UNIVERSIDADE DE ÉVORA

ESCOLA DE CIÊNCIAS SOCIAIS

Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica

Dissertação

A utilização do quadro interativo no ensino da Matemática: Um Estudo de Caso no 10.º Ano

Paulo José da Silva Veiga

Orientadora:
Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2013

Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica

Dissertação

A utilização do quadro interativo no ensino da Matemática: Um Estudo de Caso no 10.º Ano

Paulo José da Silva Veiga

Orientadora:
Professora Doutora Ana Paula Canavarro

Resumo

A utilização do quadro interativo no Ensino da Matemática Um Estudo de Caso no 10.ºAno

A integração das Tecnologias de Informação e Comunicação no processo de ensino aprendizagem promove novas formas de aprender, de ensinar e de pensar. O emergir de novos ambientes dinâmicos na educação propícia a que os intervenientes assumam novos papéis e encarem a aula de Matemática sob uma perspetiva diferente.

O presente estudo tem como objetivo compreender as implicações do uso da tecnologia, em especial do quadro interativo, na dinâmica da aula de Matemática que explora tarefas de natureza diversificada.

A abordagem metodológica adotada é qualitativa, de cariz interpretativo, tendo como modalidade de investigação o estudo de caso e utilizando como instrumentos de recolha de dados, a observação, com registo em áudio e vídeo na sala de aula e a recolha documental (em papel e em ficheiros informáticos).

A experiência de ensino que constitui o contexto do presente estudo desenvolveu-se numa turma de 10.º ano de escolaridade. A sequência de seis tarefas apresentada aos alunos privilegia a utilização do quadro interativo na sala de aula acoplado com outras ferramentas tecnológicas, tais como, *Geogebra*, *applets*, *TI-SmartView*. As tarefas propostas estão integradas no tema Geometria I e Funções, as quais foram faseadas em quatro momentos de realização: a apresentação, o trabalho em grupo dos alunos, a discussão coletiva e síntese.

Da análise dos dados obtidos conclui-se que a integração do QI na sala de aula monitorizado com *softwares* adequados, torna as aulas mais dinâmicas, interativas, promovendo um maior envolvimento dos alunos na sua aprendizagem, o que permite um aumento das interações entre alunos, uma maior dinâmica da aula proporcionando desta forma a discussão coletiva. A interação promovida na sala de aula pode melhorar a comunicação matemática quando da fase da discussão/síntese.

Palavras-Chave: Tecnologias no ensino da Matemática; quadro interativo; matemática; interatividade.

Abstract

The use of the interactive whiteboard in Mathematics Teaching
A case study in 10th grade

The integration of Information and Communication Technologies (ICT) in the teaching and learning process promotes new ways of learning, teaching and thinking.
The appearance of new dynamic environments in education, leads those who are part of the process, to take on new roles and face the mathematics classroom under a different perspective.
This study aims to understand the implications of the use of technology, mainly the interactive whiteboard, in the Mathematics class , where diverse tasks are explored.
The methodological approach adopted is qualitative, interpretive-oriented, using the case study as a research mode. The tools used to collect data were, not only the observation together with audio and video record in the classroom, but also the gathering of documents (in paper and files computer). The teaching experience, which is the main context of this study, was developed in a 10^{th} grade class of a secondary school. Six tasks were presented to the students favoring the use of the interactive whiteboard in the classroom together with other technological tools, such as Geogebra, *applets*, *TI-SmartView*. The proposed tasks are integrated in the theme "Geometry I and Functions" and they were divided into four moments: the presentation, the students' group work, collective/class discussion and synthesis. Analyzing the data obtained, it was concluded that the integration of the Interactive Whiteboard in the classroom, together with its monitorization with the appropriate software, makes lessons more dynamic and interactive, encouraging a greater involvement of the students in their learning, which allows an increase of the interactions among students, a greater classroom dynamics thus providing the collective discussion. The interaction promoted in the classroom can improve mathematical communication in the phase of discussion / synthesis.

Keywords: Technology in mathematics teaching; interactive whiteboard; mathematics; interactivity.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pela forma disponível, rigorosa e interessada com que orientou este trabalho, e especialmente pelas sugestões e comentários tecidos ao longo das várias fases.

Aos alunos envolvidos no estudo que se mostraram, desde logo, motivados e prontos a colaborar.

À minha esposa Carla pelo incentivo e apoio em todos os momentos.

Às minhas filhas, Filipa e Margarida, pela alegria, força e inspiração que me deram para a concretização do estudo, a quem tive de dedicar menos tempo e atenção.

Aos meus amigos e familiares pela paciência demonstrada e pelo tempo que tive de abdicar para realizar a presente dissertação.

Índice

Capítulo I 1

Introdução 1

Motivação e pertinência da investigação 1

Objetivo e questões da investigação 4

Estrutura da dissertação 5

Capítulo II 6

Tecnologia no Ensino/Aprendizagem da Matemática 6

O que muda na sala de aula 7

Desafios e potencialidades 7

Da aula tradicional aos atuais desafios para a aprendizagem 13

Papel do professor e do aluno 14

O papel das tarefas 17

Ambiente dinâmico na sala de aula 20

O conceito de interatividade 22

Recursos tecnológicos no ensino da Matemática 25

Quadro interativo no ensino 25

Software dinâmico e interativo específico da Matemática 30

Ambientes de Geometria Dinâmica 31

GeoGebra 33

Sketchpad 34

Emuladores de calculadoras gráficas 34

Applets 35

A Tecnologia no Currículo de Matemática 38

As orientações do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).... 38

As orientações da Associação de Professores de Matemática (APM) 40

As orientações do Currículo Nacional do Ensino Básico 41

As tecnologias e a sua preconização nos currículos oficiais de Matemática atualmente em vigor 41

Capítulo III 45

Metodologia de Investigação 45

Opções metodológicas 45

Investigação qualitativa 46

Investigação sobre a própria prática 48

Estudo de caso.. 49

Participantes 50
A escola e o meio envolvente 50
A turma 51
Os grupos 52
A intervenção didática 55
O tema e as tarefas 55
Organização da intervenção 61
A estrutura e dinâmica de aula 62
Recolha de dados 63
Instrumentos de recolha de dados 63
Observação de aulas 64
Produtos realizados pelos alunos 64
Análise de dados 65
Capítulo IV 66
A turma e a aula com o Quadro Interativo 66
Tarefa 1 - Distribuição do gás 66
Tarefa 2 - Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$ 70
Tarefa 3 - Interpretação do declive 73
Tarefa 4 - À procura de um modelo 76
Tarefa 5 - Efeitos da variação de parâmetros *a*, *h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ 80
Tarefa 6 - Como varia o volume das caixas 89
Capítulo V 94
Conclusão 94
Recordando o objetivo de estudo 94
Conclusões 95
Que implicações traz o QI ao nível da estrutura da aula, em especial, na discussão e síntese? 95
Que implicações traz o QI ao nível do papel dos alunos e do professor na construção do conhecimento matemático? 97
Que implicações traz o QI ao nível das interações/comunicação entre alunos e alunos e professor? 99
Considerações finais 101
Referências bibliográficas 103
ANEXOS 111

Índice de anexos

ANEXO I ……………………….……………………………………………………… 112

ANEXO II ..……………………..…………………………………………………… 113

ANEXO III …………………………………………………………………….. 114

ANEXO IV …………………………………………………………………….. 115

ANEXO V ..……………………..…………………………………………………… 117

ANEXO VI ………………………..…………………………………………………… 119

ANEXO VII ..…………………………………………………………………….. 120

ANEXO VIII …………………………………………………………………….. 121

Índice de Figuras

Figura 1: Applet para explorar a função quadrática ……………………………..……. 36

Figura 2: Applet criado com o Geogebra para explorar a função afim ………..…. 37

Figura 3: Applet criado com o Geogebra para explorar a função quadrática …..… 37

Figura 4: Sala de aula com QI ……………………………………………………. 55

Figura 5: Marcação das coordenadas dos pontos no Geogebra ....……………….. 68

Figura 6 : Representação da mediatriz ………………………….……………….. 69

Figura 7 : Representações do grupo 1 ……….....………………………………… 71

Figura 8 : Representações do grupo 6 ………..…..……………………………… 72

Figura 9 : Resolução do grupo 4 ……..…………..……………………………… 74

Figura 10 : Resolução do grupo 6 ..……………...…..…………………………… 74

Figura 11 : Resolução do grupo 2 ..……………...…..…………………………… 74

Figura 12 : Resolução do grupo 5 ……………….…..…………………………… 74

Figura 13 : Resolução do grupo 4 ……………….…..…………………………… 75

Figura 14 : Applet para interpretação do declive ……….……………….…..……… 75

Figura 15 : Representação gráfica obtida pelo grupo 3 ...………………………… 77

Figura 16 : Representação gráfica obtida pelo grupo 3 …………..…...…………… 78

Figura 17 : Representação gráfica obtida pelo grupo 4 ………………….…..……… 78

Figura 18 : Representação gráfica obtida pelo grupo 5 ……………….…..………… 79

Figura 19 : Resposta do grupo 6 ...………………..……………………………… 79

Figura 20 : Resposta do grupo 3 ...………………..……………………………… 79

Figura 21 : Resposta do grupo 4 ...………………..……………………………… 81

Figura 22 : Resposta do grupo 6 ...………………..……………………………… 82

Figura 23 : Resposta do grupo 5 ...………………..……………………………… 82

Figura 24 : Resposta do grupo 6 ...………………..……………………………… 83

Figura 25: Resposta do grupo 2 ...………………..……………………………… 85

Figura 26: Resposta do grupo 1 ...………………..……………………………… 86

Figura 27: Resposta do grupo 4 ...………………..……………………………… 87

Figura 28: Applet - influência dos parâmetros, *a*, *h* e *k* na expressão do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ ……………………………………………………….... 88

Figura 29: Resolução do grupo 6 …....……………..……………………………… 90

Figura 30: Resolução do grupo 1 …....……………..……………………………… 91

Figura 31: Applet – Variância do volume em função de *x* ..…....…………….….. 92

Figura 32: Representação gráfica que relaciona $(x, V(x))$ ……....…………….….. 93

Figura 33: Esquema da apresentação/resolução da tarefa no QI …………………. 96
Figura 34: Esquema dos possíveis trajetos das interações realizadas …......……… 99

Índice de Tabelas

Tabela 1: Prática pedagógica tradicional vs. Prática pedagógica atual segundo Castilho …………………………………………………………………..... 13

Tabela 2: Novos e velhos papéis dos professores ………………….…………... 15

Tabela 3: Tecnologia não interativa e tecnologia interativa, segundo Bartolomé 23

Tabela 4: Distribuição dos alunos que participam no estudo por sexo e idade 51

Tabela 5: Classificação obtida no 1º período na disciplina de Matemática ....….... 51

Tabela 6 : Sistematização dos assuntos abordados em cada tarefa ..……………… 57

Tabela 7 : Calendarização da intervenção didática ……….……....……………… 61

Tabela 8 : Esquema da contribuição do QI na estrutura da aula ……….……....... 97

Capítulo I

Introdução

No presente capítulo apresento a investigação realizada no âmbito desta dissertação. Inicialmente são expostas as razões que motivaram o estudo, bem como a sua pertinência. Posteriormente é apresentado o objetivo e as questões da investigação, bem como a estrutura organizativa da dissertação.

Motivação e pertinência da investigação

Desde os meus tempos de estudante, até ser professor, que as novas tecnologias têm despertado em mim um desafio. Na sala de aula tento criar ambientes dinâmicos de modo a facultar aos alunos as mais variadas oportunidades de aprendizagem.

Deste modo, também os documentos de orientação curricular sugerem que o uso de *softwares* em conjunto com tarefas de carácter exploratório poderá ser uma das hipóteses para ultrapassar as dificuldades que os alunos mostram sentir ao longo dos tempos.

A principal motivação para este estudo prende-se com a minha atividade profissional como docente de Matemática. Desde sempre tenho tentado desempenhar esta atividade da forma que acredito ser melhor, procurando olhar para as minhas práticas e ponderar sobre as mesmas. O meu desejo por leituras relacionadas com as novas tecnologias ou especializadas relativamente a vários assuntos ou temas relacionados com a Educação Matemática permitiu-me realizar novas abordagens no processo de ensino/aprendizagem da Matemática.

A utilização das tecnologias em sala de aula é igualmente um aspeto que suscita o meu interesse há algum tempo. Ao longo da minha experiência profissional tenho constatado que o recurso às tecnologias, em todos os níveis de ensino revela-se vantajoso. Os alunos mostram maior interesse e envolvimento nas tarefas matemáticas assim como uma melhor aprendizagem dos conceitos matemáticos explorados através de ferramentas tecnológicas hoje disponíveis nas escolas.

Surgiu-me, então, interesse, enquanto professor, desenvolver uma investigação sobre a utilização do quadro interativo no Ensino da Matemática na sala de aula numa turma do 10.ºano de escolaridade. Com esta investigação espero contribuir para o meu próprio desenvolvimento pessoal e profissional e também suscitar reflexões e interrogações por parte de outros investigadores e professores.

À medida que cada vez mais professores aceitam, como inevitável, a necessidade de integrar as tecnologias de informação e comunicação (TIC) na sala de aula, cresce a oferta de uma panóplia de opções de apoio à planificação criativa e funcionalidade da sala de aula através da utilização dinâmica das novas tecnologias. Com a utilização das aplicações e ferramentas existentes, os professores têm possibilidade de criar aulas estimulantes, com materiais e ferramentas fáceis de utilizar, que influenciem os alunos positivamente.

O relatório da UNESCO relativo às normas de competência para utilização das TIC pelos professores menciona que devemos "criar na sala de aula situações de aprendizagem em que alunos usam as tecnologias para aprender e comunicar" (UNESCO, 2008, p. 1).

O Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal aponta para a conjugação perfeita entre TIC, alunos, professores e comunidade:

> As tecnologias de informação e comunicação multiplicaram enormemente as possibilidades de pesquisa de informação e os equipamentos interativos e multimédia colocam à disposição dos alunos um manancial inesgotável de informações. Munidos destes novos instrumentos os alunos podem tornar-se "exploradores" ativos do mundo que os envolve. Os professores devem ensinar os alunos a avaliar e gerir na prática a informação que lhes chega. Este processo revela-se muito mais próximo da vida real do que os métodos tradicionais de transmissão do saber. Começam a surgir na sala de aula novos tipos de relacionamento. O desenvolvimento das novas tecnologias não diminui em nada o papel dos professores, antes o modifica profundamente, constituindo uma oportunidade que deve ser plenamente aproveitada. (Livro Verde para a Sociedade da Informação em Portugal, 1997, p. 46).

A integração das TIC no processo de ensino-aprendizagem tem originado o interesse do poder político nos mais diversos países. A sociedade da informação e do conhecimento tem colocado vários desafios aos sistemas educativos. Um dos principais é a integração das TIC em contexto educativo. Diversos estudos (BECTA, 2006; European Schoolnet,

2004) reconhecem a sua importância enquanto meio capaz de favorecer a aprendizagem e confirmam que os professores não as usam com regularidade na sala de aula.

O NCTM (1994), defende que os alunos, na sua aprendizagem da Matemática, deverão "ser capazes de formular e resolver problemas, de julgar o papel do raciocínio matemático numa situação da vida real, e de comunicar matematicamente" (p. 21). No PMEB (2007), a comunicação, para além de se assumir como um objetivo curricular constitui uma orientação metodológica para o ensino, no sentido de promover a aprendizagem da Matemática e para que seja atingido com sucesso há necessidade de criar oportunidades de comunicação adequadas ao trabalho que se realiza na sala de aula. É crucial motivar e estimular os alunos a desenvolver as interações que possam emergir, valorizando a dinâmica comunicativa na sala de aula. Deste modo, a tecnologia além de criar ambientes propícios à integração do aluno na Sociedade da Informação e do Conhecimento, também revela um bom apoio e estímulo à comunicação matemática, permitindo "uma referência comum para as discussões de ideias matemáticas" (NCTM, 2007, p.66).

Por resolução do Conselho de Ministros nº 137/2007 de 18 de Setembro foi criado o Plano Tecnológico da Educação (PTE) integrado na Estratégia de Lisboa e no Programa de Educação e Formação 2010 que definiram para a Europa um conjunto de linhas de orientação com vista à plena integração dos cidadãos europeus na sociedade do conhecimento. O desenvolvimento de competências em tecnologias da informação e da comunicação (TIC) e a sua integração transversal nos processos de ensino/aprendizagem tornam-se objetivos incontornáveis dos sistemas de ensino. Nesse sentido o Governo pretendia, em três anos, "colocar Portugal entre os cinco países europeus mais avançados ao nível da modernização tecnológica do ensino". No âmbito desta política pública, surgiu o Programa e.escola ao qual se juntou, mais tarde, a iniciativa e.escolinha, tendo sido distribuídos com estas medidas cerca de 2 milhões de computadores portáteis, muitos deles com acesso à internet de banda larga.

O PTE dotou as escolas de Quadros Interativos, cerca de mil e seiscentos na primeira fase e outros seis mil na segunda, com o objetivo de ter um QI por cada três salas de aula.

Com a implementação do PTE, as salas de aulas ficaram equipadas de materiais tecnológicos e é essencial usufruir destas ferramentas no ensino da Matemática. Este facto, associado à importância que a comunicação matemática tem assumido atualmente nas aulas de Matemática em que os alunos são frequentemente solicitados a partilharem as suas ideias e a envolverem-se em interações produtivas com os colegas e com o professor (Boavida, 2005), possibilita uma aprendizagem mais profícua.

A promoção e troca de interações na sala de aula permitem a descoberta e partilha de significados comuns. É precisamente a partir das discussões ocorridas na sala de aula, bem como o contributo da utilização de tecnologia na promoção da qualidade dessa discussão, que determinou o estudo desta dissertação sobre o uso do "quadro interativo na sala de aula de Matemática".

Objetivo e questões de investigação

A minha decisão de trabalhar na sala de aula com o quadro interativo, acoplado a outras ferramentas tecnológicas, deve-se ao facto de considerar que este tipo de ambientes apela à participação ativa dos alunos, favorecendo a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos, levando-os a melhorar a sua relação com a Matemática. Considero, também, que este tipo de ambiente associado a tarefas diversificadas, possibilita explorações que podem enriquecer as aprendizagens oferecendo múltiplas representações e facilitando a transição entre elas, permitindo a interatividade com objetos matemáticos e uma melhor visualização dos conceitos, e incentivando a formulação de conjeturas. Além disso, as tecnologias, quando usadas como meio e não como fim, adquirem um papel motivador e potencializador de aprendizagens.

Atualmente, nas orientações curriculares de Matemática, o aluno deixou de ser apenas um ouvinte passivo e passou a ter um papel ativo no decorrer das mesmas; não só é questionado e convidado a colaborar como passou a assumir um papel central no desenvolvimento da atividade na sala de aula.

Tendo em conta o exposto acima, considerei pertinente desenvolver um estudo, no 10.º ano de escolaridade, com recurso ao quadro interativo, *software* de geometria dinâmica (*Geogebra*), *applets* e *TI-SmartView* na resolução de tarefas diversificadas.

O objetivo deste estudo é compreender as implicações do uso da tecnologia, em particular do QI, na dinâmica da aula de Matemática que explora tarefas de natureza diversificada.

Para isso formulei questões que serviram de base de orientação a seguir na análise dos dados, a saber:

- Que implicações traz o QI ao nível da estrutura da aula, em especial, na fase de discussão e síntese?
- Que implicações traz o QI, ao nível do papel dos alunos e do professor, na construção do conhecimento matemático?
- Que implicações traz o QI ao nível das interações/comunicação entre alunos e alunos e professor?

Estruturação da dissertação

A presente investigação encontra-se estruturada em cinco capítulos. Neste capítulo são apresentadas algumas motivações pessoais que deram origem ao presente estudo, razões para a sua pertinência, objetivo e as questões orientadoras do estudo. No segundo capítulo é feita a revisão da literatura que sustentou teoricamente esta investigação. O terceiro capítulo é dedicado à definição dos aspetos metodológicos essenciais que orientaram este estudo. No quarto capítulo é apresentado o estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didática. Finalizo este trabalho de investigação no quinto capítulo, com as conclusões do estudo efetuado.

Capítulo II

Tecnologia no Ensino/Aprendizagem da Matemática

No sentido de encontrar referências, tomar posições e encontrar caminhos possíveis para a realização do estudo, foi determinante recorrer à literatura já existente. Assim sendo, com este capítulo pretendo dar a conhecer alguma da literatura que orientou este estudo e que considerei essencial. O presente capítulo, encontra-se dividido em três secções: o que muda na sala de aula; recursos tecnológicos no ensino da Matemática e a tecnologia no currículo de Matemática. As três principais temáticas desenvolvidas neste capítulo seguem todas a mesma estrutura. Relativamente a cada uma das temáticas começa-se por apresentar algumas conceções oriundas de trabalhos de investigação já realizados no âmbito de cada uma das temáticas, tanto a nível internacional como nacional.

Na primeira secção deste capítulo, *O que muda na sala de aula*, serão expostos alguns desafios e potencialidades da tecnologia no Ensino da Matemática, assim como as diferenças entre a aula tradicional e aos atuais desafios para a aprendizagem. De seguida é referido o papel do professor e do aluno na sala de aula com as novas tecnologias e qual papel das tarefas matemáticas na sala de aula. Posteriormente esta secção é dedicada ao ambiente dinâmico na sala de aula e ao conceito de interatividade.

Na segunda secção, relativa aos *Recursos tecnológicos no ensino da Matemática*, será feita referência a investigações realizadas desenvolvendo-se os seguintes subtemas: o quadro interativo no ensino; s*oftware* dinâmico e interativo específico da Matemática; ambientes de Geometria Dinâmica em particular, ao *GeoGebra* e *Sketchpad*; emuladores de calculadoras gráficas e *applets*.

Na última secção, *A tecnológica no currículo de Matemática*, apresentam-se as orientações internacionais, seguidas das nacionais sobre a utilização das tecnologias no ensino da Matemática.

O que muda na sala de aula

O professor que pretende utilizar as TIC na sala de aula é confrontado com a necessidade de delinear novas estratégias e deixar os alunos explorar os conhecimentos ao seu ritmo, visto que segundo o Programa de Matemática do 10.º ano (2001) "cada estudante deve receber do professor estímulo e oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (e fora delas) pois assim estarão a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático" (p.11).

Desafios e Potencialidades

A utilização das tecnologias tem aumentado de forma rápida nos mais distintos campos e, como não poderia deixar de ser, também se estendeu na área da educação. O modo como o professor encara o processo ensino/aprendizagem influencia as suas práticas letivas.

As Novas Tecnologias surgem como suportes do processamento de informação e como meios de comunicação. Daí as duas designações mais correntes por que são conhecidas: (NTI) Novas Tecnologias de Informação; (TIC) Tecnologias de informação e comunicação. (Ponte e Canavarro, 1997, p. 11).

Efetuando a revisão bibliográfica sobre o tema, pode-se entender que TIC é um conjunto de recursos tecnológicos que, se estiverem integrados entre si, podem proporcionar processos de comunicação, como afirmam Amado e Carreira (2008):

> Um uso mais sistemático das tecnologias na sala de aula tem como consequência que os alunos discutem mais entre si mas a comunicação incide essencialmente na actividade que estão a desenvolver e há menos dispersão por assuntos externos à aula (p.330)

O NCTM (1991, 2000) e Weber-Russel e Le Blanc (2004), citados por Fernandes, Cabrita e Silva (2008) defendem que a tecnologia é uma ferramenta poderosa capaz de criar ambientes favoráveis à aprendizagem, oportunidades e desafios na comunicação matemática, especificamente, no desenvolvimento e análise da linguagem.

Ponte (2000) menciona que as TIC poderão ajudar na aprendizagem de muitos conteúdos, recorrendo a técnicas sofisticadas de simulação e de modelação, possibilitando a criação de espaços de interação e comunicação.

Na opinião de Ponte (1995) as TIC colocam desafios irrecusáveis à atividade educativa, dada a sua possibilidade de proporcionar poder ao pensamento matemático e entender o alcance e a profundidade das aplicações desta ciência.

Nos últimos anos, devido à inclusão das novas tecnologias e à mudança da sociedade, muitos professores têm sentido necessidade de modificar as condições em que se processa o ensino e a aprendizagem da Matemática. As práticas pedagógicas que utilizam as TIC apresentam diversas potencialidades.

Para Ponte (1997), as tecnologias vão permitir a partilha de materiais através de alunos e professores de modo a apontar sempre para um melhoramento da aprendizagem. Para que tal vantagem educativa funcione é necessário contudo criar uma nova consciência nas comunidades educativas de forma a criar uma nova forma de ensinar. Há que alterar as formas tradicionais e desmotivadoras verificadas no ensino, há que proceder à inovação e à procura de respostas às reais necessidades dos alunos.

As novas tecnologias introduzem na sociedade atual novos desafios que implicam novos métodos educacionais e novas formas de trabalho.

Ponte (1997, p. 29) sustenta:

> Podemos antever que as tecnologias da informação, com base nos computadores, serão o principal eixo de desenvolvimento das sociedades de amanhã. A liderança no caminho do futuro pertence às sociedades que estão preparadas para assumir, no seu seio, a mudança permanente e que encorajam a diversidade e a criatividade e não o conformismo social.

Os professores de Matemática precisam, portanto, de saber usar na sua prática letiva as ferramentas das Tecnologias de Informação e Comunicação, incluindo *software* educacional próprio para a sua disciplina e *software* de uso geral (NCTM, 2007).

Estas tecnologias permitem perspetivar o ensino da Matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica (Ponte, Oliveira, & Varandas, 2001).

As TIC funcionam como meio de motivação para a aprendizagem da Matemática, visto várias investigações constatarem uma melhoria nas atitudes dos alunos em relação à aprendizagem da matemática "a utilização de calculadoras e computadores em abordagens ativas e exploratórias da Matemática incentivam a curiosidade, o aumento da confiança e o gosto dos alunos por esta disciplina" (Fey, 1991; Hembree & Dessart, 1992 citados por Ponte & Canavarro, 1997, p.121)

As TIC são cada vez mais recomendadas no currículo da matemática quer para fomentar a discussão e reflexão quer para proporcionar exploração e investigação e, levar os alunos a terem mais sucesso nas suas aprendizagens e,

> no que diz respeito aos valores e atitudes, a calculadora e o computador são particularmente importantes no desenvolvimento da curiosidade e do gosto por aprender, pois proporcionam a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes, onde os alunos sentem incentivada a sua criatividade (Ponte & Canavarro, 1997, p.101).

Segundo os mesmos autores, Ponte e Canavarro (1997), apesar de nos anos 80 as novas tecnologias terem começado a entrar mais ativamente na aula de Matemática, e apesar de as experiências de ensino com computadores terem vindo a aumentar, a utilização das novas tecnologias, na aula de Matemática, ainda fica muito aquém do que seria de esperar nos dias de hoje e restringe-se a um pequeno grupo de professores

Para Ponte (2002) a utilização das TIC no processo educativo são um meio fundamental de acesso à informação, são um meio de transformação e de produção de informação, constituem um meio de comunicação à distância, uma ferramenta para o trabalho colaborativo e promovem novas formas de interação social.

Citando Ponte,

> É impossível falar de efeitos genéricos das novas tecnologias no processo de aprendizagem. A sua utilização na educação pode assumir formas radicalmente diferentes, com efeitos diametralmente opostos. Tudo depende das interacções que se estabelecem entre alunos, o computador e o professor. (...) Mas, globalmente, a maioria das indicações aponta para a possibilidade de desenvolver novas estratégias cognitivas, para a criação de sentimentos e autoconfiança, maior responsabilização do aluno pelo seu próprio trabalho, novas relações professor-aluno e laços de cooperação e inter ajuda entre os alunos. Estas indicações são altamente encorajadoras, fazendo-nos crer que as novas tecnologias podem dar, de facto, um importante contributo para o desenvolvimento multifacetado dos alunos em harmonia com um mundo de alta tecnologia (Ponte, 1997, p. 121).

As TIC são ferramentas cada vez mais presentes na atividade dos professores de Matemática e constituem, conjuntamente, um meio educacional auxiliar para apoiar a aprendizagem dos alunos e um meio propício para com eles interagir e "proporcionam uma nova relação dos actores educativos com o saber, um novo tipo de interação do professor com os alunos, uma nova forma de integração do professor na organização escolar e na comunidade profissional" (Ponte, 2000, p.77). Sendo assim, é necessário que os professores saibam como usar os novos equipamentos tecnológicos e *softwares*, conhecer seu potencial educacional, os seus pontos fracos e fortes (Ponte, 2001).

Ponte (1997, p.32) refere que existem quatro grandes áreas de influência das tecnologias no processo ensino/aprendizagem da Matemática: "como um instrumento de cálculo; como instrumento de demonstração; como fonte de problemas e como meio auxiliar de investigação".

Redecker (2008), Corbett e Williams (2002) realçam que a utilização das tecnologias em condições adequadas promove a aprendizagem, pelo que deve ser valorizada na sala de aula. A mesma convicção é partilhada por Conole (2007) que defende que o surgimento de novas formas de comunicação permite a interacção entre pares.

A maioria dos estudos que abordam a integração das tecnologias em contexto de sala de aula, apresentam quase sempre como ponto comum que essa integração obriga a uma mudança profunda do papel do professor na sala de aula. Trabalhar em diversos contextos é essencial para situar e aprofundar a aprendizagem da Matemática, tornando-a mais significativa do que a conseguida através de processos centrados na exposição e aplicação de conceitos previamente definidos.

Para Miskulin (2003), a tecnologia não consiste em mais um recurso de motivação para o ensino da Matemática, mas sim um instrumento forte que proporciona aos alunos novas formas de gerar e divulgar o conhecimento matemático. Deste modo, oferece oportunidades aos alunos de aprender Matemática num contexto tecnológico, possibilitando a formação e a inserção do aluno numa sociedade mediada pela tecnologia. Independentemente da abordagem ou do conteúdo matemático, na utilização de ferramentas tecnológicas destaca-se, como um grande benefício para a aprendizagem, a visualização de noções matemáticas sob múltiplas perspetivas e diferentes representações e de serem capazes de passar informação de uma forma de representação para outra (NCTM, 2007; Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

O professor tem de utilizar todos os recursos disponíveis para tornar as aulas mais interessantes e com significado, de forma a motivar os alunos para a aprendizagem e o querer saber e aprender mais.

Olive e Makar (2010) argumentam que o conhecimento matemático e práticas matemáticas estão intimamente vinculadas, e que esta ligação pode ser reforçada pelo uso da tecnologia.

Ainda, relativamente à utilização das Tecnologias na Educação Matemática, a APM (2001), considera que:

> • A educação com recurso à tecnologia é um direito dos alunos, que todos os intervenientes no sistema educativo devem respeitar e que a negação deste direito contraria a desejada igualdade de oportunidades de acesso aos bens da educação;
>
> • A tecnologia tem influenciado e alterado as formas de ver, utilizar e produzir matemática, não tendo a educação matemática permanecido indiferente a esta situação;
>
> • As ferramentas tecnológicas devem ser integradas de forma consistente nas actividades letivas, proporcionando aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas;
>
> • A utilização dessas ferramentas deve-se pautar pela regularidade e pela qualidade das tarefas propostas, centradas no trabalho dos alunos e seleccionadas de forma consciente pelos professores. (p. 24).

Documentos de orientação curricular e de investigação reconhecem que a aprendizagem dos alunos pode beneficiar muito da tecnologia, através da visualização de noções matemáticas sob múltiplas perspectivas e representações interligadas e serem capazes de passar informação de uma forma de representação para outra (NCTM, 2007; Ponte et al., 2007).

> O ensino e a aprendizagem da Matemática devem tirar todo o partido possível, em todos os níveis de ensino, dos instrumentos que a evolução tecnológica tem posto ao serviço das mais variadas actividades nos domínios sociais, profissionais e científicos, designadamente as calculadoras e os computadores (APM, 1988, p.45)

Damásio (2007) refere que o uso das TIC na prática educativa pelos professores facilita a preparação de aulas, a exposição da matéria e a organização dos conteúdos; permitem realizar pesquisas de forma mais rápida com acesso a fontes importantes; diversificam a apresentação de temas; melhoram a capacidade de intervenção; incutem um maior dinamismo às aulas; motivam mais os alunos e promovem a comunicação. A interatividade neste processo emerge como elemento comum, entendida como forma de o utilizador interagir com o material educativo que lhe é presente, passando a ter um papel mais ativo no processo ensino/aprendizagem (Silva, 2006).

Balanskat, Blamire e Kefala (2006) realizaram estudos de investigação sobre o impacto das TIC nas escolas, na Europa, e chegaram a conclusões em diversos campos: aprendizagem dos alunos; motivação e desenvolvimento de competências; auto-aprendizagem; modos de ensinar; competências dos professores no uso das TIC; e barreiras à integração efetiva das TIC, entre outros. As conclusões a que chegaram, e das que mais se adequam ao presente trabalho, contam-se as seguintes:

1) escolas com bons recursos tecnológicos conseguem melhores resultados do que aquelas que estão deficientemente equipadas;

2) a inserção de quadros interactivos veio potenciar uma melhoria na *performance* dos alunos, nos testes nacionais de Inglês, Matemática e Ciência;

3) os alunos, professores e encarregados de educação acreditam que as TIC têm um efeito positivo na aprendizagem;

4) os professores mostram-se cada vez mais convencidos que as TIC ajudam para um melhoramento dos resultados dos alunos;

5) as TIC contribuem para o aumento da motivação dos alunos e para uma melhoria da capacidade de atenção e concentração;

6) a existência das TIC nas escolas contribui para a diminuição da divisão digital entre classes;

7) as TIC possibilitam um ensino diferenciado e individualizado;

8) o impacto das TIC é, em grande parte, dependente da forma como são usadas – o efeito de uma aplicação digital é influenciado pela capacidade do professor para a explorar e utilizar de acordo com os objetivos pedagógicos.

De todas as aplicações das TIC que as escolas possuem, cabe referência especial aos quadros interactivos e que muitas vezes não são utilizados, servindo apenas de quadro de projeção de documentos estáticos com informação, vulgarmente em *Powerpoint*. A sua utilização nas aulas de Matemática é uma ferramenta de trabalho importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático e abstrato, que possibilita a construção das aprendizagens, facilita a capacidade de associação de conceitos, ajuda na evolução da comunicação matemática, bem como o espírito crítico, tornando o ensino da Matemática atrativa para os alunos.

Da aula tradicional aos atuais desafios para a aprendizagem

Na aula tradicional o aluno assimila os diversos conteúdos de uma forma passiva. Se os alunos são vistos como "recetáculos", que armazenam informação, então as funções do professor são exclusivamente de transmitir "correctamente" toda a informação e ao aluno cabe o papel de ouvir e adquirir passivamente todos os conhecimentos para depois os poder aplicar.

Existem vários estudos onde se defende que a utilização das TIC tem impacto na aprendizagem dos alunos. A título de exemplo refira-se Redecker (2008), Corbett e Williams (2002) que realçam que a utilização das tecnologias em condições adequadas promove a aprendizagem, pelo que deve ser valorizada na sala de aula.

As tecnologias devem ser usadas como meios de transmissão de informação bem mais eficientes do que o próprio professor, cabendo a este último o papel de mediador das interações professor-aluno-tecnologia, de modo a que o aluno possa construir o seu conhecimento num ambiente desafiador, em que a tecnologia auxilie o professor a promover o desenvolvimento da autonomia, da criatividade, da sistematização do seu conhecimento, do desenvolvimento da colaboração, da cooperação e autoestima (Graziola & Schlemmer, 2008).

A tabela seguinte, elaborado por Castilho (2008) compara a prática pedagógica tradicional e a prática pedagógica actual com o uso das tecnologias.

Tabela 1 - Prática pedagógica tradicional vs. Prática pedagógica atual segundo Castilho (2008, p.179)

Prática pedagógica tradicional vs. Prática pedagógica atual

Tradicional	Atual
A prática pedagógica que podemos denominar por tradicional consistem em actividades planificadas e desenvolvidas por parte de um professor especialista numa determinada área curricular que possui conhecimentos didáticos como relacionar e como transmitir o saber.	A prática pedagógica atual é concebida com a finalidade de orientar o aluno permitindo-lhe o progresso no processo de aprendizagem, utilizando todos os meios disponíveis para favorecer e orientar este processo.

Um uso mais sistemático das tecnologias na sala de aula tem como consequência que os alunos discutam mais entre si, incidindo a comunicação essencialmente na atividade que estão a desenvolver havendo menos dispersão por assuntos externos à aula.

Numa aula com tecnologia, o professor deixa de ser o detentor e transmissor incontestável do conhecimento e passa a ser co-aprendente com os seus alunos (Ponte, 2000).

As novas tecnologias utilizadas na sala de aula constituem um recurso a ser utilizado pelos professores no ensino da Matemática pois de acordo com Ponte e Canavarro (1997):

> permitem que o aluno tenha um papel mais activo na sala de aula, possibilitando uma experiência matemática onde há lugar para a investigação, formulação e teste de conjecturas próprias e, para a discussão e comunicação matemática (p.102).

Segundo Amado e Carreira (2008), num ambiente marcado pela utilização das tecnologias há uma maior quantidade de exemplos e contra-exemplos, num menor espaço de tempo, os alunos são encorajados a observar e a conjeturar, há a possibilidade de trabalharem com múltiplas representações, há um desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à aula de matemática e uma redução da ansiedade e do medo de cometer erros.

Papel do professor e do aluno

No novo cenário educativo o aluno tem um papel mais ativo no processo de aquisição de conhecimentos e de desenvolvimento das suas competências, estabelecendo o seu próprio ritmo e intensidade de aprendizagem, adequando-o aos seus interesses e necessidades.

Candeias (2008, p.145), ao citar Silva (2005), afirma que "o aluno já não é apenas um mero estudante que frequenta cursos durante alguns anos da sua vida, recebendo de uma forma mais ou menos passiva o saber transmitido pelo professor, mas é fundamentalmente um "autoeducando", num amplo quadro de educação permanente e aprendizagem autónoma, reforçado pela expressão."

De acordo com Candeias (2008, p.145), espera-se que o aluno seja capaz de ser:

- Um cidadão participativo e colaborativo;
- Co-responsável no seu próprio processo de aprendizagem;
- Um cidadão com capacidade para a auto-reflexão;
- Um cidadão construtor de conhecimento;

- Um elo na cadeia do desenvolvimento da sociedade a que pertence.

Silva (2006), citado em Flores e Escola (2009), refere que o professor tem uma nova postura, ele constrói um conjunto de territórios a serem explorados pelos alunos e disponibiliza co-autoria e múltiplas conexões, permitindo que o aluno faça por si mesmo, ele é mais que um conselheiro e um estimulador de curiosidades. Refere ainda pontos fundamentais na comunicação na sala de aula: o professor permite a intervenção do aluno, rompe com o espaço unidirecional autoritário e viabiliza a comunicação conjunta emissor/receptor, disponibiliza múltiplas redes de conexões nos tratamentos dos conteúdos curriculares que leva a combinações livres e criativas. O aluno ocupa o espaço de emissor e de receptor. A sala de aula perde a monotonia e a rotina e torna-se um espaço coletivo mediado pela socialização, participação e intervenção.

Segundo Ponte (2001), os novos e velhos papéis do professor na sala de aula com e sem o uso das TIC, podem ser esquematizados na tabela 2.

Tabela 2 – Novos e velhos papéis dos professores

Novos papéis	Velhos papéis
Criar situações de aprendizagem	Fornecer informação
Desafiar, apoiar	Controlar
Diversificar	Uniformizar

Majó e Marqués (2002), referem que atualmente o papel do professor é de um supervisor, um incentivador, um guia e tutor, assessor, prescritor de recursos educativos, motivador, ajudando a promover o desenvolvimento cognitivo e pessoal dos alunos.

A maioria dos estudos que abordam a integração das tecnologias em sala de aula em contexto educativo, obriga a uma mudança profunda do papel do professor na sala de aula. Num desses estudos, Oliveira e Domingos (2008), apontam exatamente as TIC como um elemento de mudança do ensino da Matemática, e que se assume com uma inevitabilidade decorrente da informatização da sociedade, quer como integrando as novas perspectivas sobre a natureza da matemática escolar e da sua aprendizagem, no entanto, apesar de os estudos de investigação terem dificuldade em fornecer a evidência de melhorias na aprendizagem através dos meios tecnológicos, os autores assumem que não é possível retroceder, uma vez que as TIC estão por todo o lado e fazem parte do nosso quotidiano. No entanto, apesar da falta dessas evidências de desempenho matemático por parte dos alunos, Mosquito e Ponte (2008), incentivam na mesma esse uso, já que demonstram que a utilização das tecnologias está associada a transformações nos conteúdos, nos objetivos e nas metodologias educativas, uma vez que o recurso às tecnologias permite levar os alunos a realizarem atividades em que estes são encorajados a desenvolver a sua autonomia, independência e espírito de iniciativa, assim como cumulativamente a relação professor/ aluno poderá ser profundamente alterada por esse uso e que será porventura uma das maiores consequências de ordem social potenciada pelo uso das TIC no campo da educação matemática ou de qualquer outra disciplina.

Também Amado e Carreira (2008, p.288) referem num estudo que num ambiente marcado pelo uso da TIC há uma maior quantidade de abordagens, de exemplos e de contra-exemplos, num menor espaço de tempo e sobretudo a possibilidade de permitir visualizações com grande facilidade.

Buettner et al (2000) sustentam que o professor, antes de recorrer às TIC na sua prática letiva, deve desenvolver, uma quantidade de competências que lhe tornem possível a integração das TIC no processo de ensino/aprendizagem. Dessas competências salientam-se algumas:

a) ter a capacidade de decidir *porquê*, *quando*, *onde*, e *como* é que as TIC vão, realmente, contribuir para o alcance dos objetivos educacionais e não funcionar como uma fonte de distração;

b) selecionar as ferramentas das TIC mais ajustadas para a aprendizagem dos alunos;

c) explicar os motivos pelos quais selecionou determinada ferramenta das TIC e a opção pedagógica tomada;

d) clarificar as produções que são esperadas dos alunos;

e) ter a capacidade de analisar e avaliar o *software* didático utilizado;

f) ajudar os alunos a encontrar, comparar e utilizar a informação disponibilizada na *Internet*;

g) avaliar as actividades e o desempenho dos alunos quando recorrem às TIC no processo de ensino/aprendizagem.

Ponte e Canavarro (1997), afirmam que no ensino da disciplina de matemática, as novas tecnologias potenciam uma inevitável revisão do trinómio saber-aluno-professor, de modo que:

> • A aprendizagem da Matemática seja mais motivadora, onde exista lugar para interrogações, conjeturas, provas e refutações, isto é, muito mais próxima do espírito investigativo;
>
> • O aluno tenha um papel muito mais activo e autónomo, aprofundando os seus domínios de interesse, e usando com agilidade e espírito crítico uma variedade de ferramentas para o seu estudo;
>
> • O professor seja reconhecido e valorizado no papel da criação, condução e contínuo aperfeiçoamento de situações de aprendizagem. (p. 33).

O papel das tarefas

Na sala de aula de Matemática é habitual, o professor explicar os novos conceitos, em diálogo com os alunos, mostrando com um ou dois exemplos, passando de seguida à resolução de exercícios para os alunos resolverem, aplicando os novos conteúdos. Geralmente estes exercícios são corrigidos no quadro pelo professor ou por um aluno escolhido. Ponte e Serrazina (2009) afirmam que:

> Este padrão de aula pode ser modificado com fortes benefícios para a aprendizagem. Os alunos podem ser parte muito mais ativa do processo de construção do conhecimento, desde que lhes sejam propostas tarefas desafiantes, que se situem ao seu alcance. Em vez de começar por apresentar a «matéria nova», o professor pode começar por apresentar uma tarefa, assegurando que os alunos a interpretam correctamente. Depois, os alunos desenvolvem o seu trabalho na tarefa, frequentemente a pares ou em pequenos grupos. Segue-se um momento de grande importância - a apresentação do trabalho dos alunos, num ambiente de discussão e argumentação. Finalmente, a aula termina com uma síntese das principais ideias aprendidas, feita em conjunto pelo professor e pelos alunos. (p.3)

Os alunos, na aula de Matemática, são confrontados com diferentes tipos de tarefas matemáticas, que são desenvolvidas em várias situações. O Ministério da Educação sugere, através dos programas de Matemática (ME, 2001), que os professores diversifiquem os tipos de tarefas a propor aos alunos, usem abordagens diferenciadas, proporcionem diferentes formas de trabalho e de avaliação.

No relatório final do estudo Matemática 2001 (APM, 1998) refere a inserção de exercícios, problemas, exposição pelo professor, trabalho com situações da realidade, discussão entre alunos, actividades de exploração, história da matemática e trabalho de projeto como situações de trabalho incluídas nas práticas letivas na aula de matemática.

Segundo Ponte (2005) a dificuldade da seleção e articulação das tarefas não se coloca apenas na sua diversificação. As tarefas propostas devem proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, que contribua para que os alunos construam os conceitos estipulados pelo professor, compreendam procedimentos matemáticos e estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática.

Nas recomendações definidas para o ensino da matemática, o NCTM (1991) destaca a relação entre a aprendizagem e o tipo de tarefas propostas. Nesta publicação é salientado o papel fundamental do professor na seleção e na execução de tarefas matemáticas que:

- envolvam os alunos;
- estimulem o desenvolvimento de conexões entre ideias matemáticas;
- impliquem a formulação e resolução de problemas bem como o raciocínio matemático;
- promovam a comunicação matemática.

Esta manifestação continua a ser evidente nos *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) onde se pode ler que: “Num ensino eficaz, são utilizadas tarefas significativas para introduzir ideias matemáticas importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos…Este tipo de tarefas podem frequentemente ser resolvidas de mais do que uma forma, …, fazendo com que sejam acessíveis a alunos com diferentes níveis de conhecimento e experiências prévias” (pp. 18-19).

Para Viseu e Ponte (2009) as tarefas regulam a interação dos alunos com o professor, o comportamento do aluno na sua aprendizagem e o comportamento do professor na abordagem dos conteúdos matemáticos. Atendendo ao seu grau de desafio e à sua estrutura, Ponte (2005) classifica as tarefas em exercícios, problemas, investigações e explorações. Os exercícios são tarefas de estrutura fechada, geralmente de resolução mecânica e repetitiva por aplicação direta de uma fórmula ou algoritmo, e têm por finalidade a prática e a consolidação de conhecimentos adquiridos. Os problemas, embora tenham também um carácter estruturado, diferem dos exercícios pelo seu grau de desafio mais elevado e por o aluno não dispor de um método que lhe permita a resolução imediata. Estas características também estão presentes nas investigações e nas explorações que, segundo Ponte (2005), assumem um carácter mais aberto solicitando ao aluno que participe na "formulação específica das próprias questões a resolver" (p. 15). Nas atividades de investigação o aluno explora uma situação aberta, procura regularidades, estabelece e testa conjeturas, argumenta e comunica as suas conclusões, o que favorece o seu envolvimento nas atividades da sala de aula e aumenta a sua motivação para identificar processos alternativos (Stein & Smith, 1998). Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), a atividade de investigação na sala de aula processa-se usualmente em três fases:

- introdução da tarefa;
- realização da investigação pelos alunos;
- discussão do trabalho realizado pela turma.

Em qualquer tipo de tarefa, Stein e Smith (1998) identificam fatores ligados a níveis de exigência cognitiva, tais como estimular os alunos a pensar, dando-lhe tempo suficiente para explorarem as tarefas, incentivá-los a fundamentar e a argumentar os seus processos de resolução e resultados com os colegas.

As recomendações atuais da educação matemática apontam para a diversificação das tarefas a propor na sala de aula (NCTM, 2007), exercendo cada tipo de tarefa um papel especial na realização dos objectivos da disciplina de Matemática. A inclusão do computador nas atividades dos alunos desempenha um elemento motivador da aprendizagem pois possibilita abordagens mais experimentais e facilitadoras da compreensão dos conceitos valorizando a exploração e a descoberta dos conceitos pelos alunos (Ponte et al., 1998; Santos, 2000). O papel do professor neste contexto é o de auxiliador da aprendizagem, observador e de apoio nas atividades dos alunos (Castillo, 2008). A interação entre alunos e professor na exposição e discussão das suas conclusões, desenvolve a capacidade de análise, crítica e de concentração dos alunos (Santos, 2000).

O uso das tecnologias também permite aos professores de Matemática diversificarem as atividades que sugerem aos alunos. Estas podem contribuir fortemente para a realização de investigações e explorações que implicam o desenvolvimento da capacidade de observação, do espírito crítico, da formulação e teste de conjecturas, da criação de argumentos convincentes e do desenvolvimento do raciocínio matemático (Ponte e Canavarro, 1997). A tecnologia aumenta o alcance e a qualidade das investigações porque providência meios de visualização de ideias matemáticas de múltiplas perspectivas (NCTM, 2000).

Ambiente dinâmico na sala de aula

Por ambiente dinâmico entendemos aquele que possibilita manipular os objetos através de ferramentas por ele disponibilizadas. Segundo a perspetiva construtivista, ao manipular os objetos o indivíduo desenvolve relações que lhe auxiliam a entender os conteúdos a ele relacionados.

Um ambiente dinâmico permite que os objetos nele disponibilizados possam ser organizados, modificados, manipulados e transformados pelos alunos, a fim de que se adaptem às necessidades de cada indivíduo. Para Gravina e Santarosa (1998, p. 10):

> As novas tecnologias oferecem ambientes em que a representação passa a ter carácter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos, particularmente no que diz respeito as concretizações mentais. Um mesmo objecto matemático passa a ter representação mutável, diferentemente da representação estática do tipo “lápis e papel” ou “giz e quadro-negro”. O dinamismo é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador. Por exemplo: em geometria são os elementos de um desenho que são manipuláveis; no estudo de funções são objetos manipuláveis que descrevem relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis.

Com a utilização de recursos que possibilitem este dinamismo, o aluno pode atuar sobre objetos, enriquecendo, através da multiplicidade de desenhos, a sua concretização mental (Gravina & Santarosa, 1998). Esta multiplicidade permite, num curto espaço de tempo, a exploração de uma enorme série de exemplos e situações, fomentando assim um importante diferencial proveniente da utilização das tecnologias em processos educacionais. Um grande número de situações podem ser observadas, exploradas e analisadas, diferentemente de quando nos limitamos a utilizar apenas o quadro-negro e o giz, uma vez que estes nem sempre oferecem condições para que a diversidade esteja presente, (Como exemplo, podemos citar uma experiência em que o aluno observa o comportamento do gráfico de uma função racional da forma $f(x) = a + \dfrac{b}{cx+d}$ quando se variam os parâmetros *a*, *b*, *c* e *d*. O aluno poderá analisar os efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções da mesma classe. É de assinalar que, com isso, o aluno explora uma série de aspetos numéricos e gráficos da função, observando sua inter-relação. Esta multiplicidade de possibilidades visuais permite um enriquecimento da percepção intuitiva das propriedades da função racional).

Damásio (2007, p.83) refere que:

> as novas Tecnologias da Comunicação e da Informação vieram aumentar o tipo de interatividade entre os sujeitos e os conteúdos, não porque tenham criado qualquer nova dimensão para essa interação, mas sim porque reforçam o papel ativo dos recetores como potenciais produtores de conteúdos.

Amado e Carreira (2008) mencionam que num ambiente marcado pelas tecnologias existe uma maior quantidade de exemplos e contra-exemplos, num menor espaço de tempo onde os alunos discutem mais entre si promovendo um ambiente de aula com mais movimento. O programa de Matemática A (ME, 2001), menciona que "o estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia" (p. 15) e também refere que:

> É preciso ter presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso. O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a Matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos rico. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda (p. 22).

A utilização de tecnologias favorece a criação de novas dinâmicas na sala de aula, de ambientes de trabalho que estimulam a discussão e a partilha de ideias, que incentivam a formulação de conjeturas e a comunicação matemática (oral e escrita), nomeadamente através do tipo de dados e de argumentos usados pelos alunos, assim como a sua capacidade crítica perante argumentos alheios (Ponte e Canavarro, 1997).
Os mesmos investigadores referem que:

> uma característica especialmente interessante de diversos programas dedicados à geometria é o seu carácter dinâmico. Este dinamismo traduz-se pela possibilidade de interagir com os objetos geométricos, ou seja, de operar com eles e observar imediatamente os resultados e as consequências da operação efetuada (p.297)

Um trabalho, publicado pelo *United States Department of Education* (2008) que envolveu uma pesquisa sobre o ensino com *software* educativo, menciona que:

> de um modo geral, o *software* mostrou efeitos positivos no desempenho dos alunos em matemática, comparativamente a resultados de alunos cujo ensino não contemplou tais tecnologias. Estes estudos mostram que as metodologias baseadas nas TIC podem melhorar o desempenho dos alunos em áreas

> específicas da Matemática. Outros estudos mostram que o ensino baseado em programas de computador pode apoiar o desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos, aplicações e resolução de problemas (p. 50).

A interatividade e o dinamismo, características da tecnologia, particularmente visíveis nos ambientes de geometria dinâmica e nos *applets*, mudaram as perspetivas sobre a forma como o ensino e a aprendizagem de alguns conceitos matemáticos podem ser aprendidos, chamando a atenção para a construção de significados, mais do que os aspetos manipulativos (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006).

O Conceito de Interatividade

O dicionário da Língua Portuguesa da Porto Editora, define interação como uma ação recíproca entre dois ou mais corpos; intercâmbio de comunicação que se processa entre indivíduos ou grupos.

O conceito de interatividade resulta do adjetivo interativo cujo funcionamento permite ao utilizador algum nível de participação ou de suposta participação.

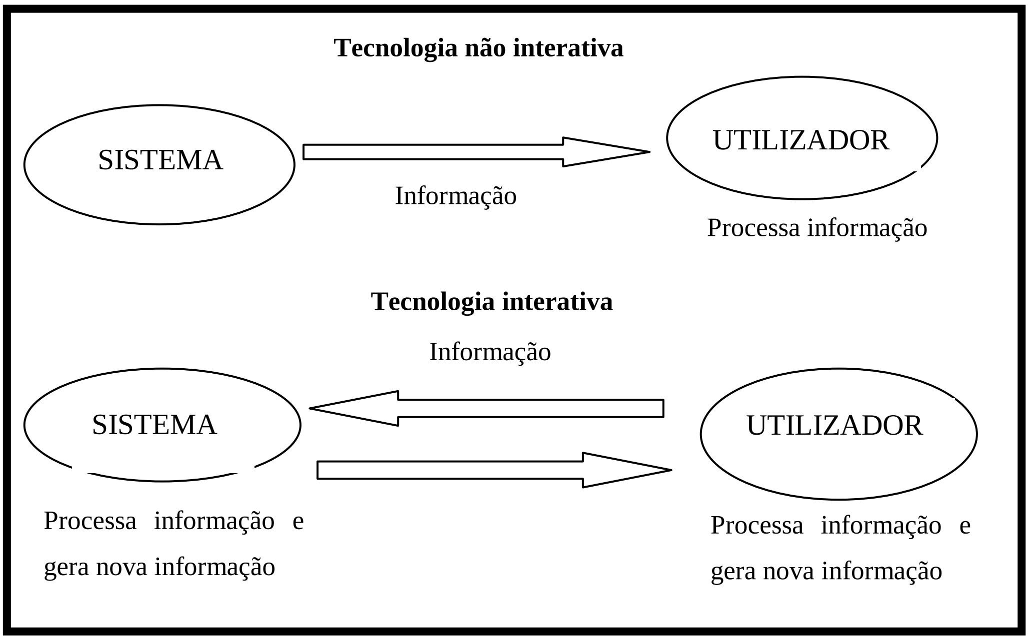
Existem variados exemplos do dia-a-dia, onde podemos aplicar o referido conceito: televisão interativa quando o programa requer respostas dos telespectadores, cinema interativo, teatro interativo quando os atores se envolvem diretamente com pessoas do público, brinquedos interativos que dão informações quando manuseadas, jogos interativos, etc.

Apesar do conceito de interação ser mais antigo e designar a influência recíproca dos atos de pessoas ou grupos, apenas no final dos anos 70 e início da década de 80 é que aparece o conceito de interatividade no contexto das novas tecnologias de comunicação. Mas a interatividade não é apenas uma relação restrita entre homem-máquina (tecnologias, equipamentos ou sistemas da tecnologia informática), é um conceito de comunicação. Pode também significar a comunicação entre pessoas. Assim, a interatividade tem a ver com a capacidade de intercâmbio dos intervenientes no processo de comunicação, sejam eles humanos ou não (Damásio, 2007).

Interatividade é um conceito que quase sempre está associado aos meios de comunicação.

Deste modo, Candeias (2008, p.42), ao citar Bartolomé (1995) define a interatividade como sendo "um processo comunicativo entre homem e máquina, a partir do qual cada extremo do canal participa enviando mensagens. Estas são recebidas e interpretadas pelo outro extremo do canal e este afeta de alguma forma os passos seguintes no diálogo", como podemos ver na tabela 3.

Tabela 3 – Tecnologia não interativa e interativa em Candeias (2008), ao citar Bartolomé (1995)



Sessoms (2008) expõe três contextos que enquadram o conceito de interatividade podendo ser associado a várias definições e dá como exemplos formas de interatividade:
- a utilização de um site de Internet;
- a realização de uma ficha de trabalho numa sala de aula;
- a utilização do QI promove a interação entre o professor e o aluno de forma a facilitar a construção do conhecimento.

Sessoms refere ainda que a interatividade é um processo de envolvimento entre professores e alunos envolvidos no processo ensino/aprendizagem.

Higgins *et al.* (2005) define interatividade como a participação dos alunos na sala de aula e a facilidade com que os professores e alunos interagem com a interface do quadro.

Para Kennewell e Beauchamp (2008), existem três formas de as TIC promoverem um ensino interativo e podem ser usadas como: um objeto de interação (ou seja, recursos de interação, como um clip de vídeo …); como um participante de interação (ou seja, um parceiro para interagir com as TIC, quando define as tarefas e fornece um *feedback* imediato, como um jogo de perguntas, ou simulação) e como uma ferramenta para a interação (ou seja, um meio de interagir através das TIC auxiliando na ação para atingir os objetivos, por exemplo, desenvolvendo coletivamente ou individualmente um mapa de conceitos para, interpretação e discussão com um parceiro).

A primeira categoria é uma característica familiar da sala de aula tradicional, onde a adoção das TIC traz novas formas de exposição de ideias de uma forma dinâmica que permitem aos professores representarem mais claramente algumas das ideias. Também possibilitam aos professores ter uma gama muito maior de recursos facilmente disponíveis, podendo alternar facilmente esses recursos durante a aula (Kennewell & Beauchamp, 2007).

A segunda categoria é específica para o ambiente de aprendizagem com tecnologia, onde há interação com o aluno (simulações, onde o aluno controla as variáveis e observa os resultados do processo simulado)

A terceira categoria é a que melhor explora o potencial das TIC como um meio para o ensino de interação aluno/aluno, aluno/professor e professor/turma. Tanner e Jones (2007), referem que o grau de interatividade pode ser medido através de indicadores como o nível de controlo em sala de aula entre professor-aluno, a natureza da interação e o tipo de ajuda prestada através da comunicação. Para "medir" estes indicadores, estabelecem uma escala com cinco níveis de interatividade crescente:

- Primeiro nível – É caracterizado pela leitura, não existindo interação entre professor e aluno e quem define e administra o desenvolvimento da aula é o professor;
- Segundo nível – O professor administra as tomadas de decisões e as perguntas que coloca visam direcionar os alunos para um caminho predefinido;
- Terceiro nível – O professor tem uma postura mais flexível e os alunos são direcionados para respostas com algum grau de interação;
- Quarto nível – O professor e os alunos promovem um ambiente dinâmico onde interagem mais colaborativamente na construção do conhecimento, mas é o professor que valida as conjeturas;
- Quinto nível – O professor e os alunos fazem reflexões em conjunto permitindo aos alunos autoavaliarem-se para poderem desenvolver os seus conhecimentos.

Estes autores opinam que este nível de interatividade possibilita uma melhor qualidade de ensino.

Como refere Beeland (2002), o objetivo é criar ambientes onde os estudantes se empenhem no processo de aprendizagem. A tecnologia é encarada neste processo, não como meio essencial mas sim como auxiliador de experiências que permitem a visualização dos acontecimentos, aproximando o aluno do acontecimento real.

Recursos tecnológicos no ensino da Matemática

O uso de meios tecnológicos, favorecem a criação de contextos significativos, permitindo a simulação de situações e o estudo de novos problemas, facilitando uma abordagem experimental e intuitiva da Matemática, estimulando o espírito de investigação nos alunos e dando-lhe um lugar mais ativo no processo de aprendizagem (Ponte e Canavarro 1997).

Quadro Interativo no Ensino da Matemática

Um quadro interativo é uma ferramenta constituída por uma superfície que quando ligado a um computador e a um projetor de vídeo permite que, ao contacto com o dedo ou uma caneta específica (dependendo do modelo) nessa superfície, corresponda a um clique do rato no computador, ou seja, o QI pode ser definido como um quadro ligado a um computador, com capacidade de apresentar uma imagem projetada, e que permite ao utilizador o controlo do computador bastando tocar o quadro ou utilizar o rato (BECTA, 2003; Higgins *et al.*, 2007). Neste sentido, o QI é um periférico de *input* e de *output* que recebe ordens dadas através do rato ou do contacto com a superfície do quadro e que mostra informações projetadas, enviadas pelo computador (Lewin *et al.*, 2008). O funcionamento do QI, ao estar associado a um sistema tecnológico integrado por um computador, um videoprojector e um mecanismo de controlo (caneta), permite projetar numa superfície interativa os conteúdos digitais num formato apropriado à visualização por um grupo alargado. A superfície de projeção permite que se possa escrever sobre ela e também controlar os programas informáticos. Desta forma, a capacidade de manipulação e de experimentação, características ligadas aos QI, tendem a ser potencializados, tanto do ponto de vista do aluno, como do professor, no sentido da comunicação e retenção de conhecimentos.

O quadro interativo é uma tecnologia educativa que tem como objetivo aumentar a interatividade no processo de ensino/aprendizagem, transformando a comunicação em sala de aula e permitindo aprendizagens mais significativas dos alunos. As vantagens desta ferramenta são inúmeras quer para os docentes quer para os alunos. Segundo a BECTA – *British Educational Communications and Technology Agency*, (2003), a utilização dos quadros interativos em contexto de sala de aula permite uma maior incorporação das tecnologias de informação e comunicação nas nossas escolas: há a possibilidade de tirar apontamentos ao longo da aula, registar opiniões dos alunos, guardar esses apontamentos e imprimir ou enviar para os alunos as próprias aulas, assim como trocar materiais com os colegas; permite uma maior atenção dos estudantes uma vez que não necessitam de estar sempre a tirar apontamentos, aumentando a participação nas atividades propostas; com a realização de apresentações mais dinâmicas, a utilização de jogos, cores, imagens, Internet, *software*, …, as aulas tornam-se mais interessantes e a motivação para participar aumenta, assim como os conceitos mais complicados são mais fáceis de entender. Deste modo, a versatilidade e a adaptabilidade a diferentes níveis etários e áreas curriculares permitem um acréscimo da interação e discussão em sala de aula e a concentração de recursos variados num mesmo suporte torna as aulas dinâmicas.

Glover e Miller (2001) acrescentam que há três níveis de qualidade crescente na utilização dos quadros interativos em contexto de sala de aula: a eficiência de utilização de diversos recursos em simultâneo, o aumento das aprendizagens pelo acréscimo da motivação, a transformação das mesmas pela riqueza de experiências.

Os últimos anos foram particularmente profícuos em Portugal na introdução de inovações tecnológicas no processo de ensino/aprendizagem, sendo de destacar, entre outras, o Quadro Interativo.

Quando no final do ano lectivo 2005/2006 o Ministério da Educação convidou os docentes de Matemática a elaborar um Plano de Ação para a Matemática, as escolas tiveram de selecionar recursos tecnológicos necessários ao melhoramento das condições de trabalho, sendo os quadros interativos uma das suas principais escolhas. Neste momento, a maioria das escolas públicas portuguesas foram apetrechadas com, pelo menos, um quadro interativo no âmbito deste Plano.

No entanto, a introdução de uma ferramenta na sala de aula deve ser sempre acompanhada de um estudo prévio sobre as suas vantagens e desvantagens. Apesar de em Portugal terem surgido há pouco tempo, os quadros interativos já são utilizados regularmente em certos países como Canadá, E.U.A., Inglaterra e Austrália.

O Reino Unido foi o primeiro país a adotar quadros interativos no mundo. Um estudo publicado em 2008 mostra que 98% das escolas secundárias e 100% das escolas primárias no Reino Unido tinham quadros interativos em 2007 (Becta, 2008). Os estudos relacionados têm demonstrado que os QI reforçam a motivação dos alunos e o seu empenho na aprendizagem, pois os recursos interativos atraem a atenção e aumenta a concentração (Marzano, 2009; Schmid, 2008; Slay *et al*, 2008; Smith, Higgins, Wall & Miller, 2005).

A Universidade de Keele, em Staffordshire, Reino Unido, tem vindo a fazer há cerca de 6 anos variados estudos sobre a utilização de Quadros Interativos no ensino da Matemática (sobretudo no Ensino Secundário). Seguem-se algumas conclusões produzidas a partir desses estudos e que podem ser úteis aos professores de matemática (e não só) que utilizam ou que em breve utilizarão os quadros interativos na sala de aula. De acordo com os autores destes estudos, para que o QI tenha o devido impacto na dinâmica da sala de aula e nos próprios alunos, é fundamental adaptar as estratégias de sala de aula para um formato "triangular": trabalho na secretária, trabalho no quadro interativo, trabalho na "cabeça dos alunos".

Ao projetar o ecrã do computador no QI, permite-se que os alunos interajam mais com o *software* na sala de aula do que a partir do computador. Essa projeção permite selecionar, ativar e interagir com os *softwares* específicos (Wood & Ashfield, 2008).

O potencial do QI baseia-se na grande quantidade de recursos disponíveis estando bem adaptado ao ensino (Glover & Miller, 2001), nomeadamente na capacidade de promover discussões, podendo apresentar a informação de várias maneiras tornando a aula mais atraente e dinâmica para os alunos.

Miller identificou seis técnicas comuns que são usadas nas aulas com o QI: o arrastar e soltar, esconder e revelar, a cor, sombrear e destacar, combinando os termos equivalentes, movimento e animação, e um feedback imediato (Miller, 2004).

A interatividade associada ao QI é caracterizada por Higgins *et al.* (2007) como uma forma de interação entre professor e aluno, entre aluno e aluno e ainda entre professor e professor, atuando todos eles em conjunto com a utilização de informação digital variada no processo de aprendizagem, influenciando, deste modo, as práticas educativas. Smith *et al.* (2005) referem igualmente que a utilização do QI permite que os professores sejam mais versáteis nas suas apresentações e reforça a interatividade na sala de aula.

Do ponto de vista dos alunos, o uso do QI no processo ensino/aprendizagem apresenta benefícios claros. O estudo realizado pelo GEPE (2008) refere que os alunos mostram-se entusiasmados com a sua utilização. Miller *et al.* (2005a:105) reconhece "vantagens consideráveis e ganhos em termos de motivação dos alunos". A este respeito, estudos desenvolvidos por Levy (2002) e Wall *et al.* (2005) referem que a forma como a informação é apresentada, através da cor e movimento, é vista pelos alunos como motivação e reforço da sua concentração e atenção. Do mesmo modo, Kennewell e Beauchamp (2007) concluem que o QI pode oferecer potencial para melhorar a dinâmica de sala de aula, nomeadamente no aspecto visual e dinâmico das representações, o ritmo da aula e na motivação dos alunos.

A utilização do QI permite ainda associar as vantagens de visualização em grandes grupos, simulação e interação aumentando, assim, a participação dos alunos e o reforço da aprendizagem (Clyde. 2004; Higgins *et al.*, 2007).

Miller e Glover (2006) afirmam que um dos maiores ganhos do QI é as exposições apresentadas à classe/turma, possibilitando ao grupo de alunos troca de experiências de aprendizagem.

Segundo Marques (2008) os alunos ao verem projetadas as imagens no quadro, permitem que o professor tenha interação com as informações projetadas podendo modificá-las de acordo com as suas necessidades e as dos alunos.

Glover e Miller (Miller *et al*., 2005; 2006a; 2006b; Glover *et al*., 2004) têm vindo a demonstrar que a eficácia dos professores conscientes do potencial de interatividade dos QIs para apoiar uma variedade de situações e estilos de aprendizagem, se traduz em abordagens construtivistas de atividades, cuidadosamente planificadas, onde a abordagem dos conceitos contribui para a compreensão cognitiva e a gestão da aula promove atividades de inter-relação entre professor-aluno e aluno-aluno, que resultam na participação ativa do aluno e, consequentemente, no desenvolvimento de competências de raciocínio.

As aulas dos professores que utilizam o QI, tendem a estruturar-se em três fases:

- introdução/sequenciação/motivação
- desenvolvimento/ atividade principal
- revisão/sistematização/plenário**.** (Miller *et al*., 2004)

As características essenciais de interatividade, intrínsecas ao QI, permitem a flexibilidade de se adaptar à diversidade de estilos de aprendizagem, a sequencialidade e o reforço do processo de aprendizagem, parecem pois oferecer aos professores que delas estão conscientes uma matriz para uma planificação da aula passo-a-passo (Miller *et al*., 2004).

Do ponto de vista dos professores, Glover *et al.* (2007) mencionam quatro vantagens importantes relacionados com a prática pedagógica do professor: preparação das aulas, estruturação da aula, gestão da aprendizagem dos alunos e gravação e edição das lições. Os QI possibilitam aumentar o ritmo da aula através da rápida manipulação de imagens e recursos multimédia (Gillen *et al.*, 2007). Beauchamp (2004), Hodge e Anderson (2007) sugerem também como vantagem relevante o facto de o professor manter o contacto visual com os alunos à medida que se expõem os conteúdos, uma vez que este permanece na frente da turma enquanto controla o computador através do quadro.

Glover e Miller (2001) acrescentam que há três níveis de qualidade crescente na utilização dos quadros interativos em contexto de sala de aula: a eficiência de utilização de diversos recursos em simultâneo, o aumento das aprendizagens pelo acréscimo da motivação, a transformação das mesmas pela riqueza de experiências.

Dos benefícios mais citados em relação à implementação de quadros interativos em sala de aula refiram-se o aumento das interações dos alunos/professores, o empenho e motivação (Smith, Hardman & Higgins, 2006).

Hennessy, Deaney, Ruthven e Winterbottom (2007) indicaram que os QI são capazes de proporcionar "oportunidades de colaboração para o raciocínio, testes de hipóteses e interpretações que vão além daqueles oferecidos por dispositivos estabelecidos em sala de aula" (p. 284). Através da utilização de QI, os padrões de interação entre professores e alunos mudaram, e as modalidades de ensino devem ser modificados (Zevenbergen & Lerman, 2008). Salientam que a mudança nas práticas pedagógicas dos professores é um elemento primordial no sucesso da integração de QI em ambientes de ensino e aprendizagem. Noutras palavras, a passagem de um tradicional quadro preto/branco para um quadro interativo apresenta uma excelente oportunidade para repensar os princípios fundamentais do ensino e da aprendizagem e a criação de novos modelos pedagógicos para as práticas dos professores.

O estudo da *European Schoolnet – The ICT Impact Report* (2006) – que visa avaliar o impacte das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), anuncia que o uso dos QI leva a melhores resultados nos testes escolares, sobretudo em disciplinas como a

Matemática, o Inglês e as Ciências Naturais. Esse relatório baseou-se em estudos provenientes do Reino Unido e de outros países, entre 2001 e 2006.

Software dinâmico e interativo específico da Matemática

Existe muito *software* que se pode usar para enriquecer as aulas de Matemática, podendo praticamente todo ser utilizado sobre um quadro interativo, o que possibilita aos professores tornarem as suas aulas ainda mais interessantes e mais diversificadas.

É de salientar que "[…] a investigação tem confirmado as grandes potencialidades educativas tanto de um ambiente computacional como de um software dinâmico para o ensino da geometria." (Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, 1998, p. 97).

Ferreira (2005), ao recorrer ao *Geometer´s Sketchpad* (GSP) para a lecionação de aulas de Geometria, concluiu que:

> o computador apoiado com *software* adequado e com tarefas diferentes e adequadas, podem contribuir para um processo de ensino/aprendizagem mais rico, devido ao seu poder motivador e às suas potencialidades para o ensino da geometria, em que as atividades de iniciativa e de descoberta são predominantes. Contribui para um bom ambiente de trabalho, motivador e ativo, interessante e estimulante, onde os alunos trabalham ao seu próprio ritmo, envolvem-se mais activamente e deixam de ter um papel passivo e onde o computador e o professor são seus "companheiros na descoberta (p.194).

A utilização do *Geometer´s Sketchpad* para Ferreira (2005), possibilita aos alunos manipularem dinamicamente figuras geométricas, e estas ao serem arrastadas mantinham as suas relações inalteradas, e por outro lado a visualização imediata das alterações produzidas, ajudou a descoberta de propriedades e relações geométricas. A utilização deste *software* permitiu aos alunos explorar, descobrir e a construir conceitos, a fazer conjecturas e a raciocinar.

O surgimento de novos *softwares* e o desenvolvimento dos mesmos no ensino de Matemática, tem permitido novas abordagens dos conteúdos curriculares na sala de aula. (Ponte & Canavarro, 1997).

Para Ferreira (2005), as vantagens de recorrer ao uso do computador e a *software* adequado, são várias. O fácil uso, a possibilidade de permitir uma abordagem dos conceitos assente na descoberta e na exploração, o estímulo à criatividade onde os alunos visualizam, analisam, fazem conjeturas e do desenvolvimento do trabalho cooperativo e da resolução de problemas, este tipo de *software* possibilita trabalhar e compreender a matemática de uma forma que não é realizável com as tradicionais ferramentas, como o papel e o lápis.

Para Corrente (2009) as atividades implementadas na sala de aula com recurso ao quadro interativo que envolvam *software* específico da disciplina de Matemática, nomeadamente ambientes de geometria dinâmica ou emuladores de calculadoras gráficas permitem manipular, num curto espaço de tempo, várias aplicações e explorar diversos contextos alternando de uns *softwares* para outros, ou mesmo para uma gerindo, simultaneamente, várias fontes de informação ou várias abordagens a um mesmo problema. Refere ainda, que:

> a utilização de *software* específico, como ambientes de geometria dinâmica e outros, facilita aos alunos a aquisição e compreensão de procedimentos e conceitos da disciplina. Os alunos podem não só visualizar o processo, como também detectar erros ocorridos e reforçar a comunicação, já que todos partilham a mesma informação (p. 41).

Ambientes de Geometria Dinâmica

Os ambientes computacionais mais recentes para o ensino que permitem realizar construções geométricas no ecrã do computador, utilizando explicitamente as propriedades das figuras, possibilitando a manipulação direta dessas construções, conservando as propriedades utilizadas, dá-se o nome de Ambientes Geométricos Dinâmicos (AGD) (Ferreira, 2004).

Os ambientes de geometria dinâmica propiciam na disciplina de Matemática um trabalho colaborativo, de investigação o que os torna bastante atrativos para os alunos (Almiro, 2004).

A propósito dos ambientes de geometria dinâmica, Gravina e Santarosa (1998) referem que estes ambientes ("*Cabri*", "*Sketchpad*") dão ênfase aos objectos matemáticos e às ações mentais dos alunos e portanto ajudam à construção do conhecimento matemático e do desenvolvimento das construções cognitivas.

Os AGDs funcionam como "ambientes dinâmicos" onde os alunos podem experimentar as suas ideias, merecendo especial destaque o *feedback* visual devolvido pela manipulação dos desenhos no ecrã do computador como apoio na resolução de problemas. Este *feedback* visual, através da manipulação de uma construção, permite verificar visualmente uma propriedade ou uma relação ou validar uma construção como resistente à manipulação direta (arrastamentos), ou seja, legitimar uma figura associada a diferentes representações externas (Ferreira, 2005).

O desenho, a manipulação, a investigação de relações e a construção no computador de objectos geométricos permitem a exploração de conjeturas que precedem o uso do raciocínio formal. Atualmente, ferramentas computacionais designadas por ambientes geométricos dinâmicos [...] são geradoras de uma nova abordagem no ensino e aprendizagem da geometria. Permitem a construção e manipulação de objectos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes (Abrantes *et al.*, 1999).

A utilização dos AGDs é facilitadora da experimentação e, através dos vários exemplos gerados, da investigação de propriedades e relações que se mantêm invariantes aos arrastamentos: "a procura de tudo o que permanece constante, no meio de tudo o que varia" (Veloso, 1995, p. 58).

No plano específico da Matemática, os ambientes de geometria dinâmica, foram o campo onde houve mais formação recente e onde há uma verdadeira novidade de fácil acesso e visualização rápida para os alunos quer na escola quer em casa através da internet, porque como se sabe corresponde às características sociais desta geração, "rápido, acessível, fácil, barato e sem complicações profundas ou com complicações e dificuldades à medida do utilizador". Esta constatação vai ao encontro de citado por Ponte e Oliveira (2001, p.15):

> Através das Novas Tecnologias é possível dar uma visão da Matemática mais suave, de modo a que os alunos se sintam mais motivados para "descobrir" matemática, visto que hoje em dia qualquer jovem pode ter acesso a um computador. As Novas Tecnologias na escola podem vir a facilitar todo o processo de ensino-aprendizagem na medida em que permitem um leque muito vasto de exploração, visualização e experimentação que de outra forma seria praticamente impossível.

Uma das funções disponibilizada pelos programas de geometria dinâmica, e uma das mais estudadas empiricamente, é o arrastamento de pontos ou partes de figuras.

> Esta função é uma ferramenta poderosa que enfatiza a diferença entre desenhar e construir figuras neste tipo de ambientes, constituindo uma mais valia para a aprendizagem dos conceitos (Candeias, 2005, p.16).

A interação entre os alunos na apresentação e discussão dos seus resultados desenvolve a sua capacidade de análise, crítica e de concentração (Santos, 2000). O *software* de geometria dinâmica favorece essa interação, proporcionando a exploração e a descoberta à disposição do aluno.

Enfim, este tipo de *software* permite trabalhar e compreender a matemática de uma forma que não é possível com as tradicionais ferramentas, como o papel e o lápis. Existem diversos AGDs, no entanto, selecionei os mais conhecidos entre nós: o Geogebra e o *Geometer's Sketchpad* (GSP).

GeoGebra

O GeoGebra é um programa livre de geometria dinâmica criado por Markus Hahenwarter em 2001 na University of Salzburg para ser utilizado em ambiente de sala de aula e tem sido desenvolvido na Florida Atlantic University.

Por ser um *software* gratuito, os colaboradores podem fazer alterações nos seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando, aprimorando, atualizando ferramentas, com o compromisso de disponibilizarem tais melhoramentos de forma, também gratuita. Outro recurso muito interessante é o GeoGebra Pre-Release onde se tem acesso ao programa online (www.geogebra.org/cms/), desta forma o usuário pode fazer uso do programa sem ter que instalá-lo no computador, assim o aluno poderá utilizá-lo tanto na escola como em casa, isto é, em qualquer lugar onde tenha acesso a um computador conectado à internet e possua o Java instalado, caso contrário pode fazer a instalação pela própria página na internet do GeoGebra.

O programa "GeoGebra - Dynamic Mathematics for Schools" é uma boa ferramenta para explicar conceitos de forma interativa em ambiente de sala de aula, que reúne geometria, álgebra, estatística e cálculo. Podem-se utilizar pontos, retas, segmentos, seções cónicas bem como funções, permitindo alterar todos estes objetos dinamicamente após a construção estar finalizada. Podem ser incluídas equações e coordenadas diretamente. O GeoGebra é capaz de lidar com variáveis, vetores e pontos, funções, derivadas, etc. De salientar que este *software* de grande qualidade é totalmente gratuito. Para além disso, permite a exportação de imagens com formatos PNG e EPS.

Sketchpad

Esta aplicação informática de *Geometria Dinâmica* é uma excelente ferramenta para o estudo de Geometria e a versão (4.0) pode ser utilizada no estudo de funções. Permite abordar problemas geométricos através da experimentação e manipulação de diferentes elementos facilitando a realização de qualquer construção geométrica. Como algumas características destacam-se a facilidade de aprendizagem e a rapidez para desenhar e construir, assim como explorar e resolver problemas de maneira interativa. Partindo de objetos elementares, tais como pontos, segmentos de reta, semirretas, retas, etc. e de um amplo conjunto de opções, realiza-se qualquer construção geométrica que poderá incluir novos elementos definidos pelo utilizador. Uma das possibilidades mais importantes desta aplicação é a construção de lugares geométricos e a animação que se pode definir sobre os objectos de uma construção. Em relação a este "*software*" educativo, "*The Geometer´s Sketchpad*", Veloso (2002) afirma que se trata de um programa que aborda as geometrias do ensino básico e secundário e portanto bem adaptado a esses níveis de escolaridade. Tem como principal propósito a construção e exploração de figuras que podem ser manipuladas interactivamente, conservando sempre as relações matemáticas impostas na sua construção.
Para Laborde (2001) este tipo de *software* quando é utilizado na sala de aula pode assumir quatro papéis diferentes: facilitador de apresentação de tarefa; facilitador da resolução da tarefa matemática; modificador das tarefas dadas e potenciador de tarefas que só podem existir devido ao próprio programa.

Emuladores de calculadoras gráficas

Utilizando emuladores das máquinas gráficas, o professor pode simular no computador a utilização da calculadora. Conforme a marca e o modelo de calculadora gráfica adotada na escola assim, o professor pode utilizar o emulador adequado desde que o fabricante o disponibilize. As principais marcas de calculadoras gráficas adoptadas nas escolas secundárias portuguesas, *Texas Instruments* e *Casio*, disponibilizam os *softwares TI-SmartView* e fx9860 emulador, respetivamente. São uma espécie de calculadora virtual uma vez que os alunos podem observar e acompanhar no quadro interativo os procedimentos do professor com a calculadora e esclarecer imediatamente as suas dúvidas. Segundo Wilson (2008) a utilização destas calculadoras virtuais permitem "ajudar" os professores a aumentarem as oportunidades para os alunos participarem em atividades plenárias úteis em que os alunos partilham resultados e abordagens, fornecem *feedback* imediato e sem juízos de valor aos alunos, aumentando as oportunidades para os alunos acompanharem as suas próprias linhas de pesquisa matemática.

Para Ponte e Canavarro (1997, p. 112)

> A calculadora e o computador facilitam a criação deste ambiente de trabalho, incentivando à formulação de conjeturas por parte dos alunos, estimulando uma postura investigativa, enriquecendo o tipo de dados e de argumentos e os argumentos que os alunos podem usar.

Analogamente, Ramos e Raposo (2008), concluem que o computador e calculadora podem influenciar a Matemática que é ensinada, pois permite ao aluno fazer explorações, investigar, resolver problemas, estudar relações usando as representações.

Applets

As vantagens atribuídas a este tipo de ferramenta, é o facto de os alunos poderem interagir diretamente com o conteúdo (experimentação), criando uma intuição sobre determinado conceito explorado, de modo a tornar mais robusta a sua imagem de conceito sobre ele.

Um avanço significativo na tecnologia foi a inclusão de novas linguagens de programação, como a linguagem de programação Java que permite a integração de pequenos programas, ou aplicações (chamadas *applets* ou *Java-applets*) diretamente na página Web, sendo reconhecidas pelo *browser* (Steen, 2002).

Estas ferramentas aumentam as funcionalidades interativas dos sítios *Web* (Simões, 2005) e promovem uma interação mais rica, pois permitem a experimentação (Steen, 2002).

Um *Applet*, como definido pelo *Journal of Online Mathematics and its Applications* (JOMA), é uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática que podem ser executados em qualquer navegador *web*.

O professor de matemática, servindo-se das potencialidades multimédia da Web, pode proporcionar aos alunos experiências interessantes de interação com aplicações interativas (*applets*) disponíveis na Internet (Steen, 2002). Algumas áreas da matemática, como por exemplo a geometria e funções, beneficiam particularmente desta possibilidade da Web, devido à representação simbólica dos conceitos e propriedades, tornando-se os alunos capazes de transferir e aplicar os conhecimentos adquiridos na manipulação de applets noutras situações (Steen, 2002).

Como tal, os *applets* são uma ferramenta pedagógica que está acessível aos alunos e professores, existindo uma grande variedade disponibilizada na Internet.

Drijvers *et al* (2007), mencionam que o uso de applets no estudo de funções constituem um meio favorecedor ao estabelecimento de relações entre as várias representações de uma função.

De seguida, são apresentados alguns exemplos de *applets* que se coadunam com o tema das funções.

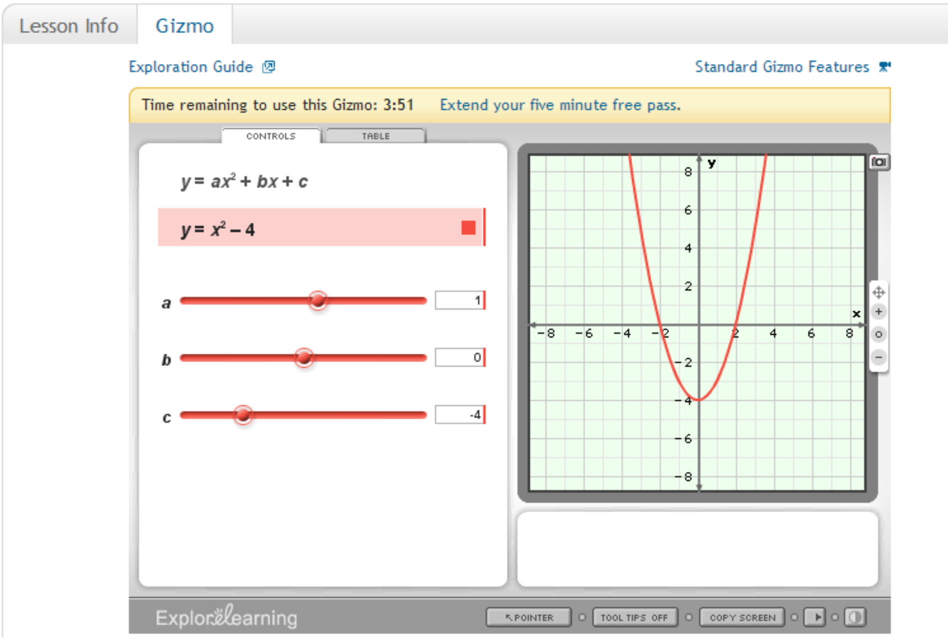


Figura 1: *Applet* para explorar a função quadrática

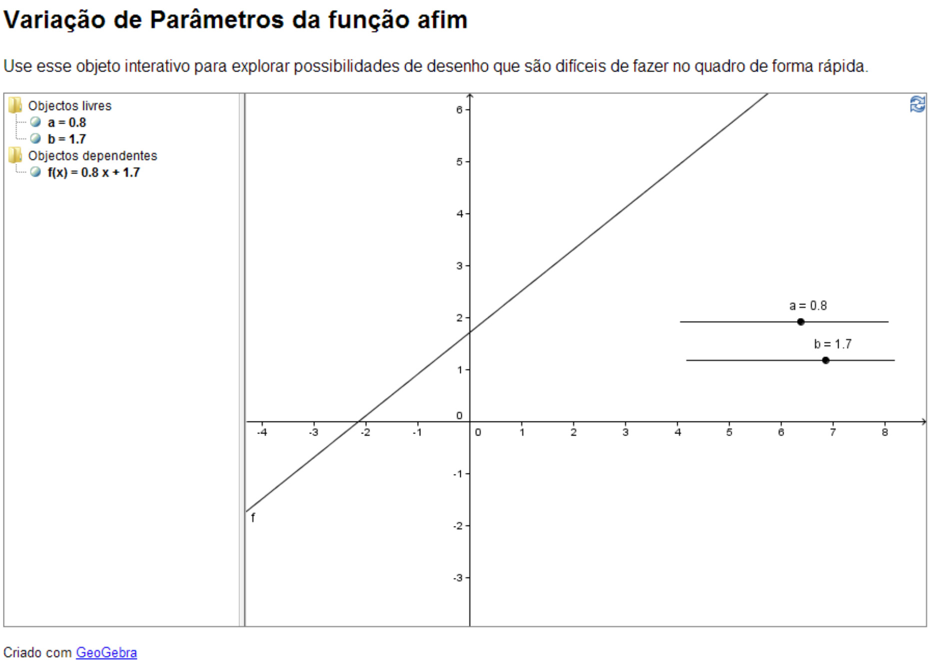


Figura 2: A*pplet* criado com o GeoGebra para explorar a função afim

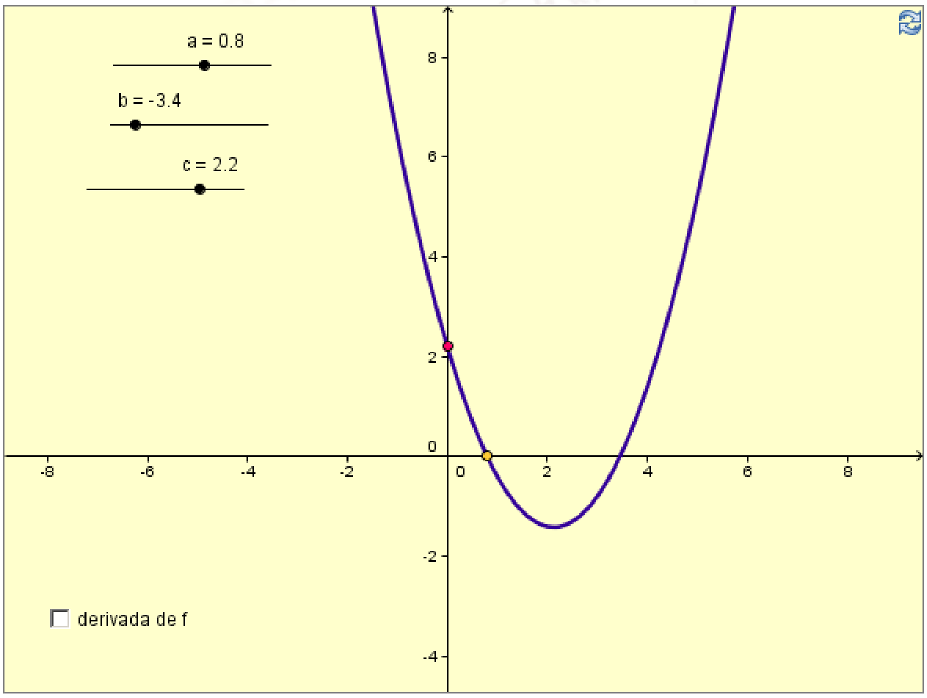


Figura 3: A*pplet* criado com o Geogebra para explorar a função quadrática

A Tecnologia no Currículo de Matemática

Nestas secções apresentam-se as orientações internacionais, seguidas das nacionais sobre a utilização das tecnologias no ensino da Matemática.

As orientações do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

Na década de 80 esta organização dava indicações claras para a utilização dos computadores no ensino da Matemática. Várias das suas publicações encontram-se traduzidas pela APM – Associação de Professores de Matemática. É o caso da publicação "Agenda para ação: recomendações para o ensino de matemática nos anos 80.", onde pode ler-se:

Recomendação 3:

"Que os programas de Matemática tirem todas as vantagens das capacidades das calculadoras e dos computadores em todos os níveis de ensino".

No desenvolvimento desta recomendação:

"Para além do conhecimento do papel dos computadores e calculadoras na sociedade, a maioria dos estudantes deve saber trabalhar com eles e usá-los na resolução de problemas.

(...) Todos os estudantes devem ter acesso a calculadoras e cada vez mais aos computadores ao longo dos seus programas de Matemática nas escolas.

(...) Calculadoras e computadores devem ser usados de formas imaginativas para explorar, descobrir, e desenvolver conceitos matemáticos e não somente para verificar resultados ou realizar exercícios práticos.

Os professores devem conduzir a sua aula de forma que o uso de computadores por cada estudante em atividades isoladas não substitua a interação dos estudantes com os colegas e com o professor.

(...) Os educadores devem ter cuidado na escolha do *software* que se ajuste aos objectivos e metas do programa e não perverter os objetivos e a sequência do desenvolvimento para se adaptarem à tecnologia e *software* disponível.

Mais recentemente, no ano 2000, esta associação lança uma nova publicação intitulada *Principles and Standards for School Mathematics* onde são enunciados seis princípios fundamentais para o ensino da Matemática (p.11): Igualdade (*Equity*), Currículo

(*Curriculum*), Ensino (*Teaching*), Aprendizagem (*Learning*), Avaliação (*Assessment*) e Tecnologia (*Technology*).

O Princípio da Tecnologia estabelecido pelo NCTM (2007) dá ênfase à utilização da tecnologia em três aspectos:

- *A tecnologia melhora a aprendizagem da matemática* (Technology enhances mathematics learning).

A tecnologia, nomeadamente os computadores, facilita a aprendizagem da matemática porque liberta o aluno de tarefas rotineiras e morosas tendo mais tempo para tarefas de natureza investigativa. Simultaneamente possibilita a visualização de modelos gráficos que o aluno manualmente não conseguiria construir.

- *A tecnologia contribui para um ensino mais eficaz da matemática* (Technology supports effective mathematics teaching).

O professor deve selecionar cuidadosamente as atividades que propõe aos seus alunos quando estão a utilizar os computadores de forma a que sintam necessidade de o utilizar e se apercebam das vantagens da sua utilização.

- *A tecnologia influencia a matemática que é ensinada* (Technology influences what mathematics is taught)

Como a tecnologia permite explorar situações que de outra forma seriam inacessíveis, não influencia só a forma como a Matemática é ensinada e aprendida mas também aquilo que é ensinado.

Este princípio, resumidamente, engloba as ideias supra citadas:

"A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2007, p. 26).

As orientações expressas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007) indicam que, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos deverão desenvolver a capacidade de visualização através de experiências concretas com uma diversidade de objectos geométricos e através da utilização das tecnologias, que permitem rodar, encolher e deformar uma série de objetos bi e tridimensionais (p. 47).

O uso eficaz da tecnologia nas aulas de matemática depende maioritariamente do professor, que deverá criar atividades matemáticas que tirem partido das vantagens do que a tecnologia faz bem e de forma eficiente (NCTM, 2007). No entanto, a tecnologia não pode substituir o professor de matemática, nem tão pouco pode ser usada como uma substituição para compreensões básicas e intuições, e competirá sempre ao professor a importante decisão sobre quando e como usar tecnologia, assegurando-se que a sua utilização está a contribuir para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do pensamento matemático dos alunos (NCTM, 2007; Ponte 1997).

As orientações da Associação de Professores de Matemática (APM)

A APM lança um relatório designado *Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o Ensino e Aprendizagem da Matemática.* Com o "propósito de elaborar um diagnóstico e um conjunto de recomendações sobre o ensino e aprendizagem da Matemática no nosso país"

Este documento refere que:

- A utilização do computador proporciona grande envolvimento dos alunos na sua aprendizagem;
- A Internet deve ser utilizada como fonte de recurso para a preparação das atividades letivas;
- Os grupos de Matemática devem possuir recursos diversos, nomeadamente o computador;
- As escolas devem estar equipadas com computadores para o ensino-aprendizagem da Matemática.

O ano 2003 foi o ano da *Matemática e Tecnologia* para a APM e segundo esta associação:

> A educação com recurso à tecnologia é um direito dos alunos, que todos os intervenientes no sistema educativo devem respeitar. A negação deste direito contraria a desejada igualdade de oportunidades de acesso aos bens da educação. A tecnologia tem influenciado e alterado as formas de ver, utilizar e produzir matemática. A educação matemática não pode permanecer indiferente a esta situação. É fundamental que as ferramentas tecnológicas sejam integradas de forma consistente nas atividades letivas, proporcionando aos alunos verdadeiras e significativas aprendizagens matemáticas (APM, 2003, p. 1).

As orientações do Currículo Nacional do Ensino Básico

Segundo o Departamento de Educação Básica do Ministério da Educação no Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (2001) é referido muito explicitamente a utilização do computador:

> Quanto ao computador, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica, assim como de utilizar as capacidades educativas da rede Internet (p. 71).

Na operacionalização transversal, o documento refere o uso expresso das TIC:
"Rentabilizar as potencialidades das tecnologias de informação e de comunicação no uso adequado de diferentes linguagens" (p. 18).
O Currículo Nacional do Ensino Básico foca a importância dos alunos vivenciarem diferentes tipos de aprendizagem, devendo-se para tal diversificar os ambientes de aprendizagens, salientando ainda, a importância da prática frequente de investigações na aula de Matemática ao longo de toda a escolaridade, dada a posição central que a investigação ocupa na atividade dos matemáticos, para que desse modo, os alunos possam "fazer" Matemática.

As tecnologias e a sua preconização nos currículos oficiais de Matemática atualmente em vigor

No programa de Matemática para o terceiro ciclo do Ensino Básico de 1991 pode ler-se no âmbito dos objectivos gerais - capacidades/aptidões, que os alunos deverão: "utilizar adequadamente a calculadora, e sempre que possível meios informáticos tirando partido das suas potencialidades".
No novo programa de Matemática do Ensino Básico (2007), pode ler-se nos objetivos gerais:

> "Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática, isto é, devem ser capazes de usar instrumentos matemáticos tais como réguas, esquadros, compassos, transferidores, e também calculadoras e computadores". (p. 4)

Mas não é só nos objetivos gerais que se faz referência ao uso das calculadoras e do computador. Nas orientações metodológicas explicita-se a importância do uso da calculadora e do computador na realização de cálculos complexos e na representação de objetos geométricos e de informação:

> Os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações (p. 9).

Em diversos momentos os autores dos programas mencionam a importância de utilizar as tecnologias. A propósito de recursos justifica-se a importância da geometria dinâmica e dos *applets* na compreensão de conceitos e relações geométricas: "A geometria dinâmica e os *applets* favorecem igualmente a compreensão de conceitos e relações geométricas pelo que devem ser utilizados" (p. 21).

Do mesmo modo, no ponto dedicado às tarefas propõem-se a utilização de *software* de geometria dinâmica, em particular nas tarefas de exploração e de investigação:

> Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação, uma vez que como modelos geométricos concretos, permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afetiva com a Matemática (p. 51).

Mas é nos programas do Ensino Secundário de Matemática A, Ministério da Educação (2001), onde se explicitam e apontam as diversas potencialidades do computador, em particular, nos domínios da geometria dinâmica e das funções, considerando-se obrigatória a sua utilização:

> O computador pelas suas potencialidades nomeadamente nos domínios da Geometria Dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação permite atividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa (…) recomenda-se enfaticamente o uso dos computadores tanto em salas onde os estudantes poderão realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional, além do partido que o professor pode tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um projetor…(p. 16).

Os programas de Matemática para o Ensino Secundário recomendam a utilização das novas tecnologias na sala de aula, como ferramentas essenciais para melhor veicular a informação. A sala de aula deve ser um cenário pedagógico interativo que envolva a turma e o professor. Ao professor cabe escolher e diversificar estratégias conducentes a uma melhor transmissão dos conteúdos a lecionar.

Os programas de Matemática A para o Ensino Secundário (2001) aconselham a utilização das novas tecnologias na sala de aula, como ferramentas essenciais para melhor transmitir a informação. A sala de aula deve ser um palco pedagógico interativo que abranja a turma e o professor. Ao professor cabe selecionar e diversificar estratégias, de acordo com a heterogeneidade ou homogeneidade da turma. É aqui que assenta a grande vantagem das TIC na sala de aula. Elas são, não só objeto de motivação e predisposição para a aprendizagem, mas também permitem que, através do seu manuseamento no decurso da aula, o aluno desenvolva a capacidade de resolução de problemas, de investigação e exploração.

A didática que se preconiza para a Matemática no Ensino Secundário prevê a possibilidade do uso de materiais e equipamentos diversificados propícios a aprendizagens significativas capazes de proporcionar nos alunos agilidade intelectual, espírito crítico, capacidade de formular problemas e de modelar situações desconhecidas, como refere o programa do Ensino Secundário (2001):

> Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor, …); Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polidron”, sólidos de enchimento, …); Quadro quadriculado e papel milimétrico; Meios audiovisuais (retroprojetor, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, …); Livros para consulta e manuais; Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, …); Calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas; Computadores; Sensor de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.” O uso dos restantes recursos físicos existentes na sala de aula: papel, lápis/giz, quadro, etc., auxilia, obviamente, todo um processo de ensino/aprendizagem da Matemática**.** No sentido de desenvolver no aluno a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção na vida sócio/pessoal, o programa do Ensino Secundário, preconiza que “Todas as escolas secundárias devem dotar-se quanto antes de Laboratórios de Matemática”. (pp. 18-19)

Como os programas de Matemática para o ensino secundário aconselham a utilização das novas tecnologias na sala de aula, como ferramentas fundamentais para melhor difundir a informação, a sala de aula deve ser um cenário pedagógico interativo que envolva a turma e o professor. Ao professor cabe escolher e diversificar estratégias conducentes a uma melhor transmissão dos conteúdos a lecionar, de acordo com a heterogeneidade ou homogeneidade da turma. E aqui que assenta a grande vantagem das TIC na sala de aula.

Capítulo III

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas, os participantes, os instrumentos e processos utilizados para proceder à recolha e análise dos dados, bem como o modo como a investigação é efetuada, tendo em conta o problema a estudar.

Opções metodológicas

Relembro que o objetivo deste estudo é compreender as implicações do uso da tecnologia, em particular do QI, na dinâmica da aula de Matemática que explora tarefas de natureza diversificada.

Para tal foram formuladas questões que serviram de base de orientação para a conduta a seguir na análise dos dados, a saber:

- Que implicações traz o QI ao nível da estrutura da aula, em especial, na discussão e síntese?
- Que implicações traz o QI ao nível do papel dos alunos e do professor (na construção do conhecimento matemático)?
- Que implicações traz o QI ao nível das interações/comunicação entre alunos e alunos e professor?

Seguidamente, apresento os motivos pelos quais opto por uma metodologia de investigação qualitativa.

Investigação qualitativa

A investigação em causa insere-se numa perspetiva qualitativa da investigação educacional. Como afirma Bodgan e Biklen (1999), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo seu contexto.

Na Educação, atualmente recorre-se frequentemente a este tipo de metodologia, pois torna-se cada vez mais importante conhecer, descrever, explicar e interpretar a natureza dos fenómenos educativos e foi neste contexto que se optou por uma metodologia qualitativa.

Segundo Bogdan e Biklen (1999, p. 48), os investigadores qualitativos, "entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando observadas no seu ambiente habitual de ocorrência", devendo o investigador preocupar-se mais com o processo do que com os resultados, procurando aceder ao pensamento dos participantes, ao significado que eles atribuem, ao seu desempenho e à realidade em que estão inseridos (Gómez, Flores & Javier, 1999).

O objetivo da metodologia qualitativa é "o de compreender o mundo dos sujeitos e determinar como e com que critério eles o julgam" (Bogdan & Biklen, 1999, p. 287).

Segundo Bogdan e Biklen (1999), este tipo de investigação revela-se particularmente adequado quando as questões são "formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural" (p. 16). Para estes autores, as investigações qualitativas têm essencialmente as seguintes características: (i) A fonte direta de dados é o ambiente natural da sala de aula, uma vez que as atitudes e comportamentos dos alunos podem ser influenciados pelo contexto onde estão inseridos e porque as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência; (ii) Os dados recolhidos são de natureza qualitativa, uma vez que têm a forma de palavras, isto é, terão por base transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos produzidos pelos alunos e documentos oficiais; (iii) O investigador qualitativo procura a compreensão do modo como os fenómenos decorrem, sendo o processo mais relevante do que os produtos finais obtidos; (iv) A análise dos dados é feita de forma indutiva, não tenho a intenção de confirmar hipóteses prévias, mas sim construí-las à medida que vou analisando a prática e o discurso dos alunos; (v) Compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências, assume uma importância vital para o investigador qualitativo.

Para Merriam, (1988), um estudo de caso qualitativo caracteriza-se pelo seu carácter descritivo, indutivo, particular e a sua natureza heurística pode levar à compreensão do próprio estudo. Segundo a mesma autora, "um estudo de caso é um estudo sobre um fenómeno específico tal como um programa, um acontecimento, uma pessoa, um processo, uma instituição ou um grupo social" (idem. p. 9).

Neste tipo de investigação, o estudo de caso é muito utilizado quando não se consegue controlar os acontecimentos e, portanto, não é de todo possível manipular as causas do comportamento dos participantes (Yin, 2003). Segundo o mesmo autor, um estudo de caso é uma investigação que se baseia principalmente no trabalho de campo, estudando uma pessoa, um programa ou uma instituição na sua realidade, utilizando para isso, entrevistas, observações, documentos, questionários e artefactos. Para Stake (2009), na investigação qualitativa o investigador privilegia a compreensão das complexas inter-relações entre tudo o que existe e tratam a singularidade dos casos e contextos individuais como importantes para a compreensão. Isto é, numa investigação qualitativa o investigador tem de prestar atenção a cada detalhe do ambiente que o rodeia, uma vez que tudo pode ser importante e contribuir para uma melhor compreensão dos casos. No caso desta investigação, estas características mostram-se adequadas aos objetivos do presente estudo. Por um lado, a recolha de dados é realizada em ambiente natural, neste caso, a sala de aula e a fonte direta dos dados, uma turma do 10.º ano em contexto escolar. Deste modo, os dados recolhidos foram ricos em pormenores descritivos que depois foram analisados pelo investigador e a sua interpretação constituiu o instrumento chave de análise. Por outro lado, não pretendo testar qualquer teoria previamente estabelecida, mas sim, analisar os dados de forma indutiva procurando contribuir para a construção de novo conhecimento.

Com esta investigação, não pretendo extrapolar os resultados obtidos, nem tão pouco sugerir que estes ocorreriam, igualmente, em outras turmas com características análogas, pelo que a minha "preocupação central não é a de se os resultados são suscetíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados" (Bogdan & Biklen, 1999, p. 66).

Investigação sobre a própria prática

Esta investigação envolveu uma das turmas que eu lecionava no ano letivo 2011/12. De acordo com Ponte (2002), a investigação sobre a prática pode ter como pontos de partida: (i) a necessidade de alterar algum aspeto da prática profissional do professor, uma vez reconhecida a necessidade dessa mudança e (ii) a compreensão da natureza dos problemas que afetam essa mesma prática, com o intuito de definir uma nova estratégia de ação, numa fase posterior.

Desde que leciono, tenho sentido a necessidade de reformular aspetos particulares da minha prática, adaptando-a às novas realidades com que me deparo, e de refletir sobre o impacto destas alterações no modo como decorre a aprendizagem dos alunos.

A realização deste trabalho de investigação surge, também, com o objetivo de ir ao encontro de uma das minhas preocupações enquanto professor: dar a conhecer a aplicabilidade das tecnologias na sala de aula e como devem ser usadas.

O trabalho investigativo, que decorre de um modo mais sistemático e estruturado do que uma simples reflexão, vem ao encontro da necessidade que sinto de analisar o papel de uma experiência de ensino, diretamente relacionada com a minha prática profissional, procurando compreender o modo como esta influencia os desempenhos dos alunos.

É necessário pensar na qualidade das aprendizagens dos alunos a vários níveis e não só pedagogicamente. As investigações em torno da própria prática têm vindo a aumentar nos últimos anos. Citando Ponte:

> A investigação sobre a sua prática é, por consequência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente (Ponte, 2002, p. 6).

Alarcão (2001), afirma que os professores ao serem também investigadores, para além de planificarem e ensinarem, têm a possibilidade de refletir sobre a sua prática de se interrogarem sobre as aprendizagens que os seus alunos realizam.

Durante o período em que decorreu este trabalho, exerci, em simultâneo os papéis de professor e investigador.

Estudo de caso

Este estudo abordou uma metodologia qualitativa, cujo "*design*" de investigação, usando as palavras de Ponte (1994a), é o estudo de caso. Ainda segundo o mesmo autor (2002, p.17), "é a natureza das questões formuladas que determina a natureza do objeto de estudo e dos dados a recolher" e deste modo, o estudo de caso é adequado quando o fenómeno de estudo não se pode isolar do contexto, o que corresponde à situação desta investigação. Assim, a minha opção metodológica recai na realização de um estudo de caso uma vez que se pretende observar o professor e os alunos no seu local de trabalho. Não exerço qualquer tipo de controlo sobre a investigação e pretendo responder às questões cujo produto final é de natureza descritiva e interpretativa.

O estudo de caso é um processo específico para o desenvolvimento de uma investigação qualitativa e tem como objeto de estudo uma entidade bem definida: um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma turma, uma pessoa ou uma entidade (Ponte, 2006). Ainda, segundo o mesmo autor, o objetivo do estudo de caso é "compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador" (Ponte, 2006, p.2). O estudo de caso assume-se, na perspetiva de Ponte (2006, p.2), como uma investigação:

> particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse.

Por isso, baseia-se fortemente no trabalho de campo e utilizei instrumentos e estratégias de recolha de dados, onde privilegiei as observações, visionamento de vídeo e áudio e documentos, sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados.

Através da confrontação com outras situações já conhecidas e com as teorias já existentes, os estudos de caso podem ajudar a gerar novo conhecimento e também novas questões, que originem o desenvolvimento de outras investigações em educação (Ponte, 1994b).

A realização deste trabalho de investigação surge, também, com o objetivo de ir ao encontro de uma das minhas preocupações enquanto professor: compreender as implicações do uso da tecnologia, em particular do QI, na dinâmica da aula de

Matemática. Deste modo, procuro compreender que implicações traz o QI ao nível da estrutura de aula nomeadamente na fase da discussão/síntese das tarefas realizadas, bem como na construção do conhecimento matemático e das interações promovidas na sala de aula. O trabalho investigativo, vem ao encontro da necessidade que sinto de analisar o papel de uma experiência de ensino, diretamente relacionada com a minha prática profissional.

Participantes

Esta investigação foi realizada numa turma do 10.º ano de escolaridade do curso científico humanístico de Ciências e Tecnologias. Esta secção descreve a escola, o meio envolvente e a turma.

A escola e o meio envolvente

A presente investigação foi desenvolvida numa escola secundária do Alto Alentejo. A escola tem cerca de 90 professores e aproximadamente 850 alunos distribuídos por 29 turmas do 7.ºano ao 12.º ano e seis turmas de cursos profissionais. Esta escola tem treze turmas do 3.º ciclo e dezasseis turmas do ensino secundário.

O Projeto Educativo da escola tem como desígnio atingir níveis elevados na qualidade do processo de ensino, garantindo a eficácia na aprendizagem, e que reforce uma cultura de escola assente no rigor e exigência, compaginável com boas práticas e num quadro de mobilização dos recursos humanos, numa perspetiva que todos, sem exceção, têm um importante papel a desempenhar. Em termos de infraestruturas e de material didático é uma escola bem equipada, pois foi intervencionada pelo Programa de Modernização de Escolas Secundárias, tendo todas as salas um projetor de vídeo e computador, e em cada quatro salas existe uma sala com quadro interativo.

A turma

A turma do 10.º ano que participa no estudo era constituída, inicialmente, por 23 alunos, dos quais sete alunos eram do sexo feminino e dezasseis alunos do sexo masculino. No final do 1.º período, um dos alunos, do sexo masculino, mudou de turma.

Na altura da realização da intervenção didática a turma tinha por 22 alunos.

Na turma não existem alunos repetentes no 10.º ano. As idades dos participantes estão compreendidas entre os quinze e dezassete anos, como se pode verificar na tabela 4.

Tabela 4. Distribuição dos alunos que participam no estudo por sexo e idade

	Idade (em anos)			
Sexo	15	16	17	Total
Feminino	7	-	-	7
Masculino	14	-	1	15
Total	21	-	1	22

Globalmente, os alunos têm um bom relacionamento entre si. A grande maioria destes alunos faz parte da mesma turma desde o 7.º ano, o que proporciona uma camaradagem e entreajuda entre eles.

Os alunos têm um aproveitamento satisfatório na generalidade das disciplinas, sendo a Matemática uma das disciplinas onde têm mais dificuldade, como se pode observar na tabela 5, onde são apresentadas as classificações que obtiveram no 1.º período. As classificações inferiores a 10 valores, neste período foi de 8, como se pode apurar pelos dados da tabela seguinte.

Tabela 5. Classificação obtida no 1º período na disciplina de Matemática

	Classificação na disciplina de Matemática (em valores)					
Sexo	0-4	5-9	10-14	15-17	18-20	Total
Feminino		1	1	2	3	7
Masculino		7	5	1	2	15
Total		8	6	3	5	22

Informei a turma sobre a minha intenção de lhe propor um conjunto de tarefas sobre o tema “Geometria” e “Funções” a lecionar durante o 1.º e 2.º períodos de aulas e que esta iniciativa estava integrada num estudo que me encontrava a desenvolver, no âmbito do mestrado.

Informei, também, que iria gravar em vídeo e áudio as aulas. Os alunos mostraram-se muito curiosos e concordaram participar de imediato.

Como os alunos envolvidos são menores de idade, efetuei um pedido de autorização aos encarregados de educação (ANEXOVIII), para que estes permitissem a análise dos materiais produzidos pelos seus educandos, as transcrições de algumas das discussões geradas entre alunos. Os encarregados de educação foram também informados que os dados recolhidos serão usados exclusivamente para cumprir o objetivo da investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato. Este pedido de autorização escrito foi enviado pelos alunos e devolvido por estes devidamente preenchido e assinado pelo respetivo encarregado de educação.

Os grupos

Para a realização da intervenção didática foi necessário organizar a turma em pequenos grupos. Nesta investigação, optei pela metodologia de trabalho de grupo, não só pelas condicionantes do tempo, espaço e recursos, mas por ser apoiado por diversos autores. Por exemplo, para Veloso (1993),

> o trabalho de grupo deverá ocupar um lugar de relevo na aprendizagem da matemática pois ajuda a desenvolver capacidades fundamentais do ponto de vista da Educação Matemática, como por exemplo, de argumentar, de construir uma justificação para os próprios pontos de vista, de criticar as opiniões dos colegas, de ouvir, compreender e aproveitar as ideias dos outros, e de organizar o trabalho (p.11).

Também nas Normas do NCTM (1991) pode ler-se que devemos proporcionar aos alunos mais possibilidades de trabalhar em pequenos ou grandes grupos. O trabalho de grupo propicia aos alunos a possibilidade de interagirem entre si, confrontando, sem medos, as suas opiniões, refletindo e partilhando entre si pontos de vista, desenvolvendo a capacidade de trabalho em grupo, indispensável na sociedade de hoje em dia. Citando Ponte *et al*. (1997, p.93)

> Trabalhar em pequenos grupos permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar

> e criticar outros argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento. Por isso destinar mais tempo ao trabalho em pequenos grupos nas aulas de Matemática é uma das orientações curriculares mais salientes.

Como a turma tinha 22 alunos, formei seis grupos: quatro eram compostos por quatro alunos e dois por três alunos. Os grupos foram formados por mim, em concordância com os alunos. Os alunos de cada grupo tinham aproveitamento escolar diferente, o que fez com que existisse uma cumplicidade entre eles. Houve um envolvimento crescente de todos os alunos na resolução das tarefas propostas, e um aumento de predisposição para aprender Matemática. Este facto é de extrema importância quando se pretende analisar os produtos escritos dos alunos. Os alunos selecionados responderam prontamente às solicitações da minha parte.
Em seguida apresento uma breve caracterização de cada um dos grupos:

Grupo 1: Este grupo era constituído por quatro alunos, duas alunas e dois alunos. A Carlota e a Inês apresentavam classificação de dezassete e dezoito valores respetivamente, enquanto o Ricardo e Sebastião apresentavam sete e dez valores. As duas alunas eram bastantes empenhadas e conscientes do trabalho a realizar e estavam sempre dispostas a realizar tarefas que apelassem a novas situações. Os alunos revelaram uma atitude mais passiva na resolução das tarefas.

Grupo 2: O grupo era formado por três alunos, uma aluna e dois alunos. Era um dos grupos com mais dificuldade em trabalhar em grupo. A Daniela e o Miguel eram alunos com dificuldades, muito tímidos que só intervinham se lhe perguntássemos diretamente alguma coisa. O João era um "tagarela", sempre distraído e não se esforçava, apesar de ter grande facilidade nas aprendizagens e no manuseamento da máquina de calcular gráfica. Fazia as coisas, mas nunca assumia as culpas, era sempre a vítima!

Grupo 3: Este grupo era composto por quatro alunos, dois do sexo masculinos e dois do sexo feminino. A Maria, o Francisco e Ana mostraram mais disponibilidade em interagir do que o José, no entanto os elementos deste grupo eram bastantes empenhados e interessados na resolução das tarefas, estando sempre dispostos a participar e intervir de uma forma bastante positiva.

A Maria era a melhor aluna da turma. Este grupo promoveu uma grande interação entre os elementos do seu grupo, entre grupos e com o professor/investigador.

Grupo 4: O grupo era constituído por quatro elementos, todos rapazes. Era um grupo com grandes dificuldades em trabalhar em grupo. O José e o Manuel eram alunos que apresentam classificações negativas no seu percurso escolar. Estes alunos revelavam dificuldades na aplicação dos conhecimentos a novas situações, eram pouco autónomos e o Manuel revelava dificuldades de concentração, mas queria participar na resolução das tarefas no QI. O José V. e o Diogo, tentavam que os outros dois elementos participassem na resolução das tarefas.

Grupo 5: Este grupo era constituído por quatro alunos do sexo masculino. Dois alunos apresentavam classificação de bom e muito bom, enquanto os outros dois apesentavam classificação negativa tendo ambos recuperado ao longo do ano. Todos os alunos eram responsáveis e participam ativamente nas tarefas propostas. Os dois melhores alunos do grupo, O Henrique e o João, aplicavam de forma segura e adequada os conhecimentos que possuíam a novas situações, enquanto o Bernardo e o Pedro revelam algumas dificuldades.

Grupo 6: Este grupo era constituído por três alunos, duas alunas e um aluno. O aluno deste grupo, tinha classificação negativa. A Inês J. era uma aluna com aproveitamento muito bom e a Ana P. obtinha uma classificação satisfatória. Eram alunos que apresentavam um comportamento adequado à situação de sala de aula. As duas alunas eram responsáveis e empenhadas, revelavam ainda entusiasmo quando lhes eram colocadas situações novas. O Luís revelava grandes dificuldades na participação e dinâmica de grupo.

Privilegio o trabalho em pequeno grupo, dada a riqueza das discussões entre os alunos que estas tarefas tendem a gerar. A diversidade de estratégias possíveis possibilita a troca de ideias e o desenvolvimento das capacidades de comunicação e argumentação. Estas capacidades são colocadas em uso, não só na interação com os pares, como também na discussão efetuada em grande grupo. Os alunos não estão habituados a trabalhar com máquinas de calcular gráficas, software Geogebra e QI.

A turma tem, semanalmente, quatro tempos letivos, com dois blocos de 90 minutos. As tarefas aplicadas, tiveram início a 12 de Dezembro de 2012. As aulas têm lugar na sala de aula normal, equipada com QI e projetor de vídeo fixo. É também, nesta sala que os alunos têm a grande maioria das aulas de Matemática.

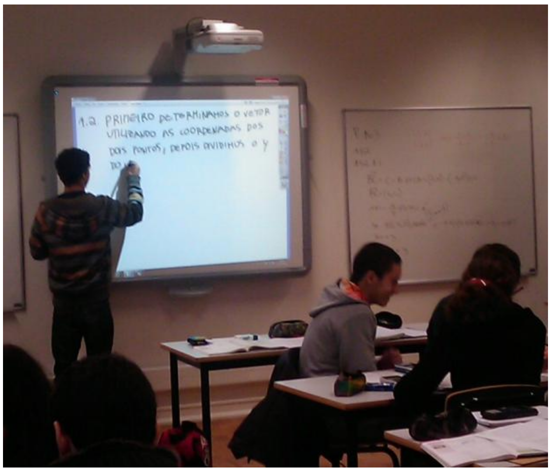


Figura 4: Sala de aula com QI

Durante a realização das tarefas os alunos fazem registos escritos do seu trabalho, usando papel e lápis. Os alunos utilizam a máquina de calcular gráfica, *GeoGebra* ou *applets*, para organizarem o seu raciocínio e se apoiarem no momento da discussão geral. Os resultados/conclusões realizados pelos alunos, um exemplar por grupo de trabalho, será apresentado à turma recorrendo ao QI. A resolução das tarefas será gravada, utilizando uma das potencialidades do QI, para que estas estejam sempre disponíveis.

A intervenção didática

Em seguida apresento os temas explorados na intervenção didática, de acordo com o Programa de Matemática A do Ensino Secundário. Para além dos temas, será também feita referência à metodologia utilizada na intervenção didática e uma análise das tarefas utilizadas para desenvolvimento dos temas e consequentemente dos objetivos e competências.

O tema e as tarefas

Neste estudo pretendo avaliar as mais-valias da utilização, em ambiente de sala de aula, do QI acoplado de um *software*, o *Geogebra*, e a máquina de calcular gráfica na forma como os alunos interagem na sala de aula.

Nestes temas e perante o programa de Matemática A, a dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador). Deste modo, a calculadora gráfica é integrada numa abordagem das funções em que se dá ênfase às múltiplas representações deste conceito (tabelas, gráfico e expressão algébrica) e à sua interpretação em problemas.

A conceção das tarefas foi um período importante no planeamento deste trabalho de investigação, exigindo a tomada de algumas decisões. Em qualquer dos casos, selecionei tarefas que me pareceram suficientemente claras, podendo ser compreendidas, à partida, por todos os alunos. As tarefas foram construídas para que os alunos as desenvolvam baseando-se em conhecimentos anteriores. Desta forma, todas elas envolvem alguns conceitos já conhecidos dos alunos.

Para além disso, procurei que fossem suficientemente apelativas para que estes se motivassem e envolvessem verdadeiramente na sua resolução. Um grau de exigência demasiado elevado pode levar estes alunos a desistirem da tarefa à partida. De acordo com Stein e Smith (1998):

> O quadro das tarefas Matemáticas distingue três fases através das quais passa a tarefa: primeiro, como elas surgem no currículo ou materiais de ensino, nas páginas dos manuais, materiais auxiliares, etc.; a seguir, como elas são apresentadas ou anunciadas pelo professor; e, finalmente, como elas são de facto implementadas pelos alunos na sala de aula – por outras palavras, a maneira pelas quais os alunos realmente trabalham sobre a tarefa. Todas estas fases, mas especialmente a de implementação, são vistas como influências importantes sobre o que alunos realmente aprendem (p. 4).

Um aspeto sublinhado na literatura é a importância da seleção de tarefas estimulantes e o encorajamento dos alunos a tomar posições, defendê-las e convencer os outros do seu ponto de vista (Ponte & Santos, 1998; Stein, 2001).

As tarefas devem ter como objetivo a promoção de alguns aspetos da Matemática, como sejam, o raciocínio matemático, a comunicação e as conexões entre as várias áreas da Matemática (NCTM, 1994). É necessário ainda garantir que as tarefas sejam apropriadas para todos os alunos e não só para alguns, pelo que as suas aptidões e interesses e o seu conhecimento sobre a aprendizagem da Matemática são também fatores a ter em conta na escolha dos temas a abordar e na elaboração das tarefas. Como refere o NCTM (1994), “as boas tarefas são aquelas que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convida a especular e a aprofundar as suas intuições” (p. 27).

A minha opção foi propor tarefas diversificadas, umas contextualizadas na vida quotidiana dos alunos, que constituíssem formas de os envolver no desenvolvimento de formas de matematização relacionadas com opções ligadas ao tratamento dos temas do programa de Matemática A do 10.º ano, outras estruturadas com a finalidade de os alunos seguissem todos os passos para que estes conseguissem a sua concretização na sala de aula. Na tabela que se segue, encontra-se a sistematização dos assuntos abordados em cada tarefa.

Tabela 6: Sistematização dos assuntos abordados em cada tarefa

Tarefas	Tema	Assuntos Tratados
Tarefa1 - Distribuição do gás	Geometria no Plano	- Coordenadas de pontos. - Ponto Médio. - Mediatriz de um segmento de reta.
Tarefa 2 - Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$	Geometria no Plano	Analisar os efeitos das mudanças dos parâmetros *m* e *b* nos gráficos da família de funções afim do tipo $y = mx + b$
Tarefa 3 -Interpretação do declive	Geometria no Plano	Determinar o declive de uma reta conhecidos dois dos seus pontos
Tarefa 4 - Á procura de um modelo	Funções	Determinar um modelo de função afim
Tarefa 5 - Efeitos da variação de parâmetros *a*, *h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$	Funções	Analisar os efeitos das mudanças dos parâmetros *a*, *h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$
Tarefa 6 - Como varia o volume das caixas	Funções	- Estabelecer conexões entre funções e geometria. - Resolver problemas em contexto real e de geometria usando funções polinomiais

A tarefa 1 (ANEXO I), que se intitula “Distribuição de gás”, é constituída por um problema de Geometria no plano e por quatro questões, relativas a esse problema. Os objetivos desta tarefa são: determinar as coordenadas de pontos, determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, representação gráfica da mediatriz de um segmento e identificar a mediatriz de um segmento de reta pela sua expressão analítica.

Os alunos, em grupos de quatro ou três elementos cada, resolvem a tarefa, registam e justificam os resultados e no final da aula apresentam esses resultados no QI para discussão com a turma.

As questões a) e b) apelam ao cálculo do ponto médio do segmento de reta e a escreverem as coordenadas de pontos que pertençam à mediatriz do segmento de reta. Nas questões c) e d), podem utilizar a calculadora gráfica no modo *FUNC* ou papel e lápis, para conjeturar uma condição (mediatriz de um segmento de reta) que relacione as abcissas e coordenadas dos pontos onde passará o gasoduto.

Como se tratava da primeira tarefa, o facto de trabalharem em grupo e a agitação inerente a estas situações, os alunos levaram um pouco mais tempo na sua resolução.

A tarefa 2 (ANEXO II), denominada “Influência do parâmetro *m* e *b* na equação da reta $y = mx + b$”, é constituída por duas questões e tinha como objetivo principal a análise da variação do parâmetro *m* e *b*. Na exploração de cada uma das situações os alunos deviam fazer uma exploração da influência dos parâmetros *m* e *b* na representação gráfica da equação $y = mx + b$.

Os alunos resolvem a tarefa, em grupos de três ou quatro elementos cada, recorrendo à calculadora gráfica, e no final, os resultados de cada grupo são divulgados à turma para discussão coletiva.

Esta tarefa enquadra-se no Tema da Geometria no Plano e no Espaço I.

A tarefa 3 (ANEXO III), intitulada “Interpretação do declive”, é constituída por três questões cujo objetivo é explicar o significado de *m* na reta de equação $y = mx + b$, dando seguimento à tarefa anterior. A primeira questão solicitava que explicassem por palavras o significado do parâmetro *m*. Na segunda questão da tarefa, os alunos descreviam como determinar o declive da reta através de pontos dados. Na última

questão, utilizando a máquina de calcular gráfica os alunos teriam de atribuir valores ao parâmetro *b* da equação e explicar qual o significado deste parâmetro.
Esta tarefa enquadra-se no Tema da Geometria no Plano e no Espaço I.

A tarefa 4 (ANEXO IV), que se denomina por "À procura de um modelo" é constituída por oito questões, cujo objetivo é analisar tabelas, definir uma função do tipo $f(x) = a\,x + b\,, a, b \in \Re$ e fazer estimativas. Esta tarefa expõe uma situação real que pretende dar ênfase à modelação matemática, usando a máquina de calcular gráfica. Proponho uma abordagem da função afim, não como um conteúdo novo, mas segundo uma perspetiva global que envolve os conhecimentos adquiridos anteriormente, nomeadamente o conhecimento da equação reduzida da reta e os conceitos sobre funções.
Na aula anterior a esta tarefa foi dado um guião com os procedimentos a utilizar para visualizar graficamente a nuvem de pontos recorrendo ao menu estatística da máquina de calcular gráfica.

A tarefa 5 (ANEXO V), intitulada "Efeitos da variação de parâmetros *a*, *h*, e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ ", é constituída por dois problemas, cada um com três questões. Em relação ao primeiro problema, o seu objetivo é estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando é apresentada na forma $y = a(x-h)^2 + k$ e identificar o significado dos parâmetros *a*, *h* e *k*. Os alunos resolvem a tarefa, em grupos de três ou quatro elementos cada, e no final, os resultados de cada grupo são divulgados à turma para discussão coletiva.
Relativamente ao problema um, na questão a), para a função quadrática cuja representação algébrica é do tipo $y = a\,x^2$, os alunos devem explicar o efeito do parâmetro *a* no gráfico da função, identificar as suas propriedades e realizar generalizações. Na questão b) e para as funções do tipo $y = a\,x^2$, $y = a(x-h)^2$ e $y = a(x-h)^2 + k$ os alunos devem explicitar os efeitos dos parâmetros *a*, *h* e *k*, relativamente aos gráficos das funções, e identificar as coordenadas do vértice da parábola, bem como a equação do eixo de simetria. Após este estudo devem reconhecer, na questão c), que podem obter, por exemplo, o gráfico de $y = 2(x-5)^2 + 3$ a partir do gráfico de $y = 2\,x^2$, efetuando sobre este uma translação associada ao vetor $(5, 3)$.

O problema dois, tem por objetivo, estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β na equação $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e investigar o que cada parâmetro fornece e transformar uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica. Nesta tarefa, o modo de trabalho é em grupos de três ou quatro alunos cada. Na parte final da aula é promovida a discussão geral, a qual deve envolver todos os alunos, procurando analisar as conclusões a que cada grupo chegou. A tarefa é constituída por quatro questões. Nas três primeiras questões, e recorrendo à calculadora gráfica quando necessário, os alunos devem estudar os efeitos dos parâmetros, quando a função é dada na forma $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$, e discutir as informações que cada parâmetro fornece. A questão d) apela à "passagem" da representação gráfica de uma função para a representação algébrica.

A tarefa 6 (ANEXO VI), intitulada "Como varia o volume das caixas", é constituída por um problema em contexto real que permite estabelecer conexões entre funções e geometria. A tarefa propõe a construção de uma caixa sem tampa com várias dimensões, descobrir como se deve cortar os cantos desta folha de modo a formar uma caixa de maior volume possível.

A tarefa incluía a representação em referencial cartesiano dos pares do tipo $(x, V(x))$ decorrentes da experimentação, a variação do volume em função do x, o volume máximo e, só depois de explorar os dados obtidos, era pedida a expressão que relaciona o volume e a medida x, tendo sempre em atenção o respetivo domínio.

Com esta tarefa, os alunos conhecem uma nova família de funções, compreendendo a sua importância e apercebendo-se da forma que pode tomar um gráfico de uma função cúbica.

O modo como está elaborada a tarefa deixa em aberto a definição de uma estratégia de resolução pelos alunos, com o objetivo de sublinhar a importância da definição de estratégias na resolução de um problema. Os alunos podem, por exemplo, construir um molde da caixa numa folha de papel para fazerem experiências de cortes de modo a perceberem como varia o volume da caixa. Podem também tentar encontrar a expressão algébrica da função que define o volume, sendo este função da medida do canto a cortar. Esta tarefa pretende reforçar os conceitos de variável e de função. E pode ser enriquecida com o estudo do gráfico da função. Assim, sendo uma das primeiras tarefas a apresentar aos alunos nesta unidade, constitui uma oportunidade para começar a trabalhar as diferentes representações de uma função, destacando a utilidade de cada uma no contexto deste problema. Desta forma podem ser exploradas algumas noções associadas ao conceito de função, como domínio, contradomínio, variável dependente e independente, monotonia e extremos. Esta tarefa vai ainda ao encontro de outro objetivo do programa, o uso de modelos matemáticos para representar situações da realidade. Os alunos podem perceber melhor uma aplicação prática de uma função.

Organização da intervenção

A investigação decorreu durante sete blocos, de 90 minutos cada. Teve início a dez de Dezembro de 2011 e prolongou-se até ao dia três de Fevereiro de 2012.

Na tabela que se segue, encontra-se a calendarização da intervenção didática.

Tabela 7: Calendarização da intervenção didática

Calendarização	**Tarefas**	**Tempo**
10/12/2011	Tarefa1-Distribuição do gás	90 min
18/01/2012	Tarefa2- Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$	90 min
20/01/2012	Tarefa 3- Interpretação do declive	90 min
25/01/2012	Tarefa 4- À procura de um modelo	90 min
30/01/2012	Tarefa 5- Efeitos da variação de parâmetros *a*, *h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$	2x90 min
3/02/2012	Tarefa 6- Como varia o volume das caixas	90 min

Nota. O período de 19 de Dezembro a 3 de Janeiro corresponde à interrupção das atividades letivas.

As aulas da intervenção didática decorreram na sala onde habitualmente a turma tem aulas na disciplina de Matemática.

Comecei pelas tarefas do tema de Geometria no plano, através de quatro tarefas, que apelavam a este tema, seguidamente foram trabalhadas as funções afim, quadrática e cúbica, através de três tarefas referenciadas no Programa de Matemática A.

Os alunos realizaram as tarefas de forma sequencial de acordo com a planificação anual do tema e da disciplina de Matemática A.

A estrutura e a dinâmica de aula

Nas aulas da intervenção didática foi sempre utilizada a mesma dinâmica de aula. A estrutura escolhida para dinamizar as aulas com as tarefas consistiu em quatro momentos distintos: num primeiro momento era feita uma apresentação da tarefa pelo professor e dada alguma informação sobre procedimentos a adotar quando da utilização da máquina de calcular gráfica, este momento tinha a duração de 10 minutos; o segundo momento correspondia à realização da tarefa, pelos alunos, em grupos já definidos, durante a qual o professor interage com os alunos individualmente ou em pequeno grupo, durante 30 minutos; o terceiro momento correspondia a apresentação de resultados pelos alunos no QI e sua discussão (estratégias seguidas e resultados obtidos), durante 40 minutos; e por último era realizada uma conclusão/síntese, em grande grupo, dos resultados obtidos, durante 10 minutos.

Na resolução das tarefas os alunos utilizaram quase sempre a máquina de calcular gráfica. Este momento não trouxe dificuldades de ordem maior, uma vez que os alunos já tinham tido anteriormente contacto com esta ferramenta.

A discussão no grupo turma é um dos momentos da aula de Matemática onde existe uma reflexão dos alunos sobre o seu trabalho e o dos outros e a discussão de resultados, com toda a turma, são momentos essenciais em que se sistematizam conceitos, se trabalha a formalização e se estabelecem conexões matemáticas (Ponte, 2005). Durante uma discussão o discurso varia entre o afirmativo e o interrogativo sendo o professor, mas também os alunos, quem formula as questões. Da parte dos alunos espera-se que expliquem o seu produto final, descrevam as suas conjeturas e conclusões, apresentem as suas justificações e se questionem mutuamente, do professor espera-se que incentive a clarificação de conceitos e procedimentos, fomente a avaliação do valor dos argumentos e ajude a estabelecer conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005).

A participação dos alunos nas discussões, com toda a turma, pode tornar-se um momento de alguma confusão e agitação, pelo facto de todos quererem colaborar com as suas ideias. Por isso, é importante que os alunos sejam orientados de modo a não participar todos ao mesmo tempo e a saber ouvir e questionar os colegas.

A discussão é orientada pelo professor ou pelos grupos, dependendo do decorrer da aula e da pertinência das descobertas que os alunos efetuem. De acordo com as resoluções dos diferentes grupos, estes são levados a exemplificar no quadro interativo a forma como raciocinaram e resolveram a tarefa que lhes foi proposta. Este momento também serve para que os alunos tomem consciência do trabalho que foi desenvolvido pelos seus colegas.

O momento da discussão final é de extrema importância e imprescindível, pois tal como é afirmado no Programa de Matemática A, a realização de tarefas em trabalho de grupo permite uma interação entre os colegas em pequeno grupo, depois à turma e o professor. A interação com os outros estimula a aparição de novos problemas, de novas ideias e de descobertas adicionais.

Recolha de dados

Nesta secção exponho os procedimentos realizados antes, durante e após a recolha de dados. Apresento também os principais modos e instrumentos de recolha utilizados: observação de aulas, visionamento de vídeos realizados das aulas, produtos realizados pelos alunos e outros documentos. A recolha de dados foi realizada integralmente por mim. No início da investigação, foi solicitada autorização ao Diretor da Escola (ANEXO VII) e aos pais e encarregados de educação (ANEXO VIII), para que as aulas pudessem ser filmadas.

Instrumentos de recolha de dados

Numa investigação de carácter qualitativo é importante obter informações de diversas fontes de modo a permitir uma melhor abordagem.

Quando essas fontes são usadas em simultâneo, estas complementam-se. Para Lessard Hérbert, Goyette e Boutin (1990), existem três formas de recolha de dados: (i) o inquérito, que pode tomar duas formas distintas, a saber, a entrevista, se considerarmos a forma oral, e o questionário, se considerarmos a forma escrita; (ii) a observação, em particular, das aulas; e (iii) a análise documental dos produtos dos alunos. No presente estudo utilizo, modos diversos de recolha de dados: a observação das aulas através do visionamento do seu vídeo registo e notas de campo, e a análise documental dos produtos realizados pelos alunos em resposta às tarefas propostas.

Observação de aulas

Para facilitar a observação das aulas, realizei alguns registos e recorri ao visionamento áudio/vídeo das aulas. Segundo Bogdan e Biklen (1994), este registo é essencial para que um estudo qualitativo seja bem sucedido e se constitua como um instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Este visionamento teve como objetivo gravar as conversas que tinha com os alunos dos diferentes grupos e a discussão final em grande grupo. Estes registos foram visionados no próprio dia ou no dia seguinte, com a finalidade de não "perder registos".

Esta fase foi importante no que respeita às questões técnicas, como o posicionamento da câmara, na sala, de modo a otimizar o seu desempenho. Usei uma câmara de vídeo, colocada a um canto da sala de modo a não perturbar o normal funcionamento da aula. Ao longo da aula, circulava pela sala observando o trabalho dos alunos. Sempre que era possível, apoiava o trabalho destes.

Serviram ainda de dados, as notas que apontava no meu diário da própria aula ou depois da mesma. Essas notas podiam ser sobre uma resolução que um determinado aluno esboçava ou sobre um comentário que fazia com um colega de uma determinada situação.

Produtos realizados pelos alunos

A realização das tarefas que se pede aos alunos, torna-se num documento importante para o investigador analisar.

Em todas as tarefas os alunos tiveram que escrever, efetuar cálculos ou desenhar gráficos, com ou sem o auxílio de máquina de calcular gráfica ou Geogebra, serviram como dados de grande relevância para esta investigação. Estes dados foram de dois tipos: em suporte papel ou em suporte informático (gravação dos registos efetuados no QI). Os documentos realizados com papel e lápis foram fotocopiados e entregues aos alunos, ficando as cópias com o professor/investigador para análise. Os documentos em suporte informático foram guardados numa pasta de uma pendrive, que serviu para posteriores consultas.

Sempre que as tarefas propostas são resolvidas e antes da discussão em grande grupo, seleciono por ordem quais os grupos a apresentar, com o objetivo de promover uma maior interação e dinâmica de aula, aquando da sua apresentação.

Análise de dados

Atendendo ao carácter qualitativo da metodologia adotada, a análise dos dados foi essencialmente descritiva e interpretativa com vista a obter uma caracterização o mais completa possível das situações em estudo e uma melhor compreensão das mesmas, com o objetivo de responder às questões propostas.

Após a recolha de dados, segue-se a fase da organização de documentos. Como a investigação é de natureza qualitativa, a análise é realizada tendo em conta os aspetos teóricos revistos na literatura e as questões da investigação. A análise dos dados assume um carácter descritivo e interpretativo, onde todas as interpretações, por mim elaboradas, são baseadas na análise dos documentos.

O cruzamento destes documentos é um trabalho longo e complexo, mas permitiu apresentar a realidade por mim vivida de uma forma rica e objetiva.

A análise dos dados foi estruturada segundo as categorias de análise que emergiram do problema de investigação: Compreender as implicações do uso da tecnologia, em particular do QI, na dinâmica da aula de Matemática que explora tarefas de natureza diversificada. A revisão de literatura e os dados recolhidos permitiram-me definir as seguintes categorias: (i) dinâmica na sala de aula quando se utiliza o QI; (ii) níveis de interações; e (iii) implicações das interações no conhecimento matemático. Tendo por base as categorias definidas e as questões do estudo procede-se à análise dos dados, que assume um carácter descritivo e interpretativo.

Para cada tarefa, são analisados vários instrumentos de recolha de dados como sejam, a observação das aulas, os produtos realizados pelos alunos e o visionamento das aulas.

Capítulo IV

A turma e a aula com o quadro interativo

Neste capítulo apresento o estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didática, dando especial atenção à dinâmica produzida na sala de aula e às interações promovidas pelo QI, quando da discussão/síntese dos resultados. Apresento uma descrição das aulas onde foram realizadas as tarefas de investigação. Descrevo, também, a forma como organizei o trabalho em cada aula e as discussões em grande grupo que se geraram e as interações produzidas

Optei por apresentar os resultados por tarefa para permitir uma descrição e análise mais aprofundada.

Tarefa 1 – Distribuição do gás

Apresentação

Os alunos sabiam da existência de QI na escola contudo, nunca o tinham utilizado, apesar de já terem pedido várias vezes para o manusear. Chegou o dia em que eles sabiam que o iriam utilizar.

A aula teve início com a correção dos exercícios propostos para casa. Como habitual foi pedido a um aluno para ir ao quadro, e contrariamente ao habitual a maioria da turma queria participar.

Foi-lhe explicado que teriam que escrever da mesma forma que no quadro normal, mas em vez de utilizarem um marcador era com uma caneta interativa que tinha a mesma função do rato num computador. Abriu-se o programa *ActivInspire*, *software* que permite fazer a ligação entre o computador e o QI, fazendo-se a calibração do quadro para se poder trabalhar. Após este procedimento abriu-se uma página em branco. Foi apresentado à turma as ferramentas base para se escrever num quadro deste tipo: um

ícone de seleção que permite a utilização da caneta interativa como um rato, vários tipos de caneta, marcadores, borrachas, inserir novas páginas, importar documentos, abrir novos programas e gravar o que for realizado.
De seguida foi solicitado ao aluno que se prontificou a ir ao quadro resolver os exercícios. O aluno ficou fascinado ao escrever e apagar, comentando para a turma que "era fixe". Após a resolução dos exercícios, estes foram gravados numa pasta de uma *pendrive* e já havia alunos interessados em ir ao quadro:

> **Manuel:** Professor, posso resolver o próximo exercício ao quadro?
> **João:** Depois do Manel, sou eu. Eu porto-me bem.
> **Professor:** Vamos realizar a tarefa. Depois logo se vê.

A tarefa foi distribuída com 30 minutos de atraso. Nunca pensei que a abordagem ao QI demorasse tanto tempo, por isso tive de alterar os momentos de realização e discussão da tarefa. Informei os grupos que tinham vinte minutos para sua realização, trinta minutos para a sua discussão e dez minutos para fazer uma síntese da mesma. Foi solicitado que cada grupo realizasse a tarefa em papel quadriculado para posteriormente ser discutida no QI. Esta tarefa tem como objetivo relembrar o conceito de mediatriz de um segmento de reta como um lugar geométrico, ponto médio de um segmento de reta e fazer uma conjetura de uma condição que defina a mediatriz de um segmento de reta. Foi apresentado à turma uma página quadriculada realizada com o *Geogebra*, onde os alunos poderiam utilizar, para responder à questão a).

Realização da tarefa em grupo

Durante o período de resolução da tarefa os vários grupos puderam trocar opiniões entre si e monitorizei o progresso do trabalho dos alunos. Dei oportunidade de resolver a tarefa pelas suas próprias estratégias procurando perceber o pensamento dos alunos. Os vários grupos tiveram a oportunidade de utilizarem o QI, com o *software Geogebra* e fizeram simulações sobre os seus pensamentos.

Discussão da tarefa

Na primeira questão da tarefa, todos queriam ir ao quadro marcar as coordenadas dos pontos pedidos. Ao verem o referencial, ouviu-se logo um comentário de um dos alunos

Bernardo: Professor, esse referencial está melhor que o meu e pode-se com exatidão marcar os pontos.

Professor: Queres vir marcar as coordenadas dos pontos S e R?

Ao marcar os pontos, sem intenção, arrastou a folha gráfica e os eixos coordenados, e:

Bernardo: Professor, eu modifiquei a escala e movi a figura e as coordenadas dos pontos não se alteraram!

Sebastião: Nós no caderno também podemos escolher a escala que quisermos, e o gráfico que obtemos é mais pequeno ou maior, depende…

Inês: Com esse referencial, podemos responder à questão a), vê-se logo onde é o ponto médio.

Bernardo: Pois é no meio destes pontos. Posso marcar com outra cor?

Professor: Podes.

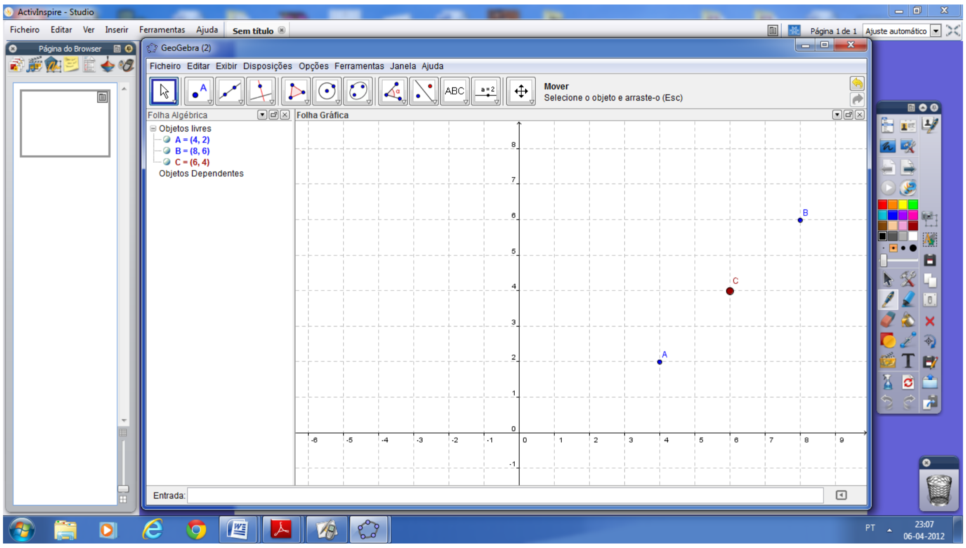


Figura 5: Marcação das coordenadas dos pontos no Geogebra

Em relação a questão b), o aluno com mais dificuldades, pediu para ir ao quadro marcar as coordenadas, sendo de imediato aceite tal pedido. Depois da sua marcação teve a seguinte intervenção: “Aqui, fica tudo certinho e podemos ver que existem mais pontos onde pode passar o gasoduto”

Diogo: E no lado esquerdo aparece as coordenadas dos pontos que marcamos.

João: Será que podemos marcar um ponto no meio da quadrícula?

Professor: Queres experimentar?

João: Posso ir.

Professor: Será que esse ponto $(6{,}5;3{,}58)$ é “um bom ponto”?

João: Acho que sim!

Maria: Professor, o que eu vou dizer responde também à questão seguinte. Estive a analisar as coordenadas dos pontos marcados e verifico que a soma do *x* com o *y* é sempre 10, logo se somarmos 6,5+3,58 não dá 10.

João: Dá quase.

Maria: não, terá de dar sempre 10, senão não está no alinhamento dos outros.

Francisco: E se traçarmos a reta que passa nesses pontos?

Inês: Primeiro tens de traçar o segmento de reta, só depois é que consegues marcar a mediatriz.

Francisco: Estás a ver que o ponto que marcaste, não está em cima da reta.

Inês: Ao passar com a caneta e percorrer a reta, podemos encontrar muitos pontos onde o gasoduto pode passar.

João: Olhando para o meu gráfico no papel, apostava que dava, mas assim estou a ver que estava errado.

Henrique: Professor, quando o Francisco marcou a mediatriz apareceu no lado direito uma expressão. O que é isso?

Maria: Estás a ver, é aquilo que eu disse $x + y = 10$.

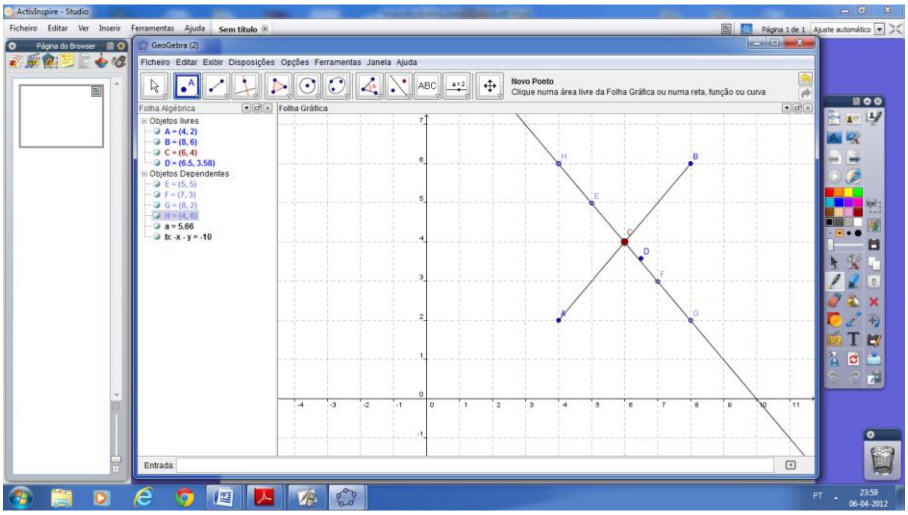


Figura 6: Representação da mediatriz

Rui: Não é a mesma coisa!

Francisco: É, basta multiplicar tudo por -1.

Henrique: Poderíamos determinar a distância de cada um dos pontos marcados aos extremos do segmento? Teria de dar igual, essa é a definição de mediatriz.

Na última questão da tarefa, os grupos verificaram que a equação da mediatriz obtida na alínea anterior era igual.

Síntese da aula

Os alunos conseguiram através desta tarefa aplicar o conceito de mediatriz de um segmento de reta e perceberam que os referenciais, além de facilitarem a localização de pontos, permitem identificar e caraterizar conjuntos de pontos que obedeçam a determinadas condições. Na discussão em grande grupo interroguei os alunos sobre as vantagens/desvantagens da utilização do QI e o *Geogebra* na resolução desta tarefa, podendo-se resumir nas seguintes conclusões:

(i) quanto à representação de pontos no referencial cartesiano e marcação da mediatriz de um segmento de reta através do *Geogebra* referiram que é uma forma mais rápida e mais rigorosa do que quando são representados no papel "é mais rápido porque não temos que estar com o compasso e a régua e é mais rigoroso (João).

(ii) o *Geogebra* dá-nos logo a equação da mediatriz "Assim, não é preciso estar a desenvolver os casos notáveis que dão grande trabalho e ainda nos podemos enganar" (Henrique).

(iii) em relação ao QI "trabalhar com o quadro interativo é uma novidade e motiva-nos mais a ir ao quadro para aprender. Ao mesmo tempo que estamos a mexer no quadro estamos a aprender" (Manuel). Ao longo da realização da tarefa os alunos não demonstraram dificuldades, mostraram-se empenhados e motivados.

Tarefa 2 – Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$

Apresentação

A aula teve inicio às dez horas e dez minutos com a realização do trabalho de casa. A tarefa foi distribuída às dez horas e trinta minutos, sendo lida por um aluno. O professor explicou aos diferentes grupos o que tinham de realizar e chamou a atenção que o valor do *m* é sempre igual a dois na primeira questão e na segunda o valor de $b = -2$. Esta tarefa tem como objetivo interpretar graficamente a influência do parâmetro *m* e *b* na família de funções $y = mx + b$

Realização da tarefa em grupo

Com recurso à calculadora gráfica os grupos visualizavam as representações gráficas das retas que inseriam. Durante esta fase interpelei os grupos sobre as várias janelas de visualização que a máquina de calcular gráfica lhes dava e alertei para possíveis erros de visualização. Alguns grupos fizeram o esboço das retas no papel para responderem às questões que lhe eram solicitadas. Durante esta fase escolho quais as resoluções mais importantes para a discussão coletiva e estabeleço uma ordem para a discussão da mesma.

Discussão da tarefa

O professor pede aos alunos das resoluções selecionados que exponham as suas estratégias de resolução e expliquem o seu raciocínio aos colegas, bem como respondam às questões uns dos outros. Para responder à primeira questão os alunos através do *TI-SmartView* acoplado ao QI obtêm estas representações:

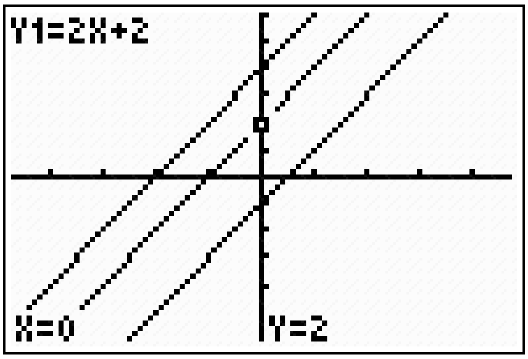


Figura 7: Representações do grupo 1

E dão a seguinte resposta à primeira questão: "são paralelas, o declive mantêm-se apesar do valor de b ser diferente"

Raquel: Podemos acrescentar outra informação. Todas as retas com declive 2 são a "subir"

Carlota: Estou de acordo. Queres dizer que à medida que o x aumenta o y também.

João: Para responder a esta questão podemos dizer que as retas são paralelas, têm o mesmo declive e são crescentes quando o valor de *m>0*. As retas intersetam sempre o eixo oy num ponto do tipo *(0,b).*

Professor: Estão de acordo?

Os alunos em uníssono responderam que sim.

Na resolução da segunda questão os alunos repetem o procedimento usado anteriormente e obtêm a seguinte representação

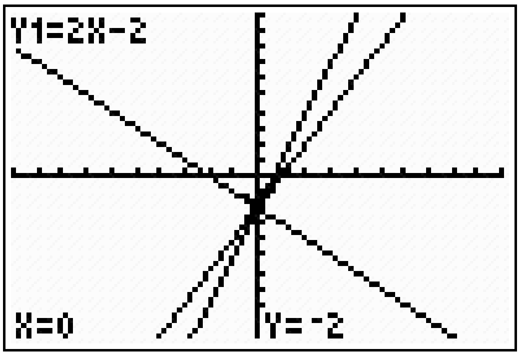


Figura 8: Representação do grupo 6

A sua resposta foi: “cruzam-se no ponto (0, -2)”

De imediato a Inês perguntou se podia fazer uma conjetura sobre esta questão, pois a resposta do grupo não estava completa. A turma, ficou à espera de algo de novo.

> “Como podemos ver todas as retas traçadas intersetam o eixo oy no ponto de coordenadas (0, -2), logo as retas do tipo $y = mx + b$, intersetam o eixo das ordenadas no ponto (0, *b*), quando o valor de *b* é sempre *-2*”

Sistematização

No final das apresentações o professor apresentou um *applet* de uma reta cujo objetivo era atribuir valores a *m* e a *b* e sistematizar o que foi realizado na apresentação das tarefas. Os alunos foram confrontados quando $b = 0$. A turma em uníssono respondeu “essa reta passa na origem”. O professor questionou se algum grupo tinha atribuído o valor de zero a *b*. O grupo turma respondeu que não se tinha lembrado deste número. Alguns alunos recordaram que esta reta que “passa” na origem era uma situação de proporcionalidade direta cuja constante de proporcionalidade é o valor de *m*.

Nesta tarefa permitiu evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados.

Tarefa 3 – Interpretação do declive

Apresentação

A aula teve início às oito horas e vinte minutos com a escrita do sumário e a verificação das ausências. Os trabalhos de casa foram corrigidos no QI e surgiram algumas dúvidas sobre a tarefa anterior, que foram prontamente esclarecidas após visualização/verificação das conclusões gravadas da aula.

Os alunos sentaram-se de acordo com os grupos previamente definidos. A tarefa foi distribuída passado vinte minutos e a leitura foi realizada individualmente pelos alunos.

Realização da tarefa em grupo

Durante a resolução da tarefa, fui solicitado várias vezes pelos grupos para tirar dúvidas que podiam ser evitadas se tivessem atentos às explicações dadas na aula anterior. Remeti-os para a pesquisa da informação no caderno diário e manual. Aos grupos que apresentavam mais dificuldades coloquei perguntas com a intenção de os alunos refletirem sobre os erros que estavam a cometer e adotarem novas estratégias para a sua resolução.

Discussão da tarefa

A questão 1a) foi de fácil resolução, pois os grupos estabeleceram uma relação com a tarefa anterior "Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$" e foi interessante verificar que a grande maioria dos grupos compreendeu de imediato o significado do parâmetro *m*.

O grupo 3, escreveu o seguinte "o parâmetro *m* representa o declive da reta", enquanto o grupo 5 reforçou que "*m* também nos dá informação sobre a inclinação da reta", sendo esta informação corroborada pelos restantes grupos.

Em relação à questão 1b) os grupos obtiveram o seguinte:

PRIMEIRO DETERMINAMOS O VETOR UTILIZADO AS COORDENADAS DOS DOIS PONTOS. DEPOIS DIVIDIMOS O Y DO VETOR PELO X E ISSO dá O DECLIVE (m)

Figura 9: Resolução do grupo 4

Calcularia o vector director da recta através destes 2 pontos, e, seguidamente com as coordenadas deste vector (por exemplo: $\vec{u}=(u_1,u_2)$) calcularia o valor de m ($m=\frac{u_2}{u_1}$).

Figura 10: Resolução do grupo 6

$\vec{AB} = B - A$ $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ logo $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Figura 11: Resolução do grupo 2

Após a apresentação destes grupos pedi se alguém queria intervir. Surgiu o seguinte diálogo:

Maria: Podíamos obter outro vetor com outras coordenadas?
Professor: Explica-te melhor.
Maria: Por exemplo, se o vetor for (2,3), poderíamos multiplicar por 2 e ficamos com o vetor(4,6). Nesta situação o declive era o mesmo, logo este vetor também pode ser.
Inês: Esses vetores podem ser porque são colineares, basta multiplicar por um número qualquer.
João: Então podemos concluir se o vetor for do tipo $\vec{u} = k(u_1, u_2)$ podemos afirmar que $m = \frac{k\,u_2}{k\,u_1}$.

No que diz respeito à questão 2, os alunos verificaram que os gráficos do tipo $y = m\,x + b$ eram retas e o significado de *b* era o seguinte:

(a ordenada na origem, que intersecta o eixo Ôy do tipo (0,b))

Figura 12: Resposta do grupo 5

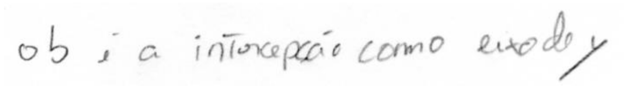


Figura 13: Resposta do grupo 4

Sistematização

Após a apresentação e discussão da tarefa os alunos foram confrontados com o *applet* seguinte:

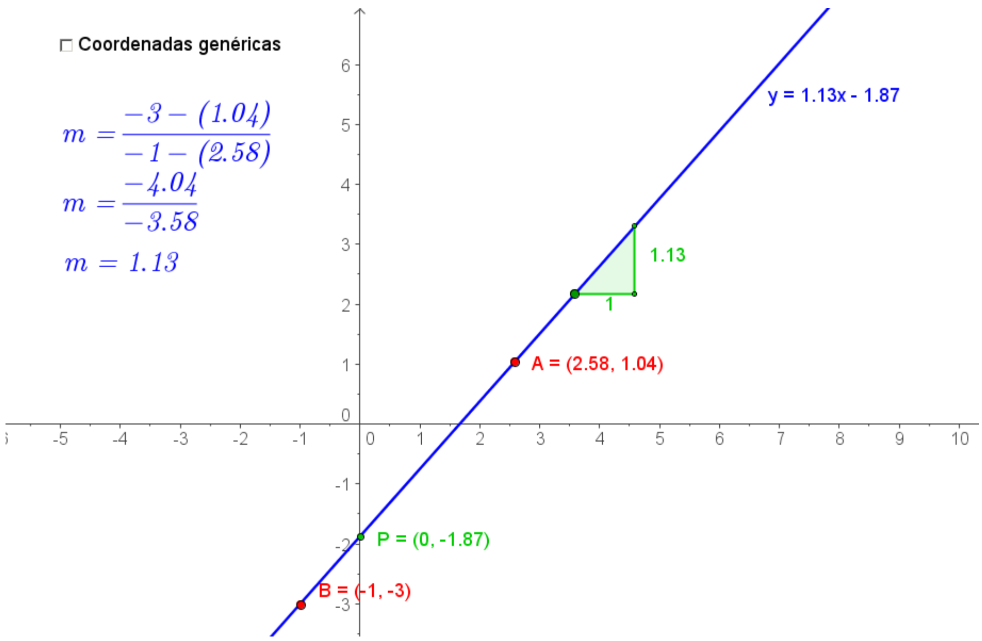


Figura 14: Applet para interpretação do declive

Foram alterados a localização dos pontos A e Be os alunos observaram a alteração da equação da reta. Os valores de *m* (declive) e *b* (ordenada na origem) são ilustrados na reta. Ao clicar sobre a reta e arrastando-a, os alunos puderam visualizar o dinamismo desta e verificaram que o valor do declive influenciava a monotonia.

Maria: Podemos concluir que se $m = 0$ a reta é horizontal; se $m > 0$ a reta é crescente e se $m < 0$ a reta é decrescente.

João: Quando o declive, é positivo, a reta está inclinada para a direita (faz com o eixo dos xx um ângulo menor que 90º) e quanto maior for o *m* positivo maior é o ângulo. Se o m é negativo a reta inclina-se para a esquerda (ângulo com o eixo dos xx maior que 90º), quanto menor for o valor declive menor será esse ângulo(reta menos inclinada para a esquerda).”

Com estes recursos, foi possível verificar que o declive de uma reta conhecidos dois pontos $A(x_1, y_1)$e $B(x_2, y_2)$distintos de uma reta é dada por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Tarefa 4 – À procura de um modelo

Apresentação

A aula teve início às onze horas e trinta e cinco minutos com a realização do trabalho de casa, cujo objetivo era recordar os procedimentos utilizados na aula anterior com a máquina de calcular gráfica. A tarefa foi entregue ao fim de quinze minutos. Expliquei aos diferentes grupos o que tinham de realizar e chamei a atenção para a questão três e cinco. Nestas questões tinham de procurar um modelo que traduzisse os dados indicados nas tabelas.

Realização da tarefa em grupo

Entreguei a tarefa e dei algumas indicações sobre o trabalho a desenvolver. Durante a aula, apoiei o trabalho dos alunos, esclareci algumas dúvidas, em particular, na interpretação do enunciado, questionando-os e incentivando-os a pesquisar. Os grupos com auxílio do guião concebido para utilizar a calculadora gráfica no tema estatística tentaram resolver a tarefa. Alguns grupos sentiram dificuldades no ajustamento da janela de visualização.

A definição do retângulo de visualização é um aspeto fundamental na obtenção da representação gráfica de uma função ou conjunto de pontos. Um conhecimento prévio das características da função permite escolher o retângulo de visualização mais apropriado. Se a janela não for adequada, pode não ser possível visualizar os pontos, o que exige normalmente a definição de várias janelas de visualização na calculadora.

Discussão da Tarefa

A discussão da tarefa começou para além do tempo estipulado devido a problemas de ajustamento da janela de visualização da máquina de calcular gráfica. As duas primeiras questões foram de rápida resposta. A questão 1c), requeria uma função do tipo $f(x) = mx + b\,, m, b \in \Re$, cujo gráfico se aproximasse dos pontos considerados na tabela dada.

O grupo 3, através da aluna Maria, utilizou o *TI-SmartView* para explicar aos colegas qual foi a sua estratégia de resolução. Começou, por inserir os dados nas listas do *Menu Estatística* e com uma janela de visualização adequada mostrou a nuvem de pontos. Utilizando as potencialidades da máquina de calcular no que diz respeito às regressões, obteve a função $f(x) = -0{,}017x + 12$.

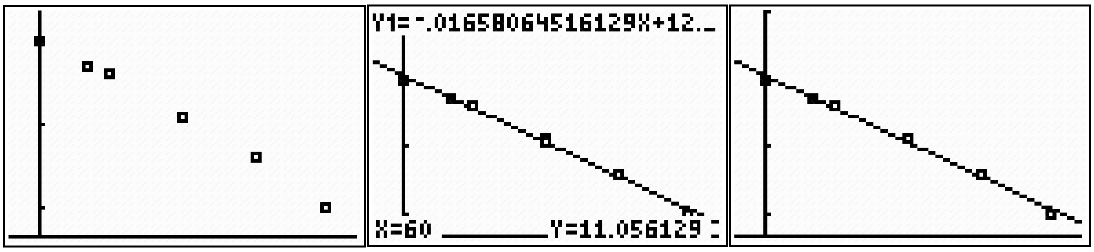


Figura 15: Representação gráfica obtida pelo grupo 3

Após a resolução, solicitei à Carlota que explicasse a resolução feita pelo seu grupo:

> "Os pontos estão sobre a reta e verificamos que o ponto $(0{,}12)$ pertence ao gráfico, logo o $b = 12$. Como temos outros pontos podemos escolher um deles, nós escolhemos o ponto $(60;11{,}1)$. Com estes dois pontos podemos substituir na equação da reta $y = mx + b \Leftrightarrow 11{,}1 = m \times 60 + 12$, para tirar o valor de m. Obtivemos $f(x) = -0{,}016x + 12$"

> **Maria:** O valor de m é diferente.
> **Carlota:** É quase igual, se arredondarmos às centésimas conseguimos ter o mesmo valor para m
> **João:** Podemos traçar as duas retas para vermos a diferença?

Foram traçadas as retas e verificaram que quase coincidiam, e como tal poderíamos considerá-las como bons modelos.
Só dois grupos resolveram a questão 1.d) com auxílio da máquina de calcular gráfica. Os restantes recorreram a processos exclusivamente analíticos.
A resolução do grupo da Maria foi através da máquina de calcular, indicando que:

Maria: a reta interseta o eixo dos xx, e é nesse momento que a vela desaparece. Com a tecla *Trace* fui ver qual era o valor.

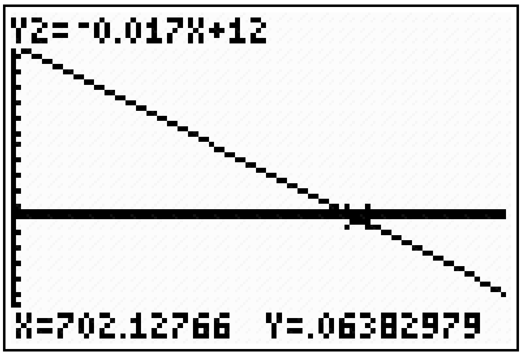


Figura 16: Representação gráfica obtida pelo grupo 3

Fez-se um burburinho sobre o valor encontrado, e deixei que os alunos se confrontassem com o valor indicado pela Maria.

João: Essa técnica não é a correta. Temos de calcular o zero e para isso, utilizamos as ferramentas da máquina para o calcular.

Manuel: Se "andarmos" com o cursor sobre a reta verificamos que nos 45 segundos a vela tinha de altura 11,235 cm.

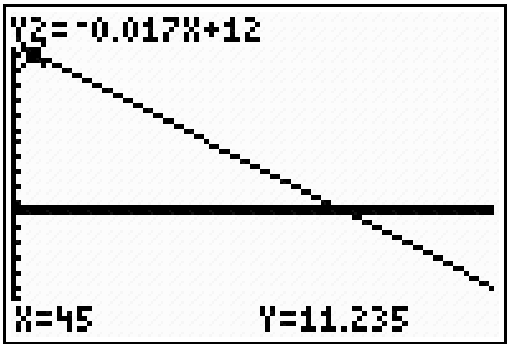
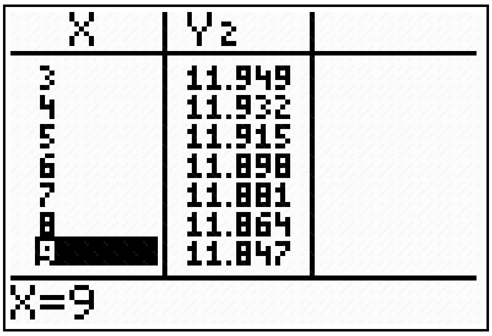


Figura 17: Representação gráfica obtida pelo grupo 4

João: Melhor ainda, se fores à tabela, tens os valores que quiseres.

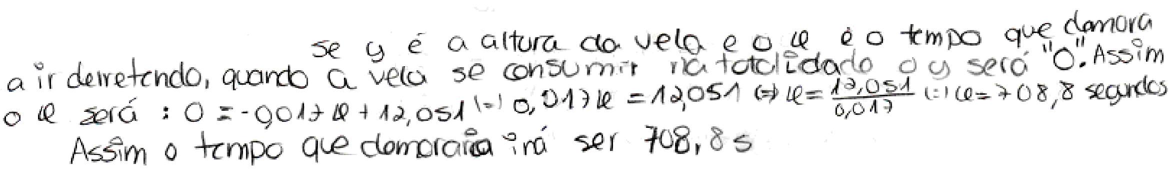


X	Y2	
3	11.949	
4	11.932	
5	11.915	
6	11.898	
7	11.881	
8	11.864	
9	11.847	

X=9

Figura 18: Representação gráfica do grupo 5

O grupo da Inês respondeu a esta questão utilizando processos exclusivamente analíticos, apresentando o seguinte:



se y é a altura da vela e o t é o tempo que demora a ir derretendo, quando a vela se consumir na totalidade o y será "0". Assim o t será : 0 = -0,017t + 12,051 (=) 0,017t = 12,051 (=) t = $\frac{12,051}{0,017}$ (=) t = 708,8 segundos

Assim o tempo que demoraria irá ser 708,8 s

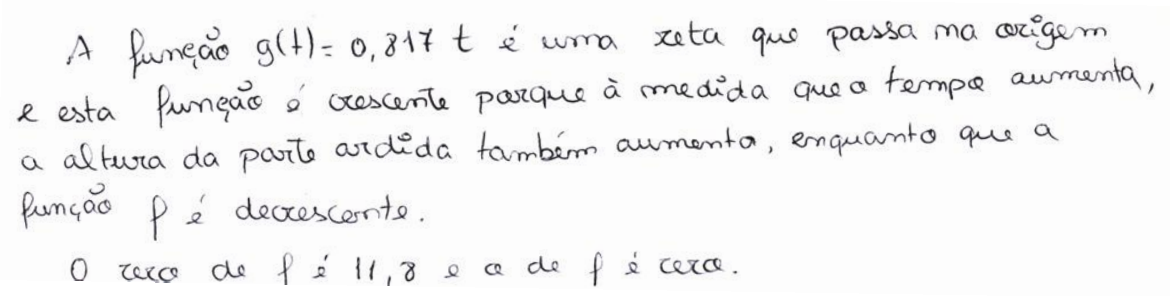
Figura 19: Resposta do grupo da Inês

Na questão 1e), os alunos completaram a tabela dada e definiram analiticamente uma nova função g que relacionava o tempo e a altura da vela da parte ardida. Com a função definida compararam-na com a função f no que diz respeito à monotonia e zeros.

O grupo do João, respondeu o seguinte:

> **João:** A monotonia de g é oposta à de f, sendo g crescente e f decrescente e o respetivo zero é 708,8 segundos

O grupo da Maria produziu uma resposta mais elaborada:



A função g(t) = 0,817 t é uma reta que passa na origem e esta função é crescente porque à medida que o tempo aumenta, a altura da parte ardida também aumenta, enquanto que a função f é decrescente.

O zero de f é 11,8 e o de f é zero.

Figura 20: Resposta do grupo 3

Síntese

Após a discussão, foram relembradas propriedades das funções e dos seus gráficos, nomeadamente o domínio, contradomínio, zeros e monotonia. Os alunos foram confrontados com funções decrescentes e decrescentes e concluíram que os gráficos destas funções são retas e são consideradas funções afins.
Realcei a importância dos modelos matemáticos nas representações dos problemas do dia-a-dia, focando a relevância da Matemática na vida diária e no facto desta ciência ser essencial em todas as áreas da vida.
Na resolução desta tarefa, a calculadora gráfica deve ser encarada como uma ferramenta para confirmação de respostas apresentadas (obtidas por processos algébricos).

Tarefa 5 - Efeitos da variação de parâmetros *a, h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$

Apresentação da tarefa

A aula teve início às oito horas e vinte minutos com a escrita do sumário e a verificação das faltas dos alunos. Os alunos sentaram-se de acordo com os grupos previamente definidos. A tarefa foi distribuída às 8h30 e a leitura da tarefa foi realizada individualmente pelos alunos. Os alunos foram informados que esta tarefa tinha a duração de duas aulas consecutivas e como tal todas as resoluções realizadas e gráficos devem ser guardados, para serem posteriormente discutidos.

Realização da tarefa em grupo

À medida que os alunos iam realizando a tarefa, fui-me apercebendo que os vários grupos perguntavam se podiam dar exemplos de funções quadráticas para chegarem às conclusões pretendidas. Deixei que prosseguissem a resolução da tarefa, deslocando-me aos grupos, apenas quando por eles era solicitado.

Esta tarefa tem como objetivo estudar e sistematizar o comportamento da função quadrática quando apresentada na forma: $y = a\,x^2$, $y = a\,x^2 + k$, $y = a(x-h)^2$ $y = a(x-h)^2 + k$ e identificar o significado dos parâmetros *a*, *h* e *k*, utilizando para isso a máquina de calcular gráfica.

Com recurso à calculadora gráfica os grupos obtêm e reproduzem numa folha de papel os gráficos das funções definidas pelas suas representações algébricas. Depois identificam, em cada caso, o eixo de simetria, as coordenadas do vértice da parábola, a existência e o número de zeros, o sentido da concavidade da função, para posteriormente um aluno do grupo apresentar à turma recorrendo ao QI .

Discussão da Tarefa

A discussão da tarefa foi realizada e explicada no QI, por um elemento de um grupo escolhido por mim. Por fim, corrigia a forma como os alunos a apresentavam e esclarecia as suas dúvidas face às resoluções que estavam no quadro.

Na questão 1a) da tarefa da função quadrática, os grupos conseguiram descrever qual a influência do parâmetro *a*, nos gráficos das funções dadas.

O grupo 4, apresentou o seguinte:

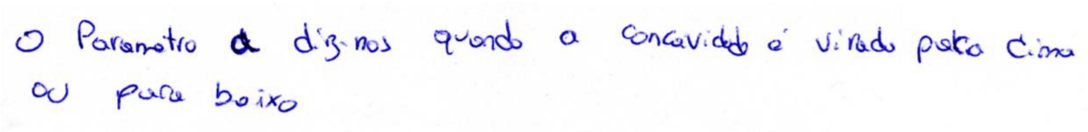


Figura 21: Resposta do grupo 4

Entretanto, um elemento do grupo 3, interpelou o que o grupo 4 tinha escrito no QI, no que respeita ao parâmetro *a*:

> **Maria:** Verificamos que o parâmetro *a* define se a parábola é virada para cima se $a < 0$ ou se é virada para baixo, se $a > 0$. Define também a concavidade de uma parábola, quanto maior for o *a* mais côncava é a parábola e quanto menos for o *a* menos côncava é a parábola.

O grupo 6, também quis intervir, expressando o seguinte:

O parâmetro a nos gráficos das funções poderá influenciar a côncavidade se esta estiver virada para cima, o a é positivo e se estiver virada para baixo o a é negativo.
Também vai influenciar a abertura da parábola, ou seja, quanto maior for o número de a, menor será a abertura da parábola.

Figura 22: Resposta do grupo 6

Nesta altura intervim e solicitei que analisassem melhor o que significado de a concavidade ser "mais ou menos côncava". Nesta fase surgiu um burburinho na sala de aula, tendo o grupo 4 e 6 solicitado ao professor que "colocasse outra vez no QI o que tinham escrito para poderem chegar a uma conclusão conjunta". Os vários grupos puderam novamente ler o que os grupos tinham realizado.

Na questão 1b), os grupos deram vários exemplos de funções do tipo $y = a x^2 + k$ $y = a(x-h)^2$ e $y = a(x-h)^2 + k$.

Os grupos apresentaram à turma, quais os efeitos dos parâmetros *a*, *h* e *k* relativamente aos gráficos das funções e identificaram as coordenadas do vértice da parábola e a respetiva equação do eixo de simetria, elaborando um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegaram.

O grupo 5 apresentou o seguinte:

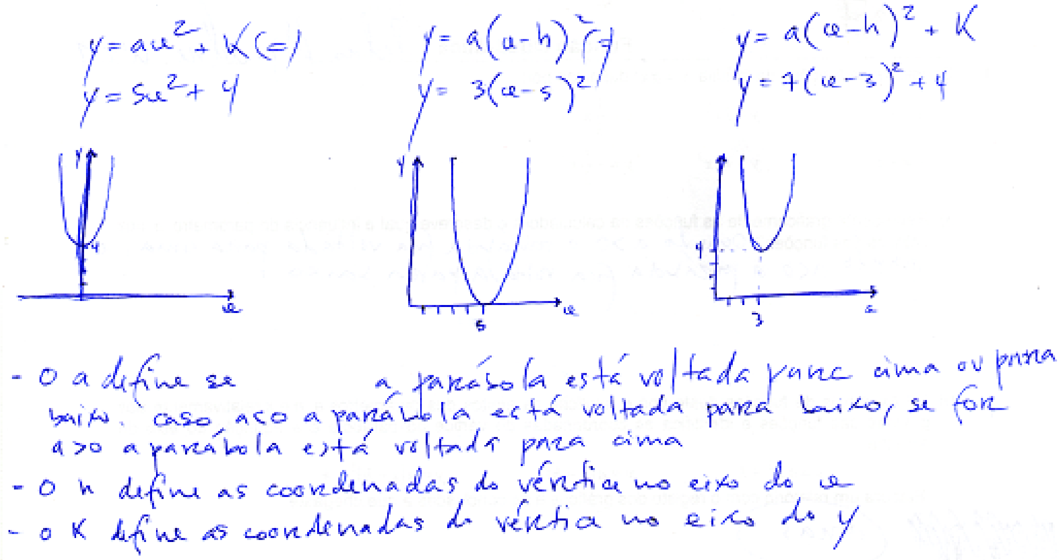


Figura 23: Resposta do grupo 5

Como podemos verificar, esta resolução apresenta apenas exemplos em que $a > 0$, e as conclusões são bastantes simples. O grupo 6, confrontou a turma com o seguinte:

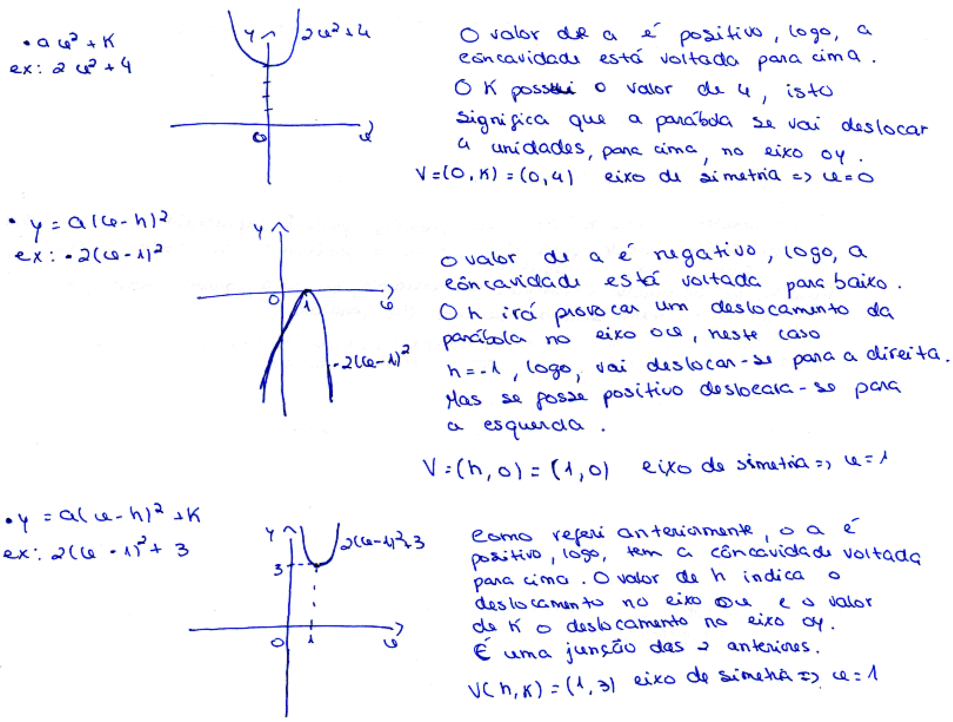


Figura 24: Resposta do grupo 6

Existiram interações entre os alunos dos vários grupos:

Francisco: Depois desta discussão podemos concluir que o parâmetro *a*, define se a concavidade é voltada para cima ou para baixo e se é mais "aberta" ou menos "aberta". O professor pode voltar atrás, aí no QI, para verificarmos que isto é verdade.

Professor: Certo, eu vou colocar essa página.

Francisco: Aí está o que eu acabei de dizer.

João: Para sermos mais rigorosos podíamos falar no módulo de *a*.

Professor: Sim, essa seria a linguagem mais rigorosa. Francisco, podes continuar…

Francisco: Nas equações do tipo $y = ax^2 + k$, o vértice da parábola coincide sempre com o eixo dos xx, logo o seu vértice é do tipo $(0, k)$e o eixo de simetria é sempre $x = 0$. E ainda há outro pormenor o parâmetro *k* corresponde ao valor de *y* do vértice da parábola, logo *k*=*y*.

Ana: O que disseste está escrito no quadro.

Francisco: Não está de uma forma clara.

Ana: Nós identificamos o h e k como vértice da parábola e dissemos que existia um deslocamento para cima, para baixo, para a direita e para a esquerda. Este deslocamento vai influenciar as coordenadas do vértice e eixo de simetria.

A questão 1c) tinha como objetivo descrever como se podia obter o gráfico de cada uma das funções dadas a partir do gráfico $y = x^2$. Um elemento do grupo 4, começou por apresentar as seguintes conclusões no QI:

Diogo: Bem, em relação a $y = -x^2$, a parábola ficou com a concavidade para baixo e negativa. No gráfico de $y = (x+4)^2$ a concavidade é igual a de $y = x^2$, mas moveu-se para o lado. Para $y = 2(x-5)^2 + 3$, a parábola fica com a concavidade para cima e positiva, mas moveu-se para cima e para o lado.

Francisco: Esta questão vai ao encontro daquilo que eu já tinha dito anteriormente. Se $h > 0$, a parábola desloca-se para a esquerda e se $h < 0$ desloca-se para a direita.

Manuel: Professor, o que o Francisco disse não está correto, é o contrário do que ele está a dizer.

Neste momento gerou-se uma troca de ideias entre grupos e eu deixei que essas trocas se fizessem para continuar a discussão.

Manuel: Já percebi, dei novamente valores a *h* e verifiquei que é o contrário do que aparece na fórmula.

Professor: Esclarece isso melhor.

Manuel: Não consigo disser de outra forma, mas já entendi.

Maria: Posso esclarecer?

Professor: Claro

Maria: Como a fórmula é do tipo $y = a(x-h)^2$, e a equação dada é $y = (x+4)^2$ podes escreve-la $y = (x-(-4))^2$ e agora já consegues ver que $h = -4$.

Manuel: É isso mesmo.

O grupo 1, interpelou a turma afirmando que conclusões a que tinham chegado eram mais simples e englobavam de uma forma mais sintética o que os outros colegas já tinham referido:

Carlota: Professor, basta dizer o seguinte:

> A primeira função é simétrica a $y = x^2$, em relação ao eixo dos xx.
> A segunda função move-se quatro unidades para a esquerda.
> A terceira função fica com uma abertura menor, move-se cinco unidades para a direita e 3 unidades para cima.

Esta questão foi aquela que manifestou mais participação do grande grupo, pois todos queriam intervir para justificar as suas conclusões.

Já tinha tocado para intervalo e a discussão continuava, os alunos não queriam acabar a aula e alguns deles sugeriram que a aula não terminasse. Tudo o que foi realizado no QI, foi gravado para ser utilizado na aula seguinte.

A aula iniciou-se com a discussão em torno de algumas questões proporcionadas na aula anterior. Depois de esclarecidas, e dando alguns exemplos, através de exercícios de aplicação, os grupos voltaram ao trabalho para concluírem a tarefa proposta. Para os alunos concluírem o que restava, foi-lhes dado 30 minutos, para resolverem a questão 2.
Esta tinha como objetivo estudar os efeitos dos parâmetros a, α e β na equação $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e analisar as informações imediatas que cada um fornece e traduzir uma função quadrática da representação gráfica para a representação algébrica.
Esta questão permitiu que os grupos fossem confrontados com uma expressão de uma função de 2º grau, diferente daquela que estavam habituados a trabalhar. Só 3 grupos conseguiram acabar esta questão na totalidade, apresentando aos colegas as suas conclusões.

Na questão 2a), todos os grupos identificaram que 2 e -5 eram zeros da função. O grupo 2 prontificou-se a responder a esta questão no QI.

Figura 25: Resposta do grupo 2

Em relação à questão 2b) e 2c), os grupos investigaram qual o significado de a, α e β na equação $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$, atribuindo valores para responderem às questões.

O grupo 4, com a ajuda da máquina de calcular gráfica, verificou que α e β, eram zeros, concluindo:

Diogo: Se $\alpha = \beta$, o vértice fica na origem. Se forem diferentes α e β representam os seus zeros

Inês: O que estás a dizer no caso de $\alpha = \beta$ é falso.

Diogo: Porquê?

Pedro: Professor, α e β são pontos de interseção com o eixo dos xx, logo são zeros.

Professor: Pedro, não estás a perceber a questão, o que se está a falar é no caso de $\alpha = \beta$.

João: O melhor é dares exemplos de funções e esboçares no QI.

Bernardo: Tenta esta equação $y = (x-1)(x-1)$.

Entretanto o Diogo através do *TI-SmartView*, esboçou o gráfico da equação sugerida.

Diogo: Ah, pois é. O vértice fica é no eixo dos xx e não na origem.

Henrique: Já que estás aí esboça o gráfico de $y = (x-1)(x+3)$.

Carlota: Não é preciso, podemos ver que os seus zeros são 1 e -3. Esse trabalho já o nosso grupo o fez. Se quiser podemos escrever as nossas conclusões no QI.

O Diogo para confirmar esboçou o gráfico, tendo o grupo 1, através da aluna Carlota, apresentado as suas conclusões

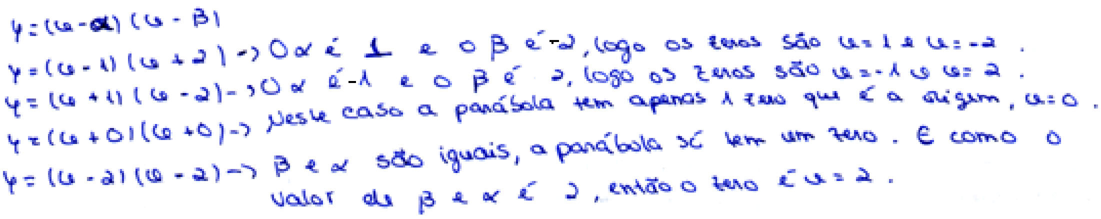

$y=(x-\alpha)(x-\beta)$
$y=(x-1)(x+2) \to$ O α é 1 e o β é -2, logo os zeros são $x=1$ e $x=-2$.
$y=(x+1)(x-2) \to$ O α é -1 e o β é 2, logo os zeros são $x=-1$ e $x=2$.
$y=(x+0)(x+0) \to$ Neste caso a parábola tem apenas 1 zero que é a origem, $x=0$.
$y=(x-2)(x-2) \to$ β e α são iguais, a parábola só tem um zero. E como o valor de β e α é 2, então o zero é $x=2$.

Figura 26: Resposta do grupo 1

Em relação à questão 2c), foram apresentadas várias expressões algébricas correspondentes aos gráficos dados. Alguns grupos foram confrontados pelo facto de não calcularem o valor do parâmetro *a*. Nas várias resoluções houve a preocupação de associarem o vértice (h,k) do gráfico à expressão $y = a(x-h)^2 + k$ como podemos verificar:

O grupo 4, apenas escreveu a expressão analítica no QI, preocupando-se apenas com os zeros da função.

Figura 27: Resposta do grupo 4

O grupo 3 interpelou o grupo 4 dizendo que as expressões encontradas não eram as corretas, pois não tiveram em atenção a "abertura" da parábola. Sendo assim, um elemento do grupo apresentou a sua resolução no QI:

> **Francisco:** É necessário encontrar um ponto da parábola e o seu vértice para escrever a equação.
> **João:** Se esboçarmos a função do grupo 4 verificamos que não coincidem.
> **Professor:** Francisco, esboça as duas equações, para podermos analisar o que o João está a afirmar.
> **Inês:** Nós conseguimos escrever expressões diferentes para a mesma parábola.
> **Professor:** Explica à turma o que fizeram.
> **Inês:** Pelas alíneas anteriores verificamos que uma parábola poderia ser escrita por duas expressões diferentes, e colocamos essas expressões na calculadora e verificamos que os gráficos coincidiam.
> **Professor:** Queres vir ao QI e expor as vossas conclusões:
> **Inês:** Olhamos para o gráfico e verificamos que tinha dois zeros, depois com um ponto, fomos "achar" o *a*.
> **José:** Professor, essas expressões não são iguais.
> **Inês:** Mas se desenvolveres vais ver que são.
> **Pedro:** Inês esboça as duas parábolas no QI, para verificarmos se os gráficos se sobrepõem.

É de salientar que apenas um grupo, aplicou as duas expressões analíticas da função quadrática.

Síntese da aula

No final das apresentações dos grupos, a turma foi confrontada com um *applet*-influência dos parâmetros, *a*, *h* e *k* na expressão do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, onde puderam verificar, com um "arrastar" da caneta no QI, a alteração dos vários parâmetros e a sua influência no gráfico da parábola

Os alunos compreenderam o que tinham realizado e foram confrontados com outra “ferramenta” disponível na sala de aula.

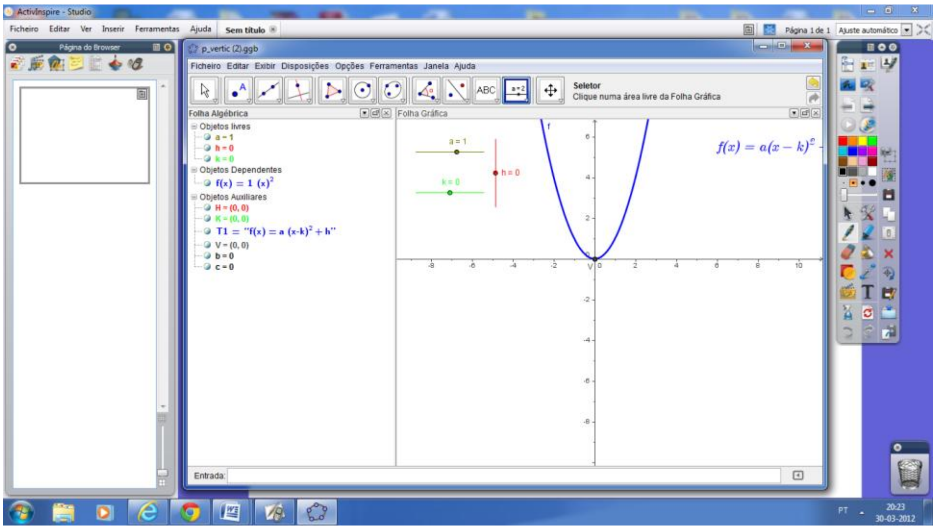


Figura 28: *Applet* - influência dos parâmetros, *a*, *h* e *k* na expressão do tipo $y = a(x-h)^2 + k$

Professor: Agora, vamos verificar/confrontar o que realizaram com a máquina de calcular gráfica com um *applet*, realizado com o Geogebra.

Pedro: Professor, isto assim é simples, vê-se melhor. No caso do deslocamento horizontal, quando o *h* é maior que zero o gráfico da função desloca-se *h* unidades para a esquerda e quando o *h* é menor que zero vai *h* unidades para a direita.

Manuel: Com o quadro interativo é mais fácil de perceber porque dá para arrastar o gráfico da função para direita, para esquerda, para cima, para baixo, com os movimentos que eu quiser. E dá para ver melhor aquela dúvida que tive.

Francisco: Com esta ferramenta conseguia responder às questões mais rápido, e era mais fácil, porque bastava substituir os parâmetros.

José: Professor, não se esqueça de gravar a aula e envie para o email da turma, porque não passei nada, estive atento ao que se passava na aula.

Os alunos através do *applet* - influência dos parâmetro a h e k na expressão do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, chegaram à conclusão que era o valor absoluto de a que altera a forma da parábola do modo como a seguir se indica:

(i) se $|a| < 1$, a parábola “abre-se” relativamente à parábola $y = x^2$

(ii) se $|a| > 1$, a parábola “fecha-se” relativamente à parábola $y = x^2$

(iii) Quanto maior for $|a|$, mais “fechada” é a parábola.

Nesta aula os alunos revelaram-se predispostos a opinar sobre as suas resoluções durante a discussão. A discussão dos resultados e das estratégias de resolução foi participada, existindo momentos onde os alunos conseguiram guiar a discussão sem a necessidade de consentimento do professor antes de me transmitirem as suas ideias.

Os grupos 2 e 6 foram os menos participativos e os que manifestaram mais dificuldades. Os grupos 1, 3 e 5 foram os mais participativos e empenhados durante a realização da tarefa e na fase da discussão. O grupo 4 mostrou-se pouco motivado e empenhado.

Tarefa 6 – Como varia o volume das caixas

Apresentação

A aula teve inicio às dez horas e dez minutos, com resolução dos trabalhos de casa. A tarefa foi distribuída pelas dez horas e 30 minutos.

Esta tarefa foi apresentada aos alunos com o objetivo de encontrarem uma nova função associada um problema da vida real. Foi solicitado que investigam o modo como varia o volume da caixa que se pretende construir, bem como a medida do lado do pedaço que se deve cortar em cada canto de modo que o volume da caixa seja máximo.

Os alunos podem, por exemplo, construir um molde da caixa numa folha de papel para fazerem experiências de cortes de modo a perceberem como varia o volume da caixa. Podem também tentar encontrar a expressão algébrica da função que define o volume, sendo este função da medida do canto a cortar. Esta tarefa pretende reforçar os conceitos de variável e de função.

Realização da tarefa em grupo

Durante a realização da tarefa, procuro acompanhar as estratégias dos alunos, nomeadamente no completar do quadro respeitante aos pares ordenados $(x_i, V(x_i))$.

Esclareci dúvidas na visualização da janela da máquina de calcular de alguns grupos. Realcei que o retângulo de visualização é um aspeto fundamental na obtenção da representação gráfica de uma função. Um conhecimento prévio das características de uma função permite escolher o retângulo de visualização mais apropriado. Salientei aos grupos, se a janela não for adequada, pode não ser possível detetar descontinuidades da função, pontos de intersecção com os eixos coordenados, extremos da função, variação da função, etc. A visualização gráfica das principais propriedades de uma função exige normalmente que se observe mais do que uma representação gráfica da função, o que corresponde a definir várias janelas de visualização na calculadora.

Nos grupos que revelaram mais dificuldades na abordagem de algumas questões, mantenho uma postura de encorajamento à prossecução da tarefa. Verifiquei que a questão que apelava a representação no papel dos pontos, facilitava a abordagem da janela de visualização.

Discussão da tarefa

O grupo 6, após uma adequada interpretação do problema, representa a função que o traduz de forma algébrica, gráfica e numérica:

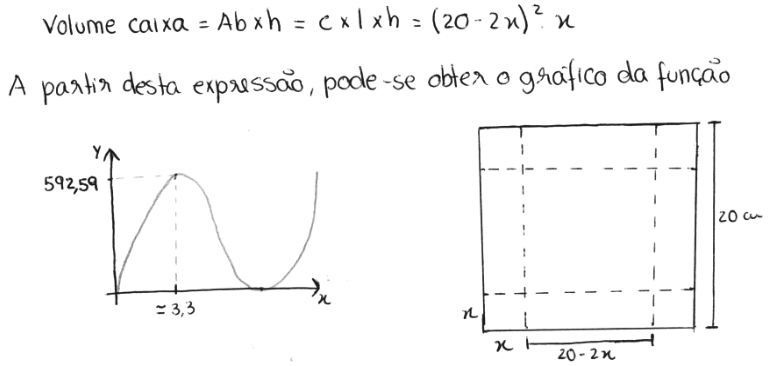


Figura 29: Resolução do grupo 6

Deste modo, o grupo promoveu um bom desempenho no trabalho com diferentes representações. No entanto, o grupo não simplificou a expressão algébrica obtida, sendo confrontado mais a frente com a resolução de outo grupo.

O grupo 1, através da Inês, apresentou uma expressão que traduziu o volume da caixa apresentada, explicando com detalhe aos colegas o significado dos cálculos efetuados, como podemos ver a seguir:

$$V_{\square} = c \times l \times h$$
$$c = (20-2x)$$
$$l = (20-2x)$$
$$h = x$$

$$V = (20-2x)(20-2x) \cdot x$$
$$V = (400-80x+4x^2) \cdot x$$
$$V = 400x - 80x^2 + 4x^3$$

Figura 30: Resolução do grupo 1

Após esta resolução, o grupo em questão foi interpelado pelo Manuel:

> **Manuel:** A expressão obtida por este grupo é diferente da apresentada pelo grupo anterior. Coloquei as duas expressões na máquina e verifiquei que os gráficos coincidiam, logo representa a mesma função…

Fez-se silêncio na turma. Alguns alunos tentaram de imediato responder a esta alegação. O Francisco, argumentou o seguinte:

> **Francisco:** A última expressão resulta da multiplicação das medidas da caixa, ou então.., do desenvolvimento dos casos notáveis, logo a expressão representa o mesmo. Podemos dizer que a multiplicação de uma função afim com uma função quadrática é uma função cúbica.

Em relação à questão 2, os alunos foram confrontados entre que valores a variável independente pode variar, no contexto do problema apresentado:

> **Ana:** O valor de *x* pode variar entre zero e dez.
> **Professor:** E pode tomar o valor zero?
> **Ana:** Não, porque é uma medida… por isso tem de ser um valor positivo.
> **Professor**: E dez?

Ana: Pode, pois é um valor positivo.

Henrique: Professor, o dez não pode ser porque se substituir na expressão $20-2x$, o valor de x por 10, obtemos o comprimento de um lado zero, o que não pode ser.

Carlota: Podemos ver que o x não pode ser zero nem dez, porque se assim fosse a caixa era um ponto. Através do que foi apresentado no QI, pelos grupos, o x vai pertencer a um intervalo aberto entre zero e dez.

Síntese

O problema consistia em determinar o valor de x, a ser cortado, para obtermos a caixa sem tampa. Os alunos através deste *applet* verificaram que à medida que varia o volume também varia, isto é, o volume da caixa depende da variável x, que neste problema representa o tamanho do corte que determinará a altura da caixa. Ao "arrastar" x no seletor os alunos repararam que x só pode assumir valores entre 0 e 10 e a forma da caixa variava consoante os valores atribuídos a x.

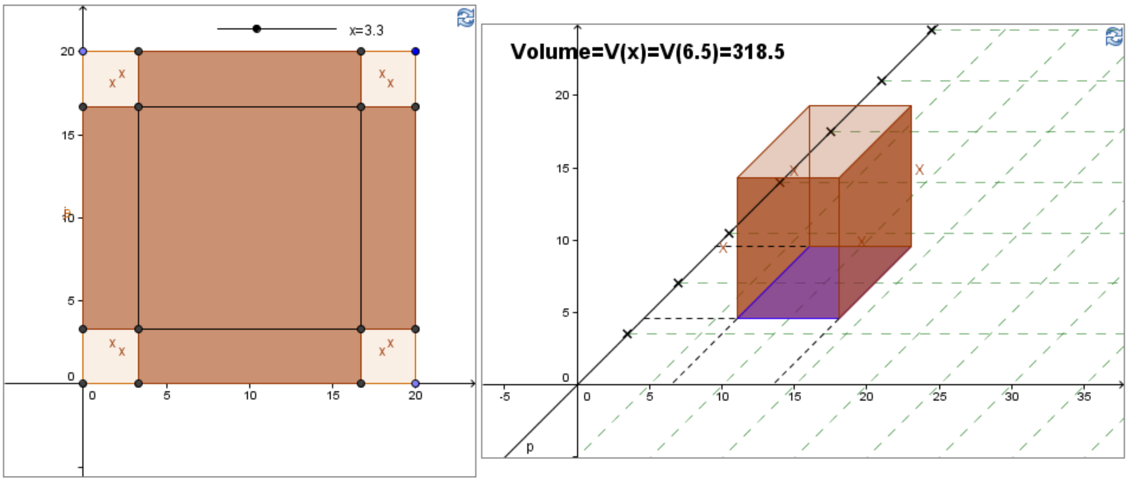


Figura 31: Applet - Variação do volume em função de x

Outro modo de visualizar este problema para tentar obter o valor máximo de $V(x)$ é fazer uma análise gráfica onde se explicite visualmente a relação existente entre as duas variáveis envolvidas no problema $V(x)$ (volume da caixa) e x (tamanho do corte).

Os alunos verificaram que se aumentarmos o número de pontos $(x_i, V(x_i))$ (movendo o valor de n no seletor) obtém-se uma linha poligonal com os pontos $(x_i, V(x_i))$, e aumentando o número de pontos construiu-se o gráfico que relaciona $(x, V(x))$. A partir deste gráfico puderam visualizar o comportamento do volume em função do lado do canto cortado e que, ao maior corte, nem sempre corresponde o maior volume.

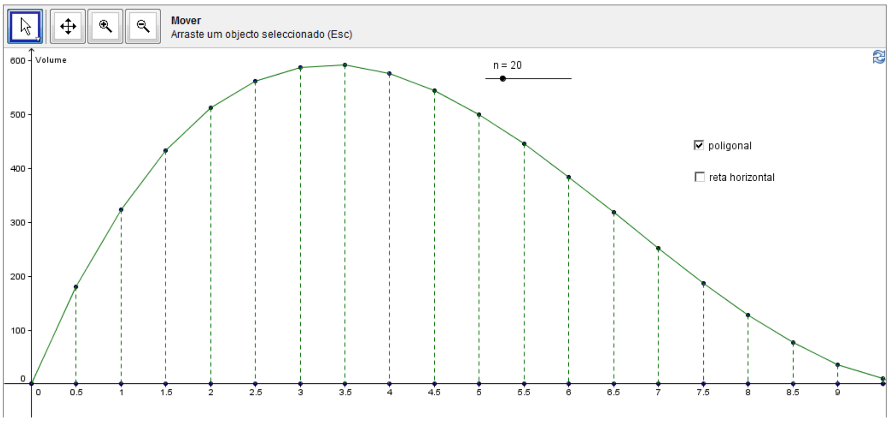


Figura 32: Representação gráfica que relaciona $(x, V(x))$.

Capitulo V

Conclusões

O presente capítulo inicia-se com a apresentação de uma síntese do estudo, de seguida são apresentadas as principais conclusões como resposta às questões inicialmente formuladas, sintetizando os resultados obtidos pelos diferentes grupos da turma que constitui o estudo de caso. Não se pretende efetuar generalizações dos resultados, mas sim compreender o caso em estudo (a turma) identificando pontos fundamentais e refletindo sobre eles. Por fim, serão apresentadas algumas considerações finais relacionadas com o ensino da Matemática e do contributo do quadro interativo na sala de aula ao nível das interações e da comunicação matemática.

Recordando o objetivo do estudo

Este estudo procurou compreender as implicações do uso da tecnologia, em particular do QI, na dinâmica da aula de Matemática que explora tarefas de natureza diversificada, numa turma do 10º Ano.

Assim, este estudo procurará responder às seguintes questões:

a) Que implicações traz o QI ao nível da estrutura da aula, em especial, na discussão e síntese?
b) Que implicações traz o QI ao nível do papel dos alunos e do professor na construção do conhecimento matemático?
c) Que implicações traz o QI ao nível das interações/comunicação entre alunos e alunos e professor?

A integração das Tecnologias de Informação e Comunicação, nomeadamente o quadro interativo acoplado de outras ferramentas tecnológicas promove novas formas de aprender, de ensinar, de interagir e de pensar. O despontar de novos ambientes tecnológicos na educação propícia a que os intervenientes assumam novos papéis encare a sala de aula sob uma perspetiva diferente. Apresentam-se de seguida as conclusões a que este estudo chega sobre as questões da investigação.

Conclusões

Que implicações traz o QI ao nível da estrutura da aula, em especial, na discussão e síntese?

Durante o estudo o uso do quadro interativo revelou-se um complemento para melhor comunicar. A sua utilização permitiu que os diferentes grupos/alunos interviessem com mais qualidade na discussão e apresentassem as ideias de forma mais clara e argumentassem melhor os resultados, facilmente observáveis nos episódios relatados no capítulo quatro.

Ao longo de toda a intervenção, nos momentos de *discussão*, as interações entre os alunos surgiam espontaneamente, mas em alguns momentos convidava os alunos a pedir auxílio aos colegas para ultrapassar certas dificuldades.

A criação de oportunidade de *discussão* entre os alunos estimulou a sua autonomia, em que estes desempenhavam um papel ativo na aquisição das aprendizagens, levando-os a experimentar momentos de descoberta na aprendizagem matemática.

Através da análise dos factos apresentados foi possível verificar que os *momentos de discussão/síntese* criados pelas situações descritas, possibilita aos alunos a troca de ideias e o desenvolvimento da capacidade de comunicar na aula de Matemática. A intervenção de diversos alunos nos vários diálogos gerados em cada uma das situações apresentadas e as variadas resoluções, demonstra o envolvimento e as interações na *discussão/síntese* das tarefas.

Quando é pedido a um aluno para explicar como pensou para obter o resultado alcançado, estimula-se nele o desenvolvimento de processos comunicativos. Na *discussão*, o aluno é convidado a interagir com os colegas, partilhando as suas ideias e raciocínios, e a explorar formas de ser compreendido pelos outros

A *discussão* na sala de aula, perante as apresentações, resoluções e diálogos apresentados no QI, permitiu completar argumentos incompletos, detetar a utilização de raciocínios errados e desenvolver a capacidade de argumentação quando da apresentação de diferentes resultados e das discussões que daí decorreram. No seguinte esquema, pode-se observar a influência do QI no momento da apresentação/resolução da tarefa:

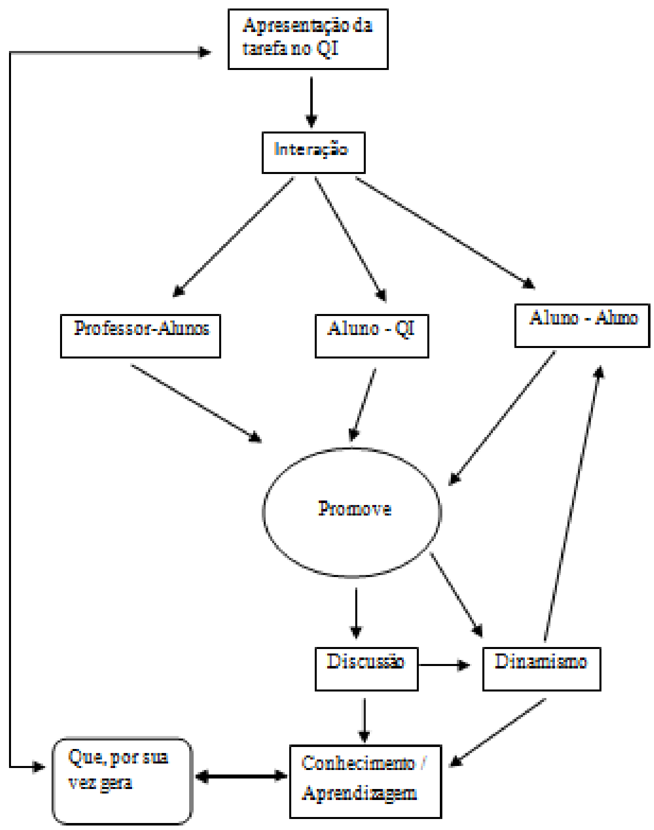


Figura 33: Esquema da apresentação/resolução da tarefa no QI

Constatei que nas aulas em que eram exploradas aplicações dinâmicas no QI (tarefa 5 e tarefa 6), os alunos estavam mais atentos, intervindo espontaneamente, colocando questões e procurando dar respostas. Sempre que havia a possibilidade de interagir com a aplicação, aumentava o número de alunos que voluntariamente queriam intervir. Criaram-se assim dinâmicas de aula interessantes e propícias à *discussão*, ao questionamento e à compreensão de conceitos.

Ao pensarem e processarem a informação em vez de ouvirem o que o professor tem a dizer, os alunos aprendem melhor e "guardam" mais informação.

A *discussão* na sala de aula, perante as resoluções e diálogos apresentados, permitiu completar argumentos incompletos, detetar a utilização de raciocínios errados e desenvolver a capacidade de argumentação aquando da apresentação de diferentes resultados e das *discussões* que daí decorreram. A contribuição do QI ao nível da estrutura da aula pode sintetizar-se na seguinte tabela:

Tabela 8: Esquema da contribuição do QI na estrutura da aula

Fases da aula	Apresentação	Realização da tarefa em grupo	Discussão	Síntese da aula
Influência do QI	- Auxilia na introdução da tarefa a realizar. - Facilita a "busca" de toda a informação realizada/ registada em aulas anteriores para ser utilizada.	- Disponível para os alunos testarem as suas ideias, conjeturas /conclusões.	- aumenta a atenção dos alunos. - assume-se como fator de motivação para as aprendizagens. - permite visualizar, manipular e dotar de dinamismo a abordagem ao conhecimento matemático. -permite que os alunos/professor atuem de um modo ativo e colaborativo . - oferece novas formas para a participação de alunos com mais dificuldades. - possibilita que a aula seja mais versátil , resultante da interatividade.	- Ajuda os alunos a visualizar conceitos com imagens interativas. - Facilita o acesso a informação complementar. - Permite que as informações registadas e ou gravadas no QI, estejam sempre disponíveis.

Que implicações traz o QI ao nível do papel dos alunos e do professor na construção do conhecimento matemático?

A *aprendizagem dos conceitos matemáticos*, processou-se através da participação dos alunos, na resolução de tarefas, a partir das interações entre os alunos de cada grupo, entre grupos e entre os alunos e o professor, quando eram expostas no QI. Estas interações influenciaram positivamente o trabalho dos alunos. Por seu lado, o professor teve uma influência importante, mas discreta, pois o meu papel foi de procurar orientar os alunos no trabalho sem lhes reduzir a atitude investigativa.

A entrega dos enunciados das tarefas, no início de cada aula, foi acompanhada por breves indicações respeitantes ao modo de organização do trabalho, tempo previsto para a sua realização, material a utilizar e elaboração de relatórios com as resoluções e conclusões. Na fase da discussão/síntese das tarefas começou por se notar a falta de hábito dos alunos em comunicar, nomeadamente o grupo 2 e o grupo3. No entanto, a autonomia foi aumentando com o ambiente proporcionado e as interações propiciadas pelos alunos. O QI na sala de aula e as interações promovidas desenvolveu nos alunos uma atitude construtiva do *conhecimento matemático*, em que, eles próprios, foram os agentes da sua aprendizagem e condutores do seu discurso. Estive sempre atento ao desenrolar dos trabalhos, adotei uma postura interrogativa/moderador que os levava a refletir sobre as suas próprias dúvidas e questões. Esta postura contribuiu para a evolução dos alunos, acabando estes por se envolverem mais nas tarefas, tornando-se mais autónomos, passando a valorizar tanto as respostas como os processos utilizados e a considerar, em alguns problemas, várias hipóteses de resposta para uma questão.

As ferramentas tecnológicas, computador e QI, foram usadas pelos alunos para explorar, conjeturar, validar resultados e apresentar todo o trabalho realizado. Observou-se que este uso, principalmente do QI, refletiu um aumento do envolvimento e interesse nas atividades propostas, corroborando investigações realizadas por vários autores, que se refletiu mais tarde na apropriação do *conhecimento*. Os quadros interativos possibilitam mudanças que implicam os professores (papel desempenhado na aulas, forma de preparar as aulas), que implicam os alunos (forma como percecionam as aulas, forma como participam nas aulas, qualidade das aprendizagens).

A abordagem na sala de aula, com recurso ao QI, parece provocar mudanças qualitativas nas crenças dos alunos sobre o seu contributo nas aprendizagens, principalmente pelo apelo gráfico e interativo que a tecnologia permite.

O QI permite, assim, estabelecer uma plataforma comunicacional favorável à promoção dos processos de interação, de discussão e reflexão dos conteúdos lecionados, sendo, neste sentido, um poderoso auxiliar pedagógico. A utilização desses meios tecnológicos gera uma atitude positiva nos alunos, que se traduz numa maior recetividade e maior empenho na realização das tarefas propostas. Os QIs favorecem o desenvolvimento de dinâmicas de sala de aula propícias à participação e à construção do *conhecimento matemático*.

A ajuda do QI acoplado com as ferramentas tecnológicas ajudou os alunos a pensar sobre o que tinham estado a concluir, permitiu-lhes visualizar melhor as relações estabelecidas e, consequentemente, construir alguns raciocínios lógicos.

O facto do QI, e *softwares* associados terem uma característica facilitadora da experimentação e da possibilidade de investigação de relações e propriedades geométricas a partir de (in)variâncias ao arrastamento, são poderosas ferramentas para o seu ensino e aprendizagem, estimulantes e facilitadores, encorajadores do desenvolvimento da compreensão e construção de conceitos, contribuindo desta forma para a construção do *conhecimento matemático*.

Confirmo que estes ambientes e estas metodologias são favoráveis ao desenvolvimento de competências matemáticas, permitindo aos alunos comunicar mais Matemática.

Que implicações traz o QI ao nível das interações/comunicação entre alunos e alunos e professor?

As formas como os alunos interagem e desenvolvem as suas ideias foram analisadas e culminaram na descrição de um caminho, com vários trajetos, constituído pelas *interações* realizadas entre os intervenientes durante este processo. De forma a visualizar os vários trajetos foi elaborado o seguinte esquema:

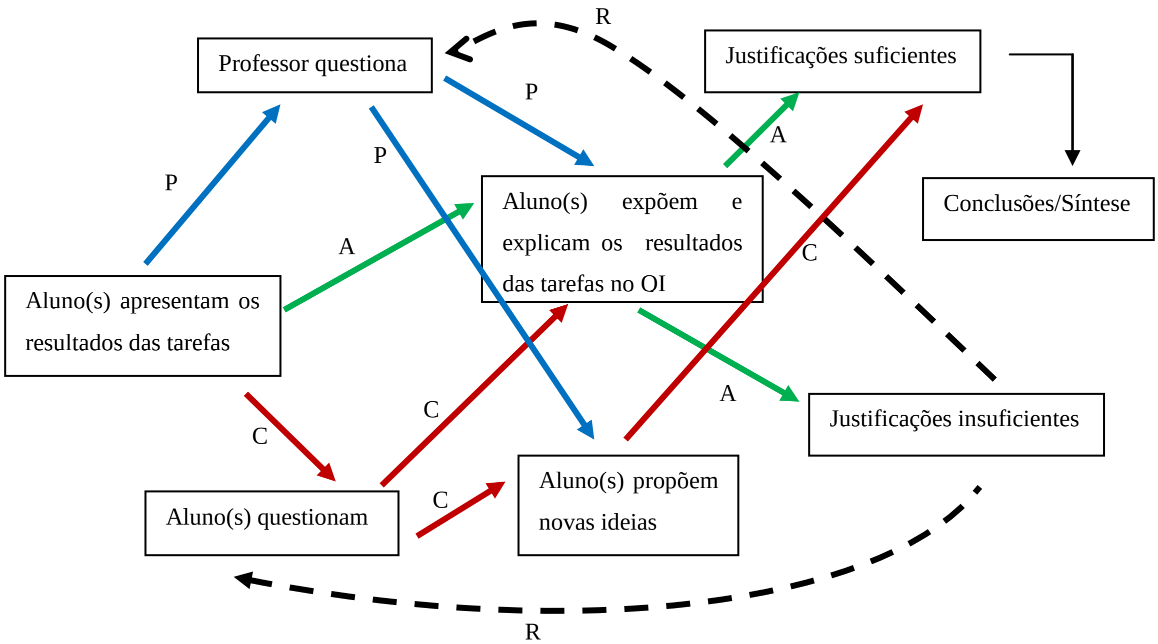


Figura 34: Esquema dos possíveis trajetos das interações realizadas

A – Trajeto do(s) alunos que expõem

C – Trajeto dos colegas que intervêm na discussão

P – Intervenção do Professor

R – Repetição do processo

Com base neste esquema, foi possível concluir que os alunos iniciam o debate apresentando as suas ideias e terminam quando as conclusões/síntese são válidas. Neste esquema existem vários trajetos simples ou combinados, caracterizados pelas *interações/comunicação* que resultam da discussão das tarefas no QI. Desde o trajeto A que é simples, até ao trajeto misto mais complexo, como por exemplo o percurso A, P, C e R. Por exemplo, o percurso A é constituído só por alunos que apresentam os resultados, exibem justificações suficientes e não há intervenção dos colegas ou do professor. Em relação ao trajeto A, P, C e R, os alunos apresentam os resultados, são questionados pelos colegas e/ou pelo professor. O professor também questiona os colegas que intervêm na discussão e estes também apresentam justificações. Quando as justificações resultantes não foram satisfatórias foi necessário repetir o processo. Este esquema mostra como as *interações* no QI mobilizam uma discussão e como a explicação é necessária para se alcançar uma conclusão.

Em todos estes trajetos existe um denominador comum, todos terminam quando os alunos consideram as justificações suficientes para a compreensão e para a conclusão do assunto em discussão.

Durante a investigação o uso da tecnologia, nomeadamente o QI em conjunto com outras ferramentas tecnológicas revelou-se um complemento para uma melhor *comunicação*. O uso desta tecnologia na sala de aula, permitiu que as intervenções dos alunos tivessem mais qualidade na discussão/síntese, permitindo *interações* diversas na sala de aula.

A *interatividade* e a dinâmica do QI sobrepuseram-se e auxiliaram a construção de significados, ajudando a superar dificuldades, nomeadamente as que dizem respeito à linguagem visual.

As ferramentas tecnológicas, foram usadas pelos alunos na sala de aula para explorar, conjeturar, validar resultados e apresentar todo o trabalho realizado. Observou-se que este uso, principalmente do QI, refletiu um aumento de *interações*, do envolvimento e interesse dos alunos nas tarefas propostas, reforçando investigações realizadas por vários autores (Glover & Miller, 2001; Beeland, 2002), que se refletiu na apropriação da aprendizagem. Esta ferramenta tecnológica facilita uma aprendizagem dinâmica e *interativa*, proporcionando momentos enriquecedores de troca e apresentação de ideias, contribuindo para uma aprendizagem do saber fazer.

Considerações finais

Na minha perspetiva, as atividades realizadas foram bastante úteis na compreensão dos conteúdos a assimilar pois considero que estas foram bem estruturadas e apontam para a construção do conhecimento com a mais-valia de terem sido diversificadas e com o recurso às novas tecnologias.

Relativamente à dinâmica da sala de aula o uso do quadro interativo permite que as aulas sejam mais dinâmicas.

As interações na sala de aula modificam-se com o uso do QI, os alunos estão mais dispostos a colaborar com o professor, o decurso da aula é mais dinâmico, gerando mais participação e intercâmbio de ideias e opiniões. O uso do QI favorece o aparecimento de novas aplicações interativas que podem ser utilizadas em simultâneo, promovendo abordagens diferentes na resolução das tarefas, criando deste modo ambientes de aprendizagem mais dinâmicos e interativos. Também emergiu deste estudo o clima agradável na sala de aula e a boa relação entre alunos, o professor/aluno, como recomendam os programas do ensino básico, onde os alunos demonstraram vontade de aprender. O QI associado a outros recursos tecnológicos apoia novas metodologias de ensino, permitindo aos alunos assumir um papel mais ativo na aprendizagem. O facto de as aulas serem gravadas no QI, permite que no início da aula seguinte se faça uma síntese do que foi realizado anteriormente dando assim continuidade as aprendizagens.

O uso de tecnologia atribuiu um papel mais ativo ao aluno na discussão, contribui para ensinar a pensar, argumentar e a expressar ideias, o que poderá proporcionar uma maior autonomia e desenvolvimento do sentido crítico.

Os alunos aderiram muito bem às tarefas propostas neste estudo. Todos participaram com interesse, tendo existindo, por vezes, um certo entusiasmo para ver quem era o primeiro grupo a expor a tarefa.

Com este estudo, posso concluir que o QI pode efetivamente ser utilizado na aula para aumentar o interesse e o empenho dos alunos, já que possibilita diversificar estratégias e metodologias, facilitando deste modo a construção da aprendizagem, através das interações promovidas. O quadro interativo desperta e motiva alunos para novas descobertas. Para além disso, a sua característica interativa é sem dúvida um elemento que estimula todo o processo de ensino e aprendizagem. Com o QI, os professores podem promover raciocínios mais estruturados que possibilitam uma compreensão mais aprofundada dos conceitos transmitidos. Esta interação facilita o diálogo e o debate de ideias, facilitando a apropriação do conhecimento matemático.

Com a introdução do QI na sala de aula o papel do professor modifica-se, isto é, passa a desempenhar o papel de orientador, mediador, pesquisador. O professor deixa de ser alguém que possui e transmite o conhecimento mas aquele que colabora na aprendizagem do conhecimento. A utilização do QI na aula de matemática foi uma mais-valia para os alunos.

Enquanto professor, foi muito gratificante ter colocado em prática esta experiência, uma vez que fiz uma gestão diferente das aulas com utilização do QI. O facto de ser simultaneamente professor e investigador traduziu-se num momento importante de reflexão e de aprendizagem, pois planifiquei e ensinei, mas também analisei e refleti sobre as minhas aulas.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Ed.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

Almiro J. (2004). *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática.* Obtido em 15 Janeiro de 2012, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/GTI-Joao-Almiro.pdf

Amado, N. & Carreira, S. *(2008). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das funções*. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática*. Vieira de Leiria: SEM/SPCE.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

APM (2001). *Posição da APM sobre Tecnologias na Educação Matemática*. Educação e Matemática, Nº61, Setembro/Outubro, p. 24.

APM (2003). *Que cor tem o ano Matemática e Tecnologia.* APMinformação, 67, 1.

Balanskat, A., Blamire, R., & Kefala, S. (2006). *The ICT impact report – A review of studies of ICT impact on schools in Europe*. European School Net. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://insight.eun.org/shared/data/pdf/impact_study.pdf

Beauchamp, G. (2004). Teacher use of the interactive whiteboard in primary schools – towards an effective transition framework. *Technology, Pedagogy and Education,* 13 (3), 327-348.

Becta (2003). *What the Research Says about Interactive Whiteboards.* Coventry. British Educational Communications and Technology Agency. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://www.becta.org.uk/

Becta (2006). *The Becta 2006: Evidence on the progress of ICT in education*. UK: Becta. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://ec.europa.eu/education/pdf/doc254_en.pdf

Becta (2008). *Learning with technology gets the right results*. Obtido em 2 de Dezembro de 2011 de http://about.becta.org.uk/display.cfm?resID=38101

Beeland, W. (2002). *Student Engagement, Visual Learning and Technology: Can Interactive Whiteboards Help?. Action Research Exchange* 1. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://teach.valdosta.edu/are/

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas (pp. 13-43). Lisboa: APM.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1999). *Investigação Qualitativa Em Educação*: *Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Buettner, Y., Duchâteau, C., Fulford, C., Hogenbirk, P., Kendall, M., & Morel, R. (2000). m*Information and Communication Technology in secondary education*. UNESCO. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://wwwedu.ge.ch/CPTIC/prospective/projets/unesco/en/curriculum2000.pdf

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica (8º ano).* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

Candeias, M. & Silva, J. (2008). *A nossa sala de aula já é maior que o planeta Terra*. Educação, Formação & Tecnologias, vol. 1. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://eft.educom.pt/index.php/eft/article/viewFile/27/19

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacion em Matematica Educativa*, *11*(2), 171-194. Obtido em 2 de Janeiro de 2012, de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511202

Conole, G. (2007). Describing learning activities: tools and resources to guide practice in Rethinking pedagogy for a digital age. In: H. Beetham & R. Sharpe (Eds.), *Rethinking Pedagogy for a Digital Age: Designing and Delivering E-Learning* (p. 81-91). London: RoutledgeFalmer. Obtido em 2 de Janeiro de 2012, de http://labspace.open.ac.uk/file.php/1/kmap/1176712833/references/Ch%206%20Conole.pdf

Corbett, A., & Willms, J. (2002). *Canadian Students' Access to and Use of Information and Communication Technology***.** Canadian Research Institute for Social Policy University of New Brunswick. Obtido em 15 Fevereiro de 2012, de http://www.cesc-csce.ca/pceradocs/2002/papers/BCorbett_OEN.pdf

Corrente, A. (2009). *O quadro interactivo no ensino da matemática: Analisando o trabalho de dois professores em contexto de colaboração.* Dissertação de mestrado da Universidade de Évora.

Damásio, M. (2007). Tecnologia e Educação: As Tecnologias da Informação e da Comunicação e o processo Educativo. Nova Veja.

DEB. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*: Lisboa: Ministério da Educação.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Van, S., Gravemeijer, K. (2007). *Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function*. In Pitta-Pantazi, D., & Philippou, G., Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME5, 1389 - 1398.

European Schoolnet (2004) 'ERNIST ICT Schoolportraits' Publisher: European Schoolnet, Editor: The Netherlands inspectorate of Education. Obtido em 2 de Janeiro de 2012, em http://insight.eun.org/ww/en/pub/insight/school_innovation/best_practice/ernist_school_portraits.cfm

European Schoolnet (2006). The ICT impact Report. Obtido em 2 de Janeiro de 2012, de http://insight.eun.org/shared/data/pdf/impact_study.pdf

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense. Obtido em 2 de Dezembro de 2011, de http://militantgrammarian.com/DAY/DwD/Workshops/T3ASMSa09/Ferrara,%20F.,%20Pratt,%20D.,%20Robutti,%20O.%20The%20role%20and%20uses%20of%20technologies%20for%20the%20teaching%20algebra%20and%20calculus..pdf

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de geometria em ambientes geométricos dinâmicos : o tema de geometria do plano no 9º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga. Obtido em 15 de Novembro de 2011, de http://repositorium.sdum.uminho.pt

Flores, P., Escola, J. (2009). *O papel das novas tecnologias na construção da cidadania: a plataforma Moodle no 1º ciclo do Ensino Básico*. Obtido em 15 de Janeiro de 2011, de http://obs.obercom.pt/index.php/obs/article/download/134/233

GEPE (2008). *Estudo de Diagnóstico: a modernização tecnológica do sistema de ensino em Portugal - Principais resultados.* Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação, Ministério da Educação, Portugal. Obtido em 15 de Dezembro de 2011, de http://www.gepe.min-edu.pt/np4/?newsId=364&fileName=mt_ensino_portugal.pdf

Glover, D., & Miller, D., J. (2001). Running with technology: the pedagogic impact of the large-scale introduction of interactive whiteboards in one secondary school. Journal of Information Technology for Teacher Education, 10(3) pp. 257-276

Glover, D., Miller, D., Averis, D. (2004) *Panacea or Prop: the role of the interactive whiteboard in improving teaching effectiveness*. Keele University, Staffordshire, U. K. Obtido em 15 de Novembro de 2011, de http://www.icme-organisers.dk/tsg15/Glover_et_al.pdf

Miller, D., Glover, D.,(2006a) *Enhanced secondary mathematics teaching Gesture and the interactive whiteboard*- British Educational Research Association, Warwick.

Miller, D., Glover, D. (2006b). *Interactive whiteboard evaluation for the secondary national strategy: Developing the use of interactive whiteboards in mathematics, Final Report for the Secondary National Strategy*.

Glover, D., Miller, D.J., Averis, D. & Door, V. (2007). The evolution of an effective pedagogy for teachers using the interactive whiteboard in mathematics and modern languages: an empirical analysis from the secondary sector. *Learning, Media and Technology,* 32 (1), 5-20.

Gravina, M.; Santarosa, L. (1998). A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação, IV. Brasília.Obtido em 15 de Maio de 2011, de http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pd

Graziola J., Schlemmer, (2008). *m-Learning (Aprendizagem com Mobilidade) como Possibilidade de Prática Pedagógica e Formação Docente?*. In: 14º CIAED – Congresso Internacional ABED de Educação a Distância "Mapeando o Impacto da EaD na Cultura do Ensino-Aprendizagem", 2008, São Paulo - SP. Anais do 14º CIAED. Obtido em 15 de Novembro de 2010, de http://www.abed.org.br/congresso2008/tc/5112008112157PM.pdf

Hennessy, S., Deaney, R., Ruthven, K., & Winterbottom, M. (2007). Pedagogical strategies for using the interactive whiteboard to foster learner participation in school science. *Learning, Media and Technology* 32(3), 283-301.

Higgins, S., Beauchamp, G. & Miller, D. (2007). Reviewing the literature on interactive whiteboards. *Learning, Media and Technology*, 32 (3), 213-225.

Higgins, S., Falzon, C., Hall, I., Moseley, D., Smith, F., Smith, H., & Wall, K. (2005). Embedding ICT In The Literacy and Numeracy Strategies – final report. Newcastle: University of Newcastle. Obtido em 15 de Dezembro de 2010 de http://webarchive.nationalarchives.gov.uk/20101007150244/http://research.becta.org.uk/uploaddir/downloads/page_documents/research/univ_newcastle_evaluation_whiteboards.pdf

Hodge, S. & Anderson, B. (2007). Teaching and learning with an interactive whiteboard: a teacher's journey. *Learning, Media and Technology*, 32 (3), 271-282.

Kennewell, S., & Beauchamp, G. (2007). The features of interactive whiteboards and their influence on learning. *Learning, Media and Technology, 32*(3), 227-241

Kennewell, S., & Beauchamp, G. (2008). The influence of ICT on the interactivity of teaching. *Education and Information Technologies*, 13(4), 305–315. Obtido em 15 de Maio de 2011, de http://www.springerlink.com/index/3612m5x1262436pk.pdf

Kennewell, S., Tanner, H., Jones, S., & Beauchamp, G. (2008). Analysing the use of interactive technology to implement teaching. Journal of Computer Assisted Learning, 24(1), 61-73.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6(3), 283-317.

Levy, P. (2002). *Interactive whiteboards in learning and teaching in two Sheffield schools: a developmental study*. Department of Information Studies (DIS), University of Sheffield, UK. Obtido em 15 de Novembro de 2010 em http://dis.shef.ac.uk/eirg/projects/wboards.htm

Lewin, C., Somekh, B. & Steadman, S. (2008). Embedding interactive whiteboards in teaching and learning: The process of change in pedagogic practice. *Education and Information Technologies*, 13 (4), 291-303.

Majó, J. & Marqués, P. (2002). La revolución educativa en la era Internet, Barcelona: Praxis la información y comunicación al sistema escolar. Tecnología para transformar la educación. Universidad Internacional de Andalucia/AKAL Madrid, 199-231. Obtido em 22 de Novembro de 2011, de http://peremarques.pangea.org/libros/revoledu.html

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

Miller, D.J., Glover, D. & Averis D. (2005). Presentation and pedagogy: the effective use of interactive whiteboards in mathematics lessons. In Hewitt, D. & Noyes, A., *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education*, 25(1), 105-112. London: British Society for Research into Learning Mathematics

Miller D., & Glover, D. (2006) Interactive whiteboard evaluation for the secondary national strategy: Developing the use of interactive whiteboards in mathematics, final report. Department for Children, Schools and Families. Obtido em 22 de Novembro de 2011, de http://nationalstrategies.standards.dcsf.gov.uk/node/96537

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Mosquito, E., & Ponte, J. P. (2008). *A calculadora e o computador nas práticas profissionais dos professores de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática, pp. 135-147). Lisboa: SEM-SPCE

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação da Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2000). *Normas para a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). Princípios e *Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Olive, J., & Makar, K. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange (Eds.), Mathematics education and technology – Rethinking the terrain. The 17th ICMI Study (pp. 133-177). New York: Springer

Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). *Software* no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. *Actas do XVII EIEM* (pp. 279-285). Lisboa: SPCE

Plano Tecnológico da Educação. (2010). Obtido em 5 de Agosto de 2011, de http://www.pte.gov.pt/pte/PT/Projectos/Projecto/Apresentação/index.htm?proj=6

Ponte, J. P. (1994a). Matemática: Uma Disciplina Condenada ao Insucesso?. *Noesis*, *31*, 24-26.

Ponte, J. P. (1994b). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34*,2-7.

Ponte, J. P. (1997). *As Novas Tecnologias e a Educação*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios? *Revista Ibero-Americana de Educação*, 24, 63-90.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In G. T. I. (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. Interações, 12, pp.96-144. Obtido em 15 de Julho de 2011, de http://nonio.eses.pt/interaccoes/artigos/L7%20-%20Ponte.pdf

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica

Ponte, J., P., & Canavarro, A. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Oliveira, Varandas (2001). *O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional*. Obtido em 15 de Novembro de 2010, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte-Oli-Var(TIC-Dario).doc

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: Implicações curriculares.* Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte & Serrazina (2009). *O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança.* Educação e Matemática, número 105. Obtido em 24 de Abril de 2010, de https://www1.esec.pt/pagina/fcmat/documentos/NPMatematicaoportunidademudanca.pdf

Redecker, C. (2008). *Review of Learning 2.0 Practices*. Institute for Prospective Technological Studies. Obtido em 18 de Fevereiro de 2010, de http://ipts.jrc.ec.europa.eu/publications/pub.cfm?id=2059

Santos, E. (2000). O computador e o professor: Um contributo para o conhecimento das culturas profissionais de professores. *Quadrante*, 9(2), 55-81.

Simões, A. (2005). *Avaliação de Sites de Matemática e Implicações na Prática Docente: Um Estudo no 3º CEB e no Secundário*. Tese de Mestrado. Universidade do Minho. Instituto de Educação e Psicologia. Braga.

Slay, H., Siebörger, I., & Hodgkinson-Williams, C. (2008). Interactive whiteboards: Real beauty or just "lipstick"? Computers & Education, 51(3), 1321-1341.

Smith, H., Higgins, S., Wall, K. & Miller, J. (2005). Interactive whiteboards: boon or bandwagon? A critical review of the literature, *Journal of Computer Assisted Learning,* 21, 91–101.

Steen, L. A. (2002). A problemática da literacia quantitativa. *Educação e Matemática*, 69, 79-88.

Stein,M. e Smith,M.(1998). *Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática.* Obtido em 13 de Janeiro de 2011, de http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Stein-Smith%201998.pdf

Tanner, H. & Jones, S. (2000). Becoming a Successful Teacher of Mathematics. London: Routledge Falmer.

UNESCO (2008). *ICT competency standards for teachers.* Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Obtido em 18 de Fevereiro de

2010, de http://cst.unesco-ci.org/sites/projects/cst/The%20Standards/ICT-CST-Policy%20Framework.pdf

Veloso, E. (1995). *Software* dinâmico: uma abordagem estimulante no ensino da geometria. In APM, Actas do ProfMat 95, pp. 53-64. Lisboa: APM.

Veloso, E. (2002). The Geometer's Sketchpad (versão 4). *Educação e Matemática,* 66, 20-21.

Veloso, E. (2002). Computadores na formação inicial. *Educação e Matemática*, 71, Setembro/Outubro, pp. 3-8.

Ventura, H., Oliveira, H. (2008). Conexões entre fracções, números decimais e percentagens no 5º ano: Explorações com uma applet. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática*. Vieira de Leiria: SEM/SPCE.

Viseu , F., & Ponte, P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC's. Revista latino americana de investigación en matemática educativa. Obtido em 18 de Fevereiro de 2010, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S166524362009000300005&lng=es&nrm=iso

Wall, K., Higgins, S. & Smith, H. (2005). The visual helps me understand the complicated things: pupil views of teaching and learning with interactive whiteboards. *British Journal of Educational Technology,* 36 (5), 851-867.

Wilson, A. (2008). Evaluating TI-Nspire in secondary mathematics classrooms. Obtido em 18 de Fevereiro de 2010, de http://education.ti.com/sites/PORTUGAL/downloads/pdf/ClarkWilson%20(2008).pdf

Wood, R., & Ashfield J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: a case study. British Journal of Education, Vol. 39, no. 1, 2008: p. 84 – 96. Obtido em 18 de Fevereiro de 2010 de http://www.pgce.soton.ac.uk/ict/NewPGCE/PDFs/Tyhe%20use%20of%20IWB%20for%20creative%20teaching%20and%20learning%20in%20literacy%20and%20marthematics%20case%20study.pdf

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods (3ª ed.).* London: Sage

Zevenbergen, R., Lerman, S. (2008). Learning environments using interactive whiteboards: New learning, spaces or reproduction of old technologies. Mathematics Education Research Journal, 20(1), 107–125.

ANEXOS

ANEXO I

Tarefa1 - Distribuição do gás

Distribuição de gás

Está a projetar-se a distribuição de gás a duas povoações S e R. Para isso, a companhia de gás vai instalar a tubagem de um gasoduto, de forma que qualquer dos seus pontos esteja a igual distância de cada uma das povoações; a partir desta tubagem sairá um ramal secundário que abastecerá S e R.

No mapa que se utilizou para projetar a obra, escolheu-se um referencial (o.m) do plano, no qual as povoações S e R se situam nos pontos de coordenadas $(4,2)$ e $(8,6)$ respetivamente.

a) Num referencial o.m marque os pontos S e R e indique as coordenadas do ponto de onde deve partir a tubagem do ramal, por forma a ficar o mais próximo possível das povoações.

b) Escreva as coordenadas de cinco pontos por onde deve passar o gasoduto.

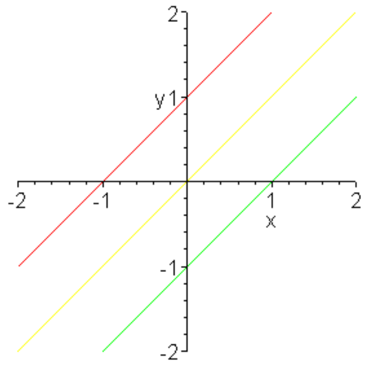
c) Faça uma representação do gasoduto e conjeture uma condição em x e y que relacione as abcissas e as ordenadas dos pontos por onde deve passar.

d) Prove a sua conjetura, recordando a construção geométrica da mediatriz, que já conhece.

ANEXO II

Tarefa 2 - Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = mx + b$

Influência do parâmetro m e b na equação da reta $y = m\,x + b$



Pode representar retas na calculadora a partir das suas equações.

Para isso, pode escrever as equações e visualizar representações dessas retas, definindo uma janela de visualização adequada.

a) Considere retas cuja equação é do tipo $y = 2x + b\,,\, b \in \Re$.
Para cada um dos valores de **b** indicados a seguir, visualize na sua calculadora representações gráficas das retas correspondentes a:

$$b = 2\,;\quad b = 4\,;\quad b = -1$$

Identifique o que há em comum nas retas que visualizaste. Confirme a sua opinião atribuindo a **b** outros valores.

b) Considere retas cuja equação reduzida seja do tipo $y = m\,x - 2\,,\, m \in \Re$.
Atribua a **m** os valores 2, 3, -1 e $-\frac{1}{2}$ e visualize, na calculadora, as retas correspondentes.
O que observa?
A partir da observação feita formule uma conjetura.
Confirme a conjetura visualizando outros exemplos.

ANEXO III

Tarefa 3 -Interpretação do declive

Interpretação do declive

1. Qual o significado do parâmetro *m* da reta num referencial?

a) Recorrendo ao software Geogebra, observe gráficos do tipo $y = mx + b$ atribuindo valores (positivos e negativos, inteiros e fracionários) ao parâmetro *m* (ex: $y = 2x$; $y = -x$; $y = \frac{1}{2}x$)
Explique por palavras o significado de **m**?

a.1) Dados dois pontos de uma reta, descreva como procederia para determinar o declive da reta que passa por eles.

b) Recorrendo novamente ao software Geogebra, observe gráficos do tipo $y = mx + b$ atribuindo valores (positivos e negativos, inteiros e fracionários) ao parâmetro b (ex: $y = x + 1$; $y = x - 2$)
Explique por palavras o significado de **b**?

ANEXO IV

Tarefa 4 - À procura de um modelo

1. Um grupo de alunos realizou uma experiência utilizando uma vela de aniversário. Começaram por registar a altura da vela e, em seguida, acenderam-na.
   Em vários momentos, registaram a altura da vela, em centímetros, e o tempo decorrido, em segundos, tendo obtido o quadro ao lado.

   a) A partir dos dados da tabela, representa os pontos de coordenadas (t, h) num referencial.

   b) Indique:

   b.1) a altura inicial da vela.

   b.2) a altura de vela que ardeu ao fim de um minuto.

   c) Com a ajuda da calculadora gráfica, defina uma função f do tipo $f(x) = mx + b$, $m,b \in \Re$, cujo gráfico se aproxime dos pontos representados.

   d) Recorrendo à função definida na alínea anterior, faça uma estimativa:

   d.1) da altura da vela que resta ao fim de cinco minutos;

   d.2) do tempo que demoraria a consumir-se a vela na totalidade. Explique detalhadamente o seu raciocínio

e) À tabela dada foi acrescentada uma coluna relativa à altura da parte ardida da vela.

Tempo ***t*** (em segundos)	Altura ***h*** da vela (em cm)	Altura ***v*** da parte ardida (em cm)
0	12	
20	11,7	
30	11,6	
60	11,1	
90	10,6	
120	10	

e.1) Complete a tabela.

e.2) Defina analiticamente uma função g cujo gráfico se aproxime dos pontos considerados. Compara-a com f no que respeita à monotonia e a zeros.

ANEXO V

Tarefa 5 - Efeitos da variação de parâmetros *a*, *h* e *k* nos gráficos da família das funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$

1. Considere as funções da família $y = a\,x^2$ definidas por:

$y = x^2$ $\qquad$ $y = 2x^2$ $\qquad$ $y = \frac{1}{3}x^2$

$y = -x^2$ $\qquad$ $y = -2x^2$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{3}x^2$

a) Represente graficamente as funções na calculadora e descreva qual a influência do parâmetro *a* nos gráficos das funções?

b) Dê exemplos de funções deste tipo e explique os efeitos dos parâmetros *a*, *h* e *k* relativamente aos gráficos das funções e identifique as coordenadas do vértice da parábola e a equação do eixo de simetria.

$y = a\,x^2 + h$ $\qquad$ $y = a(x-h)^2$ $\qquad$ $y = a(x-h)^2 + k$

Elabore um relatório com o registo dos gráficos e as conclusões a que chegou.

c) Tendo em conta às conjeturas anteriores, descreva como pode obter o gráfico de cada uma das funções a partir do gráfico $y = x^2$.

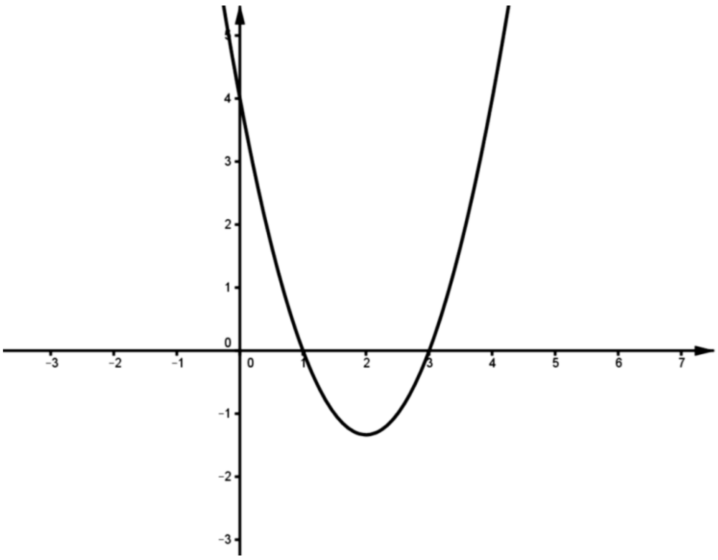
2. Represente graficamente a função $y = (x-2)(x+5)$

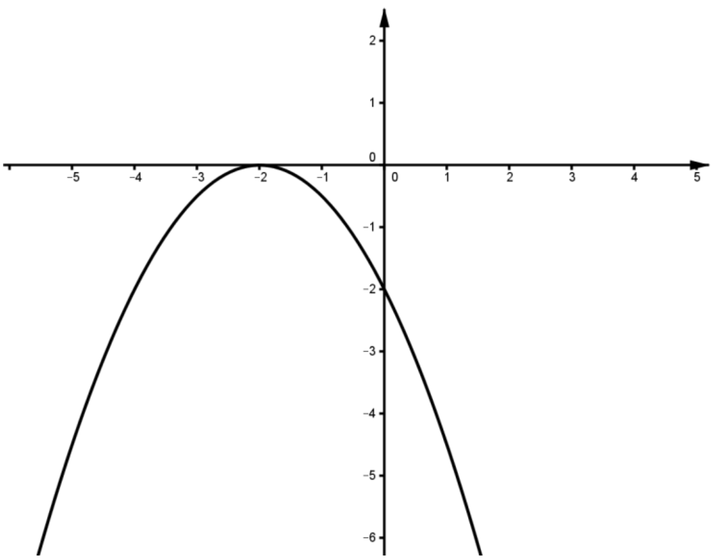
a) Observe o gráfico. Qual o significado de 2 e -5 relativamente ao gráfico?

b) Investigue os gráficos das funções da família $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Atribua vários valores, positivos, negativos e zero a α e β.
Analise o caso em que $\alpha = \beta$.

c) Qual é o significado de α e β relativamente ao gráfico da função?

d) Defina, através das suas representações algébricas, funções que correspondam aos seguintes gráficos. Verifique através da calculadora gráfica se as expressões encontradas correspondem aos gráficos seguintes.

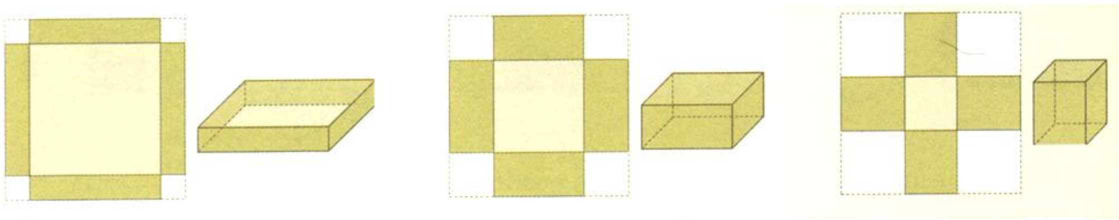




ANEXO VI

Tarefa 6 - Como varia o volume das caixas

Um fabricante de produtos de papel deseja construir caixas sem tampa, recorrendo a folhas quadradas de cartão de 20 cm de lado.



Cada caixa é constituída cortando quatro quadrados congruentes, um em cada canto da folha, como ilustram a figuras.

1. Experimentação:

1.1. Com uma folha de 20 cm de lado e, procedendo conforme foi descrito acima, construa uma caixa, cortando quatro quadrados com 0,5 cm de lado. Qual o volume da caixa que construiu?

1.2. Repita o procedimento anterior cortando quadrados com 1 cm de lado, 2 cm de lado e assim sucessivamente.

1.3. Completa o quadro seguinte

Lado do quadrado cortado (em cm) - x	Volume da caixa (em cm^2) - $V(x)$	Pares ordenados do tipo $(x, V(x))$
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		

2. Entre que valores pode variar x? Porquê?

3. Sobre um referencial como o da figura ao lado, represente os pontos cujas ordenadas sejam os pares ordenados $(x, V(x))$ anotados no quadro anterior.

4. Existirá algum valor de x para o qual o volume seja máximo? Em caso afirmativo, indique dois números consecutivos entre os quais se situa esse valor de x.

5. Mostre que a expressão que define a função volume à custa da medida do lado x, é $V(x) = x(20-2x)^2$.

ANEXO VII

Pedido de autorização ao Diretor da Escola

Ex. mo Senhor Diretor da Escola

Eu, Paulo José da Silva Veiga, docente do grupo 500 desta escola, venho por este meio solicitar autorização para desenvolver, na turma X do 10º ano desta escola, uma investigação subordinada ao tema "A utilização do Quadro Interativo no Ensino da Matemática: Um Estudo de Caso no 10º Ano".

Esta investigação está a ser desenvolvida no âmbito do curso de Mestrado em Ciências da Educação - Supervisão Pedagógica, que estou a realizar na Universidade de Évora, sob a orientação da Professora Doutora Ana Paula Canavarro.

A recolha de dados para a concretização da investigação decorrerá durante o 1º e 2º período, e incidirá sobre a turma X de 10º ano, tendo como instrumentos: observação direta; gravação áudio/vídeo da conversação que ocorrer entre os alunos; trabalhos produzidos pelos alunos e gravação dos passos utilizados na resolução das tarefas no Quadro Interativo.

Mais se esclarece que as imagens se destinam unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola. De resto a participação nesta investigação não acarretará nenhum inconveniente para os alunos, bem ao contrário constitui uma motivação suplementar que os poderá ajudar a melhorar o seu desempenho.

Assim, solicito que me seja permitido pedir autorização aos encarregados de educação para que as referidas aulas sejam filmadas.

Pedindo deferimento a esta minha solicitação e agradecendo desde já a atenção que se digne dispensar a este assunto, subscrevo-me,

Atenciosamente

O docente

____

(Paulo José da Silva Veiga)

ANEXO VIII

Pedido de autorização aos pais e encarregados de educação

Informação/Autorização

Exm.º (a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Paulo José da Silva Veiga, docente de Matemática desta escola encontro-me a realizar a dissertação no âmbito do Mestrado em Ciências da Educação - Supervisão Pedagógica, da Universidade de Évora, com o tema "A utilização do Quadro Interativo no Ensino da Matemática: Um Estudo de Caso no 10º Ano".

Para concretizar o referido projeto de investigação necessito de recolher alguns dados através da observação, registo áudio e vídeo de algumas aulas relativamente ao assunto em estudo.

Os dados recolhidos serão utilizados exclusivamente para a investigação em causa sendo garantido o anonimato dos alunos e da escola. De resto a participação nesta investigação não acarretará nenhum inconveniente para os alunos, bem pelo contrário constitui uma motivação suplementar que os poderá ajudar a melhorar o seu desempenho. A investigação será desenvolvida durante o primeiro e segundo período, tendo já sido autorizada pelo Sr. Diretor da escola.

Para se poder gravar as aulas é necessária a autorização de todos os encarregados de educação dos alunos da turma, pelo que se pede que devolva a parte destacável desta informação. Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

O docente

____

✂--

Eu ………………………………………………………, Encarregado(a) de Educação do aluno ………………………………………………….., nº ___ da turma X do 10º, declaro que tomei conhecimento e autorizo que grave as aulas necessárias à concretização da investigação, no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Assinatura do Encarregado(a) de Educação:___________________________________

Data: _____/ ______/2011