

Universidade de Évora
Mestrado em Matemática Aplicada

Resolução Numérica de um Problema de
Forma Óptima

Maria de Fátima Barbosa Amado Correia
(Licenciada)

Orientado por: Prof. Doutor Vladimir Alekseyevitch Bushenkov
(Professor Associado)

”Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri. ”

Évora
2005

Universidade de Évora
Mestrado em Matemática Aplicada

Resolução Numérica de um Problema de
Forma Óptima

Maria de Fátima Barbosa Amado Correia
(Licenciada)

Orientado por: Prof. Doutor Vladimir Alekseyevitch Bushenkov
(Professor Associado)

”Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri. ”

Évora
2005

Resolução Numérica de um Problema de Forma Óptima

Resumo: Neste trabalho, considera-se o problema de construção de um quebra-mar para proteger um porto das ondas de grandes amplitudes. O problema de otimização de forma de quebra-mar baseia-se na resolução numérica de um problema de valor de fronteira com a equação de Helmholtz pelo método dos elementos finitos.

Palavras chave: equação de Helmholtz, problema de valor de fronteira, quebra-mar, método dos elementos finitos, otimização.

Numerical Resolution of an Optimal Shape Problem

Abstract: In this work, we consider the breakwater construction problem to protect a harbor from waves of great amplitude. The shape optimization problem of breakwater consists of the numerical resolution of a boundary value problem with an Helmholtz equation by the finite element method.

Keywords: Helmholtz equation, boundary value problem, breakwater, finite element method, optimization.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Vladimir Bushenkov pela ajuda prestada na realização deste trabalho, sem a qual não seria possível a realização do mesmo.

Agradeço aos meus colegas Dr^a Clara Carlota, Dr. Fernando Carapau, Dr. Gonçalo Jacinto, Dr. Luis Bandeira e Dr^a Telma Santos pelo apoio e incentivo que me deram para que esta dissertação fosse uma realidade.

Agradeço aos meus pais pelo apoio que me deram durante estes anos de muito trabalho.

A todos o meu sincero obrigado.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Problema de construção de um quebra-mar	1
1.2	Equação de Helmholtz	2
1.3	Enunciado do problema	4
2	Resolução numérica do problema de valor de fronteira para a equação de Helmholtz pelo método dos elementos finitos	6
2.1	O método de Galerkin	6
2.2	Elementos lineares triangulares	9
2.3	Matrizes dos elementos lineares triangulares	12
2.4	Construção do sistema linear	15
3	Problema de optimização	27
3.1	Parametrização da forma do quebra-mar	27
3.2	Método das funções de penalização	29
3.3	Métodos de pesquisa directa	29
4	Experiências numéricas	32
4.1	Primeira série	33
4.2	Segunda série	34
4.3	Conclusão	34
	Bibliografia	41
	Anexo: O programa no MATLAB	42

Lista de Figuras

1.1	U.S. Navy- Cais de Combustíveis e Lubrificantes- Terceira Açores	1
1.2	Quebra-mar destacado, Castelo do Neiva, Portugal	2
1.3	Exemplos de quebra-mar no Reino Unido	2
1.4	Geometria do domínio Ω	4
2.1	7
2.2	Malha triangular.	9
2.3	A função base $\varphi_i(x, y)$ correspondente ao nó i	10
2.4	Exemplo de um elemento triangular linear.	10
2.5	Funções h_1 e h_2	15
2.6	Representação gráfica da parte real da solução	26
3.1	Curva Q parametrizada	28
3.2	Pesquisa bússola	30
4.1	Discretização de quebra-mar.	32
4.2	Estrutura da matriz do sistema com $nz = 6062$ coeficientes não nulos.	33
4.3	Amplitude das ondas para $l_2 = 1.2$, $\alpha_2 = \pi/4$ e $F = 4.033$	35
4.4	Amplitude das ondas para $l_2 = 1.2$, $\alpha_2 = 3\pi/8$ e $F = 1.944$	36
4.5	Amplitude das ondas para $l_2 = 1.2$, $\alpha_2 = 2\pi/5$ e $F = 1.310$	37
4.6	Amplitude das ondas para $\alpha_2 = 3\pi/8$, $l_2 = 0.4$ e $F = 4.470$	38
4.7	Amplitude das ondas para $\alpha_2 = 3\pi/8$, $l_2 = 0.8$ e $F = 3.881$	39
4.8	Amplitude das ondas para $\alpha_2 = 3\pi/8$, $l_2 = 1.3$ e $F = 1.744$	40

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problema de construção de um quebra-mar

O objectivo deste trabalho é procurar a melhor forma de um quebra-mar de modo a obter um bom porto. Um *quebra-mar* (*breakwater*), é uma muralha ou uma parede com que se amortece o embate das ondas, ou das correntes, contra um porto ou uma zona costeira. Consideremos alguns exemplos de quebra-mar:

A construção do cais de combustíveis e lubrificantes da Praia da Vitória, para apoio às actividades das Forças Armadas Americanas estacionadas nas Lajes, Açores, envolveu de entre outras infraestruturas, a construção de um quebra-mar de protecção de secção transversal trapezoidal com 650 m (Fig.1.1). Data de construção: 1962-1963.



Figura 1.1: U.S. Navy- Cais de Combustíveis e Lubrificantes- Terceira Açores

A Fig.1.2 ilustra um quebra-mar destacado em betão simples com 250 metros de comprimento, para protecção da entrada e saída de embarcações de pesca, no Castelo do Neiva, Portugal. Data de construção: 1999-2000.

Nas figuras 1.3 a) e b) podem ver-se quebra-mares no Reino Unido.

O problema de construção de um quebra-mar foi abordado em várias publicações. Entre os outros podemos indicar os seguintes:



Figura 1.2: Quebra-mar destacado, Castelo do Neiva, Portugal



(a) Quebra-mar Sennen, Cornwall, Reino Unido



(b) Castletown, Reino Unido

Figura 1.3: Exemplos de quebra-mar no Reino Unido

No trabalho de A. G. Abul, A. M. Elkhshad e E. Heikel [1], é apresentada uma comparação dos resultados dos modelos físicos com teóricos para estimar as alturas das ondas por detrás de um quebra-mar destacado. O. Pironneau e B. Mohammadi em [8] consideraram o problema do *design* de forma óptima de um quebra-mar. No trabalho de H. Oumeraci e L. Martinelli [9], é proposto um *design* óptimo de um quebra-mar.

O problema formulado considera-se ainda em [2, 4].

1.2 Equação de Helmholtz

Para a descrição de ondulação do mar é fundamental a equação de ondas dada por

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

onde a função $U(x, y, t)$ descreve a forma da superfície de mar, x e y são coordenadas

cartesianas, t a variável de tempo, c a velocidade de ondas (constante) [7].

Seja

$$U(x, y, t) = u(x, y)e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

onde u é uma função de x e y , e ω a frequência angular de onda.

Substituindo (1.2) na equação (1.1) obtém-se:

$$\nabla^2 (ue^{i\omega t}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (ue^{i\omega t})$$

$$e^{i\omega t} \nabla^2 u = -\frac{\omega^2}{c^2} ue^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} \left(\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u \right) = 0.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $e^{i\omega t} \neq 0$ temos

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0,$$

ou

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (1.3)$$

onde $k = \frac{\omega}{c}$ é o número de onda. À equação (1.3) chama-se a equação de Helmholtz.

Note-se que nesta equação $u(x, y)$ é complexa mas apenas a parte real de u tem um significado físico (amplitude de ondas).

O número de onda é relacionado com o comprimento de onda da seguinte maneira:

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad \nu = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{Tc} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

onde ν é a frequência, T o período e λ o comprimento de onda.

1.3 Enunciado do problema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o domínio de uma função $u(x, y)$ e $\Gamma = \Gamma_\infty \cup S \cup Q$ é a fronteira de Ω . Na Fig.1.4 é representada a geometria do domínio. O nosso problema consiste em encontrar

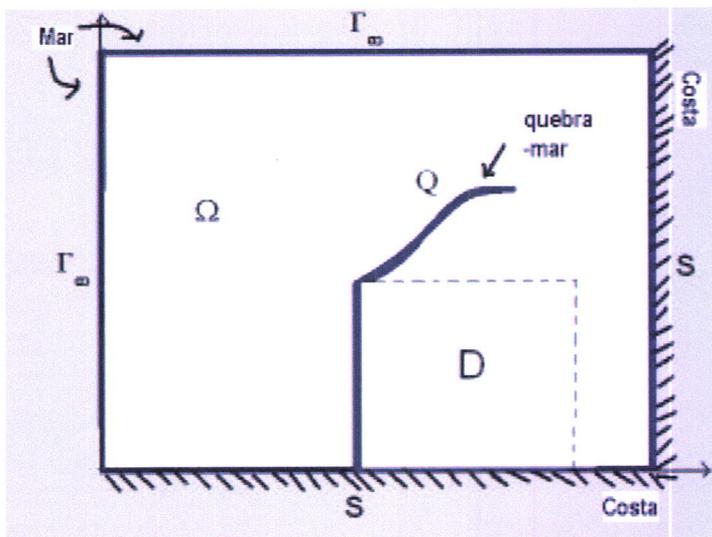


Figura 1.4: Geometria do domínio Ω

a melhor forma de um quebra-mar Q , de modo que as ondas tenham amplitudes mínimas num porto D [4]:

$$F(Q) = \iint_D u^2 dD \rightarrow \min$$

sujeito a

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (1.4)$$

nos pontos interiores de Ω e as condições de fronteira

$$\frac{\partial(u - u_\infty)}{\partial n} + ia(u - u_\infty) = 0 \text{ em } \Gamma_\infty, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = 0 \text{ em } S \text{ e } Q, \quad (1.6)$$

onde $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada normal à fronteira, u_∞ é solução de (1.4) sem as condições (1.5) e (1.6) na forma

$$u_\infty = u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (1.7)$$

em que u_∞^A é constante, $d = (k_x, k_y)$ o vector que descreve a direcção da onda que verifica $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ e $a = -\langle d, n \rangle$.

A forma de quebra-mar Q procura-se numa classe de funções que será descrita no Capítulo 3.

Capítulo 2

Resolução numérica do problema de valor de fronteira para a equação de Helmholtz pelo método dos elementos finitos

Seja Q um quebra-mar da forma dada. Neste caso podemos encontrar $u(x, y)$ em Ω pela resolução numérica do problema (1.4)–(1.6) pelo método de Galerkin.

2.1 O método de Galerkin

Vamos procurar $u(x, y)$ na forma

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x, y) \quad (2.1)$$

onde u_i são incógnitas e $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, um sistema de funções base definidas em Ω e cujas derivadas parciais existem e pertencem a $L^2(\Omega)$. Substituindo $\tilde{u}(x, y)$ na equação (1.4) temos o resíduo R dado por

$$R = \nabla^2 \tilde{u} + k^2 \tilde{u}.$$

Como \tilde{u} é diferente da solução exacta u , o resíduo não será nulo em todo o domínio Ω . O nosso objectivo é determinar os coeficientes incógnitos u_i , $i = 1, \dots, n$, que minimizam o resíduo em Ω . De acordo com o método de Galerkin estes encontram-se das condições

$$\iint_{\Omega} \varphi_i(x, y) R(x, y) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

ou seja

$$\iint_{\Omega} \varphi_i(x, y) (\nabla^2 \tilde{u} + k^2 \tilde{u}) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Vamos transformar (2.3) numa forma mais conveniente para a implementação numérica do método.

Para φ_i dada, a equação (2.3) é equivalente a

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} d\Omega + \iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} d\Omega + k^2 \iint_{\Omega} \varphi_i \tilde{u} d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Suponhamos que o domínio Ω tem a forma apresentada na Fig. 2.1 quando qualquer recta horizontal intersecta a fronteira Γ de Ω apenas em dois pontos. A parte esquerda de Γ do ponto B até o ponto A designa-se por Γ_1 e é descrita por $\psi_1(y)$ e a parte direita de Γ do ponto A até B designa-se por Γ_2 e é descrita por $\psi_2(y)$. Os pontos $(x, y) \in \Omega$ verificam as restrições:

$$y_A \leq y \leq y_B,$$

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

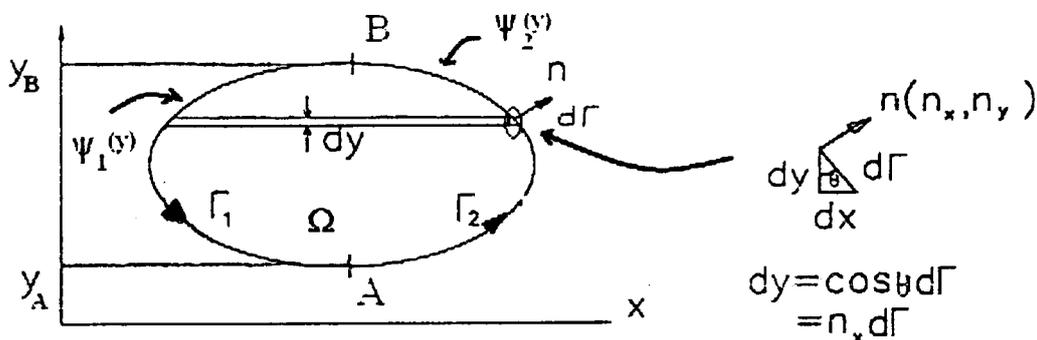


Figura 2.1:

Calculemos o primeiro integral em (2.4):

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} d\Omega = \int_{y_A}^{y_B} \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} dx \right) dy, \quad (2.5)$$

aplicando a integração por partes em relação a x temos que

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} dx = \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} - \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} dx. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.5) obtemos

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{y_A}^{y_B} \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} dx dy + \int_{y_A}^{y_B} \left(\varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\psi_2(y)} dy - \int_{y_A}^{y_B} \left(\varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\psi_1(y)} dy. \quad (2.7)$$

Da Fig. 2.1 é fácil ver que

$$dy = \cos(\theta) d\Gamma = n_x d\Gamma$$

onde n_x é a coordenada x do vector n unitário normal exterior à fronteira Γ , portanto

$$\int_{y_A}^{y_B} \left(\varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\psi_2(y)} dy = \int_{\Gamma_2} \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_x d\Gamma. \quad (2.8)$$

Analogamente,

$$- \int_{y_A}^{y_B} \left(\varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\psi_1(y)} dy = \int_{\Gamma_1} \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_x d\Gamma. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7) temos

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} d\Omega + \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_x d\Gamma, \quad (2.10)$$

onde \oint designa o integral linha ao longo da fronteira e calcula-se na direcção contrária à do movimento dos ponteiros do relógio.

Analogamente, o segundo termo na equação (2.4) pode ser reescrito como

$$\iint_{\Omega} \varphi_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} d\Omega + \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} n_y d\Gamma. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.4) temos

$$- \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) d\Omega + k^2 \iint_{\Omega} \varphi_i \tilde{u} d\Omega + \oint_{\Gamma} \varphi_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\Gamma = 0. \quad (2.12)$$

onde

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} n_y.$$

Para calcular o integral de linha em (2.12) utilizam-se as condições de fronteira na forma

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + a\tilde{u} = 0,$$

e

$$\frac{\partial(\tilde{u} - u_\infty)}{\partial n} + ia(\tilde{u} - u_\infty) = 0,$$

(ver 1.5, 1.6 e Fig.1.4).

2.2 Elementos lineares triangulares

Agora vamos concretizar as funções $\varphi_i(x, y)$ em (2.1).

O domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é rectangular e dividido em elementos triangulares como é representado na Fig. 2.2 (os números dos elementos são circunscritos num círculo). Os nós

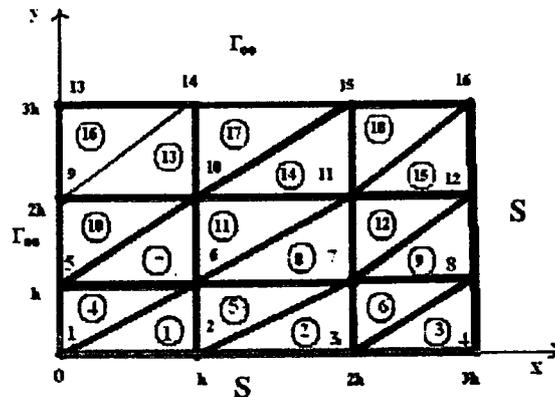


Figura 2.2: Malha triangular.

e triângulos são numerados como se mostra na Fig.2.2. Em cada um dos triângulos vamos utilizar uma aproximação linear de $u(x, y)$. Portanto as funções base $\varphi_i(x, y)$ podem ter a forma piramidal como se vê na Fig. 2.3. A função $\varphi_i(x, y)$ correspondente ao nó com as coordenadas (x_i, y_i) verifica as condições

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

É fácil ver que em cada um dos triângulos apenas três (no máximo) funções base φ_i podem ser diferentes de 0. Vamos considerar, sem perda de generalidade, o triângulo com as coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) em que $\varphi_1(x_1, y_1) = 1$, $\varphi_2(x_2, y_2) = 1$ e

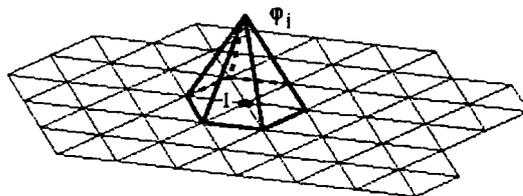


Figura 2.3: A função base $\varphi_i(x, y)$ correspondente ao nó i .

$\varphi_3(x_3, y_3) = 1$ (ver Fig.2.4). Designemos as partes de φ_1 , φ_2 e φ_3 correspondentes ao triângulo por H_1 , H_2 e H_3 respectivamente. Obviamente H_1 , H_2 e H_3 são lineares e verificam

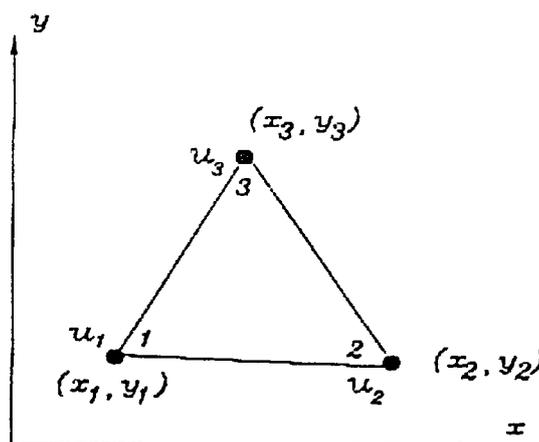


Figura 2.4: Exemplo de um elemento triangular linear.

$$H_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (2.13)$$

e

$$\sum_{i=1}^3 H_i(x, y) = 1, \quad (2.14)$$

para qualquer (x, y) do triângulo.

A função $u(x, y)$ neste triângulo aproxima-se por

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^3 H_i(x, y) u_i \quad (2.15)$$

onde u_i são coeficientes em (2.1). É fácil ver que

$$u_i = \tilde{u}(x_i, y_i). \quad (2.16)$$

Vamos encontrar a representação de $\tilde{u}(x, y)$ no triângulo com vértices em (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) na forma explícita. A função $\tilde{u}(x, y)$ é linear, portanto é dada por

$$\tilde{u}(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.17)$$

ou seja

$$\tilde{u}(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde os coeficientes a_i , $i = 1, 2, 3$ são constantes a determinar. Utilizando as condições (2.16) chegamos ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Invertendo a matriz em (2.19) obtemos

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

O valor de A é igual à área do elemento triangular. O valor de A é positivo se a enumeração dos nós em cada triângulo se faz na direcção contrária à do movimento dos ponteiros do relógio, e negativo caso contrário.

Substituindo (2.20) em (2.18) temos

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2A} [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

e comparando com

$$\tilde{u}(x, y) = H_1(x, y)u_1 + H_2(x, y)u_2 + H_3(x, y)u_3$$

(ver (2.15)) podemos concluir que

$$H_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \quad (2.21)$$

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \quad (2.22)$$

$$H_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]. \quad (2.23)$$

onde

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1). \quad (2.24)$$

É fácil confirmar que H_1 , H_2 e H_3 deduzidas verificam as propriedades (2.13) e (2.14).

2.3 Matrizes dos elementos lineares triangulares

Uma conveniente implementação do método dos elementos finitos utiliza matrizes dos elementos calculadas da maneira seguinte.

Vamos calcular

$$I^{elem} = \iint_{\Omega^{elem}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (2.25)$$

para um elemento triangular com os vertices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) numerados na direcção contrária à do movimento dos ponteiros do relógio. Aqui w designa H_1 , H_2 e H_3 . Como sabemos, neste triângulo

$$\tilde{u}(x, y) = u_1H_1(x, y) + u_2H_2(x, y) + u_3H_3(x, y) \quad (2.26)$$

onde $H_i(x, y)$ calculam-se pelas fórmulas (2.21-2.24).

Substituindo (2.26) em (2.25) temos

$$\begin{aligned} I^{elem} &= u_1 \iint_{\Omega^{elem}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega + \\ &u_2 \iint_{\Omega^{elem}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega + \\ &u_3 \iint_{\Omega^{elem}} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial H_3(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial H_3(x, y)}{\partial y} \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Substituindo na última expressão $w = H_1(x, y)$ e calculando os integrais duplos chegamos a

$$I_1^{elem} = m_{11}u_1 + m_{12}u_2 + m_{13}u_3$$

onde

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)^2 + (y_2 - y_3)^2] \\ m_{12} &= \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)] \\ m_{13} &= \frac{1}{4A}[(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_2)]. \end{aligned}$$

Por analogia, substituindo $w = H_2(x, y)$ encontra-se

$$I_2^{elem} = m_{21}u_1 + m_{22}u_2 + m_{23}u_3$$

onde

$$\begin{aligned} m_{21} &= m_{12} \\ m_{22} &= \frac{1}{4A}[(x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_1)^2] \\ m_{23} &= \frac{1}{4A}[(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

e, finalmente, substituindo $w = H_3(x, y)$ encontra-se

$$I_3^{elem} = m_{31}u_1 + m_{32}u_2 + m_{33}u_3$$

onde

$$\begin{aligned} m_{31} &= m_{13} \\ m_{32} &= m_{23} \\ m_{33} &= \frac{1}{4A}[(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2]. \end{aligned}$$

Agora podemos escrever na forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_1^{elem} \\ I_2^{elem} \\ I_3^{elem} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Vamos chamar a matriz em (2.27) *matriz do elemento triangular linear* e designar por $[M^{elem}]$.

O segundo termo em (2.12) calcula-se de forma análoga. Substituindo (2.26) em $\iint_{\Omega} w \tilde{u} d\Omega$ vem

$$P^{elem} = u_1 \iint_{\Omega^{elem}} w H_1 d\Omega + u_2 \iint_{\Omega^{elem}} w H_2 d\Omega + u_3 \iint_{\Omega^{elem}} w H_3 d\Omega.$$

Substituindo na última expressão $w = H_1(x, y)$ chegamos à expressão

$$P_1^{elem} = p_{11} u_1 + p_{12} u_2 + p_{13} u_3$$

em que

$$p_{11} = \iint_{\Omega^{elem}} H_1^2 d\Omega, \quad p_{12} = \iint_{\Omega^{elem}} H_1 H_2 d\Omega, \quad p_{13} = \iint_{\Omega^{elem}} H_1 H_3 d\Omega. \quad (2.28)$$

Utilizando $w = H_2(x, y)$ e $w = H_3(x, y)$ encontram-se os restantes elementos da matriz

$$[P^{elem}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

que permite calcular

$$\begin{bmatrix} P_1^{elem} \\ P_2^{elem} \\ P_3^{elem} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, é óbvio que

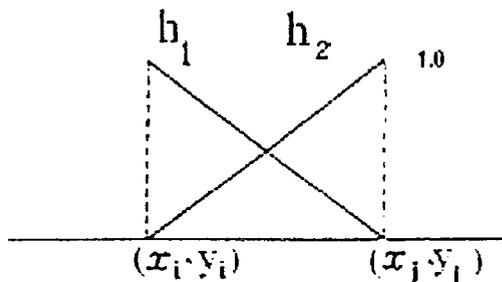
$$\oint_{\Gamma} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\Gamma = \sum \int_{\Gamma^{elem} \cap \Gamma} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} d\Gamma \quad (2.29)$$

onde Γ^{elem} é a fronteira do elemento finito e o somatório se calcula apenas para elementos finitos tais que $\Gamma \cap \Gamma^{elem} \neq \emptyset$. O valor de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}$ encontra-se da condição de fronteira que corresponde ao elemento. Como w utilizam-se as funções unidimensionais h_1 e h_2 cuja forma é apresentada na Fig.2.5 (supondo que o integral de linha se calcula na parte de Γ^{elem} entre os vértices (x_i, y_i) e (x_j, y_j)). Por exemplo, quando a fronteira for paralela ao eixo das abcissas as funções h_1 e h_2 são dadas por

$$h_1(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}, \quad h_2(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

pelo que

$$\tilde{u} = h_1(x) u_i + h_2(x) u_j. \quad (2.30)$$

Figura 2.5: Funções h_1 e h_2 .

2.4 Construção do sistema linear

Consideremos um exemplo (sem quebra-mar) apresentado na Fig. 2.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio rectangular com fronteira Γ , $\Gamma = \Gamma_\infty \cup S$, onde Γ_∞ designa a parte de Γ à esquerda e em cima (mar) e S designa a parte de Γ à direita e em baixo (costa). Procura-se a solução de

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.31)$$

neste domínio com as condições de fronteira

$$\frac{\partial(u - u_\infty)}{\partial n} + i a(u - u_\infty) = 0 \text{ em } \Gamma_\infty, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + a u = 0 \text{ em } S, \quad (2.33)$$

onde u_∞ é solução de (2.31) sem as condições (2.32) e (2.33) na forma

$$u_\infty = u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)}$$

em que u_∞^A é constante, $d = (k_x, k_y)$ é o vector que descreve a direcção da onda que verifica $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, $a = -\langle d, n \rangle$ e n o vector unitário normal à fronteira.

O domínio Ω é dividido pelos 18 elementos triangulares (ver Fig.2.2). Suponhamos que o passo desta malha é igual a 0.1, $k_x = \sqrt{4.5}$, $k_y = -\sqrt{4.5}$ (o que implica $k = 3.0$) e $u_\infty^A = 0.02$.

Vamos encontrar as matrizes dos elementos triangulares e combina-las depois num sistema linear.

Do ponto de vista de condições de fronteira, os elementos neste exemplo são de 7 tipos.

Tipo 1. Elementos internos do domínio discretizado, isto é, elementos cuja fronteira não pertence à fronteira do domínio (elementos 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13 e 14). Vamos calcular I^{elem} e P^{elem} por exemplo para elemento 8 com os vértices $(x_6, y_6) = (0.1, 0.1)$, $(x_7, y_7) = (0.2, 0.1)$ e $(x_{11}, y_{11}) = (0.2, 0.2)$.

Substituindo os vértices em (2.27), temos

$$I^{elem} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{11} \end{bmatrix}$$

e de acordo com (2.21)-(2.23) temos

$$H_1(x, y) = 2 - 10x$$

$$H_2(x, y) = 10x - 10y$$

$$H_3(x, y) = -1 + 10y,$$

em seguida calculando os integrais do tipo (2.28) encontra-se

$$P^{elem} = \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{11} \end{bmatrix},$$

ou seja na forma de sistema tem-se

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo k pelo seu valor tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.4925 & -0.5038 & -0.0037 \\ -0.5038 & 0.9925 & -0.5038 \\ -0.0037 & -0.5038 & 0.4925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes em I^{elem} e P^{elem} são idênticas para todos os elementos deste tipo supondo que sempre os vértices são ordenados na direcção contrária à do movimento dos ponteiros do relógio e de forma a que o segundo vértice de cada triângulo corresponde ao do ângulo recto.

Tipo 2. Elementos cuja parte da fronteira pertence à fronteira S e é paralela ao eixo dos xx (elementos 1 e 2). Consideremos, por exemplo, o elemento 1. Com ordenação

dos nós da seguinte forma $[u_1, u_2, u_6]$, F^{elem} e P^{elem} são idênticos aos do elemento 8.

Da condição de fronteira (2.33) tem-se

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = -a\tilde{u}$$

e de acordo com (2.30)

$$\tilde{u} = u_1 \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) + u_2 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right),$$

obtemos

$$F = \int_{x_1}^{x_2} w(-a\tilde{u})dx = -a \int_{x_1}^{x_2} w \left[u_1 \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) + u_2 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \right] dx. \quad (2.34)$$

Substituindo $w = h_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ em (2.34) chegamos à expressão

$$F_1 = f_{11}u_1 + f_{12}u_2$$

em que

$$f_{11} = -a \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)^2}{(x_2 - x_1)^2} dx = -0.0333a, \quad f_{12} = -a \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} dx = -0.0167a.$$

Substituindo $w = h_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ obtemos

$$F_2 = f_{21}u_1 + f_{22}u_2$$

em que

$$f_{21} = -a \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} dx = -0.0167a, \quad f_{22} = -a \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} dx = -0.0333a.$$

Assim temos,

$$F^{elem} = -a \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Na forma de sistema linear, obtemos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + a \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 & 0.0 \\ 0.0167 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

substituindo k e a pelos seus valores tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.5591 & -0.4704 & -0.0037 \\ -0.4704 & 1.0591 & -0.5038 \\ -0.0037 & -0.5038 & 0.4925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tipo 3. Elementos cuja parte da fronteira pertence à fronteira S e é paralela ao eixo dos yy (os elementos 9 e 15). Por exemplo, para o elemento 9 temos: I^{elem} e P^{elem} são idênticos aos do elemento 8 com a seguinte ordem dos nós $[u_7, u_8, u_{12}]$.

Da condição de fronteira (2.33) tem-se

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = -a\tilde{u},$$

e utilizando

$$\tilde{u} = u_8 \left(\frac{y_{12} - y}{y_{12} - y_8} \right) + u_{12} \left(\frac{y - y_8}{y_{12} - y_8} \right),$$

tem-se

$$F = \int_{y_8}^{y_{12}} w(-a\tilde{u})dy = -a \int_{y_8}^{y_{12}} w \left[u_8 \left(\frac{y_{12} - y}{y_{12} - y_8} \right) + u_{12} \left(\frac{y - y_8}{y_{12} - y_8} \right) \right] dy.$$

Agora substituindo $w = \frac{y_{12}-y}{y_{12}-y_8}$ e $w = \frac{y-y_8}{y_{12}-y_8}$ obtemos

$$F_1 = f_{11}u_8 + f_{12}u_{12}$$

com

$$f_{11} = -a \int_{y_8}^{y_{12}} \frac{(y_{12} - y)^2}{(y_{12} - y_8)^2} dy = -0.0333a, \quad f_{12} = -a \int_{y_8}^{y_{12}} \frac{(y_{12} - y)(y - y_8)}{(y_{12} - y_8)^2} dy = -0.0167a,$$

e

$$F_2 = f_{21}u_8 + f_{22}u_{12}$$

com

$$f_{21} = -a \int_{y_8}^{y_{12}} \frac{(y_{12} - y)(y - y_8)}{(y_{12} - y_8)^2} dy = -0.0167a, \quad f_{22} = -a \int_{y_8}^{y_{12}} \frac{(y - y_8)^2}{(y_{12} - y_8)^2} dy = -0.0333a.$$

$$F^{elem} = -a \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_8 \\ u_{12} \end{bmatrix}.$$

Na forma de sistemas obtemos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + a \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0 & 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Substituindo k e a pelos seus valores tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.4925 & -0.5038 & -0.0037 \\ -0.5038 & 1.0592 & -0.4704 \\ -0.0037 & -0.4704 & 0.5591 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tipo 4. Elementos cuja primeira parte da fronteira pertence à fronteira S e é paralela ao eixo dos xx e a segunda parte da fronteira pertence à fronteira S e é paralela ao eixo dos yy (o elemento 3). Vamos utilizar a ordenação dos vértices $[u_3, u_4, u_8]$ e F^{elem} , P^{elem} são idênticos aos do elemento 8.

Para a fronteira entre os vértices 3 e 4 os cálculos das matrizes efectuaem-se como nos elementos do tipo 2 e para a fronteira entre os vértices 4 e 8 efectuaem-se como nos elementos do tipo 3. Assim obtemos

$$F_1^{elem} = -a \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

$$F_2^{elem} = -a \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ u_8 \end{bmatrix}.$$

Na forma de sistema linear tem-se

$$+a \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 & 0.0 \\ 0.0167 & 0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0 & 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Substituindo k e a pelos seus valores

$$\begin{bmatrix} 0.5591 & -0.4704 & -0.0037 \\ -0.4704 & 1.1258 & -0.4704 \\ -0.0037 & -0.4704 & 0.5591 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tipo 5. Elementos cuja parte da fronteira pertence à fronteira Γ_∞ e é paralela ao eixo dos xx (os elementos 17 e 18). Consideremos, exemplo, o elemento 17. Vamos utilizar a ordenação dos vértices $[u_{15}, u_{14}, u_{10}]$ e I^{elem} , P^{elem} são idênticos aos do elemento 8.

De (1.7) tem-se

$$u_\infty = u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)},$$

e da condição de fronteira (1.5) tem-se

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial u_\infty}{\partial n} - ia(\tilde{u} - u_\infty)$$

utilizando \tilde{u} na forma

$$\tilde{u} = u_{15} \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}} + u_{14} \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}},$$

tem-se

$$F = \int_{x_{15}}^{x_{14}} w \left(\frac{\partial u_\infty}{\partial n} - ai(\tilde{u} - u_\infty) \right) dx$$

$$= \int_{x_{15}}^{x_{14}} w \left[ik_y u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)} - ai \left(u_{15} \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}} + u_{14} \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}} - u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)} \right) \right] dx \quad (2.35)$$

e como $y = 0.3$, de (2.35) temos que

$$F = \int_{x_{15}}^{x_{14}} w \left[ik_y u_\infty^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)} - ai \left(u_{15} \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}} + u_{14} \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}} - u_\infty^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)} \right) \right] dx$$

$$= \int_{x_{15}}^{x_{14}} w \left[-ai \left(u_{15} \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}} + u_{14} \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}} \right) + (ik_y u_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)} + iau_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)}) \right] dx \quad (2.36)$$

Substituindo $w = h_1(x) = \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}}$ e $w = h_2(x) = \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}}$ em (2.36) obtemos respectivamente

$$F_1 = f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + g_1$$

$$F_2 = f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + g_2$$

em que as expressões para f_{ij} , $i, j = 1, 2$, já foram determinadas e

$$g_1 = \int_{x_{15}}^{x_{14}} (ik_y u_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)} + iau_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)}) \frac{x_{14} - x}{x_{14} - x_{15}} dx$$

e

$$g_2 = \int_{x_{15}}^{x_{14}} (ik_y u_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)} + iau_{\infty}^A e^{i(k_x x + 0.3k_y)}) \frac{x - x_{15}}{x_{14} - x_{15}} dx,$$

$$F^{elem} = -ia \begin{bmatrix} -0.0333 & -0.0167 \\ -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0008 - 0.0021i \\ -0.0006 - 0.0021i \end{bmatrix}.$$

O sistema para o elemento fica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + ia \begin{bmatrix} -0.0333 & -0.0167 & 0.0 \\ -0.0167 & -0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{14} \\ u_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0008 - 0.0021i \\ -0.0006 - 0.0021i \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo k e a pelos seus valores tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.4925 - i 0.0667 & -0.5038 - i0.0333 & -0.0037 \\ -0.5038 - i0.0333 & 0.9925 - i 0.0667 & -0.5038 \\ -0.0037 & -0.5038 & 0.4925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{15} \\ u_{14} \\ u_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0008 - 0.0021i \\ -0.0006 - 0.0021i \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

Tipo 6. Elementos cuja parte da fronteira pertence à fronteira Γ_∞ e é paralela ao eixo dos yy (os elementos 10 e 4). Consideremos, por exemplo, o elemento 4. Vamos utilizar a ordenação dos vértices $[u_6, u_5, u_1]$ e I^{elem}, P^{elem} são idênticos aos do elemento 8.

De (1.7) tem-se

$$u_\infty = u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)},$$

e da condição de fronteira (1.5) tem-se

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \frac{\partial u_\infty}{\partial n} - ia(\tilde{u} - u_\infty)$$

utilizando \tilde{u} na forma

$$\tilde{u} = u_5 \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5} + u_1 \frac{y - y_5}{y_1 - y_5},$$

tem-se

$$\begin{aligned} F &= \int_{y_5}^{y_1} w \left(\frac{\partial u_\infty}{\partial n} - ai(\tilde{u} - u_\infty) \right) dx \\ &= \int_{y_5}^{y_1} w \left[-ik_x u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)} - ai \left(u_5 \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5} + u_1 \frac{y - y_5}{y_1 - y_5} - u_\infty^A e^{i(k_x x + k_y y)} \right) \right] dy \end{aligned} \quad (2.37)$$

e como $x = 0.0$, de (2.37) temos que

$$\begin{aligned} F &= \int_{y_5}^{y_1} w \left[-ik_x u_\infty^A e^{i(0k_x + k_y y)} - ai \left(u_5 \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5} + u_1 \frac{y - y_5}{y_1 - y_5} - u_\infty^A e^{i(0k_x + k_y y)} \right) \right] dy \\ &= \int_{y_5}^{y_1} w \left[-ai \left(u_5 \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5} + u_1 \frac{y - y_5}{y_1 - y_5} \right) + (-ik_x u_\infty^A e^{i(k_y y)} + ia u_\infty^A e^{i(k_y y)}) \right] dy \end{aligned} \quad (2.38)$$

Substituindo $w = h_1(y) = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5}$ e $w = h_2(y) = \frac{y - y_5}{y_1 - y_5}$ em (2.38) obtemos respectivamente

$$F_1 = f_{11}u_1 + f_{12}u_2 + g_1$$

$$F_2 = f_{21}u_1 + f_{22}u_2 + g_2$$

em que as expressões para f_{ij} , $i, j = 1, 2$, já foram determinadas e

$$g_1 = \int_{y_5}^{y_1} (-ik_x u_\infty^A e^{i(k_y y)} + ia u_\infty^A e^{i(k_y y)}) \frac{y_1 - y}{y_1 - y_5} dy,$$

$$g_2 = \int_{y_5}^{y_1} (-ik_x u_\infty^A e^{i(k_y y)} + ia u_\infty^A e^{i(k_y y)}) \frac{y - y_5}{y_1 - y_5} dy,$$

$$F^{elem} = -ia \begin{bmatrix} -0.0333 & -0.0167 \\ -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0002 - 0.0022i \\ 0.0003 - 0.0022i \end{bmatrix}.$$

O sistema para o elemento fica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + ia \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0333 & -0.0167 \\ 0.0 & -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_5 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0002 - 0.0022i \\ 0.0003 - 0.0022i \end{bmatrix},$$

Substituindo k e a pelos seus valores tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.4925 & -0.5038 & -0.0037 \\ -0.5038 & 0.9925 - i 0.0667 & -0.5038 - i 0.0333 \\ -0.0037 & -0.5038 - i 0.0333 & 0.4925 - i 0.0667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_6 \\ u_5 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0002 - 0.0022i \\ 0.0003 - 0.0022i \end{bmatrix}.$$

Tipo 7. Elementos cuja parte da fronteira pertence à fronteira Γ_∞ e é paralela ao eixo dos xx e parte da fronteira pertence à fronteira Γ_∞ e é paralela ao eixo dos yy (o elemento 16). Vamos utilizar a ordenação dos vértices $[u_{14}, u_{13}, u_9]$ e F^{elem} , P^{elem} são idênticos aos do elemento 8.

Para a fronteira entre os vértices 14 e 13 os cálculos das matrizes efectuam-se como nos elementos do tipo 5 e para a fronteira entre os vértices 13 e 9 efectuam-se como nos elementos do tipo 6. Assim obtemos

$$F_1^{elem} = -ia \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0011 - 0.0020i \\ -0.0012 - 0.0019i \end{bmatrix},$$

$$F_2^{elem} = -ia \begin{bmatrix} 0.0333 & 0.0167 \\ 0.0167 & 0.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0011 - 0.0020i \\ 0.0012 - 0.0019i \end{bmatrix}.$$

Na forma de sistema linear tem-se

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} 0.0008333 & 0.0004167 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0008333 & 0.0004167 \\ 0.0004167 & 0.0004167 & 0.0008333 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + ai \left(\begin{bmatrix} -0.0333 & -0.0167 & 0.0 \\ -0.0167 & -0.0333 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0333 & -0.0167 \\ 0.0 & -0.0167 & -0.0333 \end{bmatrix} \right) \right\} \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{13} \\ u_9 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -0.0011 - 0.0020i \\ -0.0001 - 0.0039i \\ 0.0012 - 0.0019i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo k e a pelos seus valores tem-se

$$\begin{bmatrix} 0.4925 - i 0.0667 & -0.5038 - i 0.0333 & -0.0037 \\ -0.5038 - i 0.0333 & 0.9925 - i 0.1332 & -0.5038 - i 0.0333 \\ -0.0037 & -0.5038 - i 0.0333 & 0.4925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{13} \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0011 - 0.0020i \\ -0.0001 - 0.0039i \\ 0.0012 - 0.0019i \end{bmatrix}.$$

Combinando as matrizes e vectores obtidos em cada elemento finito numa matriz e num vector obtemos o sistema,

$$Au = b,$$

onde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$ e u o vector das variáveis u_j , $j = 1, \dots, 16$,

$$\begin{bmatrix}
 a_1 & b_1 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_1 & b & b_1 & 0 & 0 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & b_1 & b & b_1 & 0 & 0 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & b_1 & c & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_1 & 0 & 0 & 0 & d & d_2 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1 & d_2 & 0 & 0 & d_2 & e & d_2 & 0 & 0 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & d_2 & e & d_2 & 0 & 0 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d_1 & c_1 & 0 & 0 & d_2 & d & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & d & d_2 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & d_2 & e & d_2 & 0 & 0 & d_2 & d_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & d_2 & e & d_2 & 0 & 0 & d_2 & d_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & c_1 & 0 & 0 & d_2 & d & 0 & 0 & 0 & c_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & f & c_1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & c_1 & d & c_1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & c_1 & d & c_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & c_1 & 0 & 0 & c_1 & g
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9 \\
 u_{10} \\
 u_{11} \\
 u_{12} \\
 u_{13} \\
 u_{14} \\
 u_{15} \\
 u_{16}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.0003 - 0.0022i \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0.0009 - 0.0043i \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0.0018 - 0.0040i \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -0.0001 - 0.0039i \\
 -0.0018 - 0.0041i \\
 -0.0009 - 0.0044i \\
 -0.0002 - 0.0022i
 \end{bmatrix},$$

com os coeficientes $a_1 = 1.0517 - 0.1333i$, $b = 2.1108$, $b_1 = -0.4704$, $c = 1.0592 + 0.1333i$, $c_1 = -0.5038 - 0.0667i$, $d = 1.9775 - 0.2667i$, $d_1 = -0.0075$, $d_2 = -1.0075$, $e = 3.9550$, $f = 0.9925$, $g = 0.9850$.

A matriz do sistema linear obtida é uma matriz banda, simétrica, de diagonal dominante e o número de condição é 29 (bem condicionada).

Resolvendo o sistema obtém-se a seguinte solução



$$u = \begin{bmatrix} 0.0135 - 0.0029i \\ 0.0113 - 0.0046i \\ 0.0087 - 0.0069i \\ 0.0052 - 0.0092i \\ 0.0156 - 0.0029i \\ 0.0133 - 0.0051i \\ 0.0104 - 0.0078i \\ 0.0067 - 0.0106i \\ 0.0169 - 0.0018i \\ 0.0146 - 0.0046i \\ 0.0121 - 0.0080i \\ 0.0084 - 0.0115i \\ 0.0164 + 0.0001i \\ 0.0150 - 0.0032i \\ 0.0139 - 0.0073i \\ 0.0110 - 0.0116i \end{bmatrix},$$

cuja a parte real é representada na Fig. 2.6.

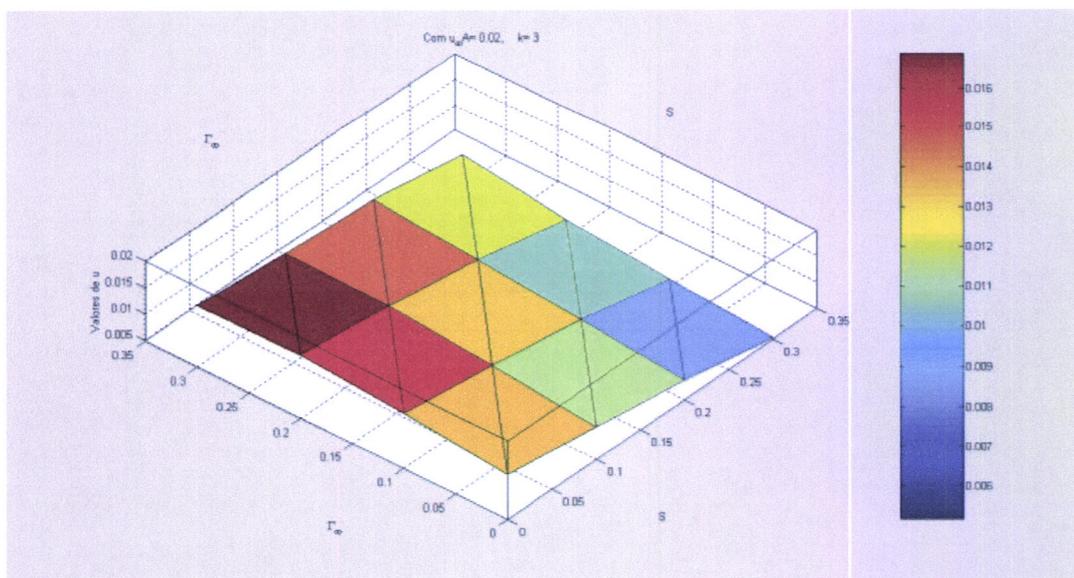


Figura 2.6: Representação gráfica da parte real da solução

A parte real da solução u representa a amplitude das ondas.

Capítulo 3

Problema de optimização

3.1 Parametrização da forma do quebra-mar

Vamos designar por Q uma curva que determina a forma do quebra-mar no problema considerado. Sendo Q dado, o método dos elementos finitos permite encontrar a função $\tilde{u}(x, y)$ em todo o domínio Ω e em seguida calcular o integral

$$F(Q) = \iint_D u(x, y)^2 dD$$

que permite avaliar a ondulação do mar na região do porto D . O nosso problema principal formula-se da seguinte maneira: encontrar a curva Q que minimiza $F(Q)$, i.e.

$$F(Q) = \iint_D u(x, y)^2 dD \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

A funcional neste problema pode ser calculada apenas numericamente e este facto não permite aplicar os métodos tradicionais do Cálculo das Variações.

Vamos reformular este problema na forma de um problema de Programação Matemática para conseguir aplicar os métodos numéricos de optimização. Para fazer isso vamos parametrizar a curva Q do seguinte modo (ver Fig.3.1).

Trata-se de uma linha contínua constituída por n segmentos de recta. O ponto inicial P_0 é fixo e pertence ao eixo dos xx . Cada um dos segmentos caracteriza-se pelos 2 parâmetros: l_i – comprimento do i -ésimo segmento e α_i – ângulo entre o segmento com eixo dos yy calculado na direcção do movimento dos ponteiros do relógio a partir da posição vertical. Os parâmetros satisfazem as seguintes restrições

$$0 \leq l_i \leq \bar{l}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq C, \quad (3.3)$$

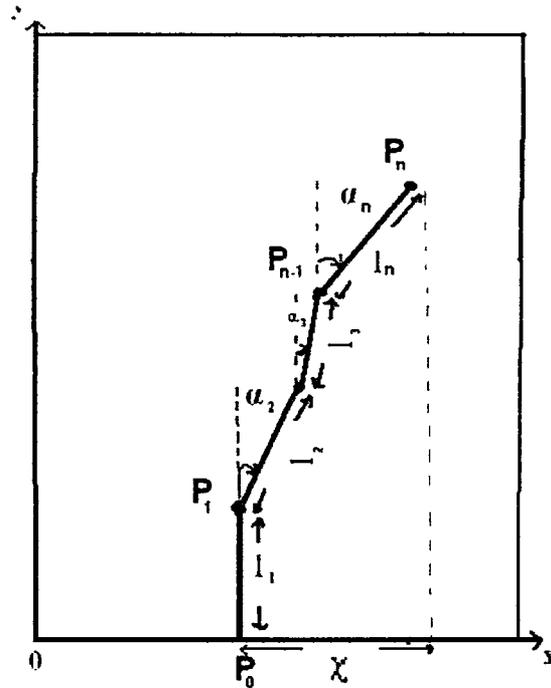


Figura 3.1: Curva Q parametrizada

e

$$0 \leq \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

em que l_i e \bar{l}_i são os limites inferior e superior do parâmetro l_i , C o comprimento máximo do quebra-mar, $\underline{\alpha}_i$ e $\bar{\alpha}_i$ os limites inferior e superior de α_i .

Além disso, a posição x do ponto extremo P_n tem que verificar a condição

$$\sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \alpha_i \leq \chi, \quad (3.5)$$

onde χ é uma constante para garantir a existência da passagem bastante larga no ponto.

Agora o nosso problema de otimização é reformulado como

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n, l_1, \dots, l_n) = \iint_D u(x, y)^2 dD \rightarrow \min \quad (3.6)$$

em que α_i e l_i , $i = 1, 2, \dots, n$, satisfazem as restrições (3.2)–(3.5).

3.2 Método das funções de penalização

O problema de optimização formulado (3.6,3.2-3.5) é o com restrições. As restrições (3.2) e (3.4) são fáceis de implementar porque existem várias realizações dos métodos de optimização em quais a solução procura-se num paralelepípedo. Para tomar em consideração as restrições (3.3) e (3.5) é conveniente aplicar o método das funções de penalização [12].

Considera-se o problema

$$\Phi(\alpha, l, M) = F(\alpha, l) + M \left[(g_1^+(l))^2 + (g_2^+(\alpha, l))^2 \right] \rightarrow \min \quad (3.7)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ e

$$g_1^+(l) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n l_i - C, & \text{quando } \sum_{i=1}^n l_i > C \\ 0, & \text{quando } \sum_{i=1}^n l_i \leq C. \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$g_2^+(\alpha, l) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \alpha_i - \chi, & \text{quando } \sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \alpha_i > \chi \\ 0, & \text{quando } \sum_{i=1}^n l_i \text{sen} \alpha_i \leq \chi. \end{cases} \quad (3.9)$$

O coeficiente M chama-se *coeficiente de penalização*. Agora, sendo M uma constante, resolve-se o problema de optimização (3.7) no paralelepípedo

$$\begin{aligned} \underline{l}_i &\leq l_i \leq \bar{l}_i, \\ \underline{\alpha}_i &\leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$i = 1, \dots, n$. Quando $M \rightarrow \infty$ a solução deste problema tende para a solução do problema (3.6,3.2-3.5).

3.3 Métodos de pesquisa directa

É óbvio que para a função $\Phi(\alpha, l, M)$ é difícil e praticamente impossível calcular derivadas. Portanto, para resolver (3.7)-(3.10) podem ser aplicados apenas os métodos de pesquisa directa que não usam explicitamente as derivadas.

Considera-se o problema de encontrar o ponto de *mínimo* local de uma função real $f(x)$. Se $f(x)$ for diferenciável e $\nabla f(x)$ pode ser calculado ou bem estimado pelas diferenças finitas, existe uma grande selecção de métodos de optimização. A condição necessária para um ponto de *mínimo* é que o gradiente seja igual a zero, i. e., $\nabla f(x) = 0$. Pode este ponto ser encontrado, sem explicitamente recorrermos às derivadas?

O termo *método de pesquisa directa* parece ter origem no artigo de Hooke e Jeeves em 1961 [3]. É bem conhecido também o algoritmo simplex de Nelder-Mead proposto em 1965, provavelmente o mais citado dos métodos de pesquisa directa. Para ilustrar os métodos desta classe apresentaremos um exemplo [5].

Pesquisa bússola

Variações desta estratégia algorítmica podem ser encontradas segundo vários nomes, incluindo *direcções alternadas*, *pesquisa variável alternada*, *relaxação axial*, *pesquisa coordenadas* e *variação local*. Para um problema de minimização com apenas duas variáveis, o algoritmo pode ser resumido no seguinte: experimentar passos para Este, Oeste, Norte e Sul. Se um destes passos leva a redução na função, o ponto melhorado passa a ser o novo ponto de iteração. E se nenhum destes passos leva a progresso, experimenta-se outra vez com passos reduzidos a metade.

A Fig. 3.2 ilustra as primeiras cinco iterações de pesquisa bússola aplicada ao problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x^{(1)}, x^{(2)}) = | (3 - 2x^{(1)})x^{(1)} - 2x^{(2)} + 1 |^{\frac{7}{3}} + | (3 - 2x^{(2)})x^{(2)} - 2x^{(1)} + 1 |^{\frac{7}{3}}.$$

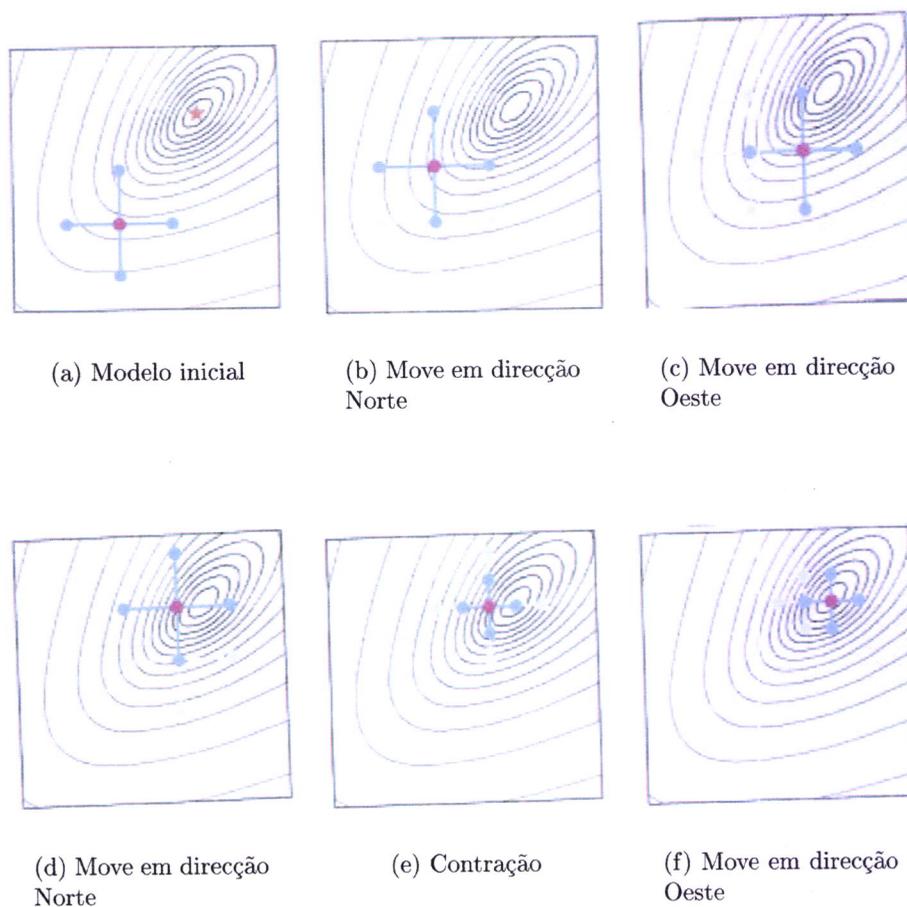


Figura 3.2: Pesquisa bússola

As curvas de nível de f estão apresentadas no fundo usando sombras cinzentas. Em cada figura, o ponto a cor-de-rosa designa x_k . O ponto da actual iteração é o melhor ponto, i.e., o ponto no qual foi encontrado o menor valor de f até aqui. Na subfigura (a), a pesquisa começa no ponto $x_0 = (-0.9, 1.0)$ e a solução do problema é indicada com uma estrela vermelha. Os quatro pontos a azul escuro representam os pontos teste segundo a consideração naquela iteração. Inicialmente, o comprimento de cada passo é 0.3. Os pontos teste da iteração anterior estão representados pela linha a azul claro para comparação.

Note que quando x_k aproxima-se a solução, o algoritmo reduz o comprimento dos passos. Isto revela-se ser central para demonstração de convergência. Tipicamente, na prática, o algoritmo é terminado quando o comprimento do passo passa a ser inferior a uma certa tolerância.

No lado positivo, a pesquisa bússola é fácil de descrever e implementar. No lado negativo, o critério de paragem está relacionado com o comprimento dos passos. Portanto, o algoritmo pode rapidamente aproximar-se a um ponto de mínimo, mas depois pode lentamente detectar este facto. Este é o preço de não explicitamente usar informação sobre a derivada. Uma outra limitação que não é evidente é que o algoritmo pode ser lento para convergir lentamente se os conjuntos de nível de f forem extremamente alongados. Isto é porque o método não usa nenhuma informação da curvatura (i.e., sobre a segunda derivada).

Capítulo 4

Experiências numéricas

Vamos apresentar um exemplo da resolução numérica do problema em questão.

No domínio Ω introduz-se uma malha uniforme de passo $h = 0.1$ com $30^2 = 900$ nós. O conjunto destes nós formam $29^2 \times 2 = 1682$ triângulos.

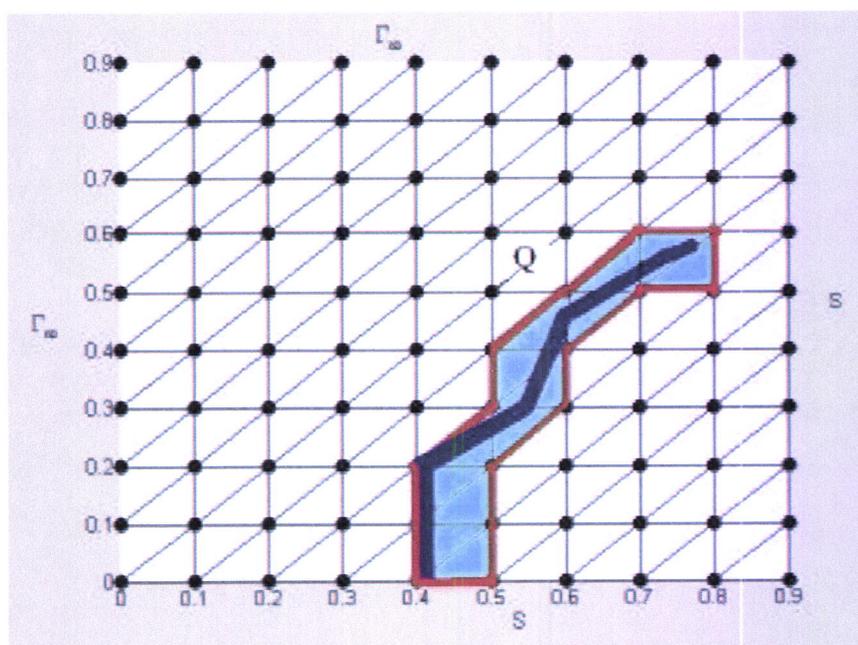


Figura 4.1: Discretização de quebra-mar.

O quebra-mar Q não é fino e é aproximado por um conjunto de triângulos como é mostrado na Fig. 4.1. A condição de fronteira na fronteira traçada a vermelho é a dada na fronteira S .

Após aplicação do método dos elementos finitos para o nosso problema obtém-se um sistema linear,

$$Au = b,$$

onde $u, b \in \mathbb{C}^N$ e $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ é uma matriz banda e esparsa. Na figura 4.2 é ilustrado o aspecto geral da matriz A esparsa.

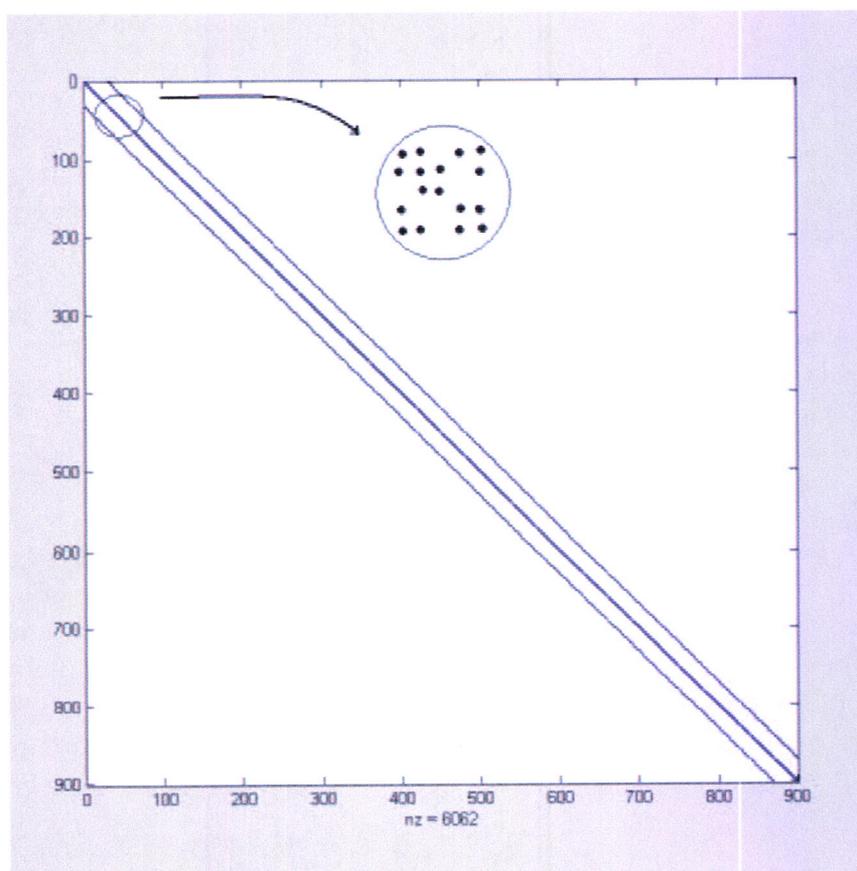


Figura 4.2: Estrutura da matriz do sistema com $nz = 6062$ coeficientes não nulos.

Portanto, o sistema linear é resolvido pelo método QMR (*Quase-Minimal Residual-Resíduo Quase-Mínimo*) preconditionado [10, 11]. A solução foi obtida em 3 iterações com uma tolerância de $\epsilon = 10^{-15}$. Os métodos foram implementados utilizando o MATLAB [6].

4.1 Primeira série

Considera-se o seguinte caso particular. O quebra-mar tem apenas os dois segmentos (l_1, α_1) e (l_2, α_2) . A posição do primeiro segmento é fixa - $\alpha_1 = 0, l_1 = 1.0$. O comprimento do segundo é $l_2 = 1.2$ e o ângulo α_2 varia entre $0 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

As constantes são: $u_\infty^A = 0.1, k = 20, \lambda = 0.3141$.

Esta experiência é ilustrada pelas Fig.4.3-4.5. Os dados correspondentes apresentam-se na seguinte tabela: