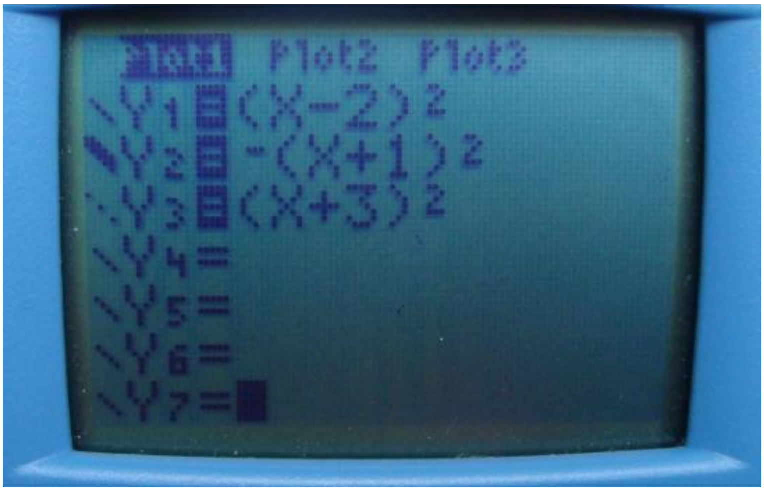


Figura 46: *Expressões algébricas de funções da família* $y = a(x-h)^2, a, h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *incluindo a legendagem relativa ao tipo de traço utilizado no esboço do gráfico*

Ou seja, a referida compreensão estava, mais uma vez, associada a um processo de investigação levado a cabo pelos próprios alunos. Os gráficos obtidos foram os seguintes:

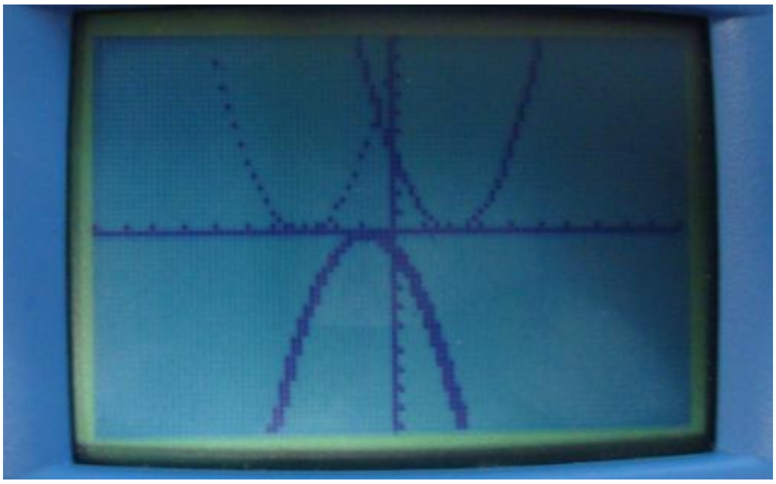


Figura 47: *Deslocamentos do gráfico da função* $y = ax^2$, *com a particularidade de ocorrerem sobre o eixo Ox*

Através da análise do sucedido, os alunos facilmente produziram as suas conclusões.

Um aluno foi ao quadro registar os resultados que obteve:

- Se h>0, o gráfico da função de referência $y = ax^2$ desloca-se para a direita h unidades.
- O seu vértice de coordenadas (0,0) transformou-se no ponto de coordenadas (h,0).
- Ocorreu um deslocamento do gráfico de referência, segundo o vetor (h,0).

Relativamente ao último dos pontos referidos no quadro acima, foi ainda realizada uma exploração mais pormenorizada.

Tomámos como elemento de partida um ponto do tipo (x, ax^2), pertencente ao gráfico de referência, ao qual foi adicionado o vetor (h,0), obtendo-se o ponto seguinte:

$$(x, ax^2) + (h, 0) = (x + h, ax^2).$$

O ponto resultante da operação de adição anterior pertence ao gráfico obtido pela transformação da função de referência.

Foi ainda realizado um esboço no quadro, de modo a ilustrar a transformação:

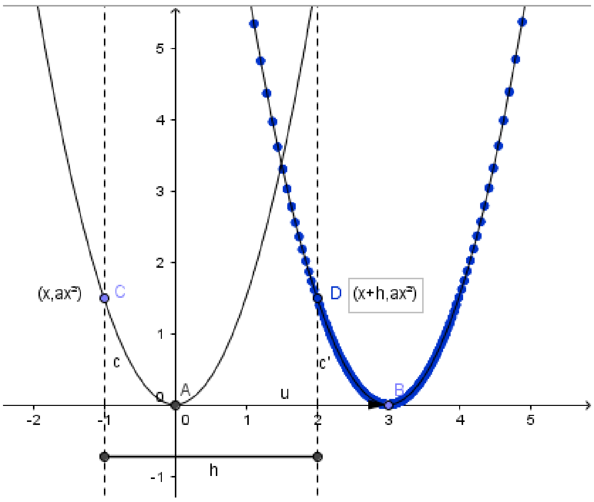


Figura 48: *Translação do gráfico de referência segundo o vetor de coordenadas (h,0), considerando h=3, a título de exemplo*

Um outro aluno colocou no quadro as conclusões análogas, relativas a h<0, tendo o cuidado de realizar as alterações significativas:

- Se h<0, o gráfico da função de referência $y = ax^2$ desloca-se para a esquerda $|h|$ unidades.
- O seu vértice de coordenadas (0,0) transformou-se no ponto de coordenadas (h,0).
- Ocorreu um deslocamento do gráfico de referência, segundo o vetor (h,0).

4.4.2.1.3. Processo Matemático de Referência

Determinação da expressão algébrica da função a partir do seu gráfico

Uma vez compreendidas as influências dos parâmetros *a* e *h* no comportamento do gráfico da função de base $y = x^2$, colocava-se uma outra questão importante: como obter a expressão algébrica de uma função da família $y = a(x-h)^2, a, h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, conhecido o seu gráfico? Mais especificamente, tendo informação sobre o vértice, o tipo de concavidade e pelo menos um ponto do gráfico, como poderiam encontrar a expressão algébrica?

Para responder a esta questão, recorremos a uma tarefa do manual, que ilustrava o gráfico da função, como se encontra representado na figura seguinte:

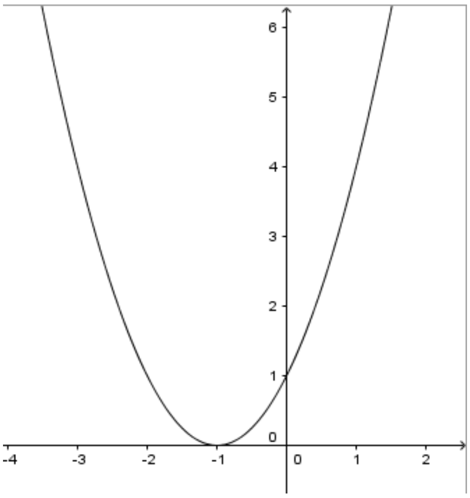


Figura 49: *Gráfico de uma função, da qual não se conhece a expressão algébrica*

Por observação do gráfico, retirámos dois elementos fundamentais: o facto de a concavidade ser voltada para cima, o que permitiu afirmar que $a>0$ e a constatação de que o vértice da parábola era o ponto (-1,0), pelo que, de acordo com as conclusões obtidas a partir da *tarefa exploratória*, significava que h deveria ser igual a -1. Deste modo, a equação do gráfico seria do tipo:

$$y = a(x+1)^2,$$

ou seja, estávamos a referir-nos a um deslocamento de uma unidade para a esquerda, a partir da origem.

Finalmente, o facto de o ponto (0,1) pertencer ao gráfico da função, significava que satisfazia a equação anterior. Desta forma, foi possível afirmar que:

$$1 = a(0+1)^2,$$

para o par $(x,y)=(0,1)$.

Da igualdade acima, resulta que $a=1$. Portanto, a expressão algébrica que define a função é unívoca e igual a:

$$y = (x+1)^2.$$

Este constituiu um exercício-tipo que foi por diversas vezes utilizado nas *aplicações da função quadrática*.

Um aluno foi ao quadro registar a sua resolução.

4.4.2.1.4. Reflexão Relativa às Opções Metodológicas

Surpreendeu-me a clareza com que os alunos assimilaram este procedimento matemático e a facilidade com que o transportaram para as aplicações. Este fenómeno fez-me refletir sobre a importância da compreensão profunda de cada raciocínio matemático que se produza nas aulas, assim como a relevância da avaliação da mesma por parte dos alunos. Esta postura ocorre por oposição à abordagem do ensino através da repetição e da realização exaustiva de exercícios. Esta forma, que durante décadas caracterizou o ensino que se praticava em Portugal, não oferece um contributo favorável para a motivação dos alunos, como nos é transmitido pela investigação realizada nesta área. Como tal, procurei enveredar por um modelo mais atual, modelo este, baseado na proposta aos alunos de tarefas motivantes e significativas para os próprios. Por este facto, optei por, neste momento, não repetir este exercício através de uma série de outros ligeiramente distintos. Guardei a consolidação para um contexto de cariz real, que pudesse constituir uma base para que os alunos, a partir de um problema em concreto, tomassem a decisão de o utilizar. A ideia passava por induzi-los a mobilizarem, em particular, este conteúdo, em referência à resolução de problemas no ensino da Matemática, que, como tem sido amplamente estudado, constitui um instrumento de captação de alunos, mostrando-lhes, de forma implícita, que os conhecimentos que adquiriram têm uma aplicação, o que lhes proporciona um sentimento de realização.

4.4.2.2. Caso Particular: Família de Funções do Tipo:

$y = ax^2 + k, com\ a, k \neq 0$

O estudo desta família de funções foi inteiramente análogo ao processo anteriormente descrito, ou seja, os alunos realizaram uma exploração na calculadora, recorrendo a quatro funções particulares e, em seguida, as conclusões a que chegaram foram registadas no quadro. Isto, para garantir a confirmação e a uniformização dos resultados da turma.

As funções inseridas na calculadora foram as seguintes:

a) $f\colon y = 2x^2 + 1$,

b) $g\colon y = -x^2 - 3$,

c) $h\colon y = 2x^2 + 5$,

d) i: $y = -3x^2 - \frac{2}{3}$.

Os gráficos obtidos surgem na imagem seguinte:

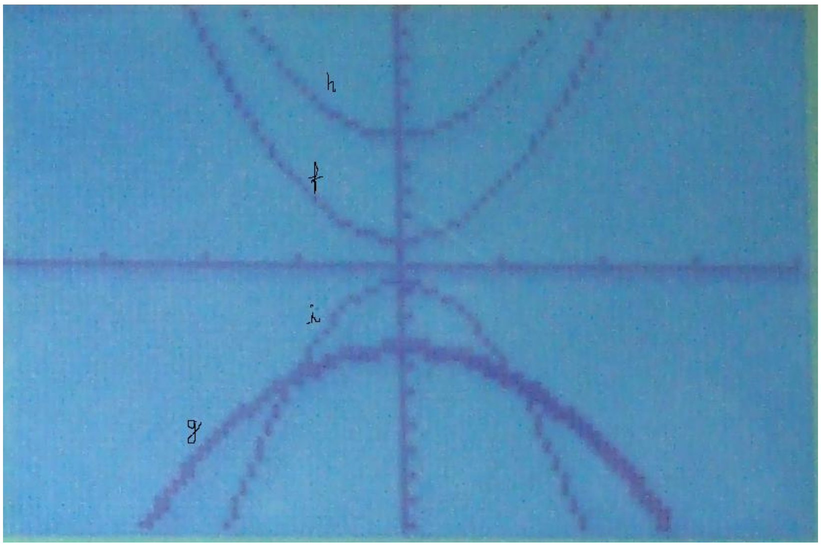


Figura 50: *Gráficos associados às funções f, g, h e i*

Também para este caso, os alunos facilmente obtiveram as conclusões expectáveis. O registo foi efetuado no quadro, como se ilustra em seguida:

- Se k>0, o gráfico da função de referência $y = ax^2$ desloca-se para cima, segundo o vetor (0,k), k unidades. Se k<0, o deslocamento realiza-se segundo o mesmo vetor, logo, ocorre para baixo, relativamente à sua posição inicial.
- O seu vértice de coordenadas (0,0) transformou-se no ponto de coordenadas (0,k), o que significa que o novo gráfico se situa sobre o eixo Oy.

4.4.3. Aula de 9 de Fevereiro de 2015 – 90 minutos

4.4.3.1. Caso Particular: Família de Funções do Tipo:

$y = a(x-h)^2 + k, com\ a, h, k \epsilon \mathbb{R} \backslash \{0\}$

4.4.3.1.1. Estratégia de Abordagem

A abordagem desta família, apesar de, em conteúdo, ter sido similar às anteriores, a verdade é que houve uma tentativa de alterar a sua forma, introduzindo uma dinâmica diferente; com vista a quebrar o registo anterior, que se baseava, como vimos, na exploração de vários casos utilizando a calculadora gráfica, seguida do registo das conclusões obtidas.

Para o efeito, foi distribuída aos alunos a ficha de trabalho (anexo G). O objetivo central da ficha era que os alunos associassem os parâmetros presentes na definição de uma função quadrática com as respetivas coordenadas do vértice da parábola associada. Existia ainda um objetivo secundário, mas que assumia grande importância na aprendizagem do conteúdo: o esboço dos gráficos das funções dadas, com o rigor possível, nomeadamente, atendendo ao vértice, ao sentido da concavidade e à característica de simetria de uma parábola.

4.4.3.1.2. Finalidade da Mini Ficha

Esta proposta de trabalho foi pensada não somente no sentido de incluir um conjunto de exercícios relevantes, mas essencialmente como um quadro de suporte, onde pudesse ser revisitado, *à posteriori*, o paralelismo existente entre a expressão paramétrica de uma função quadrática e as coordenadas do vértice do gráfico correspondente.

Pretendia-se criar um instrumento que favorecesse a memorização da referida inter dependência, para uso posterior. A tarefa (mini ficha) poderia vir a servir como elemento-chave no despertar da recordação associada a este conteúdo em particular, promovendo, deste modo, uma mnemónica de referência.

4.4.3.1.3. Realização da Mini Ficha

4.4.3.1.3.1. Primeira Parte

Para a realização da primeira parte da tarefa, estando esta relacionada com o esboço dos gráficos das funções dadas, era fundamental que os alunos utilizassem os resultados das análises relativas às três famílias de funções quadráticas previamente estudadas.

Iniciaram a conceção do esboço tecendo considerações relativas ao sentido da concavidade da parábola, por apreciação do parâmetro *a*. Em seguida, tomando como referência a parábola de equação $y = x^2$, os alunos refletiram sobre o seu deslocamento ao longo do eixo O*x*, por influência do parâmetro *h*, ou seja, concluíram que ocorreria um deslocamento para a direita, se *h* fosse positivo, e, para a esquerda, se *h* fosse negativo, sendo este igual a $|h|$ unidades. Finalmente, foi fundamental a recordatória do facto seguinte: o parâmetro *k* originaria uma subida ou descida de $|k|$ unidades do gráfico da função de base.

Num exercício de dissecação da estratégia envolvida na realização da tarefa, quer isto dizer que o processo de raciocínio utilizado pelos alunos passou por três momentos distintos, que eles conseguiram estruturar, pois correspondiam a resultados anteriormente obtidos. Esta evidência mostra-nos que seria dispensável sobrecarregá-los com informação adicional, que apenas aparentemente, poderia significar um novo conhecimento. Na verdade, a família de parábolas em questão, não é mais do que a junção dos três tipos previamente analisados, pelo que, no meu entender, fez todo o sentido proporcionar aos alunos um trabalho autónomo.

O toque final do esboço correspondia ao conhecimento exato relativo à dimensão da abertura da parábola, donde resulta que seria necessária a determinação de, pelo menos, um ponto do gráfico, distinto do vértice V (com coordenadas reais (v_1, v_2)), digamos $P(v_1 + \alpha, \beta)$, com α>0 e $\beta < v_2$., no caso de a concavidade ser voltada para baixo e $\beta > v_2$ no caso contrário. A propriedade de simetria definia necessariamente um outro ponto do gráfico: $P'(v_1 - \alpha, \beta)$.

4.4.3.1.3.1.1. Trabalho produzido pelos alunos

Desta forma, foi possível obter cada um dos esboços requeridos pela tarefa. Em seguida, são ilustrados os esboços referentes às funções dadas na ficha em questão:

$\boldsymbol{a)\ f(x) = -3(x-2)^2}$

$\boldsymbol{b)\ g(x) = (x+5)^2 - 2}$

$\boldsymbol{c)\ h(x) = -4x^2 - 1}$

$\boldsymbol{d)\ i(x) = 3(x-3)^2 - 4}$

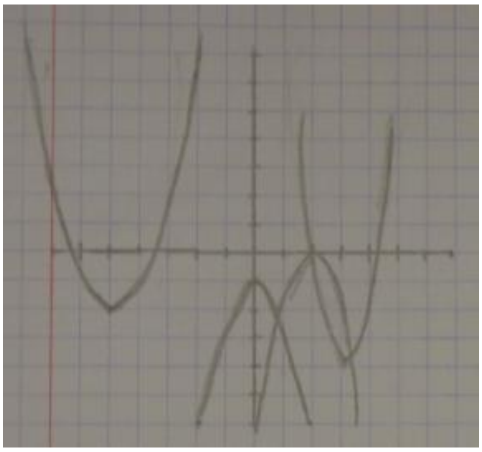
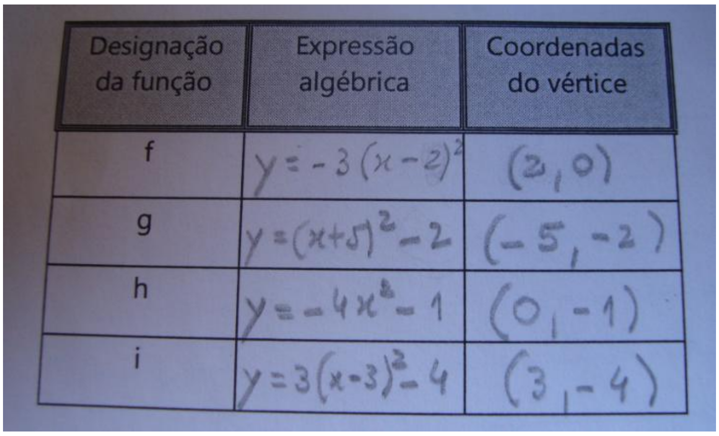


Figura 51: *Esboço dos gráficos das funções propostas na mini ficha, tendo por base o vértice V(v_1, v_2) de cada parábola e a noção de simetria relativamente ao eixo de simetria $x = v_1$; da esquerda para a direita (por ordem crescente da abcissa do vértice): gráficos das funções g, h, f e i*

4.4.3.1.3.2. Segunda parte

A segunda parte da ficha estava relacionada com o preenchimento do quadro que associava a expressão algébrica de cada uma das funções dadas com as coordenadas do vértice da parábola respetiva. Em seguida, podemos observar o referido quadro:



Designação da função	Expressão algébrica	Coordenadas do vértice
f	$y=-3(x-2)^2$	$(2,0)$
g	$y=(x+5)^2-2$	$(-5,-2)$
h	$y=-4x^2-1$	$(0,-1)$
i	$y=3(x-3)^2-4$	$(3,-4)$

Figura 52: *Quadro-resumo onde é possível comparar os parâmetros presentes na expressão algébrica com as coordenadas do vértice da parábola*

O resultado fundamental que se pretendia obter passava por uma compreensão da relação existente entre os parâmetros presentes na expressão algébrica e aqueles que faziam parte das coordenadas do vértice da parábola respetiva. Tomando, a título de exemplo, a expressão algébrica da função f, é possível observar que h=2 e k=0 e, simultaneamente, notamos que as coordenadas do vértice são precisamente (2,0), ou seja, iguais a *(h,k)*. Tendo em conta que tal se verifica para todas as funções em análise, os alunos puderam concluir que as coordenadas do vértice são sempre iguais a *(h,k)*, sendo *h* e *k* os parâmetros relativos à respetiva expressão algébrica.

Deste modo, foi registada no quadro, a conclusão seguinte:

Se uma função quadrática é definida por uma expressão algébrica do tipo: $y = a(x-h)^2 + k, com\, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\ h,k \in \mathbb{R}$, então as coordenadas do vértice do seu gráfico são dadas por *(h,k)*.

4.4.3.1.4. Avaliação da tarefa (mini ficha)

Após a realização da tarefa, os alunos deveriam conseguir obter as coordenadas do vértice de uma parábola a partir da expressão paramétrica da função associada, através de observação simples. Assistiu-se, como vimos, a uma ótica colocada no ensino exploratório, por oposição ao ensino expositivo. Os alunos chegaram ao resultado previsto, não tendo havido explicitamente uma transmissão por parte do professor, mas, de uma outra forma, investigando sobre aquilo que estava a acontecer matematicamente. Tenho a convicção de que se o facto constatado tivesse sido simplesmente transmitido pelo professor e os alunos o tivessem que memorizar, provavelmente, a durabilidade no tempo seria escassa. Tendo uma tarefa como suporte, existem uma série de elementos associados a esta que amparam a memória retida relativamente a este conteúdo. São asseguradas sinapses em número bastante superior, o que, certamente, se reflete num conhecimento matemático mais consolidado.

Desta forma, o ensino expositivo foi substituído pelo ensino exploratório sendo, mais uma vez, colocado este em primeiro plano. Recorrendo a esta metodologia, assistiu-se a uma captação de alunos eficaz, tendo em conta que foi inserido o fator surpresa. O processo de descoberta foi, mais uma vez, colocado nas suas mãos, não lhe chegando o resultado de antemão, constituindo um produto da sua investigação. A ótica do ensino surge colocada no experiencialismo, centrada na construção da teoria, de modo que, quando necessário, os aspetos fundamentais emerjam com naturalidade, muitas vezes, sem a necessidade de consultar o manual e/ou outros registos produzidos.

4.4.4. Aula de 11 de Fevereiro de 2015 – 90 minutos

4.4.4.1. Tarefa de Aplicação: Proposta 19 (manual)

4.4.4.1.1. Introdução

A proposta 19 referia-se a uma aplicação da função quadrática. Considerei que fazia sentido a introdução de uma aplicação, após ter sido implementado o quadro teórico referente ao tipo de deslocamento da parábola, em função da expressão algébrica da função. Tomei em linha de conta a importância de os alunos ganharem um novo fôlego motivacional e de encontrarem justificações que lhes incentivassem a prosseguimento do processo de aprendizagem. Esta tomada de consciência teve implicações ao nível da abordagem do conteúdo seguinte, ainda integrado no âmbito das *funções quadráticas*, que, desta forma, acabou por partir da realização desta proposta. Com efeito, a tarefa em questão, para além de oferecer um contexto real, funcionou como uma rampa de lançamento para o conteúdo seguinte. Novamente, se assistiu a uma tomada de opção ao nível do ensino, sendo este idealizado e realizado numa ótica experiencialista, onde os significados se constroem a partir de aplicações e experiências.

4.4.4.1.2. Realização da Tarefa

A tarefa em questão propunha-nos o seguinte problema:

O crescimento de uma certa espécie animal é dado, em função do tempo, por:

$$C(t) = \begin{cases} -0{,}5t^2 + t + 0{,}2 \; se \; 0 \leq t < 1 \\ 0{,}7 \; se \; t \geq 1 \end{cases}$$

onde as variável t e C(t) são mensuráveis, respetivamente, em anos e em metros.

4.4.4.1.2.1. Questões de Interpretação

A primeira questão estava relacionada com o comprimento do animal à nascença.

Para apresentar uma resposta adequada bastou calcular *C(0):*

$$C(0) = -0{,}5 \times 0 + 0 + 0{,}2 = 0{,}2\, m = 20\, cm.$$

Donde, foi possível concluir que, à nascença, o animal media 20 cm.

Relativamente ao comprimento previsto aos três meses de idade, houve a necessidade de realizar um raciocínio no sentido de compreender qual a correspondência destes em relação ao ano. Assim, os alunos concluíram que estes correspondiam a um quarto de um ano de idade. Desta forma, havia que determinar o valor de *C(t)* para $t = \frac{1}{4}$:

$$C(t) \cong 0{,}42\, m = 42\, cm,$$

concluindo-se que, aos três meses de idade, o animal media 42 cm.

No que respeita à questão relativa à idade em que o animal atingia a idade adulta, considerei importante destacar a indicação que referia que o animal, ao tornar-se adulto, parava de crescer. Isto significava que deveríamos procurar os valores constantes da função, constatando-se que esta era constante no intervalo $[1, +\infty[$. Naturalmente que o símbolo de infinito era meramente indicativo, pois o instante da morte era variável, de animal para animal.

O que se tornava importante era ter a perceção de que a função se tornava constante a partir do instante t=1, ou seja, a conclusão a retirar era que, quando o animal atingia um ano de idade, se tornava adulto.

Esta questão foi imediatamente procedida pela indagação relativa ao comprimento dos animais adultos da espécie em questão. Para a sua resolução, bastava referir o valor constante da função C:

$$C(1) \cong 0{,}7\, m = 70\, cm.$$

Finalmente, foi dada a resposta formal, expressando que o comprimento dos animais adultos desta espécie era igual a 70 cm.

4.4.4.1.2.2. Esboço do Gráfico

Para esboçar o gráfico da função foi essencial a utilização da calculadora gráfica. Isto porque, para valores de t entre 0 e 1, a função estava definida na forma canónica e, assim, não existia uma forma direta de determinar o vértice da parábola que lhe estava associada. Portanto, numa primeira fase, tomámos a calculadora como um instrumento fundamental.

4.4.4.1.2.3. Instrumentalização da Calculadora

Sendo *C* uma função definida por ramos, tornou-se importante relembrar aos alunos como deveriam proceder. Utilizando a projeção do *software TI- Inspire,* realizei as operações de suporte à introdução da expressão que definia a função na calculadora. Com efeito, começámos por colocar na entrada *"y=…"* a frase lógica seguinte:

$$y_1 = -0{,}5x^2 + x + 0{,}2/$$

onde o traço de fração pretendia significar a restrição "se". Após o traço de fração, foi necessário realizar a introdução:

$$(x \geq 0 \; and \; x < 1),$$

Recorrendo às funcionalidades "*second test" e "second test – logic"* para selecionar, respetivamente, as desigualdades anteriores e a conjunção "*and*".

Na segunda entrada de equação, bastou escrever:

$$y_2 = 0{,}7/(x \geq 1),$$

Para, assim, completar a definição da função.

A imagem seguinte ilustra o visor da calculadora após a referida introdução:

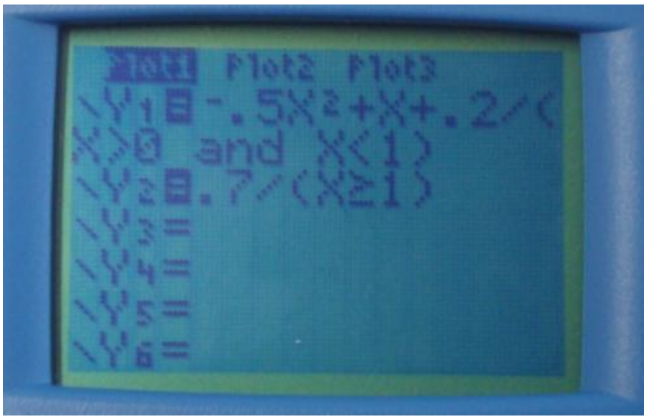


Figura 53: *Inserção na calculadora da função C, com a particularidade de estar definida por ramos*

A questão do *zoom* foi também relevante, porque acabámos por concluir, após algumas experiências, que tomando *x* e *y* no intervalo [0,2] era assegurada uma boa visualização, conforme aquela que podemos observar na figura seguinte:

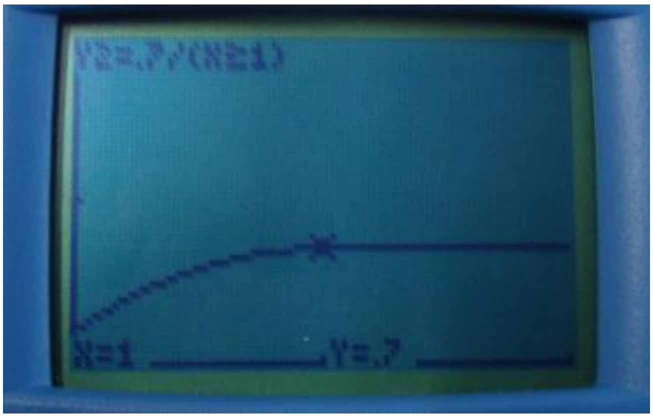


Figura 54: *Gráfico da função C onde se visualiza claramente a distinção entre as duas curvas (relativas a cada um dos seus ramos), sendo esta marcada pelo ponto x=1*

4.4.4.1.2.4. Interpretação Formal

Como vimos há pouco, a questão da calculadora era importante numa primeira fase, tendo em conta que este momento correspondia a um segundo contacto com a função definida na forma canónica, tendo o primeiro estado relacionado com a tarefa introdutória da função quadrática. No entanto, onde se pretendia chegar era possibilitar que os alunos, ao se depararem com uma expressão canónica, a conseguissem transformar numa estrutura do tipo:

$$y = a(x-h)^2 + k, com\, a, h, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\};$$

que, doravante, designaremos por *forma paramétrica*.

A forma paramétrica, como já estudámos, no último caso particular de funções quadráticas, permite-nos identificar, no imediato, as coordenadas do vértice da parábola, assim como nos possibilita o conhecimento relativo à posição exata da parábola num determinado referencial cartesiano e, ainda, nos fornece indicações respeitantes à dimensão da abertura e ao sentido da concavidade da parábola. Como tal, é uma forma de grande importância, sendo de igual interesse a noção relativa ao *processo de transformação*.

4.4.4.1.2.5. Processo de Transformação

Com vista a introduzir o referido processo, optei por executá-lo nesta tarefa, visto ser a primeira vez que era apresentado aos alunos, explicando-lhes os pontos fundamentais, o que originou a produção seguinte no quadro:

$$C(t) = -0{,}5t^2 + t + 0{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(t) = -0{,}5\left(t^2 + \frac{t}{-0{,}5}\right) + 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow C(t) = \mathbf{-0,5}(t^2 - 2t \mathbf{+1}) \mathbf{+0,5} + 0{,}2$$

$$\Leftrightarrow C(t) = -0{,}5(t-1)^2 + 0{,}7$$

Com a ajuda dos alunos, automaticamente obtivemos as coordenadas do vértice da parábola associada à função C: (1;0,7), sendo esta informação a principal vantagem da forma paramétrica.

De destacar, no raciocínio realizado, a construção da expressão:

$$t^2 - 2t + \mathbf{1} =$$

$$= (t-1)^2,$$

o que conduziu à introdução da constante *1*. No entanto, pelo facto de a expressão $t^2 - 2t + \mathbf{1}$ estar a multiplicar pelo fator *-0,5*, então, na prática, a constante introduzida não foi na realidade *1* e sim:

$$1 \times (-0{,}5) = -0{,}5,$$

pelo que, houve a necessidade de a neutralizar, adicionando o número simétrico: *0,5*.

Como constatámos, todo o processo circunda a questão do caso notável, que se pretendia introduzir. Desta forma, para este tipo de raciocínio é muito importante que os alunos estejam familiarizados com os *casos notáveis*.

4.4.4.1.3. Trabalho dos Alunos

A forma de trabalho dos alunos passou por um exercício autónomo, seguido da resolução, por alunos distintos, de cada uma das alíneas referidas.

Não surgiram dúvidas sobre a interpretação matemática das questões colocadas, havendo, também neste ponto, a evidência do nível elevado da turma.

A turma não evidenciou sinais de incompreensão do processo. Houve a preocupação de o compreenderem bem, havendo incentivos no sentido da repetição da explicação. Para além do que pudesse ser-lhes dito, creio que sentiram que este era um procedimento que continha um conteúdo que poderia ser aplicado noutros contextos, daí o cuidado na atenção que a este dedicaram. Solicitaram que lhes fosse apresentado um outro exemplo, o que me conduziu a propor-lhes como trabalho de casa a transformação na forma paramétrica da seguinte expressão canónica:

$$f(x) = 4x^2 + 9x + 3.$$

Este trabalho de casa foi, na aula seguinte, corrigido por um aluno no quadro, apresentando-se os seus cálculos em seguida:

$$\Leftrightarrow f(x) = 4\left(x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{81}{64}\right) + 3 - 4 \times \frac{81}{64}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4(x + \frac{9}{8})^2 + 3 - \frac{81}{16}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4\left(x + \frac{9}{8}\right)^2 + 3\frac{16}{16} - \frac{81}{16}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4(x + \frac{9}{8})^2 + \frac{48 - 81}{16}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4(x + \frac{9}{8})^2 - 33$$

Donde, foi possível extrair imediatamente que o vértice da parábola era o ponto de coordenadas $(-\frac{9}{8}, -33)$.

4.4.4.1.4. Reflexão sobre a Tarefa

É importante olharmos para esta tarefa como um exercício significativo do ponto de vista das aplicações.

Compreendermos que, por um lado, serviu de mote para o reconhecimento de uma aplicação da função quadrática, por outro, para a instrumentalização da calculadora, quando a forma em que a função se encontrava definida não possibilitava outro tipo de intervenção. No entanto, há ainda que encarar uma outra dimensão: o facto de constituir um elemento motivacional para que os alunos se apercebessem da necessidade de transformar a expressão algébrica inicial.

É importante o reconhecimento de que, ao partirmos de um contexto real, criamos uma necessidade efetiva e, deste modo, não temos simplesmente que resolver uma série de exercícios académicos, processo que é substituído por uma sucessão de tarefas relativas a um problema que existe na realidade.

Do ponto de vista do aprendiz, apesar de o conteúdo a apreender ser o mesmo, ele tem, desde o início, a resposta à questão: ”Para que serve esta matéria?”. Sendo certo que esta dúvida pode minar o desejo de aprendizagem, torna-se fundamental excluí-la do processo de aprendizagem.

Concluímos assim, que devemos olhar para a tarefa em várias dimensões e constatar que, a partir desta, se introduziu um processo importante, ainda que similar, por exemplo, ao processo de transformação da equação de uma superfície esférica dada na forma canónica, que os alunos já tinham estudado, e puderam, neste momento da aprendizagem, reforçar.

4.4.4.2. Tarefa de Aplicação: Proposta 18 (manual)

4.4.4.2.1. Introdução da Tarefa

A tarefa tinha como suporte a imagem seguinte:

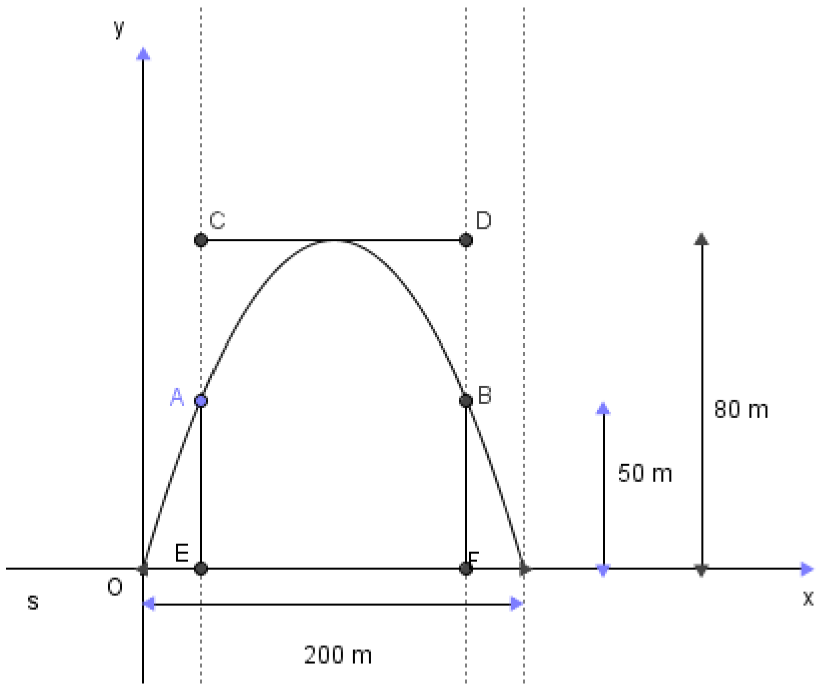


Figura 55: *O segmento de reta [CD] representa parte de uma estrada, cujo suporte (ponte) é representado pelo arco de parábola. O solo é interpretado pela reta s. Os segmentos de reta [AE] e [BF] representam dois pilares*

O enunciado referia que o arco era parte de uma parábola, sendo esta representativa da estrutura de suporte de uma ponte. O segmento de reta [CD] representava parte de uma estrada.

Uma das questões propostas estava relacionada com a escolha de um referencial adequado à representação da situação apresentada, tendo havido, por parte dos alunos, duas propostas.

Uma das quais, tinha como origem a extremidade esquerda do arco de parábola, conforme pode ser observado na figura seguinte:

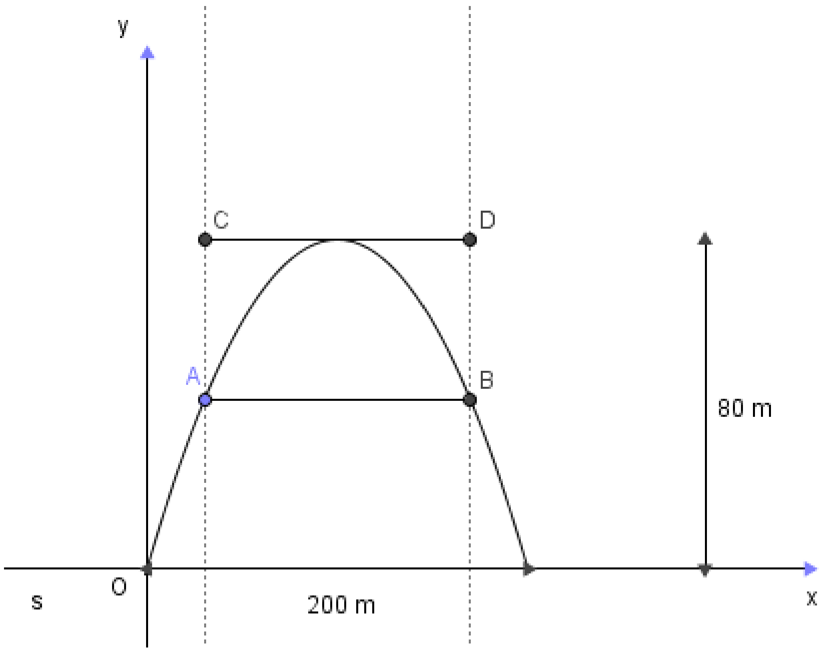


Figura 56: *Referencial escolhido de modo a que a origem fosse a extremidade esquerda do arco de parábola apresentado na figura*

A outra proposta admitia tomar para origem do referencial o ponto (M,0), onde M representava o ponto médio do segmento [A,B], conforme a imagem que se segue:

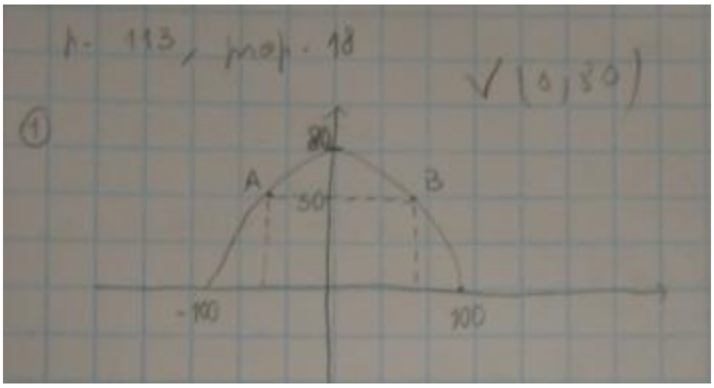


Figura 57: *Esboço realizado no quadro por um aluno, considerando o referencial em que o eixo das ordenadas é o eixo de simetria da parábola em análise*

Tal opção implicava a divisão do segmento cuja medida do comprimento era igual a 200 m em duas partes iguais, precisamente como nos mostra a figura precedente.

Para a resolução da tarefa no quadro, considerámos a segunda opção, por similaridade da sua congénere.

4.4.4.2.2. Realização da Tarefa

4.4.4.2.2.1. Primeira Questão

A escolha do referencial surge numa ótica introdutória e determinante para a resolução das questões propostas.

Após a referida escolha, a questão seguinte prendia-se com a determinação da *equação da parábola*.

De acordo com o que já tínhamos visto anteriormente, para obtermos a equação da parábola, era essencial o conhecimento dos parâmetros $a, h, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, parte integrante da equação genérica:

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

A questão natural, que foi colocada em primeiro lugar, estava ligada à determinação das coordenadas do vértice da parábola. Pelas condições da figura, a resposta surgiu imediatamente: a abcissa do vértice era igual a 0 e a ordenada era igual a 80 m, pelo facto de a altura da ponte ter precisamente esta medida. Consequentemente, obteve-se diretamente h=100 e k=80.

O ponto seguinte a considerar estava relacionado com o sentido da concavidade; concluindo-se que o parâmetro *a* deveria ser negativo, porque a concavidade era voltada para baixo. O valor exato deste parâmetro, de acordo com um raciocínio-tipo exposto anteriormente, foi obtido utilizando o conhecimento de um outro ponto da parábola, distinto do vértice, que, no caso, correspondeu ao ponto de coordenadas (100,0). Os cálculos efetuados e colocados no quadro podem ser observados na imagem seguinte, extraída do caderno de um aluno:

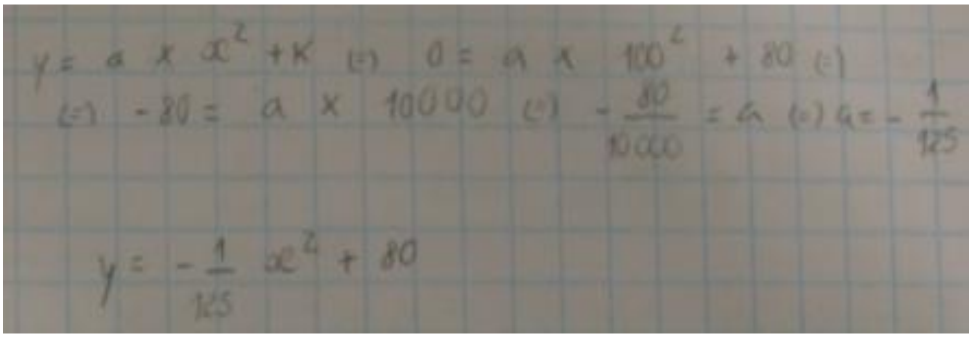


Figura 58: *Determinação da equação da parábola representativa da ponte:*

$$y = -\frac{1}{125}x^2 + 80$$

Foi ainda realizado um exercício de recordatória relativo ao facto de ser ou não expectável obter um valor bastante reduzido, em valor absoluto, para o parâmetro *a*. Para responder a esta questão, os alunos introduziram a expressão obtida na calculadora gráfica, com o cuidado devido na escolha da janela de visualização, concluindo que, em virtude da abertura considerável da parábola, era previsível que tal acontecesse.

Este momento foi planeado, por um lado, com a intenção de avaliar se os alunos tinham a capacidade de associar o tipo de valores obtidos para o parâmetro *a* com a dimensão da abertura da parábola, testando, desta forma, o nível de apreensão deste conteúdo específico. Por outro lado, havia também, da minha parte, o propósito de incentivar nos alunos o desenvolvimento do espírito crítico; útil para, eles próprios, validarem os seus raciocínios.

4.4.4.2.2.2. Segunda Questão

A segunda questão referia-se à determinação da *distância entre os pilares [AE] e [BF]*.

Foi importante notar que os pilares tinham precisamente a mesma altura: *y=50*. Após esta observação, os alunos consideraram apropriado encontrar os pontos de intersecção da reta y=50 com a parábola em questão. A finalidade estava relacionada com a descoberta das abcissas dos referidos pontos, pois a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo a estas associados era exatamente a distância entre os pilares.

Novamente, se afigurou a necessidade da utilização da tecnologia como meio de simplificação do processo intermédio na procura da solução (única) para o problema apresentado.

Recorrendo à calculadora gráfica, à semelhança do método aplicado na *tarefa introdutória da função quadrática*, os alunos optaram por introduzir as equações:

$$y = -\frac{1}{125}x^2 + 80$$

e

$$y = 50$$

recorrendo, paralelamente, a uma janela de visualização do tipo:

$$x \in [-100,100]$$

e

$$y \in [0,80],$$

obtendo, desta forma, a representação gráfica seguinte:

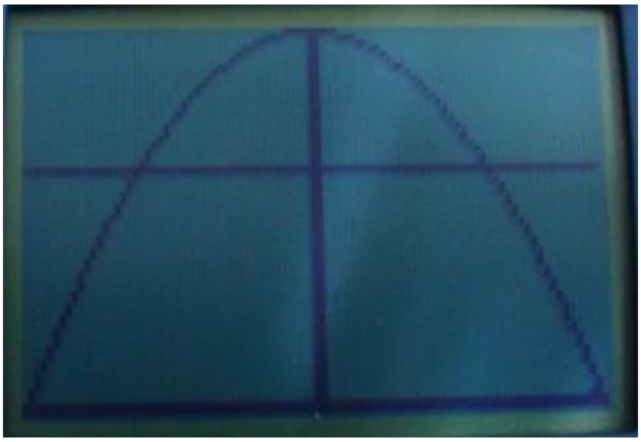


Figura 59: *Esboço na calculadora dos gráficos associados às expressões algébricas quadrática e linear*

Os alunos demonstraram recordar o procedimento a adotar, passando este pelo recurso ao comando *second calc – intersect.*

Tendo em conta o referencial escolhido, bastou procurar o ponto de intersecção cuja abcissa era positiva, digamos x_p. A distância entre os pilares seria igual ao dobro de x_p.

A economia registada na aplicação do processo anterior conduziu à conclusão seguinte: a escolha efetuada relativamente ao referencial tinha sido a mais adequada.

A imagem obtida relativa ao ponto de intersecção foi a seguinte:

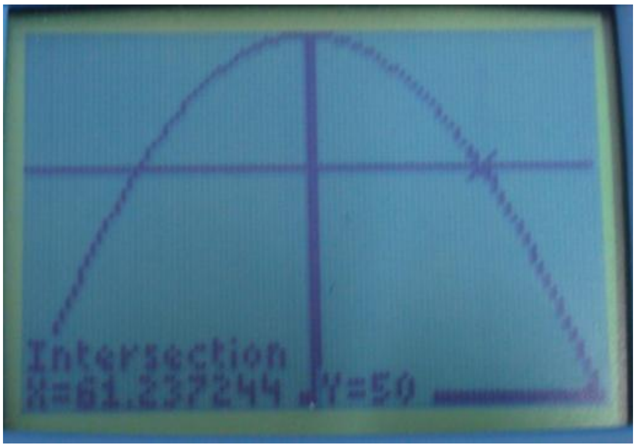


Figura 60: *Localização de um dos pontos de intersecção dos gráficos das funções em análise*

Arredondando às unidades, os alunos puderam registar o ponto de intersecção com as coordenadas (61,50).

Finalmente, apresentaram a conclusão: a distância entre os pilares era igual a 122 metros, ou seja, o dobro de 61 metros.

4.4.4.2.3. Reflexão sobre a tarefa

Como segunda tarefa de aplicação, cumpriu a função de mostrar a importância da teoria relativa à função quadrática. Transportou os alunos para um problema de Engenharia e, sob este pano de fundo, através de uma questão relevante do ponto de vista da aplicação, como sendo a distância entre os pilares, mobilizou os alunos a experienciarem a importância da expressão paramétrica de uma função quadrática e também a essencialidade da tecnologia como elemento de apoio na resolução de problemas de Matemática. Efetivamente, começou por criar um quadro teórico de suporte, que veio culminar na referida questão, o que desenvolveu nos alunos um sentimento de realização, no sentido da compreensão da necessidade da teoria na resolução de um problema em concreto.

4.4.5. Aula de 2 de Março de 2015 – 90 minutos

4.4.5.1. Introdução da tarefa

Começámos por introduzir o conceito de *modelação*.

Foi esboçada no quadro uma nuvem de pontos, correspondente a um fenómeno hipotético e, em seguida, colocadas as questões: "Será possível ajustar ao conjunto de dados uma curva? Poderia esta curva ser uma parábola?". Foi esboçada uma parábola sobre a nuvem dada, o que levantou mais questões: "A parábola ajustada parece ser um bom ajuste? É o melhor ajuste possível? Constitui um modelo representativo do fenómeno em estudo?".

Para além deste conjunto de questões, houve a preocupação de evidenciar que, a partir do momento em que obtivéssemos um modelo matemático adequado, a partir deste, seria possível realizar previsões, quer sobre os factos ocorridos no passado, quer sobre o futuro, relativamente à questão em estudo.

Acredito que este ponto era, de facto, relevante e continha uma intenção muito clara: motivar os alunos na investigação do modelo ótimo, quando lhes fosse apresentada uma situação a analisar. Ou seja, a minha visão estava direcionada para a tarefa que lhes ia propor em seguida. Era precisamente deste tipo o problema com que se iam debater na prática: a descoberta do melhor modelo possível, ou, por outras palavras, a modelação de um fenómeno concreto.

4.4.5.2. Realização da Tarefa

Tendo por base a ficha sobre Aplicações das Funções Quadráticas (anexo I), os alunos continuaram nesta aula a resolver as questões propostas.

Foi de forma fácil que os alunos associaram os valores da variável "x: tempo": 0, 1, 2,… com a sua correspondência real, em anos concretos: 1995, 1996, 1997…

Os dados obtidos por contagem do número de lobos (y: variável dependente) foram introduzidos pelos alunos nas suas calculadoras gráficas. A estratégia de ensino utilizada passou pelo recurso ao instrumento tecnológico *software TI – Smartview*, que possibilitou a projeção da calculadora inspire. Desta forma, foi possível exemplificar como poderiam fazer a introdução dos dados. O caminho passou pelo comando *stat – edit* – inserção dos dados na tabela – ajuste dos valores da janela –*statplot*- para definir o tipo de gráfico pretendido e, finalmente - *graph*, para visualizar a nuvem de pontos. O objetivo era visualizar a nuvem de pontos no visor da calculadora. Neste processo, foi fundamental que os alunos compreendessem entre que valores as variáveis independente e dependente variavam. Bastou, para o efeito, analisar os valores que surgiam nas entradas dos dados e colocar x pertencente ao intervalo [0,15] e y no intervalo [350,1050]. Foi dada uma margem aos valores que faziam efetivamente parte dos dados, tendo em conta a necessidade de visualização na calculadora.

A ideia da visualização estava intimamente ligada à criação de uma imagem do comportamento do fenómeno em estudo: a evolução de uma população de lobos, ao longo do tempo, no habitat considerado. Desta imagem, deveria retirar-se a noção do comportamento "quadrático" do fenómeno em questão e também fazer emergir as coordenadas do vértice da parábola implícita na relação em estudo. Os alunos optaram por considerar para o vértice o ponto dos dados com maior ordenada, tendo em conta que o objetivo era o de estimar, em primeiro lugar as coordenadas do vértice. Seguidamente, escolheram um ponto, também de entre os dados, mas que tivesse a particularidade visual de estar inserido numa curva parabólica imaginária passante no vértice estimado. Com o vértice da parábola estimada igual a (8,1000) e um ponto arbitrário do seu gráfico, os alunos puderam partir para a determinação da equação do gráfico: $y = a(x-h)^2 + k, a, h, k \neq 0$. As expressões obtidas estiveram próximas de: $y = -32(x-8)^2 + 1000$, para a maioria dos grupos. As várias expressões similares a esta, cada uma delas encontrada por cada grupo de alunos, foram introduzidas na calculadora, de modo a ficarem sobrepostas à nuvem de pontos. Idealmente, tal deveria acontecer.

Neste ponto, surgiram questões relacionadas com as transformações de funções quadráticas, o que veio de encontro a um dos meus objetivos: a aplicação deste tema num exemplo concreto, de cariz real. Uma das questões prendia-se com a forma de deslocar o gráfico da função $f(x) = -32(x-8)^2 + 1000$ ao longo do eixo Ox, no intuito de passar pelo maior número de pontos possível. Verificou-se, na maioria dos casos (surgidos nos grupos), que o valor 8 era ligeiramente elevado, pois o gráfico obtido encontrava-se subtilmente deslocado para a direita, relativamente à nuvem de pontos. Desta forma, os alunos prontamente sugeriram que deveríamos reduzir em 0.5 o valor 8, ou seja, considerar 7.5. Surgiu ainda a questão da abertura da parábola se encontrar desfasada da nuvem de pontos, havendo a necessidade de realizar uma contração do gráfico. Novamente, os alunos devolveram-me um feedback extremamente positivo, pois, sem registo de equívocos, assertivamente, sugeriram que o valor do parâmetro *a* deveria aumentar em valor absoluto. Nos grupos minoritários, nos quais o valor de *a* se encontrava distante do valor necessário, os alunos procederam de modo exploratório e, progressivamente, foram obtendo gráficos mais próximos da nuvem de pontos, até chegarem à conclusão que um valor de *a* próximo de -32 seria o mais adequado.

A partir do momento em que todos os grupos tinham obtido conclusões similares, foi importante esclarecer, até porque foram surgindo questões, o seguinte: a nuvem inicial de pontos era agora algo que não seria doravante tido em linha de conta, sendo apenas relevante considerar a função obtida, com a qual seriam determinadas ocorrências passadas e realizadas previsões futuras. Dentro dos fenómenos ocorridos, estavam o valor máximo atingido pela população e o ano em que este número tinha sido atingido. Para a sua determinação, e partindo do pressuposto que a expressão da função estava inserida em "y=…" na calculadora, era necessário selecionar a opção *second calc* – 4: *maximum* e, em seguida, definir o limite esquerdo e o limite direito, de modo que a calculadora determinasse o valor máximo atingido pela função, ou seja, devolvesse o valor 1000, correspondente a x=7.5. Para determinar o ano correspondente a este valor de x, bastou ir ao gráfico dado na ficha de trabalho e encontrar qual o ano correspondente a 7, que era o ano de 2002. Isto porque o enunciado referia que o ano 0 (zero) correspondia a 1995.

A próxima questão dizia respeito à previsão do ano de extinção da população. Os grupos, em geral, apresentaram uma boa associação de ideias entre a extinção e a determinação do zero mais elevado da função. Optaram, desta forma, por fazê-lo, através da calculadora, com o comando *second calc – 2: zero* ou *5: intersect*, sendo neste caso necessária a introdução auxiliar da equação y=0, chegando à conclusão de que o zero que procuravam era $x = 13.09$. Tiveram que atribuir um significado ao valor encontrado, pensando que ao longo do "ano de ordem 13" se estaria a fazer referência ao ano de 2008, concluindo que a extinção da população teria ocorrido neste ano.

Pretendia-se ainda responder a uma questão relativa ao período de tempo durante o qual o número de indivíduos tinha sido inferior a 800. O método de resolução passou pela introdução na calculadora da reta y=800, mantendo ativadas a função estimada e esta reta, com o objetivo de visualizar o modo de intersecção e, em seguida, determinar os pontos onde a intersecção ocorria. Os alunos puderam observar que tal ocorria para $x = 5$ e $x = 10$. A ideia central era agora a de compreender, em termos de anos, o que estes valores representavam, o que fez emergir os anos de 2000 e 2005. Portanto, a resposta desejada e concretizada era que a população tinha tido uma dimensão inferior a 800 entre os anos de 1998 (ano da introdução dos primeiros indivíduos da população no *habitat* em questão) e 2000 e entre 2005 e 2008 (ano da extinção da população).

Na resposta a esta questão, era importante compreender o significado do domínio da função e que este correspondia ao intervalo [3.29,13.09], correspondendo o valor 3.29 ao momento da introdução dos primeiros indivíduos e 13.09 teria correspondência ao momento de extinção da população. Foi importante fazer uma chamada de atenção para o facto de não ser possível colocar o intervalo [1998,2008], pois a função, tal como foi construída, não admitia os valores contidos neste intervalo. Este representou um momento relevante na aula, porque foi estabelecido um paralelismo tão importante quanto frequente entre o domínio de uma função e o seu significado, tendo em atenção o contexto em que o problema se insere. Este tipo de associações, contribui para a efetiva compreensão da matemática quando, em face de um resultado, os alunos conseguem interpretá-lo, evidenciando que houve da sua parte compreensão dos procedimentos e das conclusões a que chegaram, constituindo os primeiros meios de obtenção de um determinado fim bem definido.

Por fim, a tarefa requeria a determinação do valor do acréscimo da população entre os anos de 1998 e 2001. Para o efeito, era necessário encontrar a diferença entre os valores da função assumidos em x=3 e x=6, respeitantes a 1998 e 2001, respetivamente. Foram consideradas duas formas de abordagem possíveis. Poderiam substituir x por 3 e depois por 6 na expressão da função estimada e calcular as ordenadas associadas, ou então, recorrendo à calculadora, teriam a possibilidade de utilizar o comando *second table*, que apresenta os valores assumidos pela função, desde que seja definido um início para os valores da variável independente e uma distância constante entre cada um destes valores (em *second table set*). Deste modo, eram dados, no imediato, f(3) e f(6), bastando fazer f(6)-f(3) para encontrar o acréscimo verificado no número de lobos, obtendo-se o valor 576. Em certos grupos, pelo facto de existirem pequenas discrepâncias nas funções estimadas, como já foi referido, surgiram números aproximados de 576, no entanto, apresentando casas decimais. Levantou-se novamente a questão da interpretação. Os alunos referiram a necessidade de recorrer a um arredondamento, tendo em conta que o número em questão se referia a um número inteiro.

Surgiu ainda uma possibilidade de interpretação do próprio enunciado, o que se revelou pertinente. Um aluno encarou a questão como sendo "entre o início do ano de 1998 e o fim do ano 2001" o que o levou a considerar x=7, ao invés de x=6. A opção tomada foi esclarecer que a questão, na forma como estava colocada, dava origem a duas possíveis interpretações, sendo necessário acolher ambas.

4.4.5.3. Apresentação / Discussão da tarefa

Foi estabelecido o ponto da situação, em que todos os grupos tinham chegado a expressões similares para a função f. Foi escolhido um grupo para a apresentação oral e um dos seus elementos dirigiu-se ao computador da sala de aula para introduzir os dados empíricos do problema no software TI – Smartview, permitindo a toda a turma a visualização da nuvem de pontos, que deveria apresentar-se exatamente igual para todos os grupos. Um outro elemento do grupo inseriu no software TI – Smartview a expressão da função estimada e procedeu ao ajuste da janela de visualização, obtendo-se um efeito visual de uma parábola com a concavidade voltada para baixo, ajustada à nuvem de pontos, como era nosso objetivo. Os elementos do grupo foram passando a vez ao próximo e todos eles responderam a pelo menos uma questão da tarefa. Na questão dos zeros, foi importante incentivar a escrita formal:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$$

obtendo-se os valores encontrados através da calculadora. Considerei importante realçar que o que estávamos a procurar eram na realidade as soluções de uma equação, pelo que seria importante esclarecer quem nos lê sobre aquilo em que consistem os nossos raciocínios. Por seu lado, também como meio de incutir o hábito do rigor, em cada procedimento matemático. Persistia na turma a ideia generalizada de que, indo à calculadora, bastaria depois colocar na folha ou no quadro, os valores obtidos, o que fiz questão de desmistificar. Como já foi referido, na realidade o que procurávamos era o maior zero da função, pelo que foi necessário que o aluno no quadro escrevesse a razão pela qual não considerava o zero inferior. Tal devia-se ao facto incontornável de este zero não pertencer ao domínio da função, evitando outras possíveis considerações.

4.4.5.4. Reflexão sobre a utilização da tecnologia nesta aula

Gostaria de apresentar a minha perspetiva sobre a utilização da tecnologia nesta aula. A sua importância é completamente evidente, bastando para tal, imaginarmos se existiria esta tarefa sem ela. O facto de todos os alunos possuírem uma calculadora permitiu-lhes explorar várias possibilidades de funções quadráticas e escolher aquela que melhor se ajustava aos dados. Tiveram de desenvolver raciocínios relativos às transformações de funções e assistir, na primeira fila, às consequências das suas diretrizes, podendo, inclusivamente desmistificar conceções erróneas, quando o gráfico da função verificasse uma alteração contrária ao que esperavam. Puderam, desta forma, consolidar os seus conhecimentos sobre este tópico da matéria, de uma forma aplicada e, acredito, desafiante e estimulante. Assumiram o papel de investigadores e, sem consultar a teoria ou exercícios previamente abordados, tiveram a capacidade de resolver o problema que lhes era proposto. A tecnologia devolveu-lhes a validação das suas conceções e permitiu-lhes ainda responder a um conjunto de questões. Na prática, foi o equivalente a cada aluno possuir o seu computador pessoal, o que evitou a deslocação da turma para a sala de informática.

4.4.5.5. Reações dos alunos

A utilização da tecnologia de modo individual gerou um poder motivacional, porque tal permitia que cada aluno, ainda que inserido num grupo, pudesse pensar sobre o problema com autonomia, acrescida a vantagem do apoio do grupo, sempre que tal fosse necessário. Considerei importante motivar os alunos no sentido da entreajuda intra grupos, relembrando que se um elemento estava com dificuldades e outro não, então uma das funções do grupo era ajudar o aluno a sair da situação de bloqueio, apesar de não dispensar a minha ajuda. O essencial era compreenderem que o grupo é idealmente uma unidade de funcionamento tão autónoma quanto possível, esgotando-se esta característica quando os elementos do grupo, em conjunto, não possam obter uma conclusão satisfatória.

4.4.6. Aula de 4 de Março de 2015 – 1ª parte da aula de 90 minutos

4.4.6.1. Aplicação nº2 das Funções Quadráticas (anexo H)

4.4.6.1.1. Introdução da Tarefa

O problema apresentado referia-se a uma função que descrevia a evolução da altura de um objeto ao longo do tempo, tendo este a particularidade de ter sido arremessado de uma plataforma com 58.8 m de altura,.

A opção tomada passou por apresentar um gráfico que exibisse a parábola "inteiramente" desenhada, ou seja, não havendo a preocupação de colocar a tracejado os pontos que não pertencessem efetivamente ao domínio da função, precisamente para dar a liberdade aos alunos de refletirem sobre o significado que deveriam atribuir ao esboço.

Tal opção afigurou-se algo controversa, pois, alguns dos alunos, pretendiam determinar o domínio da função baseando-se, em primeiro lugar, no facto de esta se representar por uma expressão algébrica do tipo polinomial do segundo grau e, em segundo lugar, no facto de o gráfico se apresentar "na sua totalidade". Esta questão foi debatida. Expliquei-lhes que, em problemas de contexto real, não podemos analisar isoladamente a expressão dada pois, para certos valores da variável independente, a representação da função poderá não ter significado. No caso concreto, a variável independente representava o tempo, que apenas poderia tomar valores não negativos e a variável dependente representava a altura do objeto, que, para além de assumir valores do mesmo tipo, tinha ainda a particularidade de atingir um valor máximo absoluto (Max s), pelo que, o intervalo de valores do contradomínio deveria ser [0,Max s].

4.4.6.1.2. Realização da Tarefa

Dada a forma parabólica do gráfico da função s, verificava-se a existência de dois zeros, digamos t- e t+, ainda que apenas um deles pertencesse ao domínio da função s (t+>0), o que também conduzia os valores da variável t a uma limitação à direita, precisamente dada por t+.

Esta clarificação era tanto mais importante, pelo facto de ser necessária uma tomada de decisão relativa aos valores a colocar na janela de visualização, acabando por ser decidido que t deveria pertencer ao intervalo [0,7] e y=s(t) ao intervalo [0,80], facultando uma margem de visualização.

A transformação da expressão da função dada numa expressão do tipo: $y = a(x-h)^2 + k, a, h, k \neq 0$ poderia passar pela determinação do vértice da parábola (h,k) em consonância com a utilização de um ponto à escolha do gráfico da função, como tínhamos visto anteriormente. No entanto, o que se procurava era chegar à expressão geral partindo diretamente e de forma analítica da expressão inicial. O objetivo estava relacionado com a aplicação de um dos casos notáveis, com o pressuposto da consolidação deste método, gerada a partir de uma exploração matemática.

Mais concretamente, pretendíamos transformar a expressão s(t) numa forma algébrica equivalente, como podemos observar em seguida:

$$s(t) = -4.9\,t^2 + 19.6\,t + 58.8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4.9\left(t^2 - \frac{19.6}{4.9}\,t + A\right) + 58.8 + 4.9A, para\ algum\ A > 0.$$

Portanto, designando a expressão entre parêntesis por E(t), resulta que

$$E(t) = (t - \frac{A}{2})^2.$$

Consequentemente, obtivémos uma expressão equivalente para *s(t)*, dada por:

$$s(t) = -4.9\,(t - \frac{A}{2})^2 + 58.8 + 4.9A.$$

Verificámos que o único valor possível para A seria A=4, o que conduzia a uma concretização do termo independente:

$$58.8 + 4.9A = 78.4.$$

Desta forma, teve lugar um processo de consolidação do método de transformação de uma expressão quadrática canónica numa expressão geral, com recurso aos casos notáveis.

4.4.6.1.3. Opções metodológicas

A ideia subjacente a esta tomada de opção está ligada a uma conceção que parte do pressuposto seguinte: a Matemática deve fazer sentido, ser aplicável e basear-se em necessidades concretas. Creio que é importante que os alunos desenvolvam processos matemáticos a partir da experiência matemática. Por oposição à resolução metódica de exercícios, a ótica surge colocada nas razões que justificam o recurso a processos lógicos bem determinados, estando, assim, o desempenho dos alunos impregnado de conteúdo motivacional desde o início. O porquê de optar por um processo e não outro constitui algo que deve ser compreendido e sentido como efetivo (possuir um caráter significativo).

PROJETO DE ESTÁGIO

Introdução

No âmbito do projeto de estágio foram implementadas duas aulas na sala de informática. Pretendia-se que os alunos tivessem um primeiro contacto com o programa GeoGebra, constituindo esta experiência o mote para o aprofundamento de algumas das aprendizagens veiculadas ao longo do ano letivo. A opção tomada passou por ter por base destas aulas uma <u>ficha de trabalho como suporte (anexo J)</u>, que orientasse os alunos no próprio programa, servindo como uma ferramenta que lhes conferia autonomia na sua operacionalização. As tarefas propostas foram criadas especificamente para o Projeto e a sua formulação de base assentou em problemas de Geometria Tridimensional.

5.1. CONTEÚDO DAS AULAS

O Projeto de Estágio traduziu-se em duas aulas, ambas lecionadas na sala de Informática TIC2 à turma 10ºCT2. Os alunos foram distribuídos pelos computadores em grupos de 2 ou 3 alunos, tendo como suporte uma ficha de trabalho (anexo I), distribuída a cada aluno individualmente. A referida ficha de trabalho continha três tarefas decompostas em várias alíneas e deveria ser realizada com recurso ao *software* GeoGebra.

A temática do Projeto estava relacionada com o estabelecimento de um paralelismo entre a Geometria e as Funções. Desta forma, foram concebidas tarefas de modo a cumprir este requisito.

Cada uma das tarefas partia de uma figura tridimensional, composta por uma combinação de sólidos geométricos, na qual foram identificadas duas variáveis, correspondentes a duas grandezas matemáticas, estando uma delas na dependência da outra.

5.1.1. Primeira Tarefa

Em seguida, é apresentada a primeira das tarefas realizadas, cuja imagem de referência se encontra em seguida:

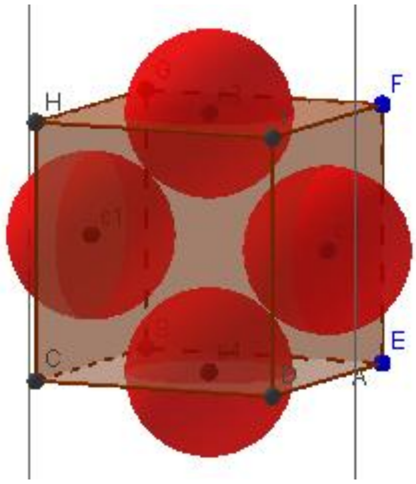


Figura 61: *Cubo contendo 4 semiesferas*

Nesta, as variáveis definidas foram *V: volume do corpo constituído pelo interior do cubo não preenchido por partes das esferas* e *r: raio de cada uma das esferas.*

Naturalmente, V encontrava-se na dependência de r, aumentando os seus valores quando os valores de r diminuíam, ou seja, a função V(r) representava uma função decrescente.

As questões propostas estavam direcionadas no sentido de os alunos obterem a expressão algébrica e o respetivo gráfico da função V(r), havendo um prelúdio relativo à própria construção da figura, com a particularidade de esta conter a dinâmica provocada pelo seletor r, previamente criado. Finalmente, o quadro interrogativo procurava obter previsões para V, a partir de r, ou vice-versa, nomeadamente através de questões associadas à determinação do raio correspondente ao volume máximo.

Uma das particularidades desta tarefa, dizia respeito ao facto de toda a construção partir do seletor, ou seja, apenas após a criação do seletor foi possível criar cada uma das esferas, tendo originado nestas uma dinâmica associada à sua dependência de r. Na criação do seletor, a ficha de trabalho dava a indicação do valor máximo que este poderia atingir, igual a $2\sqrt{2}$. Após a construção total da figura, os alunos puderam percecionar que este era o valor máximo que r poderia tomar, de modo que não houvesse intersecção entre o interior das esferas, tocando-se duas a duas num único ponto comum às suas fronteiras. Desta forma, foi assegurada a coerência do exercício, já que o volume do corpo em questão poderia assim ser obtido simplesmente pela diferença entre o volume do cubo e o volume de duas das esferas, não subsistindo a problemática da intersecção.

Relativamente ao gráfico da função V(r), este deveria ser gerado através da opção *"Lugar Geométrico"*, o que implicava a criação do ponto do lugar geométrico pretendido: (r,V(r)), tendo em conta que é esta a forma de um ponto do gráfico de V.

Na imagem seguinte, extraída de um dos ficheiros produzidos pelos alunos, o ponto M é móvel e, ao ser animado o seletor, desloca-se ao longo do gráfico da função, mas apenas no intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$. O que observamos é que, ao colocar a expressão algébrica do volume, o programa devolveu-lhe o gráfico no domínio $\mathbb{R}$.

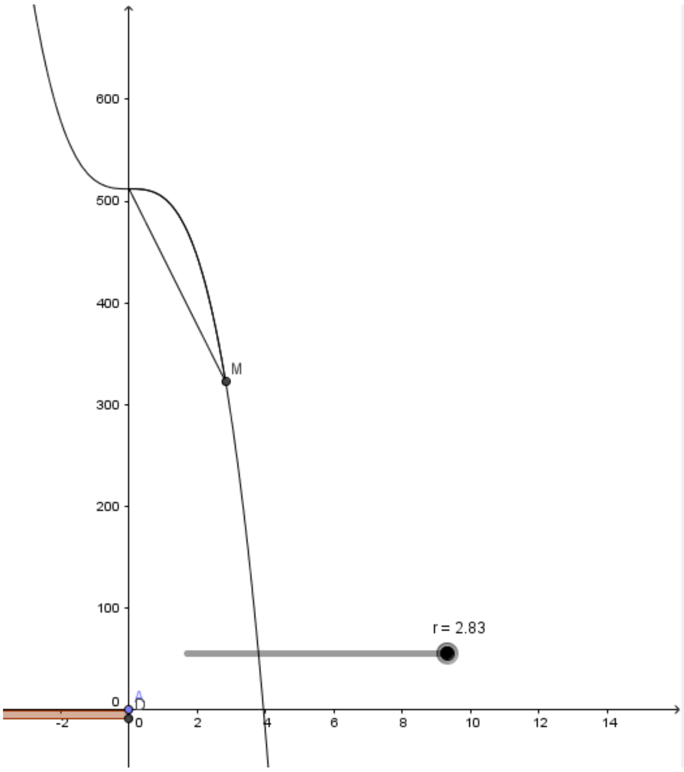
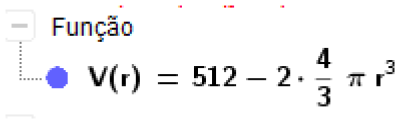


Figura 62: *Gráfico obtido associado à função em estudo*

Em seguida, podemos observar a expressão inserida, onde o número 512 representa o valor do volume do cubo com aresta de 8 cm e a expressão $\frac{4}{3}\pi r^3$ se refere à fórmula de cálculo do volume de uma esfera.



No gráfico representado, observamos ainda um segmento de reta, definido no mesmo intervalo, que está associado à taxa de variação média da função V no intervalo em questão e que acaba por nos dar uma indicação relativa à intensidade de decrescimento da função. Este segmento de reta surge de forma automática, ao mesmo tempo que aparece o gráfico da função.

5.1.2. Segunda Tarefa

A tarefa nº2 surgiu apresentada sob a forma de um modelo de embalagem obtido por seccionamento de um cubo de aresta l, com base pertencente ao plano z=0, por um plano de corte ortogonal a este plano: o plano BMK, conforme podemos observar na imagem:

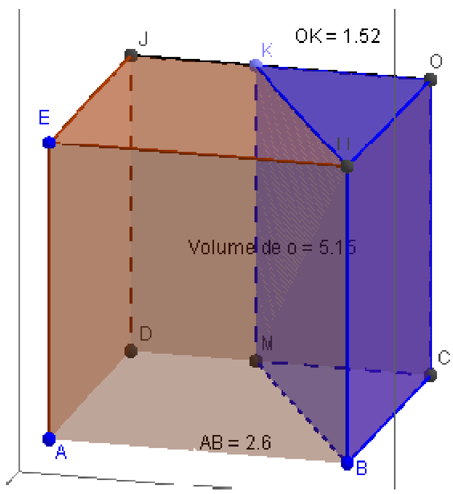


Figura 63: *O plano de corte BMK seccionou o cubo em dois prismas. Os valores que surgem na imagem são meramente exemplificativos*

Desta forma, a embalagem surgia composta por dois sólidos geométricos, designadamente, um prisma triangular e um prisma cuja base era um trapézio retângulo escaleno.

Pensando numa abordagem em contexto real, poderíamos conjeturar uma certa tarefa associada ao processo de produção de uma empresa de embalagens, planeando colocar vários modelos de garrafas, com uma altura fixa, mas com volumes distintos, no interior do prisma triangular, implicando assim a variabilidade da norma do vetor $\overrightarrow{CM}$, atingindo no limite superior a dimensão da aresta do cubo.

Este tipo de estudo permite que a produção hipotética deste tipo de embalagem pudesse ocorrer de forma absolutamente inequívoca, sem erros que viessem a encarecer o processo produtivo.

Nestes moldes, poderia pensar-se em como construir a caixa, em função de cada um destes modelos de garrafas, justificando assim a importância da criação do vetor $\overrightarrow{CM}$, com a particularidade da implementação da mobilidade dos valores da sua norma entre 0 e l, criando-se, para o efeito, o seletor X. A relação entre o vetor $\overrightarrow{CM}$ e o seletor X foi operacionalizada através da adição $O + X * \frac{\overrightarrow{OJ}}{l}$, correspondente à aplicação no ponto O do vetor $\overrightarrow{CM}$. Isto porque o vetor $\frac{\overrightarrow{OJ}}{l}$ era unitário e colinear com o vetor $\overrightarrow{CM}$, logo, ao ser multiplicado por X, transformou-se precisamente no vetor $\overrightarrow{CM}$.

O objetivo era focar que o volume do prisma triangular era dependente da norma do vetor $\overrightarrow{CM}$, ou seja, evidenciar a sua dependência de X, o que significava que o caminho passava por definir uma função V(X).

Desta função, interessava obter a sua expressão algébrica e o seu gráfico e, em seguida, responder a questões, como por exemplo a determinação da aresta X, caso o volume fosse, digamos, igual a 5 centímetros cúbicos.

5.1.2.1. Trabalho realizado pelos alunos

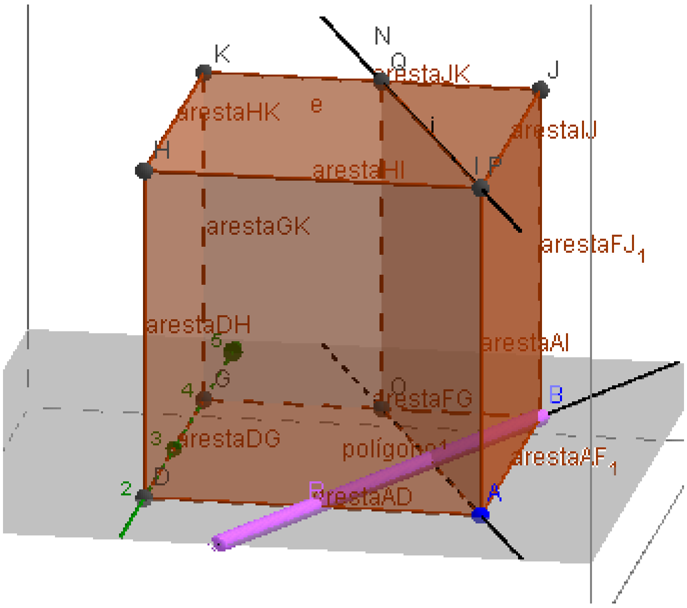


Figura 64: *Construção realizada por um grupo de alunos, onde o fator de mobilidade é oferecido pelo vetor* $\overrightarrow{JQ}$, *que neste caso desempenha o papel do vetor* $\overrightarrow{CM}$ *referido na ficha de trabalho*

Em seguida, vamos observar o gráfico da função obtida:

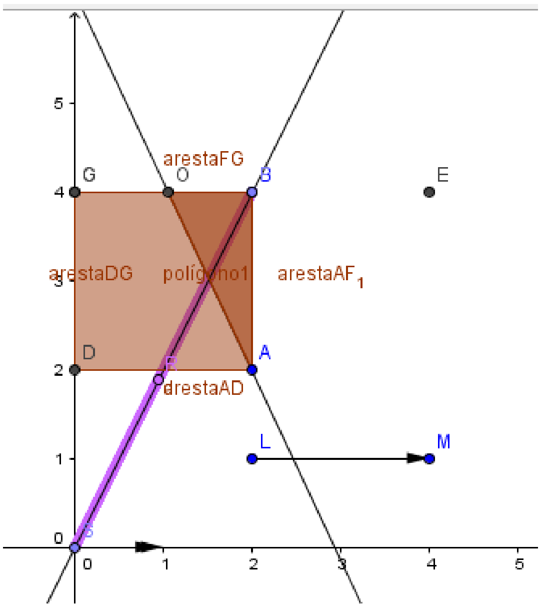


Figura 65: *Projeção do plano z=0, de onde se destaca a reta obtida como sendo o gráfico da função V(X)*

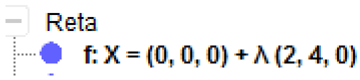
Poderia colocar-se a seguinte questão: mas porque é o gráfico da função representado por uma reta, tendo em conta que os seus valores se referem a medidas de volume?

Tal característica resultou do facto de apenas a medida da base do triângulo-base do prisma ser igual a X, enquanto a medida da altura se manteve constante, igual à aresta do cubo, assim como também ocorreu com a medida da altura do prisma triangular. Desta forma, a previsão apontava para uma expressão linear. Mais concretamente, o volume V é dado por:

$$V(X) = l^2 X,$$

onde l representa a medida da aresta do cubo construído.

Vamos observar a expressão obtida pelos alunos, por ajustamento de uma reta através do recurso à funcionalidade do Geogebra específica para o efeito:



Era importante que os alunos identificassem a expressão gerada pelo *software*, como a forma paramétrica da expressão algébrica de uma reta. Em particular, neste ponto, é fundamental salientar a relevância do Geogebra no que respeita à inclusão de conteúdos anteriormente abordados, proporcionando oportunidades para os alunos recordarem, atribuírem sentido e desenvolverem novas conexões, combinando os diversos tópicos que lhes foram sendo transmitidos ao longo do tempo letivo despendido nas aulas de Matemática.

Os alunos deveriam ter a noção da correspondência desta expressão com a sua forma reduzida, aquela que frequentemente utilizam. O processo em questão deveria ser o seguinte:

$$(x, y) = \lambda(2,4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\lambda \wedge y = 4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{2} \wedge \lambda = \frac{y}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

Culminando no reconhecimento da forma reduzida da reta obtida.

5.1.3. Terceira tarefa

A tarefa nº3 propunha a construção de um cone de revolução em torno de um eixo vertical, ou seja, perpendicular ao eixo Oz, conforme podemos observar na figura seguinte:

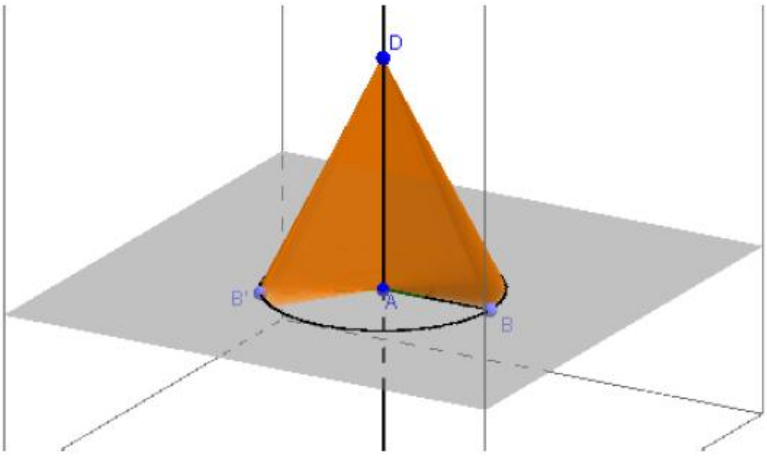


Figura 66: *Cone de revolução gerado pelo triângulo [AB'D]*

A sucessão das alíneas tinha por base uma lógica que principiava por fixar um segmento, cujos extremos eram o ponto A – centro da circunferência – base do cone - e um ponto B, selecionado à partida como um ponto fixo da circunferência.

A partir do segmento [AB], foi então definido um ponto B', também pertencente à circunferência, com a particularidade de ser um ponto móvel.

A relação de B' com [AB] foi concretizada através da definição de um seletor *ângulo,* com a designação de α, construído no sentido positivo, o ângulo <BAB', como podemos compreender melhor na figura seguinte:

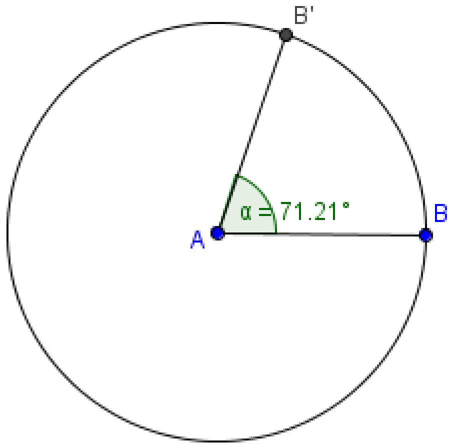


Figura 67: *Vista real da circunferência, onde o segmento de reta [AB] é apresentado como a base do ângulo <BAB'. O valor associado ao ângulo pretende representar um ponto do intervalo [0,2π].*

Apenas a característica de mobilidade de B' permitiu a introdução deste seletor, tendo em conta que, para a sua criação, é necessário que seja introduzida uma variável, sendo, neste caso, este o papel desempenhado por B'.

O processo seguinte passava por definir o eixo de rotação. Conforme sugerido na ficha disponibilizada, tal deveria ser feito algebricamente, ou seja, a partir do ponto A, de coordenadas (a,b,0), para determinados números a e b reais, considerado como um elemento do plano z=0, os alunos deveriam criar o ponto D(a,b,2), que se posicionaria no plano z=2, com a particularidade de, quer A, quer D, pertencerem ambos a uma reta perpendicular à circunferência inicial, passante no seu centro, cumprindo, desta forma, a função de eixo de rotação.

No seio desta lógica, havia que, em seguida, definir o objeto a mover em torno do eixo AD, sendo apresentado, para o efeito, o triângulo [AB'D], também móvel, pelo facto de depender do seletor α . Isto porque a movimentação de α implicava o movimento do triângulo [AB'D], ou seja, a assunção de diferentes posições no espaço, à medida que α variava. Desta forma, a rotação, na dependência de α, gerava o cone de revolução, sendo necessário, para que este fosse efetivamente visível, a ativação do traço do triângulo [AB'D]. Com a animação do seletor foi finalmente possível observar o objeto pretendido.

Estávamos, neste momento, em condições de definirmos uma função, cuja variável fosse α. A função proposta passou pela identificação da variável dependente: a área da superfície lateral do cone de revolução ou, dito de outra forma, "a área da superfície gerada por rotação do triângulo [AB'D] em torno do eixo AD". Entretanto, no processo, foi ainda solicitada a passagem do ângulo α a radianos.

A determinação da área lateral do cone, em função de α, pressupunha que os alunos recordassem a sua fórmula, podendo, para o efeito, recorrerem ao manual, ao caderno, ou mesmo à internet, caso não a tivessem presente. Poderiam ainda partir da área lateral de um cilindro com base e altura congruentes às do cone, por esta ser mais intuitiva. Posteriormente, poderiam extrair um terço desta, resultando assim a área pretendida.

Os alunos progrediram na tarefa passando pela geratriz, concluindo que:

$$A_{cone} = geratriz \times P_{base},$$

onde A_{cone} e P_{base} representam, respetivamente, a área lateral do cone e o perímetro da sua base.

Quanto à geratriz, a sua medida assumiu um valor fixo, igual a 2.24 cm (obtido diretamente através do Geogebra), enquanto o perímetro da base era dado por 2π, pelo facto de o raio ser unitário. Ou seja:

$$A_{cone} = 2.24 \times 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{cone} = 4.48\pi$$

No entanto, o que nós tínhamos em função de α não era a área lateral do cone completa, mas a área lateral gerada pela rotação de α radianos do segmento [AB] tomando o centro A, o que implicava o recurso à *regra de três simples*, como podemos observar no quadro de proporcionalidade seguinte:

Ângulo de rotação do segmento [AB'] com centro A	**Perímetro da base / Comprimento do arco de circunferência descrito pelo ângulo** α: $\widehat{BB'}$
2π	2π
α	x

Donde resultou $x = \alpha$. O que significava que, sendo o comprimento do arco de circunferência dado por α, então a área lateral gerada pela rotação de α radianos do segmento [AB'] tomando o centro A seria igual ao produto da geratriz por α.

Desta forma, foi finalmente possível obter a expressão da área lateral do cone, em função de α, que se revelou linear.

Seguindo as indicações constantes na ficha de trabalho, o programa devolveu aos alunos o gráfico da função A(α), que, como seria expectável, deu origem a um segmento de reta, definido no intervalo [0,2π].

5.1.3.1. Trabalho realizado pelos alunos

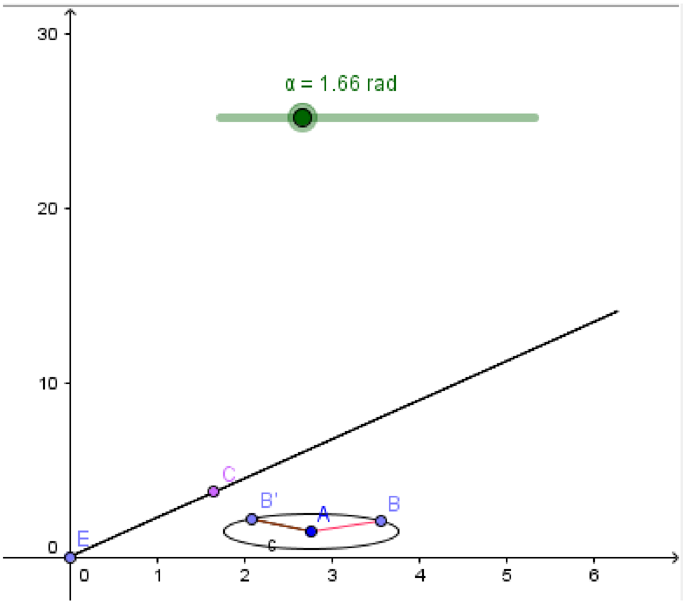


Figura 68: *Gráfico obtido relativo à função definida no intervalo [0, 2π]. Vista em perspetiva da base do cone – por alteração da escala dos eixos a sua configuração original surge alterada.*

5.2. ABORDAGEM DAS AULAS

A forma como a primeira aula foi implementada passou pela constituição de uma *Comunidade de Aprendizagem,* tendo sido efetuada a distribuição dos alunos pelos computadores da sala de Informática TIC2. Foram agrupados em grupos de 2 ou 3 alunos e foi feita a distribuição de uma ficha de trabalho por cada aluno. Esta opção partiu do pressuposto de que os alunos, desta forma, teriam a oportunidade, em casa, de rever as tarefas e os procedimentos de suporte, por forma a clarificar os exercícios realizados em aula.

Previamente ao início da realização das tarefas pelos alunos, optei por fazer uma breve introdução relativa aos objetivos centrais da aula, referindo o conteúdo essencial da ficha de trabalho, conforme descrito em *"Conteúdo das Aulas"*. Referi ainda que as alíneas referentes a cada uma das tarefas continham a descrição do ícone do GeoGebra interveniente no processo de realização.

Após este prelúdio, os alunos iniciaram o seu trabalho. Tal foi possível de forma imediata pelo facto de os computadores terem sido operacionalizados (minutos antes do início da aula) e tendo sido aberto, em todos eles, o programa GeoGebra.

Optei por circular de forma ordenada pela sala, disposta em U, sempre que me foi possível. Notei que, durante grande parte da aula, tal estratégia foi efetivamente possível, tendo em conta que as dúvidas emergentes dos grupos acabavam por não ser urgentes, no sentido de que o tempo de espera até à minha chegada ao grupo era investido pelos seus elementos na procura e validação de estratégias que pudessem ser úteis na suplantação da questão problemática. De acordo com este método de atuação em sala de aula, naturalmente, ocorria o esclarecimento de dúvidas. Muitas vezes, foram ouvidas expressões similares à seguinte: "Tinha aqui um problema, mas já o resolvi", concordantes com a minha intenção. Não queria dar logo a resposta, mas provocar subtilmente um processo de investigação, partindo da noção adquirida de que tal é fundamental na descoberta do GeoGebra – a partir do erro, obter a(s) forma(s) que possibilita(m) a adequada utilização do programa.

Tive a clara perceção de que, à medida que as tarefas progrediam, a calma inicial dava lugar a uma certa agitação e a uma urgência maior pela rápida resolução das questões bloqueadoras da continuidade do exercício.

Esta agitação levou a que, interiormente, tivesse que passar por um processo de autogestão, fazendo uma separação rigorosa entre dois focos simultâneos de chamada de atenção: por um lado, a concentração necessária à prestação do apoio às solicitações dos alunos e, por outro, a abstração dos pedidos de apoio, tendo o cuidado de referir que atenderia o próximo aluno quando finalizasse o atendimento atual.

Na aula seguinte, os alunos continuaram o seu trabalho, tendo em conta que estavam munidos com a ficha de trabalho de suporte. Foi notório como a destreza, no geral, beneficiou de um claro desenvolvimento. Os alunos, no quadro de uma segunda aula, estavam bastante mais à vontade quer no ambiente GeoGebra, quer no cenário de aprendizagem em que estavam inseridos. Esta atitude traduziu-se numa progressão mais ativa nas tarefas e também num acréscimo de vitalidade na atividade que estavam a desenvolver.

REFLEXÃO FINAL

Em jeito de conclusão, fundamentalmente pretendo refletir sobre as estratégias de ensino utilizadas nas aulas lecionadas que se revelaram significativas para o progresso da aula.

Uma das práticas integrantes do ensino que tive a oportunidade de praticar está relacionada com a constituição de uma *comunidade de aprendizagem*, com o consequente desenvolvimento de um trabalho essencialmente autónomo por parte dos alunos. Neste formato de aula, as preocupações passaram pela seleção de uma tarefa suficientemente interessante, de caráter exploratório e pelo reconhecimento da forma de pensar dos alunos, de modo a ser possível dirigir o apoio mais adequado para as questões que foram colocando. No meu entender, creio que este tipo de ambiente de aprendizagem pode resultar bastante bem desde que os alunos cumpram as regras básicas de educação e cortesia e ainda se for criado o hábito da sua implementação. Existe a tendência para uma melhoria progressiva do processo de constituição da referida comunidade e para que os alunos se adaptem ao processo, tornando-se um modelo habitual, que faz parte das suas aulas de Matemática. Progressivamente, as regras que devem ser estabelecidas intra grupos, como a partilha de conhecimentos e a troca de impressões relativas ao trabalho de cada elemento do grupo, conduzindo a uma progressão em simultâneo, começam a definir-se e a cimentar-se. Tal pressuposto implica que potenciais conflitos tendem a atenuar-se.

Um outro aspeto da prática de sala de aula que pude promover esteve relacionado com a conceção da aula com o auxílio dos alunos, subsistindo a preocupação de nunca desenvolver um determinado raciocínio que possam ser eles mesmos a delinear. Ainda que persistam elementos matemáticos que os alunos possam crer que não dominam, assiste-se frequentemente, no final, à conclusão de que afinal é algo que se encontra ao seu alcance. Dentro desta filosofia, permaneceu o cuidado pelo desenvolvimento de traços de personalidade relativos à autonomia, autoconfiança e autoeficácia. O objetivo central prendeu-se com o trilhar de um caminho em que os alunos aprendessem a utilizar os instrumentos matemáticos apropriados, de maneira segura e consistente, conscientes das suas capacidades.

Do exposto, retira-se com facilidade que considero importante que os alunos vão ao quadro, sempre que são solicitados. Tal atitude acaba por devolver-lhes a convicção de que têm a capacidade de responder positivamente a um desafio, o que se traduz, a médio prazo, na interiorização da sua capacidade de virem a ser bem-sucedidos. Produz-se o sentimento de confiança nas suas capacidades, no seu trabalho e na sua eficiência.

Opto por perspetivar-me como uma facilitadora das aprendizagens, ao invés de alguém que transmite os conteúdos. Dispondo os alicerces, procuro encontrar a forma de os alunos construírem por cima destes, com confiança.

Tendo em mente o *efeito de Pigmalião*, procurei pensar que cada aluno tinha a capacidade de conseguir muito daquilo que lhe era pedido, em muitos casos, tudo ou quase tudo, portanto, se ainda não tinha atingido o sucesso, certamente que haveria um conjunto de razões que o justificassem. Coube, em particular a mim, averiguar as causas do constrangimento. Acredito em larga medida num discurso motivacional, no *reforço positivo*, pelo que fiz os possíveis para fazer o seu uso em sala de aula.

A prática de ensino supervisionada fez-me encarar o ensino de uma forma bastante mais madura e refletida. Constatei a importância de planificar uma aula, como uma atividade que orienta o professor, em particular, no sentido de o consciencializar a respeito dos tempos de que dispõe para cada momento de aula e também, ao planificar, o professor tem a perceção do nível de interesse que a aula poderá suscitar nos seus alunos. Ocorreu, por vezes, ao planificar de acordo com o modelo expositivo, sentir que esta não seria a estrutura de aula adequada, no sentido de levar os alunos a interessar-se pelo conteúdo a transmitir. Tive nos momentos de aula integrando o ensino expositivo a perceção de que não me poderia alongar muito no tempo, sob pena de começar a "perder" alunos, no sentido do seu distanciamento da aula. Idealmente, de acordo com a experiência que vivenciei, a estes deveria suceder-se uma tarefa exploratória, substituindo o procedimento padrão em que os alunos resolvem exercícios de aplicação. A minha experiência foi direcionada na vertente do ensino exploratório, com particular incidência na utilização da tecnologia na sala de aula, o que me permite testemunhar a importância dos recursos tecnológicos como instrumento de aprendizagem por excelência. A sua introdução nos tópicos Geometria e Funções assume um papel preponderante e, hoje em dia, tendo em conta o contexto social em que os alunos se inserem, diria mesmo que apresenta um caráter indispensável. Enfatizo também a componente lúdica promovida pela disponibilidade de meios tecnológicos, quer fosse por intermédio de um computador fixo, quer este fosse assumido pelas calculadoras dos alunos. Depois coloca-se a questão, que para é central no âmbito deste relatório, que diz respeito à possibilidade da conexão entre a visualização dos objetos matemáticos e a sua algebrização permitida quer pelos ambientes de Geometria Dinâmica, quer pelas calculadoras gráficas quer também por intermédio de ficheiros relativos a conteúdos específicos tendo em mente este objetivo. A tecnologia foi instrumentalizada para que fosse possível encetar um fio condutor entre duas ou mais representações de um certo objeto matemático, com vista a potenciar a aprendizagem matemática.

Como já tínhamos constatado nos Pressupostos Teóricos, o ensino da Matemática beneficia com o recurso à tecnologia, por um lado, se os alunos estiverem motivados para as aulas de Matemática, e, por outro, se tiverem também uma postura favorável a este tipo de ambiente de aprendizagem, em particular, como uma base de instrumentalização de conteúdos matemáticos.

Em suma, gostaria de referir que a prática de ensino supervisionada constituiu um período de intensa aprendizagem, potenciada pelos alunos e pelas críticas / sugestões dos professores. Considerei a PES um processo de construção da profissionalidade extremamente enriquecedor, com múltiplas vertentes, designadamente as componentes científica, didática, social e profissional, que se complementaram, facto que me deixa muito grata.

Aproveito para deixar o meu agradecimento aos professores que me orientaram na PES e também aos professores da Componente Curricular do respetivo Mestrado, que me muniram com as ferramentas adequadas por forma a ter a capacidade para desenvolver este trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borralho, A., & Neutel, S. (2011). O Currículo Nacional do Ensino Básico e a Prática Letiva dos Professores de Matemática. *Revista Ibero-Americana, 56,* 227 - 246.

Canavarro, A. P. , Oliveira, H., & Menezes, L. (2008). *Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: O Caso de Célia.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Costa, B. R. (2014). *Novo Espaço - 10º ano de Escolaridade.* Lisboa: Porto Editora.

Costa, B. R. (2014). *Novo Espaço - 9º ano de Escolaridade.* Lisboa: Porto Editora.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North* (1-26). FRANCE: Eric.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61,103-131. USA: Springer.

Gerônimo, J., &. Franco, V. (2010). *Geometria Plana e Espacial - Um Estudo Axiomático (2ª edição).* BRASIL: Editora da Universidade Estadual de Maringá.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education* (176-199). NY: Routledge.

Graham, A., & Thomas, M. (2000). Building a Versatile Understanding of Algebraic Variables With a Graphic Calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 256-282.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of Linking Geometry and Algebra: The Case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*, 126-131.

Ivancevich, J. (2008). *Gestão de Recursos Humanos.* SP: Mc Graw Hill Interamericana do Brasil.

Kozulin, A., Gindis, B., Ageyev, B., & Miller, S. (2003). *Vygotsky's Educacional Theory in Cultural Context.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Laborde, C. (2010). Linking Geometry and Algebra through Dynamic and Interactive Geometry. Grenoble, FRANCE: University Joseph Fourier.

Mello, R. R., Braga, F. M., & Gabassa, V. (2012). *Comunidades de Aprendizagem - Outra Escola é Possível.* BRASIL: Edufscar.

Moraes, R. (2000). *Construtivismo e Ensino de Ciências - Reflexões Epistemológicas e Metodológicas.* Porto Alegre: Edipucrs.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: Que Desafios? *Revista Iberoamericana de Educación, 24,* 63-90.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do Professor na Condução de Discussões Matemáticas . *Revista Quadrante,* 55-81.

Reed, H. D. (2010). Effects of Attitudes and Behaviours on Learning Mathematics With Computer Tools. *Computers &Education,* 1-15.

Rogoff, B., Matusov, E., & White, C. (2000). Modelos de Ensino e Aprendizagem: A Participação em uma Comunidade de Aprendizes. In O. &. Torrance, *Educação e Desenvolvimento Humano* (pp. 322-343).

Roy, S., & Llinás, R. (2008). Dynamic geometry, brain function modeling, and consciousness. In R. &. Banerjee, *Progress in Brain Research, Vol. 168* (133 - 144). OXFORD, UK: Elsevier.

Shoenfeld, A. (1996). Porquê Toda Esta Agitação Acerca da Resolução de Problemas? In Abrantes, P., Leal L. C., & Ponte J. P., *Investigar para aprender Matemática* (61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. *Revista Bolema, 14,* 66-91.

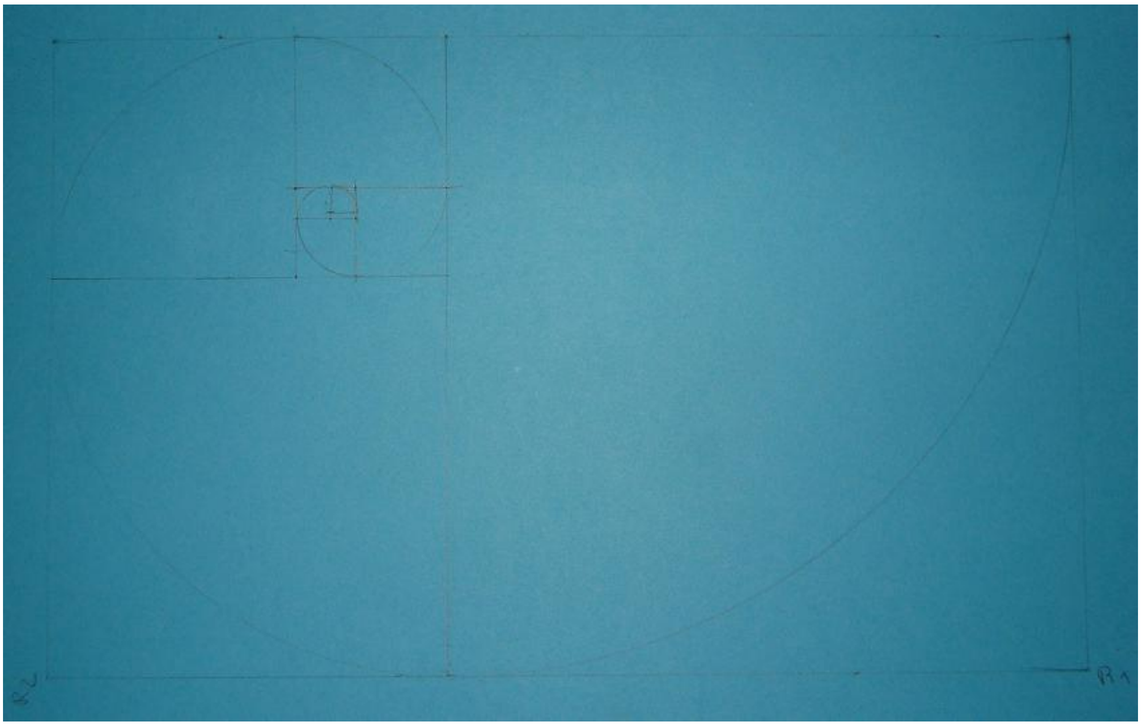
Tedesco, J. C. (1995). *Sociologia da Educação.* Campinas, SP: Autores Associados.

Usiskin, Z., Andersen, K., & Zotto, N. (2010). *Future Curricular Trends in School Algebra and Geometry: Proceedings of a Conference.* United States of America: Information Age Publishing Inc.

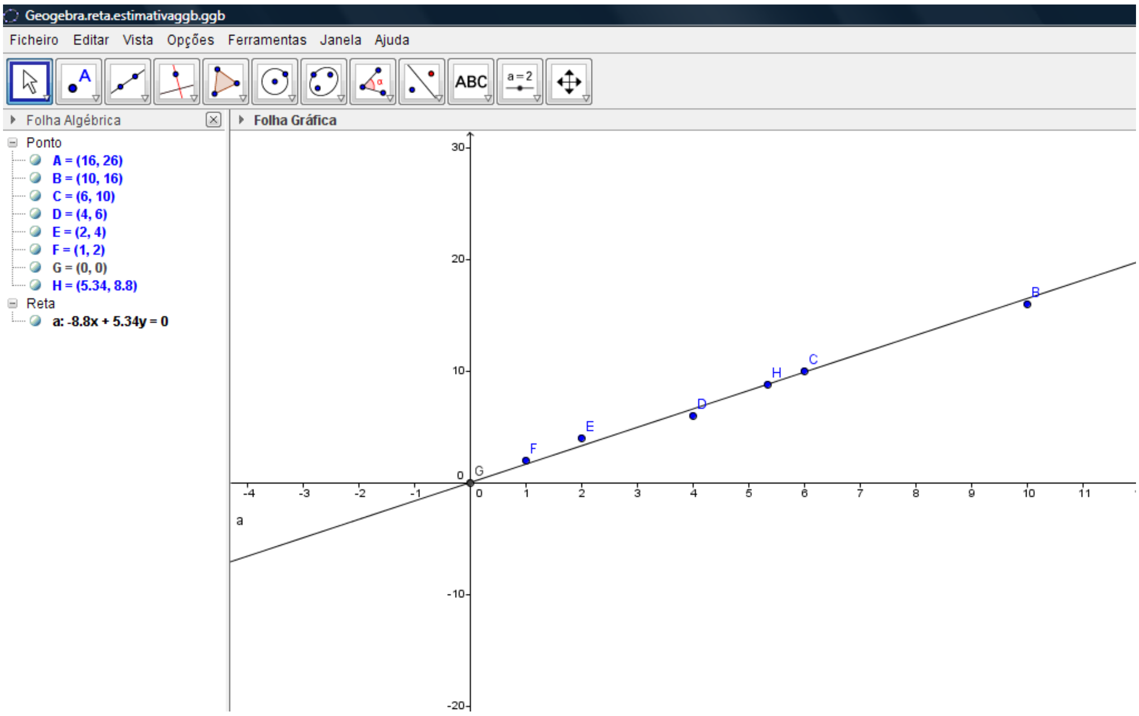
Watkins, C. (2005). *Classrooms as Learning Communities - Whats in it for schools?* NY: Taylor and Francis Group.

ANEXOS

Anexo A – Construção da Espiral Dourada

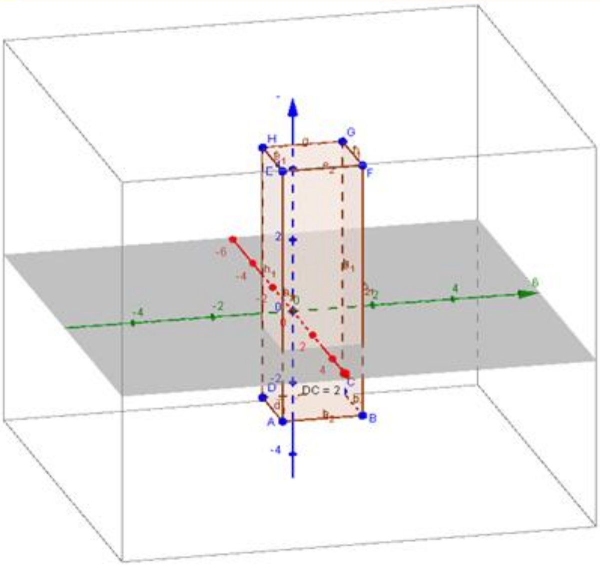


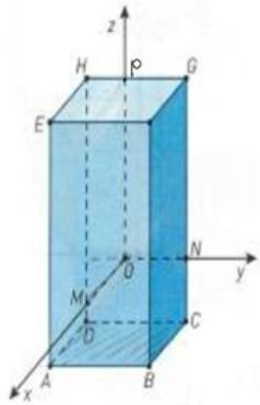
Anexo B – Ajuste da Reta de Regressão a um Conjunto de Pares Ordenados


Geogebra.reta.estimativaggb.ggb
Ficheiro Editar Vista Opções Ferramentas Janela Ajuda
ABC
a = 2
Folha Algébrica
Folha Gráfica
Ponto
A = (16, 26)
B = (10, 16)
C = (6, 10)
D = (4, 6)
E = (2, 4)
F = (1, 2)
G = (0, 0)
H = (5.34, 8.8)
Reta
a: -8.8x + 5.34y = 0

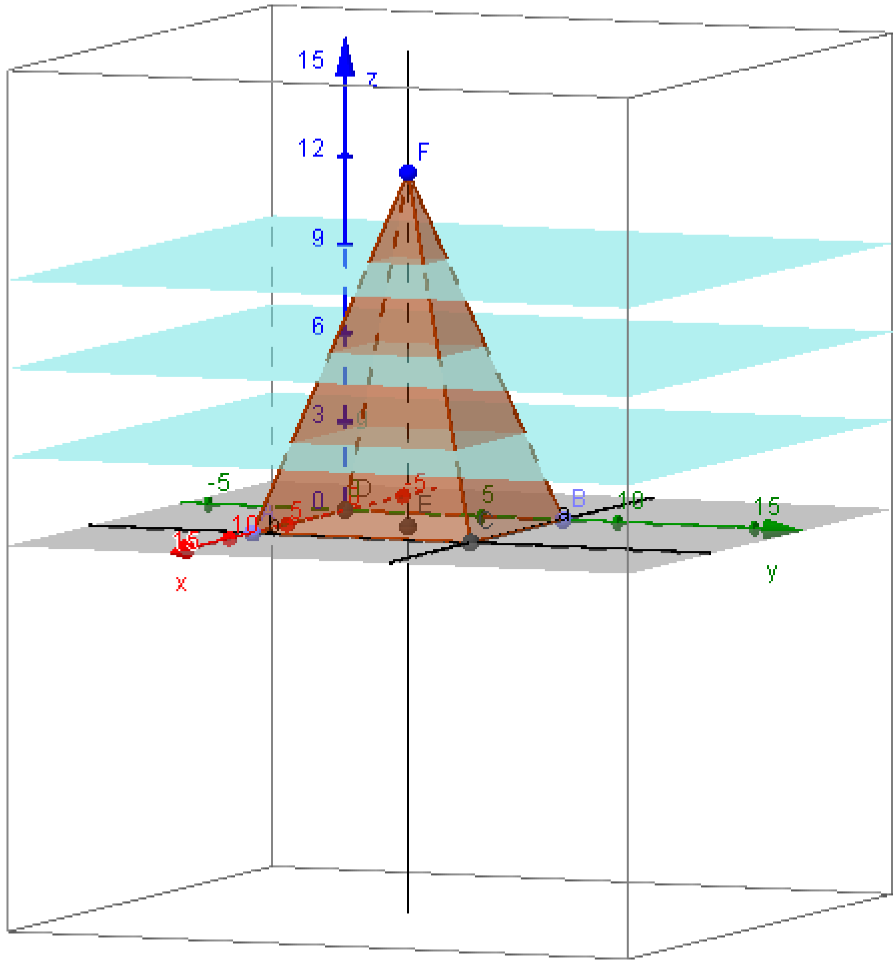
Anexo C – Visualização de um Paralelipípedo através de Duas Perspetivas

Exercício 62, página 113



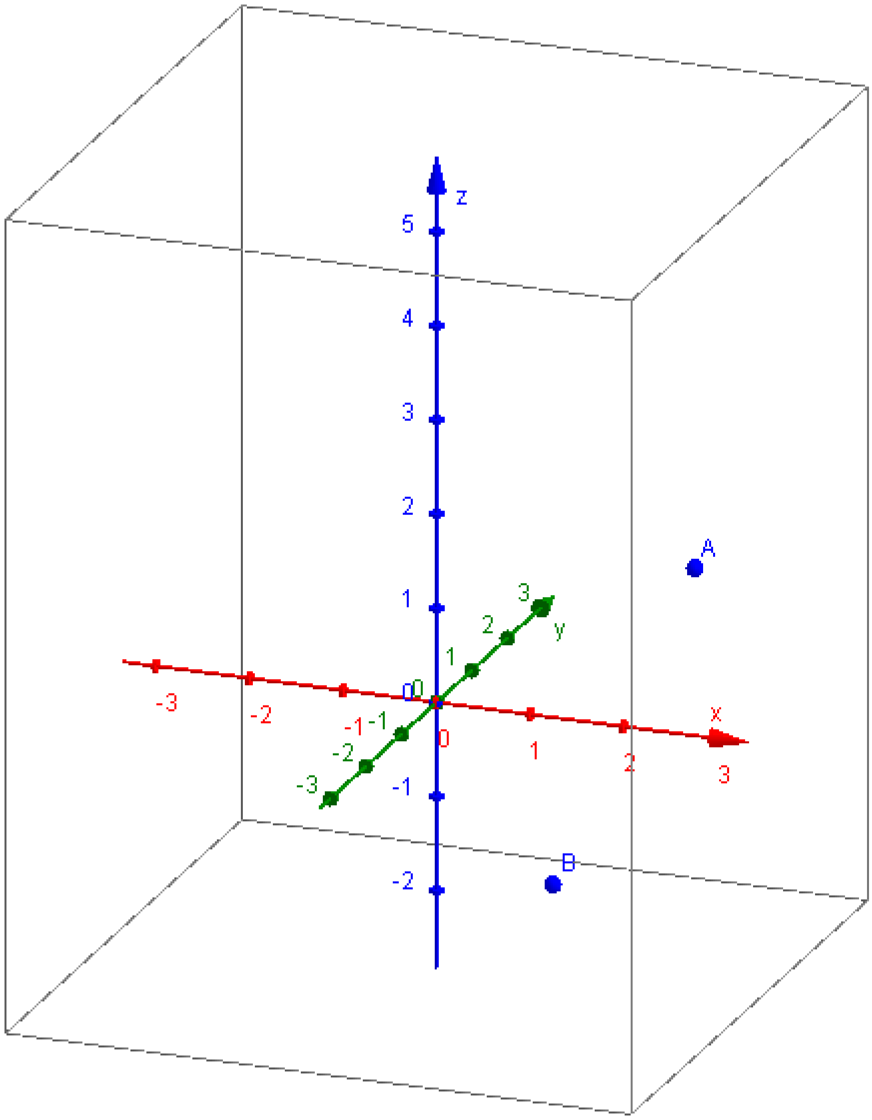


Anexo D – Seccionamento de uma Pirâmide Quadrangular



15
12
9
6
3
z
F
-5
0
5
10
15
x
y
B
C
D
E

Anexo E – Visualização de Pontos Simétricos no Espaço



z
5
4
3
2
1
0
-1
-2
A
B
x
y
-3
-2
-1
1
2
3

Anexo F – Ficha de Trabalho relativa a Lugares Geométricos

Escola Secundária de Severim de Faria
Matemática
9º Ano

2014 / 2015

Ficha teórico-prática

Tema: Lugares Geométricos

Subtema: Circunferência

Nome do aluno:

Turma:

Material Necessário: Régua, Esquadro e Compasso ou **Programa de Geometria Dinâmica: *Geogebra***

Definição – Mediatriz de um segmento de reta [AB] é o conjunto de pontos P do plano equidistantes de A e de B, ou seja,

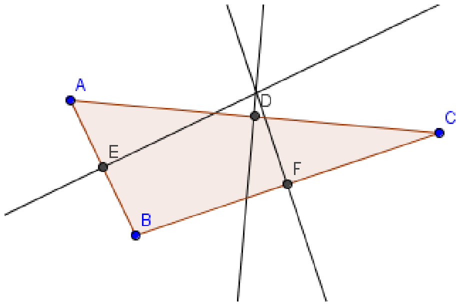
$$\overline{PA} = \overline{PB} .$$

I - Circunferência circunscrita a um triângulo

Circunferência circunscrita a um triângulo: é a circunferência que passa por todos os vértices do triângulo.

Como se constrói?

Passo 1 - Traça as mediatrizes dos três lados do triângulo [ABC]:



No Geogebra:

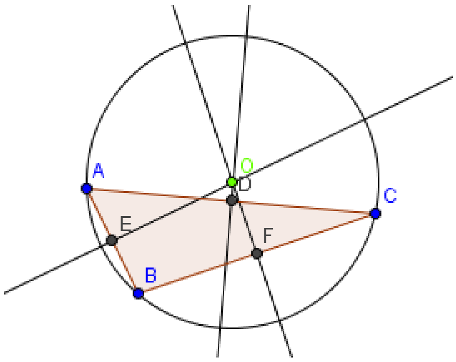
1. Constrói um triângulo - 5º ícone;

2. Para cada lado do triângulo, marca o seu ponto médio – 2º ícone;

3. Pelo ponto médio, traça uma reta perpendicular a cada um dos lados do triângulo – 4º ícone;

4. Determina o ponto de intersecção entre as 3 retas traçadas – 2º ícone "intersecção de dois objetos"

Passo 2 - Traça a circunferência de raio AO com centro em O



No Geogebra:

Considera o centro O e A um ponto da circunferência - 6º ícone "Circunferência (Centro, Ponto)"

Completa:

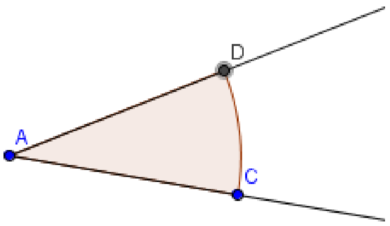
O ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo é o .... da circunferência circunscrita ao triângulo e designa-se por ....

II - Bissetriz de um ângulo

A **bissetriz** de um ângulo é uma semirreta que o divide em dois ângulos congruentes.

Construção da Bissetriz

- Traça duas semirretas com uma origem comum: o ponto A e, em seguida, desenha o setor circular ACD



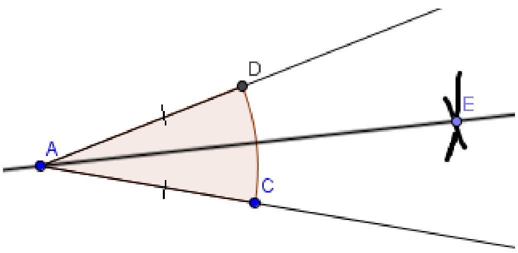
No Geogebra:

Traçar semirretas duas semirretas com uma origem comum – 3º ícone

Construção da bissetriz:

No caderno:

- Coloca o compasso no ponto D e estende-o até ao ponto A. Traça um setor circular de centro D e raio DA situado no interior do ângulo CAD;
- Coloca o compasso no ponto C e repete o procedimento anterior;
- Designa o ponto de intersecção dos dois setores circulares por E;
- Une os pontos A e E, de modo a obteres a semirreta AE, que é a **bissetriz** do ângulo CAD.



No Geogebra:

- Traçar semirretas duas semirretas com uma origem comum – 3º ícone
- Desenhar setores circulares – 6º ícone “Selecione o centro e dois pontos” (o Geogebra traça os setores circulares no sentido positivo)
- Intersetar os setores circulares – 2º ícone “Intersecção de dois objetos”
- Traçar a reta – 3º ícone – que contém os pontos A e E

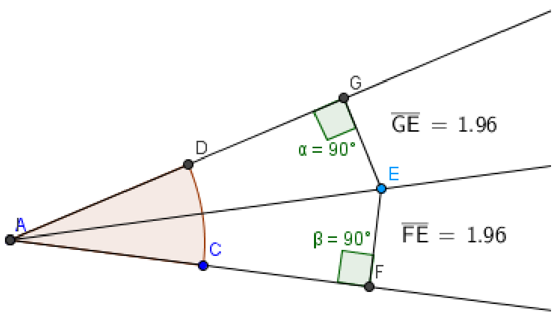
De outra forma:

Escrever na linha de entrada “bissetriz”. O Geogebra apresenta a opção

“Bissetriz [<Ponto>,<Ponto>,<Ponto>]”. De acordo com a imagem apresentada, deveria escrever-se: “Bissetriz[D,A,C]”.

Medição das distâncias do ponto E pertencente à bissetriz

a ambos os lados do ângulo CAD



A distância de qualquer ponto da bissetriz a ambos os lados do ângulo DAC mantém-

Completa:

A **bissetriz** de um ângulo é uma semirreta que divide um ângulo em dois ângulos ....

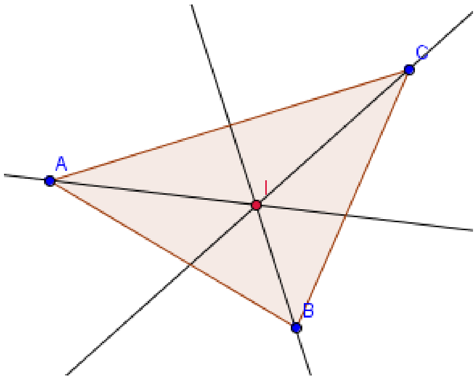
Se a distância de um ponto P pertencente à bissetriz de um ângulo a um dos seus lados é igual a 3 unidades, então a distância de P ao outro lado do ângulo é igual a ...... unidades.

III - Circunferência inscrita num triângulo

Como construir?

- *Passo 1:* Traça as bissetrizes de todos os ângulos internos do triângulo [ABC] (deverás desenhar novamente um triângulo).

Sugestão: Na linha de entrada do *Geogebra* escreve “bissetriz” (ver o processo utilizado em II).



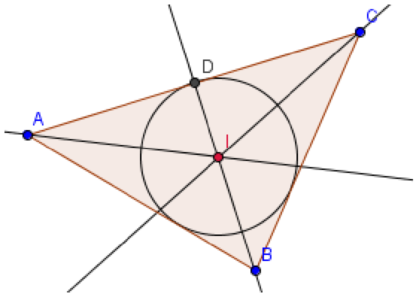
No Geogebra: Determina o ponto de intersecção das bissetrizes – 2º ícone – “intersecção de dois objetos” e designa-o por I.

O ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo designa-se por **incentro**.

- *Passo 2*: Determina o ponto de intersecção entre uma das bissetrizes traçadas (escolhe uma) e o lado do triângulo que a mesma intersecta e designa-o por D.

No Geogebra: 2º ícone “Intersecção de dois objetos”

- *Passo 3*: Esboça a circunferência inscrita no triângulo, tangente aos seus lados.



No Geogebra: 6º ícone – Circunferência (Centro,Ponto), considerando o centro I e o Ponto D.

Completa:

Incentro de um triângulo: é o ponto de intersecção das .... dos seus ângulos.

Circunferência inscrita num triângulo: é a circunferência com centro no .... que é tangente aos lados do triângulo.

IV - Tarefa Exploratória

1. Constrói um triângulo equilátero. (5º ícone)

1.1. Determina o circuncentro e o incentro do triângulo.

1.2. Repete a construção para outros triângulos equiláteros ou movimenta os triângulos construídos, recorrendo às potencialidades do *Geogebra*.

1.3. Atendendo aos resultados obtidos, estabelece uma conjuntura para os triângulos equiláteros relativamente à relação existente entre o circuncentro e o incentro.

Anexo G – Mini ficha relativa à Expressão Algébrica de uma Função Quadrática

Matemática 10º Ano

Família de parábolas do tipo:

$$y = a(x-h)^2 + k, \quad com\ a, h, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

1. Considere as seguintes expressões algébricas de funções quadráticas:

a) $f(x) = -3(x-2)^2$

b) $g(x) = (x+5)^2 - 2$

c) $h(x) = -4x^2 - 1$

d) $i(x) = 3(x-3)^2 - 4$

1.1. Esboce no seu caderno os gráficos correspondentes às funções dadas.

1.2. Preencha o quadro seguinte:

Designação da função	Expressão algébrica	Coordenadas do vértice
f		
g		
h		
i		

1.3. Relacione a expressão algébrica que define a função $j(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0, h, k \in \mathbb{R}$ com as coordenadas do vértice do seu gráfico.

Anexo H – Ficha de Trabalho relativa a Aplicações da Função Quadrática

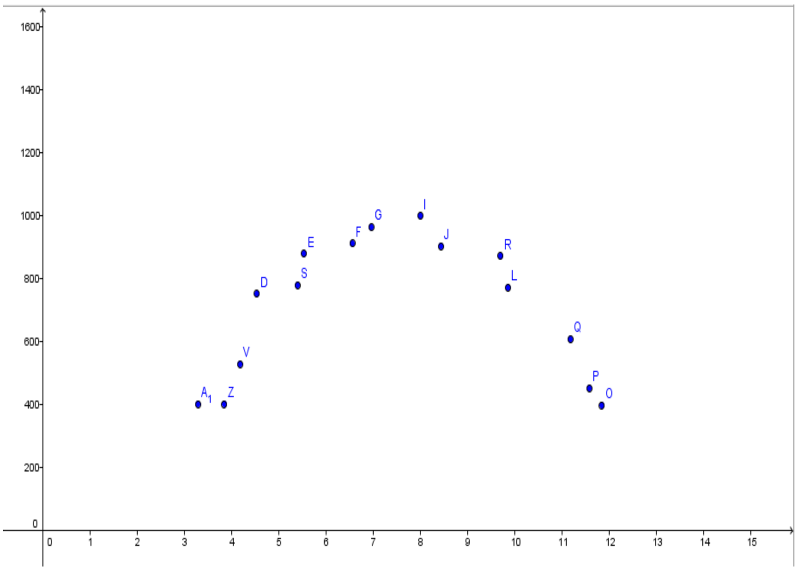
Escola Secundária de Severim de Faria | 2014/2015

Matemática 10º Ano

Aplicações da Função Quadrática

Grupo I

1. Num certo habitat foram introduzidos lobos, com o objetivo de prevenir a extinção da espécie. Considere os seguintes registos relativos à evolução da população (nº de indivíduos), ao longo do tempo (anos), correspondendo o valor zero ao ano de 1995:



- $A_1 = (3.29, 402)$
- $D = (4.54, 752)$
- $E = (5.54, 880)$
- $F = (6.56, 912)$
- $G = (6.96, 964)$
- $I = (8, 1000)$
- $J = (8.44, 904)$
- $L = (9.86, 772)$
- $O = (11.85, 398)$
- $P = (11.58, 452)$
- $Q = (11.18, 608)$
- $R = (9.7, 872)$
- $S = (5.4, 780)$
- $V = (4.18, 529)$
- $Z = (3.85, 402)$

1.1. Em que ano foram introduzidos os lobos no habitat em questão? Quantos indivíduos compunham a população inicial?

1.2. Ajuste um modelo de função quadrática que constitua uma boa representação do referido fenómeno, recorrendo à calculadora gráfica.

1.3. Escreva a função quadrática ajustada na forma:
$f(x) = a(x-h)^2 + k, a, h, k \neq 0$.

2. <u>Tendo por base o modelo ajustado</u>, responda às questões seguintes:

2.1. Qual o valor máximo atingido pela população e em que ano ocorreu?

2.2. Em que período de tempo o número de indivíduos foi menor que 800?

2.3. Preveja em que ano deverá ocorrer a extinção desta população?

2.4. Estime o valor do acréscimo da população entre os anos de 1998 e 2001.

Grupo II

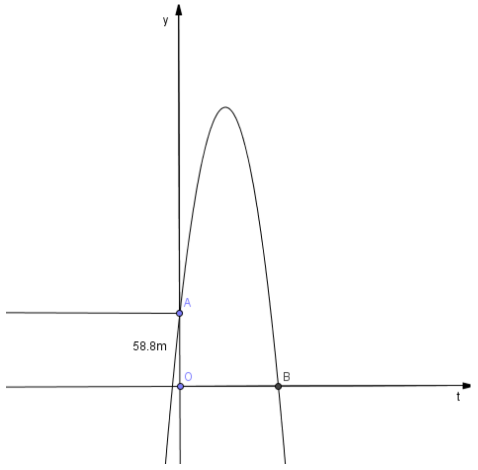
2. Um objeto é lançado para cima a uma velocidade de 19.6 metros por segundo (m/s), a partir de uma plataforma com uma altura igual a 58.8 metros.

A equação que traduz a altura do objeto ao fim de t segundos após ter sido atirado é dada por:

$$s(t) = -4.9\,t^2 + 19.6\,t + 58.8$$

com s em metros.

A figura seguinte traduz a experiência realizada:



Admitindo que o objeto é lançado a partir do ponto A, responda às questões seguintes:

2.1. Transforme a expressão que define a função s numa expressão do tipo: $s(t) = a\,(t-h)^2 + k, a, h, k \neq 0.$ Indique o vértice do gráfico da função s.

2.2. Ao fim de quantos segundos o objeto atinge o solo?

2.3. Indique o domínio e o contradomínio da função s.

2.4. Qual é a altura máxima atingida pelo objeto? Ao fim de quantos segundos, após ter sido lançado, atinge a altura máxima?

2.5. Durante quanto tempo o objeto permanece a uma altura superior a 65 metros?

- Utilize duas casas decimais nos arredondamentos.

Anexo I – Ficha de Trabalho relativa ao Paralelismo entre a Geometria e as Funções

Escola Secundária de Severim de Faria
Matemática - 10º Ano

Maio / 2015

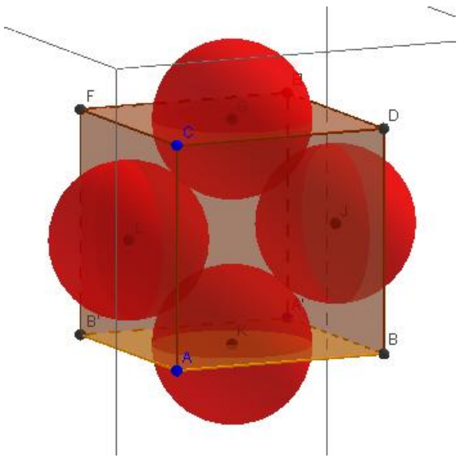
2014 / 2015

Ficha de Trabalho

Tema: Paralelismo entre a Geometria Tridimensional e as Funções

Início: Clique em "Opções" – "rotulagem" – "apenas pontos novos".

TAREFA Nº1



1. Crie um cubo com aresta igual a 8 cm. (vista 3D - 9º ícone "prisma")

2. Crie um seletor r (raio), que deverá variar entre 0 e $2\sqrt{2}$*, com um incremento de 0.01. (vista 2D – 11º ícone "seletor")*

3. Selecione uma face do cubo e determine o seu centro c. (2º ícone "ponto médio")

4. Crie uma esfera com centro em c e raio r. (10º ícone "esfera (centro, raio)")

5. Selecione a face do cubo oposta à anterior. Realize para esta face os passos 3 e 4.

6. Proceda como em 3, 4 e 5 para outras duas faces opostas do cubo (tome a figura como referência).

7. Na linha de entrada do Geogebra, escreva a expressão do volume V, em função de r, correspondente ao interior do cubo que não se encontra preenchido pelas esferas.

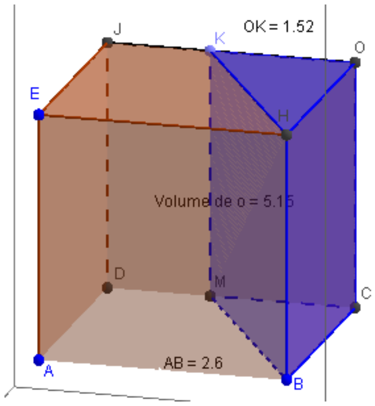
8. Na linha de entrada do Geogebra, escreva o ponto (r,V). Altere a escala dos eixos, de modo a assegurar a visualização deste ponto. (Botão direito do rato "eixo Ox: eixo Oy")

9. Selecione a opção “Lugar Geométrico” e clique primeiro no ponto (r,V) e depois em r. Deverá obter o gráfico da função V(r). (4º ícone)

10. Qual o volume V quando as esferas atingem o raio máximo?

11. Determine o raio das esferas quando o volume é igual a 500 centímetros cúbicos.

TAREFA Nº2



1. Crie um quadrado com lado arbitrário, digamos l, no plano z=0. (vista 2D – 5º ícone “polígono regular”)

2. Determine o comprimento do lado l, através de medição direta. (8º ícone)

3. Escreva na linha de entrada o vértice do quadrado A(a,b,0), com a e b de acordo com o quadrado que criou em 1.

4. Crie um ponto da base superior do cubo: dado o vértice do quadrado A(a,b,0), escrever na linha de entrada o ponto E(a,b,l).

5. Crie o cubo com aresta igual a l, utilizando o 9º ícone (vista 3D - “prisma” ou “cubo”).

6. Crie um seletor X no intervalo [0,l], com incremento igual a 0.01. (vista 2D – 11º ícone)

7. Crie o vetor $\overrightarrow{OJ}$*. (3º ícone “vetor (origem, extremidade)”)*

8. Crie o vetor unitário $\frac{\overrightarrow{OJ}}{l}$ *na linha de entrada, utilizando a designação atribuída pelo Geogebra ao vetor* $\overrightarrow{OJ}$*.*

9. Crie um vetor com comprimento igual a X, a partir do vetor criado em 8.

10. Aplique o vetor criado na alínea 9 no ponto O, escrevendo a operação adequada na linha de entrada. Que objeto matemático resulta da operação?

11. Crie o segmento de reta [KH]. (3º ícone)

12. Crie a reta paralela ao segmento de reta [KH], passante no ponto B. (4º ícone “reta paralela”)

13. Obtenha o ponto M por intersecção de dois objetos matemáticos? Quais são estes objetos? (2º ícone "intersecção de dois objetos")

14. Crie o triângulo [MBC], que será a base do prisma triangular visível na figura. (5º ícone)

15. Crie o prisma triangular. (9º ícone)

16. Calcule o volume do prisma triangular – 11º ícone.

17. Anime o seletor X e observe como evolui o volume do prisma triangular.

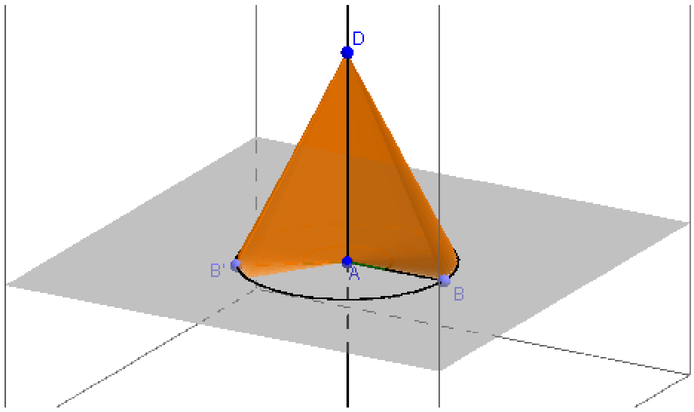
18. Insira na linha de entrada o ponto do lugar geométrico "gráfico da função volume": Q(X,volume do prisma triangular). Altere a cor deste ponto, de forma a dar-lhe ênfase.

19. Ative o traço do ponto Q e anime o seletor X (Botão direito do rato).

20. Determine a expressão algébrica da função V(X).

21. Qual deverá ser o valor de X, de modo que o volume do prisma triangular seja igual a 5 centímetros cúbicos?

TAREFA Nº3



1. Crie uma circunferência com centro A arbitrário e raio unitário. (Vista 2D – 6ºícone "Circunferência (centro,raio)"

2. Coloque um ponto B sobre a circunferência. Fixe o ponto B e crie o segmento de reta [AB]. (2ºícone "Ponto no objeto")

3. Crie o seletor ângulo α, compreendido entre 0º e 360º. (11ºícone)

4. Crie um ângulo BAB' com a amplitude α, no sentido positivo. (8ºícone)

5. Sendo A(a,b,0), escreva na linha de entrada o ponto D(a,b,2) e crie o segmento de reta [AD] (perpendicular a [AB].

6. Crie o triângulo [AB'D] e ative o seu traço. Anime o ângulo α e observe a dinâmica do objeto. (Botão direito do rato)

7. Converta o ângulo α para radianos. (Botão direito do rato "Propriedades dos objetos" – Configurações - avançado)

8. Determine a área da superfície gerada por rotação do triângulo [AB'D], em torno do eixo AD, α radianos no sentido positivo, em função de α, A(α), e escreva na linha de entrada a expressão obtida.

9. Escreva na linha de entrada o ponto do lugar geométrico "gráfico da função área da superfície gerada por rotação do triângulo [AB'D], em torno do eixo AD, α radianos no sentido positivo", ou seja, o ponto de coordenadas (α, A(α)). Altere a cor do ponto, de forma a dar-lhe ênfase.

10. Clique no 4º ícone – "Lugar geométrico" e, em seguida, clique no ponto do lugar geométrico (α, A(α)) e depois no seletor α. Deverá surgir o esboço do gráfico da função área da superfície referida na alínea 9.

11. Determine a expressão algébrica associada ao gráfico obtido. Apresente a expressão obtida na forma reduzida.