

Universidade de Évora
Departamento de Pedagogia e Educação



Investigações Matemáticas no Programa de Matemática B
do 10º Ano de Escolaridade na Perspectiva de Alunos e
Professores

Nélida Martins Filipe

Dissertação Apresentada para a Obtenção do Grau de Mestre em Educação
Educação Matemática

Orientador: Professor Doutor António Borralho

2007

97 11174

Universidade de Évora
Departamento de Pedagogia e Educação

**Investigações Matemáticas no Programa de Matemática B do
10º Ano de Escolaridade na Perspectiva de Alunos e
Professores**



Nélida Martins Filipe

160799

**Dissertação Apresentada para a Obtenção do Grau de Mestre em Educação
Educação Matemática**

Orientador: Professor Doutor António Borralho

2007

Resumo

Este estudo teve por objectivo compreender o impacto inerente à implementação de tarefas de investigação matemática na sala de aula, na perspectiva de alunos e professores, com base no programa de Matemática B no 10º ano de escolaridade.

As questões orientadoras do estudo foram as seguintes: a) De que modo as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelo professor e alunos no ensino secundário (Matemática B – 10ºano)? b) Do ponto de vista do professor, de que forma a implementação das investigações matemáticas na sala de aula se relaciona e adequa às orientações curriculares (Matemática B) e se pode articular com o projecto educativo de escola? c) De que forma a realização de investigações matemáticas no programa do 10º ano – Matemática B contribuirá para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, na perspectiva de professor e alunos?

Metodologicamente optou-se por uma abordagem de investigação qualitativa e interpretativa, assente num estudo de caso qualitativo e analítico, baseando-se a recolha de dados em entrevistas, observação directa do trabalho dos alunos e professor e produções escritas. O investigador assumiu o papel de observador-participante.

A análise de dados permitiu concluir que os alunos evoluíram na forma como registaram as suas conjecturas, testagens e conclusões assumindo progressivamente o papel de “investigadores matemáticos”. Relativamente ao professor, tendo em conta a preparação e elaboração das tarefas de investigação matemática, concluiu-se que contribuíram para uma maior reflexão sobre a avaliação, processos de raciocínio, poder de argumentação, espírito crítico e motivações profissionais dos seus alunos. Os alunos consideraram que as tarefas de investigação adaptadas à sua área de interesse (Artes Visuais) se tornam mais interessantes e motivantes e permitem desenvolver competências matemáticas relacionadas com a profissão.

Palavras-chave: Tarefas de investigação matemática; Gestão do currículo de matemática; Competência profissional

Abstract

Mathematical Investigations in the 10th Grade Class Mathematic B Curriculum in the Perspective of Students and Teachers

The objective of this study is to understand the inherent impact to the implementation of mathematic investigation tasks in the classroom, in the perspective of students and teachers, basing it in the Mathematic B curriculum in the 10th grade class.

The guide questions for the study were the following: a) How are the mathematic investigations interpreted and valued by the teacher and the pupils of the secondary level (Mathematic B- year 10)? b) In the teacher's view, how does the implementation of the mathematic investigations in the classroom relate and adapts to the curriculum guidance (Mathematic B) and how does it articulate with the school educational project? c) How does the accomplishment of mathematic investigations in the 10th grade curriculum – Mathematic B – contributes for the learning of fundamental competences for the practice of professional activities in the perspective of the teacher and students?

Methodologically, an approach of qualitative and interpretative investigation was chosen, established in an analytic and qualitative study case, basing the compiling of information from interviews, direct observation of the teacher and students' work in the classroom, students' reports and written works, and teachers' critical reflections. The investigator assumed the role of observer-participant.

The data analyse allowed to conclude that the students developed in the way they registered their conjectures, proofs and conclusions, assuming progressively the role of "mathematic investigators". Regarding the teacher, considering the preparation and the working up of the mathematic investigation tasks, one concludes that contributed for a bigger reflection on the assessment, ways of reasoning, argumentative power, critical spirit and professional motivation of her students. The students considered that the investigation tasks adapted to their area of interests (Visual Arts) became more interesting and motivated and allowed developing mathematic competences related to the profession.

Keywords: Mathematic investigations tasks; Curriculum management; professional competence

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio, incentivo, disponibilidade e amor incondicional por mim e meus filhos ao terem-lhes dado todo o carinho e atenção quando estive ausente.

À minha filha Mariana pelo tempo que não pude estar com ela.

Ao meu marido e família pelo apoio e ajuda que me deram e por nunca me terem deixado desistir.

Ao meu orientador, Prof. Dr. António Borralho, pelas sugestões, críticas e paciência demonstrada.

Ao Professor e alunas intervenientes no estudo, pois sem eles jamais teria conseguido.

Índice

Capítulo I. Introdução	1
1. Introdução	1
2. Justificação do tema	1
3. Problema e questões	4
4. Objectivos	5
5. Organização do estudo	6
Capítulo II. Revisão da literatura	7
1. O conceito de tarefa de investigação matemática	7
2. A importância das investigações matemáticas na aula de Matemática	13
3. Papel do professor na implementação das tarefas de investigação matemática	16
3.1. Relação do professor com as tarefas de investigação matemática	16
3.2. Papel do professor antes e durante a implementação das tarefas de investigação matemática na sala de aula	17
3.2.1. A escolha e a elaboração das tarefas	17
3.2.2. A implementação das tarefas de investigação matemática na sala de aula	22
3.2.3. O ambiente das aulas	25
4. Currículo versus investigações matemáticas	26
5. Actividade matemática dos alunos e tarefas de investigação	30
5.1. Identificação de actividades matemáticas no decorrer de uma investigação	32
5.1.1. Processos que levam à interpretação do enunciado da proposta de uma investigação matemática	35
5.1.2. Processos de desenvolvimento a partir das investigações matemáticas realizadas pelos alunos	36

5.2. Interações durante a implementação de investigações matemáticas na aula de matemática	37
5.2.1. Interações com o professor durante a investigação matemática	38
5.2.2. Interações com os seus pares durante a investigação matemática	39
5.3. Recursos usados pelos alunos durante as investigações matemáticas	39
5.4. A importância do erro nas investigações matemáticas	40
5.5. A importância da reflexão dos alunos sobre as investigações matemáticas na sala de aula	41
6. Orientações para o currículo de Matemática B do 10º ano de escolaridade na implementação de tarefas de investigação	42
6.1. Objectivos e competências gerais	43
6.2. Visão geral dos Temas e Conteúdos	44
6.3. Sugestões metodológicas gerais	44
6.4. Tecnologia	45
6.5. Temas transversais do programa	45
6.6. Temas do programa do 10º ano de Matemática B	46
Capítulo III. Metodologia da Investigação	49
1. Opções metodológicas	49
1.1. A investigação qualitativa	49
1.2. Estudo de caso	49
2. Participantes do estudo	50
3. As tarefas de investigação matemática	52
4. Processo e recolha de dados	52
4.1. Descrição geral do processo	52
4.2. A observação participante	54
4.3. As reflexões escritas pelo professor após as aulas	55

4.4. As entrevistas	55
4.5. Os relatórios dos alunos	57
5. Análise dos dados e a construção dos casos	57

Capítulo IV. Caracterização do contexto e dos intervenientes no estudo de caso

1. A escola	59
1.1. Localização e caracterização da escola	59
1.2. Corpo Docente e alunos	61
1.3. Projecto Educativo de escola	62
2. O professor	65
3. As alunas	72
3.1. Sílvia	72
3.2. Alexandra	75
4. Metodologia, organização, recursos e avaliação do projecto	78
4.1. Metodologia e recursos	78
4.2. Organização	80
4.3. Avaliação	81

Capítulo V. As tarefas de investigação matemática na sala de aula e no programa de Matemática B

1. O ambiente das aulas	85
2. As quatro tarefas de investigação matemática na aula de Matemática	87
2.1. As tarefas de investigação matemática com características teóricas	88
2.1.1. Tarefa de investigação matemática 1	88
2.1.2. Tarefa de investigação matemática 3	100
2.2. As tarefas de investigação matemática com características práticas	108
2.2.1. Tarefa de investigação matemática 2	108

2.2.2. Tarefa de investigação matemática 4	114
3. Perspectiva do professor	120
3.1. Reflexão sobre a elaboração e realização das tarefas	120
3.2. Potencialidades das tarefas	122
3.3. Dificuldades sentidas pelo professor na implementação das tarefas	124
3.3.1. Dificuldades relacionadas com os alunos	124
3.3.2. Dificuldades relacionadas com ele próprio	127
3.4. Adequação das tarefas de investigação no programa de Matemática B – 10º Ano, no curso de Artes Visuais e no Projecto Educativo de escola	128
3.5. Comparação das tarefas de investigação matemática e sua adequação ao programa de Matemática B	132
3.5.1. Selecção e preparação das tarefas	132
3.5.1.1. As fontes	132
3.5.1.2. Os tipos de tarefas seleccionados e a adaptação dos alunos	133
3.5.2. A realização das tarefas	134
3.5.2.1. O ambiente e as tarefas	134
3.5.2.2. Os conteúdos e as competências desenvolvidas	134
3.5.2.3. As dificuldades sentidas no programa de Matemática B e a sua articulação com o projecto educativo de escola	136
4. Perspectiva das alunas	138
4.1. Potencialidades das tarefas	138
4.1.1. Concepção da Matemática	138
4.1.2. Interpretação e valorização das investigações matemáticas no programa de Matemática B	139
4.1.3. Contributo da realização de investigações matemáticas no programa de Matemática B para a aprendizagem de competências profissionais	140
4.1.4. Análise global das potencialidades	141
4.2. Dificuldades sentidas pelas alunas durante e após a realização das tarefas	142

4.2.1. Dificuldades sentidas pelas alunas durante a realização das tarefas	142
4.2.2. Dificuldades sentidas pelas alunas após a realização das tarefas	142
4.2.2.1. Alexandra	142
4.2.2.2. Sílvia	146
4.3. Análise global e conclusão	148
Capítulo VI. Conclusões, limitações e recomendações	151
1. Resumo do estudo	151
2. Conclusões do estudo	153
2.1. Interpretação e valorização da implementação de investigações matemáticas na sala de aula através do programa de Matemática B, na perspectiva do professor e dos alunos	153
2.2. Adequação das investigações matemáticas ao programa do 10º ano de Matemática B e sua articulação com o curso Científico-humanístico de Artes Visuais e com o projecto educativo de escola	157
2.2.1. Programa de Matemática B	157
2.2.2. Curso de Artes Visuais	159
2.2.3. Projecto Educativo de Escola	160
2.3. O desenvolvimento de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, com a implementação de tarefas de investigação matemática na sala de aula através do programa do 10º Ano – Matemática B	160
3. Limitações do estudo	163
4. Recomendações	164
Bibliografia	167
Anexos	176

Índice de Quadros

Quadro 1. Classificação dos problemas de acordo com a situação de partida e o seu objectivo (Pehkonen, 1997)	10
Quadro 2. Raciocínio matemático do professor (ou aluno) na realização de uma investigação (Ponte <i>et. al.</i> , 1999)	24
Quadro 3. Papel do professor na condução de uma actividade de investigação (Ponte <i>et al.</i> , 1999)	25
Quadro 4. Temas matemáticos envolvidos nas tarefas	80

Índice de Figuras

Figura 1. Clarificação do que é uma investigação partindo de um conceito geral (problema) (Frobisher, 1994)	9
Figura 2. Conceito de actividade de investigação (Oliveira, H., 1998)	11
Figura 3. O carácter relacional das tarefas e actividades (Adaptado de Christiansen e Walther, 1986)	18

Capítulo I – Introdução

1. Introdução

O programa do 10º ano de Matemática B, tem por principal objectivo contribuir para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais. Sendo um programa recentemente implementado e, uma vez que fazem parte das suas orientações a realização de investigações matemáticas que visam contribuir para uma maior conexão com a realidade de cada um, é de extrema importância que se proporcionem aos alunos condições de aprendizagem que lhes permitam “fazer” matemática através da resolução de problemas e investigações matemáticas. Na preparação e no decorrer dessas investigações e devido a vários factores, muitas dificuldades e surpresas surgirão. Este trabalho visa desenvolver um estudo sobre a compreensão do impacto inerente à implementação de investigações matemáticas no programa de Matemática B – 10º ano, na perspectiva de alunos e professores.

2. Justificação do tema

O programa de Matemática B do 10º ano é um programa para os cursos tecnológicos e científico-humanístico de Artes Visuais. Pensar no 10º ano só por si não é possível, pois este deve ser visto como um motor de arranque para um percurso de três anos que conduzirá, no caso da Matemática B, ao mundo do trabalho. A preparação de um aluno para o acesso ao ensino superior que tem de passar pela realização de uma avaliação aferida a nível nacional, e a realização de tarefas específicas num contexto de trabalho tem especificidades variadas e diferentes. Tendo em conta essa especificidade vários factores terão que ser levados em conta. As tarefas de planificação, concepção e execução de actividades e os instrumentos de avaliação terão que ser enquadrados

respeitando o principal objectivo do programa. Segundo Dias (2002), relativamente à avaliação, é referido que esta e o seu desenvolvimento metodológico não pode passar só pela disciplina em causa ou pela sua versão B. Teremos de saber concretamente o que vai acontecer a estes alunos ao longo do seu percurso no Ensino Secundário, onde não pode ser esquecida a importância atribuída à Matemática na sua futura profissão. Se a Matemática no Ensino Secundário foi separada por versões, isto é, direccionada para diferentes áreas tendo em conta os agrupamentos escolhidos pelos alunos, será importante atribuir a cada curso uma identidade própria desenvolvendo capacidades e conhecimentos em cada aluno.

É considerado essencial neste programa que os alunos devam “fazer” a sua aprendizagem ao nível da resolução de problemas e aplicações da Matemática, sendo por isso importante a implementação de tarefas de investigação. As capacidades/aptidões referidas no programa que os alunos devem desenvolver revelam, claramente, a importância e o papel que a implementação de tarefas investigativas podem ter para alcançar esses objectivos. Capacidades como “seleccionar estratégias de resolução de problemas, formular hipóteses e prever resultados, interpretar e criticar resultados no contexto do problema, formular generalizações a partir de experiências, validar conjecturas” são aspectos que fazem parte da actividade de investigação matemática. É fundamental neste contexto e, tendo em conta que este programa visa contribuir para o exercício de actividades profissionais, que todas as investigações sejam investigações relacionadas com o mundo real e contextualizadas. Os actuais programas de Matemática, ao mesmo tempo que referem ser importante a realização de actividades de investigação, modelação, problemas e projectos, têm uma matriz baseada nos temas e conteúdos. Embora ao nível das indicações metodológicas seja salientado o papel das conexões e da interpenetração horizontal dos temas, ainda é forte a prescrição dos conteúdos. Devido à extensão do programa, os professores na maior parte das vezes preocupam-se mais em leccionar conteúdos programáticos do que em despender tempo a realizarem investigações matemáticas. Estas são evitadas por parte dos professores por diversas razões: insegurança ao realizar as investigações; falta de preparação e hábito; ausência de trabalho colaborativo devido à falta de disponibilidade por incompatibilidade de horários; receio pelos caminhos desconhecidos que conduzem essas investigações e rejeição por parte dos alunos. A introdução de tarefas de investigação na aula de Matemática pode levantar algumas dificuldades que merecem alguma reflexão. Segundo Brunheira e Fonseca (1995), uma das possíveis dificuldades

relaciona-se com a gestão do tempo. Os alunos necessitam de tempo para compreender e analisar a tarefa mas, no entanto, não se deverá prolongar demasiado a tarefa pois isso poderá conduzir a uma perda de motivação. Por outro lado, os alunos têm ritmos diferentes e, embora tenhamos que respeitar isso, não podemos esperar pelos mais demorados todo o tempo necessário. Se o fizermos, corremos o risco de haver uma dispersão por parte dos alunos e de perder o controlo da aula. Outro aspecto a considerar é o nível das propostas apresentadas. Todas elas deverão conter algumas tarefas acessíveis a todos os alunos pois, caso contrário, poderá desencadear-se um sentimento de frustração naqueles que têm mais dificuldades o que, em última análise, conduzirá também a uma dispersão. Habitualmente os alunos não estão familiarizados com este tipo de propostas. O facto de algumas questões serem mais abertas coloca-lhes dificuldades, as quais se reflectirão no trabalho do professor. Estas questões são de alguma forma caracterizadas por terem objectivos pouco definidos o que torna necessário o recurso a capacidades como a intuição de modo a encontrar uma possível estratégia de resolução. Além disso, os alunos normalmente esperam encontrar questões relacionadas com o capítulo em estudo e resolver exercícios e problemas pela simples aplicação dos conhecimentos adquiridos. Quando isto não acontece é natural que manifestem alguma insegurança e uma maior dependência em relação ao professor. Como Lerman (1989) afirma, o maior obstáculo à consideração de um currículo orientado para o processo de fazer matemática é a nossa própria relutância, como professores, cuja formação esteve sempre ligada aos conteúdos. Citando o autor:

“Eu lembro-me da minha reacção alguns anos atrás, quando me foi oferecido o lugar de investigador matemático numa equipa de cientistas, para a construção do modelo matemático da poluição de um importante lago. Eu não me lembrava de ter estudado Modelos matemáticos de lagos na Universidade e, num estado de pânico, recusei o trabalho. Eu não me estava a ver ser capaz de fazer matemática de uma forma criativa, mas apenas a reproduzir o que me tinham ensinado” (p. 74).

Como é na escola que os alunos estão uma parte significativa da sua vida onde desenvolvem capacidades, competências e hábitos de trabalho, os estudos têm que se preocupar também com essas vivências e com a forma como a organização escolar estimula ou cria obstáculos à aprendizagem. A escola, numa sociedade cada vez mais matematizada e tecnológica, tem de ter um papel importante na formação dos alunos como cidadãos críticos, activos e esclarecidos de forma a proporcionar oportunidades

de conhecimento e de intervenção nessa mesma sociedade. Por isso, as escolas secundárias deverão ser capazes de criar ambientes de aprendizagem estimulantes, baseados em projectos claros, coerentes e com real valor educativo e formativo.

É claro nas orientações do programa, que aplicações e problemas extraídos do mundo real estão no centro deste programa. Assim sendo, as tarefas de investigação, as actividades de modelação e a resolução de problemas são partes cruciais deste currículo. É sugerido aos professores que estes trabalhem colaborativamente visando a escolha e elaboração de tarefas de investigação apropriadas e que estes proporcionem aos seus alunos a oportunidade de escolherem as suas próprias estratégias de resolução de problemas e que as confrontem com os colegas fomentando, assim, o espírito crítico e valorizando o trabalho efectuado. Segundo o Ministério da Educação (Matemática B, 10º Ano) as tarefas de investigação devem ser elaboradas tendo em conta que o ensino da Matemática:

“É organizado de forma potente em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas” (p. 7).

As investigações matemáticas são uma componente essencial do programa de Matemática B (10º ano) e constituem uma prioridade no processo ensino-aprendizagem, desenvolvendo inúmeras capacidades tais como a argumentação, auto-confiança, gosto pela Matemática, capacidade investigativa e de questionamento e sentido crítico. Estas actividades deverão ser regulares e elaboradas colaborativamente procedendo-se posteriormente a uma reflexão conjunta sobre a prática no sentido de melhorar e aperfeiçoar. Estas tarefas investigativas constituem não só uma experiência matemática fundamental para o aluno como também um enriquecimento e desenvolvimento profissional para os professores.

3. Problema e questões

O problema em estudo que se levanta é: “ Compreender o impacto inerente à implementação de investigações matemáticas na aula de Matemática (Matemática B –

10º ano), na perspectiva dos professores e dos alunos.” Perante este currículo e suas orientações e objectivos algumas questões surgem:

1) De que modo as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelo professor no ensino secundário (Matemática B – 10ºano)?

2) De que modo as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelos alunos no ensino secundário (Matemática B – 10ºano)?

3) Do ponto de vista do professor, de que forma a implementação das investigações matemáticas na sala de aula se relaciona e adequa às orientações curriculares do programa (Matemática B) e se pode articular com o projecto educativo de escola?

4) De que forma a realização de investigações matemáticas no programa do 10º ano – Matemática B contribuirá para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, na perspectiva dos professores e alunos?

4. Objectivos

- Contribuir para a compreensão de como as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelos professores e alunos.

- Aplicar investigações matemáticas na sala de aula e avaliar de que modo se relacionam e adequam ao programa e se articulam com o projecto educativo de escola.

- Aplicar investigações matemáticas no programa de Matemática B e avaliar de que modo contribuem para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais.

5. Organização do estudo

Optámos por organizar a apresentação deste estudo em seis capítulos. No primeiro é apresentada a justificação do tema, o problema e as questões de investigação. No segundo capítulo será feita a revisão de literatura começando com o conceito de investigação matemática, passando pela importância das investigações matemáticas, papel do professor na implementação de investigações matemáticas, currículo *versus* investigações matemáticas, actividade matemática dos alunos e investigações matemáticas e terminando com a análise das orientações para currículo de Matemática B do 10º ano de escolaridade na implementação de tarefas de investigação. No terceiro capítulo é apresentada a metodologia da investigação fundamentando as principais opções metodológicas. O quarto capítulo trata da caracterização do contexto e dos intervenientes nos estudos de caso. No quinto capítulo tratam-se as tarefas de investigação matemática na sala de aula e no programa de Matemática B – Curso de Artes Visuais e comparam-se as tarefas e sua adequação ao programa de Matemática B. Por último, apresentam-se as conclusões, limitações do estudo e recomendações.

Capítulo II – Revisão da literatura

1. O conceito de tarefa de investigação matemática

Em termos gerais investigar assume um significado mais forte que explorar. Enquanto explorar, no sentido normal da palavra, significa entrar por zonas ou locais desconhecidos para aprofundar conhecimento, notar diferenças, investigar sugere procurar descobrir, procurar encontrar.

Segundo Matos (1991) no domínio do ensino da Matemática, as tarefas de investigação realizadas pelos alunos podem partir de propostas em que os alunos são colocados no papel de matemáticos. Dada uma situação suficientemente rica e de complexidade adequada ao nível de desenvolvimento matemático dos alunos, eles tentarão compreender essa situação e encontrar relações que lhes permitam fazer generalizações.

Segundo Ernest (1996), o conceito de investigação é problemático por duas razões fundamentais. Em primeiro lugar ele descreve um processo: a procura, a acção de investigar, exame sistemático, inquirição. No entanto, o termo investigação é um substantivo, o que explica a sua utilização frequente num sentido mais estrito que tende a identificar investigação com a situação matemática inicial ou questão de partida. Assim, não só se substitui o significado de toda uma actividade por uma das suas componentes, como se opera uma mudança centrada no professor ao focar-se o seu controlo na proposta de uma investigação como tarefa, análoga à proposta de um problema, em contraste com uma perspectiva de investigação centrada naquele que aprende. Embora uma investigação se possa iniciar a partir de uma questão ou situação matemática, o objecto da inquirição é alterado por quem conduz a investigação ao formular novas questões que exigem análise e exploração.

As actividades de investigação podem ser encaradas como parte de um conjunto de actividades em que se pretende que o aluno se envolva profundamente, participando de forma activa e utilizando conceitos e processos matemáticos. Contudo, será pertinente descortinar a especificidade das actividades de investigação tentando concretizar a ideia de “investigação” que se revela, por vezes, algo difusa quando se

procura concretizar na aula de Matemática. Vários autores recorrem à análise das diferenças e semelhanças entre resolução de problemas e tarefas de investigação matemática.

Segundo Schonfeld (1996) o processo de resolução pode implicar explorar um contexto para além do que é sugerido no enunciado pois o aluno poderá ir por outros caminhos e aparecerem, assim, questões alternativas que precisam de ser estudadas, suscitando conjecturas que serão testadas e provadas. Chegamos assim às investigações matemáticas.

Ernest (1991), (citado por Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002), considera que um primeiro aspecto distintivo entre resolução de problemas e investigações matemáticas é a formulação de problemas. Na resolução de problemas, as questões são formuladas à partida, enquanto que nas investigações matemáticas a questão é um primeiro passo a desenvolver. Uma outra distinção relaciona-se com os seus objectivos pois na resolução de problemas, o objectivo é encontrar um caminho para atingir algo que não era imediatamente acessível – é um processo convergente. Numa investigação matemática o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente, porque sabemos o ponto de partida mas não sabemos até onde nos levará.

Segundo Pires (2001) uma questão que se coloca é conhecer a natureza das tarefas e as suas potencialidades e conseguir distinguir, claramente, exercício, problema, exploração e investigação matemática. O que é um problema para um aluno poderá ser um mero exercício para outro bastando, para isso, que o aluno conheça o algoritmo/processo de resolução para que um problema se transforme num exercício rotineiro. Deste modo, uma tarefa rotineira poderá transformar-se num processo de investigação e uma tarefa que, à partida, poderia ter características de investigação pode não conduzir a uma aprendizagem significativa se os alunos não se motivarem para a fazer ou se o próprio professor a descaracterizar dando, por exemplo, pistas muito indicadoras. É crucial que os professores preparem cuidadosamente as tarefas em função de vários factores que com elas estão ligados.

O facto da resolução de problemas ter recebido uma maior atenção pela educação matemática, conjugada com a proximidade efectiva que goza com as tarefas de investigação, tem feito com que a natureza destas últimas tenha tido, em geral, menor explicitação. Os dois tipos de tarefas são, amiúde, confundidos o que poderá contribuir para a fraca expressão das tarefas de investigação na sala de aula (Frobisher,

1994). Este autor procura clarificar o que é uma investigação partindo de um conceito geral (que nota como “problema”) que se subdivide em dois grandes grupos: problemas e investigações.

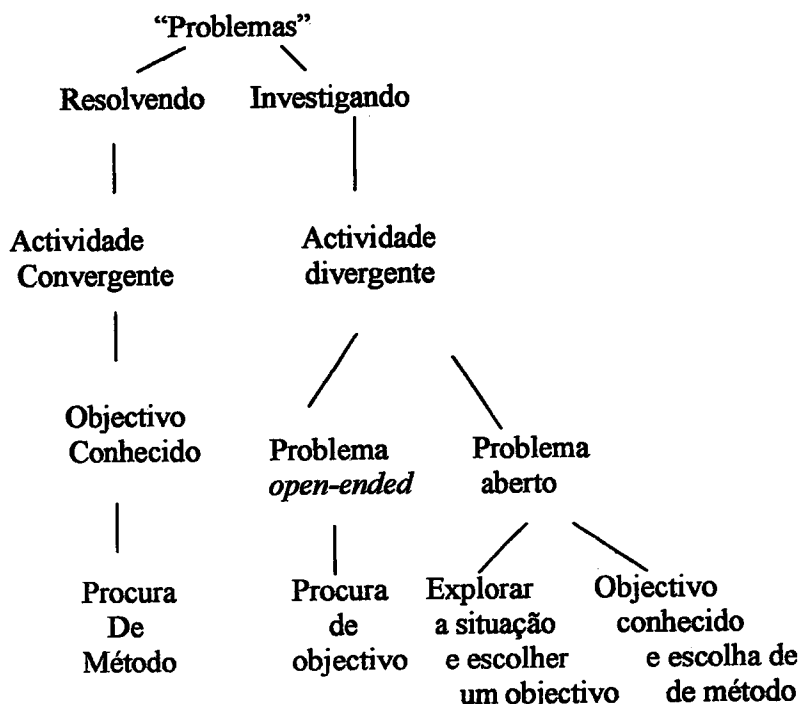


Figura 1. Clarificação do que é uma investigação partindo de um conceito geral (problema) (Frobisher, 1994, p.155)

De acordo com a Figura 1, numa investigação o contexto é uma situação que conduz a um objectivo que é escolhido como constituindo o resultado da exploração dessa situação. Para além disso é o aluno que deve decidir sobre o modo de explorar a situação. Esta definição de investigação está de acordo com a sugerida por Ernest (1996) relativamente a duas características: tratar-se de uma actividade divergente e de uma situação em que a decisão sobre o método de exploração é da responsabilidade do aluno. No entanto, o terceiro tipo de investigações considerado por Frobisher (1994) – objectivo conhecido, escolha de método – uma vez que retira o poder de decisão ao aluno sobre o que se vai investigar, não é considerado por Ernest (1996) como constituindo uma investigação.

Pehkonen (1997), sobretudo com o objectivo de clarificar o que são os problemas que designa por *open-ended*, resume numa tabela uma classificação de problemas a partir da análise da situação de partida e do seu objectivo. Este autor considera haver

uma grande proximidade entre as investigações e os problemas *open-ended* pois, para além de serem agrupados na mesma categoria, não figuram em mais nenhuma. Assim, Pehkonen (1997) considera que estas situações problemáticas podem ser caracterizadas por uma situação de partida fechada e cujo objectivo da situação é aberta.

Quadro 1. *Classificação dos problemas de acordo com a situação de partida e o seu objectivo* (Pehkonen, 1997, p.9)

Objectivo da Situação / Situação de partida	Fechado (i. e. totalmente explicado)	Aberto
Fechada (i. e. totalmente explicada)	Problemas fechados	Problemas <i>open-ended</i> Situações da vida real Investigações Sequências de problemas Variantes de problemas
Aberta	Problemas da vida real Variantes de problemas	Situações da vida real Variantes de problemas Projectos Formulação de problemas

Segundo Brocardo (2001) uma investigação não tem em conta as características do processo que vai da situação de partida até atingir o objectivo da situação, tornando-se difícil comparar a sua definição com as de Ernest (1996) e Frobisher (1994). É referido que Pehkonen (1997) analisa as investigações apenas como tarefas e não como actividade não sendo claro, segundo este investigador, se estes autores entendem do mesmo modo algumas expressões. Por exemplo, Pehkonen (1997) clarifica que entende que uma situação é fechada quando está explicada exactamente (*exactly explained*, no original) e utiliza a categoria “objectivo da situação fechado”. Por outro lado Frobisher (1994) refere-se ao “objectivo [da situação] conhecido”. Assim, fica a dúvida que estas duas expressões tenham o mesmo significado uma vez que o objectivo de uma situação pode ser conhecido mas sem que necessariamente esteja explicado. Para Ernest (1996) uma investigação envolve a formulação de problemas, a qual constitui mesmo uma

característica do contexto investigativo. Para Pehkonen (1997), uma investigação caracteriza-se por uma situação de partida fechada e tanto Ernest (1996) como Frobisher (1994) parecem não partilhar esta opinião.

Brocardo (2001) em resumo, afirma que a tentativa de definir o que é uma investigação a partir das diferenças e semelhanças com os problemas, embora clarifique sobre vários aspectos, não conduz a um conceito de investigação totalmente claro e partilhado por vários autores. Relativamente ao que já foi referido, Ernest (1996) e Frobisher (1994) têm em conta as características de três aspectos: a situação de partida, a divergência do processo e a situação de chegada. Pehkonen (1997) apenas considera o primeiro e o terceiro. Assim, este autor parece, sobretudo, pensar nas investigações como as tarefas escritas ou orais que são propostas aos alunos. Daí, apenas a consideração das características da situação de partida e de chegada. Ernest (1996) e Frobisher (1994) referem-se tanto a este – segundo Ernest, ele é um sentido estrito do termo que advém do facto de o termo investigação ser um substantivo – como ao processo de investigar, ou seja a toda a uma actividade que abrange mais do que as componentes situação de partida e chegada.

Segundo Oliveira (1998) conceito de actividade de investigação pretende aproximar a actividade do aluno à do matemático, envolvendo por isso diversos processos matemáticos e que são ilustrados no esquema seguinte:

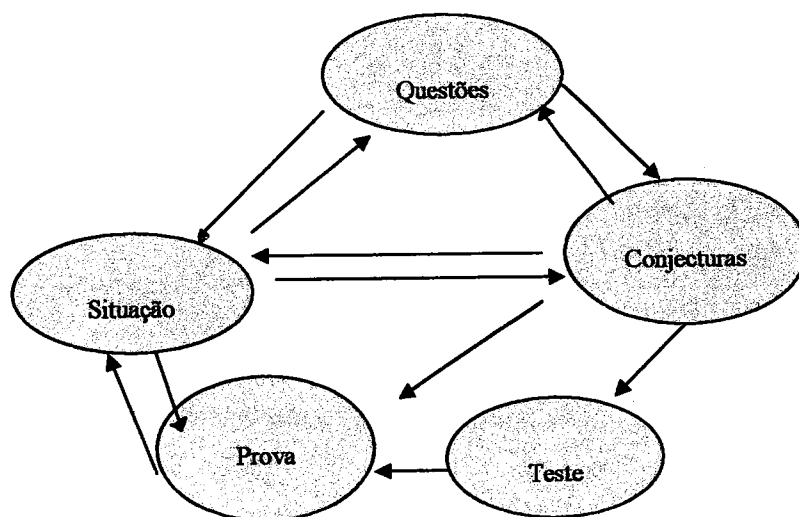


Figura 2. Conceito de actividade de investigação (Oliveira, H., 1998, p. 15)

Num primeiro momento existe a interrogação a uma situação, ou seja uma ou mais questões são formuladas e sobre as quais se vai trabalhar. A observação, na

procura de algo que parece regular, é um elemento fundamental nesta fase. O surgimento de conjecturas é, frequentemente, acompanhado neste processo. À medida que a conjectura vai resistindo a sucessivos testes vai-se ganhando uma maior confiança na sua solidez. Mas se falhar no teste, há necessidade de voltar atrás reformulá-la ou, até mesmo, abandoná-la definitivamente e olhar a questão de outra forma, formulando conjecturas distintas da primeira. Passando no teste haverá que demonstrar a sua veracidade para deixar de ser “apenas” uma conjectura, e tornar-se uma propriedade estabelecida pelo método matemático. Naturalmente que o ciclo pode ser interrompido em qualquer um dos pontos, havendo necessidade de rever o percurso que foi feito até ali. Por vezes, até mesmo a ordem das etapas pode ser invertida ou algumas delas serem passadas por alto. E, obviamente, a mesma situação pode dar origem a muitas questões, levando o investigador a percorrer variados caminhos.

Segundo Mendes (1998), na área específica da Matemática, as investigações matemáticas são um tipo de proposta de actividade aberta, em que: (i) a formulação e o contexto do problema ou da situação problemática não é explícita, e (ii) é colocado aos alunos um desafio que lhes desperta interesse. Ao envolverem-se na actividade os alunos analisam situações, levantam questões, trocam opiniões, constroem percursos distintos, podendo descobrir soluções e chegar a conclusões através de caminhos divergentes de observação, exploração e investigação.

As investigações matemáticas começam então com questões abertas e requerem que sejam os próprios alunos a definirem os seus próprios objectivos, a conduzirem as experiências e decidirem o que é válido, a formularem e testarem conjecturas. As situações abertas, cujas questões não estão completamente formuladas, permitem ao aluno envolver-se na actividade desde o seu primeiro momento e, desta forma, as investigações matemáticas envolvem processos matemáticos tais como identificação de questões, a formulação, testagem e a prova de conjecturas, a argumentação, a reflexão e a avaliação. Neste contexto a actividade investigativa proporciona assim, aos alunos, o contacto com uma parte essencial da Matemática, ao se defender que o *aprender Matemática se transforme em fazer Matemática* (NCTM, 1991).

2. A importância das investigações matemáticas na aula de Matemática

A Matemática é entendida por muitos como uma ciência exacta de resultados inquestionáveis e apresentada como um produto acabado onde se resolvem inúmeros exercícios rotineiros sem se entender a sua utilidade e as conexões com as outras áreas da Matemática e do saber. A Matemática tem que ser olhada como uma actividade humana, onde todos são capazes de criar Matemática. Como afirma Ian Stewart (1995), citado por Fonseca, Brunheira e Ponte (1999)

“Os problemas são a força motriz da Matemática (...) um bom problema é aquele cuja solução, em vez de conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos...” (p. 17).

O que se pretende é que haja uma aproximação entre a actividade do matemático e a actividade do aluno na aula de Matemática. Naturalmente, os conhecimentos que o matemático possui, os processos de que faz uso, o tempo que dedica à sua actividade são incomparáveis aos do aluno, mas a natureza do processo é a mesma, tendo em conta a descoberta, retrocessos e avanços, elaboração de conjecturas e a procura de provas. Alunos que memorizam factos ou procedimentos sem os compreenderem, facilmente os esquecem ou não sabem como ou onde usá-los. A Matemática faz mais sentido e é mais fácil de recordar e de aplicar quando os alunos conectam o novo conhecimento ao já existente de forma significativa (Schonfeld, 1988, citado em NCTM, 2000). Podemos, assim, referir que as investigações matemáticas desempenham um papel crucial no processo ensino-aprendizagem porque são uma actividade essencial da actividade matemática e são necessárias para dar uma visão global da natureza da disciplina pois (a) aproximam o trabalho dos alunos do trabalho dos matemáticos com momentos de descoberta, de retrocessos e de avanços, da elaboração de conjecturas e da procura das suas provas, (b) favorecem o envolvimento do aluno que é necessário para uma aprendizagem significativa e relevante, (c) fornecem múltiplos pontos de entrada para alunos com diferentes níveis de competência, (d) estimulam um modo de pensamento holístico, globalizante, essencial ao desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que relacionam múltiplos tópicos, (e) podem ser inseridas naturalmente em todas as partes do currículo, e, (f) reforçam as aprendizagens elementares. No desenvolvimento deste tipo de tarefas os

alunos poderão melhorar a capacidade de resolução de problemas quer na Matemática, quer na vida real, visto que terão de procurar estratégias diversificadas, interações e conjugar ideias para suplantar obstáculos e erros cometidos permitindo, na própria experiência, voltar atrás, se necessário, e levantar novas questões até atingir soluções.

As investigações matemáticas assumem um papel importante no processo de ensino porque promovem a regulação das aprendizagens pelo aluno. O significado atribuído a cada proposta e a actividade desenvolvida não são os mesmos para todos os alunos e os desenvolvimentos serão diferentes. Neste contexto, segundo Dias (2005) a proposta de tarefas de investigação pressupõe que o aluno interprete a proposta e desenvolva uma actividade significativa de modo a estabelecer conexões com outras áreas do saber, podendo atingir diferentes níveis de aprofundamento de conteúdos matemáticos, através de um processo individual mas em interacção com os diferentes intervenientes da sala de aula.

Para Schoenfeld (1991) existem actividades que têm sentido matemático por estarem associadas a determinados tipos de comportamento onde se inclui modelar e simbolizar, comunicar, explorar, conjecturar e provar. As investigações matemáticas constituem uma situação de trabalho em aula que envolve tais processos, quer se situem num enquadramento realístico, quer num contexto matemático (Ponte, 2003). Em ambos os contextos, as investigações matemáticas permitem a vivência de processos do pensamento matemático como representar, visualizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar (Dreyfus, 1991), e que são os processos que interagem entre si. As investigações matemáticas constituem uma oportunidade para que os alunos aprendam matemática a fazer matemática o que, segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem capacidades de ordem superior e até promoverem e desenvolverem novas aprendizagens. O contacto com as investigações matemáticas permite a descoberta de conexões entre os vários objectos matemáticos, o reforço da capacidade de raciocinar logicamente, de formular contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios, de sistematizar, de verificar resultados e de construir demonstrações.

Segundo Mendes (1998) no decurso de uma actividade investigativa surgem etapas que poderão ser mais ou menos demoradas fruto da estratégia adoptada, da definição de novos pontos de partida, das leituras sobre os dados apresentados, das reflexões ocorridas, do envolvimento e do apropriar dos seus pontos fulcrais de modo a

poderem dar por concluídas as questões que sucessivamente lhes vão surgindo no decorrer da actividade. Estes percursos, ou outros análogos, serão eventualmente mais enriquecedores que os preceitos e etapas de resolução de problemas indicados por Polya. Poderão existir similaridades entre etapas de uma actividade investigativa e as fases preconizadas por Polya para a resolução de problemas como, por exemplo, o percurso que vai desde a compreensão do problema até à definição de um plano. Nesta fase os alunos sentem algumas dificuldades, por vezes insuperáveis, na concepção de um plano para a resolução do problema. Esta fase poderá ser mais fechada que aquela que ocorre numa actividade investigativa que, aqui, corresponderá ao delinear de percursos ou caminhos para chegar às conclusões ou mesmo o reformular do ponto de partida e/ou efectuar novas formulações. Amorim e Matos (1990) consideram que:

“ As actividades investigativas a realizar pelos alunos deverão constituir propostas abertas, com linhas orientadoras e exploratórias no início, mas mantendo uma margem de liberdade que permita aos alunos, e em diferentes graus, o desenvolvimento de diversos níveis de envolvimento. Consequentemente, as actividades de investigação devem proporcionar aos alunos a experiência da descoberta, da realização de conhecimento matemático, que é comunicado a uma audiência no seio da qual é discutido” (p. 158).

Estas tarefas, a resolução de problemas, o desenvolvimento de projectos e outras contrapõem-se à saliência e dominância que o ensino tradicional dá à manipulação exaustiva de exercícios que, treinados longamente ao longo do ano lectivo, conduzem naturalmente a aquisição de conhecimentos. A integração gradual das actividades indicadas, na sala de aula, poderá proporcionar aos alunos o desenvolvimento de capacidades como o desenvolvimento do espírito crítico, a confiança em fazer matemática e o aumento do sentimento de tolerância e de cooperação. Progressivamente dá-se a aquisição de uma base conceptual consistente e duradoura que mais tarde possibilite aos alunos reconstruir o seu conhecimento e utilizá-lo em outros contextos.

Em conclusão, a introdução de tarefas de investigação matemática, tomando como ponto de partida que os alunos estão interessados e motivados e assumindo que as próprias tarefas são mobilizadoras, fomenta a cooperação criando um novo enquadramento que gera discussão, permite a verbalização dos pensamentos, melhorando a capacidade de comunicação oral e escrita.

3. Papel do professor na implementação das tarefas de investigação Matemática

3.1. Relação do professor com as tarefas de investigação matemática

A realização de tarefas de investigação na aula de Matemática pode gerar múltiplas situações inesperadas e potencialmente desafiadoras para os professores quer quanto à organização quer quanto à gestão do processo ensino-aprendizagem. A selecção e adaptação das tarefas e a sua integração no currículo implementado podem constituir o primeiro obstáculo a ser transposto dada a pouca divulgação deste tipo de tarefas e a própria natureza dos currículos vigentes, muito centrados em torno dos conteúdos e bastante prescritivos. A proposta de tarefas de investigação para a aula requer a ponderação de diversos elementos de carácter metodológico: o modo como são introduzidas, a organização da turma, o estímulo e o apoio a conceder, a resposta a múltiplas solicitações, a integração dos diferentes caminhos seguidos pelos alunos, a gestão do tempo, a conclusão da tarefa e a sua avaliação.

As dificuldades que estas aulas podem criar à prática estabelecida não serão encaradas e geridas de igual forma pelos professores. Os conflitos e os dilemas que surgem são integrados de modo personalizado na acção. Qual a atitude do professor para com eles? Qual o significado que lhes atribui?

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) nem todos os professores têm a mesma relação com a Matemática. Uns gostam de conhecer novos desenvolvimentos da Matemática, de resolver problemas e de explorar situações que podem ser matematicamente interessantes. Outros não mostram muito interesse por estas tarefas, ou sentem mesmo dificuldades em desenvolvê-las. Este aspecto significa que para alguns as investigações matemáticas estão longe de se tornarem experiências significativamente ricas. Segundo os mesmos autores, a integração, bem sucedida, de tarefas investigativas na prática de ensino pressupõe, da parte do professor, uma boa relação com este tipo de trabalho matemático – o que significa compreender o que é uma tarefa de investigação, apreciar o seu valor enquanto experiência matemática e ter gosto pessoal em as realizar.

Alguns autores têm sublinhado a importância das experiências matemáticas vividas pelos professores como factor determinante no tipo de ensino que desenvolvem (Ball, 1990; Llinares, 1993). Mais ainda, a formação do professor de Matemática

totalmente centrada nos conteúdos é considerada por Lerman (1996) como sendo, possivelmente, o maior obstáculo na orientação do currículo de Matemática em termos dos processos. É, portanto, de admitir que a relação dos professores e dos futuros professores com as tarefas de investigação tenha muito a ver com as experiências matemáticas por eles vividas enquanto alunos do ensino não superior, ao longo da sua formação profissional e também nos primeiros anos de carreira. É também de admitir que possa existir uma forte relação entre o modo como os professores e os futuros professores encaram as tarefas de investigação e a forma como vêm, de um modo geral, a Matemática e o currículo como instrumento de orientação da sua prática profissional.

Num estudo realizado com professores de Matemática, Canavarro (1993) sugere a realização de mais investigações com professores que participam em actividades inovadoras com o objectivo de analisar a interacção entre as concepções e as práticas. Neste trabalho detectou, em alguns casos, a existência de dificuldades na integração regular do computador na prática lectiva, embora todos os professores o valorizassem enquanto ferramenta a ser utilizada no ensino da Matemática.

As situações de inovação constituem, pois, uma área em que intervêm muitos factores e que carece de maior aprofundamento em relação às representações e às práticas dos professores. Constituindo as tarefas de investigação uma metodologia inovadora para a maioria dos professores é importante analisar qual a aceitação que podem ter junto destes e o modo como são integradas na sua prática profissional.

3.2. Papel do professor antes e durante a implementação das tarefas de investigação matemática na sala de aula

3.2.1. A escolha e a elaboração das tarefas

Segundo Pires (2001) uma outra questão que se coloca é a da preparação das tarefas. O esquema seguinte mostra o carácter relacional de preparação das tarefas e permite, com mais facilidade, clarificar estabelecer as relações a ter em conta:

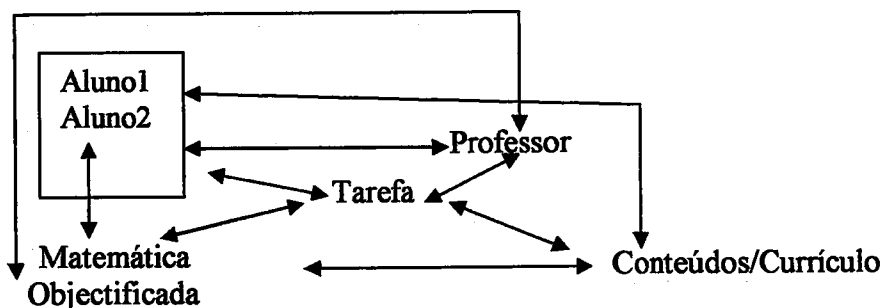


Figura 3. O carácter relacional das tarefas e actividades (Adaptado de Christiansen e Walther, 1986, p. 247)

Como o esquema sugere são muitas as relações a ter em conta na preparação das tarefas. Segundo Pires (2001) o professor tem que se questionar sobre se possui a matéria-prima necessária para os alunos se envolverem nas actividades e de reflectir sobre a avaliação dos alunos e do currículo para ir encontrando o caminho a percorrer.

Para que a realização de actividades de investigação na aula de Matemática constitua, efectivamente, um momento de aprendizagem significativo é necessário que o professor invista na preparação das tarefas. O grau de imprevisibilidade que poderão conduzir as investigações matemáticas exige, do professor, uma preparação mais cuidada que permita ir mais além da tarefa proposta aos alunos. Assim, o professor terá de adoptar uma postura investigativa e de reflexão sobre os objectivos a que se propõe atingir na implementação de investigações matemáticas na sala de aula.

Cabe, desta forma, ao professor participar activamente na elaboração do currículo delineando objectivos, metodologias e estratégias, reformulando-os em função da sua reflexão sobre a prática (Ponte *et. al.*, 1998). Segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) o professor precisa de decidir sobre alguns aspectos como:

- Qual o peso relativo a atribuir às actividades de investigação? Devem elas constituir-se como um eixo condutor do trabalho com os alunos, estão a par com outras actividades ou, pelo contrário, assumem um peso menor no currículo?
- Como se relacionam as investigações com os conteúdos a serem leccionados? Estes devem estar na base, ou a sua presença tem uma importância secundária? Os conteúdos podem surgir a partir da actividade ou esta deverá ser realizada depois de serem tratados?

A preparação das aulas de investigação propriamente ditas constitui outra fase importante. Em primeiro lugar há que seleccionar, adaptar ou mesmo construir a tarefa, o que deve ter em conta vários aspectos. Por um lado, para que a tarefa possa realmente desencadear uma investigação por parte dos alunos, é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos. Para isso o professor tem necessidade de fazer uma pesquisa em torno de vários materiais disponíveis. Mas, para além desta pesquisa, precisará de recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objectivos. Por outro, esta escolha está, também, dependente dos alunos que a irão trabalhar, devendo o professor ter em conta o seu nível etário, o seu desenvolvimento matemático, a familiaridade que têm com o trabalho investigativo e os seus interesses.

Além de preparar a tarefa é necessário pensar na estrutura das aulas e no modo de trabalho dos alunos. É muito habitual, neste tipo de tarefa, organizar os alunos em pequenos grupos mas cabe ao professor decidir se a realização da tarefa poderá constituir uma oportunidade para trabalho individual, em pequeno grupo ou, mesmo, no grupo-turma. Para além da organização dos alunos, deve ser considerada a realização de diferentes momentos durante as aulas com o objectivo de compreender e avaliar a evolução dos alunos durante todas as fases inerentes à realização de uma tarefa de investigação matemática, bem como a respectiva gestão do tempo. Outra opção a tomar é relativa à utilização de recursos. Se é verdade que em alguns casos basta-nos o enunciado da tarefa e material de escrita, também é verdade que a utilização de recursos, como *software* dinâmico de Geometria (caso do *Cabri* ou *GSP*) ou *software* de cálculo simbólico (como o *DERIVE*) proporciona a realização de investigações bastante interessantes que, de outro modo, se tornariam difíceis ou, mesmo, impossíveis de realizar.

Estas são algumas das questões a que o professor deve atender na preparação das aulas de investigação. A importância desta fase é tanto maior quanto menor for a experiência do professor na realização de trabalho investigativo, pois ela constitui um reforço bastante significativo para a segurança que sente no seu desempenho, durante as aulas. Contudo, é preciso não esquecer que esta é apenas uma base de trabalho e que o professor deve estar preparado para alterar a sua agenda consoante o rumo dos acontecimentos sendo que a capacidade de reflexão na acção é aqui particularmente importante.

A escolha e elaboração das tarefas envolvem muitos factores. Que saberes profissionais estão envolvidos na construção, adaptação e selecção de tarefas de investigação? Como podem eles desenvolver-se? Que atitudes manifesta o professor quando se envolve na criação deste tipo de tarefas?

Ser capaz de construir, ou mesmo adaptar, situações de investigação é muito mais complexo do que parece à primeira vista. É um trabalho criativo (para o qual não há receitas) e tem de ser feito atendendo aos seus alunos. Este trabalho requer do professor, entre outros aspectos, “agilidade” matemática, uma boa noção dos conhecimentos, potencialidades e interesses dos seus alunos, bem como um bom domínio dos materiais e recursos que podem ser usados como apoio a esta actividade. A selecção de tarefas requer também conhecimentos e capacidades importantes, como ser capaz de reconhecer os processos e os conceitos a que uma tarefa conduz e reflectir sobre a sua adequação aos alunos que a irão trabalhar.

O professor deve atender ao contexto em que está inserido, aos meios que dispõe, à organização dos recursos, ferramentas que sabe utilizar ou que terá de aprender para que a implementação das tarefas seja a melhor sucedida possível. Embora existam muitas propostas já elaboradas e “experimentadas” cabe ao professor a missão de seleccionar e adaptar as que melhor se poderão enquadrar na turma em questão.

Lappan (1998) menciona alguns pontos que os professores têm que analisar quando trabalham com os materiais curriculares e os implementam numa turma com os seus alunos. Refere que este ao preparar as aulas deve ter em conta: (a) o conteúdo da tarefa; (b) a forma que ela terá para ser atractiva; (c) os objectivos e forma de realização; (d) os meios e recursos materiais, humanos e intelectuais; (e) a metodologia na aplicação; (f) a análise da avaliação dos alunos, do currículo e dos contextos.

As propostas de tarefas de investigação escritas constituem um ponto de partida possível para desenvolver uma investigação mas a sua concepção levanta algumas questões por parte de alguns autores. Em primeiro lugar é importante reflectir sobre o grau de estruturação da tarefa e este aspecto deve ter em conta a experiência dos alunos neste tipo de tarefas. Uma tarefa mais estruturada, pode ser adequada para alunos que começam a ter as suas primeiras experiências de investigação, sem que isso signifique uma menor qualidade da tarefa proposta. Por outro lado, uma tarefa mais aberta pode parecer de tal forma vaga aos alunos que estes não se sintam desafiados a começar qualquer exploração (Porfirio e Oliveira, 1999).

Holding (1991) considera que todas as investigações derivam de uma situação inicial a que chama ponto de partida. Este deve ter as seguintes características: ser compreensível, ser desafiador, promover alguma dificuldade, ou seja, não ser visível uma solução imediata e implicar alguma discriminação entre possíveis acções. Uma boa sugestão para o ponto de partida, consiste em concebê-lo como a análise de um caso particular. Assim, inicialmente, os alunos apercebem-se das relações que existem entre os dados e, mesmo sem que seja necessário recorrer a um método sistemático, conseguem chegar a uma conclusão. A partir daqui, uma vez que o ponto inicial permitiu um primeiro nível de compreensão dos aspectos envolvidos na investigação, é mais fácil envolverem-se na exploração de mais exemplos e na procura de padrões.

Também o tipo de linguagem a ser utilizada é outro aspecto importante a ter em conta. Porfírio e Oliveira (1999) chamam a atenção para que expressões com o mesmo significado mas em que os termos usados diferem ligeiramente, não dão o mesmo tipo de indicações aos alunos sobre a natureza da investigação que deverão desenvolver. Segundo Holding (1991) embora seja importante reflectir sobre o tipo de linguagem que se usa no enunciado, a preocupação central reside na tentativa de que ela seja compreensível pelos alunos que a irão explorar.

Porfírio e Oliveira (1999) consideram que é importante que o enunciado de uma tarefa de investigação dê indicações de que os alunos devem descobrir argumentos para validar as suas conjecturas. Como a prova constitui parte integrante do processo investigativo, e os alunos tendem a considerar como conclusão uma conjectura que resiste a alguns testes, o enunciado deverá vincar a necessidade da prova recorrendo, por exemplo, à inclusão de expressões “justifica as relações que estabeleceste” ou “o que te leva a pensar que as relações que identificaste se verificam sempre”.

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) o desenvolvimento dos saberes profissionais necessários para a realização, na sala de aula, de tarefas de investigação matemática poderá ser facilitado pela existência de contextos formativos como círculos de estudos, oficinas de formação, projectos educativos, ou outras formas de trabalho que contemplem a interacção entre professores com interesses semelhantes (ou entre professores e investigadores).

No que diz respeito às atitudes, a autoconfiança é, talvez, uma das condições mais importantes para se produzir boas tarefas de investigação e gera-se, muito provavelmente, através das boas experiências de realização de investigações e de construção de tarefas de investigação.

A preparação das tarefas de investigação é uma fase muito importante. Para além da preparação das tarefas ou sua adequação é necessário pensar na estrutura das aulas, no modo como organizar os alunos, sendo usual agrupá-los, e também nos materiais necessários. Posteriormente, o professor deverá reflectir sobre o trabalho realizado, no sentido de melhorar o trabalho futuro, apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização, alertando para dificuldades a ter em conta. A reflexão constitui um momento de aprendizagem também para o professor, sobre o seu desempenho, sobre o conhecimento que vai construindo acerca dos seus alunos, sobre actividades de investigação.

3.2.2. A implementação das tarefas de investigação matemática na sala de aula

Quando os professores propõem tarefas de investigação correm por vezes o risco dos alunos seguirem por um caminho errado. No entanto, torna-se necessário que seja a própria experiência a mostrar o erro. O professor terá nestas situações um papel muito importante no conduzir e no acompanhar da investigação matemática proposta aos seus alunos.

Segundo Cunha (1998) as investigações matemáticas dão especial atenção ao modo como se propõem as tarefas aos alunos devendo (a) existir contenção nas respostas às solicitações dos alunos, (b) estar atento à capacidade dos alunos nos surpreenderem, (c) haver sempre uma discussão final, permitindo a partilha de experiências e de significados entre os alunos, possibilitando a clarificação de ideias e esclarecimento de eventuais dúvidas, (d) pedir aos alunos respostas escritas mas sem cair no exagero, de modo a que estes expliquem por escrito o seu raciocínio e as suas descobertas permitindo, assim, que estes melhorem a sua capacidade de comunicação e desenvolvam a sua capacidade de reflexão sobre o que acabaram de explorar, (e) diversificar as tarefas em extensão, no tipo de regularidades, na forma de apresentação, nos suportes de representação, na estruturação, no nível de dificuldade, (f) trabalhar de modo variado onde as tarefas devem ser realizadas em grupo, aos pares e individualmente, (g) não estruturar demasiado as tarefas e o uso da tecnologia deve ser incentivado, (h) encarar as tarefas de investigação como tendo valor em si mesmas e não apenas como meio para “dar matéria”, (i) ser inseridas no sistema de avaliação, (j) trabalhar colaborativamente, com outros professores, preparando actividades, assistindo a aulas, reflectindo em conjunto sobre o desenrolar das mesmas e de que modo podem ser implementadas ou modificadas. O professor tem, então, um papel importante na

preparação de uma tarefa de investigação, devendo, ter em conta os seus alunos e assumindo um papel de orientador, guiando os alunos no processo ensino-aprendizagem ajudando-os nos caminhos por eles escolhidos bem como promovendo a reflexão e permitindo que sejam eles a construir o seu próprio saber matemático. Promove-se assim a auto-confiança e consciencialização dos seus alunos de que todos são capazes. Antes de introduzir uma tarefa desta natureza o professor deve ter em conta se os alunos estão ou não familiarizados com este tipo de tarefa. O professor poderá optar por fazer a apresentação da tarefa oralmente, por escrito ou ambas, clarificando a ideia principal, explicitando o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e criar um ambiente favorável ao desenvolvimento desse trabalho. Durante a fase de desenvolvimento da tarefa pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa e, neste contexto, o professor deve centrar a aula na actividade dos alunos, assumindo um papel de orientador. Segundo NCTM (1994) o professor deve colocar regularmente a pergunta “porquê” a seguir aos comentários dos alunos de modo a provocar o raciocínio, levando-os a analisar e reflectir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas. Deverá evitar emitir opiniões muito concretas e incentivar o espírito crítico, a reflexão e a procura de argumentos que permitam aos alunos confirmar ou não as suas conjecturas. Na fase de discussão o professor deve assumir o papel de moderador, permitindo que os alunos sejam confrontados com outros resultados que não os seus, promovendo a capacidade de argumentação e questionamento.

Segundo Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998) os papéis que o professor desempenha no decorrer de aulas em que os alunos realizam actividade matemática investigativa têm um cunho essencialmente didáctico mas, também, uma vertente matemática porque neste tipo de actividade surgem oportunidades para que o professor se envolva em raciocínio matemático perante os alunos. Os papéis remetem para diversos aspectos do conhecimento profissional do professor, nomeadamente para o seu conhecimento matemático e para o seu conhecimento didáctico relacionado com a organização do trabalho e a condução da actividade dos alunos.

Segundo Ponte *et al.* (1999) o raciocínio matemático usado na realização de uma investigação matemática, estrutura-se, quer ao nível dos professores quer ao nível dos alunos, em quatro etapas:

Quadro 2. *Raciocínio matemático do professor (ou aluno) na realização de uma investigação* (Ponte *et. al.*, 1999, p. 82)

A.1. Reconhecer uma situação problemática
A.2. Explorar a situação problemática
A.3. Formular questões
A.4. Organizar dados
A.5. Formular conjecturas
A.6. Realizar testes
A.7. Refinar conjecturas
A.8. Justificar uma conjectura
A.9. Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Durante a realização da investigação na sala de aula e, segundo o quadro anterior, o professor passa por vários modos de raciocínio didáctico e também matemático. Relativamente ao raciocínio matemático, este contribui tanto para tomar decisões anteriores à realização da tarefa na sala de aula, como contribui para que o professor analise questões, argumentos ou conjecturas propostas pelos alunos.

No que diz respeito à vertente didáctica e, de modo a atingir os objectivos pretendidos, o professor deve desafiar, apoiar e avaliar: (a) desafiar os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo; (b) apoiar, fazendo perguntas, comentários ou sugestões; (c) avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, tomar a sua decisão de prosseguir, alterar um outro aspecto do que se está a fazer, ou mudar para outra fase do trabalho. Todo este processo deverá ser, sempre, acompanhado de reflexão sobre os procedimentos.

Ponte *et. al.* (1999), agrupam os papéis dos professores em três grandes áreas e consideram que estes se relacionam com o papel dos alunos. Se o professor assumir uma atitude interrogativa permite uma maior intervenção dos alunos. No entanto, o papel desempenhado pelo aluno condiciona e influencia o papel do professor.

Quadro 3. *Papel do professor na condução de uma actividade de investigação* (Ponte et al., 1999, p. 84)

X Modo Afirmativo	X.1. Faz uma afirmação ou clarifica o sentido das afirmações anteriores X.2. Faz afirmações ou explica conceitos ou procedimentos X.3. Valida
Y. Modo Interrogativo	Y.4. Pede clarificações Y.5. Questiona de forma específica Y.6. Questiona de forma aberta Y.7. Pede justificações
Z. Modo de gestão	Z.8. Gere a situação didáctica

A interacção professor-aluno e aluno-alunos influencia o que é aprendido e a forma como é aprendido. A introdução de propostas de tarefas do tipo das indicadas cria espaço para a entreaajuda entre alunos que, através de caminhos distintos ou modos de acção diversificados, desenvolvem soluções para as propostas através da verbalização dos seus pensamentos, troca de impressões e alguma discussão em pequeno e/ou grande grupo, com ou sem intervenção do professor, construindo faseadamente os seus alicerces de conhecimentos matemáticos.

3.2.3. O ambiente das aulas

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) a realização de aulas de um novo tipo, com novos papéis e responsabilidades, é outro dos desafios que se coloca ao professor. Este é um domínio do conhecimento profissional do professor sobre o qual a investigação educacional tem incidido de forma expressiva.

É preciso saber, por exemplo, que questões o professor tem de considerar ao fazer o planeamento global de uma aula (ou conjunto de aulas) dedicado a tarefas de investigação? Como realizar o arranque da tarefa? Quais os aspectos críticos nesta fase? Como manter e estimular o desenvolvimento do trabalho dos alunos? Como realizar a discussão? Quais os modos de trabalho mais adequados? Como dar *feedback* aos alunos acerca do trabalho por eles realizado?

Existem diversos aspectos com grande influência no modo como o trabalho decorre e que incluem a estrutura da aula, o ambiente criado, a comunicação que se desenvolve, com especial incidência no processo de negociação dos significados matemáticos (Bishop e Gofre, 1986; NCTM, 1994; Ponte, Boavida, Graça e Abrantes, 1997). A estrutura da aula inclui os segmentos em que se divide, a importância relativa de cada um deles, os papéis assumidos em cada momento pelo professor e pelos alunos. De um modo geral, o trabalho investigativo envolve três fases: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho, e o balanço final (Christiansen e Walther, 1986). A introdução da tarefa, normalmente a cargo do professor, é um momento extremamente importante, especialmente quando os alunos não estão familiarizados com este tipo de actividade matemática. Durante a investigação dos alunos o papel do professor é sobretudo de orientador, o que implica uma mudança, por vezes difícil, na sua forma de se relacionar com os alunos, mudança essa que não é facilmente aceite pelos alunos que habitualmente vêem o professor desempenhar outros papéis. Uma postura interrogativa parece ser bastante apropriada neste tipo de tarefa mas, por vezes, torna-se necessário questionar os alunos de uma forma mais dirigida. Tomando consciência de que o *feedback* fornecido tem uma influência relevante no trabalho dos alunos, o professor vê-se confrontado com a dificuldade de o facultar aos alunos sem, no entanto, validar o trabalho destes. Finalmente, a organização da discussão final deve ter em conta os vários produtos realizados pelos alunos, valorizando tanto os mais interessantes como os mais modestos (Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998), o que implica possuir um bom conhecimento do seu trabalho. Esta fase exige do professor outro tipo de competências, de assinalável complexidade, como a de promover e gerir a interacção entre os vários grupos.

4. Currículo versus investigações matemáticas

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) uma das grandes dificuldades associadas à resolução de problemas – uma perspectiva do ensino da Matemática com fortes afinidades com o trabalho investigativo – refere-se à respectiva adequação e adaptação no currículo implementado. Este desafio aponta, antes de mais, para a

evolução do conceito de currículo que se tem deslocado da noção de “programa”, estabelecido pelas autoridades, para a noção de que ele envolve tudo:

“aquilo que se espera fazer aprender na escola, de acordo com o que se considera relevante e necessário na sociedade, num dado tempo e contexto”
(Roldão, 1998, p.32).

Deste modo o currículo centra-se, sobretudo, nos objectivos prosseguidos pelo professor e nos meios (meios e objectivos são indissociáveis) pelos quais ele pensa que esses objectivos podem ser alcançados pelos alunos.

Na verdade, a visão do currículo não é a mesma em todos os professores (Ponte, Matos e Abrantes, 1999). Para alguns o currículo é, sobretudo, uma sequência de conteúdos. Outros, dão uma importância significativa às metodologias e instrumentos recomendados (por exemplo, calculadoras, trabalho de grupo). Outros, ainda, dão grande atenção aos diversos níveis de objectivos do ensino da Matemática, procurando que eles sejam contemplados de modo harmonioso pelos seus alunos. Do mesmo modo, a relação dos professores com o currículo nem sempre é a mesma. Para alguns o currículo é um documento com força de lei, cuja letra é preciso respeitar, sobretudo no que se refere aos conteúdos a leccionar. Para outros, é mais um documento orientador que é preciso saber adaptar às circunstâncias concretas em que se trabalha e, muito especialmente, às características e interesses dos alunos, assumindo uma considerável margem de autonomia, na sua interpretação, adaptação e até recriação. Neste contexto, de que modo se adequam e adaptam as investigações matemáticas no currículo de Matemática?

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) as tarefas de investigação podem ser vistas como constituindo um campo à parte, em termos educativos, ou como tendo pontos de contacto com os outros tipos de tarefas realizadas na sala de aula. Uma questão interessante é a de saber se existem formas de trabalho que se podem considerar “intermédias” entre uma aula de investigação e outro tipo de aula. Na verdade, com outros nomes, há muitos aspectos das práticas pedagógicas de hoje e de ontem que se aproximam das actividades de investigação (descoberta, método heurístico, matemática experimental, resolução de problemas, modelação, trabalho de projecto, discussão). Também os papéis dos alunos e do professor não têm de ter um determinado carácter apenas em aulas de investigação. A postura mais activa dos alunos deve estar presente também noutras formas de trabalho. É natural admitir que

haja uma forte relação entre a concepção que o professor tem do currículo e o papel que atribui às tarefas de investigação nesse mesmo currículo. Um professor que dê especial ênfase aos conteúdos (encarando o currículo como um “programa”) terá, à partida, menos inclinação para valorizar este tipo de trabalho que outro professor que dê atenção ao desenvolvimento de diversos tipos de competências matemáticas – como o raciocínio e a comunicação – e ao desenvolvimento de uma visão geral e atitude positiva em relação a esta disciplina. É também razoável admitir que o modo como o professor vê as tarefas de investigação no currículo determina em grande medida o modo como as introduz na sua prática pedagógica. Por outro lado, muitos professores podem sentir que as tarefas de investigação não são adequadas para a introdução de novos conceitos por acharem que os alunos utilizam nas tarefas de investigação, sobretudo, conceitos matemáticos que já têm bem consolidado. Poder-se-á conjecturar que os professores que têm uma posição de maior protagonismo no processo de elaboração do currículo têm mais facilidade em encontrar modos de integrar nesse mesmo currículo experiências de natureza investigativa para os seus alunos.

Segundo Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999) em termos gerais o currículo pode ser interpretado de duas formas. Numa interpretação mais fechada do currículo as tarefas de investigação podem ser inseridas no currículo, embora perdendo de vista algumas das suas maiores possibilidades formativas como a capacidade de integrar objectivos de diferentes níveis e, correndo o risco por via disso, de se transformarem em tarefas guiadas apenas para a exploração de determinado conceito onde todos os alunos deverão fazer o mesmo, com graus de aprofundamento e generalização claramente previsíveis. Pelo contrário, numa interpretação mais flexível do currículo, as tarefas de investigação são naturalmente inseridas no currículo não apenas porque permitem a abordagem de conteúdos mas, sobretudo, porque constituem um importante recurso de concretização dos objectivos do ensino da Matemática e podem contribuir decisivamente para o desenvolvimento dos objectivos gerais do ensino básico e secundário.

De facto, as actividades de investigação lidam com o essencial da natureza da actividade matemática (formulação e resolução de problemas), permitem uma melhor compreensão da natureza dos processos de fazer matemática (experimentar/explorar, identificar padrões, formular e testar conjecturas, generalizar e demonstrar), estimulam o pensamento globalizante (relacionando tópicos da matemática), permitem de forma significativa trabalho diferenciado de alunos com diferentes competências e estilos

cognitivos em matemática; facilitam o desenvolvimento integrado de atitudes, capacidades e conhecimentos. É nesse sentido que se pensa que elas podem potenciar o desenvolvimento matemático e pessoal dos alunos e contribuir para a concretização dos valores de integração e da diferenciação, decisivos na *escola para todos*.

Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) independentemente do currículo e do programa que está a “cumprir”, o professor de Matemática tem sempre a possibilidade de integrar nas suas lições um “espírito investigativo” e assim transmitir aos seus alunos uma mensagem importante e, mesmo essencial, sobre a Matemática. A visão tradicional, que não é combatida pelo actual currículo, de uma matemática rígida onde, em particular, as definições têm carácter absoluto aparece, assim, oposta àquela que as tarefas de investigação, se aceites com as suas características próprias, podem veicular. Enquanto a cultura de currículo e de avaliação dos alunos não mudar será improvável que muitos professores arrisquem dar o primeiro passo, pois o mundo dos testes e dos exames a que os seus alunos vão ser submetidos é um mundo feito de destinos e não de viagens, de soluções e não de investigações. Poder-se-á, assim, identificar dois aspectos no actual contexto da aprendizagem da Matemática que dificultam a utilização regular de tarefas de investigação. Um deles é o grande número e dimensão dos conteúdos curriculares e o outro é a mensagem sobre a natureza da Matemática que é transmitida pelos actuais programas e, sobretudo, pelas práticas de avaliação geralmente utilizadas testes e exames.

Há aspectos no actual currículo de Matemática que favorecem a integração de investigações na prática pedagógica designadamente a inclusão, como objectivos do ensino da Matemática, de atitudes e capacidades, a par da aquisição de conhecimentos, as numerosas indicações metodológicas que, embora nem sempre explicitamente, recomendam a inclusão de investigações na prática corrente da aula de Matemática e a indicação frequente de que os conceitos devem ser abordados inicialmente de forma intuitiva.

Deste modo, o currículo dá indicações de que a simples aquisição de conhecimentos factuais, a resolução de exercícios e o treino em técnicas de cálculo são insuficientes para atingir as finalidades do ensino desta disciplina. Parece claro que a prática continuada da abordagem investigativa é um meio privilegiado de corresponder à nova formulação (conhecimentos, atitudes, capacidades) dos objectivos gerais do ensino da Matemática. Assim, a integração das investigações como método habitual de

trabalho dos alunos deveria ser levada até às últimas consequências, do ponto vista da estrutura do currículo, e não deixada apenas como mera indicação.

5. Actividade matemática dos alunos e tarefas de investigação

Vários matemáticos e educadores matemáticos caracterizam a actividade matemática de uma forma mais ou menos geral. Brocardo (2001) apresenta algumas descrições que assentam na ideia base de identificar processos envolvidos na criação de conhecimentos matemáticos e que, por isso, são característicos da actividade matemática.

Bell (1979, citado por Love, 1996 e citado por Brocardo, 2001) considera que a Matemática tem dois aspectos: os conteúdos e os processos. Os primeiros dizem respeito a ideias particulares e a destrezas como rectângulo, máximo divisor comum ou solução de uma equação. Os processos, a que também chama actividade matemática, merecem um programa que acompanhe as ideias matemáticas e consistem na abstracção, representação, generalização e prova.

Pólya (2003) considera que não é possível compreender a Matemática sem ter ideia de como se faz Matemática. A resolução de problemas é um aspecto essencial da actividade matemática – os matemáticos resolvem problemas – e que permite aos alunos terem uma experiência matemática genuína, idêntica à actividade criativa dos matemáticos. É através dos problemas que o aluno pode seguir, tal como os matemáticos, um processo de envolvimento e interesse pela descoberta que leva a conseguir, em primeiro lugar, intuir sobre os resultados e só depois prová-los.

Nas investigações matemáticas os alunos devem ser colocados no papel dos matemáticos. Perante uma situação, objecto, fenómeno ou mecanismo suficientemente rico e complexo, os alunos tentam compreendê-lo, descobrir padrões, regularidades, relações, semelhanças e diferenças de forma a chegarem a generalizações. As investigações matemáticas vão desde as tarefas bastante elaboradas e complexas que podem levar algum tempo a resolver, até às questões mais simples que podem ser levantadas a partir de uma pequena variação de um facto ou procedimento conhecido.

Segundo Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) a actividade matemática dos alunos deve consistir essencialmente em experimentar, ao seu nível de maturidade matemática, o trabalho dos matemáticos profissionais. Sendo a investigação uma actividade central destes a experiência dos alunos deve incluir, como metodologia privilegiada, a realização de tarefas de investigação. Mas a finalidade com que os alunos realizam tarefas de investigação é completamente diferente, como será de esperar, da dos matemáticos profissionais. Nos alunos, as tarefas de investigação são um veículo para um conhecimento da natureza da matemática e dos seus principais processos de desenvolvimento. Nos matemáticos profissionais, a investigação tem por finalidade fazer avançar a matemática como ciência, como corpo de conhecimentos. Por isso, é essencial que os alunos reflectam sobre as investigações que fazem com a finalidade de tomar consciência dos processos que seguiram. Ao longo da escolaridade compreenderão que alguns desses processos característicos ou ideias poderosas reaparecem sistematicamente nas diferentes investigações. A compreensão, por parte dos alunos, da natureza da matemática ficaria certamente grandemente prejudicada se esta perspectiva fosse totalmente ignorada no currículo. Por isso, e naturalmente nos últimos anos do secundário, essa compreensão – sempre através da experiência – deve ser considerada. Contudo, a preparação para esse momento deve ser iniciada muito antes, nos primeiros anos de escolaridade, e prosseguida ao longo desta através da realização de actividades de organização da matemática.

Segundo Ponte e Matos (1999) no processo da investigação matemática é possível distinguir actividades como a definição do objectivo (o que pretendemos fazer?), a idealização e realização de experiências (o que acontece neste ou naquele caso específico?), a formulação de conjecturas (que regra geral poderemos propor?) e o teste das conjecturas (quais serão as experiências fundamentais para verificar a validade desta conjectura? Será possível prová-la?). A realização de investigações matemáticas tem-se tornado numa orientação curricular bastante popular (NCTM, 2000). Pouco se sabe, contudo, sobre o que acontece no decurso destas investigações, especialmente quando levadas a cabo em ambientes escolares (um aspecto também referido em Cockcroft, 1981, p. 94). Qual o benefício das investigações matemáticas para os alunos? Quais as dificuldades com que se deparam? Que exigências fazem ao papel desempenhado pelo professor?

5.1. Identificação de actividades matemáticas no decorrer de uma investigação

Segundo Ponte e Matos (1996) podem identificar-se várias actividades matemáticas no decorrer de uma investigação. Essas actividades podem ser agrupadas em três fases de trabalho principais que desenvolveremos seguidamente: (a) formulação de objectivos, (b) definição de estratégias, (c) reflexão sobre os resultados das experiências conduzidas e formulação e verificação de conjecturas.

a) Formulação de objectivos. O estabelecimento de objectivos bem definidos, claros e precisos é de extrema importância na realização de uma investigação. Questões significantes na definição do objectivo de uma investigação são, por exemplo, as seguintes:

- Como é inicialmente formulado o objectivo da pesquisa?
- Existem pontos de viragem no processo de condução da investigação que possam modificar o objectivo global da mesma? Que se pode dizer sobre eles?
- Existem aspectos mais gerais, no que respeita ao modo dos alunos verem a situação, que possam modificar-se durante o curso da investigação?

A investigação e a experiência profissional revelam que os alunos tendem a não ser muito bons na formulação espontânea de questões para investigar. Mesmo quando lhes são fornecidos pontos de partida, podem ter alguma dificuldade em perceber o tipo de questões mais gerais que podem ser colocadas, de forma a alargar os casos mais simples que foram já explorados (Anderson, 1990). Esta constatação será surpreendente, uma vez que o conhecimento que os alunos são supostos adquirir é muito formal e organizado, não sendo estimulados a desenvolver processos de construção do seu próprio conhecimento matemático. No fundo, ensinam-se “respostas” sem dar grande importância às “questões” que as originaram ou à forma como foram alcançadas. No ensino da Matemática as tarefas são, geralmente entregues aos alunos mas completamente formuladas. Compreende-se, pois, que os alunos apresentem grandes dificuldades em estabelecer os objectivos de uma pesquisa.

b) Definição de estratégias. As estratégias utilizadas no decorrer de uma investigação referem-se a três aspectos. O primeiro diz respeito à representação da situação (inclui a identificação das características essenciais e a escolha de uma notação apropriada). O segundo refere-se à definição da sequência de experiências a realizar, indicando a linha geral de raciocínio a seguir. O terceiro tem a ver com os instrumentos específicos

usados na construção e interpretação das experiências. Poder-se-á colocar algumas questões importantes sobre estes aspectos:

- Será a representação escolhida a mais adequada (no sentido em que escreve aspectos importantes da situação)?

- Como é a organização das experiências? Serão estas relevantes para os objectivos procurados? Serão sistemáticas?

- Será que o “conhecimento técnico” dos alunos os impede de planear e organizar uma estratégia correcta?

Conceber representações e notações matemáticas apropriadas é um elemento essencial para a realização de investigações matemáticas (Bell, Costello e Kucheman, 1981; Kissane, 1998; Ridgway, 1988). Nem todas as representações de uma dada situação podem proporcionar a melhor perspectiva dessa situação. Algumas são mais apropriadas que outras. É comum que os alunos desenvolvam mais do que uma representação e que “flutuem” entre umas e outras (Anderson, 1990).

As investigações matemáticas são frequentemente consideradas como um bom início do trabalho matemático. Contudo, convém não esquecer de que:

“o trabalho de investigação recompensa muitas vezes a mestria na técnica matemática e penaliza fortemente as incorrecções matemáticas” (Ridgway, 1988, pp. 114-115).

c) Reflexão sobre os resultados das experiências conduzidas e formulação e verificação de conjecturas. A realização de experiências deve conduzir a uma reflexão sobre a situação, de forma a conseguir a sua melhor interpretação e a permitir, eventualmente, a revisão de alguns aspectos na esperança ainda de levar à formulação de conjecturas. Os resultados das experiências realizadas podem ser úteis para uma melhor compreensão da situação e para a formulação de conjecturas que, uma vez formuladas, estas necessitam de ser testadas. Os processos de formulação de conjecturas e o seu teste formam um ciclo que pode repetir-se algumas vezes. Os alunos saem, ocasionalmente, desse ciclo de forma a modificar aspectos das experiências que foram realizadas. Por vezes eles sentem a necessidade de recuar ainda mais no processo e alterar até o objectivo global da pesquisa. O teste das conjecturas pode assumir diferentes formas: 1) em casos especificamente escolhidos; 2) casos escolhidos aleatoriamente.

Segundo Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999) ainda que nenhum currículo seja “à prova” de tarefas de investigação, existem diversos tipos de organização

curricular que facilitam a sua realização. Naturalmente, dada a posição central que a investigação ocupa na actividade dos matemáticos, essas ideias poderosas e processos característicos foram historicamente criados no decorrer das investigações e estão presentes mesmo nas investigações elementares que sugerimos sejam prática frequente dos alunos na aula de Matemática ao longo de toda a escolaridade. Em alguns desses processos, estarão incluídos as ideias de relação funcional e de transformação, a procura de regularidades e de invariantes, a abstracção e a generalização, a construção de conceitos por analogia, a procura de modelos matemáticos para situações do mundo concreto ou estudadas noutros domínios científicos, o uso da intuição na exploração de situações envolvendo objectos matemáticos, a formulação de conjecturas e a sua demonstração ou refutação.

Numa perspectiva possível de currículo, que se pretenda que favoreça a prática das tarefas de investigação, estes seriam os verdadeiros conteúdos. Na realidade, se considerarmos cada um destes processos e ideias reconhecemos que qualquer deles diz respeito à matemática em geral e não o podemos associar com exclusividade aos números, ou à geometria, ou à álgebra, ou a qualquer outro domínio específico da Matemática. O facto de se tomarem estas ideias e processos como os verdadeiros conteúdos e não os habituais conteúdos em aritmética, geometria, não significa obviamente que estes desapareçam. Não é possível ter ideias e desenvolver processos em Matemática sem ser sobre “qualquer coisa”, e esta “qualquer coisa” serão evidentemente os temas actuais do currículo de matemática. Uma nova perspectiva do currículo, no entanto, poderá ter o mérito de transmitir uma mensagem diferente da Matemática – uma mensagem que subalternize as rotinas e o cálculo e privilegie as ideias e os processos fundamentais da Matemática e, a partir daí, a compreensão da sua natureza. Por outro lado, um currículo em que os temas obrigatórios são os processos matemáticos transversais aos vários domínios e não as técnicas específicas de cada um (as regras das operações com potências, os critérios de igualdade de triângulos, a regra de Ruffini, a memorização das regras de derivação, as técnicas do cálculo dos limites de sucessões), pode ajudar a explorar as conexões entre os vários domínios, contribuindo assim para aquela compreensão. Não se vê como necessário, pelo menos numa primeira fase da evolução para um tal currículo que deixem de existir, nos diversos anos de escolaridade, tempos dedicados à aritmética, à geometria, às probabilidades, etc. mas a perspectiva adoptada no interior de cada tema deve ser progressivamente alterada.

Uma organização curricular progressivamente dominada pelas ideias e processos matemáticos, e não pelos particularismos técnicos dos vários temas, permite ainda que seja gradualmente minorada, e eliminada mesmo no futuro, a pressão uniformizante do actual contexto curricular – todos os alunos, em todo o país, trabalham exactamente os mesmos temas, com a mesma profundidade. Podemos imaginar que, diferentes tópicos possam estar a ser trabalhados em diferentes turmas e escolas.

5.1.1. Processos matemáticos que levam à interpretação do enunciado da proposta de uma investigação matemática

Quando é apresentada uma proposta de investigação matemática aos alunos, são desencadeados vários processos matemáticos que vão desde a leitura da proposta até à chegada de conclusões.

Segundo Dias (2005) é possível distinguir os seguintes processos que conduzem à interpretação do enunciado da proposta de uma investigação matemática:

(i) Traduzir. É um processo utilizado pelos alunos para a melhor compreensão da proposta. O traduzir concretiza-se pela emissão de palavras e é identificável por leituras sucessivas da proposta de investigação e o conseqüente enunciar da proposta por outras palavras, o que conduz à compreensão do trabalho a realizar. O enunciar a proposta por outras palavras pode ser efectuado pelo próprio ou por outro através do estabelecimento de interacções.

(ii) Experimentar inicial. É um processo utilizado pelos alunos que conduz ao estabelecimento de um percurso de investigação. O experimentar caracteriza-se pelo emprego sistemático da experiência de modo a procurar regularidades e assim definir o percurso a seguir. Nas propostas de investigação com sugestões ou figuras, as primeiras experiências são realizadas tendo por base as sugestões e figuras apresentadas. Caso não existam, o aluno experimenta baseando-se na sua intuição. Noutras situações, a experimentação inicial realiza-se tendo por base os materiais de suporte ou as interacções.

(iii) Interiorizar. Um processo que se prende com a compreensão do significado de algumas palavras, comentários, resultados ou indicações do enunciado da proposta de investigação. O aluno lê a proposta, avança e recua várias vezes em torno de um significado que não compreende. Depois de interiorizar o significado, avança sem rodeios. O interiorizar verifica-se através do estabelecimento de interacções ou através da pesquisa.

(iv) Ancorar. É um processo que relaciona a nova proposta nos conhecimentos adquiridos anteriormente. Ao lançar a âncora nos conhecimentos dominados, o aluno procura contextualizar a sua investigação e assim definir um percurso de exploração. Este processo, de ancoragem, concretiza-se pela identificação de semelhanças entre a nova proposta e aquilo que o aluno já realizou.

5.1.2. Processos de desenvolvimento a partir das investigações matemáticas realizadas pelos alunos

Um aspecto a salientar é a evolução dos alunos no desenvolvimento de investigações matemáticas. Com o decorrer da investigação matemática os alunos tendem a tornar-se mais autónomos passando a valorizar tanto as respostas como os processos usados. Segundo Dias (2005) é possível distinguir os seguintes processos de desenvolvimento a partir das investigações realizadas pelos alunos:

(i) Aprofundar. É um processo de desenvolvimento que se caracteriza por um evoluir sucessivo na investigação. Através da avaliação dos avanços conseguidos, o aluno torna mais desenvolvida a sua investigação, desbrava o caminho a seguir explorando o avanço conseguido na etapa anterior. Ele vai eliminando os casos que não lhe interessam, por conterem erros ou dificuldades, e aproveita as sistematizações que lhe podem vir a ser úteis.

(ii) Ziguezaguear. É um processo de desenvolvimento que se caracteriza pela evidência de avanços e recuos. O aluno chega a uma conclusão, não a valida definitivamente, procura contra-exemplos ou interações, a pesquisa noutros suportes de forma a atingir a confirmação de validade. Este processo é caracterizado pelo refazer da investigação, desde o início, sempre que identifica um dado novo ou um contra-exemplo.

(iii) Conjecturar, experimentar, solucionar. São processos de desenvolvimento caracterizados pela existência de uma suposição de partida. O aluno faz várias afirmações sobre o que investiga e que são as possíveis conclusões acerca do resultado final. Seguidamente, realiza várias experiências através de uma cadeia de experimentações de exemplos e contra-exemplos que procuram dar solução ao problema de partida. Como resultado final o aluno aceita conjecturas que não foram refutadas como sendo soluções para partições que constituem a investigação. A investigação fica subdividida em várias partições, com condições presumíveis, e cada solução resolve um problema, sem existir a preocupação da generalização global.

(iv) Conjecturar, experimentar, generalizar. São processos de desenvolvimento caracterizados pela existência de uma suposição de partida. O aluno faz uma afirmação sobre o que investiga, que é uma conclusão intuitiva do resultado final. Seguidamente, realiza várias experiências, através de exemplos ou contra-exemplos, que têm como objectivo aceitar ou refutar a afirmação de partida. No caso de refutada, o aluno ajusta a afirmação tendo em conta as experiências realizadas e volta a experimentar. No caso de ser aceite, o aluno procura generalizar ou provar a afirmação, ou seja, encontrar resultados.

É importante começar por analisar exemplos particulares para começar a formular as primeiras conjecturas, uma vez que estas à medida que mais experiências são realizadas, começam naturalmente a ser refutadas e reformuladas.

Segundo Ponte *et. al.* (1998) referem que os alunos tendem, em algumas situações, a apresentar o máximo de conjecturas possível não reflectindo na sua eventual trivialidade o que parece poder ser explicado pela dificuldade em perceber a ideia global da tarefa. Também surge a tendência de atribuir rapidamente o estatuto de conclusão às conjecturas e de as comunicar rapidamente ao professor. Segundo estes autores, esta atitude pode ser explicada como reflectindo uma preocupação em obter crédito junto do professor pelas descobertas realizadas e, também, procurar que este confirme a sua validade.

5.2. Interações durante a implementação de investigações matemáticas na aula de matemática

Ao realizar investigações matemáticas é necessária a mudança de atitude do professor e dos alunos ao nível das interações no processo investigativo. Ao reflectir sobre o seu trabalho, o aluno toma consciência dos erros cometidos e da necessidade de os corrigir, assim como das dificuldades e da forma de as ultrapassar. O aluno, na procura dos conhecimentos e das estratégias que permitam confirmar os seus processos ou ideias, para continuar a investigar procura recursos e estabelece interações com o professor, com os seus pares ou procura apoio a outros recursos desenvolvendo uma atitude de auto-regulação das aprendizagens.

5.2.1. Interações com o professor durante a investigação matemática

Ao nível do professor os alunos podem procurar a tradução da proposta por outras palavras, a clarificação de conhecimentos, a compreensão de significados, a obtenção e a confirmação de estratégias, a correcção de erros e a validação de resultados. O papel do professor passa a ser mais importante na ajuda a dar ao aluno para que este saiba onde está, se avança ou reajusta. Estas interações, segundo César (1997) no processo de ensino e aprendizagem funcionam como um favorecimento à regulação das aprendizagens e são concretizadas para explicar de outra forma, modificar a tarefa, alterar os objectivos, desdramatizar a situação, modificar os tempos estabelecidos, alterar os objectivos em função do trabalho realizado e responsabilizar o aluno. Neste contexto, é fundamental o *feedback* que o aluno obtém do professor para ultrapassar dificuldades, para reflectir e para validar o seu trabalho. Mason (1991) refere-se precisamente ao facto da avaliação formativa ficar comprometida se o professor orientar de forma excessiva ou insuficiente. O importante é, segundo Perrenoud (1996), manter a interacção e não adoptar uma estratégia de exigência excessiva, o que pode levar à desmotivação por parte dos alunos.

Segundo Dias (2005) as orientações que o professor fornece ao aluno, durante a investigação, são entendidas como um favorecimento para:

- (i) Ultrapassar dificuldades. Verifica-se quando o aluno pede a intervenção do professor para o ajudar a interpretar ou para o ajudar a dar continuidade à investigação. O professor pode traduzir a proposta de investigação por outras palavras ou pode clarificar conhecimentos, o que significa ajudar a compreender o significado de conceitos e propriedades ou mesmo propor estratégias.
- (ii) Reflectir. Verifica-se quando a intervenção do professor vai no sentido de levar o aluno a confrontar os resultados com os conhecimentos que possui, geralmente matemáticos, e assim possibilitando a identificação de erros. Noutras situações, após a realização de várias experiências e perante a eminência da apresentação de uma conclusão, o professor fornece contra-exemplos que têm como objectivo levar o aluno a reflectir sobre a possível generalização. Também é possível identificar situações em que o professor incentiva a reflexão do aluno sobre todo o processo de investigação com vista a identificar erros e levar a refazer conjecturas;
- (iii) Validar. Verifica-se quando o professor é solicitado para confirmar os resultados obtidos ou apenas o percurso seguido, numa das etapas do processo investigativo. Também é possível encontrar situações em que o professor orienta os alunos para

procederem à pesquisa no livro, no caderno ou outro suporte, de forma a possibilitar ao aluno a continuação da investigação. Noutras situações a intervenção do professor relaciona-se com o recolocar quando o aluno, inconscientemente ou pela escolha de uma estratégia pouco compensadora, se afastou do problema de investigação.

5.2.2. Interações com os seus pares durante a investigação matemática

As interações estabelecidas com o grupo são diferentes das estabelecidas com o professor. No seio do trabalho de grupo os alunos procuram discernir conclusões e obter contra-exemplos, tendo em vista a avaliação do trabalho realizado. Durante o desenvolvimento da investigação os alunos deparam-se com a dificuldade de definir, ou de dar continuidade a um percurso de trabalho. Segundo Dias (2005) esta dificuldade agrava-se quando a actividade tem um carácter mais aberto e pode ser atenuada quando existem figuras ou sugestões. Os alunos recorrem também aos seus pares para prosseguir ou reorientar o seu trabalho de investigação quando pretendem ultrapassar dificuldades e se confrontam com raciocínios erróneos e pretendem auto avaliar-se.

5.3. Recursos usados pelos alunos durante as investigações matemáticas

Os alunos recorrem a determinados recursos como, por exemplo, o *feedback* que não obtêm do professor ou dos seus colegas mas que poderá vir num manual ou em outro recurso nomeadamente com auxílio da calculadora ou do computador ou, até, através da auto-reflexão e auto-avaliação. Os alunos podem, segundo Dias (2005) ultrapassar as suas dificuldades, corrigir os seus erros e orientar a sua investigação tendo em conta os seguintes meios:

(i) Interação crítica consigo próprio. Perante um obstáculo o aluno opta por ultrapassá-lo sem recorrer a outro actor do processo ensino aprendizagem, nem mesmo, recorrer a outro suporte. É frequente que o aluno, perante a dificuldade, teste mais exemplos e procure contra-exemplos, experimente com mais frequência, reveja o processo que já executou para refazer o seu trabalho e ultrapassar o bloqueio. É uma forma de auto-regulação das aprendizagens.

(ii) Materiais pedagógicos ou outros. Conjunto de recursos constituído por suportes de apoio, como é o caso dos materiais manipuláveis, do caderno diário, do livro, da *Internet* e da calculadora gráfica, em que o aluno se apoia quando sente dificuldades. A

procura destes suportes tem por objectivo recolher informação ou a realização de experiências apoiadas ou orientadas pelo recurso utilizado.

5.4. A importância do erro nas investigações matemáticas

Segundo Dias (2005) os erros relacionam-se com o não reconhecimento do procedimento adequado à investigação, com a dificuldade de interpretação, com o desconhecimento de terminologia, propriedades e definições matemáticas e com as dificuldades de utilização das tecnologias. Os erros cometidos pelos alunos, que os impedem de continuar ou afectam o seu raciocínio, comprometem toda a tarefa e necessitam de intervenção ou pesquisa noutros recursos. O professor é, segundo Pardala (1997) um factor facilitador para ultrapassar erros mas o aluno, autonomamente, também pode recorrer a outros suportes para os ultrapassar. Havendo a convicção que, mais cedo ou mais tarde, serão detectados, os erros são ultrapassados através do estabelecimento de interacções e através do recurso à pesquisa no caderno diário, manual, *Internet* ou materiais manipuláveis. O aluno ao reflectir sobre o decorrer da investigação matemática, este confronta-se com erros e dificuldades o que funciona como um impulsionador da busca de interacções, em especial com o professor, de forma a corrigi-los.

Segundo Santos (2003) errar tem de ser visto como natural e não penalizador. Os erros também podem ser vistos como esclarecedores de dúvidas surgidas e conhecimentos não dominados, o que permite o reforço das aprendizagens. Neste aspecto Serrazina (1995) está de acordo com a concepção de que o erro ensina. A aprendizagem, através dos erros, relaciona-se com o facto “de não os repetir”. O erro pode ainda desviar, isto é, levar à exploração de problemas que não se encontram relacionados com a investigação proposta.

O erro tido como um factor de aprendizagem, ensina ou orienta o caminho a seguir (Dias, 2005). Acerca das funções que os alunos atribuem aos erros nas investigações matemáticas, identificam-se os seguintes:

(i) Orienta. Quando os erros funcionam como elemento impulsionador da definição de novos caminhos de investigação ou quando os erros fecham percursos pouco compensadores de investigação, ou seja, conduzem ao bom caminho (reorientação);

(ii) Ensina. Quando os erros possibilitam a clarificação da aplicação de conteúdos e estratégias. Neste caso, os alunos consideram que os erros “servem de lição” porque reforçam o seu conhecimento acerca da aplicabilidade, ou não, de conteúdos ou estratégias.

(iii) Desvia. Quando os erros provocam uma diminuição do grau de dificuldade da exploração. Os alunos, pela facilidade emergente, exploram situações divergentes do solicitado, ou seja, realizam investigações paralelas.

5.5. A importância da reflexão dos alunos sobre as investigações matemáticas na sala de aula

Segundo Dias (2005) os alunos usam a reflexão como uma forma de orientação do seu trabalho. O explicar a outro durante o desenvolvimento ou no final da investigação é um processo de reflexão mas também o é a elaboração de um relatório final sobre a investigação. Segundo este autor os relatórios escritos permitem, tanto no ensino básico como secundário, o desenvolvimento de capacidades do domínio cognitivo como a comunicação, a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas e o espírito crítico e, no domínio afectivo, o sentido de responsabilidade e de grupo, a perseverança e a relação entre os alunos. No ensino secundário, a qualidade dos relatórios vai aumentando à medida que os alunos, frequentemente, são confrontados com a necessidade de os elaborar (Varandas, 2000; Brocardo, 2001).

O empenho em realizar um relatório escrito apela à reflexão profunda o que segundo Kilpatrick (1992), não é exigido quando o aluno apresenta apenas uma solução para a proposta em que está a trabalhar. A necessidade de elaborar um relatório final sobre o trabalho desenvolvido funciona como um catalisador à reflexão. Além de se constituir como um instrumento de avaliação é um factor de aprendizagem uma vez que o aluno tem de aprender a registar o seu pensamento, a articular ideias e a explicar procedimentos, ao mesmo tempo que critica os processos utilizados, avalia os desempenhos do grupo e o produto final (Menino e Santos, 2004).

A reflexão permite aos alunos a regulação das aprendizagens e a assimilação de saberes o que é concretizado no binómio interacção e autoavaliação (Jorro, 2000; Vial, 2001; Santos, 2002). Com a elaboração dos relatórios, é confirmado o argumento apresentado por Santos *et al.* (2002) possibilita-se a reflexão sobre as investigações

matemáticas que fazem e é essencial para que possam tomar consciência dos processos que seguem e caminhar para a auto-regulação.

Em conclusão, segundo Ponte e Matos (1996) podemos afirmar que não se devem subestimar as dificuldades dos alunos na investigação de matérias complexas. É sabido que fazer descobertas importantes em Matemática é difícil, mesmo para os matemáticos (Davis e Hersh, 1980; Hadammard, 1945) e não se deve esquecer que estes são fortemente motivados pela matéria que investigam. Situações ricas como esta envolvem muitas complexidades e é bastante provável que os alunos se deparem, muitas vezes, com algumas dificuldades. É também importante referir que muitas vezes eles não estão muito motivados para a Matemática (Ponte e Carreira, 1991). Mas, por outro lado, essas dificuldades têm um lado positivo, fornecendo boas oportunidades para o debate e reflexão, revelando alguns enganos e promovendo o conhecimento de assuntos mais gerais que podem tornar-se importantes para o avanço da investigação.

O desenvolvimento desta actividade matemática parece indicar que são necessárias duas características fundamentais para trabalhar com êxito na investigação matemática: perspicácia e flexibilidade. A perspicácia é vital para a formulação de objectivos, a fim de que estes correspondam às características principais da situação e sejam passíveis de tratamento em termos matemáticos. A flexibilidade é importante para a escolha e avaliação de estratégias, isto é, a capacidade de estabelecer abordagens e modificar aquelas que não pareçam conduzir aos nossos objectivos. Algumas dificuldades se poderão levantar neste tipo de actividades. Podendo revelar-se em relação ao conhecimento dos alunos, aos processos de raciocínio, ao comportamento perante o problema e sua apreciação.

6. Orientações para o programa de Matemática B do 10º ano de escolaridade na implementação de tarefas de investigação

O programa de Matemática B do 10º ano de escolaridade é um programa para os cursos tecnológicos e científico-humanístico de Artes Visuais e tem como principal objectivo contribuir para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, tendo em linha de conta que deve acompanhar o

programa dos Cursos Gerais de modo a permitir que todos os alunos possam alterar os seus percursos educativos e formativos.

O que é considerado essencial neste programa é que os alunos devem “fazer” a sua aprendizagem ao nível da resolução de problemas e aplicações da Matemática, sendo importante a implementação de tarefas de investigação. Todos os temas deste programa (Geometria, Funções, Estatística e Probabilidades) devem ser abordados utilizando tarefas propostas em grupo ou individualmente e devem contemplar:

“modelação matemática, o trabalho experimental, o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se colocam questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais”. (Matemática B 10º ano, Ministério da Educação, p. 2).

6.1. Objectivos e competências gerais

As capacidades/aptidões referidas no programa, que os alunos devem desenvolver, revelam claramente a importância e papel que a implementação de tarefas investigativas podem ter para alcançar esses objectivos. Capacidades tais como: seleccionar estratégias de resolução de problemas, formular hipóteses e prever resultados, interpretar e criticar resultados no contexto do problema, formular generalizações a partir de experiências, validar conjecturas são aspectos que fazem parte das tarefas de investigação matemática. É claro nas orientações do programa que aplicações e problemas extraídos do mundo real estão no centro deste programa. Assim sendo, as tarefas de investigação, actividades de modelação e resolução de problemas são partes cruciais deste currículo. É sugerido aos professores que estes trabalhem colaborativamente visando a escolha e elaboração de tarefas de investigação apropriadas e que estes proporcionem aos seus alunos a oportunidade de escolherem as suas próprias estratégias de resolução de problemas e que as confrontem com os colegas fomentando, assim, o espírito crítico e valorizando o trabalho efectuado. A tarefas de investigação devem ser elaboradas tendo em conta, que o ensino da Matemática:

“é organizado de forma potente em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas”. (ME, 2001, p. 7).

É sugerido, para estas tarefas, o uso da tecnologia nomeadamente a calculadora gráfica e computador.

6.2. Visão Geral dos Temas e Conteúdos

Os temas Funções e Cálculo Diferencial, Geometria (no plano e no espaço) e Probabilidades, Estatística e Matemática Discreta têm como preocupação central o trabalho com problemas reais e com modelos concretos. Outros temas que atravessam o programa são igualmente importantes: resolução de problemas e actividades investigativas, história da matemática, aplicações e modelação matemática e tecnologia. Todos estes temas transversais, nomeadamente as actividades investigativas, só poderão ser realizadas se for criado um clima de aprendizagem propício ao seu desenvolvimento e neste programa não aparecem apenas como sugestão metodológica mas, também, como um tema. O professor deverá, uma vez que este é um dos objectivos principais deste programa, implementar actividades de investigação promovendo a oportunidade de os alunos construírem matemática, formulando problemas, conjecturando, testando hipóteses, estabelecendo conexões entre as várias áreas da Matemática e do saber.

6.3. Sugestões metodológicas gerais

O professor na concretização da metodologia deve ser dinamizador, orientador e moderador do processo ensino-aprendizagem, dando indicações aos seus alunos sobre os caminhos que estes seguem, promovendo autonomia, auto-confiança, motivação e gosto pela Matemática. Estas sugestões apontam para a importância das actividades investigativas pois permitem o desenvolvimento de todas estas capacidades. É referido no programa que estas tarefas deverão ser realizadas em grupo, proporcionando aos alunos, ao serem confrontados com outras respostas, a depararem-se com outros problemas e outras descobertas.

6.4. Tecnologia

O uso da calculadora é aconselhado porque não só incentiva o sentido crítico e de pesquisa como também algumas investigações só poderão ser realizadas se for introduzida a componente tecnológica. No que diz respeito às tarefas de investigação o uso da calculadora permite a investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática. No entanto, é referido que os alunos deverão entender e interpretar os resultados obtidos e não se limitarem ao que vêem no ecrã da calculadora. O computador também é referido como útil para as tarefas de investigação e é considerado obrigatório neste programa. Este permite auxiliar tarefas de exploração e de pesquisa mas também de recuperação e desenvolvimento. O uso da *Internet* é mencionado como uma ferramenta importante para a investigação matemática.

6.5. Temas Transversais do programa

Ao longo do programa são dadas “pistas” para a abordagem dos temas transversais. O professor tem que ter sempre presente que para o ensino e aprendizagem é necessário estabelecer conexões com outras áreas da Matemática e do saber, implementar actividades de investigação e situações realistas que interessem e motivem os alunos. São sugeridas para o desenvolvimento desses temas algumas indicações metodológicas, tais como:

- (a) Reflexão sobre as heurísticas de Pólya para a resolução de problemas e sobre actividades investigativas. Os alunos devem ter em conta todas as fases para resolver um problema, apercebendo-se da importância de existir um plano, pois permite organizar e estruturar o pensamento, sendo cruciais não só para a matemática como também para a vida. Os alunos, no desenvolvimento deste programa, devem ter oportunidade de ser envolvidos em actividades de natureza investigativa;
- (b) Comunicação matemática. Os alunos durante a actividade investigativa terão que comunicar as suas ideias e conclusões, confrontado-as com outros e desenvolvendo a capacidade de argumentação;
- (c) Aplicações e modelação matemática. O professor deverá ter sempre em conta as conexões com o mundo real e com os diversos temas do currículo;

(d) Tecnologia. A tecnologia é crucial para a implementação das tarefas de investigação como já foi referido.

6.6. Temas do programa do 10º ano – Matemática B

As orientações dadas pelo programa ao longo dos vários temas no que diz respeito as tarefas de investigação são as seguintes:

(i) Módulo inicial. Neste módulo são propostos problemas ou actividades que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º Ciclo. Esses problemas e actividades devem colocar em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

(ii) Tema Geometria no plano e no espaço. O ensino da Geometria é importante porque:

“desenvolve uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática.” (ME, 2001, p. 19).

Neste contexto, é sugerido que os professores proponham actividades de construção, manipulação e que os alunos realizem tarefas de investigação e façam relatórios utilizando uma linguagem matemática rigorosa, apelando que comuniquem os seus resultados com justificação.

(iii) Tema Funções e gráficos: Generalidades. Funções polinomiais. O conhecimento sobre funções deve ser estudado num contexto de modelação matemática, privilegiando-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis da vida do dia-a-dia, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas. É sugerido que se dê importância a situações problemáticas e situações de modelação matemática. Os alunos no estudo das famílias de funções podem realizar pequenas investigações matemáticas.

(iv) Tema Estatística. O aluno deverá saber tirar conclusões numa análise sempre crítica e consciente dos limites do processo de matematização da situação. Este tema fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor incentivar os alunos para o recurso

do computador. Os alunos ao realizarem estas tarefas, devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar as mensagens.

Capítulo III – Metodologia da Investigação

1. Opções metodológicas e a escolha de casos

1.1. A investigação qualitativa

A metodologia geral será qualitativa de carácter interpretativo porque pretende alcançar a compreensão do objecto de estudo do ponto de vista do participante, uma vez que envolve uma grande complexidade de factores não controláveis e os dados a obter são essencialmente descritivos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), as características da investigação qualitativa resumem-se a: (a) fonte directa dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; (b) os dados recolhidos são de natureza descritiva; (c) os investigadores preocupam-se mais com o processo do que com o produto; (d) a análise dos dados é realizada de forma indutiva; (e) o significado assume uma importância central, isto é, as perspectivas dos participantes têm importância crucial. O estudo enquadra-se no paradigma interpretativo dado que a preocupação fundamental é compreender o impacto inerente à implementação de investigações matemáticas no programa do 10º ano – Matemática B, e o que representam para os participantes do estudo (Bogdan e Biklen, 1994).

1.2. Estudo de caso

O objectivo deste trabalho é compreender e avaliar de que modo as tarefas de investigação matemática, quando implementadas na aula de matemática, são valorizadas e interpretadas por professores e alunos tendo em conta as dificuldades e potencialidades sentidas por estes.

Nesta investigação irá ser adoptada uma metodologia que aborde o professor no seu contexto natural de trabalho, que seja sensível à percepção dos seus pontos de vista e que permita descrever as suas dificuldades e receios relativamente à implementação de investigações matemáticas no currículo do 10º ano – Matemática B, favorecendo a

identificação do que de mais essencial e característico nelas existe e a descoberta de interacções entre as mesmas (Canavarro, 1993). Relativamente aos alunos, estes serão abordados e analisados num contexto de sala de aula de modo a compreender os seus pontos de vista relativamente à implementação de investigações matemáticas e de que forma atingem ou não competências profissionais. Nesta investigação de carácter interpretativo o que está a ser observado é a noção que cada participante tem da realidade em estudo, sendo a validade interna conseguida através de vários procedimentos de triangulação. A triangulação consiste na utilização de várias técnicas de recolha de dados, para conseguir explicar o fenómeno de forma aprofundada, tentando compreender toda a sua riqueza e complexidade (Burns, 2000). Como se pretende estudar uma entidade bem definida, neste caso avaliar e compreender o impacto da implementação de tarefas de investigação matemática no programa de Matemática B, a opção metodológica recai sobre o estudo de caso, que são o professor (Francisco) e duas alunas (Sílvia e Alexandra). Um estudo de caso é uma descrição analítica intensiva e globalizante de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, uma unidade social, visando conhecer os seus “como” e os seus “porquê”. É uma investigação com um forte cunho descritivo, que se efectua para descobrir o que existe de essencial, único e característico, no respectivo objecto de estudo (Merriam, 1988; Yin, 1989).

Merriam (1988) aconselha a que nos estudos de caso qualitativos sejam utilizadas as três técnicas indicadas por Patton (1987) para a investigação qualitativa: entrevistas, observações directas e análise documental.

2. Participantes do estudo

No presente estudo e de acordo com o princípio da coerência apresentado na revisão de literatura, só faz sentido estudar o impacto inerente à implementação de tarefas de investigação no currículo de Matemática B em contextos de prática curricular onde são proporcionados aos alunos experiências de aprendizagem. O grupo de participantes é constituído por um professor de Matemática do ensino secundário e pelos alunos de uma turma do 10º ano de escolaridade do curso Científico-humanístico

de Artes Visuais. Relativamente aos participantes procurou-se que estes dessem o seu ponto de vista quanto ao contributo da implementação de investigações matemáticas no programa de Matemática B tendo em conta o curso de Artes Visuais em que os alunos do presente estudo estão inseridos.

A escolha do professor foi facilitada tendo em conta que a investigadora tem uma relação de amizade com uma professora de Matemática que lecciona na escola onde o estudo foi realizado. De imediato, a colega disponibilizou o contacto do colega que iria leccionar Matemática B e que aceitou fazer parte do estudo - o professor Francisco.

O Francisco tem licenciatura em Matemática pela faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, formação complementar na área da Matemática e na área da Supervisão e Orientação Pedagógica. Tem dezasseis anos de serviço e leccionou Matemática dos antigos currículos, diurno e nocturno. Dos novos currículos leccionou Matemática A e Matemática B. Teve vários cargos na escola, excepto no conselho executivo, tendo sido: director de turma, coordenador/delegado de grupo, coordenador dos cursos tecnológicos, coordenador de segurança da escola, orientador de estágio durante 4 anos, três deles na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e um na Universidade Nova de Lisboa.

O Francisco disponibilizou-se por fazer o primeiro contacto com os elementos do Conselho Executivo da escola no sentido de apresentar o projecto e pedir autorização para a investigadora realizar entrevistas a alunos e filmar aulas. O pedido formal foi posteriormente formalizado pela investigadora junto dos respectivos elementos do órgão de gestão da escola. A escolha dos alunos foi feita após algumas observações informais de aulas durante o primeiro período e depois após uma primeira entrevista. Os alunos em questão mostraram-se, desde sempre, interessados e participativos.

A selecção recaiu numa turma do 10º ano do Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais. As alunas seleccionadas foram a Sílvia e Alexandra e ambas mostraram-se bastante motivadas para o curso onde estão inseridas.

A escolha do 10º ano de Matemática B deveu-se a um interesse pessoal da investigadora por esse tipo de currículo e, também por estar no segundo ano de implementação. Relativamente à escolha do curso de Artes Visuais deveu-se ao facto de ter sido aconselhada pelo grupo disciplinar da escola onde o estudo foi realizado, uma vez que os alunos de Artes estão de um modo geral mais dispostos em participar em projectos e actividades diferentes e serem mais criativos.

Os alunos e professor foram informados sobre o processo de recolha de dados e também da posição da investigadora nesse processo: observadora participante e que não haveria qualquer intenção de avaliar os seus desempenhos. O objectivo era compreender de que modo as investigações matemáticas são valorizadas e interpretadas pelos participantes e darem a sua opinião quanto à sua adequação ao programa de Matemática B, integração no projecto educativo de escola e no desenvolvimento ou não de competências profissionais. Como consequência do trabalho realizado, o professor e alunos foram informados de que seria redigida uma dissertação a apresentar com vista à obtenção do grau de mestre por parte da investigadora.

3. As tarefas de investigação matemática

A selecção feita das tarefas de investigação matemática, consideradas neste estudo, pretendeu ser coerente com o programa oficial de Matemática B para o curso de Artes Visuais. O programa extenso a cumprir e o exame nacional final condicionaram o número de tarefas implementadas. A opção recaiu sobre duas tarefas de cariz teórico e duas de cariz prático associadas à modelação matemática, pretendendo-se com esta selecção estudar as dificuldades e potencialidades sentidas pelo professor e alunos quando apresentadas tarefas com características diferentes, assim como avaliar e compreender a interpretação e valorização atribuída a cada uma destas tarefas.

4. Processo e recolha de dados

4.1. Descrição geral do processo

Os dados foram recolhidos durante o ano lectivo 2005/2006. As técnicas de recolha de dados utilizadas nesta investigação foram a observação participante, a

entrevista e a análise documental. Os dados foram recolhidos em vários contextos: sala de aula, sessões de trabalho e fora da sala de aula.

A nível ético toda a investigação realizada, nomeadamente no que diz respeito às entrevistas e aulas áudio-gravadas, procurou assentar num consentimento informado. Para isso, foram contactados o órgão de gestão da escola, o grupo disciplinar de Matemática da escola, o professor interveniente, os alunos e respectivos encarregados de educação. Esse contacto teve como objectivo clarificar, de forma rigorosa, o projecto de trabalho que pretendia desenvolver e apresentando sempre alternativas negociáveis (Cohen, Manion e Morrison, 2000).

A metodologia incluiu (no início do ano lectivo) entrevistas semi-estruturadas destinadas a alunos e professor do ensino secundário (Matemática B) no sentido de identificar as principais dificuldades na realização de investigações matemáticas e, relativamente aos alunos, entender a razão pela qual optaram por um curso científico-humanístico de Artes Visuais permitindo, deste modo, proceder à escolha dos dois alunos. Depois da análise e reflexão das informações recolhidas a partir da revisão de literatura e das entrevistas construiu-se, colaborativamente, com o professor interveniente, propostas de tarefas investigativas para o ensino do programa Matemática B, algumas delas adaptadas a partir do próprio manual adoptado. Neste contexto e, tendo em conta o papel que o professor deve desempenhar na implementação das tarefas de investigação matemática, as aulas foram orientadas pelo professor no sentido de promover discussões abertas na realização de investigações matemáticas, permitindo que fossem os alunos a formular os problemas, a conjecturar e a testar as hipóteses. Tendo em conta todas as fases de implementação de tarefas de investigação matemáticas, as aulas terminaram em discussão oral de modo a serem confrontadas conclusões entre os vários grupos e professor.

O papel assumido pelo investigador durante as aulas foi de observador participante, sendo o próprio investigador o instrumento principal de observação. Nas aulas de implementação das tarefas o professor recolheu dados (observação directa e recolha de registos escritos dos alunos no sentido de reflectirem sobre o seu desempenho, dificuldades e potencialidades das investigações matemáticas tendo em conta as competências que poderão adquirir para o seu desempenho profissional). O professor interveniente registou reflexões sobre as aulas da realização das tarefas seleccionadas para este estudo no sentido de analisar, de forma crítica e reflexiva, o ocorrido na aula e o modo como se relaciona com as investigações matemáticas. Este

aspecto permitiu ter acesso à perspectiva pessoal do professor, em relação à implementação de tarefas de investigação matemática no contexto sala de aula, aos dilemas pessoais que foram sendo vividos e algumas implicações e mudanças que eventualmente trouxe à sua prática lectiva. Posteriormente, foram realizadas entrevistas individuais e semi-estruturadas ao professor e alunos, no sentido de se perceber quais as dificuldades e potencialidades na realização dessas investigações e qual o seu eventual contributo para o desenvolvimento de competências significativas para o exercício da actividade profissional.

4.2. A observação participante

Nesta investigação a observação foi um importante instrumento de recolha de dados, uma vez que permitiu fazer uma descrição mais rica e completa do ambiente de sala de aula criado e desenvolvido quando implementadas tarefas de investigação matemática numa turma de 10º ano de Artes Visuais, com o objectivo de compreender o impacto e as dificuldades sentidas tanto pelo professor como pelos alunos. A observação permitiu compreender o fenómeno em estudo, ver aspectos não identificáveis directamente pelos participantes, favorecer uma abordagem indutiva e fornecer elementos que suportaram a discussão nas sessões de trabalho conjunto e nas entrevistas (Patton, 1987). A observação foi do tipo naturalista, uma vez que a observação dos fenómenos em estudo foram feitas no contexto natural em que ocorreram, existindo interacção da investigadora com os participantes. Foi usada a observação participante uma vez que o professor, alunas intervenientes e o órgão de gestão da escola conheciam os objectivos do estudo e colaboraram de forma efectiva durante e após todos os momentos de observação.

Durante o primeiro período lectivo foram observadas, algumas aulas com o objectivo de escolher alunos para uma primeira entrevista e de a partir daí seleccionar dois. Foram observadas uma aula prévia à implementação de cada uma das tarefas de investigação matemática e uma aula durante a implementação, tendo sido observadas num total oito aulas. Realizaram-se 9 sessões de trabalho com uma duração média de uma hora e meia cada. As entrevistas ao professor tiveram uma duração média de uma hora e as entrevistas aos alunos uma duração média de 25 minutos.

O registo efectuado foi não diferido e diferido. O registo não diferido, sob a forma de notas de campo, foi realizado durante a observação das aulas e nas sessões de trabalho conjunto, com o intuito de anotar, de forma imediata, alguns aspectos do discurso, reacções, opiniões, atitudes e ideias dos participantes, assim como interpretações e opiniões do observador. O registo diferido foi realizado em áudio durante as entrevistas e, em vídeo durante as aulas de implementação das investigações matemáticas.

4.3. As reflexões escritas pelo professor após as aulas

Foi solicitado ao professor que este após cada aula de implementação de uma tarefa de investigação matemática, elaborasse uma reflexão crítica sobre a referida implementação com o objectivo de ponderar sobre o decorrer da mesma e sobre a sua pertinência e adequação ao objectivo da aula, das competências a atingir pelos alunos e sobre a sua importância para o curso de Artes Visuais e seu relacionamento com a mesma. Estas reflexões permitiram ter acesso a uma perspectiva pessoal do professor em relação à implementação de tarefas de investigação matemática numa aula do 10º ano de Artes Visuais e, também, aos dilemas pessoais que foram vividos e algumas implicações e mudanças que o seu uso trouxe à sua prática lectiva. As reflexões feitas tiveram diferentes graus de desenvolvimento e profundidade e permitiram, também, estabelecer uma comparação entre as várias tarefas.

4.4. As entrevistas

As entrevistas constituíram um fundamental instrumento de recolha de dados permitindo, na fase inicial do estudo, caracterizar os participantes e compreender quais as perspectivas que tinham face à Matemática e às investigações matemáticas. Na fase final permitiu analisar e compreender a interpretação e valorização atribuída pelos participantes à implementação das investigações matemáticas na aula de Matemática, tentando perceber qual a importância que atribuem à adequação no programa de Matemática B, no curso de Artes Visuais e no projecto educativo de escola, assim

como analisar a evolução das perspectivas face à Matemática e às investigações matemáticas.

A entrevista, tendo em conta o modo como é elaborada e conduzida, leva a um melhor ou pior resultado. Segundo Patton (1987) na condução da entrevista é fundamental que o entrevistador não induza respostas pré-determinadas, faça perguntas claras e de aprofundamento, coloque questões e dê respostas de apoio e reconhecimento, comunique neutralidade e sensibilidade.

Como foram elaborados guiões que serviram de orientação para o decorrer e desenvolvimento das entrevistas, estas foram consideradas semi-estruturadas. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a entrevista é normalmente classificada, quanto ao tipo, em não estruturada, semi-estruturada ou estruturada, dependendo do tipo e grau de abertura das questões colocadas. Foram realizadas duas entrevistas semi-estruturadas ao professor. A primeira, realizada no início de Novembro de 2005 e incidiu sobre o percurso pessoal e conhecimento de si, a aula, a preparação das aulas, o currículo de Matemática B e as tarefas de investigação matemática. Seguiu a orientação de um guião (Anexo 1), tendo demorado aproximadamente uma hora. A última entrevista foi realizada no final do ano lectivo, depois de terminarem as aulas, com a duração de aproximadamente uma hora, tendo por objectivo perceber quais as transformações que existiram no Francisco ao longo da implementação das tarefas de investigação matemática. Essas transformações foram analisadas ao nível do ambiente de aula, o tipo de preparação que existiu e dificuldades inerentes à compreensão e à interpretação que faz destas, bem como qual a valorização que lhe atribui relativamente ao programa de Matemática B, ao projecto educativo de escola e ao curso de Artes Visuais. Foi igualmente o propósito de entender as preocupações, impressões, potencialidades e transformações sentidas ao longo de todo o trabalho, assim como recolher a opinião pessoal sobre o trabalho desenvolvido.

Foram realizadas duas entrevistas semi-estruturadas às alunas. A primeira, realizada dia 13 de Dezembro de 2005 e após algumas observações informais de aulas, incidiu sobre a Matemática, escolha do agrupamento e curso, a aula, o currículo de Matemática B e tarefas/investigações matemáticas. A entrevista seguiu um guião orientador (Anexo 2) tendo demorado aproximadamente 20 minutos. A última, realizada após a implementação da última tarefa de investigação matemática, no final das aulas do terceiro período tendo a duração média de 25 minutos, teve por objectivo recolher e compreender a evolução nas concepções sobre a Matemática, a aula e sobre

o entendimento de investigações matemáticas, bem como recolher a opinião pessoal sobre as aulas de implementação de tarefas de investigação matemática. Teve, também, o propósito de compreender a interpretação e valorização que lhe atribuem assim como perceber as dificuldades sentidas e potencialidades inerentes. Todas as entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas integralmente.

4.5. Os relatórios dos alunos

Os relatórios escritos pelos alunos, relacionados com as investigações matemáticas implementadas nas aulas, foram objecto de análise e avaliados pelo professor segundo uma tabela de descritores. Serviram como suporte para a reflexão e discussão nas sessões de trabalho com o professor interveniente no estudo e permitiram analisar os processos matemáticos, estratégias de resolução, comunicação e valorização a elas atribuídas pelas alunas durante o decorrer das investigações matemáticas. Esta análise permitiu ainda a triangulação dos dados.

5. Análise dos dados e a construção do caso

Num trabalho de natureza interpretativa a análise dos dados acontece à medida que vão sendo recolhidos, devendo obedecer a um critério de organização e de síntese.

A primeira fase de análise decorreu durante a recolha dos dados. Dada a natureza das questões de investigação, a tipologia de análise utilizada foi de análise de conteúdo.

Esta primeira fase de análise foi ao encontro das observações informais das aulas no início do ano (antes das primeiras entrevistas), das sessões de trabalho com o professor participante no estudo e a transcrição das entrevistas permitindo, deste modo, organizar e clarificar ideias quanto às questões de investigação e definir categorias de análise já contempladas nos guiões das entrevistas. Durante esta fase de análise, e à medida que foram transcritas as entrevistas, houve registo de observações, ideias, interpretações e comentários em função dos constructos teóricos estruturantes deste trabalho.

Depois de concluída a recolha de dados deu-se início à última fase de análise. Com a proximidade do final do ano lectivo e trabalho ainda existente na escola tornou-se difícil analisar tudo em profundidade. A quantidade de trabalho era muita e apenas foi iniciada a sua análise após o final do ano lectivo. Este momento de análise consistiu na procura de relações entre as concepções sobre a Matemática, tarefas de investigação matemática, no que diz respeito às alunas participantes, e compreender de que modo tinham sido interpretadas e valorizadas ao longo deste ano lectivo as investigações matemáticas na aula, quer na perspectiva das alunas quer na perspectiva do professor. Ao nível do professor era importante perceber as dificuldades sentidas quer na elaboração, execução e avaliação e também o seu ponto de vista quanto à implementação destas tarefas numa turma de Artes Visuais de Matemática B e adequação deste programa de Matemática B ao projecto educativo de escola. No que diz respeito às alunas participantes tentou-se perceber se estas desenvolveram competências profissionais, assim como a importância e dificuldades inerentes a esta actividade matemática.

Capítulo IV – Caracterização do contexto e dos intervenientes no estudo de caso

Neste capítulo é caracterizado o contexto e ambiente onde decorreu todo o trabalho assim como o professor e alunas participantes.

1. A escola

1.1. Localização e caracterização da escola

A escola situa-se em Portimão, numa área nova com acessos fáceis, bons estacionamento e espaços verdes. São pontos de passagem obrigatórios no caminho para a Escola, a Biblioteca Municipal, o Museu e Sala de Exposições, o Pólo Universitário, os novos edifícios públicos da Polícia e do Tribunal, a Piscina, o Pavilhão Polidesportivo e o Auditório. Estando a cidade de Portimão situada no estuário do rio Arade, com o melhor porto de mar do Algarve e perto de praias muito procuradas por turistas, a Escola reflecte naturalmente os condicionalismos inerentes à sua localização e ao perfil da sua população.

O grande e rápido desenvolvimento urbanístico e populacional, não foi convenientemente acompanhado pelo desenvolvimento sociocultural desejado, fragilizando uma educação que se pretende centrada em valores. Contudo, o contacto frequente com outras culturas tem promovido não só a curiosidade, a facilidade de integração e o espírito crítico mas, também, o respeito pela diferença destacando-se a nossa boa adesão à dimensão europeia.

A Escola foi construída em 1964. É um edifício monobloco, em betão, com três pisos. Tem uma área total de 23.000 m², com 4.120 m² de área coberta para 1400 alunos, com características próprias do sistema educativo da sua época. Frequentam esta Escola cerca de 1400 alunos, distribuídos por três turnos e por diferentes cursos oferecidos pelo actual sistema de ensino. A maior parte dos alunos são oriundos da

cidade, havendo também muitos das zonas circundantes, de zonas rurais e de outros concelhos.

O Conselho Executivo, formado por três professores do Quadro de Nomeação Definitiva, eleito por três anos.

O corpo docente é estável e constituído por 134 professores, dos quais 92,5% são profissionalizados.

O corpo não docente é constituído por 16 funcionários administrativos, repartidos pelas diferentes áreas: um técnico superior, um técnico profissional, 27 funcionários auxiliares de acção educativa, dois auxiliares técnicos, 6 operários e dois guardas-nocturnos.

No presente ano lectivo a Escola tem 46 turmas em regime diurno e 8 em regime nocturno. No período diurno funciona o Curso de Educação e Formação Profissional, o Ensino Secundário dos Cursos Gerais (1º, 2º, 3º e 4º Agrupamentos) e os Cursos Tecnológicos (Informática do 1º Agrupamento, Design do 2º Agrupamento, Comunicação e Animação Social do 4º Agrupamento). Em regime nocturno funciona o Ensino Recorrente por Unidades Capitalizáveis no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário o Curso Geral, os Cursos Técnicos de Informática e Animação Social e o Curso de Especialização Tecnológica (Gestão de Animação Turística).

Está previsto que funcionem no próximo ano lectivo, no período diurno, os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas, Línguas e Literaturas e Artes Visuais e os Tecnológicos de Multimédia, Informática, Desporto, Acção Social e Ordenamento do Território e Ambiente, bem como o Curso de Educação e Formação. No período nocturno funcionarão os Cursos Científico-Humanísticos de Ciências Socio-económicas, o de Ciências Sociais e Humanas e os Cursos Tecnológicos de Informática e Acção Social e o Curso de Especialização Tecnológica. Numa perspectiva actual e futura de oferta formativa a Escola deverá incluir na sua rede, e na medida do possível, cursos profissionalizantes e cursos profissionais.

A Escola dispõe de um Serviço de Psicologia e Orientação Profissional sob a responsabilidade de uma psicóloga e tem sido a Sede do Centro de Formação de Professores.

Funciona, nesta escola, um Centro de Aprendizagem como parte integrante da Biblioteca e que, com a colaboração de professores das várias disciplinas, tem como objectivo sensibilizar os alunos do ensino secundário para métodos de aprendizagem

mais participativos e activos, conducentes à autonomia e à criatividade. Pretende, ainda, apoiá-los no âmbito de diferentes disciplinas, designadamente Português e Matemática e fomentar a prática das novas tecnologias de Comunicação e Informação. Foi nessa perspectiva que a escola aderiu ao "Projecto Acessus" que se materializou na construção de um *site* de apoio aos novos programas de oito disciplinas do 10º ano da Reforma Curricular, através do trabalho de colaboração entre várias escolas da região.

A Sala do Aluno que funciona em articulação com a Associação de Estudantes é responsável pela organização de um conjunto de actividades de carácter lúdico-pedagógico, no sentido de ocupar os tempos que advêm das situações de ausência imprevista de professores.

A Escola tem-se preocupado, ao longo dos últimos anos, em oferecer um conjunto de actividades complementares aos currículos e funcionar como um local privilegiado na realização de múltiplas acções que cumpram o conceito de escola global, aberta à comunidade e na qual os jovens possam ocupar de forma salutar os seus tempos livres.

Nesse contexto, destaca-se o Desporto escolar, o Ciência Viva, a Certificação como Escola ENIS e as actividades dos Clubes de Ciência, de Teatro, de Solidariedade e Animação, de Astronomia e de Actividade Física e Saúde.

1.2. Corpo Docente e alunos

Compõe-se de um elevado número de docentes profissionalizados que, todavia, sempre manifestaram o seu interesse e disponibilidade para a adaptação aos novos modelos pedagógicos. Em face da reforma do ensino secundário esse espírito está novamente posto à prova. Esperam do Ministério da Educação o enquadramento necessário para que o êxito e dignificação do trabalho que desenvolvem sejam uma realidade para todos aqueles que pautam a sua conduta pelo profissionalismo e empenho.

O insucesso escolar dos alunos é elevado, principalmente no 10º ano de escolaridade. A crise de valores que a nossa sociedade atravessa reflecte-se nos jovens que se sentem, a maior parte das vezes, desorientados e sem estímulos para se empenharem mais profundamente na sua formação e na construção de projectos de vida que lhes dêem horizontes de satisfação pessoal e sucesso profissional. Aposta-se na ideia de que só um jovem exercitado a aprender por si próprio e a alargar

espontaneamente as suas competências será capaz de tomar as “rédeas” do seu próprio desenvolvimento.

Nesse sentido pretende-se, cada vez mais, diversificar a oferta da escola, possibilitando aos alunos várias alternativas de formação encontrando-se, assim, a escola aberta a todos os tipos de oferta formativa, recorrendo a outros públicos que também necessitem de educação/formação, devendo os professores adaptar-se a este tipo de formação.

1.3. O projecto educativo de escola

O presente documento remete para diferentes planos de acção que conciliem as novas orientações de gestão curricular, metodológicas e programáticas com as práticas educativas e pedagógicas ainda em vigor e que orientarão a realização das várias actividades a serem implementadas. Sendo um documento orientador, pressupõe que a sua concretização não se esgote nas linhas apresentadas implicando, pelo contrário, um espírito de abertura e uma maior diversificação da oferta formativa que, gradualmente, aumente o nível de qualificação profissional dos jovens e saiba responder às necessidades e exigências de uma sociedade em constante mutação.

O projecto educativo de escola apresenta os seguintes objectivos prioritários:

1. Educar para a cidadania através da:

1.1 Promoção de valores como a responsabilidade, solidariedade, autonomia e democracia;

1.2 Sensibilização para atitudes e comportamentos de risco e promoção de uma vida saudável (ex.: educação sexual, desporto, educação rodoviária, prevenção de droga, tabaco e álcool);

1.3 Promoção de uma participação dos alunos cada vez mais activa na comunidade e simultaneamente a construção de uma identidade global;

2. Promover oportunidades diferenciadas de sucesso escolar e educativo através de:

2.1 Uma sólida formação académica que garanta o prosseguimento dos estudos;

2.2 Uma formação de índole técnica que facilite a transição e inserção no mundo do trabalho;

3. Promover uma cultura de qualidade/excelência no processo de ensino/aprendizagem.

4. Implementar uma cultura de reconhecimento e valorização das boas práticas educativas.
5. Estimular a prática da inovação educacional, nomeadamente, através da utilização de novas tecnologias de informação e comunicação e metodologias diversificadas adequadas às novas filosofias educativas.
6. Desenvolver as condições propiciadoras para a melhoria das relações humanas entre todos os intervenientes no processo educativo.
7. Reforçar a relação escola/família/comunidade, apostando principalmente em estratégias que cativem os pais/encarregados de educação para o acompanhamento das actividades escolares dos alunos.
8. Reforçar a actuação da escola como verdadeiro espaço cultural, informativo e formativo.
9. Promover a optimização, modernização e humanização dos espaços e equipamentos escolares.
10. Desenvolver laços de cooperação e amizade entre os jovens, famílias, professores, instituições e comunidade em geral noutros países.
11. Promover uma cultura de avaliação interna de escola com o objectivo de melhorar a organização, o funcionamento e os resultados do sistema educativo.

A nível pedagógico o projecto educativo de escola aposta nos seguintes objectivos:

1. Gestão de Currículos, Programas e Actividades Educativas:

- 1.1 Ordenar e gerir com eficácia a implementação dos planos curriculares e programas definidos a nível nacional;
- 1.2 Criar condições ao corpo docente para a utilização de metodologias adequadas às novas filosofias educativas;
- 1.3 Generalizar a utilização das novas Tecnologias da Informação às práticas lectivas das várias disciplinas, tendo em vista a qualidade e a inovação educacional;
- 1.4 Promover o espírito de partilha de experiências, saberes e materiais entre colegas, com vista ao enriquecimento das metodologias de trabalho em sala de aula;
- 1.5 Criar condições para a implementação de projectos curriculares interdisciplinares;
- 1.6 Implementar programas disciplinares de oferta de Escola;
- 1.7 Criar grupos de trabalho que acompanhem o desenvolvimento dos cursos tecnológicos, os estágios e as respectivas saídas profissionais;

1.8 Estabelecer protocolos com algumas empresas e instituições da cidade para que os alunos dos cursos direccionados para a vida activa possam ter acesso a essas empresas e instituições para actividades de complemento de formação, orientadas conjuntamente pelos seus professores e técnicos dessas empresas;

1.9 Manter uma comunicação mais directa com empresas e instituições da cidade, com vista a uma integração mais saudável no mercado de trabalho dos alunos oriundos dos cursos vocacionados para a vida activa;

1.10 Organizar actividades de complemento curricular e de ocupação dos tempos livres de acordo com os interesses dos alunos e recursos da escola;

1.11 Valorizar o papel pedagógico do Centro de Recursos através da concepção de projectos diferenciados de acção pedagógica de acordo com os diferentes planos de estudo e com os problemas específicos dos alunos;

1.12 Incentivar a criação de assessorias pedagógicas, com vista ao acompanhamento do desenvolvimento curricular;

2. Avaliação:

2.1 Estabelecer requisitos de aprendizagem que estimulem a progressão do aluno e/ou transição de ano escolar;

2.2 Actualizar os critérios de avaliação, garantindo a sua aplicação com coerência e equidade;

2.3 Sensibilizar o corpo docente para a utilização de instrumentos de avaliação diversificados;

2.4 Promover a avaliação formativa, como instrumento do processo ensino-aprendizagem;

2.5 Reflectir sobre os resultados da avaliação dos alunos;

2.6 Assegurar o sucesso educativo promovendo uma cultura de qualidade, exigência, responsabilidade e níveis de eficiência e eficácia.

3. Orientação e Acompanhamento dos Alunos:

3.1 Desenvolver actividades de informação e orientação escolar e profissional destinadas a alunos, pais e encarregados de educação;

3.2 Prestar apoio aos alunos que frequentem o ensino secundário no sentido da resolução dos seus problemas de transição para o ensino superior e inserção na vida activa;

3.3 Melhorar a integração dos alunos estrangeiros na comunidade escolar, desenvolvendo actividades de apoio psico-pedagógico, tanto no diagnóstico de

situações-problema como na implementação de modalidades de complemento pedagógico, compensação educativa, educação especial, aulas de Português e de Cultura Portuguesa;

3.4 Promover acções com serviços especializados para um correcto diagnóstico/avaliação de jovens com necessidades específicas pedagógicas e sociais;

3.5 Manter e incentivar contactos assíduos com a família e encarregados de educação;

3.6 Aplicar estratégias de remediação concretas e individualizadas com vista à motivação dos alunos para a frequência dos apoios educativos que lhes são concedidos;

3.7 Assegurar as condições para que o Director de Turma possa acompanhar, de forma mais eficaz, os alunos, designadamente, na implementação do estudo acompanhado;

3.8 Promover actividades que alertem os alunos para os malefícios do tabaco, álcool e outras drogas e doenças que conduzam a uma mudança de atitudes/comportamentos dos alunos.

2. O Professor

Relativamente ao professor são clarificados aspectos em termos pessoais e profissionais. O Francisco tem quarenta e dois anos, aspecto descontraído, calmo e bastante informal. É bastante comunicativo e bem disposto que transparece nas aulas deixando e levando a um ambiente bastante descontraído e leve. Tem com os alunos uma relação aberta e espontânea que ao mesmo tempo transmite segurança, responsabilidade e exigência.

Francisco é licenciado em Ensino da Matemática pela Universidade de Lisboa e possui formação complementar na área da Matemática e na da Supervisão e Orientação Pedagógica e no início do ano lectivo 2005/2006 tinha 16 anos de serviço.

Em termos profissionais foi director de turma, coordenador/delegado de grupo, coordenador dos cursos tecnológicos, coordenador de segurança na escola referindo que:

“dá uma boa perspectiva do outro lado, do lado dos alunos, aquele que não é visível na sala de aula”, orientador de estágio durante quatro anos (três na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e um na Universidade Nova de Lisboa)”. (Primeira entrevista)

A opção de ser professor de Matemática aconteceu no 12º ano e foi, essencialmente, devido à professora e ao explicador de Matemática:

“Fui professor de Matemática...por causa da professora de Matemática do 12ºano ...porque nada fazia prever que eu fosse enveredar pela Matemática. Depois...o meu percurso foi sempre orientado para engenharia electrotécnica...mas depois eu ... no 12º ano a professora de Matemática e o explicador de Matemática obrigaram-me entre aspas a tirar uma licenciatura em matemática. Foi...foi um bocado isso...foi a pressão que fizeram um bocado...acharam que eu tinha um certo jeito para a Matemática. E levaram-me a escolher Matemática...” (Primeira entrevista)

O Francisco referiu que se fosse hoje não escolheria ser professor de Matemática porque a função docente tem vindo a perder alguma dignidade e também porque os alunos chegam ao ensino secundário cada vez com menos qualidade.

As experiências profissionais mais significativas que teve ao longo da sua carreira foi fazer parte da criação do ensino recorrente nocturno, criar, juntamente com outros colegas, os primeiros laboratórios de Matemática, ser orientador de estágio e por fim fazer parte, como professor destacado, dos Recursos Humanos da Direcção Regional de Educação do Algarve, experiência essa que muito o marcou:

“Nestes três anos deu para perceber perfeitamente o que é a grande falta de motivação de alguns docentes, nomeadamente contratados com horários e condições de trabalho absolutamente degradantes...professores do Norte colocados com quatro horas no Algarve...isto é, impensável. O facto é que isto continua a existir e enquanto não se fizer algo, obviamente vão existir muitos alunos com muitas faltas de aulas porque, enfim, nalgumas situações estes professores sentem-se desmotivados para estarem cá durante realmente o tempo lectivo”. (Primeira entrevista)

Atribui ao grupo disciplinar um papel muito importante, nomeadamente, na planificação das aulas e do ano, embora refira que nem sempre este trabalho seja feito com o intuito de criar material novo mas, sim, no de reproduzir algo já existente. Este facto deve-se a factores exteriores:

“Eu acho importante, (...). É importante a partilha de experiências. Para mim o mais importante que vejo neste trabalho colaborativo são as planificações. Aqui a esmagadora maioria dos colegas tem outras ocupações fora da escola, estando cá o tempo estritamente necessário para a leccionação.” (Primeira entrevista)

O Francisco caracteriza-se como sendo um professor que proporciona aos alunos um bom ambiente de aula não tendo, no entanto, muita paciência para alunos desmotivados. Refere que não lhe agrada corrigir testes e que tem a certeza que avaliaria os seus alunos com menos instrumentos de avaliação sumativa, preferindo proporcionar-lhes ambientes propícios à descoberta.

O facto de ter aceite fazer parte deste projecto deveu-se ao facto de:

“quero contribuir de alguma forma para que os meus alunos tenham mais uma possibilidade de sentirem que o trabalho que desenvolvem na sala de aula não é um trabalho sem significado, é um trabalho perfeitamente objectivo e nomeadamente, este trabalho para eles ...eles estão motivados para o fazer e penso até que é interessante fazer”. (Primeira entrevista)

Relativamente ao ambiente de aula, por norma, propõe aos alunos tarefas que levem o aluno a atingir o conhecimento a partir da construção desse conhecimento. A forma como trabalha com os alunos difere do objectivo da aula. Refere que o professor deve assumir, em qualquer situação, o papel de orientador mesmo quando a aula é centrada no professor:

“quando a aula é centrada no professor é óbvio que o papel do professor aí assume uma ênfase muito maior, mas que ele procure ao máximo que os alunos colaborem na... concretização dos objectivos da aula e o mais amiúde possível”. (Primeira entrevista)

Refere ainda que o aluno deve assumir uma postura atenta e participativa e estar motivado. Quanto aos recursos utiliza a calculadora gráfica, materiais manipuláveis e por vezes o computador.

O Francisco caracteriza uma boa aula de Matemática como sendo aquela em que tem os alunos centrados na matéria e que os conhecimentos tenham significado para os alunos. Ao preparar as aulas procura encontrar exercícios que permitam chegar ao objectivo da aula e selecciona, essencialmente, dois tipos de tarefas: tarefas de pesquisa e tarefas teórico-práticas.

O Francisco parece interpretar o currículo como programa quando diz que o programa é a coluna vertebral de toda a leccionação uma vez que a grande maioria dos alunos vão a exame nacional. No entanto, refere que, por vezes, contorna o programa assumindo, deste modo, uma perspectiva mais flexível, tal como é referido por Ponte, Matos e Abrantes (1999):

“O programa é...é assim, o programa tendo em conta que a esmagadora maioria dos alunos vão fazer exame nacional, o programa é a coluna vertebral de toda a leccionação. Tenho uma preocupação grande em cumprir realmente o programa...mas não me preocupo se efectivamente durante algumas aulas efectuar uma voltinha por fora do programa para atingir um determinado objectivo. Na avaliação de conteúdos, na avaliação sumativa, pois aí, a avaliação passa muito por realmente o que está no programa, na parte da avaliação escrita de conhecimentos. Preocupo-me que essa avaliação não seja a única avaliação que faço dos alunos, normalmente essa avaliação, para mim, nunca vale muito mais de 50 % da avaliação final. Os trabalhos, o desempenho são importantes.” (Primeira entrevista)

Menciona que hoje em dia já sente pouca dificuldade na selecção e planificação das tarefas. No currículo de Matemática B valoriza, essencialmente, os trabalhos de projecto e de investigação embora, em sua opinião, condicionados pelo exame nacional a que os alunos vão estar sujeitos:

“Bom... eu aqui tenho que à partida referir um pressuposto essencial. Eu acho que a Matemática B, na forma como foi desenhada não deveria ter exame nacional. E esse exame nacional condiciona tudo o que se faz com os alunos. ...eu valorizo, obviamente as tarefas, todos os trabalhos de projecto, de investigação que faço com os meus alunos. Mas, por causa desse exame nacional, tenho que dar o teste, em meu entender com demasiado peso para a avaliação sumativa. Mas esse teste tem que realmente existir. Mas, eu acho que o trabalho deveria ser um trabalho de pesquisa, essencialmente um trabalho de pesquisa e, um trabalho ...muito virado para cada um dos cursos que têm Matemática B. O que por vezes não é fácil, porque não nos podemos desviar do tal programa e, da tal objectividade do exame nacional.” (Primeira entrevista)

Considera vantajoso que a Matemática no ensino secundário tenha três programas distintos, Matemática A, Matemática B e MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais), de acordo com as escolhas vocacionais dos alunos. Lamenta a existência do exame tendo em conta o objectivo da Matemática B e MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais), e considera mesmo que o currículo das mesmas deveria ser repensado.

No currículo de Matemática B, por vezes, sente dificuldade em arranjar exercícios e fazer planos de aula que tenham em conta a sua área e futuros objectivos profissionais:

“ (...) a matemática ...a matemática deverá sempre abrir horizontes para além de organizar o raciocínio e, de organizar realmente a forma de pensar e de estar do aluno não só na escola como na vida, a matemática deve abrir realmente algumas perspectivas. No caso da Matemática B e, no caso dos alunos de Artes, confesso que por vezes torna-se difícil arranjar exercícios e

arranjar ...fazer um plano de aula dirigido para o futuro...para que o aluno realmente tenha ...aplicado os conhecimentos adquiridos, nomeadamente saindo da parte da geometria...Efectivamente a Matemática, a Matemática tem que servir em primeiro lugar, para arrumar a cabeça dos alunos, para os ensinar um determinado tipo de raciocínio de pensamento, nem que seja na construção daquilo que pretendem efectivamente fazer.” (Primeira entrevista)

Relativamente às investigações matemáticas na sala de aula, o Francisco tem a concepção de que estas se destinam a levar o aluno a tirar uma conclusão de um resultado que seja, ou não, previamente conhecido. Dá um exemplo de uma investigação matemática realizada com um aluno:

“ (...) Eu dou um exemplo que me marcou muito numa altura que eu estava ainda a iniciar as minhas funções docentes (...) ...na casinha que se desenha a partir de um ponto. Eu peguei nessa casinha e peguei em dois artigos...penso que os primeiros que se escreveram sobre modelação matemática ...peguei num aluno que na altura estava no 12º ano e era realmente muito bom aluno a informática, tendo colocado este desafio a alguns alunos, peguei nesse aluno e procurei chegar a uma conclusão, na altura o meu conhecimento sobre teoria de grafos não era muito significativo e, procurei chegar realmente à conclusão do número de formas de desenhar aquela casinha. E, realmente isto foi um processo que demorou algum tempo, chegando realmente a conclusões interessantíssimas... mas como digo foi um trabalho com um aluno.” (Primeira entrevista)

Este professor considera que a aula deve ser centrada no aluno e este deve adquirir conhecimento a partir da experiência, da modelação dessa experiência e chegar, ele próprio, à conclusão. Refere que a Matemática serve para arrumar ideias e que esta deve ser orientada:

“no sentido que os alunos dêem um passo de cada vez e que caminhem com segurança, que construam o conhecimento a partir dos conhecimentos anteriormente adquiridos. Nesse aspecto a Matemática serve para ...para modelar um tipo de estar na escola e de estar ...aprender”. (Primeira entrevista)

Segundo o Francisco, as tarefas de investigação matemática adequam-se e adaptam-se a todos os programas e considera que a Matemática só tem avançado à custa da investigação e é importante que os alunos percebam que eles próprios podem ser investigadores. Esta ideia de colocar os alunos no papel de matemáticos é referida e defendida por Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999):

“A Matemática só avança e só tem avançado à custa de investigação. Portanto, podemos pensar que sempre que o aluno está a aprender qualquer coisa que alguém investigou e se essa investigação foi feita de uma forma ...suficientemente elementar para que possa ser transmitida ao aluno...penso que é a melhor forma de ele perceber que ele próprio poderia ter sido esse investigador”. (Primeira entrevista)

Na sua prática lectiva procura sempre integrar as investigações matemáticas antes de tirar a conclusão de um conceito. A principal dificuldade que sente na implementação, em sala de aula, das tarefas de investigação matemática é o elevado número de alunos e também o facto de os professores estarem muito ligados à parte sumativa da avaliação. Relativamente à avaliação considera que é complicado acompanhar individualmente os alunos quando agrupados, uma vez que a avaliação final é uma avaliação individual:

“Agora, a avaliação da tarefa, penso que nós não é só fazer tarefas é avaliar efectivamente ...que contributo é que essa tarefa deu e, avaliar objectivamente se ela foi ou não rentável e se foi ...uma tarefa tendo em conta os objectivos ...penso que o *feedback* dado pelos alunos na continuação e nas matérias que estão ...a seguir ...ao objectivo dessa determinada tarefa ...que é uma forma muito simples de perceber se essa tarefa funcionou ou se não funcionou. “ (Primeira entrevista)

Relativamente aos conteúdos matemáticos que melhor se adaptam à implementação de tarefas de investigação matemática, o Francisco refere que todos se adaptam mas, tendo em conta os recursos existentes nas escolas, considera o tema Funções mais fácil devido à utilização da calculadora gráfica.

Quando implementa este tipo de tarefas, considera que os alunos aceitam de bom agrado e os colegas de grupo também. No entanto, destaca a dificuldade quanto à planificação dessas investigações matemáticas em grupo disciplinar. Para cumprir o programa é necessário implementar tarefas de investigação matemática:

“Aliás o próprio programa as refere. Eu julgo é que...voltando a bater na mesma tecla, penso que a avaliação exterior à avaliação final que é feita no final nos alunos através do exame de Matemática é que, efectivamente tira ...um pouco de grande ...da grande importância dessa investigação matemática. Os alunos, embora possam utilizar a calculadora gráfica ...não podem utilizar, por exemplo o computador, não podem fazer investigação utilizando o *Cabri* ou o *GSP* nem o próprio *Mathematica*... não...portanto...por aí ...penso que o exame limita um bocado. “ (Primeira entrevista)

Durante as aulas de implementação de tarefas de investigação matemática considera que fez um acompanhamento próximo do trabalho dos alunos, nomeadamente, com o objectivo que eles não fiquem bloqueados e que não consigam avançar. Esta ideia é partilhada por Ponte *et. al.* (1999) ao referir que o papel do professor durante a implementação de investigações matemáticas deve ser no sentido de desafiar, apoiar e avaliar, levando deste modo os alunos a reflectirem sobre os procedimentos e, assim, serem capazes de tomar decisões quanto ao prosseguimento da investigação, alterando aspectos ou transitando para outra fase de trabalho. Ainda neste contexto, também César (1997) defende que é importante o acompanhamento feito pelo professor aos seus alunos, devendo ser fornecido *feedback* no sentido de ultrapassarem dificuldades, reflectirem e validarem o seu trabalho. Também Dias (2005) menciona a importância, nas aulas de implementação de tarefas de investigação matemática, das interacções estabelecidas entre professor-alunos, pois estas permitem que o professor oriente os alunos no sentido de ultrapassarem dificuldades, reflectirem e validarem resultados, levando a que estes ultrapassem obstáculos.

Tendo em conta a turma de Artes Visuais, o Francisco é de opinião que as tarefas de investigação matemática se integram no projecto educativo de escola, muito embora pense que o currículo de Matemática B devesse ser reformulado:

“No projecto educativo de escola sem dúvida, no curso de Artes Visuais também penso que sim...muito embora, um programa para Artes Visuais...eu penso que ...poderia ser reformulado dentro da Matemática B. Penso que o currículo para o curso de Artes Visuais ...poderia ser visto ...não estamos a pensar numa Matemática C, estamos a pensar numa adaptação curricular para aqueles alunos.” (Primeira entrevista)

Segundo o Francisco, as investigações matemáticas desenvolvem competências profissionais pois:

“ (...) um papel de um indivíduo na vida será sempre procurar e melhorar e, chegar efectivamente ...a uma forma mais eficaz de desempenhar as suas tarefas. A investigação matemática é ótima para isso, é um processo de optimização e de chegar realmente a um resultado através ...de um estudo que é feito progressivamente”. (Primeira entrevista)

Durante as investigações matemáticas avalia os seus alunos através de registos que partem da observação:

“Durante...durante as tarefas ...eu ... a avaliação...faço acompanhando efectivamente o aluno nessas tarefas ...procurando registar o que existe mais significativo ...quer positivamente, quer negativamente...até porque a parte negativa poderá ter a ver com a forma como o aluno é orientado no decurso da tarefa ...a avaliação à posteriori ...é a forma como o aluno realmente consegue ...concretizar no fundo objectivos aos quais a investigação se destinou. Basicamente é isto.” (Primeira entrevista)

Tal como é defendido no programa de Matemática B e também Dias (2005), o Francisco vê o uso da tecnologia como algo imprescindível para a investigação matemática:

“A tecnologia é absolutamente imprescindível...para a investigação matemática. Mesmo ...em algumas investigações que poderiam ser feitas a partir de materiais que não tenham directamente a ver com tecnologia ...nomeadamente com os recursos tecnológicos informáticos e audiovisuais que existem hoje em dia ...eu penso que é importantíssimo numa investigação existir sempre algo de palpável e algo manipulável que nos ajude realmente a sair de...em cada passo daquilo que estamos a fazer. “ (Primeira entrevista).

3. As alunas

3.1. A Sílvia

A Sílvia é uma boa comunicadora e mostrou-se bastante à vontade desde o início. Revela bastante espírito crítico e solicita e questiona o professor sempre que tem dúvidas. Desde sempre mostrou-se muito disponível para participar no projecto e no início do ano lectivo, na altura da primeira entrevista, a Sílvia não sabia muito bem o que lhe esperaria nas aulas onde seriam implementadas tarefas de investigação matemática. No entanto, a curiosidade e o entusiasmo elevados revelavam preocupação quanto ao seu desempenho.

No que diz respeito à disciplina atribui importância à Matemática referindo, até, que embora aborrecida esta é importante para desenvolver o raciocínio. Associa a Matemática a um conjunto de regras que se tem de seguir para se conseguir realizar uma certa actividade:

“Faz-nos pensar e raciocinar de uma certa maneira ... e ter regras para fazer uma certa actividade e ... assim...ajuda-nos a pensar...acho eu.” (Primeira entrevista)

Refere que não gosta muito de cálculos que envolvam equações e inequações e diz que a maior dificuldade que sente na disciplina é a falta de concentração. A forma como estuda é através do manual fazendo exercícios e tentando entender como estes se resolvem e quais as regras que se aplicam.

Para a Sílvia saber Matemática é ter capacidade para conseguir, pelo menos, resolver um exercício, não atribuindo apenas a este saber fazer cálculos mas, sim, aplicá-los em outras situações e problemas do dia a dia:

“Para mim...saber matemática...é saber o que fazer, não estar completamente ...à toa...do tipo estudar para conseguir fazer um determinado exercício. Saber matemática é conseguir pelo menos começá-lo ...mesmo que não esteja bem ...mas...saber matemática...sim é uma certa capacidade ...de saber...uma coisa (hesita) ... é saber fazer cálculos, mas é também saber utilizá-los noutras situações que não nos livros e em determinados problemas...ou seja na vida “ (Primeira entrevista)

Relativamente à escolha do curso de Artes Visuais esta deveu-se ao facto de ter tido boas notas a Educação Visual e Tecnológica e também porque os seus pais estão ligados às artes. Como ela mesma refere, “foi para seguir a família”.

Quanto às expectativas que tem relativamente ao curso de Artes Visuais, espera aprender Geometria sobre a funcionalidade e beleza das “coisas”, isto é, conseguir captar de modo mais minucioso o mundo que a rodeia.

No que diz respeito à aula de matemática menciona que, por vezes, desliga um pouco mas, sempre que está interessada, participa sem o professor solicitar. O recurso que usa para estudar é o manual e cadernos de exercícios. A Sílvia privilegia o estudo individual mas, quando já domina a matéria, gosta de explicá-la a outra pessoa para ter confiança nos conteúdos que já domina:

“Sozinha porque...mas às vezes dá-me jeito se eu souber a matéria explicá-la a outra pessoa dá-me ...bastante...confiança...porque assim consigo saber de cada conteúdo...mas estudar mesmo ...prefiro estudar sozinha.” (Primeira entrevista)

Quanto ao tipo de aulas, a Sílvia gosta das aulas expositivas:

“Acho que estas aulas que estamos assim a ter agora ... assim que o professor fala, explica e depois é que nos deixa passar e explica muito bem e dá muitos exemplos ... acho que é muito bom para nós.” (Primeira entrevista)

A aluna tal como o professor Francisco, atribui vantagens ao desdobramento da Matemática em Matemática A, Matemática B e MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais), partilhando da opinião que esta deve ser específica tendo em conta as escolhas vocacionais de cada aluno:

“Eu acho que é melhor do que termos só Matemática porque se há certos cursos que precisam de certo tipo de Matemática, não vale a pena estar a dar os outros, a perder tempo e a perder se calhar qualidades num certo tipo de Matemática que não é o necessário para o curso.” (Primeira entrevista)

A Sílvia acha que esta Matemática B se integra perfeitamente no curso de Artes Visuais, porque é necessária a Geometria, nomeadamente, o cálculo de áreas e volumes e ela refere que é importante o tipo de raciocínio envolvido:

“Sim... porque às vezes tem a ver com a Geometria e o tipo de raciocínio... isto eu não sei bem explicar... mas acho que o tipo de raciocínio que nós fazemos é bastante bom para nos ajudar nas disciplinas... tipo em áreas e volumes... e cálculos assim desses.” (Primeira entrevista)

Quando questionada sobre o que espera aprender na disciplina de Matemática B menciona que espera aprender o que o professor tiver para lhe ensinar, não sabendo muito bem especificar qual é o objectivo da disciplina. No entanto, mais uma vez refere o contributo desta disciplina para o desenvolvimento do raciocínio e, assim, consequente aplicação noutras áreas.

Quanto ao tipo de tarefas, a Sílvia diz que usualmente pratica exercícios nunca tendo realizado uma investigação matemática. A concepção, algo confusa, que a aluna tem de investigação matemática está associada à descoberta do porquê da Matemática e para que serve:

“Uma investigação matemática é quando alguém quer saber no que a matemática consiste, mais ou menos... não... eu tenho a sensação que vai ser mais prático do que exercícios e problemas mas não sei bem como. Mas... não sei... investigações matemáticas é tentar descobrir para que serve a Matemática se calhar... mais ou menos isso.” (Primeira entrevista)

Quanto a resolver as investigações em grupo ou sozinha, a aluna refere que, neste caso, acha que é preferível realizá-las com os colegas uma vez que se sentirá mais apoiada. No entanto, não sabe especificar a razão devido ao desconhecimento que tem quanto às investigações matemáticas e suas fases. Também menciona que as investigações matemáticas devem contribuir para o desenvolvimento de competências profissionais tendo em conta o curso de Artes Visuais pois, certamente, aumentará o interesse pela Matemática e pelo curso.

Quanto ao professor é referido que o papel que este deve assumir é de orientador. No entanto, e em contra-senso, afirma que este deve explicar muito bem as “coisas” porque as tarefas de investigação são experiências novas e desconhecidas para os alunos. Embora entenda que o professor deva orientar os alunos como os alunos vão partir de uma situação desconhecida acha que este deverá explicar muito bem o pretendido:

“Eu acho que de...orientador. Explicar muito bem as coisas e como é uma coisa nova. Pois...pelo menos tentar ajudar. Como sei lá orientar. “ (Primeira entrevista)

A Sílvia não sabe muito bem qual é o seu papel numa aula de investigação matemática, mencionando que deve estar atenta e receptiva para perceber bem o que é pedido. Vê o uso da tecnologia muito importante numa investigação matemática como o é em qualquer situação nos dias de hoje.

3.2. A Alexandra

A Alexandra é um pouco mais tímida mas, muito entusiasta. Revela mais hesitação quanto ao que lhe espera este ano lectivo e o futuro. Manifesta espírito crítico, solicitando e questionando o professor sempre que pretende clarificar ideias e apresentar exemplos ou contra-exemplos. Embora calada, está sempre muito atenta e, de um modo geral intervém quando está certa do que vai afirmar, apresentando uma linguagem clara e um raciocínio bastante organizado. Desde sempre mostrou-se muito disponível para participar no projecto e no início do ano lectivo, na altura da primeira entrevista, a Alexandra não sabia muito bem o que lhe esperava as aulas onde seriam

implementadas tarefas de investigação matemática. No entanto, a curiosidade e o entusiasmo são elevados e revela preocupação quanto ao seu desempenho.

No que diz respeito à disciplina atribui importância à Matemática, mencionando que esta é importante para desenvolver o raciocínio:

“Eu acho a Matemática importante porque faz-nos pensar e trabalha o raciocínio...porque é importante...não sei explicar.” (Primeira entrevista)

Refere que gosta muito de cálculos que envolvam equações e atribui maior dificuldade a conteúdos que não gosta muito tais como, áreas e volumes. A forma como estuda é através da resolução de exercícios e a tentar percebê-los. Para a Alexandra saber Matemática é conseguir raciocinar por ela própria e perceber os problemas:

“Não é saber tudo...mas é saber alguma coisa. É saber ...raciocinar por mim própria sem a colaboração de outras pessoas ...e perceber os problemas “ (Primeira entrevista)

A Alexandra privilegia o estudo individual:

“Sozinha porque eu é que tenho ou não a certeza se vou ou não compreender” (Primeira entrevista)

Relativamente à escolha do curso de Artes Visuais tem a ver com o gosto pelas artes e por gostar de estilismo e de fotografia. Quanto às expectativas que tem relativamente ao curso de Artes Visuais, esta espera aprender novas técnicas de desenho.

No que diz respeito à aula de Matemática refere que costuma participar por iniciativa própria e interesse pela disciplina. O recurso que usa como ferramenta auxiliar de estudo é a *Internet*.

Quanto ao tipo de aulas, a Alexandra não consegue caracterizar de forma clara que tipo de aulas gostaria de ter e refere que talvez dependa daquilo que queira para o seu futuro. A aluna manifesta ainda algumas dúvidas quanto ao que pretende seguir a nível profissional.

Tal como a sua colega Sílvia e o professor Francisco, a Alexandra atribui vantagens ao desdobramento da Matemática em Matemática A, Matemática B, uma vez que esta deve ser mais elaborada para os alunos de Ciências. Quanto às MACS

(Matemática Aplicada às Ciências Sociais), não sabe especificar vantagens e/ou desvantagens porque desconhece a disciplina.

A Alexandra acha que esta Matemática B se integra no curso de Artes Visuais, mas não entende bem a razão. Chega a afirmar que áreas e volumes não são importantes para o curso em questão:

“Sim está bem, tirando volumes e áreas.” (Primeira entrevista)

Embora ache que esta disciplina é importante para o seu futuro revela algum desconhecimento sobre os objectivos e competências a desenvolver nesta disciplina.

Quanto ao tipo de tarefas a Alexandra diz que, usualmente, pratica exercícios nunca tendo realizado uma investigação matemática. A concepção que a aluna tem de uma investigação matemática está associada à descoberta de algo sobre a Matemática:

“É quando quero desenvolver uma matéria de matemática.” (Primeira entrevista)

No respeitante à resolução das tarefas de investigação em grupo ou individualmente refere que, neste caso, acha que é preferível realizá-las com os colegas uma vez que é importante o raciocínio de cada um:

“Aqui eu acho que vou preferir trocar opiniões, porque é importante o raciocínio de cada um.” (Primeira entrevista)

A Alexandra refere que as investigações matemáticas devem contribuir para o desenvolvimento de competências profissionais, tendo em conta o curso de Artes Visuais, porque os alunos vão aprender, por eles próprios, a raciocinar e isso é importante para qualquer profissão:

“É importante porque... porque vamos investigar algo que desconhecemos até então ...e vamos aprender por nós próprios.” (Primeira entrevista)

Quanto ao professor é referido que o papel que este deve assumir nas aulas de investigações matemáticas é no sentido de dar pistas de modo a que os alunos não fiquem bloqueados:

“O professor pode dar pistas sobre os assuntos ... de modo a que cheguemos à solução mais depressa sem bloquear.” (Primeira entrevista)

A Alexandra não sabe muito bem qual é o seu papel numa aula de investigação matemática, mencionando que deve estar atenta e resolver todos os problemas. Vê o uso da tecnologia muito importante numa investigação matemática porque permite avançar na tarefa, proporcionando o teste de conjecturas e a confirmação ou não de hipóteses levando deste modo a tirar conclusões de uma forma mais rápida e fiável.

4. Metodologia, organização, recursos e avaliação

4.1. Metodologia e recursos

No enunciado de cada uma das tarefas de investigação matemática procurou-se esclarecer sobre o tipo de actividade que se esperava que os alunos desenvolvessem e da extrema importância de procurar e registar argumentos que permitissem justificar conjecturas, tendo em conta que um dos objectivos era que elaborassem um relatório escrito final. Outro aspecto que tivemos em conta foi trabalhar os mesmos conteúdos de forma distinta. Uma tarefa de investigação foi pensada com o intuito de servir de apoio a uma outra direccionada para a realidade e modelação matemática. Os alunos serviram-se, sempre, da tarefa anterior como suporte de conteúdos estudados para prosseguirem na tarefa de investigação de modelação matemática permitindo-lhes avançar mais rapidamente na investigação.

Após a introdução da investigação esperava-se que os alunos desenvolvessem, o mais autonomamente possível, uma actividade de investigação com as características apontadas por Ponte *et. al.* (1998). Assim, as investigações foram organizadas de modo que os alunos compreendessem a situação inicial proposta e que se envolvessem na análise e organização de dados e que, a partir daí, conseguissem conjecturar e prosseguissem com explorações no sentido de testarem as suas conjecturas. Posteriormente, deveriam seguir um ciclo de formulação, testagem e refinamento das suas conjecturas. Finalmente, procurariam argumentos que validassem as suas conjecturas e que resistissem a sucessivos testes.

As investigações foram consideradas como metodologia de desenvolvimento do currículo, sendo a sua exploração orientada de forma a que:

- A construção de conceitos e a aquisição de conhecimentos e técnicas decorressem da actividade desenvolvida pelos alunos na exploração de tarefas de investigação (essencialmente na primeira e terceira tarefas);
- A actividade do aluno, com características semelhantes às dos matemáticos profissionais, contribuísse para um progressivo aprofundamento do conhecimento da natureza da Matemática e dos seus principais processos de desenvolvimento;
- Desenvolvessem competências matemáticas que lhes fossem úteis para a sua vida profissional.

Esta perspectiva metodológica tem as mesmas características da abordagem investigativa considerada por Ernest (1996). Embora tendo em conta as características divergentes de uma actividade de investigação, durante as aulas, era frequente dar ênfase e importância ao caminho que estabelecia uma ponte entre a exploração e discussão dos conteúdos curriculares dentro do contexto da tarefa apresentada.

Em todas as tarefas a utilização da calculadora foi bastante adequada não se optando por *software* devido ao facto de os alunos não estarem familiarizados com programas de Funções e deste modo constituir mais um obstáculo para a exploração das tarefas de investigação. Deste modo, optamos pela utilização da calculadora gráfica em todas as tarefas. A utilização da calculadora gráfica foi vista como podendo contribuir para que os alunos se implicassem na exploração da tarefa de investigação matemática de uma forma mais entusiasta e motivadora. Na discussão final e para apresentação dos resultados à turma foram utilizados também o *viewscreen* e retroprojector.

O seguinte quadro mostra o plano curricular gerado pela exploração das quatro tarefas de investigação matemática:

Quadro 4. *Temas matemáticos envolvidos nas tarefas*

Tarefas de Investigação Matemática	1ª Tarefa (Anexo 4)	2ª Tarefa (Anexo 5)	3ª Tarefa (Anexo 6)	4ª Tarefa (Anexo 6)
Tema	Influência de vários parâmetros no comportamento da função quadrática com a calculadora gráfica	O repuxo	Uma investigação com funções cúbicas e a calculadora gráfica	O novo ginásio
Tema geral	Funções	Funções	Funções	Funções
Tema específico	Relação entre os coeficientes, zeros e o vértice de uma função quadrática. Variação dos coeficientes e sua influência no gráfico da função	Relação de conteúdos matemáticos numa situação de modelação matemática. Utilização da tecnologia gráfica para investigar uma situação real	Relação dos coeficientes e a sua influência no gráfico da função	Relação de conteúdos matemáticos numa situação de modelação matemática. Utilização da tecnologia gráfica para investigar uma situação real

4.2. Organização

De modo a promover e a encorajar a comunicação e debate de ideias, os alunos foram organizados em grupo de 4 ou 5 alunos segundo as suas preferências. Durante uma hora os alunos exploravam a tarefa e os restantes 30 minutos ficaram destinados para a discussão em grande grupo. A discussão em grande grupo foi bastante importante porque funcionou como complemento às explorações que os alunos tinham feito anteriormente em pequeno grupo, levando-os a uma maior compreensão do que tinham feito em grupo, a uma maior formalização das ideias discutidas, à validação das suas conjecturas e levantando, por diversas vezes, mais questões que conduziam a novas investigações. Embora se tenha investido no trabalho de grupo as questões resultantes da discussão oral em grande grupo foram sugeridas como trabalho de casa e mencionadas no relatório individual.

Foi solicitado aos alunos que, após a realização de cada tarefa, estes elaborassem individualmente um relatório escrito onde descreveriam o título, objectivo do trabalho, materiais utilizados, descrição do processo (nomeadamente das tentativas realizadas e conjecturas abandonadas por se tomarem falsas), dificuldades sentidas,

conclusões e questões que tenham surgido ao longo da investigação e que quisessem estudar ou ver esclarecidas. O objectivo do relatório era que este ajudasse a compreender as ideias mais importantes envolvidas na exploração de cada tarefa e contribuir para o desenvolvimento da capacidade de comunicação. No início de cada tarefa e no enunciado desta, estava sob a forma de tópicos um guião que descrevia como deveriam proceder para realizar o relatório. Os relatórios foram todos escritos fora do período lectivo, realizados individualmente e avaliados, pelo professor, tendo em conta a tabela de descritores (Anexo 3). A avaliação incluiu uma apreciação geral, tendo em conta os parâmetros da tabela de descritores, e sugestões quanto aos aspectos a melhorar. Desta forma, permitiu que se tivesse uma informação sobre a evolução das alunas.

O professor, após a aplicação de todas as tarefas, elaborou um relatório reflexivo sobre a realização e exploração das tarefas, focando os prós e contras e sua adequação ao programa de Matemática B e a sua opinião quanto à valorização que lhes atribui dentro da sala, dificuldades sentidas e sugestões para futuras reformulações. Este permitiu compreender e avaliar de que modo as investigações são valorizadas e interpretadas pelo professor e a sua perspectiva pessoal sobre a sua adequabilidade ao programa de Matemática B, curso de Artes Visuais e ao projecto educativo de escola.

4.3. Avaliação

Um desafio que as investigações matemáticas colocam ao professor é, sem dúvida, o modo como fazer a avaliação dos alunos. É necessário encontrar respostas a algumas questões, tais como: que aspectos do desempenho do aluno pode ou deve o professor avaliar na realização de uma actividade de investigação? Que instrumentos são necessários para essa avaliação? Como integra o professor a avaliação das actividades de investigação no seu sistema geral de avaliação dos alunos? Que dificuldades sentem os professores no que se refere à avaliação dos alunos na realização das actividades de investigação? Segundo Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) a avaliação das investigações matemáticas envolve uma dupla dificuldade, pois juntam-se aqui duas áreas problemáticas da prática profissional: (a) a avaliação e (b) as actividades de investigação. Para qualquer observador torna-se muito difícil aceder aos processos e raciocínios em que os alunos se envolvem, o que

complica, claramente, a tarefa do professor no que respeita à avaliação. Outra dificuldade da avaliação reside em conseguir ter uma ideia clara da evolução do aluno na realização de investigações. O professor precisa de determinar quais os aspectos mais importantes a avaliar em cada actividade de investigação e qual a melhor forma de recolher a informação relevante junto dos alunos. Tratando-se de uma actividade matemática complexa, a avaliação das tarefas de investigação deve, naturalmente, envolver aspectos da ordem das atitudes, capacidades e conhecimentos. É importante avaliar as atitudes dos alunos (persistência, autoconfiança, ...), e as capacidades (raciocínio, comunicação, espírito crítico, estabelecimento de conexões entre conceitos...). Para realizar esta avaliação há necessidade de recorrer a instrumentos de avaliação adequados. Entre estes, merecem especial atenção os relatórios escritos e a observação directa por parte do professor. Uma vez que a avaliação dos alunos, na realização destas tarefas, requer uma ênfase particular no processo e não somente no produto final, estes relatórios e estas observações devem indicar tanto os resultados obtidos como a forma como os alunos os alcançaram.

No que diz respeito aos relatórios, a componente escrita, embora possa constituir uma dificuldade adicional para os alunos, é uma das suas grandes potencialidades uma vez que contribui para o desenvolvimento da comunicação escrita tantas vezes deixada para segundo plano em Matemática (Leal, 1992; Nunes, 2005). Outros aspectos que este instrumento igualmente privilegia relacionam-se com o conhecimento e compreensão de conceitos e processos e o desenvolvimento de capacidades como a interpretação, a reflexão, a exploração de ideias matemáticas, o espírito crítico, o sentido da responsabilidade pessoal e de grupo, a perseverança e a relação entre alunos (Leal, 1992). O desenvolvimento de competências reflexivas e de auto-avaliação pode ser igualmente conseguido desde que sejam dadas aos alunos indicações explícitas para a inclusão nos relatórios de elementos acerca da forma como desenvolveu o trabalho, das aprendizagens conseguidas e das dificuldades sentidas (Menino, 2004). Por outras palavras, a realização de um relatório escrito sobre o trabalho desenvolvido funciona como um catalisador da reflexão, uma vez que faz apelo à articulação de ideias, à explicação de procedimentos, à análise crítica dos processos utilizados e dos resultados obtidos (Dias, 2005).

Tendo como ponto de partida as tarefas de investigação realizadas em grupo, as formas de avaliação utilizadas foram o relatório individual e apresentação oral.

Através dos relatórios e da apresentação oral, os alunos podem mostrar a compreensão das ideias matemáticas presentes nas tarefas propostas, a originalidade envolvida na actividade, a capacidade de comunicar por escrito ou oralmente.

A actividade investigativa dos alunos foi avaliada através de uma metodologia de comparação e ordenação assente, principalmente, na observação do trabalho dos alunos, relatórios escritos destes e através de uma tabela de descritores (Anexo 3) que serviu de suporte à avaliação do trabalho dos alunos. Segundo Varandas (2003) a *mais valia* da referida tabela é revelar-se um excelente suporte para a avaliação do trabalho investigativo dos alunos, tendo sido usada pelo professor para comentar de forma oral/escrita os relatórios e as apresentações/discussões orais dos alunos. Por outro lado, todo o trabalho desenvolvido na elaboração da tabela dos descritores foi considerado pela equipa como muito importante, pois permitiu uma reflexão sobre a actividade investigativa do aluno, contribuindo para um melhor e mais profundo conhecimento, por parte da equipa, de todo o processo investigativo.

A tabela de descritores revelou-se uma boa metodologia para a avaliação do trabalho que iria ser proposto aos alunos. Tendo por base a tabela de descritores usada por Varandas, (2003) e após uma profunda reflexão foram considerados três parâmetros: (a) conhecimento matemático; (b) processos (incluindo aspectos ligados aos procedimentos dos alunos); e (c) comunicação. Optou-se por cinco níveis ficando assim, a tabela com quinze descritores (Anexo 3).

Capítulo V – As tarefas de investigação matemática na sala de aula e no programa de Matemática B

1. O ambiente das aulas

Quando as investigações foram pensadas para este trabalho, um dos aspectos que suscitou alguma dificuldade foi o das suas características enquanto tarefas. Procurou-se que elas contivessem alguns aspectos importantes, ou seja, que a situação de partida estivesse bem explicada e o objectivo da situação fosse aberto. Todas as tarefas de investigação foram apresentadas por escrito, tendo sido dadas indicações quanto ao pretendido ao longo do desenvolvimento da investigação. Ao ser elaborado o enunciado, reflectimos sobre os aspectos referidos por Porfirio e Oliveira (1999). Outra questão que surgiu na elaboração teve a ver com o grau de estruturação. Decidir se estas seriam mais ou menos estruturadas esteve relacionado com a experiência dos alunos. A primeira e terceira (anexos 4 e 6) tarefas de investigação foram mais estruturadas devido à sua característica mais abstracta, tendo sido dadas mais sugestões que nas outras.

Todas as tarefas de investigação tiveram por base o programa oficial da disciplina de Matemática B para o 10º Ano do Curso Científico-humanístico de Artes Visuais e os objectivos do projecto educativo de escola que determinava a escolha e/ou a concepção das tarefas de investigação. As tarefas propostas foram concebidas ou adaptadas de modo a que a sua exploração fosse o fio condutor do desenvolvimento do currículo e orientasse a construção de conceitos e sua aquisição com o objectivo de os tornar significativos para os alunos de acordo com o curso onde estavam inseridos.

Antes do início das aulas, numa reunião de grupo com os professores que iriam trabalhar com as turmas de Matemática B, ficou decidido qual o tema a tratar e quais os conteúdos (o tema seria as Funções e as tarefas iriam incidir sobre a Função Quadrática e Cúbica). Em reuniões de trabalho posteriores, para decidir quanto às características das tarefas, ficou decidido que estas iriam ter duas vertentes. Duas das tarefas seriam mais estruturadas, visando a exploração dos vários parâmetros das famílias de funções quadráticas e cúbicas e sua influência nos gráficos, e outras duas mais abertas tendo por objectivo criar um contexto real e significativo para a turma de Artes Visuais,

estabelecendo ligações com o anteriormente descoberto. A tarefa mais estruturada foi precedida pela tarefa mais aberta tendo por objectivo avaliar e perceber como os alunos reagiam a umas e outras e qual a importância que lhes atribuíam. Da mesma forma serviu para avaliar o modo como o professor reagia a umas e outras e qual a valorização que lhes atribuía.

Atendendo com o que é defendido pelo NCTM (1994) e por Cunha (1998) a realização e exploração das tarefas foram pensadas para serem elaboradas em pequenos grupos (4 ou 5 alunos) e discutidas em grande grupo dando oportunidade a todos os grupos, na fase de discussão, que mostrassem a que resultados tinham chegado e com respectiva discussão, na turma, a fim de validar conjecturas. Tal como é defendido por Cunha (1998) e Dias (2005), inicialmente o professor achou que deveria fazer uma pequena introdução à tarefa que se propunha, focando-se essencialmente nos alunos, no tema da tarefa e no tipo de procedimentos que estes deveriam adoptar por exemplo, sugerindo que lessem todo o enunciado com muito cuidado, discutindo entre os vários elementos do grupo sobre o que deveriam fazer e só depois começarem, assumindo um papel interrogativo (Ponte *et al.*, 1999). O professor teve o cuidado de não fazer referências às várias fases específicas das investigações matemáticas. O objectivo principal foi o de ligar os alunos à tarefa situando-os no tema que iriam explorar, o tipo de recursos (calculadora gráfica) e o tipo de papel que deveriam assumir.

Durante o trabalho em pequenos grupos o professor e investigadora circularam pela sala dialogando com os alunos quando estes solicitavam esclarecimentos. Na primeira tarefa de investigação o professor assumiu, essencialmente (no início), o papel afirmativo referido por Ponte *et al.* (1999), explicando conceitos, nomeadamente, quanto ao significado de parâmetro. Dentro do mesmo grupo, por vezes entre alunos, o professor assumiu o papel de gestor de conflitos estimulando, deste modo, a reflexão sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo, sugerindo que estes apresentassem mais argumentos que justificassem as opções seguidas a fim de as confirmar ou refutar. Deste modo, segundo Ponte *et al.* (1999), assumiu um papel interrogativo. Neste contexto e, uma vez que também se aprende com o erro, tal como é referido por Santos (2003), errar tem de ser visto como natural e não penalizador. Os erros também podem ser vistos como esclarecedores de dúvidas surgidas e conhecimentos não dominados, o que permite o reforço das aprendizagens. Neste contexto, deu-se espaço para que os alunos, em algumas situações, prosseguissem por caminhos que visivelmente eram sabidos como não conclusivos.

Na fase de discussão, em grande grupo, o objectivo principal foi o de promover a reflexão sobre o trabalho realizado permitindo, a todos os grupos, que revelassem os seus resultados e que os confrontassem com os resultados dos outros grupos, conduzindo à formulação e verificação de conjecturas (Ponte e Matos, 1996). Tendo em conta as três fases do trabalho investigativo referidas por Christiansen e Walther (1986) pode-se afirmar que o professor assumiu essencialmente um papel de moderador do debate, embora fossem contempladas mais variantes. Sempre que foi oportuno, e a fim de clarificar ideias e validar conjecturas, o professor assumiu uma postura interrogativa (Ponte *et. al.*, 1999) formulando questões que poderiam levar a novas investigações e estabeleceu uma ligação entre o que tinha sido concluído e o trabalho que se pretendia continuar a desenvolver. Esta última faceta assumiu várias características: na primeira e terceira investigação, como estas levaram os alunos a descobrir relações entre os parâmetros das famílias de funções estudadas, foi sugerido que, em casa, fizessem mais algumas explorações tendo em conta algumas extensões à tarefa; em outras situações a investigação realizada pelos alunos contextualizava uma outra forma de aplicação dos conteúdos, propriedades e relações, já antes descobertas nas primeira e terceira tarefas de investigação e aplicadas em contexto real nas segunda e quartas tarefas de investigação.

2. As quatro tarefas de investigação matemáticas na aula de Matemática

No segundo período foram apresentadas e propostas aos alunos as seguintes investigações matemáticas: (anexos 4, 5, 6 e 7)

- a) Investigação matemática 1: Influência de vários parâmetros no comportamento da função quadrática com a calculadora gráfica (7 de Fevereiro, 90 minutos);
- b) Investigação matemática 2: O repuxo (14 de Fevereiro, 90 minutos);
- c) Investigação matemática 3: Uma investigação com funções cúbicas e a calculadora gráfica (23 de Março, 90 minutos);
- d) Investigação Matemática 4: O novo ginásio (24 Março, 90 minutos).

Em todas as tarefas foi utilizada a calculadora gráfica.

2.1. As tarefas de investigação matemática com características teóricas

2.1.1. Tarefa de investigação matemática 1

Durante toda a aula o ambiente foi agradável sendo visível o bom relacionamento existente entre professor e alunos e entre alunos.

Na implementação da tarefa foram utilizadas os seguintes recursos: calculadora gráfica, *viewscreen* e retroprojector. Nesta investigação matemática propôs-se aos alunos que investigassem a influência de vários parâmetros no comportamento da função quadrática com utilização da calculadora gráfica (Anexo 4). Os alunos deveriam conseguir atribuir valores aos parâmetros, variando-os e concluir quanto ao aspecto do gráfico, zeros e vértices das seguintes famílias de funções: Tarefa I: $y = ax^2$, com $a \in R \setminus \{0\}$; Tarefa II: $y = ax^2 + c$, com $a, c \in R \setminus \{0\}$; Tarefa III: $y = ax^2 + bx$, com $a, b \in R \setminus \{0\}$. Os alunos deveriam estabelecer uma relação entre os vários parâmetros e o gráfico obtido no que diz respeito ao sentido da concavidade, forma de calcular os zeros e vértices das várias famílias de funções. Com o objectivo de encorajar a comunicação e o debate de ideias o professor solicitou que os alunos se agrupassem em grupos de 4 ou 5 alunos e de imediato, sem qualquer confusão, agruparam-se de forma muito organizada. A tarefa foi de imediato distribuída e foi referido pelo professor que os alunos teriam uma hora para desenvolver a investigação e a restante meia hora estaria destinada à discussão da tarefa pelos vários grupos.

Na introdução da tarefa, o professor, assumindo uma postura afirmativa (Ponte *et. al.*, 1999) sugeriu que lessem com muita atenção o enunciado da mesma e que deveriam ter em consideração as linhas orientadoras apresentadas no enunciado da tarefa, tal como é defendido por Dias (2005). Uma vez que os alunos não estavam familiarizados com este tipo de tarefa o Francisco optou por fazer também a apresentação da tarefa oralmente, tal como Cunha (1998) sugere. Referiu a importância do relatório, defendida por Dias (2005), Menino e Santos (2004) e mencionou que os alunos teriam de tirar notas sobre as conjecturas e dos ensaios que efectuariam a fim de conseguirem melhores conclusões visando, deste modo, a elaboração do relatório escrito. Nesta fase, tal como defende Ponte *et. al.* (1999) o professor adoptou uma postura afirmativa e clarificou o pretendido com a tarefa. O Francisco introduziu a tarefa apenas explicando o que se pretendia com o relatório e o que se tinha de ter em conta para a sua realização não fornecendo quaisquer “dicas” quanto à realização da

investigação. Deixou que todos os grupos lessem o enunciado e reagissem, tentando focar a atenção dos alunos no tema e no tipo de procedimentos que deveriam adoptar. Como os alunos demoraram algum tempo a reagir perguntou-lhes, em tom irónico, se já tinham começado tudo pois a expectativa do professor era que estes não iriam conseguir começar autonomamente.

A primeira impressão de alguns alunos foi de rejeição tendo mesmo mencionado que “Não demos isto”. Neste contexto, os alunos tiveram alguma dificuldade em aceitar este novo papel (de orientador) do professor (Christiansen e Walther, 1986; Cunha, 1998). De imediato o professor referiu que a intenção era mesmo essa e, o que se pretendia era que fossem à descoberta ao invés de ser o professor a fornecer conclusões. Houve um aluno que referiu que achava que o professor é que deveria dar a matéria e não os alunos a descobri-la. Outros “pegaram” de imediato no manual adoptado com a intenção de procurar respostas.

Perante este primeiro impasse o Francisco perguntou a um aluno o que não entendia e solicitou que este lesse em voz alta o enunciado da primeira tarefa.

O professor, perante esta atitude e assumindo uma postura afirmativa (Ponte *et al.*, 1999), resolveu proceder a alguns esclarecimentos quanto a alguns termos usados. A maior confusão dos alunos era o que significava “parâmetro” e o que se pretendia com a sua variação:

Francisco: “pretende-se estudar a variação do parâmetro”

Aluna: “O que é um parâmetro?”

Francisco: “parâmetro é uma variável entre aspas à qual se pretende dar valores para observar o que a função no seu global faz (...) e que pode variar à medida do nosso gosto”

Na introdução da tarefa, e para que os alunos avançassem, o Francisco esclareceu que parâmetro era uma “variável” à qual deveriam atribuir valores e verificar, com ajuda da calculadora gráfica, o que iria acontecer aos gráficos das famílias de funções que estavam a estudar e, a partir daí, conjecturar para posteriormente tirar conclusões.

As alunas em estudo, a Alexandra e a Sílvia, demoraram algum tempo a ler o enunciado da tarefa e a primeira impressão foi que não iriam conseguir. Segundo Dias (2005) um dos processos que levam à interpretação deste enunciado e pelo qual as alunas passaram é o *traduzir* e o *interiorizar*. Tiveram dificuldade em traduzir porque necessitaram da ajuda do professor para enunciar a tarefa por outras palavras e interiorizar a razão da não compreensão do significado dos conceitos. A partir da *interiorização* (Dias, 2005), e após esclarecimento do professor, avançaram sem

rodeios. Depois de o professor ter passado a uma introdução mais cuidada da tarefa, de imediato perceberam a intenção tendo, no entanto, ficado assustadas com o que era pretendido com os parâmetros. A dificuldade sentida por elas e pelo resto da turma, aquando da introdução da tarefa, foi, sem dúvida, com o termo parâmetro e com que se pretendia com a variação.

O desconhecimento deste tipo de tarefas e dos termos usados geraram alguma apreensão por parte dos alunos sentindo-se mesmo, em alguns, um primeiro sentimento de desânimo e desespero por pensarem que não iriam conseguir investigar e concluir. Tal como defendem Porfirio e Oliveira (1999) o professor ao clarificar o significado do termo “parâmetro” por outras palavras permitiu que este se tornasse compreensível pelos alunos e iniciassem a investigação.

O professor explicou o significado de parâmetro e o que se pretendia com a variação e, após terem atribuído um valor, salientou o facto de experimentarem para outro valor, pois só assim conseguiriam conjecturar e posteriormente, após testagens, concluir algo. Referiu que os alunos teriam de atribuir valores aos parâmetros e a partir daí conjecturar sobre os gráficos, zeros, etc... podendo, assim, chegar a conclusões. Num dos grupos foi necessário voltar a explicar o pretendido e clarificar o significado de alguns termos. A Alexandra e a Sílvia depressa compreenderam o pretendido e avançaram de imediato na investigação começando por atribuir valores ao parâmetro “a” da família de funções $y = ax^2$, com $a \in R \setminus \{0\}$.

As duas alunas intervenientes no estudo pertenciam ao mesmo grupo e a primeira reacção de ambas, ao iniciarem a atribuição de valores ao parâmetro “a”, foi de o fazerem isoladamente sem discutir com os outros dois colegas de grupo. Esta atitude foi notória na grande maioria dos alunos.

O professor apercebeu-se, com a introdução que fez à tarefa, que esta deveria, logo no início, ser clarificada de modo a evitar algum bloqueio prematuro. Embora tivesse nesta primeira investigação optado por não fornecer quaisquer “dicas” viu-se “obrigado”, passados poucos minutos, a introduzir a tarefa de maneira diferente e não deixar os alunos por sua conta. No final da aula foi referido, por este, da necessidade de valorizar, de forma diferente, a introdução da tarefa pois os alunos encontravam-se perdidos. Quando voltou a introduzir a tarefa e a clarificá-la o sentimento de rejeição, sentido inicialmente, foi ficando de parte e os alunos começaram a aceitar a tarefa e a trabalhar. Tal como defende Holding (1991) tendo sido clarificado o ponto de partida,

foi possível promover um primeiro nível de compreensão dos aspectos envolvidos na investigação e assim os alunos iniciarem o trabalho.

Durante a exploração da tarefa de investigação matemática o professor foi sendo solicitado pelos vários grupos a fim de mostrarem as suas descobertas e para terem a certeza que estavam no caminho certo. Deste modo as orientações que o professor forneceu aos alunos, durante a investigação, foram entendidas como um favorecimento para *validar* (Dias, 2005). Alguns alunos começaram por variar todos os parâmetros em simultâneo e começaram a perceber que se fixassem uns e variassem outros seria mais simples em concluir algo.

As alunas Alexandra e Sílvia também se aperceberam do mesmo e passado algum tempo, ao experimentarem alguns valores, é que descobriram que seria importante compararem o que estavam a atribuir e discutir conjuntamente. Começaram por comparar os vários gráficos e a proceder, em grupo, às respectivas notações.

As alunas intervenientes no estudo, e na grande maioria dos alunos da turma, colocavam questões ao professor no sentido de se certificarem que as conjecturas formuladas eram válidas e, noutros casos, para terem a certeza das conclusões a que tinham chegado. Com o decorrer da investigação ambas as alunas mostraram-se cada vez mais entusiasmadas por estarem a conseguir discutir e concluir. A dificuldade maior, solicitando a ajuda do professor para se certificarem que estavam caminho certo, era de escrever tudo o que conjecturavam, testavam e concluíam e, principalmente, a razão do abandono de algumas conjecturas. O professor, quando solicitado, sugeria que testassem para outros valores a fim de se certificarem do que estavam a afirmar levando, deste modo, a uma reflexão sobre o processo de investigação com vista a identificar erros e levar a refazer conjecturas (Dias, 2005).

Tendo em conta os processos de desenvolvimento durante as investigações matemáticas apontadas por Dias (2005) e tendo em conta as alunas intervenientes no estudo, estes enquadram-se no *aprofundar* uma vez que houve um evoluir sucessivo da investigação, eliminando os casos que não interessavam e também no *conjecturar*, *experimentar* e *generalizar* uma vez que todas as conjecturas foram testadas através de exemplos e contra-exemplos.

O Francisco adoptou, durante a investigação uma postura de guia e assumiu um papel interrogativo tal como é referido por Ponte *et. al* (1999), colocando várias vezes questões como “porque razão afirmas isso? Como chegaste a essa conclusão? Testa para outros valores.”, adoptando, assim, as recomendações do NCTM (1994) para o

papel do professor durante uma aula de implementação de investigações matemáticas. Transmitiu aos alunos, sempre que lhe pediam apoio, incentivo no sentido de não desistirem e, tendo o cuidado de não os encaminhar demasiadamente e contendo-se nas respostas às solicitações dos alunos tal como defende Cunha (1998).

Durante a implementação da investigação matemática e devido ao tempo que os alunos estavam a demorar a realizá-la e nos apercebermos que eles não conseguiriam fazê-la na totalidade, passados alguns minutos (cerca de 20 minutos), foi dito que só iriam realizar as três primeiras questões propostas na tarefa de investigação. Os alunos, de um modo geral, evidenciaram muitas dificuldades na utilização da calculadora, nomeadamente na janela de visualização dos gráficos. Também devido a este factor resolveu-se “encurtar” a tarefa a fim de se conseguir discuti-la.

De um modo geral os alunos exploraram, com maior profundidade, cada tarefa. À medida que o tempo foi passando perderam o medo inicial de falhar e avançaram por outros caminhos no sentido de descobrirem outras “coisas”.

Relativamente à fase de discussão, em grande grupo, da investigação os alunos mostraram-se, de início, um pouco inibidos ao serem solicitados pelo professor para irem até ao retroprojector mostrar que valores tinham começado por atribuir e a que conclusões tinham chegado. As duas alunas envolvidas no estudo também se mostraram inibidas e algo inseguras quanto ao que tinham feito. Com o decorrer da discussão começaram a participar mais activamente.

Tarefa I - Questão 1: Atribuíram ao parâmetro “a” os valores 5 e 2

Francisco: “O que conclui?”

Aluna: “Quanto maior é o valor de “a” mais fechada é a abertura”

Francisco: “E isso é sempre verdade?”

Aluna: “Sim”

Alexandra: “Não”

Francisco: “Não! Então!”

Alexandra e Sílvia: “Só para os positivos”

Francisco: “Só para os positivos!...Então agora vamos aos negativos...pois o que a Dina disse é só para os positivos”

Atribuem ao parâmetro “a” os valores -2, -5 e -10 e depois dos gráficos representados a discussão prosseguiu

Francisco: “Que gráfico é este?”

Aluna: “É da função $-2x^2$ ”

Francisco: “O que tínhamos visto para os positivos?”

(em coro) “Quanto maior era o valor mais fechada era a curva, ou seja, mais próxima do eixo dos yy”

Aluna: “Aqui é ao contrário!”

Francisco: “Como é que é ao contrário?! Expliquem-me lá isso!”

Aluna: “Quanto menor o valor mais fechado”

Francisco: “Quanto menor o valor mais aberto! Diz a Dina, está correcto?”

Sílvia: “Quanto maior mais aberto!”

Francisco: “Quanto maior mais aberto? É verdade?”

Gerou-se algum desacordo e, então, foram confirmar graficamente, chegando todos à conclusão afirmada pela Sílvia e outros grupos. A confusão deveu-se ao facto de alguns alunos não se aperceberem que, no caso dos números negativos, quanto maior é o valor absoluto mais afastado está o número da origem. A aluna referiu que podiam tirar outra conclusão e pediu à colega para escrever as funções $y = 2x^2$ e $y = -2x^2$, pois os gráficos destas funções eram simétricos relativamente ao eixo dos xx e se “a” fosse positivo a concavidade estaria virada para cima e se fosse negativo estaria voltada para baixo:

Francisco: “Então podemos dizer que valores da” a” simétricos dão...”
Alexandra e Sílvia (de imediato): “dão gráficos simétricos”

Outro aluno (do grupo da Alexandra e da Sílvia) foi apresentar à turma o trabalho desenvolvido durante a segunda questão da Tarefa I. Ambas as alunas, à medida que a discussão foi avançando, participaram activamente na discussão, respondendo a outras questões que o professor foi colocando. Toda a turma reagiu desta forma criando-se um ambiente rico de partilha onde foram confrontados com outras conclusões.

Tarefa I - Questão 2: Pretende-se concluir sobre o vértice da família de função
 $y = ax^2$

Alexandra: “O vértice é sempre (0,0)”

Francisco: “E é um máximo ou um mínimo?”

Alguns alunos em coro

“Se a parábola for positiva é mínimo e se for negativa é máximo”

Francisco: “Nunca ouvi falar em parábolas positivas ou negativas!”

Corrigiu os alunos ao nível da linguagem matemática utilizada, facto este que ocorreu várias vezes durante a realização da investigação matemática e sua discussão.

Francisco: “Se o parâmetro!!!...”

Francisco: “Para a função $y = 5x^2$ o vértice parece-nos que será ...”

Sílvia: “Mínimo”

Depois de visualizar o gráfico no ecrã o Francisco questionou se de facto o vértice seria (0,0), como alguém tinha referido, e todos referiram afirmativamente como já tinham

testado. Colocaram a função $y = -10x^2$ e todos conjecturaram que para calcular o vértice teriam de determinar o máximo da função, uma vez que o sentido da concavidade estava virada para baixo.

Tarefa II:

Outra aluna foi ao quadro fazer o estudo da família de funções $y = ax^2 + c$.

Francisco: “Temos agora mais um parâmetro! O que será que este novo parâmetro vai fazer nos gráficos? (...) Será que é boa ideia fazer variar ao mesmo tempo os dois parâmetros?”

Sílvia: “É melhor, por exemplo, fazer variar o “c” e observar quando se fixa o “a” e depois vice-versa”

(...)

Alexandra: “O gráfico sobe ou desce consoante o valor de “c” “

Aluno: “Mas interfere com o valor do vértice!”

Francisco: “Será que “c”, tal como o Victor conjecturou, interfere com o valor do vértice? Vamos ver e dar outros valores à função, ou seja, variamos “a” e fixar c”

Alunos: “É igual. Concluímos o mesmo”

Francisco: “O que vos parece?”

Alunos: “As funções têm o mesmo vértice!”

Francisco: “Vamos experimentar variando “a” e variando o “c” ”

Alunos: “têm o mesmo vértice...”

Francisco: “Assim à primeira vista, parece que têm o mesmo vértice (...) quer dizer que o “c” só interfere na...”

Alunos: “na abertura”

Como a maioria dos grupos chegou às mesmas conclusões, o Francisco optou por colocar algumas questões aos alunos durante a discussão. Esse ambiente proporcionou indagar as alunas e a restante turma pois, ao invés de refutar ou confirmar as suas ideias, conclusões e opiniões de uma forma imediata, fez uma pequena exploração das suas ideias aproveitando para, perante os resultados que iam apresentando, argumentar contra ou a favor, solicitando as diferentes posições dos vários grupos (NCTM, 1994; Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998). Aí as alunas Alexandra e Sílvia revelaram um poder de argumentação bastante satisfatório, sendo claras no seu raciocínio e apresentando exemplos sempre que argumentavam mostrando, numa ocasião, o exemplo que tinham dado para validarem a sua conjectura. Os alunos ao verem o professor também a investigar atribuíram importância a esta fase crucial da investigação matemática e acharam importante serem eles a conseguirem investigar e concluir sobre algo que desconheciam. Segundo Silva, Veloso, Porfirio e Abrantes (1999) é importante que a actividade matemática dos alunos consista essencialmente em experimentar, ao seu nível de maturidade matemática, o trabalho

dos matemáticos profissionais. Os alunos sentiram-se no papel de matemáticos a fazer matemática o que, segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem capacidades de ordem superior e até promoverem e desenvolverem novas aprendizagens.

O Francisco após ter ouvido as conclusões de todos os grupos colocou outras questões, extensões das conclusões dos alunos, no sentido de clarificar e proporcionar, deste modo, um ambiente de discussão mais rico. No final foram sintetizadas, oralmente e conjuntamente com os alunos, as conclusões mais relevantes. O professor, nesta fase, adoptou uma postura de moderador e no final interveio no sentido de clarificar as principais ideias e conclusões, tal como sugere o NCTM (1994).

No que diz respeito às dificuldades sentidas o Francisco referiu que a maior dificuldade foi ter a percepção do tempo que seria necessário para realizar a tarefa e o facto de os alunos nunca terem realizado investigações matemáticas. Referiu que os alunos revelam pouca iniciativa de investigação e poucos hábitos de trabalho. Estes são mais evidentes neste tipo de tarefa uma vez que os alunos demoraram muito tempo a perceber o pretendido, apresentando dificuldade na utilização da calculadora gráfica e na interpretação gráfica.

Nas alunas Alexandra e Sílvia foi notória alguma dificuldade no início da tarefa mas perceberam o objectivo desta. O professor ao adoptar uma postura mais interrogativa do que afirmativa deu origem, no início, a algum desconforto perante esta nova atitude que ao invés de lhes dar respostas ao que pretendiam saber, lhes forneceu respostas evasivas ou colocava outras questões. Houve casos que ao deparar-se com situações de impasse dos alunos e que não progrediam sugeriu, por vezes, alguns exemplos tentando, no entanto, devolver a questão reformulada, tal como é defendido por Ponte *et. al* (1999) ao fazer referência ao raciocínio de vertente didáctica do professor e por Dias (2005) ao defender que o professor deve orientar no sentido de levar ao favorecimento da reflexão. No entanto, houve alguma dificuldade em evitar dar demasiadas “dicas”. As alunas referiram que se assustaram com o termo parâmetro, pois não perceberam de imediato o que significava. Outra dificuldade sentida foi conseguir escrever, clarificar e sintetizar as conclusões obtidas durante a investigação. Algumas vezes solicitaram a ajuda do professor a fim de perceberem como poderiam passar para o papel o que tinham observado na calculadora. Esta dificuldade foi sentida por toda a turma. Os alunos oralmente conjecturavam, testavam, discutiam e

concluía, mas tiveram dificuldade em concretizar todas as suas observações para a linguagem escrita. Na discussão foi notória alguma dificuldade em explicar as suas ideias, exprimir onde tinham chegado e qual o percurso. Os alunos como estão habituados a verem os seus raciocínios validados pelo professor mostravam alguma insegurança e desconfiança em comunicarem, por vezes, as suas conclusões.

O Francisco durante toda a aula circulou pela sala de aula ouvindo, falando ou questionando os grupos ou alguns alunos individualmente, havendo um ambiente muito calmo e de trabalho. Manifestou-se de forma positiva sempre que um aluno evidenciava alguma frustração aconselhando-o a discutir com o grupo e assim prosseguir. Os alunos manifestaram interesse pelo trabalho que desenvolviam e, decidiam sobre o modo de explorarem as tarefas onde a intervenção do professor incidiu, sobretudo no tipo de raciocínio usado. Embora o principal objectivo fosse que os alunos partissem sozinhos à descoberta até uma primeira proposta de solução, com o decorrer do tempo, e devido à primeira postura de rejeição dos alunos, levou a que o professor interviesse de modo a assegurar o cumprimento do plano inicial e que, de certo modo, garantisse resultados aceitáveis. Houve alturas em que o Francisco, mesmo sem se aperceber e dada a característica da tarefa, forçasse conclusões ao colocar questões que se percebiam qual a resposta desejada ou o caminho a seguir. Neste contexto, o Francisco adoptou uma postura interrogativa (Christiansen e Walther, 1986, Ponte *et.al.*, 1999) uma vez que tomou consciência de que o *feedback* fornecido teria uma influência relevante no trabalho dos alunos e deste modo validou o trabalho destes.

Ambas as alunas revelaram alguma dificuldade na interpretação da informação contida na tarefa devido à linguagem utilizada. O facto de saberem que estavam a ser alvo de um estudo e tendo uma expectativa grande relativamente ao seu trabalho foi, no início, uma condicionante perante a tarefa de investigação. Ao depararem-se com algo desconhecido, a primeira atitude foi que não conseguiriam tirar informações relevantes para iniciar o trabalho. Tal com refere Anderson (1990), os alunos revelam alguma dificuldade em formular questões mesmo quando lhes é fornecido um ponto de partida. Isto deve-se ao facto de não serem estimulados a desenvolver processos de construção do seu próprio conhecimento matemático. Ultrapassado esse problema, facilmente perceberam o que teriam a fazer e deste modo procuraram, seleccionaram e interpretaram a informação relativamente à investigação matemática proposta.

Ambas formularam hipóteses e começaram, de imediato, a atribuir valores aos parâmetros utilizando para isso a calculadora gráfica. A Alexandra revelou, no início,

mais dificuldade em interpretar o que visualizava na calculadora, mas à medida que foi atribuindo valores ao parâmetro essa dificuldade foi ultrapassada. No entanto, foi a que se exprimiu com mais clareza comunicando, deste modo, o que observava de uma forma mais coerente e menos confusa. A aluna Sílvia durante esta sessão, mostrou-se mais inibida, facto que contribuiu para não ter uma postura tão activa como a colega Alexandra. No entanto, no final da discussão já se empenhou mais explicitando o seu raciocínio à turma.

A Alexandra e a Sílvia mostraram, desde sempre, muito interesse pela tarefa. A primeira reacção de ambas, e de um modo geral de todos os alunos, foi de começarem a fazer a investigação sozinhos mas à medida que iam testando as conjecturas formuladas foram quebrando essa barreira e discutindo o que observavam tentando chegar a conclusões conjuntas. No entanto, notava-se que não estavam muito habituados a trabalhar em grupo e a partilhar ideias. Ambas as alunas intervenientes no estudo respeitaram a opinião dos colegas gerando-se um clima de discussão aberto e de partilha entre todos. Na fase de discussão a Alexandra revelou, oralmente, muita desenvoltura na sua argumentação e a Sílvia menos dificuldade em concretizar e sintetizar para a escrita todo o seu raciocínio.

Embora tivessem encarado a investigação com desconfiança e não lhes fosse possível identificar, de imediato, a “matéria” como referiram, notou-se, durante a investigação, maior à vontade com o passar do tempo, abandonando a preocupação de aplicar conhecimentos já adquiridos mas preocupando-se em usar as ferramentas matemáticas que tinham à disposição com o objectivo de explorar a situação. Referiram que o importante era “aprender por nós próprios” e que perceberam a importância do trabalho de grupo e de discussão em turma, pois deu-lhes uma percepção da partilha que é crucial nestas tarefas.

Em síntese, a tarefa de investigação matemática inicialmente elaborada e proposta aos alunos revelou-se extensa devido ao tempo que os alunos despenderam em perceber o pretendido e ultrapassar o sentimento de rejeição que alguns manifestaram. Mencionaram que aqueles conteúdos ainda não tinham sido leccionados e, deste modo, não seria possível conseguirem, sozinhos, tirar conclusões. A dificuldade sentida com a utilização da calculadora levou a uma alteração da investigação no sentido de se conseguir discutir algumas das tarefas. Assim, foram investigadas as três primeiras tarefas e discutidas em turma as conclusões a que todos chegaram.

De um modo geral os alunos empenharam-se na tarefa e todos arranjam estratégias de resolução. Uma aluna referiu que se estava a sentir frustrada por não conseguir avançar na tarefa III da investigação. Esse sentimento, por vezes, de insegurança e de alguma incapacidade foi ultrapassado com a ajuda do professor no sentido de sugerir um ou outro caminho de modo a não abandonarem a investigação matemática. Neste contexto, a orientação do Francisco deu-se no sentido de *ultrapassar dificuldades* tal como é sugerido por Dias (2005). Os alunos com mais dificuldade em matemática revelaram menor capacidade em conjecturar, testar e, sobretudo, concluir. Neste ponto foi importante a ajuda dos colegas que utilizando uma linguagem mais simples os ajudaram. À medida que foram realizando as tarefas e com a clarificação do que se pretendia tornou-se mais fácil trabalhar com a calculadora, sendo um dos factores positivos na implementação deste tipo de tarefa.

Relativamente ao professor, durante o trabalho em grupos de 4 ou 5 alunos, circulou pela sala dialogando com os alunos sempre que eles solicitavam. Nessas interações, o professor procurou gerir conflitos de opiniões que se geraram entre elementos do mesmo grupo, adoptando uma postura de gestão, mas também colocando questões a fim de estimular a reflexão sobre as conjecturas que estavam a apresentar, incentivando a testagem e a apresentação de argumentos que justificassem as principais opções seguidas, tal como é apontado por Dias (2005). Aproveitando e valorizando o erro, o professor deu espaço para que os alunos seguissem por caminhos que sabia, à partida, que não iriam obter sucesso, incentivando, desde modo, à testagem e assim concluíssem que deveriam abandonar essa conjectura, tal como menciona Santos (2003). Na fase de discussão o objectivo foi promover o confronto de ideias sobre o trabalho realizado. O professor adoptou uma postura moderadora no debate de ideias, procurando que os alunos explicassem e justificassem o que tinham feito. Na discussão o professor também formulou questões que, eventualmente, poderiam levar a novas investigações (algumas dessas questões foram lançadas para reflexão e como extensão à investigação e propostas para trabalhar fora da aula) e estabeleceu uma ligação entre o que tinha sido concluído e o trabalho que se iria desenvolver na próxima aula, sendo sintetizadas (oralmente e também escritas) as principais conclusões. A discussão com toda a turma foi um complemento importante do que tinham anteriormente explorado, sendo valorizada pelos alunos e professor pois pôde levar a uma maior e melhor compreensão do que se tinha realizado em grupo.

O professor, quanto a esta investigação matemática e reflectindo sobre ela logo após a sua implementação, referiu que achava que esta deveria ser reformulada no sentido de serem fornecidas algumas sugestões aos alunos quanto à atribuição dos parâmetros. Achou que devesse ter havido anteriormente uma clarificação quanto à linguagem matemática que estava presente na tarefa. Parece que, desde sempre, entendeu qual deveria ser o seu papel durante uma investigação matemática não estando, no entanto, bem clarificado quanto ao que se entende por uma investigação matemática e qual o seu objectivo. Afirma-se isto porque a sugestão apresentada levaria a uma tarefa mais guiada apenas para exploração e uma interpretação mais fechada do currículo (Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, 1999), perdendo-se, assim, os momentos preciosos que levam à descoberta. Contudo, sentiu que esta investigação é, sem dúvida, importante mas questiona-se quanto à sua implementação na sala de aula devido ao peso que o exame final tem nesta disciplina”. No entanto, todas as orientações vindas do Ministério de Educação, relativamente ao exame de Matemática B, estão sem dúvida vocacionadas para as investigações matemáticas. Cerca de 55% desse exame é sobre funções e modelação matemática em contexto real. As questões colocadas pelo professor, sobre este assunto são as seguintes: “Investigações matemáticas sim, mas como se temos um programa tão extenso? Como preparar os alunos para um exame onde terão de realizar investigações matemáticas se estes demoram uma aula de 90 minutos a investigar apenas uma? De que modo se poderá organizar o currículo de forma a contemplar as investigações matemáticas? Talvez com aulas experimentais, tal como as ciências fisico-químicas e a biologia”.

A maior dificuldade na implementação das tarefas de investigação matemática é sem dúvida a falta de hábito e de desconhecimento quanto à sua aplicação quer por parte dos alunos quer por parte dos professores. Estes alunos e professor nunca tinham feito, em sala de aula, uma investigação matemática. Embora os alunos tivessem achado muito interessante e ter gostado da postura do professor, este revelou alguma desconfiança e insegurança quanto à sua implementação, como foi patente na introdução que fez à tarefa de investigação matemática. A expectativa, relativamente à investigação e antes de a introduzir, era que a maioria dos alunos não iria conseguir fazer nada, revelando uma baixa expectativa face aos seus alunos. No entanto, ultrapassado o primeiro obstáculo, estes mostraram-se receptivos e exploraram muito mais do que se esperava. Durante a aula, e vendo depois o entusiasmo crescente dos alunos, o professor mudou de atitude e tentou ter uma postura de guia, moderador e

também de amigo, criando, sem dúvida, um bom ambiente de trabalho e incentivando sempre os alunos.

2.1.2. Tarefa de investigação matemática 3

Na implementação da tarefa de investigação matemática 3 foram utilizadas os seguintes recursos: calculadora gráfica, *viewscreen* e retroprojector. Nesta tarefa de investigação matemática propôs-se aos alunos que estudassem o domínio, contradomínio, zeros, monotonia e continuidade de casos particulares da função cúbica e a partir destes conjecturassem sobre os possíveis aspectos do gráfico de uma função definida a partir de um polinómio do terceiro grau. Pretendia-se, também, que investigassem a influência da variação dos parâmetros no comportamento da função cúbica com utilização da calculadora gráfica (Anexo 6). Com o objectivo de encorajar a comunicação e o debate de ideias o professor solicitou que os alunos se agrupassem em grupos de 4 alunos e de imediato, e sem qualquer confusão, agruparam-se de forma muito organizada. O número de alunos por grupo diminui uma vez que nesta fase do ano alguns alunos tinham anulado a matrícula à disciplina de Matemática B. A tarefa de investigação foi distribuída e referido pelo professor que os alunos teriam uma hora para fazer a investigação e a restante meia hora estaria destinada à discussão da tarefa pelos vários grupos, tal como nas investigações anteriores.

Na introdução da tarefa o Francisco sugeriu que lessem com muita atenção o enunciado da mesma e que deveriam ter em conta as linhas orientadoras apresentadas, tal como defende Dias (2005). Referiu a importância do relatório escrito e que a sua avaliação, devido à proximidade do final do segundo período, iria ser tido em conta na avaliação sumativa do terceiro período. Mencionou que os alunos tinham de tirar notas sobre as conjecturas e dos ensaios que efectuariam a fim de conseguirem melhores conclusões visando, deste modo, a elaboração do relatório escrito (Dias, 2005; Menino e Santos, 2004). Nesta fase o professor adoptou uma postura de orientador (Christiansen e Walther, 1986; Cunha, 1998) e clarificou o pretendido com a tarefa deixando os alunos muito à vontade no sentido de se familiarizarem com o tema e darem início à investigação. O professor introduziu a tarefa apenas explicando o que se pretendia com o relatório e o que se deveria considerar que, para a sua realização, não seria fornecido quaisquer “dicas” quanto à realização da investigação. Deixou que todos os grupos lessem o enunciado e reagissem, tentando focar a atenção dos alunos no tema e no tipo de procedimentos que deveriam adoptar. O professor, apercebendo-se

que os alunos começaram por variar uns parâmetros e fixaram outros tal como tinham feito na primeira investigação, interveio no sentido de alertar os alunos para lerem novamente o enunciado e seguirem as sugestões da investigação. Houve uma certa precipitação na maioria dos alunos ignorando, de certa forma, o que era sugerido no enunciado, atribuindo, de imediato, valores aos vários parâmetros tal como aconteceu na outra tarefa proposta.

As alunas Alexandra e Sílvia começaram de imediato a atribuir valores aos parâmetros sem repararem na sugestão e divisão das várias alíneas do enunciado. Segundo Dias (2005) o processo usado pelas alunas na interpretação do enunciado foi o *experimental inicial* porque, por analogia com a primeira tarefa de investigação, começaram a experimentar não reparando nas sugestões. Posteriormente, quando o professor alertou para as sugestões, a *experimentação inicial* caracterizou-se pelas indicações que eram fornecidas no enunciado. Mais uma vez e, tal como já tinham feito nas outras investigações, começaram a trabalhar autonomamente e só depois de usarem a calculadora e visualizarem é que começaram a comparar os gráficos obtidos e a discutirem sobre os vários aspectos a ter em conta. Aproveitando a primeira sugestão, e para que validassem as suas conjecturas, as alunas autonomamente deram outros valores ao parâmetro “a” e deste modo conseguiram validar as suas conjecturas quanto ao domínio, contradomínio, monotonia, zeros e continuidade de uma família de funções do tipo $y = ax^3$, com $a \neq 0$.

O professor explicou o significado de alguns conceitos, nomeadamente monotonia e continuidade, uma vez que já não se lembravam desses termos. As orientações do professor foram entendidas como um favorecimento para *ultrapassar dificuldades* (Dias, 2005). Nesta situação o Francisco desempenhou um papel afirmativo, tal como é referido por Ponte *et. al.*, (1999), explicando conceitos permitindo deste modo o avanço na investigação.

Durante a exploração da tarefa de investigação matemática o professor foi sendo solicitado pelos vários grupos a fim de mostrarem as suas descobertas e para terem a certeza que estavam no caminho certo, ou seja, para que este as validasse tal como refere Dias (2005). Perante este tipo de solicitação tentou, ao máximo, colocar questões de modo a que os alunos chegassem por si mesmos à validação ou refutação das conjecturas, proporcionando um ambiente de discussão entre os elementos do grupo e a



testagem de conjecturas. O professor interagiu no sentido de promover a reflexão e validação dos resultados, segundo as orientações apontadas por Dias (2005).

Numa das solicitações ao professor, a Sílvia conjecturou que na família de funções $y = ax^3$ à medida que “a” aumentava, o gráfico se aproximava do eixo dos yy. O Francisco de imediato perguntou se tal conjectura era válida para todos os valores positivos e negativos de “a”. A Sílvia e os restantes colegas de grupo, perante o papel interrogativo do professor (Christiansen e Walther, 1986; Ponte *et. al.* 1999), começaram a atribuir vários valores a “a” refutando, assim, a conjectura inicial. Esta postura permitiu uma maior e mais aprofundada reflexão sobre os resultados obtidos.

A dificuldade maior, e aí solicitarem ajuda do professor no sentido de sentirem que estavam no caminho certo, era a de escrever o que conjecturavam, testavam e concluíam e, principalmente, porque abandonavam algumas conjecturas, embora revelassem menos dificuldade do que na primeira tarefa de investigação matemática com as mesmas características. Os alunos muitas vezes revelaram preocupação em apresentar muitas conjecturas não reflectindo na sua eventual trivialidade o que parece poder ser explicado pela dificuldade em perceber a ideia global da tarefa. Também se verificou tendência em atribuir o estatuto de conclusão às conjecturas e de as comunicar rapidamente, verificando-se muitas vezes que ao invés de as testarem, procuraram confirmar a sua validade junto do professor (Ponte *et. al.* 1998). O professor quando solicitado sugeria que testassem para outros valores a fim de se certificarem do que estavam a afirmar. Adoptou, durante a investigação, uma postura de guia, colocando várias vezes a questão “porque razão afirmas isso? Como chegaste a essa conclusão? Testa para outros valores”. Transmitiu aos alunos, sempre que lhe pediam apoio, incentivo no sentido de não desistirem e tendo o cuidado de não os encaminhar demasiadamente.

Os alunos, de um modo geral, evidenciaram menos dificuldades na utilização da calculadora gráfica, nomeadamente na janela de visualização dos gráficos. Por vezes, o Francisco, com receio que os alunos não concluíssem a investigação a tempo, mostrou alguma dificuldade em controlar a vontade de fornecer “dicas”. Algumas vezes a forma como colocava as questões, e já na parte final da realização da investigação, estas indicavam, de certa forma, um caminho possível a seguir.

A Alexandra revelou facilidade em registar o que visualizava e testava, procedendo de forma clara e organizada ao registo escrito das suas conjecturas e

consequente validação e refutação. A aluna mostrou uma boa capacidade de visualização gráfica, intervindo junto dos colegas quanto à melhor janela de visualização. Ambas as alunas participaram activamente no grupo e foram bastante pormenorizadas nos seus registos, revelando um progresso quanto às duas primeiras investigações matemáticas. As interações entre os elementos do grupo permitiram ultrapassar dificuldades e o confrontar raciocínios erróneos (Dias, 2005).

De um modo geral, os alunos demoraram mais tempo do que o esperado em cada alínea do enunciado, deixando-se levar pelo entusiasmo da descoberta. O facto de, por vezes, não conseguirem avançar, e devido ao carácter teórico, da investigação alguns alunos sentiram-se perdidos e desanimados, foi neste sentido que o Francisco forneceu “dicas” colocando questões, assumindo uma postura interrogativa, tal como defende Christiansen e Walther (1986) e Ponte *et. al.* (1999).

Relativamente à fase de discussão, os alunos mostraram-se, de início, um pouco inibidos ao serem solicitados pelo professor para se deslocarem até ao retroprojector e mostrarem que valores tinham começado por atribuir aos parâmetros e a que conclusões tinham chegado. As duas alunas intervenientes no estudo também se mostraram inibidas quando solicitadas para participarem e apresentarem os seus resultados. Com o decorrer da discussão começaram a participar mais activamente, mostrando-se empenhadas em mostrar as suas conjecturas, revelando um poder de argumentação bastante razoável.

Quanto à primeira alínea, o Francisco iniciou a discussão referindo uma das conjecturas que ouviu enquanto circulava pelos grupos: “qualquer que seja o valor de “a” à medida que este aumenta o gráfico aproxima-se do eixo dos yy”. De imediato a Alexandra afirmou que tal não era verdade, pois segundo os seus testes se “a” fosse negativo, quanto menor fosse “a”, mais próximo estaria o gráfico da função do eixo dos yy. Neste contexto, de imediato, um aluno foi mostrar à turma, com ajuda da calculadora gráfica e retrojector, a validade da conjectura da Alexandra. Depois experimentou vários valores, clarificando ideias e sintetizando, os alunos chegaram à seguinte conclusão: “Quanto maior é o parâmetro “a” em valor absoluto maior é a aproximação do gráfico da função do eixo dos yy”. Gerou-se alguma confusão quanto a esta conclusão porque os alunos revelaram alguma dificuldade em comparar números negativos.

Quanto à alínea b) do ponto um da tarefa de investigação, a Sílvia apresentou a seguinte conjectura:

“ $y = (x - 2)^3$ o zero é 2 e que se tivéssemos $y = (x + 2)^3$ o zero seria -2”.

A Alexandra sugeriu aos colegas que experimentassem para $y = (2x - 2)^3$ e concluíssem quanto ao valor do zero da função sugerida. Depois de todos visualizarem e determinarem o zero da função na calculadora gráfica concluíram que, neste caso, o zero não era 2. A Alexandra sugeriu aos colegas que estes determinassem zeros para outras funções da mesma família e que tentassem chegar a uma relação entre os parâmetros. As funções sugeridas foram: $y = (2x - 2)^3$ e $y = (5x - 2)^3$ e ao pedirem os zeros na calculadora obtiveram $x = 1$ e $x = 0,4$, respectivamente. Alguns alunos afirmaram que ao fazerem analiticamente $\frac{2}{2}$ e $\frac{2}{5}$ também chegariam aos mesmos zeros, ou seja, dividiram o valor do segundo parâmetro pelo valor do primeiro. Conjecturam desta forma e depois de testarem para outros exemplos, concluíram que os zeros se obtinham analiticamente através do quociente entre esses dois parâmetros.

O Francisco também sugeriu que comparassem as duas funções dadas na alínea b) com a função $y = x^3$.

Alexandra: “o zero mudou de $x = 0$ para $x = 2$ ”

Francisco: “Qual a influência dos parâmetros na deslocação dos gráficos?”

Os alunos não se recordavam das transformações dos gráficos e o professor aproveitou para relembrar este conceito.

Francisco: “O que acontece, relativamente ao gráfico da função inicial quando temos $y = x^3 + 2$?”

Os alunos responderam que tinha havido uma deslocação de duas unidades para cima.

Quanto se tentou estabelecer uma relação entre as funções dadas e os parâmetros da função cúbica completa, os alunos revelaram grande dificuldade. Foi notória essa dificuldade quando a Alexandra afirmou o seguinte:

” Em $y = (x - 2)^3$ o coeficiente de x corresponde ao “a” e o número 2 corresponde ao parâmetro “c”.”

Francisco: “Será que é verdade? Desenvolvam $y = (x - 2)^3$ ”.

Depois de desenvolverem $y = (x-2)^3$, obtiveram a seguinte expressão: $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, sendo $a = 1$; $b = -6$; $c = 12$; $d = -8$, concluindo-se desta forma que tal afirmação não era válida. Relacionar os parâmetros entre si foi muito complicado e moroso e foi sugerido pelo professor que não o fizessem e apenas concluíssem quanto ao número de zeros, monotonia, domínio, contradomínio e que tentassem chegar a relações entre os vários parâmetros a fim de calcularem zeros. Os alunos ao entusiasmarem-se com a investigação foram por caminhos que os levaria a despendar mais tempo para realizarem o trabalho, o que se mostrou de certa forma decepcionante uma vez que pretendiam chegar mais além.

Tendo em conta as conclusões pretendidas e depois de “impedir” que os alunos enveredassem por outros caminhos, e como a maioria dos grupos chegou às mesmas conclusões, o Francisco optou por colocar algumas questões durante a discussão. Esse ambiente proporcionou indagar as alunas e a restante turma, pois ao invés de refutar ou confirmar as suas ideias, conclusões e opiniões, fez uma pequena exploração das suas ideias aproveitando para, perante os resultados que iam apresentando, argumentar contra ou a favor, solicitando as diferentes posições dos vários grupos (NCTM, 1994; Mason, 1996; Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1998). Aí as alunas, Alexandra e Sílvia, revelaram um poder de argumentação bastante satisfatório, sendo claras no seu raciocínio e apresentando exemplos sempre que argumentavam. Os alunos ao verem o professor, também, a investigar atribuíram importância a esta fase crucial da investigação matemática e acharam importante serem eles a conseguirem investigar e a concluir sobre algo que desconheciam. Segundo Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) é importante que a actividade matemática dos alunos consista essencialmente em experimentar ao seu nível de maturidade matemática. Os alunos sentiram-se no papel de matemáticos a fazer matemática o que, segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem capacidades de ordem superior e até promoverem e desenvolverem novas aprendizagens.

O professor, após ter ouvido as conclusões de todos os grupos, colocou outras questões, extensões das conclusões dos alunos, no sentido de clarificar e proporcionando, deste modo um ambiente de discussão mais rico. No final foram sintetizadas, oralmente e conjuntamente com os alunos, as conclusões mais relevantes.

O professor, nesta fase, adoptou uma postura de moderador e no final interveio no sentido de clarificar as principais ideias e conclusões, tal como sugere o NCTM (1994).

No que diz respeito às dificuldades sentidas, o professor referiu que a mais significativa foi a falta de tempo e, deste modo, condicionar os alunos relativamente ao que se pretendia, não permitindo ir mais além na investigação.

Nas alunas Alexandra e Sílvia foi visível alguma dificuldade no início da tarefa uma vez que não leram o enunciado com a devida atenção. Em situações já descritas, o professor ao deparar-se com situações de impasse em que os alunos não progrediam ou que iam por caminhos que levariam a uma outra investigação sugeriu, por vezes, alguns exemplos concretos tentando, no entanto, devolver a questão reformulada. Houve alguma dificuldade em evitar dar demasiadas “dicas” sendo algumas questões colocadas de forma bastante perceptível quanto ao caminho a seguir. Os alunos, como estão habituados que os seus raciocínios sejam validados pelo professor, mostraram alguma insegurança e desconfiança em comunicar as suas conclusões (Dias, 2005). No entanto, mostraram uma maior segurança no seu poder de argumentação.

O professor durante toda a aula circulou pela sala de aula ouvindo, falando ou questionando os grupos ou, mesmo, alguns alunos individualmente, havendo um ambiente muito calmo e de trabalho. Manifestou-se de forma positiva sempre que um aluno evidenciava alguma frustração, aconselhando-o a discutir com o grupo e assim prosseguir.

Os alunos manifestaram interesse pelo trabalho que desenvolviam e decidiam sobre o modo de explorarem as tarefas onde a intervenção do professor incidiu no tipo de raciocínio usado. Embora o principal objectivo fosse que os alunos se tornassem autónomos até à descoberta de uma primeira proposta de solução, com o decorrer do tempo e pelo facto de estes irem por caminhos desconhecidos e tentarem chegar a resultados imprevistos, o professor condicionou, ao fim de algum tempo, essa tentativa de descoberta, trazendo-os de volta para o objectivo da tarefa em si, mostrando-se frustrante para todos. Houve alturas em que o Francisco, e dada a característica da tarefa, acelerasse conclusões ao colocar questões que se percebiam qual a resposta desejada ou o caminho a seguir.

Ambas as alunas revelaram alguma dificuldade na interpretação da informação contida no início da tarefa, mostrando precipitação uma vez que fizeram de imediato analogias com a primeira investigação. Formularam hipóteses e começaram a atribuir valores aos parâmetros utilizando para isso a calculadora gráfica. Embora no mesmo

grupo, ambas iniciaram o trabalho sozinhas partilhando mais tarde troca de informação, tal como já tinham feito nas investigações anteriores. A primeira reacção de ambas, e de um modo geral de todos os alunos, foi de começarem a trabalhar sozinhos, mas à medida que iam testando as conjecturas formuladas, foram quebrando essa barreira e discutindo o que observavam tentando, deste modo, chegar a conclusões conjuntas. As alunas investigaram muito mais que o esperado, percebendo e incorporando uma atitude investigativa. Deste modo, ficaram com uma visão menos tradicional da Matemática, tal como é referido por Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999).

Notou-se, durante a investigação, um maior à vontade, abandonando a preocupação de aplicar conhecimentos já adquiridos, mas preocupando-se em usar as ferramentas matemáticas que tinham à disposição com o objectivo de explorar a situação. Neste contexto, as orientações do professor foram entendidas como um favorecimento para *validar* (Dias, 2005) uma vez que estes foram conduzidos no sentido de utilizarem recursos e possibilitar a continuação da investigação. Perceberam a importância do trabalho de grupo e discussão em turma, pois deu-lhes uma percepção da importância da partilha de descoberta, factor crucial para avanços na investigação.

Em síntese, esta tarefa de investigação matemática proposta aos alunos revelou-se imprevisível, uma vez que estes investigaram mais do que o esperado e em diversas direcções. De um modo geral os alunos empenharam-se na tarefa e todos arranjaram estratégias de resolução. As alunas e a turma toda em geral, revelaram maior destreza na utilização da calculadora gráfica e conjecturaram mais facilmente do que na primeira investigação.

O professor foi menos vezes solicitado e os alunos revelaram mais autonomia não mostrando tanta dificuldade em registar, validar ou refutar conjecturas. Deixaram de estar tão dependentes do professor e já não o viram como uma ferramenta importante na validação das suas conjecturas. Embora demorassem muito tempo em cada questão conseguiram ser mais minuciosos, levando-os a caminhos imprevistos e não previstos pelo professor, o que se tornou uma condicionante tendo em conta a discussão dos resultados. Aproveitando e valorizando o erro, o professor deu espaço para que os alunos seguissem por caminhos que sabia, à partida, que não iriam obter sucesso incentivando, desde modo, à testagem e assim concluíssem que deveriam abandonar essa conjectura. Neste contexto, o erro foi interpretado como um factor de aprendizagem e orientou o caminho a seguir (Dias, 2005). Na fase de discussão o objectivo foi promover o confronto de ideias sobre o trabalho realizado. O professor

adoptou uma postura moderadora (NCTM, 1994) no debate de ideias, procurando que os alunos explicassem e justificassem o que tinham feito. Na discussão, as alunas Alexandra e Sílvia lançaram questões que levaram a outras investigações e reflexões. O Francisco, pelas limitações do tempo, impediu o prosseguimento destas sugerindo-as para reflexão e trabalho extra-aula tais como outras novas questões lançadas. Permitiu uma ligação entre o que tinha sido concluído e o trabalho que se iria desenvolver na próxima aula, sendo sintetizadas (oralmente e também escritas) as principais conclusões. A discussão com toda a turma foi um complemento importante do que tinham anteriormente explorado, sendo valorizado por alunos e professor. Esta discussão pôde levar a uma maior e melhor compreensão do que tinham realizado em grupo, a uma maior formalização do raciocínio e a uma importante discussão sobre aspectos mais relevantes e que mais dificuldades tinham levantado durante a investigação matemática, tal como é sugerido por Cunha (1998).

O Francisco, quanto à reflexão sobre esta investigação matemática, referiu que achava que deveria ser reformulada no sentido de dar mais sugestões aos alunos quanto à atribuição dos valores aos parâmetros de modo a evitar que estes fossem por caminhos muito dispersos. Uma preocupação constante do professor foi o tempo que houve para cada fase da investigação e, ao deparar-se com situações imprevistas, optou por impedir os alunos de continuar, passando à discussão do que era pedido no enunciado. Mais uma vez, tal como na primeira tarefa de investigação, a sua sugestão levaria a uma tarefa mais guiada para a exploração e não a uma investigação matemática (Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, 1999) perdendo-se assim os momentos preciosos que levam à descoberta. Francisco sentiu que foi uma tarefa importante mas questionou-se quanto ao seu grau de complexidade teórico, achando que os alunos no 10º ano de escolaridade ainda não têm maturidade suficiente e nem conhecimento anterior deste tipo de trabalho para conseguirem, em tempo útil, terminar a investigação numa aula de matemática.

2.2. As tarefas de investigação matemática com características práticas

2.2.1. Tarefa de investigação matemática 2

Na implementação desta tarefa foram utilizadas os seguintes recursos: calculadora gráfica, *viewscreen*, retroprojector e anotações da tarefa de investigação matemática

realizada anteriormente. Nesta investigação matemática foi proposto aos alunos que estes investigassem qual a função mais adequada que definisse a trajectória da água de um repuxo que estaria centrado no pátio da escola e que teria de obedecer a determinados requisitos (Anexo 5). O professor solicitou que os alunos se juntassem em grupos de 4 ou 5 alunos, à semelhança da aula de implementação da investigação matemática anterior, e os grupos mantiveram-se. A tarefa foi distribuída e o professor referiu que os alunos teriam uma hora para fazer a investigação e a restante meia hora estaria destinada à discussão da tarefa pelos vários grupos. Sugeriu-se que os alunos tivessem “à mão” a primeira investigação matemática e respectivas conclusões.

Na introdução da tarefa o Francisco sugeriu que lessem com muita atenção o enunciado e que deveriam ter em conta as linhas orientadoras apresentadas. Referiu a importância do relatório e mencionou que os alunos deveriam tirar notas sobre as conjecturas e da testagem que efectuariam a fim de facilitar as conclusões e, deste modo, a elaboração do relatório escrito (Menino e Santos, 2004; Dias, 2005). Nesta fase o professor adoptou uma postura de orientador (Christiansen e Walther, 1986; Cunha, 1998), clarificando o pretendido. O Francisco referiu que esta investigação matemática era, essencialmente, prática e visava uma situação da vida real, retratando uma função já conhecida. O professor, mais uma vez, deixou que fossem os alunos a ler tendo por objectivo que se centrassem no tema e reagissem sem o seu auxílio.

Nesta investigação os alunos depressa se aperceberam do pretendido estabelecendo, de imediato, analogias com a função estudada na primeira investigação matemática. Em relação às alunas intervenientes no estudo começaram por ler o enunciado e, tendo em conta a figura, depressa fizeram analogias com os gráficos obtidos a partir do estudo das famílias de funções estudadas na primeira tarefa de investigação matemática. Neste contexto, segundo Dias (2005), o processo que levou à interpretação deste enunciado foi o *ancorar*, porque os alunos identificaram semelhanças entre esta nova proposta e a investigação anterior contextualizando a sua investigação e relacionando-a com conhecimentos trabalhados anteriormente. Foi evidente, nestas alunas, o desvanecer do primeiro sentimento de medo que surgiu na primeira investigação matemática. Todos os alunos tiveram uma postura bastante positiva começando por conjecturar e não havendo a necessidade de intervenção do professor para o “arranque” do trabalho.

Durante a exploração da tarefa de investigação matemática o professor foi sendo solicitado pelos vários grupos para confirmarem a sua primeira conjectura e se

certificassem de que estavam no caminho certo. Neste contexto, segundo Dias (2005), o professor interveio e orientou no sentido de *validar*. Neste caso, o Francisco adoptou uma postura afirmativa (Christiansen e Walther, 1986) e, por algumas vezes, interrogativa no sentido de tentar esclarecer o que os alunos afirmavam e, assim, testarem as suas conjecturas (Christiansen e Walther, 1986; Ponte *et. al.*, 1999). Todos os grupos afirmaram que o gráfico era do mesmo tipo que o obtido na tarefa 3 da primeira investigação matemática. O professor questionou-os quanto à veracidade de tal afirmação e sugeriu que a testassem dando valores aos parâmetros da família de funções identificada ($y = ax^2 + bx$, $a, b \in R \setminus \{0\}$).

As alunas Sílvia e Alexandra identificaram, com facilidade, a família de funções e começaram por dar valores aos parâmetros. Sabiam que o repuxo representava uma parábola de concavidade virada para baixo e, como tal, o valor a atribuir a “a” seria negativo. Outro aspecto relevante, e que por analogia com a investigação anterior também sabiam, era que um dos zeros dessa família de funções se obtinha a partir de $y = -\frac{b}{a}$ com $a \neq 0$. Sabendo que um dos zeros da função teria de ser (-2;0) para a parábola da esquerda e (2; 0) para a parábola da direita depressa começaram a atribuir valores a “a” e “b” de modo a conseguirem obter esses zeros. O teste foi conseguir atribuir os valores adequados de modo a refinar cada vez mais o gráfico até obter o repuxo. Na proposta 3 da investigação matemática a Sílvia chegou à conclusão, muito rapidamente, do “repuxo que iria obter”, multiplicando a expressão analítica da função obtida na alínea anterior por 2. O raciocínio da Sílvia foi o seguinte:

“Se anteriormente tinha obtido para uma altura do repuxo de 4 metros a função $y = -4x^2 + 8x$, então se pretendíamos um repuxo com 8 metros de altura e com o mesmo raio de alcance (2 metros) então talvez se duplicássemos a expressão analítica da função obteríamos o repuxo pretendido”.

A conjectura mostrou-se válida ao testar para os zeros e vértice pretendido.

Quanto à Alexandra, em vez de duplicar começou por dividir por 2 a expressão analítica da função obtida anteriormente. Ao testar para o vértice depressa se apercebeu que ao invés de obter o dobro da altura estava a obter metade e decidiu-se, então, por duplicar.

Na questão 4 todos os alunos demoraram muito tempo, pois várias foram as tentativas. Embora conseguissem atribuir valores cujo raio de alcance fosse 8 metros, o

problema era a altura do repuxo que teria de ser de 4 metros. Após atribuírem valores de modo a obterem sempre os zeros $x = 0$ e $x = 8$ e, fazendo comparações entre as várias alturas obtidas, foram refinando os valores até se aperceberem que à medida que dividiam a expressão analítica da função por 2, obtinham sempre metade da altura.

Os alunos mostraram-se muito mais seguros ao realizar esta tarefa de investigação matemática revelando, também, menos dificuldade na utilização da calculadora gráfica. O facto de estar muito associada a um acontecimento real, a investigação foi realizada de forma mais entusiasta devido ao significado e importância que lhe atribuíram. Sendo uma turma de Artes Visuais, e estando a viver e a investigar uma situação concreta, aperceberam-se da utilidade da Matemática na sua área de estudo. Tendo em conta os processos de desenvolvimento apontados por Dias (2005), para a evolução dos alunos no desenvolvimento de uma investigação matemática, o que melhor se enquadra é o *aprofundar* uma vez que houve um evoluir sucessivo da investigação conseguindo eliminar os casos que não eram relevantes.

Relativamente à fase de discussão, as duas alunas envolvidas no estudo participaram activamente respondendo a outras questões que o professor e outros colegas foram colocando. Toda a turma reagiu desta forma criando-se um ambiente rico de partilha onde foram confrontadas várias ideias matemáticas.

O professor, após ter ouvido as conclusões de todos os grupos, colocou outras questões extensivas às conclusões dos alunos no sentido de as clarificar e sintetizar proporcionando, deste modo, um ambiente de discussão e de reflexão mais significativo. Segundo Dias (2005) a orientação do professor foi entendida como um fornecimento de ideias para *reflectir*. Este ambiente permitiu indagar as alunas intervenientes no estudo, pois o professor, ao invés de refutar ou validar as suas ideias, conclusões e conjecturas, promoveu a exploração das suas ideias aproveitando, perante os resultados apresentados, para argumentar contra ou a favor solicitando a intervenção dos restantes grupos da turma. Nesta fase os alunos constataram que o professor também estava a investigar atribuindo à discussão uma fase crucial da investigação, permitindo-lhes consciencializarem-se de quanto era importante também eles investigarem e discutirem entre si. Foi notória a satisfação dos alunos a “fazer” e a conseguir “fazer” matemática (NCTM, 1991; Ponte, 2003). No final foram sintetizadas, oralmente, as conclusões mais relevantes. O professor, nesta fase, adoptou uma postura de moderador colocando várias vezes a questão sobre a razão do abandono de algumas

como chegaram à conjectura válida (NCTM, 1994). No final interveio no sentido de clarificar as principais ideias e conclusões.

No que diz respeito às dificuldades sentidas foi claro, para o professor, que esta investigação decorreu muito melhor que a anterior embora ainda se tenha notado alguma dificuldade na utilização da calculadora e na forma como escreviam as suas conjecturas, observações, testagens e conclusões. Os alunos fizeram-no facilmente de forma oral, mas a nível da escrita revelaram grandes dificuldades em concretizar. Isto deveu-se ao facto de nunca terem feito trabalhos deste tipo e não saberem como exprimir-se através da escrita.

A Alexandra revelou uma capacidade de argumentação significativa quando os colegas lançaram algumas conjecturas não válidas, exprimindo-se de forma muito clara e arranjando contra-exemplos. Nas alunas Alexandra e Sílvia foi visível alguma facilidade durante todas as fases da investigação matemática. No entanto, referiram que a investigação anterior foi essencial para o sucesso desta pois conseguiram, com maior facilidade, fazer conjecturas por analogias com as investigações feitas anteriormente. A atitude afirmativa e interrogativa do professor já não surpreendeu os alunos e permitiu serem, eles mesmos, a tentarem discutir e testar as suas conjecturas. Não sentida tanta insegurança no avanço da investigação os alunos progrediram satisfatoriamente em todas as fases da investigação, não se mostrando inibidos quando solicitados para explicitarem os seus resultados à turma.

O professor durante toda a aula circulou pelos grupos, ouvindo-os e questionando-os, havendo um ambiente muito calmo e descontraído de trabalho. Manifestou-se de forma positiva sempre que um aluno evidenciou alguma frustração, aconselhando-o a discutir com o grupo e assim prosseguir. O trabalho do Francisco e sua postura foi, essencialmente, no sentido de enfatizar o tipo de raciocínio usado pelos alunos e levando-os à reflexão. Nesta investigação houve uma melhor gestão do tempo e os alunos mostraram maior autonomia e este facto deveu-se à característica, essencialmente, prática e contextualizada da investigação.

As alunas intervenientes no estudo revelaram pouca dificuldade na interpretação da informação contida na tarefa devido à linguagem utilizada e, facilmente, perceberam o que teriam a fazer. Deste modo, procuraram, seleccionaram e interpretaram a informação relativa a esta tarefa de investigação matemática. Ambas formularam hipóteses e começaram a atribuir valores aos parâmetros, utilizando para isso a calculadora gráfica. A Alexandra, revelando na investigação anterior mais dificuldade

em interpretar o que observava na calculadora, depressa começou a conjecturar e a interpretar a informação gráfica. A primeira reacção de ambas e, de um modo geral, de todos os alunos foi de começarem a fazer a investigação autonomamente, mas à medida que iam revelando o que testavam nas conjecturas formuladas foram quebrando essa barreira e discutiram o que observavam tentando chegar a conclusões conjuntas. Os colegas de grupo foram procurados no sentido de *ultrapassarem dificuldades* (Dias, 2005), comparando resultados na tentativa de identificarem erros através da confrontação de ideias e dos gráficos obtidos. Foi referido por ambas que perceberam a importância do trabalho de grupo e da discussão em turma pois deu-lhes uma percepção da importância da partilha de descoberta, factor este importante para avanços na investigação. Segundo Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) é crucial que a actividade matemática dos alunos consista essencialmente em experimentar, ao seu nível de maturidade matemática, o trabalho dos matemáticos profissionais. Os alunos sentiram-se no papel de matemáticos a fazer matemática o que, segundo Ponte (2003), pode constituir uma ocasião para os alunos mobilizarem e consolidarem os seus conhecimentos matemáticos, desenvolverem capacidades de ordem superior e até promoverem e desenvolverem novas aprendizagens.

Sintetizando, esta investigação matemática revelou-se interessante e mais fácil uma vez que os alunos se basearam na primeira tarefa de investigação matemática para a iniciar e por representar uma situação com significado, uma vez que vai de encontro à sua área de estudo. Ainda revelaram alguma dificuldade na visualização (janela) do gráfico, embora já manipulassem e entendessem melhor o que observaram graficamente.

Os alunos entenderam melhor o enunciado desta tarefa e revelaram maior desenvoltura na manipulação e interpretação gráfica da calculadora, tendo sido este um dos factores positivos na implementação deste tipo de tarefa. A primeira investigação matemática revelou-se importante para introduzir esta segunda tarefa de cariz prático e virada para o real, mostrando-se crucial e rica na fase de discussão das conclusões e suas extensões.

O professor teve uma postura mais descontraída do que na investigação anterior, notando-se uma melhor aceitação desta tarefa mais contextualizada e virada para o real. Algumas dúvidas surgidas durante e após a implementação da investigação matemática, quanto à sua eficácia e reacção dos alunos, desvaneceu-se gradualmente. Adoptou essencialmente uma postura de *gestor de conflitos de opiniões* (Ponte *et. al.*, 1999)

colocando, por vezes, na fase de discussão, questões que levassem a entender os processos de pensamento e a actividade matemática envolvida nesta investigação matemática, com o objectivo de clarificar e sintetizar as principais conclusões levando, sempre que possível, a extensões da tarefa e a momentos ricos de reflexão. Mais uma vez valorizou o erro (Santos, 2003; Dias, 2005), deixando que os alunos seguissem, devido à natureza prática desta investigação, por caminhos que à partida não levariam a soluções viáveis. Deste modo, adoptou uma postura interrogativa (Ponte *et. al.*, 1999), incentivando a testagem a fim de refutarem ou validarem as suas conjecturas e salientando sempre para o fazerem em grupo. A fase de discussão foi bastante espontânea e muito mais aberta do que a da primeira tarefa investigação, uma vez que os alunos se mostraram mais seguros e confiantes nos resultados a que tinham chegado.

2.2.2. Tarefa de investigação matemática 4

Na implementação da tarefa foram utilizadas os seguintes recursos: calculadora gráfica, *viewscreen*, retroprojector, manual e anotações da investigação matemática realizada na sessão anterior. Nesta tarefa de investigação matemática foi proposto aos alunos que estes investigassem quais as dimensões do comprimento e largura de um ginásio com a forma de uma caixa de secção quadrada e telhado com a configuração de um prisma triangular, de modo a permitir que o espaço interior fosse o máximo (Anexo 7). Foram facultadas algumas condições: A altura do ginásio no seu ponto mais alto seria de 20 metros e, a soma do comprimento com a largura não poderia exceder os 100 metros.

Os alunos, mais uma vez, agruparam-se em grupos de quatro alunos, à semelhança da aula de implementação da investigação matemática anterior. A tarefa foi distribuída e referido pelo professor que os alunos teriam uma hora para fazer a investigação e a restante meia hora estaria destinada à discussão da tarefa pelos vários grupos.

Na introdução da tarefa, o Francisco leu todo o enunciado e referiu que a investigação pretendia maximizar o volume. Seguidamente, deixou que fossem os alunos a reagir à tarefa de investigação. Foi mencionada a importância do relatório e enfatizou, mais uma vez, o facto dos alunos tirarem notas sobre as conjecturas e testagens que efectuariam a fim de conseguirem melhores conclusões (Menino e Santos, 2004; Dias, 2005).

Nesta investigação os alunos depressa se aperceberam do pretendido, estabelecendo de imediato analogias com a função estudada na tarefa de investigação

matemática 3 e, como tinham de calcular um volume, depressa a associaram à função cúbica. Tendo em conta o sucedido, o processo de interpretação do enunciado que melhor se enquadra nesta investigação é o *ancorar*, apontado por Dias (2005) uma vez que os alunos estabelecem analogias com conhecimentos já adquiridos e situações já vividas contextualizando a investigação.

Tanto a Sílvia como a Alexandra, embora tivessem percebido que tinham de calcular o volume do ginásio, sentiram dificuldade em atribuir incógnitas às dimensões do sólido e em estabelecer relações. O mesmo aconteceu com os outros alunos, não sabendo que incógnitas atribuir aos lados e como relacioná-las, dado que iriam obter um polinómio do 3º grau com uma só incógnita.

O professor nesta fase inicial, assumiu uma postura interrogativa, colocando questões no sentido de tentar esclarecer o que pretendiam descobrir e deste modo proporcionar condições para o “arranque” inicial na investigação (NCTM, 1994; Ponte *et. al.*, 1999).

Durante a exploração da tarefa de investigação matemática, e depois de o Francisco ter voltado a ler o que se pretendia, todos os alunos começaram então a atribuir às incógnitas x e y , o comprimento e largura da caixa rectangular, conjecturando da seguinte forma: $x + y = 100$, isto é, atribuindo à soma entre a largura e o comprimento o maior valor possível.

O Francisco sugeriu que testassem essa conjectura determinando, deste modo, o polinómio que representasse o volume do ginásio e investigassem com a calculadora a veracidade dessa conjectura. As alunas Sílvia e Alexandra chegaram, para a caixa rectangular, à seguinte expressão para o cálculo do volume, $V = y^2 \times x$, sendo y a largura e x o comprimento. Como obtiveram uma expressão com duas incógnitas, e partindo da conjectura que fizeram, estabeleceram a seguinte relação, $y = 100 - x$, e de imediato substituíram - na em $V = y^2 \times x$.

A Alexandra obteve $V = (100 - x)^2 x$, conseguindo uma expressão apenas com uma incógnita. A Sílvia também resolveu $x + y = 100$ em ordem a x e obteve a expressão $x = 100 - y$. Substituindo as duas expressões em $V = y^2 \times x$, obteve uma expressão com duas incógnitas. Perante esta situação, abandonou-a optando por substituir apenas $y = 100 - x$ na expressão do volume, ficando deste modo com uma expressão apenas em função de x . As alunas sentiram alguma dificuldade no

desenvolvimento do caso notável da multiplicação, mas ultrapassada essa dificuldade, depois do professor as ter lembrado, desenvolveram a expressão analítica para o volume do telhado obtendo: $V = 0,5x^3 - 110x^2 + 6000x$.

Nesta investigação, e durante esta fase, as alunas em estudo e a turma, revelaram maior autonomia do que nas investigações anteriores solicitando, raras vezes, a presença do professor para validar o que faziam. As alunas, em discussão com o grupo, depressa ultrapassavam os seus erros, havendo um clima de partilha e de discussão muito rico superando obstáculos e avançando sem receios, estabelecendo-se as interacções entre pares referidas por Dias (2005). O Francisco apenas assumiu um papel de gestor no sentido de gerir a situação didáctica, tal como refere Ponte *et. al.*, (1999).

Ao colocarem na calculadora gráfica a função cúbica obtida, tiveram alguma dificuldade em perceber e distinguir o que era o x da calculadora e o y das dimensões da figura mas, depois de discutirem no grupo, concluíram que o y da calculadora representava a função obtida e poderiam digitar nesta $y = 0,5x^3 - 110x^2 + 6000x$. Os alunos, com o auxílio da calculadora gráfica, determinaram o máximo da expressão obtendo os seguintes valores para o x : $x \approx 36\text{metros}$ e $y \approx 63,8\text{metros}$. Toda a turma chegou a este resultado antes de terminar o tempo previsto para esta fase de exploração da investigação. Os alunos ficaram perplexos pelo facto da largura do ginásio ser superior ao valor do comprimento, mas não se aperceberam que a conjectura inicial é que estava errada e teriam de partir para outra. Também se mostraram mais seguros ao realizar esta tarefa de investigação matemática, revelando menos dificuldade na utilização da calculadora gráfica. O facto de estar muito associada a um acontecimento real foi realizada de forma mais entusiasta. Sendo uma turma de Artes Visuais, e estando a viver e a investigar uma situação concreta, os alunos aperceberam-se da utilidade da Matemática na sua área de estudo, mostrando empenho embora não conseguissem criticar o resultado, tomando a conjectura como válida.

Relativamente à fase de discussão, perante a perplexidade de todos os alunos, o Francisco pediu que um aluno fosse até ao retroprojector para se iniciar a fase de discussão e tentar perceber o problema surgido. De imediato a Sílvia se prontificou. Depois de colocada a expressão do volume obtida, a Sílvia questionou:

Sílvia: “ Porque razão o x obtido é menor que y se na figura o x é maior que y ?”

Aluno: “se trocarmos as incógnitas, isto é se x for a largura e y o comprimento vamos obter exactamente o mesmo porque já experimentei.”

Francisco: “Porque razão o lado mais pequeno na figura é maior que o lado maior?”

Sílvia:” Talvez o desenho esteja mal feito e o telhado não seja assim. Talvez tenha que ser colocado no sentido do seu comprimento (base triangular sobre o comprimento) e não no sentido da largura. O desenho é o mesmo mas o telhado é diferente e assim já se entende os valores obtidos”

Alexandra:”O telhado está invertido”

De imediato um aluno interrompeu e colocou um outro problema.

Aluno: “Há outro problema, a conjectura $x + y = 100$ não pode ser válida porque sendo a altura do telhado $20 - y$, iríamos obter uma altura negativa o que é impossível”

Neste momento surgiu um clima de admiração porque ninguém se tinha apercebido disso. O entusiasmo foi crescente e gerou-se um clima de experimentação uma vez que tinha sido refutada a conjectura inicial e ser necessário “arranjar” outra.

Outro Aluno: “ partimos da situação extrema $x + y = 100$, mas o que o enunciado referia era que a soma da largura com o comprimento não poderia exceder os 100 metros e nós partimos da hipótese extrema.”

Francisco: “Como obtemos um valor negativo para a altura do telhado porque partiram da situação extrema, vamos pensar numa outra hipótese e voltar a calcular até optimizarmos o nosso problema”

O papel do Francisco foi essencialmente de moderador (NCTM, 1994) da discussão iniciada, dando espaço para que os alunos reflectissem conjuntamente e partilhassem ideias. Neste contexto, a interacção do professor deu-se no sentido de promover a reflexão visando o confronto, crítica de ideias e resultados, com o objectivo de identificarem eventuais erros (Dias, 2005). O mais interessante é que, a partir do início da discussão, todas as dúvidas que aparentemente não existiam começaram a aparecer e o problema foi sendo resolvido e discutido em grande grupo com toda a turma a interagir não sendo, praticamente, necessária a intervenção do Francisco. Os alunos discutiam entre si, colocando questões à medida que se iam apercebendo dos seus erros e validando, as afirmações que faziam sem dependerem do professor, avançando sem qualquer receio na investigação. A fase de discussão foi sem dúvida dominada pelos alunos.

Alexandra:” Podemos tentar para $x + y = 80$ e ver o que obtemos e se é válido”

Outro aluno: “Vamos ter de experimentar até a altura do telhado dar no máximo 20 metros”

Alexandra: “Não pode ser... porque senão ficaríamos sem telhado no ginásio, porque a altura desde o chão até ao ponto mais alto do telhado é que dá 20 metros”

Experimentaram esta conjectura e abandonaram-na porque obtiveram uma altura negativa para o telhado. Embora não se conseguisse chegar à conjectura válida durante a aula, o ambiente de discussão surgido foi bastante rico e motivador para os alunos. O Francisco sugeriu que dessem uma possível resposta ao problema na próxima aula, mas o mais importante tinha sido conseguido nessa aula: a reflexão, promovendo o desenvolvimento da comunicação matemática, o poder de argumentação e a capacidade crítica essenciais numa investigação matemática. (NCTM, 1991; Ponte, 2003).

No que diz respeito às dificuldades sentidas, a maior relacionou-se com a fraqueza da sua conjectura, uma vez que não estão habituados a criticar resultados e a tentar contextualizá-los nas situações. Isto deve-se ao facto de os alunos nunca terem feito trabalho deste tipo e não estarem habituados a validarem as suas conjecturas e relacionarem resultados obtidos com a situação real em questão.

Nas alunas Alexandra e Sílvia foi visível alguma facilidade durante todas as fases da investigação matemática, exceptuando a fase inicial em que tinham de atribuir incógnitas às dimensões do ginásio e não sabiam como começar. O mesmo sucedeu com a restante turma. De um modo geral as dificuldades tiveram a ver essencialmente com a interpretação e crítica dos resultados obtidos. Não foi sentida tanta insegurança no avanço da investigação e progrediram satisfatoriamente em todas as fases da investigação, não se mostrando tão inibidas quando solicitadas para discutirem os seus resultados à turma. O empenho foi crescente e muitas das dificuldades, nomeadamente a utilização da calculadora gráfica, foi-se desvanecendo ao longo das quatro investigações matemáticas.

O professor durante toda a aula foi pouco solicitado pelos grupos, a não ser para relembrar algumas regras de cálculo essenciais para o prosseguimento da investigação, e circulou pela sala de aula com a intenção de intervir caso se justificasse, havendo um ambiente muito calmo e descontraído de trabalho. A sua intervenção foi pontual, sendo praticamente ausente na fase de discussão, uma vez que foram os alunos a conduzi-la, assumindo apenas um papel de gestor da discussão (Ponte *et. al.*, 1999). O trabalho do Francisco e sua postura foi essencialmente no sentido de enfatizar o tipo de raciocínio e reflexão usado pelos alunos. Nesta investigação houve uma melhor gestão do tempo e

os alunos mostraram maior autonomia e motivação. Este facto deveu-se à característica essencialmente prática e contextualizada da tarefa de investigação.

Nesta investigação, as alunas começaram a trabalhar conjuntamente, pois já se tinham apercebido, com as investigações anteriores, da importância e vantagens da discussão e partilha de ideias em pequeno grupo, recorrendo mais aos colegas ao invés de solicitar a ajuda do professor. De um modo geral toda a turma começou mais cedo a trabalhar em grupo, apercebendo-se da importância das suas vantagens.

Na fase de discussão a Sílvia e a Alexandra foram bastante intervenientes, lançando questões e dúvidas à turma e revelando-se muito mais desinibidas e cooperantes demonstrando, assim, um maior poder de argumentação e de reflexão, fruto do trabalho desenvolvido em conjunto. Acharam a tarefa muito interessante onde a aprendizagem foi mais significativa, indo à descoberta autonomamente. Foi referido por ambas que perceberam a importância do trabalho de grupo e discussão em turma, pois deu-lhes uma percepção da importância da partilha de descoberta, factor importante para avanços numa investigação. Nesta investigação sentiram-se como verdadeiras matemáticas a descobrir e a fazer matemática e mais seguras e motivadas porque, essencialmente, o fizeram sem solicitar ajuda ao professor.

Em síntese, esta investigação matemática revelou-se interessante e mais fácil devido ao facto de os alunos já terem desenvolvido outras e por esta constituir, para eles, um desafio com caminhos inesperados que sozinhos conseguiram solucionar. Embora revelassem alguma dificuldade no início, porque não conseguiram interpretar e relacionar a informação, ultrapassado esse obstáculo a investigação decorreu muito melhor do que a anterior não tendo sido solicitada a intervenção do Francisco.

O erro que todos cometeram de não interpretarem o resultado obtido no contexto do problema, levou a uma discussão imediata e não programada inicialmente porque os alunos começaram a perguntar, aos outros grupos, o que tinham obtido e a questionar sobre a razão da largura ser superior ao comprimento. A partir daí, e reflectindo em grande grupo, refutaram a conjectura e avançaram em conjunto na investigação. A discussão na turma permitiu que fossem os alunos, autonomamente, a reflectirem sobre o erro, sendo o papel do Francisco apenas de moderador (NCTM, 1994) e gestor da discussão (Ponte *et. al.*, 1999). Por momentos pareceu que o professor tinha sido esquecido pelos alunos e que apenas eles estavam na sala. O seu desempenho com a

calculadora melhorou à medida que foram avançando na investigação matemática, sendo este um dos factores positivos na implementação deste tipo de tarefa.

Esta investigação matemática mostrou-se frutífera, permitindo aos alunos mostrarem o seu poder de argumentação e reflectirem sobre o resultado obtido no contexto do problema. Aperceberam-se que têm de ser críticos e pensar em todas as condições iniciais dadas, sendo necessário que testem todas as conjecturas que formulam.

O Francisco mostrou-se bastante satisfeito com o desenrolar da investigação e o enriquecimento profissional que esta experiência lhe estava a proporcionar. Algumas dúvidas surgidas antes da implementação das tarefas de investigação matemática, quanto à sua eficácia e reacção dos alunos, desvaneceram-se um pouco. Adoptou essencialmente uma postura de gestor de conflitos de opiniões colocando, por vezes, na fase de discussão, questões que levassem a entender os processos de pensamento e a actividade matemática envolvida em tarefas deste tipo, clarificando e sintetizando as principais conclusões e levando a outras extensões da investigação e a momentos ricos de reflexão (NCTM, 1994; Cunha, 1998). Mais uma vez valorizou o erro (Santos, 2003), deixando que os alunos seguissem caminhos que à partida não levariam a soluções viáveis, embora bastante ricas para os momentos de reflexão que se verificaram posteriormente. Deste modo, adoptou uma postura interrogativa, embora nesta investigação tivessem sido os alunos a tomarem essa postura interrogativa uns com os outros, incentivando a testagem a fim de refutarem ou validarem as suas conjecturas. A fase de discussão foi bastante espontânea e muito mais aberta do que nas outras investigações, uma vez que os alunos se mostraram mais seguros e confiantes nos resultados a que tinham chegado.

3. Perspectiva do professor

3.1. Reflexão sobre a elaboração e realização das tarefas

Se a preparação das aulas de investigação constitui um momento necessário, não menos importante é a reflexão sobre o trabalho realizado. Algumas questões poderão

ser colocadas: a tarefa mostrou-se adequada aos objectivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas? De que forma reagiram os alunos à tarefa? Como está a evoluir a sua relação com as investigações? Em que tipo de processos (questionar, conjecturar, testar, provar, ...) demonstram maior ou menor facilidade? Como se está a desenvolver a sua capacidade de expressar ideias matemáticas (oralmente ou por escrito)? Este tipo de reflexão torna-se importante por várias razões. Por um lado, informa o professor sobre o trabalho futuro sugerindo orientações e apontando estratégias mais apropriadas para a sua realização, suportadas em obstáculos ou condições facilitadoras a considerar. Por outro lado, trata-se de um momento de aprendizagem do professor que possibilite o melhor desempenho do seu papel atendendo, também, a um maior conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as actividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

A reflexão do professor foi dividida, por ele, de acordo com as características das investigações matemáticas propostas. Para a sua reflexão o Francisco fez uma clara distinção entre as investigações que envolviam o estudo de parâmetros das funções quadrática e cúbica, com um carácter mais teórico, e as investigações que envolviam modelação matemática. Quando questionado sobre as suas primeiras impressões sobre o trabalho desenvolvido foi evidente essa distinção:

“ A primeira tarefa e a terceira tarefa de investigação matemática. As duas mais teóricas, o conhecimento que eu tinha dos alunos até aquela altura ...calculei logo que fossem complicadas e que os alunos tivessem alguma dificuldade em lhes pegar. Os alunos eram muito inexperientes ...neste tipo de actividade...penso que realmente eram muito teóricas ...penso que estas investigações tenham que ser um bocadinho mais conduzidas...dar mais algumas pistas no enunciado para que os alunos ...para não deixar tudo nas mãos do aluno. Eram muitos parâmetros, nomeadamente na terceira tarefa, eram muitos parâmetros, mesmo com a experiência da primeira e da segunda tarefa perderam-se muito naquela tarefa, logo na fase inicial” (última entrevista ao professor)

Um dos aspectos referidos pelo Francisco, como crucial, para a escolha das investigações a implementar na sala de aula foi, sem dúvida, o conhecimento dos seus alunos e perceber a relação que existe entre eles e com o professor. Esta ideia também é

defendida por Ponte *et. al.*,(1999) ao ser referido que a interacção professor-aluno e aluno-aluno influencia o que é aprendido e a forma como é aprendido:

“Tem que conhecer a turma, tem que ter a noção da forma como os grupos de trabalho são constituídos para trabalhos de grupo, obviamente. Acho que isto é essencial. Grupos muito heterogéneos requerem uma preparação de aula e de trabalho deste tipo diferente. Vamos supor que todos os alunos bons se juntam todos num grupo deixando os alunos com mais dificuldades...o tipo de actividades que são preparadas para uma aula deste tipo não pode ser a mesma se os grupos entre eles tiverem alguma homogeneidade de trabalho...mais uma vez o professor aqui terá que tomar algumas decisões, muito embora defenda que não deve ser o professor a constituir os grupos. Acho que os alunos devem constituir os grupos, devendo apenas o professor motivar para que existam grupos homogéneos e para que realmente se consiga fazer este tipo de investigação, este tipo de trabalhos. Agora é possível adaptar sempre a aula aos grupos de trabalho que temos “ (última entrevista ao professor)

Outro aspecto a ter em conta na planificação de uma tarefa de investigação é conseguir prever a reacção dos alunos a um trabalho deste tipo, sendo necessário, por parte do professor, “agilidade“ matemática, uma boa noção dos conhecimentos, potencialidades e interesses dos seus alunos:

“ É importante perceber como os alunos reagem a este tipo de tarefa. Há alunos que mostram uma resistência grande, inclusive bons alunos ...os alunos têm algum receio em se expôr ao fazer este tipo de tarefas ...portanto, é preciso preparar com cuidado necessário ...fazer com que esses alunos percebam que a construção da sua identidade em matemática passa por mais alguma coisa que aquilo a que estão habituados, que é fazer cálculo, cálculo, cálculo, dar respostas a exercícios e ir ver que as soluções estão certas. O encontrar de uma solução não tem que ser encontrada forçosamente no final do livro, pode ser em discussão com os outros e chegar a uma conclusão. “ (última entrevista ao professor)

3.2.Potencialidades das tarefas

Quanto às potencialidades da primeira e terceira tarefa é salientado o empenho e a comunicação matemática na fase de discussão:

“Os aspectos mais relevantes do desenrolar das investigações foram os seguintes:
Investigação-1: (...) O empenho que demonstraram, nomeadamente na fase da discussão das conclusões. (...)

Investigação-3: (...) A fase de discussão correu mais uma vez bastante bem permitindo consolidar os conhecimentos adquiridos.” (Relatório reflexivo do Francisco)

Relativamente às duas tarefas de cariz prático (segunda e quarta tarefa), devido à sua relação com situações de vida real, revelaram-se muito significativas para os alunos e motivaram-nos para a Matemática. Ao estabelecerem conexões com outras áreas do saber, tiveram acesso a diferentes níveis de aprofundamento de conteúdos matemáticos através das interações com os diferentes intervenientes na sala de aula (Dias, 2005). Segundo a opinião do Francisco a quarta investigação, devido a todas as impossibilidades que gerou, suscitou uma discussão muito rica possibilitando, sem dúvida, o desenvolvimento da capacidade de argumentação e espírito crítico:

“Quanto à segunda e quarta tarefa a conclusão é muito positiva. Correu tudo bastante bem quer na fase de realização quer na fase da discussão das propostas de trabalho.

Investigação-2: O agrado pelo facto da tarefa estar ligada a uma situação da vida real; A fase de discussão das conclusões foi muito animada com inúmeras intervenções de elementos dos vários grupos.

Investigação-4: Esta foi a tarefa que mais motivou os alunos quer na fase da resolução quer na fase da discussão. As impossibilidades de medidas levaram a que os alunos se empenhassem muito na procura dos melhores valores para as suas incógnitas. Muito bom!” (Relatório reflexivo do Francisco)

Do ponto de vista do Francisco, a potencialidade mais relevante é o promover de reflexões sobre a sua prática, pois os alunos chegam ao 10º ano de escolaridade, com pouco hábito de trabalho reflexivo:

“Bom... as investigações matemáticas permitiram-me reflectir sobre vários aspectos... começando pelo tipo de preparação com que os alunos terminam o 3º ciclo do Ensino Básico e iniciam o Secundário. Penso que as investigações matemáticas puseram muito a nu a falta de trabalho que estes alunos tem nomeadamente a nível de trabalho de grupo ... trabalho... pequenas investigações de fazer pequenas composições descritivas de processos de resolução... puseram muito a nu essencialmente ... a falta de trabalho matemático... é cálculo, cálculo, cálculo e pouco mais ... o percurso dos alunos traduz-se por uma matemática essencialmente virada para o cálculo... com muita pouca investigação e com pouco trabalho descritivo ... não há outro tipo de trabalho a não ser o trabalho de cálculo “ (última entrevista ao professor)

Outra das potencialidades apontadas refere-se à mudança de visão da Matemática que os alunos passam a ter. Antes os alunos tinham a ideia de que a Matemática era

uma ciência acabada em que tudo já estava descoberto e servia apenas como ferramenta. Depois das aulas de implementação das investigações Matemáticas, o Francisco menciona que os alunos apresentam outras concepções e horizontes relativamente à utilização da Matemática, reforçando a ideia, defendida por Ian Stewart (1995), citada por Fonseca, Brunheira e Ponte (1999), de que a Matemática tem que ser olhada como uma actividade humana, onde todos são capazes de criar Matemática. A sua prática e mesmo os seus testes mudaram, passando a contemplar menos cálculo e a exigir descrição de processos:

“Eu quando terminei o ano tinha alunos completamente diferentes. Tinha alunos, mesmo nomeadamente na parte da avaliação sumativa, os mesmos testes foram gradualmente afastando-se do cálculo e aproximando-se muito mais da reflexão sobre os aspectos... nomeadamente de mais investigação nas perguntas, fui-lhes pedindo gradualmente para eles descreverem processos e tenho a certeza que os meus alunos são alunos completamente diferentes daquilo que eram antes da implementação deste tipo de tarefas.” (última entrevista ao professor)

3.3. Dificuldades sentidas pelo professor na implementação das tarefas

3.3.1. Dificuldades relacionadas com os alunos

No que diz respeito às dificuldades sentidas pelos seus alunos, o Francisco sempre demonstrou, mesmo antes da implementação das tarefas de investigação matemática, que estas iriam constituir uma dificuldade devido ao grau de abstracção das mesmas e desconhecimento total deste tipo de tarefas. Outra dificuldade inerente foi com o uso da calculadora uma vez que nunca tinham utilizado a calculadora gráfica em aulas anteriores:

“As tarefas de investigação que envolvem a variação de parâmetros revelaram-se de alguma complexidade para estes alunos.” (Relatório reflexivo do Francisco)

“Queria ainda referir que outro dos obstáculos com que nos deparamos foi a falta de prática que estes alunos revelam quando trabalham com a calculadora gráfica. Recorde-se que a maioria dos alunos apenas alguns dias antes adquiriram a calculadora gráfica. Este factor também prejudicou o desenrolar da primeira tarefa.” (Relatório reflexivo do Francisco)

Outro aspecto importante relaciona-se com a falta de autonomia dos alunos necessitando, na primeira tarefa de investigação, da ajuda do professor para ultrapassar os primeiros obstáculos, tais como a interpretação de termos usados e por onde começar:

“Os alunos ainda não revelam a autonomia necessária para fazer este tipo de actividade, necessitando constantemente do apoio do professor, perdendo-se por vezes o verdadeiro significado da actividade de investigação.” (Relatório reflexivo do Francisco)

Tendo em conta as observações, e segundo a opinião do Francisco, nestas duas tarefas de investigação, devido ao tempo que os alunos demoraram na fase de arranque, na utilização da calculadora gráfica e também por explorarem mais do que o esperado gerou-se, por vezes, um clima de ansiedade porque se temia que não iriam concluir toda a investigação. A gestão do tempo foi, sem dúvida, outra das dificuldades sendo para isso necessário fazer, durante a fase de exploração da investigação, alguns ajustes nas investigações a fim de se chegar à fase de discussão. Neste contexto, segundo César (1997), o modificar da tarefa contribuiu para um favorecimento à regulação das aprendizagens e o *feedback* que os alunos receberam serviu para reflectirem e validarem o seu trabalho:

“Para além da falta de autonomia é necessário realçar a ansiedade que alguns alunos demonstram por verem o tempo a passar e não conseguirem avançar a um ritmo que lhes permita terminar as questões propostas no tempo predefinido para poderem participar na discussão final em circunstâncias semelhantes aos restantes grupos. Para reduzir essa ansiedade foi necessário fazer alguns ajustes nas questões, nomeadamente estabelecendo prioridades e restringindo o número de questões que iriam ser alvo de discussão no final da aula, privilegiando a qualidade da produção escrita em vez da quantidade de respostas dadas” (Relatório reflexivo do Francisco)

Sintetizando um pouco as reflexões do Francisco, e tendo em conta as dificuldades inerentes à primeira e terceira tarefa de investigação, podemos destacar o seguinte: falta de autonomia, desconhecimento do que era uma investigação matemática, registo de conclusões, descontentamento por desconhecerem conteúdos referidos na investigação e falta de hábitos de trabalho.

“Os aspectos mais relevantes do desenrolar das investigações foram os seguintes:

Investigação-1: A surpresa com que os alunos reagiram ao tipo de tarefa proposta. Como exemplo deixo dois comentários "... professor ainda não demos esta matéria ... não podemos resolver isto ..." e "... o que é a variação do parâmetro ..."; A grande dificuldade de registar as conclusões que iam tirando com o desenrolar da tarefa;

Investigação-3: Mais uma vez os alunos demonstraram o seu desagrado pelo facto de não conhecerem os conteúdos referidos na tarefa. Note-se que isto aconteceu após dois momentos em que o professor tinha explicado o que se pretendia com uma tarefa de investigação, falado na construção do saber não empírico, na importância deste tipo de actividade matemática para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar, mas os hábitos de trabalho destes alunos não foram construídos a partir de tarefas em que eles assumissem um papel activo na sua resolução; Os quatro parâmetros da função cúbica geraram inicialmente alguma confusão pois a maioria dos alunos em vez de procurarem um método que lhes permitisse tirar conclusões da variação de cada um dos parâmetros, substituíam aleatoriamente esses parâmetros, não conseguindo inicialmente retirar as conclusões pretendidas" (Relatório reflexivo do Francisco)

É também referido como factor condicionante e como dificuldade sentida pelo Francisco na implementação destas duas investigações matemáticas o percurso escolar anterior dos alunos devido à ausência deste tipo de trabalho em ciclos de escolaridade anteriores. Os alunos não revelaram destreza e capacidades em reproduções escritas matemáticas tendo sido muito complicado o registo de anotações e conclusões em quase todas as fases de trabalho:

"Começo pelas dificuldades com que nos deparamos e neste aspecto é incontornável o percurso escolar destes alunos que chegaram ao 10.º ano sem nunca terem realizado qualquer tipo de tarefa exploratória ou de investigação e muito menos realizaram qualquer tipo de produção escrita no âmbito da disciplina de Matemática. Infelizmente esta é a realidade destes alunos e certamente de muitos outros que terminam o 3.º Ciclo do Ensino Básico, em muitos casos com classificações de mérito." (Relatório reflexivo do Francisco)

O papel passivo que, de um modo geral, os alunos assumiram em ciclos de escolaridade anteriores é apontado como outra dificuldade na primeira tarefa de investigação matemática. Os alunos não estando habituados a serem eles a descobrir e a investigar suscitou um clima inicial de rejeição e de ansiedade, dificultando o desenrolar da primeira investigação. Tal como afirmam Ponte e Matos (1996) não se devem subestimar as dificuldades dos alunos na investigação de matérias complexas, uma vez que fazer descobertas importantes em Matemática é difícil, mesmo para os Matemáticos (Davis e Hersh, 1980; Hadammand, 1945):

“Estes alunos sempre tiveram um papel absolutamente passivo no que respeita à aquisição de conhecimentos, sendo apenas chamados a participar na fase dita de consolidação de conhecimentos. Assim sendo, tudo o que estávamos a propor era novidade para estes alunos e criou-lhes alguma ansiedade, nomeadamente nos alunos mais responsáveis da turma. No meu entender essa ansiedade foi um dos factores que contribuiu para que a primeira tarefa não tivesse corrido tão bem como as restantes.” (Relatório reflexivo do Francisco)

3.3.2. Dificuldades relacionadas com ele próprio

A grande maioria das dificuldades sentidas e relatadas pelo Francisco tiveram essencialmente a ver com os outros. Foram referidas poucas dificuldades inerentes a ele próprio e que são as descritas seguidamente.

A dificuldade que surgiu, logo na fase anterior à implementação das investigações, foi o Francisco não saber muito bem como iria transmitir aos seus alunos o tipo de tarefa que pretendia que desenvolvessem e qual o papel que cada um dos intervenientes iria assumir. O inesperado e o não saber prever a reacção dos seus alunos deixou-o inseguro uma vez que estes se mostraram muito ansiosos com o seu desempenho. A preocupação do professor é relevante na sua citação:

“As principais dificuldades...a primeira dificuldade destas tarefas de investigação ...a primeira de todas foi como é que eu ia transmitir aos alunos o tipo de tarefa que lhes íamos propor, porque eles tinham desconhecimento total e completo que se poderia fazer este tipo de trabalho numa sala de aula de Matemática, ou seja que a aula teria de deixar ser centrada no professor e passaria a ser centrada neles e na sua capacidade de trabalho. Os alunos não revelam autonomia nenhuma, ou não revelavam autonomia nenhuma nesta fase do seu percurso escolar e estavam, nomeadamente os melhores alunos, os alunos que, enfim, rotulados como os melhores alunos da turma, os alunos que tinham melhor desempenho na avaliação sumativa ficaram muito ansiosos neste tipo de tarefas e disseram-me várias vezes: se as coisas não correm bem e se não conseguimos fazer? Muito mais ansiosos e inseguros do que os outros. Os outros eram um bocadinho mais inconscientes neste tipo de situações. Os bons alunos, ou seja, os alunos com melhores notas na avaliação sumativa são alunos que não gostam de ficar inseguros ...são alunos que têm receio de não saber como pegar e isso para eles não é bom ...isto tem a ver com a concepção que tem do papel sobre professor e da Matemática. Interpretavam a matemática como um fim que tinham a atingir e fazer cálculos sem precisarem de discutir com os colegas...os alunos não estão habituados através de percursos diferentes poderem chegar a mesma conclusão. O facto é que ali na primeira investigação, a variação de parâmetros poder-se-ia dar valores diferentes e chegar à mesma conclusão e isso para eles é muito complicado.” (última entrevista ao professor)

A forma como se pode avaliar um aluno numa aula de investigação matemática foi outra dificuldade sentida pelo Francisco. Embora usasse uma tabela de descritores

para a avaliação do relatório individual escrito, o facto de os alunos o realizarem fora da aula levantou-lhe algumas dúvidas quanto à forma de avaliar. Outros factores, tal como a observação que foi feita pelo Francisco, tiveram de ser tomados em consideração para que procedesse a essa avaliação:

“ A avaliação das investigações matemáticas é sempre muito complicada. Eu utilizei a tabela de descritores do Prof. José Manuel Varandas ...eu também avalei o empenho e participação. A avaliação final...primeiro passa muito pela forma como as coisas correram e depois existe sempre um factor importante que é o facto do relatório final não ser feito na sala de aula levanta-nos sempre algumas dúvidas. Aparecem relatórios muito parecidos que levam quase a concluir que são alunos ou que estão na explicação ou que têm ajudas. Há lá relatórios muito muito semelhantes e então é complicado...se compararmos o empenho e forma como os alunos chegaram na sala de aula com os relatórios ...a aplicação daquela tabela é complicada. O ideal seria o relatório ser feito na aula do outro dia ...mas é quase impossível. “ (última entrevista ao professor)

3.4.Adequação das tarefas de investigação ao programa da Matemática B – 10º Ano, no curso de Artes Visuais e no Projecto Educativo de Escola

O Francisco referiu que as investigações matemáticas implementadas nas aulas durante este ano lectivo eram adequadas e devem ser valorizadas no programa de Matemática B, desde que este se ajuste ao curso de Artes Visuais:

“ Eu tenho uma opinião muito própria sobre o programa de Matemática B e acho que para os alunos de Artes Visuais está muito desajustado ...penso que há ali alguns conteúdos que não tem interesse para este tipo de alunos. Penso que o programa deveria ser reajustado para os alunos de Artes Visuais e vi-me muitas vezes forçado a avançar quando havia muita coisa para explorar ainda em determinados aspectos. “

(...)

Devem ser valorizadas, mas mais uma vez digo ajustando o programa. Eu acho que sim. Faz muito sentido este tipo de trabalho, não faz é sentido o número de aulas para cumprir e número de conteúdos para dar...ter que dar ...trabalhar sistematicamente a olhar para o calendário. “ (última entrevista ao professor)

Este professor, no final do ano lectivo e assumindo uma postura mais convicta, fez uma interpretação flexível do currículo, integrando as investigações matemáticas. Considerou que podem contribuir para objectivos gerais do ensino secundário tal como referem Silva, Veloso., Porfirio e Abrantes (1999), embora sejam necessários alguns

ajustamentos. Segundo o Francisco, e tendo em conta a primeira e terceira investigações matemáticas, embora estas se enquadrem perfeitamente no programa de Matemática B (ME, 2001, p. 9), não decorreram de forma tão satisfatória devido a alguns factores por ele mencionados:

“É pois necessário reflectir sobre um aspecto importantíssimo: se este tipo de actividade vai perfeitamente ao encontro das exigências programáticas e ao projecto educativo da escola porque não resultaram de uma forma totalmente satisfatória? Para mim a resposta tem duas vertentes fundamentais: a primeira já a referi anteriormente e prende-se com o facto dos alunos, na transversalidade do seu percurso escolar, não desenvolverem este tipo de trabalho. O segundo, mais discutível, tem a ver com o facto deste programa de Matemática B não me parecer de todo adequado aos Cursos de Artes Visuais. Estou convicto que a disciplina de Matemática B para estes alunos não deveria ter exame final, o programa deveria centrar-se nos fundamentos da Geometria e na História da Matemática e deveria ser flexível, conter apenas sugestões metodológicas para que cada professor pudesse em cada momento adequar a sua prática lectiva aos interesses dos seus alunos. Acho de uma importância enorme que esta disciplina, para os alunos deste curso faça a ponte entre a Matemática e a Arte.” (Relatório reflexivo do Francisco)

Segundo ele as tarefas de investigação matemática (1 e 3), tendo em conta o percurso escolar anterior destes alunos onde existe um total desconhecimento sobre uma investigação matemática, teriam sido mais significativas se fossem mais direccionadas e explicadas no sentido de as tornar tarefas guiadas ao invés de investigações matemáticas:

“As tarefas 1 e 3, embora sendo interessantes e que vão de encontro às sugestões metodológicas referidas no programa da disciplina, necessitam ser enquadradas no percurso escolar destes alunos. Em meu entender estas tarefas deveriam ser abordadas como tarefas mais guiadas.” (Relatório reflexivo do Francisco)

A opinião que o Francisco tem sobre a contribuição do programa de Matemática B e das investigações matemáticas no desenvolvimento de competências profissionais é favorável, embora enfatize o facto de lhe parecer desajustado para estes alunos. No entanto, considerou que a nível das competências adquiridas, estas tarefas foram bastante úteis e abrem-lhes horizontes quanto à importância e utilidade na Matemática para a sua futura profissão (ME, 2001, p. 2):

“Pois é complicado. Se a parte da Geometria eu acho que eles tiraram algum proveito e eu consegui demonstrar algumas coisas... eu penso que há algumas

partes do currículo que eu penso que eles vão ter muita dificuldade de vir a utilizar e a integrar no dia-a-dia. A nível de competências adquiridas é outra questão completamente diferente. Eu acho que a Matemática ...a nível das competências que adquirem eu acho que a Matemática é bastante útil ...a questão que se coloca é fazer com que estes alunos percebam a importância da Matemática para lhes abrir uma série de horizontes, para que eles percebam que aprender a pensar é algo universal ...utilizar o raciocínio lógico, conseguir deduzir, conseguir chegar a conclusões é algo que é essencial e que a Matemática pode e deve ajudar nessa fase. (...) A Matemática...eu penso que eles perceberam ...estando muito vocacionadas para a área da arquitectura ... vão percebendo e cada vez mais ...que vão depender de outras pessoas no exercício da sua profissão, nomeadamente engenheiros e penso que eles começaram a ter uma consciência diferente da Matemática. A Matemática deixou de ser uma disciplina sem grande sentido prático e começou a ter algum sentido na construção de algum conhecimento” (última entrevista ao professor)

Considerando que estes alunos têm um exame nacional no final do 11º ano de escolaridade, torna-se complicado implementar investigações matemáticas na sala de aula uma vez que, segundo o Francisco, é muito difícil cumprir a listagem de conteúdos que têm de ser leccionados embora cumprir o programa, segundo a sua opinião e as orientações do Ministério da Educação, também passe por realizar tarefas deste tipo dentro da sala de aula (ME, 2001, p. 9). Segundo o Francisco, como nas nossas escolas quase não se realizam tarefas deste tipo nas aulas de Matemática e no final do ano lectivo esteja previsto um exame a esta disciplina, torna-se difícil que os alunos consigam, nesse exame, levar até ao fim uma tarefa de investigação matemática, apesar de estarem contempladas no programa. Mais uma vez, e considerando que cumprir o programa é também implementar investigações matemáticas, não faz sentido para o Francisco a realização de um exame de Matemática B para os alunos de Artes Visuais. Esta perspectiva também é defendida por Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes, (1999).

“ (...) Relativamente às tarefas de investigação matemática, espero que com o que eu investi, este tipo de tarefas dê alguns frutos...na minha opinião, dificilmente os alunos conseguem terminar as investigações que foram propostas...eu acho que não faz muito sentido um exame para os alunos de Artes Visuais para a disciplina de Matemática B. “ (última entrevista ao professor)

Para além do problema do exame e de todos os condicionantes que daí advém à implementação de investigações, outro factor adverso é que numa investigação matemática, por vezes, são necessários mais do que os 90 minutos da aula e a extensão do programa não se compadece com este aspecto. Embora o Francisco sentisse que

estava a cumprir o programa, quando implementou investigações, sentiu que poderia fazer muito mais se não estivesse condicionado pelo tempo:

“ Isso está referido no programa...agora ...o número de aulas é muito reduzido em cada item para que se possa realmente fazer investigações matemáticas e quando estamos a falar em investigações matemáticas, estamos a falar em passar a bola para o lado dos alunos ...quando um professor planifica uma aula de 90 minutos para ele e centrada nele, o professor consegue gerir 90 minutos e até pode roubar 10 minutos à aula seguinte para concluir um tema mas acaba. Mas é muito complicado preparar uma aula de investigação matemática, não estamos a falar de actividade exploratória completamente dirigida, e conseguir prever que aquilo corre daquela forma dentro dos 90 minutos. Sim ...eu senti que estava a cumprir o programa de Matemática B, só que aconteceu em quase todas as investigações matemáticas uma coisa interessante...eu ...tive que precipitar a fase de discussão quando eu acho que ainda era preciso mais algum tempo...pareceu-me que o tempo nunca chegava...as tarefas eram muito enriquecedoras para os alunos e houve algumas, inclusive que tivemos de cortar algumas alíneas que seriam muito importantes terem sido realizadas ...e as investigações matemáticas não se acabam em casa ...porque os alunos já não estão em grupo. “ (última entrevista ao professor)

Embora as tarefas de investigação matemática se integrem perfeitamente no curso de Artes Visuais e no projecto educativo de escola, segundo o Francisco, há que ter em conta o tipo de investigações matemáticas seleccionadas, pois achou que as de cariz mais prático se adaptaram muito melhor a estes alunos. Relativamente ao projecto educativo de escola, um aspecto são os ideais presentes no documento no qual se enquadram os objectivos de uma investigação matemática, e que são os seguintes: a nível pedagógico é salientada a importância de gerir com eficácia a implementação dos planos curriculares e programas definidos a nível nacional, assim como, criar condições ao corpo docente para a utilização de metodologias adequadas às novas filosofias educativas; quanto à avaliação, um dos objectivos é sensibilizar o corpo docente para a utilização de instrumentos de avaliação diversificados, que no estudo em causa, foram os relatórios escritos. Outra coisa é a pressão sentida na escola acerca da preocupação que os professores devem ter relativamente aos resultados dos alunos nos exames. É sem dúvida um contra-senso:

“ A primeira e terceira foi muito complicado. As outras duas, penso que sim. A primeira e terceira eu penso que terão de ser reformuladas para alunos deste curso e com este percurso escolar. Tendo em conta o projecto educativo de escola, penso que este tipo de trabalho faz parte daquilo que a escola espera que se ensine aos seus alunos...o projecto educativo de escola é um documento que penso que está bastante bem elaborado ...penso que com

objectivos bastante nobres ... agora a grande questão é a escola que elaborou aquele projecto educativo depois continua a não se conseguir desligar dos resultados dos exames nacionais que os seus alunos ... os alunos e os meus colegas mesmo de Matemática A têm tido uma preocupação grande com este tipo de actividades e têm-nas desenvolvido (...) o que é facto é que depois chegamos à fase final e vemo-nos ali confrontados com uma situação... perdemos tempo demais a fazer determinadas actividades, fizemos pouca prática, os alunos vão para exame. Isto é um contra-senso tremendo e o que é facto é que existem recomendações para termos um cuidado muito grande com os alunos que vão fazer exame. Uma coisa é o projecto educativo e os ideais que estão por traz da sua construção, outra coisa é que na prática a vida dos alunos, o estudo dos alunos depende das notas que tiram nos exames. “ (última entrevista ao professor)

3.5. Comparação das tarefas de investigação matemática e sua adequação ao programa de Matemática B

Este item tem como objectivo comparar as quatro tarefas de investigação matemática, tendo em conta a perspectiva do professor em relação às potencialidades, dificuldades sentidas na selecção e preparação das tarefas, realização e sua discussão, competências desenvolvidas e adequação das investigações no programa de Matemática B e articulação com o projecto educativo de escola, assim como a perspectiva das alunas sobre o trabalho desenvolvido.

3.5.1. Selecção e preparação das tarefas

3.5.1.1. As fontes. A selecção e a preparação das tarefas foram influenciadas por alguns factores: o conhecimento do professor acerca das tarefas e as suas potencialidades no desenvolvimento de capacidades dos alunos, o seu conhecimento dos recursos mais adequados e a sua posição face ao currículo, tal como menciona Lappan (1998).

As tarefas de investigação matemática na preparação da sua elaboração tiveram por base, essencialmente, o programa oficial de Matemática B assim como as suas orientações metodológicas. Depois de seleccionado o tema e os conteúdos foram analisados manuais escolares na tentativa de encontrar e adequar tarefas que se adaptassem não só ao programa de Matemática B como também se constituíssem com significado para o curso de Artes Visuais e que cumprissem os objectivos do projecto educativo. Depois de alguma pesquisa, também, na *Internet*, de possíveis investigações propostas em manuais e do próprio Francisco, procedeu-se à sua selecção e adaptação.

A escolha não foi fácil tendo em conta o curso de Artes Visuais. Outro dos factores a que se considerou foi o tipo de recurso que se iria usar e, tendo em conta que nenhum dos alunos tinha estado em contacto com *software* matemático e por este estar sujeito a um período de habituação para desenvolvimento de competências por trabalhar com ele, optamos por só procurar tarefas de investigação matemática que recorressem à calculadora gráfica por se julgar que a aprendizagem da sua utilização fosse menos morosa e mais acessível aos alunos.

3.5.1.2. Os tipos de tarefas seleccionados e a adaptação dos alunos. As tarefas de investigação matemática foram divididas em dois grupos: umas de cariz mais teórico (Anexo 4 e 6) e outras duas de cariz mais prático (Anexos 5 e 7), tendo por objectivo avaliar e compreender de que forma o professor e as alunas interpretavam e valorizavam cada uma delas. As de cariz teórico revelaram-se mais difíceis para os alunos devido à dificuldade que estes tiveram em manipular os parâmetros das famílias de funções e a relacioná-los. O facto de nunca terem elaborado um trabalho deste tipo e a primeira investigação ser muito pouco direccionada suscitou, nos alunos, um sentimento de rejeição perante as investigações. Com a intervenção do professor e a clarificação de alguns conceitos, assumindo, deste modo, um papel afirmativo (Ponte *et. al.*, 1999), esse sentimento foi-se desvanecendo e após compreensão do seu papel avançaram e começaram a entusiasmar-se. As investigações de cariz prático revelaram-se um sucesso, pois os alunos, depois de já terem feito outras investigações, de saberem o seu papel e de se aperceberem que estavam perante uma situação da vida real, empenharam-se desde o início mostrando-se sem receios em avançar. Valorizaram muito mais este tipo de investigações atribuindo-lhes maior significado uma vez que estas representavam situações perfeitamente adequadas para alunos de Artes Visuais. Embora a terceira tarefa de investigação de cariz teórico, os alunos manifestassem alguma resistência e dificuldades iniciais e não evidenciasse utilidade visível reconheceram que só conseguiram avançar mais depressa nas investigações de cariz prático porque as anteriores lhes tinham dado um conhecimento mais aprofundado dos assuntos das funções que representavam as situações retratadas nas investigações de cariz prático.

Embora com algumas dificuldades de interpretação do enunciado e outras dificuldades associadas à calculadora gráfica, os alunos adaptaram-se com alguma facilidade e constatou-se, deste modo, que tanto o professor como as alunas

valorizaram mais as investigações associadas à modelação matemática e de cariz prático.

3.5.2. A realização das tarefas

3.5.2.1. O ambiente e as tarefas. Tanto o professor como as alunas valorizaram o ambiente de sala de aula gerado pela implementação das investigações matemáticas uma vez que estas promoveram uma dinâmica diferente, incentivando a curiosidade, o empenho e a discussão permitindo interações constantes entre professor e alunos e entre alunos havendo, deste modo, um clima rico de partilha de ideias e opiniões. O ambiente de descoberta que as investigações proporcionaram gerou um clima de agrado crescente à medida que se iam envolvendo no trabalho.

Embora o clima inicial tivesse sido de rejeição, de receio quanto ao modo como iriam desempenhar o trabalho e de desconhecimento que tinham deste, a partir do momento em que entenderam o papel que teriam que desempenhar, as aulas de investigação começaram a decorrer com um ambiente de comunidade investigativa.

Com o passar do tempo as solicitações ao professor foram-se desvanecendo e os alunos tornaram-se mais autónomos e confiantes no seu novo papel de descobridores da matemática. O entusiasmo na fase de discussão foi sempre grande em qualquer uma das investigações, promovendo um clima enriquecedor de partilha e de reflexão. O professor conseguiu coordenar uma discussão a partir de questões que lançava para os alunos reflectirem, ou a partir dos resultados apresentados por eles. O ambiente inicial de receio e de rejeição foi facilmente ultrapassado com a intervenção do professor no sentido de clarificar o pretendido e o novo papel que os alunos iriam desempenhar. As restantes investigações já foram encaradas normalmente e iniciadas pelos alunos de forma mais clara e organizada.

O ambiente proporcionado pelas segunda e quarta tarefas de investigação matemática foram, desde o início, encaradas de forma mais positiva devido ao significado real que lhes foi atribuído embora as alunas envolvidas no estudo, e toda a turma, referissem que preferiam este tipo de aulas a outras de carácter mais expositivo.

3.5.2.2. Os conteúdos e as competências desenvolvidas. Do ponto de vista dos conteúdos tratados e do desenvolvimento das capacidades e competências pode concluir-se que as tarefas de investigação matemática proporcionaram a oportunidade desses mesmos conteúdos serem abordados numa outra perspectiva, isto é, transpondo para o aluno o principal papel.

Os conteúdos abordados e explorados nas quatro tarefas de investigação matemática tiveram por base o programa oficial de Matemática B e os objectivos do curso de Artes Visuais. Escolhido o tema Funções, estudou-se a função quadrática e a função cúbica. Os conteúdos abordados foram o estudo da influência de parâmetros no gráfico das funções referidas, estudando zeros, monotonia, vértices, continuidade, domínio e contradomínio. Nas investigações de cariz prático houve a preocupação em fazer um estudo num contexto de modelação matemática, privilegiando-se o trabalho intuitivo que relaciona variáveis da vida corrente associadas às artes e com o principal objectivo de promover o desenvolvimento de competências profissionais úteis para o exercício de uma futura profissão ligada às artes. As competências desenvolvidas em todas as investigações foram essencialmente: o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática recorrendo à calculadora gráfica; a confiança pessoal por desenvolver actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica usada; a predisposição, abertura e aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas, através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada às situações trabalhadas; a compreensão e ampliação de conceitos matemáticos; aptidão para formular hipóteses e prever resultados; aptidão para descobrir relações entre conceitos de Matemática; formular generalizações a partir de experiências; validar conjecturas; capacidade de comunicar conceitos, raciocínios e ideias, principalmente a nível oral com clareza e progressivo rigor lógico; espírito de tolerância e de cooperação, colaborando em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades (ME, 2001, p.5). A nível escrito, nomeadamente na elaboração dos relatórios escritos, foi notória a dificuldade em desenvolver competências inerentes à comunicação de raciocínios, testagens e abandono de conjecturas. Muitas das conjecturas foram apresentadas como conclusões não se percebendo por vezes o tipo de actividade matemática envolvida e como tinham chegado às generalizações.

Relativamente às tarefas de investigação matemática associadas à modelação, para além das competências desenvolvidas referidas anteriormente, poder-se-á ainda referir outras que os alunos conseguiram desenvolver e que são cruciais para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas: desenvolveram a capacidade de analisar situações da vida real e associadas às artes, identificando modelos matemáticos que permitiram a sua interpretação e resolução; desenvolveram a capacidade para interpretar e criticar

resultados no contexto do problema; aptidão para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas em contexto real; o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática nas simulações ou situações simuladas, recorrendo à modelação com o uso da calculadora gráfica (ME, 2001, p.8).

3.5.2.3. As dificuldades sentidas no programa de Matemática B e a sua articulação com o projecto educativo de escola. Embora todas as tarefas de investigação matemática implementadas na sala de aula se adaptem e adequam ao programa de Matemática B e cumpram as finalidades deste, as investigações de cariz prático (Anexo 4 e Anexo 6) mostraram-se mais adequadas ao que se pretende que os alunos desenvolvam num curso de Artes Visuais. As investigações mais teóricas revelaram-se menos significativas para o professor e alunas devido ao seu grau de abstracção e complexidade. A primeira e terceira tarefas de investigação matemática suscitaram, nas alunas, dificuldades ao nível da interpretação da informação contida no enunciado não percebendo, de imediato, o trabalho a desenvolver. O facto de estarem a ser estudados conteúdos associados às funções quadrática e cúbica, o aprofundamento destes e a descoberta de propriedades, o tempo dispendido revelou-se insuficiente, havendo intervenções no sentido de diminuir o número de questões das tarefas e, assim, conseguir chegar à fase de discussão. O número de questões apresentadas nas tarefas para investigar e o pouco tempo existente para desenvolver o trabalho, despertaram nas alunas alguma frustração ao se aperceberem que talvez não chegassem a todas as descobertas em tempo útil. Essa falta de tempo esteve associada ao facto destas alunas nunca terem realizado investigações matemáticas e não saberem utilizar convenientemente a calculadora gráfica. Relativamente ao Francisco, a maior dificuldade sentida teve a ver com a gestão de tempo e com o percurso escolar destes alunos. Sendo as investigações matemáticas um dos temas transversais do programa de Matemática B, o Francisco sentiu que para estas fossem bem sucedidas o programa de Matemática B teria de ser ajustado. O peso do exame e a listagem de conteúdos a cumprir levaram o Francisco a reflectir sobre a adequabilidade de uma investigação matemática deste tipo e que reformulações deveriam ser feitas tanto nas investigações matemáticas como no programa. Uma das sugestões apontadas passa por ter de existir, em níveis de ensino anteriores ao secundário, a prática continuada de trabalho investigativo dentro da sala de aula, tal como o próprio currículo de Matemática e Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999) sugerem.

As tarefas de investigação matemática associadas a situações reais revelaram-se, tanto para as alunas e professor, bastante importantes e significativas encaixando-se mais no que se pretende para alunos integrados em turmas de Artes Visuais estando, deste modo, perfeitamente adequadas ao programa de Matemática B. As dificuldades sentidas nestas investigações foram muito reduzidas desenrolando-se sempre de forma muito entusiasta e cumprindo, desta formas, o desenvolvimento das competências presentes no programa oficial de Matemática B.

No que diz respeito ao Projecto Educativo de escola, as dificuldades sentidas dão-se essencialmente ao nível da avaliação dos alunos quando implementadas investigações matemáticas. O projecto educativo desta escola pretende que os alunos sejam encaminhados no sentido de lhes aumentar, gradualmente, o nível de qualificação profissional e que deste modo estes consigam responder às necessidades e exigências de uma sociedade em permanente mudança. Neste contexto, e tendo em conta as competências desenvolvidas pelos alunos quando realizam investigações matemáticas, estas integram-se perfeitamente neste pressuposto do projecto educativo de escola. Tendo em conta dois dos objectivos prioritários deste documento, promoção de uma sólida formação académica que garanta o prosseguimento de estudos e de uma formação de índole técnica que facilite a transição e inserção no mundo do trabalho, as tarefas de investigação matemática de cariz prático articulam-se perfeitamente com estes objectivos. Todas as tarefas de investigação matemática implementadas na sala de aula constituem inovação educacional, quer para as alunas quer para o professor, promovendo, deste modo, a utilização de novas tecnologias e abrindo o espírito destes alunos para uma nova concepção e visão da Matemática, tal como é indicado no Projecto Educativo de escola.

No que diz respeito à avaliação, e sendo o Projecto Educativo de escola um documento bem organizado e com objectivos pedagógicos e de avaliação bem claros, é sugerido que o corpo docente utilize metodologias novas adequadas à nova filosofia educativa, que dê resposta às exigências da sociedade, que inovem visando uma qualidade educacional e que ponham em prática novas formas de avaliação. Contudo, também exigem resultados finais em exames nacionais levando à incompatibilidade dos objectivos propostos no documento com aquilo que é exigido no final. Tendo em conta o referido documento, as tarefas de investigação matemática articulam-se com o projecto educativo de escola mas, na prática, a sua implementação, e tendo em conta que o programa tem que passar por toda a listagem de conteúdos devido ao exame

existente, torna-se algo difícil de concretizar devido ao tempo e momentos de discussão que estas exigem. Embora ao implementar tarefas de investigação matemática se esteja a cumprir o programa e o Projecto Educativo de escola, existe um exame que condiciona a implementação de investigações matemáticas e, esta, é sem dúvida a maior dificuldade sentida, tal como Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999) também sugerem.

4. Perspectiva das alunas

4.1. Potencialidades das tarefas

4.1.1. Concepção da Matemática

A concepção que a Alexandra tem da Matemática evoluiu um pouco ao longo do ano lectivo porque começou a atribuir-lhe um sentido mais prático ao invés de só servir para desenvolver o raciocínio, referindo que a Matemática está presente no quotidiano:

“A Matemática é importante porque ajuda-nos a resolver as coisas que ocorrem no quotidiano, no dia-a-dia. (...) É saber lidar com vários problemas porque a Matemática está em todo o lado” (última entrevista à Alexandra)

Quanto à Sílvia, a concepção que tem da Matemática pouco evoluiu ao longo do ano lectivo uma vez que esta já não a entendia como uma ciência exacta de resultados inquestionáveis e um conjunto de regras para fazer algo, mas sim como uma ciência que ajuda a pensar e a estruturar o pensamento:

“ Eu acho que é importante porque ajuda-nos a raciocinar melhor ...não é só fazer cálculos...organiza as nossas ideias para organizar melhor coisas e ajuda a organizar melhor o raciocínio. Gosto mais de matemática do que antes e isso faz com que eu lhe dê mais importância (...) Saber Matemática é ter o raciocínio no lugar e saber pensar “ (última entrevista à Sílvia)

4.1.2. Interpretação e valorização das investigações matemáticas no programa de Matemática B

Relativamente ao trabalho realizado durante as aulas deste estudo, a Alexandra mostrou opinião diferente da que tinha inicialmente pois passou a valorizar mais o trabalho em díades, mencionando que este permite troca de ideias levando a um melhor desempenho e o mesmo acontecendo com o trabalho em grupo numa investigação matemática:

“Acho que prefiro trabalhar aos pares porque existe troca de ideias, troca de impressões e é melhor (...) Foi bastante importante trabalharmos em grupo porque a pessoa progride e podíamos tirar conclusões sozinhos que não fossem tão válidas. Em grupo parece-me mais adequado, principalmente devido à troca de ideias (última entrevista à Alexandra)

Já a Sílvia, continuou a valorizar o trabalho em grupo, embora nas investigações tenha iniciado, sempre, o trabalho individualmente considerando que este aspecto é importante para o confronto de ideias:

“Em grupo. Porque dá para trocar ideias e acaba por ser mais fácil (...) Primeiro fizemos individualmente e depois trocávamos as ideias...acho que foi importante primeiro começarmos individualmente e depois de cada um dar valores diferentes foi interessante trocarmos ideias depois de feitos” (última entrevista à Sílvia)

Quanto ao tipo tarefas e de aulas ambas as alunas intervenientes no estudo consideraram-nas adequadas. A Alexandra valorizou o programa de Matemática B no seu curso porque lhe permitiu abordar conceitos essenciais para uma futura profissão. Relativamente às investigações matemáticas e ao trabalho desenvolvido foi notória a satisfação em realizá-lo, valorizando-o ao mencionar a autonomia dos alunos para chegarem às respostas:

“Acho que foi bom porque descobrir a Matemática ...é sempre bom, chegamos lá as respostas por nós próprios. Deu-me prazer fazer. Acho que é apropriado na disciplina este tipo de trabalho. Explorei mais o meu eu matemático, fui pensando noutras hipóteses e deu para me aplicar mais” (última entrevista à Alexandra)

A sua concepção de uma investigação matemática continuou associada à descoberta.

A Sílvia valorizou o programa de Matemática B no seu curso porque a “matéria” foi mais específica tendo em conta o curso de Artes Visuais. Relativamente às

investigações matemáticas e ao trabalho desenvolvido, manifestou agrado em relação ao trabalho desenvolvido, referindo que lhe permitiu ser ela a investigar e a perceber melhor o “porquê das coisas”:

“Achei uma boa ideia e gostei muito de fazer. Deu-me prazer e despertou-me interesse. Acho apropriada. Se calhar...aprendi a investigar e aprendi várias coisas porque geralmente o professor dá a aula e nós acabamos por não perceber porquê. As investigações permitem-nos ir mais além, ir ao fundo”
(última entrevista à Sílvia)

Ambas as alunas mencionaram que todos os recursos se revelaram úteis e imprescindíveis tanto na realização como na discussão da investigação. A calculadora gráfica foi de extrema importância, sem a qual dificilmente teriam avançado nas tarefas propostas.

Para as alunas envolvidas no estudo este trabalho revelou-se uma novidade. A Alexandra manifestou agrado, essencialmente pelo valor de descoberta ao fazer matemática, levar a tarefa até ao fim e tirar conclusões sem as ter visto em lado algum:

“Sim foi novo porque nunca tinha explorado dessa forma essas matérias e (...). Eu senti-me uma descobridora ...senti-me a fazer matemática (...) foi ir à descoberta da Matemática como se nós fossemos uns génios ...conseguimos chegar ao final...tirando as nossas conclusões sem as ter em lado nenhum para as confirmar “ (última entrevista à Alexandra)

A Sílvia destacou o facto de se ter sentido realmente a descobrir e a fazer matemática, desenvolvendo não só o raciocínio como o poder de argumentação. Assim, a sua concepção de uma investigação matemática continuou associada à descoberta:

“ Foi foi (...) Sim gosto. Senti-me a descobrir coisas e a fazer matemática (...) Acho. As capacidades de raciocínio de relacionar as coisas umas com as outras e poder de argumentação” (última entrevista à Sílvia)

4.1.3. Contributo da realização de investigações matemáticas no programa de Matemática B para a aprendizagem de competências profissionais

A Alexandra valorizou as investigações matemáticas uma vez que, segundo a sua opinião, lhe deram uma perspectiva interessante sobre as aplicações da matemática, contribuindo para o desenvolvimento de competências profissionais no curso de Artes Visuais:

“Foi importante, porque as investigações deram para ter uma ideia das várias aplicações matemáticas em várias áreas” (última entrevista à Alexandra)

A Sílvia, tal como a Alexandra, enalteceu as investigações matemáticas uma vez que estas lhe deram uma perspectiva da sua utilidade no dia-a-dia e começou a relacionar a Matemática com o que existe ao seu redor:

“Sim. Talvez. Nós até brincávamos às vezes quando eu e os meus colegas de Matemática quando estávamos a passar em sítios com fontes, pensávamos qual era a função. Começamos a associar e ver a utilidade da Matemática no nosso redor. (...) Gostei mais das investigações da vida real, porque é a tal coisa... se nós a associarmos a Matemática e essas investigações acabam por ter mais interesse, mesmo para o nosso futuro. Acho que a dos parâmetros ajudaram-nos a fazer as outras porque ajudou-nos nas da vida real a conseguir identificar as funções e as outras ajudaram-nos na futura profissão. Por exemplo a do ginásio com a procura das medidas e se calhar vamos ser arquitectos... acho que sim ajudou a ver a utilidade” (última entrevista à Sílvia)

4.1.4. Análise global das potencialidades

Estas alunas mostraram interesse pelo trabalho desenvolvido e vontade de, em anos seguintes, continuarem a desenvolver trabalho deste tipo. A Alexandra manifestou-se bastante motivada por estas tarefas lhe terem proporcionado uma outra visão da Matemática e lhe terem permitido ver a sua utilidade em contextos reais valorizando, deste modo, o seu novo papel enquanto aluna. Relativamente à Sílvia, passou a ver o papel do professor de um outro modo, mais no sentido de orientar o trabalho dos alunos e dos ajudar a pensar e, assim, promover a reflexão.

As investigações matemáticas, tendo em conta a opinião das alunas envolvidas no estudo, permitiram dar uma visão mais ampla da Matemática e da sua utilidade para a vida em contextos reais. As alunas passaram a deixar de sentir que eram meros objectos passivos no processo ensino-aprendizagem para passarem a ter um protagonismo dentro da sala aula e na construção do seu saber matemático. Também valorizaram o trabalho em grupo e começaram a “olhar” o mundo ao seu redor numa outra perspectiva englobando e integrando a Matemática.

4.2. Dificuldades sentidas pelas alunas durante e após a realização das tarefas

4.2.1. Dificuldades sentidas pelas alunas durante a realização das tarefas

A Alexandra quando questionada acerca das dificuldades sentidas referiu que apenas sentiu estranheza mas, depois de ultrapassado esse sentimento, avançou nas investigações. Embora, por vezes, sentisse que não iria tirar conclusões esse sentimento foi ultrapassado quando discutia em grupo e o professor fornecia algumas dicas no sentido de avançar:

“Acho que não tive grandes dificuldades...foi por ser novo ...se calhar estranhei, mas agora parece-me tudo normal e melhor. (...) Às vezes...senti que não ia ser capaz de tirar conclusões (...) Colaborou e ajudou e tirou dúvidas...deu as dicas suficientes para nós não encalhamos “ (última entrevista à Alexandra)

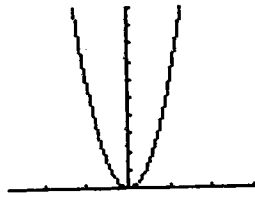
As dificuldades associadas à disciplina de Matemática e às investigações estão, para a Sílvia, essencialmente, relacionadas com a interpretação de enunciados:

“É se calhar...ler bem o enunciado e começar a pensar...interpretar bem no início leva a conseguir melhor (...) Eu gostei logo muito e estava tão entusiasmada que acho que não estava com grandes dificuldades” (última entrevista à Sílvia)

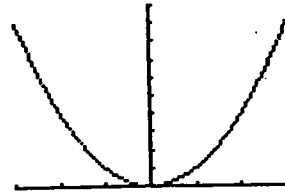
4.2.2. Dificuldades sentidas pelas alunas após a realização das tarefas

4.2.2.1. Alexandra. Após a análise dos quatro relatórios referentes a cada uma das investigações matemáticas foi notória a grande dificuldade em cumprir o que foi pedido através do guião para a elaboração de um relatório escrito. Nos dois primeiros relatórios a Alexandra fez uma descrição das conclusões a que tinha chegado em conjunto com os colegas sem se referir às conjecturas feitas, sua testagem e confirmação ou refutação das mesmas. Foram descritas apenas as tentativas confirmadas, não registando, em parte alguma do relatório, as conjecturas abandonadas. Esta aluna, tal como a restante turma, nunca tinha elaborado, em momento algum do percurso escolar, um relatório onde explicasse o processo de raciocínio que teve de utilizar para chegar a alguma conclusão. Nestes dois primeiros relatórios fez afirmações e de seguida confirmou-as com gráficos e valores válidos e que justificavam e validavam a conjectura:

“ O gráfico da família de funções $y = ax^2$ varia à medida que o valor de “a” muda:



Neste gráfico o valor de “a” é 6

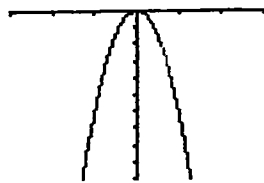


Neste gráfico o valor de “a” é 1

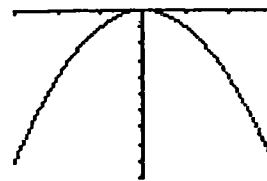
Com estes dois gráficos podemos verificar que quanto maior for o valor do parâmetro “a” o gráfico fica mais “fechado”, e quanto menor for o valor mais “aberto” o gráfico fica.

Mas será que se “a” for negativo estas conclusões se mantêm?

Vejamos:



Neste gráfico o valor de “a” é -6



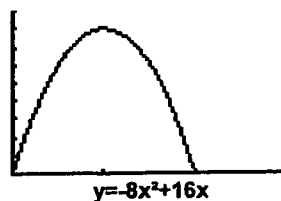
Neste gráfico o valor de “a” é -1

Aqui podemos concluir que quanto maior o valor do parâmetro “a” mais aberto é o gráfico, e aproxima-se do eixo dos xx. Desta maneira, quanto menor for o “a” mais fechado fica o gráfico, e aproxima-se do eixo dos yy”. (Relatório da primeira tarefa de investigação matemática da Alexandra)

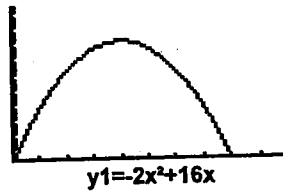
“A função da direita é simétrica à função da esquerda em relação ao eixo Oy, bastando apenas “b” ser positivo, com o mesmo valor, isto é, ser simétrico. “a” terá de se manter negativo para a parábola ficar com a concavidade virada para baixo: $y = -4x^2 + 8x$.



(...) Para que o gráfico obtenha o dobro da altura ($y=8$, altura inicial = 4) temos que multiplicar a função por 2: $y = -8x^2 + 16x$



Para obtermos um gráfico que represente um repuxo com 4 metros de altura e 8 metros de comprimento, representemos $y = -2x^2 + 16x$ de modo a que um zero seja 0 e o outro 8.

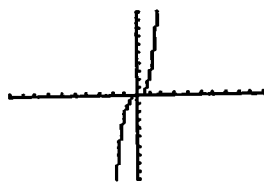


Porém, a sua altura foi 32. Assim dividimos a função por 2 para descobrir a função, cuja altura seria 4. Descobrimos que a função que tinha como zeros 0 e 8 e que tinha altura 4 era a função $y = -0,25x^2 + 2x$ ". (Relatório da segunda tarefa de investigação da Alexandra)

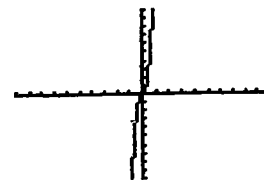
A dificuldade em registar o que estava a fazer durante a tarefa de investigação manifestou-se na elaboração dos relatórios. Era pretendido que registasse todas as conjecturas, testagens e dificuldades sentidas. Embora fossem colocadas questões com vista à generalização das conjecturas feitas, apenas foram apresentados os valores que validavam conjecturas e justificavam afirmações. No entanto, durante a aula, vários foram os valores experimentados até que ela conseguisse chegar às conclusões. Se apenas existisse o relatório, dificilmente se conseguiria avaliar de que modo a aluna tinha chegado a determinado raciocínio e que caminho tinha seguido.

No terceiro relatório notou-se uma evolução na forma como foi descrito todo o processo. A aluna passou a dar exemplos de conjecturas abandonadas e sua refutação. Mencionou, por várias vezes, questões surgidas em discussão com os colegas e que foram investigadas, notando-se uma descrição mais pormenorizada e cuidada de todo o processo investigativo:

"Para estudar a função $y = ax^3$ (com "a" positivo) conjecturamos que quanto maior fosse o valor do parâmetro "a" menor seria o afastamento entre o gráfico e o eixo Oy. Começamos pelas funções $y = 2x^3$ e $y = 20x^3$ para testar a conjectura e obtivemos os seguintes gráficos:



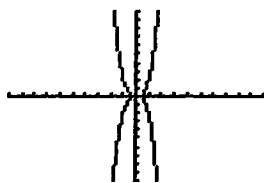
$$y1=2x^3 (a=2)$$



$$y1=20x^3 (a=20)$$

Assim podemos concluir que quanto maior for o valor de "a" menor é o afastamento entre o gráfico e o eixo Oy. (...) ocorre uma expansão do gráfico em relação ao eixo Oy.

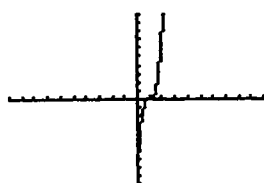
(...) Usando os valores simétricos das funções anteriores conjecturamos que os gráficos eram simétricos. Foi uma questão que surgiu anteriormente e que comprovámos com estes dois últimos gráficos:



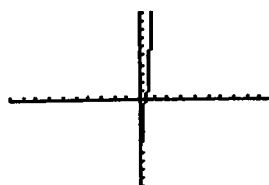
$$y_1 = 2x^3$$

$$y_2 = -2x^3$$

Para as funções $y = (2x - 2)^3$ e $y = (5x - 2)^3$ conjecturamos que quanto maior for o coeficiente de x o gráfico aproxima-se mais do eixo Oy :



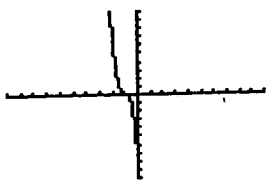
$$y_1 = (2x - 2)^3$$



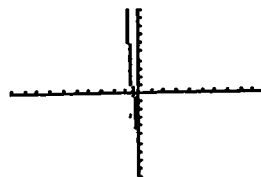
$$y_1 = (5x - 2)^3$$

Conjecturamos que esta teoria se manteria para o caso do coeficiente de x ser negativo.

Negativo. Se o coeficiente de x for negativo, isso não acontece. (...) Estas foram as funções que utilizamos para chegar às conclusões:



$$y_1 = (-2x - 2)^3$$



$$y_1 = (-5x - 2)^3$$

(Relatório da terceira tarefa de investigação da Alexandra)

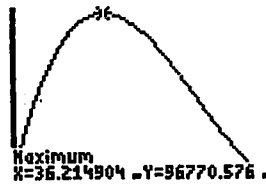
No quarto relatório a Alexandra iniciou-o com uma pequena interpretação da situação proposta na tarefa de investigação, apresentando também a primeira conjectura:

“Nesta tarefa pretende-se descobrir o comprimento e a largura do ginásio, ao qual chamámos x e y (largura y , comprimento x). (...). No enunciado está também apresentada uma informação que nos indica que a soma de x com y é menor ou igual a 100. Começamos por determinar o volume do prisma quadrangular, usando o valor 100 e conjecturando que $x + y = 100$ ”

(Relatório da quarta tarefa de investigação da Alexandra)

Foi descrito todo o processo de testagem assim como a justificação da refutação da conjectura inicial:

“Colocámos a expressão obtida para o volume na calculadora gráfica e obtemos o seguinte gráfico:



$$y1=6000x-110x^2+0,5x^3$$

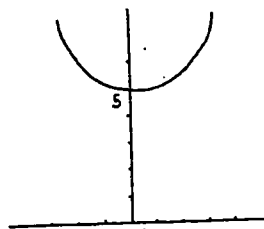
Calculámos o máximo para determinarmos então o valor de x , mas o resultado tinha que ser menor que 20 (altura do ginásio). Assim nos apercebemos, em discussão, que o valor a atribuir a $x+y$ tinha que ser inferior a 100”. (Relatório da quarta tarefa de investigação da Alexandra)

Também foram apresentadas questões surgidas durante a discussão, provando e enfatizando o abandono da conjectura.

Neste relatório foi perceptível que a Alexandra teve um maior cuidado na forma como comunicou e descreveu tudo o que efectuou na tentativa de esclarecer como efectuou a investigação e que recursos usou para chegar a uma solução possível da situação proposta na tarefa. A capacidade crítica e de argumentação foi crescente a partir do primeiro relatório revelando que, no final, percebeu o que se pretendia com o relatório escrito. A dificuldade foi diminuindo verificando-se uma maior desenvoltura na comunicação escrita.

4.2.2.2. Sílvia. Por analogia com a Alexandra, no primeiro e segundo relatórios não são apresentadas as conjecturas feitas e suas testagens. Os relatórios são uma descrição das conclusões e suas justificações com valores e gráficos. Várias vezes iniciou a descrição da investigação com a palavra *verifica-se* e depois justificou com gráficos.

“Na família de funções $y = ax^2 + c$, verifica-se que quando o valor de “c” aumenta, o gráfico da função “sobe” no eixo Oy e quando diminui “desce”. Conclui-se, também, que o vértice do gráfico é definido pelo valor de “c”. Por exemplo: Considerando a função $y = 2x^2 + 5$, obtém-se o seguinte gráfico:



Desta representação gráfica pode verificar-se que o vértice do gráfico tem coordenadas (0, 5), ou seja, o valor de “c” é o valor da sua ordenada. O

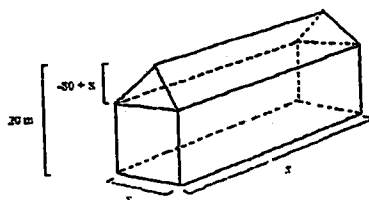
mesmo se verifica se o valor de “a” ou “c” forem negativos” (Relatório da primeira tarefa de investigação da Sílvia)

A Sílvia, tal como a Alexandra, nunca tinha elaborado um relatório escrito na disciplina de Matemática e também ignorou o que era solicitado no guião para a respectiva elaboração. No terceiro relatório houve uma ligeira evolução comparativamente com o relatório da primeira investigação. Em algumas ocasiões já foram apresentados testes que confirmavam conjecturas efectuadas inicialmente embora, na grande maioria, fossem apresentadas logo as conclusões e sua justificação:

“ (...) passou-se para o estudo de $y = (x - 2)^3$ e $y = (x - 8)^3$ para serem feitas comparações. Conjecturamos que a variação dos parâmetros da função tem influência nos zeros. Nestes exemplos, os zeros seriam 2 e 8, respectivamente. Para testar a conjectura, fizemos variar também o coeficiente de x : ($y = (2x - 8)^3$ e $y = (5x - 8)^3$)
Verifica-se que os zeros do gráfico também se alteram com a mudança de valores de x . O valor do zero corresponde ao quociente entre os dois valores” (Relatório da terceira tarefa de investigação da Sílvia)

Esta aluna sempre revelou alguma dificuldade em seguir o guião de elaboração do relatório. Mesmo no quarto relatório iniciou de imediato com as dimensões atribuídas (Anexo 7) sem se perceber qual a conjectura que efectuou para chegar a tais relações. No entanto, foi perceptível que a Sílvia criticou os resultados obtidos revelando maior espírito crítico do que inicialmente e justificando a razão dos resultados improváveis no contexto da situação descrita. Embora no início não tivesse indicado a primeira conjectura, a partir da refutação, com base nos resultados obtidos, indicou uma conjectura e todo o processo de testagem até chegar a uma conjectura válida:

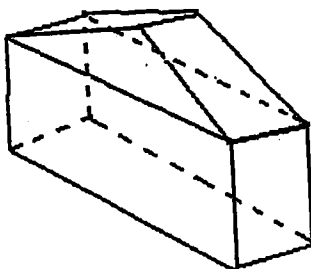
“Começou-se por pensar em todas as medidas necessárias para a resolução da tarefa:



Conjecturou-se que $x + y = 100$ e para que não existissem duas incógnitas (x e y), substitui-se y por $100 - x$.

(...) Fez-se o gráfico da função obtida ($y = 6000x - 110x^2 + 0,5x^3$) e determinamos o seu máximo, obtendo-se para esse máximo $x \approx 36,21$ metros. Se y (largura) = $100 - x$, então $y \approx 63,79$ metros.

Até aqui parece tudo bem, mas existe uma objecção: o comprimento do ginásio é menor que a largura. Conclui-se que a imagem sugerida na tarefa está errada e o verdadeiro desenho do edifício é o abaixo esboçado:



Aqui aparece outra objecção, pois a altura do edifício terá de ser 20 metros, e obtivemos uma altura de 36,21 metros. É necessário conjecturar para valores inferiores a 100. (...) Como se pode ver, a resposta ao problema está quase a ser descoberta e continua-se esta investigação agora com a conjectura $x + y = 65$ (...). (Relatório da quarta tarefa de investigação da Sílvia)

Contudo, ainda com alguma dificuldade, este último relatório cumpriu o seu objectivo. Ainda que a aluna, oralmente, revelasse grande espírito crítico e poder de argumentação, todas as questões que lançou oralmente, e que por vezes suscitaram discussão, não foram descritas no processo. Estes documentos da Sílvia foram, na maioria dos casos, descrições de conclusões deixando transparecer, para quem não assistiu às aulas onde a aluna esteve presente, que as investigações não suscitaram dúvidas e que rapidamente chegou a conclusões válidas sem grandes testagens e dificuldades.

4.3. Análise global

As alunas em estudo revelaram, de um modo geral, dificuldade em compreender o que era pretendido com o relatório escrito de uma investigação matemática ignorando, principalmente nas duas primeiras investigações, o guião apresentado e as várias chamadas de atenção do professor. Esta dificuldade deveu-se ao facto de na disciplina de Matemática, e em níveis de ensino anteriores, os alunos nunca terem elaborado composições matemáticas ou descrições que justifiquem o raciocínio e a forma como chegaram às soluções. Os alunos preocupam-se, essencialmente, em obter uma solução e verificar com o professor se esta está correcta do que em criticar e interpretar resultados e saber justificá-los.

A Alexandra revelou uma evolução mais satisfatória do que a Sílvia na elaboração dos relatórios. Relativamente à Sílvia foram necessárias chamadas de atenção no sentido de levar à compreensão do que se pretendia para elaborar um relatório escrito. Nenhuma das alunas apresentou uma componente reflexiva escrita sobre a investigação matemática embora tivesse sido solicitada no guião do relatório e durante as aulas de implementação das investigações matemáticas. Aprenderam a registar o seu pensamento, a articular ideias e a explicar procedimentos mas não avaliaram nem o seu desempenho nem a dos seus colegas tal como é referido por Menino e Santos (2004). Varandas (2000) e Brocardo (2001) no ensino secundário, defendem a ideia de que a qualidade dos relatórios vai aumentando à medida que alunos são confrontados, frequentemente, com a necessidade de os elaborar tal como se verificou com estas duas alunas.

1. Resumo do estudo

Este trabalho teve por objectivo desenvolver o estudo sobre a compreensão do impacto inerente à implementação de tarefas de investigação matemática na sala de aula através do programa de Matemática B – 10º na de escolaridade, na perspectiva de alunos e professores. Formularam-se quatro questões de investigação a que este estudo procurou dar resposta:

1) De que modo as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelo professor no ensino secundário (Matemática B – 10ºano)?

2) De que modo as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelos alunos no ensino secundário (Matemática B – 10ºano)?

3) Do ponto de vista do professor, de que forma a implementação das investigações matemáticas na sala de aula se relaciona e adequa às orientações curriculares (Matemática B) e se pode articular com o projecto educativo de escola?

4) De que forma a realização de investigações matemáticas no programa do 10º ano – Matemática B contribuirá para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, na perspectiva de professor e alunos?

A investigação realizada foi de natureza qualitativa, tendo-se utilizado um estudo de caso: professor (Francisco) e alunas (Sílvia e Alexandra). Esta opção está relacionada com o objectivo do estudo e com as questões formuladas, uma vez que se pretendia compreender qual a interpretação e valorização que o professor e alunos atribuem à implementação de investigações matemáticas na aula de Matemática, assim como a adequação destas no programa de Matemática B e no projecto educativo de escola. Também pretendia avaliar de que modo tarefas de investigação matemática contribuem para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais.

Foi escolhido o 10º ano de escolaridade, numa turma de Artes Visuais, estando, a Matemática B em 2005/2006, no seu segundo ano de implementação. A escolha da turma foi aconselhada pelo grupo disciplinar uma vez que os alunos de artes revelam

turma foi aconselhada pelo grupo disciplinar uma vez que os alunos de artes revelam maior predisposição para participarem em projectos inovadores e serem mais criativos.

O estudo decorreu sempre na escola, à excepção das entrevistas ao Francisco, onde foram realizadas sessões de trabalho conjunto visando a escolha do tema e a selecção de conteúdos e de fontes para a elaboração das investigações matemáticas. As sessões de trabalho serviram como espaço de análise, discussão e reflexão sobre a elaboração, planificação e realização das investigações. Neste estudo os alunos foram observados e analisados no contexto de sala de aula, de modo a compreender os seus pontos de vista relativamente à implementação de investigações matemáticas e de que forma desenvolveriam ou não competências profissionais. Relativamente ao professor, este foi observado e analisado no seu contexto natural de trabalho, de modo a perceber os seus pontos de vista e assim permitir descrever as suas dificuldades e receios relativamente à implementação de investigações matemáticas no programa do 10º ano – Matemática B, favorecendo a identificação do que de mais essencial e característico nelas existe e a descoberta de interações entre as mesmas (Canavarro, 1993).

Os dados foram recolhidos através da observação participante nas aulas, nas sessões de trabalho, nas reflexões escritas do professor e relatórios escritos das alunas, das duas entrevistas realizadas às alunas e professor, da análise documental e dos registos vídeo das aulas. Os registos da observação contribuíram para a compreensão de como as tarefas de investigação matemática são interpretadas e valorizadas pelos alunos e professores e avaliar de que modo estas se adequam e relacionam com o programa, se articulam com o projecto educativo de escola e de que modo contribuem para o desenvolvimento de competências profissionais para exercício de uma futura profissão. As reflexões escritas e entrevistas permitiram compreender, de forma aprofundada, as perspectivas dos participantes acerca da implementação de investigações matemáticas na sala de aula, relação com o projecto educativo de escola e com o curso de Artes Visuais.

As entrevistas foram registadas em áudio e transcritas integralmente. Nas aulas em que as investigações foram implementadas foi realizado um registo vídeo. Estes dados permitiram completar a observação das aulas, nomeadamente com transcrições do discurso do professor e alunos.

A análise dos dados deu-se em dois momentos: o primeiro, após a organização dos dados da observação, durante a transcrição das entrevistas e análise das reflexões do professor e dos relatórios escritos dos alunos. O segundo, durante a redacção de

cada um dos casos, procurando identificar e clarificar pontos de vista e perspectivas de cada um dos participantes.

2. Conclusões do estudo

2.1. Interpretação e valorização da implementação de investigações matemáticas na sala de aula através do programa de Matemática B, na perspectiva do professor e dos alunos

Relativamente ao Francisco podemos concluir que, por vezes, foi notório, essencialmente nas investigações de cariz teórico, uma certa tensão entre fornecer, aos alunos, liberdade de irem por diversos caminhos e, deste modo, poderem não chegar aos objectivos previstos e limitar essa liberdade e perder-se as características inerentes a uma investigação. Notou-se, por vezes, vontade em precipitar conclusões sugerindo caminhos que resultassem em tempo útil de aula. Esta tensão, ou dilema sentida pelo professor, teve essencialmente a ver com as dificuldades iniciais sentidas pelos alunos quando se depararam, pela primeira vez, com uma tarefa de investigação matemática e pela linguagem usada nos enunciados das primeira e terceira tarefas de investigação matemática de cariz teórico uma vez que apresentavam uma ideia muito difusa do que era uma investigação e qual o seu objectivo. O receio de que estes não realizassem toda a investigação na aula, e assim se perdesse a fase da discussão, o Francisco, para controlar a vontade de induzir caminhos, resolveu encurtar as tarefas de investigação matemática diminuindo o número de questões a explorar solucionando, de certa forma, o problema e permitindo, de forma mais tranquila, chegar à fase da discussão sem prolongar demasiado a tarefa, evitando uma possível perda de motivação tal como é apontado por Perrenoud (1996).

No entanto, inicialmente, notou-se alguma dificuldade no modo como decidia de que forma iria ou não intervir visando ajudar os alunos a ultrapassarem impasses, mas a sua vasta experiência de ensino influenciou, satisfatoriamente, o papel que ele desempenhou ao longo de todas as tarefas de investigação matemática. O Francisco sempre soube, desde início, o papel que ele e os seus alunos deveriam assumir durante

uma aula de implementação de tarefas de investigação matemática. Como os alunos, com o passar do tempo e à medida que iam surgindo outras investigações, se tornaram mais autónomos esse dilema foi-se desvanecendo e o papel do professor foi facilitado, passando a intervir apenas na fase de discussão e assumindo, essencialmente, um papel de moderador na discussão (NCTM, 1994), por vezes interrogativo (Christiansen e Walther, 1986; NCTM, 1994; Ponte *et. al.*, 1999) para clarificar ideias e sintetizar conclusões.

Tal como é apontado no estudo de Ponte *et. al.* (1998), onde foram analisados dados em que eram propostas tarefas de investigação, concluí-se, segundo a perspectiva do Francisco, que os alunos revelam alguma dificuldade em conjecturar quando o pretendem registar de forma escrita. Por vezes eram apresentadas na forma de conclusões e não na forma de conjecturas, ao invés de realizarem testes e apresentarem contra-exemplos para as validarem ou refutarem, apresentavam conclusões seguidas de testes válidos que as justificavam. Embora o fizessem oralmente e testassem de seguida, ao registarem no papel o que estavam a fazer, na maior parte das vezes só apareciam conclusões não havendo preocupação em registar o processo que os tinham levado a encontrar aquela solução, tal como aponta Ponte *et. al.* (1998). Notou-se maior facilidade em conjecturar e em registar processos nas investigações matemáticas de cariz prático (segunda e quarta tarefas de investigação matemática), uma vez que as outras duas investigações apresentavam muitos parâmetros no estudo da família de funções quadrática e cúbica o que constituiu alguma dificuldade inicial para os alunos quanto ao pretendido. Deste modo, as tarefas de investigação matemática de cariz prático foram mais valorizadas quer pelo professor quer pelas alunas. O facto destas tarefas estarem ligadas à arte e ganharem significado para estas alunas revelaram-se mais perceptíveis e mais motivadoras.

Uma das maiores potencialidades na implementação de investigações deste tipo passou pelo facto das alunas se terem sentido realmente no papel de matemáticos, a fazer e a descobrir matemática, entrando desta forma em contacto com o que é essencial da Matemática, tal como é defendido pelo NCTM, (1991). Embora com alguma insegurança no início, pelo facto de não entenderem o seu novo papel, depois de este ser interiorizado depressa se entusiasmaram e ganharam confiança, principalmente, nas tarefas de investigação mais práticas. O facto dos alunos se aperceberem da sua capacidade de saber fazer matemática despertou-lhes entusiasmo mudando-lhes, conseqüentemente, a visão que tinham da Matemática.

Verificou-se que estas tarefas de investigação matemática proporcionaram, ao nível da aula de Matemática, um clima e um ambiente de aprendizagem estimulante para os alunos e onde as interações entre alunos e entre alunos e professor constituíram o elemento chave da sua dinâmica, tal como é defendido por Ponte *et. al.* (1998a). A fase de discussão foi apontada como muito enriquecedora promovendo a partilha de ideias e permitindo o confronto de resultados estimulando, deste modo, o desenvolvimento da capacidade de argumentação e de comunicação, levando a uma maior autonomia dos alunos.

Conclui-se, tendo em conta a perspectiva do professor, que as investigações matemáticas devem ser implementadas em níveis de escolaridade anteriores de modo a ultrapassar algumas dificuldades surgidas e sentidas quando introduzidas no ensino secundário, tal como é defendido por Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999). Existiram algumas condicionantes iniciais que impediram que as tarefas de investigação matemática de cariz mais teórico fossem melhor exploradas e que têm, essencialmente, a ver com a falta de hábitos de trabalho dos alunos durante a escolaridade obrigatória. O facto de estes não estarem habituados a realizarem produções escritas na aula de matemática e a compreenderem os processos matemáticos, ao invés de apenas encontrarem soluções sem se preocuparem com o “porquê”, levou a que a primeira tarefa de investigação suscitasse, inicialmente, um clima de rejeição. Os alunos depararam-se com um novo papel, de serem eles a descobrir e a fazer matemática (NCTM, 1991), e esse facto causou-lhes estranheza e insegurança quando se aperceberam que o professor não iria intervir na aula do mesmo modo. Sentiram-se desamparados e quando confrontados que teriam de explicar o processo pelo qual os levaria a uma conclusão, sentiram-se bastante inseguros, principalmente os alunos com melhor aproveitamento. Esses alunos sentiram receio de não descobrir, por eles próprios, e estavam bastante preocupados com o seu desempenho. Habitados a fazerem exercícios e a reproduzirem o que o professor lhes ensinava, sentiram-se desesperados. Depois de explicado o pretendido e esclarecidas algumas dúvidas, esse sentimento foi sendo abandonado dando lugar a entusiasmo à medida que se apercebiavam de que eram capazes de descobrir relações e arranjar contra-exemplos, levando a um clima de reflexão sobre os processos e não apenas sobre o produto. No entanto, tendo em conta que a maioria dos alunos no ensino básico não realiza trabalhos deste género, é necessário pensar e ponderar sobre as características das tarefas de investigação matemática que são apresentadas aos alunos no ensino

secundário. Convém que as primeiras tarefas desta natureza sejam menos abertas e que o professor clarifique, oralmente, o que é pretendido indo, deste modo, habituando os alunos ao seu novo papel. Neste contexto, as investigações matemáticas associadas ao real são mais valorizadas e promovem, de forma significativa, o desenvolvimento de competências. O facto de, também, nunca terem usado tecnologia, nomeadamente calculadora gráfica, suscitou outra limitação na primeira tarefa de investigação matemática uma vez que os alunos perderam muito tempo no uso da calculadora a interpretar e criticar o que aí observavam. É aconselhável um período de adaptação ao funcionamento da calculadora gráfica antes que os alunos a usem numa investigação matemática, pois corre-se o risco de se ocultar o espírito de uma tarefa com estas características. Na elaboração de uma tarefa de investigação matemática de cariz prático, como a segunda e quarta investigações, há que ter a percepção do tempo que será necessário para a sua exploração pensando que uma investigação é um processo divergente e que, como tal, poderá levar a caminhos imprevistos e demorados, tal como aponta Ernest (1991), (citado por Santos, Brocardo, Pires e Rosendo, 2002) sendo, então, preferível menos questões a explorar de modo que exista maior profundidade e, deste modo, a fase de discussão ser mais enriquecedora e frutífera.

Os alunos, ultrapassado o receio inicial, aderiram às tarefas de investigação matemática mostrando interesse em realizar no futuro afirmando, na entrevista final, que passaram a ver a Matemática de forma diferente, atribuindo-lhe um outro significado e importância e relacionando-a com a realidade. Manifestaram satisfação, e até orgulho, em conseguirem, por eles próprios, fazerem matemática dizendo que se sentiram descobridores, evidenciando que o facto de o fazerem em grupo permitiu um ambiente de aula mais dinâmico, favorecendo o discernir de conclusões e o ultrapassar de dificuldades, tal como refere Dias (2005). Sentiram que, em algumas tarefas de investigação (primeira e terceira), poderiam ter ido mais além mas o tempo constituiu um condicionante. No entanto, afirmaram que aprenderam bastante porque conseguiram aprofundar e entender o “porquê” não se limitando a aceitar, sem questionar, o que o professor reproduzia em aulas de outro tipo.

Embora as tarefas de investigação matemática de cariz teórico tivessem sido menos valorizadas pelo professor e alunos, para os últimos constituíram uma peça fundamental e uma ponte essencial para as outras duas investigações. Conclui-se que, embora não se integrem do mesmo modo no curso de Artes Visuais, para os alunos elas permitiram identificar mais rapidamente o tipo de matemática que estava envolvida na

situação real, permitindo avançarem mais depressa na investigação e conjecturando com mais facilidade.

Outro aspecto que podemos concluir, e que foi valorizado pelo Francisco, é que durante este ano lectivo, com a implementação das investigações matemáticas na aula, repensou e reflectiu sobre a forma como elaborava os seus testes de avaliação, mudando deste modo a estrutura dos mesmos, exigindo muito mais produções escritas e descrições dos processos ao invés de apenas exigir apresentação de soluções. Neste contexto, as tarefas de investigação matemática com todas as suas características inerentes e fases, promoveram, no Francisco, uma reflexão sobre a forma como avaliava os seus alunos passando, a partir de então, a preocupar-se mais com os processos de raciocínio dos seus alunos do que com as soluções apresentadas por estes e previstas por ele. A sua concepção de avaliação alterou-se, assim como a dos seus alunos. Estes aperceberam-se que com as investigações matemáticas o professor, estando muito mais disponível e atento, consegue avaliá-los tendo em conta todas as intervenções e interacções existentes, valorizando não só os processos matemáticos envolvidos como a comunicação, o conhecimento matemático, o poder de argumentação e o espírito crítico.

Tanto para as alunas como o professor o facto do trabalho ter sido organizado em grupo revelou-se o modo mais adequado de o levar a cabo, pois permitiu partilha de ideias e confronto de opiniões promovendo, deste modo, a cooperação e desenvolvendo capacidade de comunicação e argumentação tanto em pequeno grupo, como na fase de discussão em grande grupo.

2.2. Adequação das investigações matemáticas ao programa do 10º Ano de Matemática B e sua articulação com o curso Científico-humanístico de Artes Visuais e com o projecto educativo de escola

2.2.1 Programa de Matemática B

Tendo em conta o programa de Matemática B e as orientações do Ministério da Educação, as investigações matemáticas são um tema transversal do programa devendo, o professor, implementar na sua aula uma vez que estas proporcionam a oportunidade dos alunos de construir matemática, formularem problemas, conjecturarem, testarem hipóteses, concluir e estabelecer conexões entre as várias áreas

da Matemática e do saber (ME, 2001). Neste contexto podemos concluir que as investigações matemáticas se adequam e se relacionam com o programa de Matemática B. No entanto, e tendo em conta a perspectiva do professor e o trabalho desenvolvido durante este ano lectivo, poder-se-á concluir que há que ter em conta alguns factores e fazer algumas reflexões sobre a sua implementação no 10º ano de Matemática B. Um dos factores são as características das investigações, pois estas fazem sentido para estes alunos se forem, essencialmente, ligadas ao real uma vez que um dos principais objectivos do programa é desenvolver competências essenciais para o exercício de uma futura profissão. Embora as outras tarefas de cariz teórico se adequem perfeitamente ao programa, e até sejam sugeridas no programa oficial, estas revelam-se mais difíceis de concretização para estes alunos. O total desconhecimento de investigações matemáticas até esta fase do seu percurso escolar levou a que valorizassem menos estas tarefas de investigação, atribuindo um maior significado às outras. Outro factor a considerar, e que constituiu um dilema para o Francisco, é o cumprimento do programa. Por um lado, cumprir o programa de Matemática B é implementar investigações matemáticas mas, por outro lado, existe uma listagem enorme de conteúdos a leccionar até ao fim do ano e que culminam, no final do 11º ano de escolaridade, com um exame nacional o que constitui uma dificuldade, tal como é referido por Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999). Investigações matemáticas implicam tempo para as realizar, reflectir, discutir e desenvolvem capacidades e competências matemáticas que com outras tarefas não seria possível. No entanto, se não forem implementadas nas aulas com alguma regularidade, que é o ideal para que os alunos possam ganhar hábitos de trabalho, perde-se a possibilidade de conseguir cumprir a listagem de conteúdos necessários e exigidos para que os alunos possam ir a exame. Contudo, e analisando a proposta de exame do ministério para Matemática B, podemos concluir que, cada vez mais, se exige que os alunos sejam capazes de realizarem pequenas investigações demonstrando, deste modo, a sua capacidade de justificar, validar e explicar o processo ao invés do resultado. Os alunos neste trabalho, embora tivessem conseguido passar por todas as fases que uma investigação exige, demonstraram alguma lentidão na sua realização o que leva a pensar que dificilmente num exame conseguem concluir mais do que uma produção escrita, a não ser que seja fomentado em anos de escolaridade precedentes este tipo de trabalho. As investigações matemáticas, mais do que qualquer outra tarefa, adequam-se ao que se pretende com o programa de Matemática B mas, segundo o Francisco, a forma como está organizado o programa dificilmente se

consegue implementar mais do que três ou quatro tarefas de investigação matemática por ano correndo-se o risco de não se preparar os alunos para o exame final do 11º ano de escolaridade. Neste sentido, há que repensar e reajustar o programa para que possa haver lugar a uma prática regular de investigações matemáticas em sala de aula. Segundo a opinião deste professor, atendendo ao objectivo principal do programa de Matemática B “O programa do 10º ano de Matemática B, tem por principal objectivo contribuir para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais” (ME, 2001, p.1), faria muito mais sentido não existir exame para estes alunos.

As tarefas de investigação matemática devem ser cuidadosamente elaboradas de modo que possam ser significativas para os alunos e comecem a ser realizadas no ensino básico de modo a ganharem hábitos de trabalho ao longo do seu percurso escolar e, deste modo, serem praticáveis no ensino secundário, tal como é sugerido por Silva, Veloso, Porfírio e Abrantes (1999).

2.2.2. Curso de Artes Visuais

As segunda e quarta tarefas de investigação matemática, estando associadas às artes, revelaram-se de extrema importância para estes alunos porque pela primeira vez tiveram a percepção da utilidade da Matemática e da sua conexão com outras áreas do saber, nomeadamente às artes. Os alunos revelaram que, a partir do momento em que realizaram nas aulas estas investigações matemáticas, começaram a dar outro sentido à matemática em função da sua observação da realidade, estabelecendo ligações. Sempre que viam, por exemplo, pontes, edifícios ou repuxos, lembravam-se das tarefas propostas e começavam, entre eles, a tentar descobrir que “funções” conhecidas melhor descreveriam a situação. Conclui-se que esta concepção e visão da Matemática foi devida à implementação das investigações matemáticas ligadas à arte e constituíram uma abertura de horizontes quanto à necessidade que vão ter desta disciplina numa futura profissão ligada às artes. Também para o professor estas investigações, de cariz prático, tiveram extrema importância para uma nova visão da Matemática para estes alunos afirmando, na última entrevista, que no final do ano os alunos tinham uma atitude diferente, com uma outra visão da Matemática e muito mais motivados. Estas investigações matemáticas não só se integraram no curso de Artes Visuais como também desenvolveram, nestes alunos, capacidades de reflexão nunca antes conseguidas.

2.2.3. Projecto Educativo de Escola

Quanto ao projecto educativo de escola poder-se-á concluir que, tendo em conta o respectivo documento, as investigações matemáticas se integram perfeitamente nos seus objectivos prioritários de âmbito pedagógico. Perante o trabalho desenvolvido conclui-se que as investigações matemáticas e o programa de Matemática B se adequam, relacionam e permitem desenvolver competências úteis para os alunos de artes visuais e, conseqüentemente, para o exercício de uma futura profissão. Constituiu uma inovação educacional tendo em conta o percurso escolar destes alunos e o uso de tecnologia. Cumprem o programa nacional e sensibilizaram o professor para instrumentos de avaliação diversificados mudando-lhe, até, a forma de elaborar os testes de avaliação e de o encarar como um único elemento de avaliação, uma vez que foram avaliados relatórios escritos destes alunos. Desta forma, as investigações matemáticas promovem ferramentas cruciais para o cumprimento dos objectivos do projecto educativo de escola. O problema surge quando o que é exigido na teoria não é exigido ou valorizado na prática. Esta escola, tal como muitas outras instituições, têm um lugar privilegiado no *ranking* nacional de escolas e, como tal, é exigido ao seu corpo docente, segundo a última entrevista ao Francisco, que os alunos apresentem no exame final desempenhos bastante positivos. Enfatiza-se o dilema do cumprimento do programa ao nível da listagem de conteúdos e se estes não forem leccionados dificilmente os alunos atingirão os resultados exigidos, sendo difícil implementar inovações educacionais, tais como as investigações matemáticas, com a “pressão” por parte da escola. Embora as investigações matemáticas, em teoria, preencham todos os requisitos exigidos pela escola, por outro lado torna-se complicado implementar, com regularidade, quando se tem o peso dos resultados de um exame nacional e um programa para “cumprir”. Neste contexto, o Francisco sentiu-se pressionado e com receio de não chegar ao “fim” do programa, devido ao tempo despendido com as investigações matemáticas. Embora se sentisse a cumprir o programa e os objectivos do projecto educativo de escola andou, constantemente, numa luta conta o tempo porque a vontade de proporcionar aos seus alunos outras oportunidades de aprendizagem era superior ao receio que sentia. No entanto, conclui-se que, neste programa de Matemática B, muitas mudanças têm de ser efectuadas e a política de um exame e as exigências da sociedade quanto a resultados de desempenho dos seus alunos constituem um entrave a inovações educacionais tal como é pretendido pelo ministério e pelas escolas. A regularidade da implementação das investigações matemáticas nunca será a

ideal, de modo a desenvolver competências essenciais nos nossos alunos, enquanto os professores se sentirem pressionados pelo “cumprimento” do programa tendo em vista a existência de um exame final, tal como é defendido por Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira (1999).

2.3. O desenvolvimento de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, com a implementação de tarefas de investigação matemática na sala de aula através do programa do 10º ano – Matemática B

As segunda e quarta tarefas de investigação matemática implementadas abriram os horizontes destes alunos de Artes Visuais quanto à utilidade da Matemática. Para estes alunos poder-se-á concluir que foi de extrema importância a realização destas duas tarefas uma vez que os fez ver que a Matemática não é apenas uma ferramenta auxiliar de outras áreas do saber tal como referiram na primeira entrevista realizada. As suas concepções mudaram e, até, o professor referiu que passou a ter “outros” alunos no final do ano lectivo. O facto de verem a utilidade da Matemática numa situação real e associada às artes, e que teriam de arranjar soluções para conseguirem por em prática a situação descrita, aperceberam-se da presença constante da Matemática e da sua importância para o desenvolvimento de competências úteis e necessárias para o exercício de uma profissão. As duas situações propostas, a construção de um repuxo no pátio da escola e a edificação de um novo ginásio que teria de obedecer a determinadas condições fê-los, acima de tudo, reflectir sobre os processos envolvidos quando elaboram um projecto e da intervenção imprescindível da Matemática para a concretização bem sucedida desse projecto.

Para o curso de Artes Visuais e cursos tecnológicos é, sem dúvida, necessário fazer conexões entre a Matemática e as respectivas áreas tecnológicas para que os alunos compreendam a ligação estreita e necessária com a Matemática. Para levar esta visão da Matemática a bom porto é preciso que as investigações matemáticas sejam uma prática regular nas aulas de alunos destes cursos de modo a que se consiga adaptar e elaborar tarefas que desenvolvam cada vez mais competências fundamentais e necessárias para o exercício de uma futura profissão.

As competências desenvolvidas, por estas tarefas, e que são necessárias para o exercício de uma profissão foram essencialmente: a) capacidade de analisar situações

da vida real e associadas às artes, identificando modelos matemáticos que permitiram a sua interpretação e resolução; b) capacidade para interpretar e criticar resultados no contexto do problema; c) aptidão para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas em contexto real; d) o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática nas simulações ou situações simuladas, recorrendo à modelação com o uso da calculadora gráfica.

As duas investigações de cariz teórico (Anexo 4 e Anexo 6), embora menos valorizadas pelo professor e alunos, desenvolveram, tal como qualquer outra investigação, várias competências imprescindíveis para qualquer actividade ou profissão. As competências desenvolvidas foram: a) o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática, recorrendo à calculadora gráfica; b) a confiança pessoal por desenvolver actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica usada; c) predisposição, abertura e aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas, através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada às situações trabalhadas (a compreensão e ampliação de conceitos matemáticos); d) aptidão para formular hipóteses e prever resultados (aptidão para descobrir relações entre conceitos de Matemática); e) formular generalizações a partir de experiências; f) validar conjecturas; g) capacidade de comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico; h) espírito de tolerância e de cooperação, colaborando em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades. Estas competências, embora não directamente ligadas às artes ou a um curso tecnológico, são cruciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico, criatividade, autonomia e comunicação úteis para qualquer profissão.

Do ponto de vista do professor, tendo em atenção a sua última entrevista e reflexões escritas, conclui-se que as investigações matemáticas fizeram com que todos percebessem que no exercício da sua profissão vão depender da Matemática, nomeadamente, de outras pessoas tais como engenheiros para pôr em prática projectos.

3. Limitações do estudo

A investigação decorreu num ambiente e contexto de trabalho colaborativo, entre o Francisco e a investigadora, embora se sentisse que o professor tentasse corresponder às expectativas da investigadora no sentido de não prejudicar o trabalho deixando, muitas vezes, ao critério da investigadora o poder de decidir sobre o mais conveniente. Na escolha e elaboração das investigações matemáticas embora estas tivessem sido discutidas conjuntamente, o Francisco deixou que fosse a investigadora a escolher as que iriam ao encontro do objectivo do trabalho. A forma como se preparou, as leituras que fez e a sua experiência profissional, permitiu que este se enquadrasse no que era esperado de um professor numa aula de implementação de investigações matemáticas.

Uma das limitações sentidas e, apesar de enquanto investigadora, ter assumido uma postura participante foi a incompatibilidade de horários, substituindo diversas vezes as sessões de trabalho programadas em conversas telefónicas ou trocas de *e-mail*, que não possibilitou o aprofundar de alguns aspectos.

A nível metodológico, a limitação sentida teve a ver com as reflexões escritas do Francisco. Estas deveriam ter sido imediatamente elaboradas após as aulas de investigações matemáticas com o objectivo de, conjuntamente, se reflectir sobre as suas descrições e se reformular ou adaptar as próximas tarefas de investigação matemática. No entanto, a sua falta de tempo e de disponibilidade para as fazer de imediato levou a que essas reflexões imediatas fossem muitas vezes transformadas em conversas informais logo a seguir às aulas. As reflexões escritas constituem, sem dúvida, um instrumento muito rico para a compreensão e análise das perspectivas do professor mas, e sem descurar a sua importância, estas foram elaboradas no final do segundo período e no final do terceiro período muito depois da implementação das investigações. Para contornar esta limitação, muitas das reflexões foram feitas oralmente em ambientes informais e por telefone que, apesar de assumirem características diferentes, revelaram-se importantes e até mesmo complementares das reflexões escritas posteriormente.

Outra limitação sentida, e que de certa forma condicionou o decorrer normal da primeira tarefa de investigação matemática, foi o desconhecimento por parte dos alunos do uso da calculadora gráfica e suas potencialidades. No início da primeira investigação a maior preocupação dos alunos foi sem dúvida com a manipulação da calculadora gráfica. Se estes já estivessem habituados ao seu manuseamento, certamente, a

exploração seria bastante distinta perdendo-se, desta forma, a oportunidade dos alunos chegarem a mais relações matemáticas e descobertas.

4. Recomendações

Com este trabalho pretendia-se contribuir para a compreensão de como as investigações matemáticas são interpretadas e valorizadas pelos professores e alunos, assim como avaliar de que modo, estas se adequam e relacionam com o currículo e se articulam com o projecto educativo de escola. Também se pretendia avaliar de que modo as investigações matemáticas contribuem para o desenvolvimento de competências fundamentais para o exercício de uma futura profissão.

As questões analisadas no presente estudo, e pela importância que assumem neste programa de Matemática do ensino secundário, levantam outras preocupações quando se deseja implementar investigações matemáticas neste nível de ensino.

Recomenda-se que as investigações matemáticas sejam implementadas com alguma regularidade no ensino básico desenvolvendo-se, assim, uma prática educacional essencialmente centrada no aluno ao invés de estar centrada no professor e, deste modo, desenvolvendo hábitos de trabalho e de reflexão essenciais para alunos que chegam ao ensino secundário. Neste contexto, o trabalho colaborativo entre professores de diferentes ciclos seria aconselhável.

Seria interessante investigar a eficácia das investigações matemáticas também no programa de Matemática A e Matemática Aplicada às Ciências Sociais avaliando, deste modo, as competências desenvolvidas e dificuldades e potencialidades inerentes à sua implementação.

Poderão surgir estudos que tenham como objectivo analisar e compreender a influência da formação inicial e experiência profissional no papel que o professor assume em decisões quando são implementadas tarefas de investigação matemática na aula de Matemática.

Tendo em conta que neste estudo só interveio um professor, seria importante realizar estudos idênticos com vários professores e avaliar e comparar as suas

perspectivas relativamente à implementação de tarefas de investigação matemática num dos programas de Matemática do ensino secundário.

Ao nível dos alunos seria interessante surgirem estudos que avaliassem, no ensino secundário, os processos matemáticos envolvidos durante a realização de uma investigação matemática no ensino secundário.

Bibliografia

- Anderson, J. (1990). Coin-turning: Anatomy of an investigation. *Mathematics Teaching*, N^os 131-132, 8-11 and 38-42
- Amorim, I. e Matos, J. F. (1990). As actividades Investigativas em Matemática: Porquê, Para quê, Como? *Actas ProfMat90, vol. I* (p. 155-171). Caldas da Rainha: APM
- Ball, D. L. e McDiarmid, G. W. (1990). The subject-matter preparation of teachers. Em W. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 437-449). Nova Iorque: Macmillan.
- Bell, A. W. (1979). The learning of process aspects of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 10, 361-387.
- Bell, A. W., Costello, J., e Kucheman, D. (1981). *Research on learning and teaching*. Windsor: NFER-Nelson.
- Bishop, A., e Gofrre, F. (1986). Classroom organization and dynamics. Em B. Christiansen, A. G. Howson, e M. Otte (Eds), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8^o Ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Burns, R. (2000). *Introduction to Research Methods*. London: SAGE Publications
- Canavarro, A. P. (1993). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Três estudos de caso* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- César, M. (1997). *O papel da interacção entre pares e resolução de tarefas matemáticas.* (Col. Horizontes Pedagógicos, n^o 23). Lisboa: Instituto Piaget.

Christiansen, B., e Walther, G. (1986). Task and Activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cockcroft, W. H. (1981). *Mathematics counts*. Londres: HMSO.

Cohen, L., Manion, L. e Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*. Nova Iorque: Routledge.

Cunha, H. (1998). *Saberes profissionais de professores de Matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Davis, P. J. e Hersh, R. (1980). *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

Dias, P. (2002). Círculo de Estudos: Matemática B – 10º ano. *Educação Matemática* 67, 25.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no ensino Secundário. Processos usados pelos alunos em investigações matemáticas*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em Davis Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Londres: Falmer.

Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. Em P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs), *Investigações para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Fonseca, H. e Brunheira, L., (1995). Investigar na aula de Matemática. *Educação Matemática*, 35, 16-18.

Fonseca, H., Brunheira, L. e Ponte, J.(1999). Actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Actas do Profmat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.

Frobisher, L. (1994). Problems, Investigations and an Investigative Approach. Em A. Orton e G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* (pp. 150-173). Londres: Cassel.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Princeton University Press.

Holging, J. (1991). *The Investigations Book – A resource book for teachers of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Jorro, A. (2000). *L'enseignant et l'évaluation: Des gestes évaluatifs en question*. Bruxelles: De Boeck.

Kilpatrick, J. (1992). A History of research in Mathematics Education. Em D. A. Grows Ed., *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 3-38). Nova Iorque, NY: Macmillan.

Kissane, B. (1998). Mathematical investigation: Description, rationale and example. *Mathematics Teacher*, 81, 520-528.

Lappan, G. (1998). Teachers examining teaching. *News Bulletin*, 35 (4),3.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Lerman, S. (1989). Investigations: Where to Now? Em Paul Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 70-80). Nova Iorque, NY: Falmer Press.

Llinares, S. (1993). Aprender a Ensenar Matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y Entornos de Aprendizaje. Em L. Montero e J. Vez (Eds), *Las Didácticas*

Específicas en la Formación del profesorado (pp. 377-407). Santiago: Tórculo Edicions.

Love, E. (1996). Avaliando a actividade matemática. Em P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs), *Investigar para aprender Matemática: Textos seleccionados*. (pp. 89-105). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, 91 (1), 14-19.

Mason, J. (1996). Resolução de problemas matemáticos no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios. Em P. Abrantes, L. C. Leal, e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 73-88). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Matos, J. F. (1991). *Logo na Educação Matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Projecto MINERVA, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

ME (2001). *Programa de Matemática B – 10º Ano*. Lisboa: ME

Menino, H. (2004). *Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do Ensino Básico*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Menino, H. e Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática: O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do Ensino Básico. *Actas do XV SIEM* (pp. 271-291). Lisboa: APM.

Mendes, E. (1998). Actividades investigativas em matemática escolar. *Educação Matemática* 68,43-44.

Merriam, S. (1988). *Case Study Research in Education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Nunes, C. (2005). *A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da Matemática*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Oliveira, H. (1998). Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. *Revista Quadrante*, 7 (2), 71-78.

Oliveira, H., Ponte, J., Santos, L, e Brunheira, L. (1999). Os professores e as Actividades de Investigação. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (Eds), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Pardala, A. (1997). Theoretical and practical aspects of the interactions in teaching mathematics at school. Em P. Abrantes, J. Porfirio e M. Baía (Org.), *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESES.

Patton, M. (1987). *How to Use Qualitative Methods in Evaluation*. Newbury Park: Sage Publications.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problems". Em E. Pehkonen (Ed.), *Use of open-ended problems in mathematics classroom* (pp. 7-11). Helsinki: Department of Teacher Education, University of Helsinki

Perrenoud, Ph. (1996). *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. (3ª edição). Paris: ESF.

Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projecto de investigação-acção* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*: Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P., e Carreira, S. (1991). Spreadsheet and investigational activities: A case study of an innovative experience. Em J. P. da Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds), *Mathematical problem solving and new information Technologies: Research in contexts of practice* (pp. 301-312). Berlim: Springer.

Ponte, P. e Matos, J. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. Em P. Abrantes, L. Leal, e J. P. Ponte (EDS), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-137). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., e Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. Lisboa: DES do ME.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H., e Varandas, J. M. (1998). Investigating mathematical investigations. Em P. Abrantes, J. Porfirio, e M. Baía (Eds), *Proceedings of the CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., e Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., e Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7(2), 41-70

Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. e Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. Em P. Abrantes, J. Porfirio e M. Baía (Orgs). *Proceeding of CIEAEM 49* (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L. e Oliveira, H. (1999). *A relação professor- aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto Matemática para Todos e APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., e Abrantes, P. (1999). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H. e Varandas, J.M., (2001). *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. Lisboa: Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 2, 93-169.

Porfírio, J., e Oliveira, H. (1999). Professores, investigação e Inovação Curricular em Matemática. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (Eds), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 215-226). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ridgway, J. (1988). *Assessing mathematical attainment*. Windsor: NFER-Nelson.

Roldão, M. C. (1998). Currículo: Um processo de construção, gestão e formação reflexiva centrado na escola. Em G. Cebola e M. Pinheiro (Eds), *Desenvolvimento curricular em Matemática* (pp. 31-39). Portalegre: SEM-SPCE.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. e Rosendo, A. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. Em J. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, e A. Dionísio (Orgs). *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 83-106). Lisboa: SPCE.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? Em P. Abrantes e F. Araújo (Coord), *Avaliação das aprendizagens das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação e DEB.

Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-27). Lisboa:APM.

Schoenfeld, A. (1991). What's all the fuss about problem solving? *ZDM*, 1, 4-8.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? Em P. Abrantes, L. C. Leal, e J. P. Ponte (Eds), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Serrazina, L. (1995). Ensinar/Aprender Matemática. *Actas do ProfMat95* (pp. 33-41). Lisboa: APM.

Silva, A., Veloso, E., Porfirio, J., e Abrantes, P. (1999). O Currículo de Matemática e as Actividades de Investigação. Em P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, e L. Brunheira (Eds), *Investigações matemáticas na aula e no curricul.* (pp. 69-85). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Varandas, J. (2000). *Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).Lisboa:APM.

Varandas, J. M. (2003), Avaliação da actividade investigativa: Uso de uma tabela de descritores. *Educação Matemática* 73, 74-78.

Vial, M. (2001). *Se former pour évaluer: Se donner une problématique et élaborer dès concepts*. Bruxelles: De Boeck.

Yin. R. (1989). *Case Study Research: Design and Methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Sites

www.min_edu.pt (programa do 10º ano de escolaridade Matemática B)
(consultado em Dezembro de 2004)

www.ia.fc.ul.pt

www.ipv.pt/millennium/17_ect8.htm

ANEXOS

Anexo 1 - Guião da primeira entrevista ao professor

1) Percurso pessoal e conhecimento de si

- Idade
- Formação académica
- Anos de serviço/níveis leccionados (básico e secundário)
- Cargos desempenhados
- Razões que o levaram a ser professor de Matemática
- Experiências significativas como profissional
- Qual o papel do grupo disciplinar?
- Quais os principais traços que o caracterizam como professor?
- Do trabalho que desenvolve como professor, que aspectos lhe dão mais ou menos prazer?
- Razões que o levam a participar neste projecto.
- O que espera pessoalmente desta experiência?

2) A aula

- Que tarefas propõe habitualmente aos alunos e porquê?
- Ambiente privilegiado
 - Formas de trabalho dos alunos
 - Papel do professor
 - Papel do aluno
 - Recursos utilizados
- O que é para si uma boa aula de Matemática?

3) Preparação das aulas

- O que faz normalmente para preparar as aulas?
- Que tipo de tarefas selecciona e o que tem em conta na selecção das tarefas?
- Quais os recursos utilizados na selecção das tarefas?
- Qual a importância que dá ao programa?
- Qual a importância que atribui ao trabalho colaborativo?
- Quais as dificuldades que sente na selecção e planificação das tarefas?

4) Currículo Mat B

- Que tipo de tarefas acha que devem ser valorizadas no currículo de Mat B?
- Quais as vantagens e/ou desvantagens que vê no desdobramento da Matemática, em Mat A, Mat B e MACS?
- Do seu ponto de vista, de que modo o currículo de Mat B poderá ou não contribuir para o desenvolvimento de competências vocacionadas para o exercício de uma futura profissão?

5) Investigações matemáticas

- O que entende por uma investigação matemática? Exemplo.
- Relate uma experiência pessoal.
- Qual a sua pertinência e a que objectivos do ensino corresponde?
- Que papel lhes atribui na aprendizagem dos alunos?
- As tarefas de investigação matemática integram-se no actual programa de Mat B?
- Como integra na sua prática lectiva diária tarefas de investigação matemática na sala de aula?
- Que dificuldades se levantam a si na elaboração, na recolha, na implementação e na avaliação de tarefas de investigação matemática nas aulas de Matemática?
- Quais os conteúdos do programa de Mat B que melhor se adaptam à implementação de tarefas de investigação matemática?
- Quais as dificuldades com que se confronta quando implementa tarefas de investigação matemática na sala de aula, no que respeita à aceitação desse facto pelos alunos e pelo grupo de Matemática?
- As planificações anuais elaboradas na sua escola prevêm a implementação de investigações matemáticas? Porquê?
- Considera que o cumprimento do programa inclui implementação de investigações matemáticas nas aulas?
- Que papel assume durante as aulas de implementação de investigações matemáticas?
- Do seu ponto de vista, pensa que as tarefas de investigação matemática se integram no curso de Artes Visuais e no projecto educativo de escola?

- De que modo a implementação de tarefas de investigação matemática pode desenvolver competências profissionais?
- De que modo faz a avaliação dos trabalhos e processos desenvolvidos pelos seus alunos durante e após a implementação de investigações matemáticas?
- Como vê o uso da tecnologia em Matemática quando implementa tarefas de investigação matemática?

Anexo 2 - Guião da primeira entrevista aos alunos

1) A Matemática

- Qual a importância que dás à Matemática e porquê?
- O que gostas mais e menos de fazer em Matemática?
- Quais as tuas dificuldades na disciplina de Matemática?
- Como é que costumavas estudar?
- Achas que as tuas notas correspondem ao esforço que fazes e ao que sabes?
- O que é para ti saber Matemática?

2) Escolha do agrupamento e curso

- O que te levou a escolher um curso de Artes Visuais?
- Quais as tuas expectativas relativamente ao curso de Artes Visuais?

3) A aula

- Costumas participar nas aulas de Matemática? Porquê?
- Quais os recursos que usas (quer na aula quer em casa)?
- Como é que preferes trabalhar: sozinho, aos pares ou em grupo?
- Que tipo de aulas de Matemática esperas e gostarias de ter, tendo em conta o curso de Artes Visuais que escolheste?

4) Currículo de Mat B

- Na tua opinião, quais as vantagens e/ou desvantagens no desdobramento da Matemática em Mat A, Mat B e MACS?
- De que modo se poderá integrar no currículo do curso de Artes Visuais?
- O que esperas aprender com a disciplina de Mat B?

5) Tarefas/Investigações matemáticas

- Que tipo de tarefas costumavas fazer nas aulas de Matemática?
- O que entendes por investigações matemáticas?
- Já realizaste investigações matemáticas? Se sim, dá um exemplo e relata a tua experiência.
- Gostas mais de as resolver individualmente ou trocar opiniões com os teus colegas?
- De que modo, pensas que as investigações matemáticas poderão contribuir para a tua aprendizagem e para o desenvolvimento de competências profissionais no curso de Artes Visuais?
- Na tua opinião, qual o papel que o professor deve assumir nessas aulas?
- Qual o papel que pensas assumir durante a implementação das investigações matemáticas?
- De que modo vês o uso da tecnologia nas aulas de Matemática, quando implementadas investigações matemáticas?

	Anexo 3	TABELA DE	DESCRITORES		
	Nível 4	Nível 3	Nível 2	Nível 1	Nível 0
Conhecimento Matemático	Mostra compreender os conceitos e princípios matemáticos envolvidos na situação. Usa terminologia e notação apropriada. Utiliza representações adequadas. Executa completa e correctamente algoritmos.	Mostra compreender conceitos e princípios matemáticos da situação. Usa quase correctamente a terminologia e notação apropriada. Utiliza representações correctas mas não muito adequadas. Executa completamente algoritmos. Os cálculos estão na generalidade correctos mas podem conter erros menores.	Mostra compreender alguns dos conceitos e princípios matemáticos da situação. A resposta pode ter erros computacionais. Utiliza representações com algumas incorrecções.	Mostra uma compreensão muito limitada dos conhecimentos e princípios matemáticos da situação. Pode trocar ou falhar no uso dos termos matemáticos. A resposta pode ter graves erros computacionais.	Mostra não compreender os conceitos e princípios matemáticos da situação.
Comunicação	Pode usar informação exterior relevante de uma natureza formal ou informal. Identifica os elementos importantes da situação mostrando compreensão de relações entre eles. Formula questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. Formula e testa conjecturas. A procura de soluções é feita de uma forma organizada e sistemática.	Pode usar informação exterior relevante de uma natureza formal ou informal. Identifica elementos importantes da situação mostrando compreensão de relações entre eles. Formula algumas questões que orientam/viabilizam uma estratégia de investigação. Formula conjecturas. A procura de soluções é feita de uma forma organizada e sistemática.	Pode usar informação exterior com alguma relevância. Identifica alguns elementos importantes da situação mas mostra uma compreensão limitada de relações entre eles. É identificável a procura de soluções mas este processo pode estar incompleto ou pouco sistematizado.	Informação exterior, quando usada, é irrelevante. Não identifica elementos importantes da situação nem relações entre eles. Pode reflectir uma estratégia inapropriada. O processo de procura de soluções está incompleto ou é difícil de identificar.	O trabalho relatado, se existente, é inadequado e/ou irrelevante.
Processos	Apresenta uma resposta completa com uma clara e não ambígua descrição ou explicação. Pode incluir diagramas elucidativos e apropriados. Comunica de modo eficaz. Apresenta argumentos fortes e lógicos. Pode incluir exemplos e contra-exemplos.	Apresenta uma resposta completa com uma razoável e não ambígua descrição ou explicação. Pode apresentar diagramas apropriados. Em geral comunica eficazmente. Apresenta argumentos que podem conter pequenas imperfeições.	Apresenta uma resposta satisfatória mas a descrição ou explicação pode ser por vezes ambígua ou pouco clara. Pode incluir diagramas pouco claros ou precisos. A comunicação pode ser por vezes vaga ou de difícil interpretação. Os argumentos podem ser incompletos ou baseados em premissas pouco importantes.	Apresenta alguns elementos satisfatórios omitindo partes significativas da resolução ou contendo incorrecções. Pode incluir diagramas que representam de uma forma incorrecta a situação, pouco claros ou de difícil interpretação. A explicação ou descrição pode não existir ou ser de difícil leitura.	Comunica de forma ineficaz. Pode integrar desenhos que não representam de todo a situação.

<p>2005/2006 Matemática B – 10º Ano</p>	<p>Anexo 4 - 1ª Investigação matemática – Influência de vários parâmetros no comportamento da função quadrática com a calculadora gráfica</p> <p>Objectivos: Relacionar os coeficientes, zeros e o vértice da função quadrática Compreender de que forma a variação dos coeficientes transforma o gráfico.</p>
<p>Nome: _____ Nº _____</p> <p>Turma: _____ Data _____</p>	

Nesta actividade vais investigar com a calculadora gráfica a influência de vários parâmetros no comportamento de funções do 2º grau no que se refere a:

- Gráfico
- Contradomínio
- Número de zeros
- Sinal da função
- Concavidade
- Vértice

Em cada uma das tarefas seguintes que vão conduzir a tua investigação, ser-te-ão postas outras questões específicas de cada situação mas não te esqueças que as iniciais constituirão a linha condutora.

No final da tua investigação terás que elaborar um relatório individual que terá a ter em conta os seguintes aspectos:

- Título
- Objectivo do trabalho
- Materiais utilizados
- Descrição do processo, das tentativas realizadas e conjecturas abandonadas por se tornarem falsas e dificuldades sentidas
- Conclusões
- Questões que tenham surgido ao longo da investigação e que queiras estudar ou ver esclarecidas
- Bibliografia

Tarefa I

- 1) Como é que a variação do parâmetro a afecta os gráficos da família de funções definida por $y = ax^2$ ($a \in R/\{0\}$)
- 2) Qual é o vértice do gráfico de funções definidas pela família de funções $y = ax^2$ ($a \in R/\{0\}$)?

Tarefa II

Considera a família de funções definida por $y = ax^2 + c$ ($a, c \in R/\{0\}$)

- 1) Como é que a variação dos parâmetros a e c afecta os gráficos da família de funções?
- 2) Qual é o vértice do gráfico de funções definidas pela família de funções $y = ax^2 + c$ ($a, c \in R/\{0\}$)?

Tarefa III

Considera a família de funções definida por $y = ax^2 + bx$ ($a, b \in R/\{0\}$)

- 1) Como é que a variação dos parâmetros a e b afecta os gráficos da família de funções?
- 2) Para esta família de funções indica os zeros
- 3) Que relação existe entre b e a primeira coordenada do vértice?
- 4) Como obter a segunda coordenada do vértice a partir de b ?

2005/2006 Matemática B – 10º Ano Nome: _____ Nº ____ Turma: _____ Data _____	Anexo 5- 2ª Investigação matemática – O repuxo Objectivos: Relacionar conteúdos matemáticos com o real Utilizar a tecnologia gráfica para investigar problemas da vida real relacionados com a função quadrática
---	---

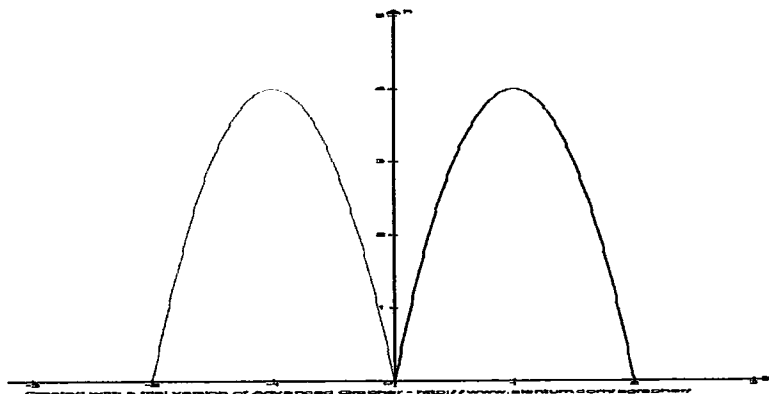
No final da tua investigação terás que elaborar um relatório individual que terá a ter em conta os seguintes aspectos:

- Título
- Objectivo do trabalho
- Materiais utilizados
- Descrição do processo, das tentativas realizadas e conjecturas abandonadas por se tornarem falsas e dificuldades sentidas
- Conclusões
- Questões que tenham surgido ao longo da investigação e que queiras estudar ou ver esclarecidas
- Bibliografia

Tarefa

A uma turma do 10º ano de Artes Visuais foi pedido que elaborassem um projecto visando a criação de um repuxo no pátio central da escola.

Na figura seguinte está simulado um repuxo de água semelhante ao que foi pedido à turma e, a água parece descrever uma trajectória com a forma de uma parábola. Foi relacionada a altura (h) da água com a distância (r) alcançada na horizontal pela água.



Uma aluna da turma, a Mariana, resolve investigar que tipo de função se trata e, relativamente ao repuxo da esquerda ela pensou nas seguintes dimensões:

- A altura máxima atingida pela água é de 4 metros;
 - A distância alcançada na horizontal pela água é, aproximadamente, de 2 metros
- Com ajuda da tua calculadora gráfica ou com o programa Advanced Grapher, investiga as seguintes questões e regista todas as tuas conjecturas, experiências e conclusões. Apresenta todos os gráficos que achares convenientes para justificares as tuas respostas.
- 1) Ajuda a Mariana a determinar a expressão que define a função que dá a trajectória da água (h), em função da distância alcançada (r).
 - 2) Define, para a parábola da direita, h em função de r .
 - 3) Se no pátio central da escola existisse um poste de madeira e se a este estivesse presa uma argola, cujo centro dista do chão 8 metros, que repuxo poderias obter se este passasse pelo centro da argola e tivesse o mesmo raio de alcance do repuxo inicial?
 - 4) No pátio central da escola foi construído um pequeno jardim. Para que se possa aproveitar água e para que o jardim seja frequentemente regado, os alunos de Artes Visuais resolveram projectar um novo repuxo cujo raio de alcance chegasse ao centro do jardim. Que repuxo irias obter se este tivesse a mesma altura do repuxo inicial e se o raio de alcance ao centro do jardim fosse 8 metros?

<p>2005/2006 Matemática B – 10º Ano</p> <p>Nome: _____ Nº _____</p> <p>Turma: _____ Data _____</p>	<p>Anexo 6- 3ª Investigação matemática – <i>Uma investigação com funções cúbicas e a calculadora gráfica</i></p> <p>Objectivos: Compreender que a variação dos coeficientes t transforma o gráfico Utilizar a calculadora gráfica como ferramenta auxiliar numa investigação matemática</p>
--	---

Nesta actividade vais investigar com a calculadora gráfica a influência de vários parâmetros no comportamento de funções do 3º grau no que se refere a:

- Gráfico
- Contradomínio
- Número de zeros
- Monotonia
- Continuidade

Em cada uma das tarefas seguintes que vão conduzir a tua investigação, ser-te-ão postas outras questões específicas de cada situação mas não te esqueças que as iniciais constituirão a linha condutora.

No final da tua investigação terás que elaborar um relatório individual que terá a ter em conta os seguintes aspectos:

- Título
- Objectivo do trabalho
- Materiais utilizados
- Descrição do processo, das tentativas realizadas e conjecturas abandonadas por se tornarem falsas e dificuldades sentidas
- Conclusões
- Questões que tenham surgido ao longo da investigação e que queiras estudar ou ver esclarecidas
- Bibliografia

Tarefa

1) Faz um estudo da função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Para isso:

- a) estuda $y = x^3$ e $y = -x^3$, verifica nomeadamente o número de zeros, monotonia, domínio, contradomínio, continuidade, etc...
- b) estuda $y = (x - 2)^3$ e $y = x^3 + 2$
- c) experimenta depois $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, nos rectângulos de visualização

$$[-10,10] \times [-10,10]$$

$$[-3,3] \times [-3,3]$$

- 2) Tenta fazer conjecturas sobre os possíveis aspectos do gráfico de uma função definida por um polinómio do 3º grau.
- 3) Faz um estudo organizado fazendo variar cada um dos coeficientes a , b , c e d separadamente. Atribui valores positivos e negativos, inteiros e fraccionários, valores grandes e próximos de zero.
- 4) Regista de forma cuidada os esboços dos gráficos, as tuas conjecturas, as tuas conclusões.
- 5) Compara o teu estudo com os dos teus colegas.

2005/2006 Matemática B – 10º Ano	Anexo 7- 4ª Investigação matemática – O novo ginásio da escola
Nome: _____ Nº ____	Objectivos: Relacionar conteúdos matemáticos com o real Utilizar a calculadora gráfica como ferramenta auxiliar numa investigação matemática
Turma: _____ Data _____	

No final da tua investigação terás que elaborar um relatório individual que terá a ter em conta os seguintes aspectos:

- Título
- Objectivo do trabalho
- Materiais utilizados
- Descrição do processo, das tentativas realizadas e conjecturas abandonadas por se tornarem falsas e dificuldades sentidas
- Conclusões
- Questões que tenham surgido ao longo da investigação e que queiras estudar ou ver esclarecidas
- Bibliografia

Tarefa

A uma turma do 10º ano de Artes Visuais foi pedido que elaborassem um projecto visando a criação de um novo ginásio na escola.

O ginásio terá que ter a forma duma caixa rectangular de secção quadrada, sendo o telhado um prisma triangular. A altura do ginásio são 20 metros no seu ponto mais alto, e a soma do comprimento com a largura do edifício não pode ultrapassar os 100 metros.

Quais as dimensões do comprimento e da largura que permitam que todo o espaço interior (volume) seja máximo?

Anexo 8 - Guião da última entrevista ao professor

1) Conhecimento de si

- Que transformações sentiste em ti ao longo da implementação das investigações matemáticas?
- Que opinião tens sobre o trabalho desenvolvido neste projecto? Que aspectos te deram mais e menos prazer?
- O conhecimento matemático e didáctico proporcionado pela licenciatura, pós-graduação e experiência profissional mostrou-se adequado na implementação das investigações matemáticas?

2) A aula

- O que pensas do ambiente de aula criado em torno das investigações matemáticas?
- O trabalho em grupo e em grande grupo (na fase de discussão) foi uma constante nestas aulas. Pareceu-te que é a forma ideal de organização dos alunos? Será que neste tipo de aulas há lugar para o trabalho individual?
- O que entendes e o que é para ti uma boa aula de Matemática?

3) Preparação das aulas

- Que aspectos achas que o professor deve ter em conta na escolha/adaptação ou construção de tarefas de investigação matemática?
- Na tua opinião e tendo em conta esta experiência que aspectos se deve ter em conta na planificação destas aulas?
- Quais as maiores dificuldades que sentiste na selecção, planificação e introdução das investigações matemáticas?

4) Currículo Mat B

- Com a experiência deste ano, leccionando o 10º ano de Mat. B, como te sentiste a gerir o programa?
- Na tua opinião, achas que este tipo de tarefas podem ser valorizadas no currículo de Mat. B?

- Do teu ponto de vista, achas que este tipo de aulas, diferentes das aulas tradicionais, proporcionou aos alunos outra visão da matemática?
- Tendo em conta o currículo de Mat. B e as investigações matemáticas, de que modo o currículo de Mat B e as investigações matemáticas contribuíram ou não para o desenvolvimento de competências vocacionadas para o exercício de uma futura profissão?
- Se voltares a leccionar de novo o 10º ano de Mat. B, que alterações lhe introduzirias?
- Na tua opinião, qual o papel das investigações matemáticas no currículo dos alunos tendo em conta o exame final?

5) Investigações matemáticas

- Neste momento, o que entendes por uma investigação matemática?
- Quais as primeiras impressões acerca das tarefas de investigação matemática que te foram apresentadas para implementar nas aulas? Porquê?
- Quais as principais dificuldades que as tarefas de investigação te suscitaram? E aos alunos? Qual o papel que desempenham os conhecimentos e concepções deles nessas dificuldades?
- Durante as aulas de investigação matemática quais foram as tuas maiores preocupações?
- Como pensas enfrentar outros aspectos de inovação nas aulas, sejam investigações ou não?
- O que aprendeste sobre a realização de aulas de investigação matemática surge provavelmente de várias fontes – experiência das aulas, leituras, etc... Qual foi o contributo de cada uma?
- Consideras que o cumprimento do programa inclui implementação de investigações matemáticas nas aulas?
- Os conteúdos trabalhados nas investigações matemáticas apresentadas, de que modo se adaptaram à implementação destas tarefas?
- Houve alguma alteração no papel que adoptaste ao longo da implementação das investigações matemáticas? Que importância lhe atribues?
- Na tua opinião e, tendo em conta as tarefas apresentadas, pensas que estas se integram no curso de Artes Visuais e no projecto educativo de escola?
- Como vês o uso da tecnologia em Matemática quando implementas tarefas de investigação matemática?
- Avaliação das tarefas de investigação matemática: como a fizeste e que sugestões propões?
- Que dilemas te foram levantados pela implementação de tarefas de investigação nas aulas de Matemática?
- Relativamente às quatro investigações matemáticas apresentadas, faz um balanço comparativo entre estas e indica vantagens/desvantagens na sua implementação.
- Vês-te a realizar investigações matemáticas no futuro? Porquê?

Anexo 9 - Guião da última entrevista às alunas

1) A Matemática

- Qual a importância que dás à Matemática e porquê?
- O que gostas mais e menos de fazer em Matemática?
- Quais as tuas maiores dificuldades na disciplina de Matemática?
- Achas que as tuas notas correspondem ao esforço que fazes e ao que sabes?
- O que é para ti saber Matemática?

2) A aula

- Costumas participar nas aulas de Matemática? Colocas questões ao professor?
- Como é que preferes trabalhar: sozinho, aos pares ou em grupo?
- Tendo em conta o Curso de Artes Visuais, as aulas que tens tido correspondem ao que esperavas e gostarias de ter?

3) Currículo de Mat B

- Na tua opinião, quais as vantagens e/ou desvantagens no desdobramento da Matemática em Mat A, Mat B e MACS?
- Achas que o currículo de Mat. B se integra no currículo do curso de Artes Visuais?
- O que aprendeste até agora com a disciplina de Mat. B correspondeu às tuas expectativas iniciais?

4) Tarefas/Investigações matemáticas

Durante este ano foi-te proposto a realização de investigações matemáticas.

- O que pensas desta iniciativa na disciplina de Matemática B? Despertou-te interesse? Deu-te prazer? É apropriada nesta disciplina? Que capacidades pensas que desenvolve? O que aprendeste?
- Neste momento, o que entendes por investigações matemáticas?
- Os recursos que tinhas à disposição foram úteis e suficientes?
- Que dificuldades sentiste?
- Este tipo de tarefas de investigação matemática, representou para ti alguma inovação, na investigação, realização ou apresentação?
- Embora em grupo, desenvolveste, na maior parte do tempo, o trabalho individualmente ou em grupo? O que te parece mais adequado e porquê?
- Gostas deste tipo de tarefas? Descobriste algumas relações? Sentiste a fazer matemática?
- Achas que tem interesse para aprender matemática? Que capacidades desenvolvem?
- Tiveste dificuldades? Ficaste perdida sem saber o que fazer? Encontraste caminhos que te levaram à descoberta?
- Como pensas que deveriam ser exploradas na aula?
- De que modo, pensas que as investigações matemáticas poderão contribuir para a tua aprendizagem e para o desenvolvimento de competências profissionais no curso de Artes Visuais?
- Na tua opinião, o que pensas do papel assumido pelo professor?
- O que pensas do papel que assumiste durante a implementação das investigações matemáticas?
- De que modo vês o uso da tecnologia nas aulas de Matemática, quando implementadas investigações matemáticas?
- Relativamente a cada investigação matemática:
 - Precisaste de apoio? De que tipo?
 - O que estas investigações matemáticas representaram para ti?
 - O tempo dado foi suficiente?
 - Faz um balanço comparativo entre cada tarefa e refere aspectos que mais te cativaram e porquê? Que contributos pensas que cada uma delas deu para a tua aprendizagem?
- Faz um pequeno comentário sobre o que mais e menos te agradou ao longo destas aulas.
- Faz uma comparação entre este tipo de aulas de implementação de investigações matemáticas e as outras aulas de Matemática (expositivas e de exercícios).
- Gostavas de realizar mais investigações matemáticas no futuro?