

Para o Miguel

RESUMO

Actualmente, muitas espécies estão em sério perigo de extinção. Destruição do seu habitat, captura excessiva, caça furtiva, são algumas das muitas causas. Este problema ameaça a biodiversidade do planeta com perdas colossais e irreversíveis. Assim, cada vez mais, são uma preocupação constante a previsão do tempo de extinção de qualquer população e o efeito que nele exercem as alterações ambientais.

Suponhamos que o crescimento populacional em ambiente aleatório, modelado por uma equação diferencial estocástica de ruído aditivo, pode ser descrito pelo modelo de Gompertz ou modelo logístico.

Pretendemos com este trabalho estudar o tempo de extinção destas populações, supondo que a população se extingue quando atinge pela primeira vez um limiar de extinção constante. Com efeito, estes modelos, como qualquer outro modelo em que o tamanho da população varie continuamente, admitem tamanhos da população muito pequenos não-nulos que, na realidade, são impossíveis de ocorrer. Embora não extintas do ponto de vista matemático, as populações devem considerar-se extintas. Também sabemos que a maior parte das espécies, quando atingem um reduzido número de indivíduos, não têm hipótese de sobreviver e reproduzir-se. Por este motivo, pensámos ser interessante estudar o tempo de extinção de uma população que admitimos à partida extinta quando atinge um determinado limiar de extinção.

Para os modelos em estudo apresentamos o tempo médio, o desvio padrão e a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção.

ABSTRACT

In our days, many species are in serious danger of extinction. Destruction of their habitat, excessive harvesting, poaching, are some of several causes. This problem threatens the biodiversity of the planet with massive and irreversible losses. Therefore, there is an increasing concern in forecasting the extinction times of populations and how they are affected by environmental changes.

Assume that population growth in a random environment, modelled by a stochastic differential equations with additive noise, can be described by the Gompertz model or the logistic model.

In this thesis, we intend to study the extinction times of these populations, assuming that a population is extinct when it reaches for the first time an extinction threshold value. In fact, these models, like any other model where population size varies continuously, allow very small non-zero population sizes that in reality can not occur. In spite of being non-extinct from the mathematical point of view, the populations must be considered extinct. We also know that most species, when they reach a low number of individuals, have no chance of survival and reproduction. For this reason we think that it is interesting to study the extinction time of a population that we assume extinct when it reaches a specified extinction threshold size.

For the models under study we present the mean, the standard deviation, and the probability density function of the first passage time through the extinction threshold value.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização desta dissertação.

Com a consciência de que estas curtas palavras não retribuem o contributo que deu a este trabalho, agradeço ao Professor Carlos Braumann todo o empenho que nele depositou. A sua permanente disponibilidade durante o desenvolvimento da tese, foi fundamental para a sua realização.

Aos amigos e colegas da ESTBarreiro, em especial ao Professor João Vinagre, Isabel, Otilia, Jorge, Anabela, Norberto e Muxagata, o meu sincero agradecimento.

Aos meus amigos o meu muito obrigada, em especial, à Tânia, ao João, à Manu e à Telma.

Aos meus pais que partilharam, desde o início, os bons e os maus momentos inerentes a este trabalho, agradeço a ajuda que sempre me deram. À minha irmã e sobrinhos, o meu obrigada pelo apoio, especialmente nos momentos em que puderam estar presentes.

Finalmente, ao Miguel, o meu muito obrigada pela compreensão nos momentos mais difíceis. O incentivo e as palavras de conforto na hora certa foram de extrema importância durante esta etapa da nossa vida.

CONTEÚDO

1. <i>Introdução</i>	1
2. <i>Modelos</i>	3
2.1 Modelos Determinísticos	3
2.2 Modelos Estocásticos	6
2.2.1 Classificação das Fronteiras	15
2.2.2 Densidade Estacionária	21
3. <i>Tempos de Primeira Passagem</i>	29
3.1 Tempo Médio	35
3.2 Desvio Padrão	53
3.3 Alguns Exemplos	68
3.4 Função Densidade de Probabilidade	80
3.5 Probabilidade de Extinção	88
4. <i>Conclusões</i>	90
<i>Bibliografia</i>	92

1. INTRODUÇÃO

Em ambiente aleatório, consideramos um modelo de crescimento populacional descrito pela equação diferencial estocástica

$$\frac{dN}{dt} = N \left(r f(N) + \sigma \varepsilon(t) \right), \quad N(0) = x, \quad t > 0$$

onde $N = N(t)$ é o tamanho da população no instante t , r é a taxa de crescimento intrínseca (suposta dependente da densidade populacional através da função $f(N)$), $f(N)$ é a taxa média de crescimento per capita, $\varepsilon(t)$ é um ruído branco padrão e $\sigma > 0$ é a intensidade das flutuações aleatórias. Dois exemplos clássicos são o modelo logístico e o modelo de Gompertz, respectivamente com $f(N) = 1 - \frac{N}{K}$ e $f(N) = \ln(\frac{K}{N})$, onde K é a capacidade de sustento do meio. O modelo de referência é o modelo de crescimento malthusiano com $f(N) = 1$.

Utilizando estes dois modelos, o nosso objectivo é estudar o tempo de extinção da população. Assim, consideramos um limiar constante a com $0 < a < N(0)$ e dizemos que a população se extingue quando atingir esse limiar pela primeira vez, ou seja, o tempo T_a de primeira passagem por a é o tempo de extinção. Para os modelos referidos, estudamos as principais propriedades de T_a , especialmente o tempo médio de extinção, o desvio padrão e a função densidade de probabilidade. Utilizamos, sempre que for possível, métodos analíticos e, sempre que necessário, métodos numéricos.

No capítulo II apresentamos os modelos malthusiano, de Gompertz e logístico, determinísticos e estocásticos. Para os modelos estocásticos, utilizamos os cálculos de Ito e de Stratonovich, os mais usuais na literatura. Ainda no estocástico classificamos as fronteiras e estudamos a existência de densidade estacionária sempre que for possível.

No capítulo III estudamos o tempo médio de extinção de uma população descrita pelos modelos em estudo, assim como o desvio padrão. Ilustramos os resultados obtidos com alguns exemplos que, achamos ser mais interessantes. Apresentamos ainda a função densidade de probabilidade aproximada do tempo de extinção para alguns casos, uma vez que não foi possível

obter a função densidade de probabilidade analiticamente. Por último, não poderíamos terminar sem falar na probabilidade de extinção, pois poderá existir uma probabilidade não nula de a população nunca atingir o limiar de extinção, ou seja, de a população nunca se extinguir.

Terminamos com as conclusões finais e sugestões que pensamos ser possíveis para trabalhos futuros.

2. MODELOS

2.1 Modelos Determinísticos

Seja $N(t)$ o tamanho ou biomassa de uma população no instante $t \geq 0$ e assumimos que conhecemos o tamanho da população no instante inicial, $N(0) = N_0 > 0$. O crescimento populacional de um modelo determinístico pode ser descrito da seguinte forma

$$\frac{dN}{dt} = rNf(N) \quad (2.1)$$

ou

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = rf(N),$$

que traduz a taxa de crescimento per capita, onde $r > 0$ é um parâmetro de crescimento intrínseco e $f(N)$ é a função de dependência da densidade que incorpora os efeitos das limitações (alimentares, territoriais, etc...) ao crescimento. Dois exemplos populares na literatura são o modelo de Gompertz e o modelo logístico, respectivamente, com $f(N) = \ln\left(\frac{K}{N}\right)$ e $f(N) = 1 - \frac{N}{K}$, onde $K > N_0$ é a capacidade de sustento do meio ($f(K) = 0$). Ao longo deste trabalho estudamos e aplicamos os resultados obtidos a estes dois modelos. Como modelo de referência, utilizamos o modelo malthusiano, com $f(N) \equiv 1$, o que significa que não existem limitações para o crescimento populacional.

Na maior parte dos casos, pouco se conhece sobre o crescimento populacional, e em particular sobre a função $f(N)$, mas, à exceção dos modelos que sofrem o efeito de Allee, a função $f(N)$ para $N > 0$ satisfaz as seguintes condições:

- a) $f(N_0) > 0$;
- b) $f(N)$ é de classe C^2 , isto é, duas vezes contínua e diferenciável;
- c) $f(N)$ é não crescente, isto é, quanto maior é a população mais difícil é para um indivíduo sobreviver e reproduzir-se.

O modelo (2.1) com $f(N) = 1$ é o **modelo malthusiano**

$$\frac{dN}{dt} = rN. \quad (2.2)$$

Integrando entre 0 e t , temos a seguinte equação integral,

$$\int_0^t \frac{1}{N} dN = \int_0^t r ds$$

e,

$$N_d(t) = N(0)e^{rt} \quad (2.3)$$

é a solução explícita do modelo determinístico malthusiano.

A equação (2.1) para o **modelo de Gompertz** é descrita por

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N}. \quad (2.4)$$

Fazendo $X = \ln \frac{N}{K}$, temos $dN = re^X dX$, e obtemos a seguinte expressão

$$dX + rX dt = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por e^{rt} temos,

$$\frac{d}{dt}(Xe^{rt}) = 0$$

e, depois de integrar membro a membro entre 0 e t , obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(Xe^{rs}) ds = 0,$$

ou seja, $X(t) = X(0)e^{-rt}$. Assim

$$N_d(t) = K \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{N(0)}{K}\right), \quad (2.5)$$

é a solução explícita do modelo de Gompertz determinístico.

No caso do **modelo logístico**, (2.1) passa a ter a seguinte expressão

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right). \quad (2.6)$$

Fazendo $Z = \frac{K}{N}$, temos $dN = -\frac{K}{Z^2} dZ$ e a equação pode ser escrita do seguinte modo

$$\frac{1}{Z-1}dZ = -r dt,$$

integrando ambos os membros entre 0 e t , obtemos

$$\ln \frac{Z(t)-1}{Z(0)-1} = -rt.$$

Assim, voltando a variável inicial,

$$N_d(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{N_0} - 1\right) e^{-rt} + 1}. \quad (2.7)$$

é a solução do modelo logístico determinístico.

Chamamos pontos de equilíbrio aos pontos onde $\frac{dN}{dt} = 0$, ou seja, quando o crescimento populacional é nulo. Assim, para o modelo malthusiano, $N = 0$ é o único ponto de equilíbrio. Para os modelos de Gompertz e logístico, os pontos de equilíbrio são $N = 0$ e $N = K$.

Um ponto de equilíbrio diz-se estável se as soluções que estão próximas do ponto de equilíbrio, num certo instante t , se mantiverem próximas durante todo o tempo posterior a t . Mais precisamente, a definição matemática é a seguinte:

Seja $\hat{N} \in W$ um ponto de equilíbrio (isto é, $g(\hat{N}) = 0$) da equação diferencial

$$dN/dt = g(N),$$

onde $g : W_{\text{aberto}} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Então \hat{N} diz-se localmente estável se, para qualquer vizinhança $U \subset W$ de \hat{N} existir uma vizinhança aberta $U_1 \subset U$ de \hat{N} tal que: se $N(t)$ é qualquer solução da equação diferencial com $N(0) \in U_1$, então $N(t) \in U \forall t \geq 0$.

Se U_1 se puder escolher de forma a que, quando $N(0) \in U_1$, se tenha $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \hat{N}$, então \hat{N} diz-se localmente assintoticamente estável.

Um ponto de equilíbrio que não é estável diz-se instável.

Dado um equilíbrio \hat{N} , é bem conhecida a propriedade de que $\frac{dN^2}{dt^2} < 0$ é condição suficiente para que \hat{N} seja assintoticamente estável e que $\frac{dN^2}{dt^2} > 0$ é condição suficiente para que \hat{N} seja instável.

Para os modelos em estudo, o 0 é um ponto de equilíbrio instável. Para os modelos de Gompertz e logístico, K é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável. Assim, quando $t \rightarrow +\infty$, a população converge monotonamente para a capacidade de sustento do meio.

2.2 Modelos Estocásticos

Suponhamos que a população está sujeita a flutuações ambientais aleatórias que afectam o crescimento populacional. Então (2.1) passa a ter a seguinte forma

$$\frac{dN}{dt} = N(rf(N) + \sigma\varepsilon(t)) \quad (2.8)$$

ou

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = rf(N) + \sigma\varepsilon(t),$$

com $N(0) = N_0 > 0$ conhecido. Supõe-se que o efeito das flutuações aleatórias sobre a taxa de crescimento *per capita* $(1/N)dN/dt$ pode ser modelado por um ruído aditivo colorido, que aproximamos pelo ruído branco $\sigma\varepsilon(t)$, onde a constante $\sigma > 0$ mede a intensidade das flutuações aleatórias e $\varepsilon(t)$ é o ruído branco padrão.

O valor acumulado das flutuações aleatórias desde o instante 0 até ao instante t , que designamos por $W(t, \omega)$, depende obviamente do acaso e deve ser um processo estocástico num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{A}, P) , onde $\omega \in \Omega$ representa o acaso ou o estado da natureza. Para abreviar escrevemos $W(t) = W(t, \omega)$. Admitindo que as influências aleatórias que causam flutuações são numerosas e aproximadamente independentes, pelo teorema do limite central podemos considerar que $W(t)$ é aproximadamente gaussiano. É razoável supor que as flutuações acumuladas $W(t) - W(s)$ num determinado intervalo de tempo (s, t) são independentes das acumuladas noutro intervalo de tempo não sobreposto. Também é razoável supor que $W(t) - W(s)$ tem esperança matemática nula e variância proporcional ao intervalo de tempo $t - s$. Podemos então dizer que $W(t) = \sigma w(t)$, onde $w(t)$ é o chamado processo de Wiener padrão, isto é, um processo estocástico em tempo contínuo, gaussiano, com incrementos independentes e tal que $w(0) = 0$ e $w(t)$ tem esperança matemática nula e variância t . O processo de Wiener padrão ($w(t)$) é um processo de Markov e a covariância entre $w(t)$ e $w(s)$ é $\min(s, t)$. Pode provar-se que $w(t)$ tem, com probabilidade um, trajectórias contínuas, não

diferenciáveis e de variação ilimitada. Assim, as trajectórias de $\frac{dw(t)}{dt}$ só existem no sentido das funções generalizadas, pelo que o ruído branco padrão $\varepsilon(t) = \frac{dw(t)}{dt}$ não é um processo estocástico no sentido clássico, mas um processo estocástico generalizado.

Podemos escrever (1.2) na forma integral

$$N(t) = N(0) + r \int_0^t (N(s))f(N(s))ds + \sigma \int_0^t N(s)dw(s) \text{ com } t \geq 0. \quad (2.9)$$

Como $w(t)$ é não diferenciável e tem variação ilimitada quase certamente, não podemos definir o segundo integral utilizando a definição clássica. É fácil verificar que, utilizando somas de Riemann-Stieltjes, escolhendo um ponto em cada subintervalo, (que poderá ser, o ponto inicial, um ponto intermédio, ou o ponto final), não existe um limite comum para as diferentes escolhas, isto quer se usem limites em média quadrática, quase certamente (q.c.) ou em probabilidade. Assim, a solução da equação diferencial estocástica difere conforme o cálculo estocástico utilizado. Dois métodos de relevância teórica e de aplicabilidade prática são o integral de Ito e o integral de Stratonovich. A vantagem em utilizar o cálculo de Stratonovich, é que utiliza as regras clássicas de integração, mas a classe de funções a que se aplica é mais restrita e as propriedades probabilísticas são menos interessantes do que quando utilizamos o cálculo de Ito. Para os modelos em estudo utilizaremos ambos. Quando usamos o cálculo de Stratonovich escrevemos um "(S)", quando utilizamos o cálculo de Ito omitimos o "(I)" como é habitual na literatura. Pode ver mais detalhadamente ambos os cálculos em [1], [9] e [18].

Assim, põe-se a seguinte questão: Qual o cálculo estocástico adequado para modelar o crescimento populacional em ambiente aleatório? O cálculo de Ito é mais adequado quando a equação diferencial estocástica é uma aproximação da equação às diferenças estocástica com ruído branco não antecipativo em tempo discreto. O cálculo de Stratonovich deve ser utilizado quando a equação diferencial estocástica é uma aproximação de uma equação diferencial com ruído colorido $\tilde{\varepsilon}(t)$ (tal que $\tilde{w}(t) = \int_0^t \tilde{\varepsilon}(s)ds$ tenha variação limitada q.c.), em que são seguidas as regras usuais do cálculo integral.

Definição 2.1. *Um processo estocástico $N(t)$ diz-se um processo de difusão se for um processo de Markov em tempo contínuo com trajectórias quase certamente contínuas, satisfazendo as seguintes condições:*

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[|N(t+h) - x| > \varepsilon | N(t) = x] = 0, \forall \varepsilon > 0;$$

$$b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[\Delta_h N(t) | N(t) = x] = \mu(x, t);$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[(\Delta_h N(t))^2 | N(t) = x] = \sigma^2(x, t);$$

com $\Delta_h N(t) = N(t+h) - N(t)$. As funções $\mu(x, t)$ e $\sigma^2(x, t)$ são os parâmetros infinitesimais do processo, respectivamente, o coeficiente de tendência e o coeficiente de difusão.

Definição 2.2. O processo de difusão diz-se homogêneo se o coeficiente de tendência e o coeficiente de difusão são independentes de t .

Para facilitar a compreensão, se utilizarmos o cálculo de Stratonovich ("(S)" representa "Stratonovich"), escrevemos

$$(S) \frac{dN}{dt} = N(rf(N) + \sigma\varepsilon(t)). \quad (2.10)$$

Já porém, se usarmos o cálculo de Ito (omitimos, como é habitual, a indicação "I" atrás da equação), escrevemos

$$\frac{dN}{dt} = N(rf(N) + \sigma\varepsilon(t)). \quad (2.11)$$

Utilizando qualquer um dos cálculos, Ito ou Stratonovich, a equação diferencial estocástica tem solução única quase certamente, até um momento de explosão. A solução é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de difusão

$$\sigma^2(N, t) = \sigma^2(N) = \sigma^2 N^2 \quad (2.12)$$

com $\sigma^2(0) = 0$ e $\sigma^2(N) > 0$ para $N > 0$. O coeficiente de tendência depende do cálculo utilizado, sendo, respectivamente para o cálculo de Stratonovich e o cálculo de Ito,

$$\mu(N, t) = \mu(N) = rNf(N) + \frac{1}{4} \frac{\partial(\sigma^2 N^2)}{\partial N} = rNf(N) + \frac{\sigma^2}{2} N \quad (2.13)$$

e

$$\mu(N, t) = \mu(N) = rNf(N) \quad (2.14)$$

(ver por exemplo [1] ou [16]).

A equação diferencial estocástica de Ito (2.11) é equivalente (isto é, tem a mesma solução) que a equação diferencial de Stratonovich

$$\begin{aligned} (S)dN &= \left(rNf(N) - \frac{1}{4} \frac{\partial(\sigma^2 N^2)}{\partial N} \right) dt + \sigma N dw(t) \\ &= \left(rNf(N) - \frac{\sigma^2}{2} N \right) dt + \sigma N dw(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta fórmula de conversão é bastante vantajosa. Assim, quando queremos utilizar o cálculo de Ito, podemos converter a equação diferencial estocástica de Ito para uma de Stratonovich e resolver esta utilizando as regras usuais de cálculo integral.

Ao longo do trabalho vamos necessitar de duas funções auxiliares. A primeira é a densidade de escala

$$s(N) = \exp \left(- \int_n^N \frac{2\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)} d\xi \right), \quad (2.16)$$

definida a menos de uma constante multiplicativa, uma vez que n é uma constante arbitrária. Diferentes escolhas para n correspondem a densidades de escala diferentes mas não afectam as propriedades relevantes. A segunda é a densidade de velocidade

$$m(N) = \frac{1}{s(N)\sigma^2(N)}. \quad (2.17)$$

A medida densidade de escala e a medida densidade de velocidade, são dadas por $S(B) = \int_B s(N)dN$ e $M(B) = \int_B m(N)dN$, respectivamente, com B um conjunto de Borel. Estas medidas não têm de ser finitas. Assim,

$$S[a, b] = \int_a^b s(N)dN \text{ e } M[a, b] = \int_a^b m(N)dN.$$

No caso do cálculo de Stratonovich vem

$$\begin{aligned} s(N) &= \exp \left(- \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi - \int_n^N \frac{1}{\xi} d\xi \right) \\ &= \frac{n}{N} \exp \left(- \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi \right) \end{aligned}$$

e

$$\mu(N) = \frac{1}{n\sigma^2 N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right),$$

e, no caso do cálculo de Ito, vem

$$s(N) = \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right)$$

e

$$\mu(N) = \frac{1}{\sigma^2 N^2} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right).$$

Para o **modelo malthusiano de Stratonovich**, a equação diferencial estocástica (2.10) escreve-se da seguinte forma

$$(S) \frac{dN}{dt} = rN + \sigma N \varepsilon(t).$$

Utilizando as regras usuais de cálculo, a solução da equação diferencial estocástica é o chamado movimento browniano geométrico

$$N(t) = N(0) \exp(rt + \sigma w(t)), \quad (2.18)$$

e é um processo de difusão com coeficiente de tendência e coeficiente de difusão

$$\mu(N) = \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) N \quad (2.19)$$

e

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2, \quad (2.20)$$

respectivamente. Esta solução é única e não há explosões pois (2.18) é q.c. finita. Note-se que, como $w(t)/t \rightarrow 0$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$, vem $N(t) \rightarrow +\infty$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$ (note-se que supusemos $r > 0$). Em relação à densidade de escala, esta é dada por

$$s(N) = \frac{n}{N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln \frac{n}{N}\right) = \left(\frac{N}{n}\right)^{-2r/\sigma^2 - 1}, \quad (2.21)$$

e a densidade de velocidade é

$$m(N) = \frac{1}{n\sigma^2 N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln \frac{N}{n}\right) = \frac{1}{\sigma^2 n^2} \left(\frac{N}{n}\right)^{2r/\sigma^2 - 1}. \quad (2.22)$$

Para o **modelo malthusiano de Ito** (2.11),

$$\frac{dN}{dt} = rN + \sigma N \varepsilon(t), \quad (2.23)$$

podemos resolver a equação usando as regras usuais de cálculo, utilizando não a equação (2.11), mas a equação equivalente (2.15). De facto, a solução da equação diferencial estocástica é também um movimento browniano geométrico

$$N(t) = N(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma w(t) \right). \quad (2.24)$$

A solução é única e, como é q.c. finita, não há explosão. É um processo de difusão com coeficiente de tendência e coeficiente de difusão

$$\mu(N) = rN \quad (2.25)$$

e

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2 \quad (2.26)$$

respectivamente. A densidade de escala, é

$$s(N) = \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln \frac{n}{N} \right) = \left(\frac{N}{n} \right)^{-2r/\sigma^2}, \quad (2.27)$$

e a densidade de velocidade é

$$m(N) = \frac{1}{\sigma^2 N^2} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln \frac{N}{n} \right) = \frac{1}{\sigma^2 n^2} \left(\frac{N}{n} \right)^{2r/\sigma^2 - 2}. \quad (2.28)$$

Note-se que $N(t) \rightarrow +\infty$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$ se $r > \sigma^2/2$ (isto é, $2r/\sigma^2 > 1$) e que $N(t) \rightarrow 0$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$ se $2r/\sigma^2 < 1$.

No caso do **modelo de Gompertz de Stratonovich**, a equação diferencial estocástica (2.10) é descrita por

$$(S) \frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N} + N \sigma \varepsilon(t) \quad (2.29)$$

e podemos utilizar as regras usuais de cálculo. De modo análogo ao modelo determinístico, fazemos a mudança de variável, $X = \ln \frac{N}{K}$, multiplicamos ambos os membros por e^{rt} e integrando entre 0 e t , obtemos

$$X(t) = X(0)e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dw(s).$$

Assim, a solução da equação diferencial estocástica é dada por

$$N(t) = K \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{N_0}{K} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dw(s)\right). \quad (2.30)$$

A solução é única e como (2.30) é q.c. finita, não há explosão. É um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência

$$\mu(N) = rN \ln \left(\frac{K}{N}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 N \quad (2.31)$$

e coeficiente de difusão

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2. \quad (2.32)$$

A função densidade de escala é dada por

$$s(N) = \frac{n}{N} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{N} - \ln^2 \frac{K}{n}\right)\right) \quad (2.33)$$

e a densidade de velocidade por

$$m(N) = \frac{1}{n\sigma^2 N} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{n} - \ln^2 \frac{K}{N}\right)\right). \quad (2.34)$$

A equação diferencial estocástica (2.11) para o **modelo de Gompertz de Ito**,

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N} + \sigma N \varepsilon(t), \quad (2.35)$$

tem a mesma solução que a equação diferencial estocástica de Stratonovich (2.15)

$$(S) \frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N} - \frac{\sigma^2}{2} N + \sigma N \varepsilon(t).$$

Assim, de modo semelhante ao cálculo efectuado anteriormente, temos a solução explícita

$$N(t) = K \exp\left(e^{-rt} \ln \frac{N(0)}{K} - \frac{\sigma^2}{2r} (1 - e^{-rt}) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dw(s)\right). \quad (2.36)$$

Não há explosões e a solução é única. No caso de utilizarmos o cálculo de **Ito** ao invés do cálculo de Stratonovich, o coeficiente de tendência e o coeficiente de difusão para o **modelo de Gompertz** são

$$\mu(N) = rN \ln \frac{K}{N} \quad (2.37)$$

e

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2, \quad (2.38)$$

respectivamente. A densidade de escala é

$$s(N) = \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{N} - \ln^2 \frac{K}{n} \right) \right), \quad (2.39)$$

e a densidade de velocidade,

$$m(N) = \frac{1}{\sigma^2 N^2} \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{n} - \ln^2 \frac{K}{N} \right) \right). \quad (2.40)$$

O **modelo logístico** é modelado pela equação diferencial estocástica

$$(S) \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) + \sigma N \varepsilon(t) \quad (2.41)$$

Consideremos primeiro o cálculo de Stratonovich, em que podemos utilizar as regras usuais de cálculo. Fazendo $Z = \frac{K}{N}$ e multiplicando ambos os membros por $e^{rt+\sigma w(t)}$ obtemos

$$d(e^{rt+\sigma w(t)} Z) = r e^{rt+\sigma w(t)} dt.$$

Integrando ambos os membros entre 0 e t e voltando à variável inicial temos a solução da equação diferencial estocástica,

$$N(t) = \frac{K e^{rt+\sigma w(t)}}{K/N(0) + r \int_0^t e^{rs+\sigma w(s)} ds}. \quad (2.42)$$

Não há explosão e a solução é única. É um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência

$$\mu(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 N, \quad (2.43)$$

e coeficiente de difusão

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2. \quad (2.44)$$

A densidade de escala e a densidade de velocidade são, respectivamente,

$$s(N) = \frac{n}{N} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{n}{N} + \frac{N-n}{K} \right) \right), \quad (2.45)$$

e

$$m(N) = \frac{1}{n\sigma^2 N} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{n}{N} + \frac{N-n}{K}\right)\right). \quad (2.46)$$

Por último, determinamos a solução explícita para o **modelo logístico de Ito**

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) + \sigma N \varepsilon(t). \quad (2.47)$$

Esta equação é equivalente a

$$(S) \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2} N + \sigma N \varepsilon(t).$$

Também aqui não há explosões e obtemos a solução única

$$N(t) = \frac{K e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma w(t)}}{K/N(0) + r \int_0^t e^{(r-\sigma^2/2)s + \sigma w(s)} ds}, \quad (2.48)$$

que é um processo de difusão homogêneo com coeficiente de tendência e coeficiente de difusão

$$\mu(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.49)$$

e

$$\sigma^2(N) = \sigma^2 N^2, \quad (2.50)$$

respectivamente. A densidade de escala é

$$s(N) = \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{n}{N} + \frac{N-n}{K}\right)\right) \quad (2.51)$$

e a densidade de velocidade é

$$m(N) = \frac{1}{\sigma^2 N^2} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{n}{N} + \frac{N-n}{K}\right)\right). \quad (2.52)$$

2.2.1 Classificação das Fronteiras

O tamanho da população no instante t é dado por $N(t)$. É óbvio que $N(t)$ é não negativo e podemos representar o espaço de estados por

$$\{N(t) : t \geq 0\} = (0, +\infty),$$

onde $N = 0$ e $N = +\infty$ são os pontos fronteiros. Uma das classificações possíveis e de relevância para o nosso estudo é poder saber se os pontos fronteiros são atractivos ou não-tractivos.

Sejam T_x o tempo de primeira passagem por x e $T_{0+} = \lim_{x \downarrow 0} T_x$. A fronteira $N = 0$ diz-se não-tractiva se $P[T_{0+} \leq T_n | N(0) = x] = 0$ para todo $0 < x < n < K$, isto é, partindo de x leva mais tempo para a população atingir o tamanho 0 do que para atingir o tamanho n . Isto implica que a fronteira $N = 0$ é inatingível em tempo finito para qualquer ponto interior e pode ver-se em [16], que também não é atingível em tempo infinito, isto é, $P[\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 0] = 0$. Assim, se $N = 0$ é uma fronteira não-tractiva, podemos dizer que a população nunca atinge o tamanho 0, ou mais precisamente, a probabilidade da população se anular é igual a zero. A não-tractividade da fronteira $N = 0$ implica a não-extinção da população. A definição é semelhante para a fronteira $N = +\infty$, com as adaptações óbvias. Se a fronteira $N = +\infty$ é não-tractiva, significa que não existem explosões, e portanto, garantimos a existência e unicidade da equação diferencial estocástica.

A fronteira $N = 0$ é atractiva ou não-tractiva conforme $S(0, x_0] < \infty$ ou $S(0, x_0] = \infty$ para algum $x_0 > 0$. A fronteira $N = +\infty$ é atractiva ou não atractiva dependendo de $S[x_0, +\infty)$ vem, para algum $x_0 < +\infty$, finito ou infinito. Pode ver mais detalhadamente em [16]. Basta verificar a propriedade para um x_0 pois se for válida para ele, é válida para todos.

Começamos por estudar as fronteiras no caso de utilizarmos o cálculo de **Stratonovich** para os modelos da forma (2.10) com $r > 0$ e com f satisfazendo as propriedades a)-c) (pág.3). Isto inclui o modelo malthusiano, o modelo logístico e o modelo de Gompertz.

Vejamus que a fronteira $N = 0$ é não-tractiva, ou seja, que a extinção nunca ocorre. Façamos $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\}$. Claro que, no caso do modelo malthusiano, vem $K = +\infty$. Nos modelos de Gompertz e logístico, K é o parâmetro que se designa por capacidade de sustento do meio. Para qualquer $0 < x_0 < n < K$ e para $0 < N < x_0$ vem

$$\exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right) \geq 1,$$

porque a função f é não crescente e

$$-\int_n^N \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi = \int_N^n \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi \geq \int_N^n \frac{f(n)}{\xi} d\xi \geq 0$$

pois $n < K$ e, portanto, como f é não crescente, $f(n) \geq 0$. Vem

$$\begin{aligned} S(0, x_0] &= \int_{0^+}^{x_0} s(N) dN \\ &\geq \int_{0^+}^{x_0} \frac{n}{N} dN \\ &= n \int_{0^+}^{x_0} \frac{1}{N} dN \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

concluindo-se que a fronteira $N = 0$ é não-atractiva, como queríamos demonstrar.

Continuando com o cálculo de **Stratonovich**, no caso, porém, de $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\}$ ser finito, o que inclui os modelos de Gompertz e logístico de Stratonovich a fronteira $N = +\infty$ é não-atractiva, pelo que não ocorrem explosões e a solução existe e é única. Com efeito, para $n_0 > n > K$ e para $x_0 < N < +\infty$ vem

$$\exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) \geq 1$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} S[x_0, +\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} s(N) dN \\ &\geq \int_{x_0}^{+\infty} \frac{n}{N} dN \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Para o modelo malthusiano de **Stratonovich**, temos, com $C = n^{2r/\sigma^2+1}$

$$\begin{aligned}
S[x_0, +\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} s(N) dN \\
&= C \int_{x_0}^{+\infty} N^{-2r/\sigma^2 - 1} dN \\
&= \frac{C\sigma^2}{2rx_0^{2r/\sigma^2}} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

o que significa que a fronteira $N = +\infty$ é atractiva.

Passando agora para o cálculo de **Ito** para modelos em que $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\}$ é finito, o que inclui os **modelos de Gompertz e logístico de Ito**, vem

$$\begin{aligned}
S[x_0, +\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} s(N) dN \\
&\geq \int_{x_0}^{+\infty} 1 dN \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

pelo que a fronteira $N = +\infty$ é não-atractiva.

Para o **modelo malthusiano de Ito** vem, com $C = n^{2r/\sigma^2}$,

$$\begin{aligned}
S[x_0, +\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} s(N) dN \\
&= C \int_{x_0}^{+\infty} N^{-2r/\sigma^2} dN.
\end{aligned}$$

O integral converge quando $2r/\sigma^2 > 1$ e diverge quando $2r/\sigma^2 \leq 1$, o que significa que, a fronteira $N = +\infty$ é atractiva se $2r/\sigma^2 > 1$ e não-atractiva se $2r/\sigma^2 \leq 1$.

De seguida provamos a não-atractividade da fronteira $N = 0$ para o **modelo de Gompertz de Ito**. Seja $x_0 = n$ com $0 < n < K$. Vem

$$\begin{aligned}
S(0, x_0] &= S(0, n] \\
&= \int_{0^+}^n s(N) dN \\
&= \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{n}\right) \int_{0^+}^n \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) dN.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = \ln \frac{K}{N}$ vem

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^n \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) dN &= \int_{\ln \frac{K}{n}}^{+\infty} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} y^2\right) K e^{-y} dy \\
&= K \int_{\ln \frac{K}{n}}^{+\infty} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} y^2 - y\right) dy \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

donde $S(0, x_0] = +\infty$. Com efeito, $\exp\left(\frac{r}{\sigma^2} y^2 - y\right) \rightarrow +\infty$ quando $y \rightarrow +\infty$. Deste modo, o integral é divergente e a fronteira $N = 0$ é não-atractiva.

Para o **modelo logístico de Ito** já provamos que a fronteira $N = +\infty$ é não-atractiva; falta estudar a fronteira $N = 0$. Suponhamos x_0 qualquer tal que $0 < x_0 < n < K$. A função densidade pode ser simplificada,

$$\begin{aligned}
s(N) &= \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln \frac{n}{N} + \frac{N-n}{K}\right)\right) \\
&= C N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right)
\end{aligned}$$

com $C > 0$ constante. Assim

$$C \int_{0^+}^{x_0} N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} dN \leq S(0, x_0] \leq C \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} x_0\right) \int_{0^+}^{x_0} N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} dN,$$

$\int_{0^+}^{x_0} N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} dN$ é o integral de Dirichlet, divergente para $2r/\sigma^2 \geq 1$ e convergente para $2r/\sigma^2 < 1$. Pelo critério geral da comparação concluímos que a fronteira $N = 0$ é não atrativa para $2r/\sigma^2 \geq 1$ e atrativa para $2r/\sigma^2 < 1$.

Para o **modelo malthusiano de Ito**,

$$\begin{aligned} S(0, x_0] &= \int_0^{x_0} s(N) dN \\ &= C \int_0^{x_0} N^{-2r/\sigma^2} dN, \end{aligned}$$

com C constante, temos o integral de Dirichlet. Assim, a fronteira $N = 0$ é não atrativa para $2r/\sigma^2 \geq 1$ e atrativa para $2r/\sigma^2 < 1$.

A fronteira $N = 0$ pode ser atrativa mas não-atingível. A fronteira $N = 0$ diz-se atingível se $P[T_{0+} < +\infty] = 1$, para todo $0 < x < K$, isto é, partindo de x , a população atinge a fronteira em tempo finito, com probabilidade um. Caso contrário, diz-se inatingível.

Definimos

$$\Sigma(0) = \int_0^{x_0} S(0, \zeta) m(\zeta) d\zeta,$$

com $x_0 > 0$ qualquer. Se $\Sigma(0) < +\infty$ a fronteira $N = 0$ é atingível. Se $\Sigma(0) = +\infty$, então a fronteira $N = 0$ é inatingível. Ver [16].

De modo análogo mas, com as respectivas adaptações tem-se

$$\Sigma(+\infty) = \int_{x_0}^{+\infty} S(\zeta, +\infty) m(\zeta) d\zeta,$$

e a fronteira $N = +\infty$ é atingível se $\Sigma(+\infty) < +\infty$; caso contrário, é inatingível.

Prova-se ainda que, se a fronteira é atingível, então a fronteira é atrativa. Se a fronteira é inatingível pode ser atrativa ou não-atractiva. Finalmente, se a fronteira é não-atractiva é inatingível.

O **modelo logístico de Ito** para $2r/\sigma^2 < 1$ tem a fronteira $N = 0$ atrativa mas, vamos provar que, embora atrativa, não é atingível.

Como

$$\begin{aligned} \Sigma(0) &= \int_0^{x_0} \int_0^\zeta s(N) dN m(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{x_0} \int_0^\zeta N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right) dN \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) d\zeta \\ &\geq \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-2r}{\sigma^2 K} x_0\right) \int_0^{x_0} \int_0^\zeta N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} dN \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sigma^2 - 2r} \exp\left(\frac{-2r}{\sigma^2 K} x_0\right) \int_0^{x_0} \frac{1}{\zeta} d\zeta = +\infty, \end{aligned}$$

pelo critério geral da comparação vem $\Sigma(0) = +\infty$ e podemos concluir que, para $2r/\sigma^2 < 1$, a fronteira $N = 0$ é atractiva mas inatingível.

De modo análogo prova-se que, para o **modelo malhusiano de Ito**, a fronteira $N = 0$ é atractiva mas inatingível para $2r/\sigma^2 < 1$. Ora vejamos

$$\begin{aligned}\Sigma(0) &= \int_0^{x_0} \int_0^\zeta s(N) dNm(\zeta) d\zeta \\ &= C \int_0^{x_0} \int_0^\zeta N^{-2r/\sigma^2} dN \zeta^{2r/\sigma^2-2} d\zeta \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

para $\frac{2r}{\sigma^2} < 1$.

Para o **modelo malthusiano de Stratonovich**, provámos que a fronteira $N = +\infty$ é atractiva; vejamos se é inatingível. Como

$$\begin{aligned}\Sigma(+\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} \int_\zeta^{+\infty} s(N) dNm(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} \int_\zeta^{+\infty} N^{-2r/\sigma^2-1} dN \frac{1}{\sigma^2} \zeta^{2r/\sigma^2-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2r} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta} d\zeta \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

concluimos que a fronteira $N = +\infty$ é inatingível.

Por último, falta estudar a fronteira $N = +\infty$ para o **modelo malthusiano de Ito** quando $2r/\sigma^2 > 1$. Facilmente se conclui que

$$\begin{aligned}\Sigma(+\infty) &= \int_{x_0}^{+\infty} \int_\zeta^{+\infty} s(N) dNm(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} \int_\zeta^{+\infty} N^{-2r/\sigma^2} dN \frac{1}{\sigma^2} \zeta^{-2r/\sigma^2-2} d\zeta \\ &= C \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{\zeta} d\zeta \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

com C constante e $2r/\sigma^2 > 1$, ou seja, a fronteira é inatingível.

Em modo de conclusão:

✓ O modelo malthusiano de Stratonovich tem a fronteira $N = 0$ não-atractiva mas a fronteira $N = +\infty$ é atractiva mas inatingível.

✓ No modelo malthusiano de Ito, se $2r/\sigma^2 \geq 1$ a fronteira $N = 0$ é não-atractiva, sendo atractiva mas inatingível para $2r/\sigma^2 < 1$. Quanto à fronteira $N = +\infty$, é não-atractiva se $2r/\sigma^2 \leq 1$ e atractiva mas inatingível se $2r/\sigma^2 > 1$.

✓ O modelo de Gompertz tem ambas as fronteiras não-atractivas independentemente do cálculo utilizado.

✓ O modelo logístico de Stratonovich tem ambas as fronteiras não-atractivas.

✓ No modelo logístico de Ito, se $2r/\sigma^2 \geq 1$ a fronteira $N = 0$ é não-atractiva, sendo atractiva mas inatingível para $2r/\sigma^2 < 1$. Quanto à fronteira $N = +\infty$, é não atractiva.

No modelo malthusiano de Stratonovich e, se $2r/\sigma^2 > 1$, no modelo malthusiano de Ito, vem $N(t) \rightarrow +\infty$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$, ou seja, a fronteira $N = +\infty$ é atingível em tempo infinito; porém, nunca se pode ter $N(t) = +\infty$ para t finito, pelo que não há explosões.

Para $r > 0$, não há extinção "matemática", excepto no modelo malthusiano e logístico de Ito quando $\frac{2r}{\sigma^2} < 1$. Neste caso, $N(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, embora nunca se possa ter $N(t) = 0$ para t finito.

2.2.2 Densidade Estacionária

No modelo determinístico, havia um único equilíbrio estável K para o qual a população convergia quando $t \rightarrow +\infty$. No modelo estocástico tal não é possível, mas pode existir uma distribuição estacionária. Assim, para o espaço de estados $(0, +\infty)$, não teríamos um ponto de equilíbrio mas uma distribuição de equilíbrio com densidade (função densidade de probabilidade) estacionária. Quando as fronteiras são não-atractivas a densidade

estacionária para o tamanho da população do modelo estocástico existe se a densidade de velocidade é integrável, isto é, se $M = \int_{0^+}^{+\infty} m(z)dz < +\infty$ (ver [16]). Neste caso, a densidade estacionária é dada por

$$p_N(N) = \frac{m(N)}{\int_{0^+}^{+\infty} m(z)dz} \text{ com } 0 < N < +\infty, \quad (2.53)$$

onde $m(N)$ é a densidade de velocidade.

Verifica-se ainda que o processo é ergódico e que qualquer ponto $A \in (0, +\infty)$ é atingível com probabilidade um. Faz nesse caso sentido determinar qual a distribuição do tempo de primeira passagem por A .

Para o modelo malthusiano, como as fronteiras não são ambas não-atractivas, o estado da existência de densidade estacionária tem de fazer-se por outra via. Como $N(t) \rightarrow 0$ ou $N(t) \rightarrow +\infty$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$, excepto possivelmente no modelo malthusiano de Ito se $2r/\sigma^2 = 1$, não pode existir densidade estacionária. No caso $2r/\sigma^2 = 1$ do modelo malthusiano de Ito também não pode existir densidade estacionária pois $\ln \frac{N(t)}{N(0)} = \sigma w(t)$ tem distribuição normal com média 0 e variância $\sigma^2 t \rightarrow +\infty$.

Vamos começar por provar a existência da função densidade de probabilidade para o cálculo de Stratonovich para modelos da forma (2.10), com f satisfazendo as condições a)-c) (pág.3), no caso particular de f ser estritamente decrescente e de $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\} < +\infty$. Isto inclui os **modelos de Gompertz e logístico de Stratonovich**. Para mostrar que $M < +\infty$, suponhamos $y_1 < K < y_2$ e $0 < y_1 < n < y_2$. Fixamos $n < K$; para $n > K$ a demonstração é análoga. Assim $0 < y_1 < n < K < y_2$ e dividimos o integral na soma de três integrais,

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = \int_{0^+}^{y_1} m(z)dz + \int_{y_1}^{y_2} m(z)dz + \int_{y_2}^{+\infty} m(z)dz.$$

Vamos mostrar que cada um deles é convergente e deste modo provamos que $M < +\infty$.

◇ Primeiro vamos mostra que $M_1 = \int_{0^+}^{y_1} m(z)dz < +\infty$.

Sejam $z \in (0, y_1]$ e $\theta \in [z, n]$. Como f é não crescente, $f(\theta) \geq f(n)$. Seja $V(z) = -\frac{2r}{\sigma^2} f(n) \int_z^n \frac{1}{\theta} d\theta$; assim $V(0^+) = -\infty$. Podemos então concluir que

$$\begin{aligned}
m(z) &= \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\
&= \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_z^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\
&\leq \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} f(n) \int_z^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\
&= \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp(V(z)) \\
&= \frac{1}{2rnf(n)} \frac{d(\exp(V(z)))}{dz}.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \int_{0^+}^{y_1} m(z) dz \\
&\leq \frac{1}{2rnf(n)} (\exp(V(y_1)) - \exp(V(0^+))) < +\infty,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

◇ Em segundo lugar provamos que $M_3 = \int_{y_2}^{+\infty} m(z) dz < +\infty$.
Sejam $z \in [y_2, +\infty)$ e $\theta \in [n, z]$. Fazemos

$$\begin{aligned}
\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta &= \frac{2r}{\sigma^2} \int_n^{y_2} \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta + \frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \\
&= A + B(z).
\end{aligned}$$

Sabemos que $\frac{2r}{\sigma^2} \int_{y_2}^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta \leq \frac{2r}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{z}{y_2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
m(z) &= \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\
&\leq \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp\left(A + \frac{2r}{\sigma^2} f(y_2) \ln \frac{z}{y_2}\right) \\
&= \frac{1}{n\sigma^2 z} \exp(A) \exp\left(\ln\left(\frac{z}{y_2}\right)^{2r/\sigma^2 f(y_2)}\right) \\
&= \frac{1}{n\sigma^2} \exp(A) y_2^{-2r/\sigma^2 f(y_2)} z^{2r/\sigma^2 f(y_2) - 1} \\
&= C z^{2r/\sigma^2 f(y_2) - 1}
\end{aligned}$$

com C uma constante positiva. Relembramos que $K < y_2$, donde $f(y_2) < f(K) = 0$ (pois prepusimos f estritamente decrescente e $K < +\infty$) e

$$\int_{y_2}^{+\infty} m(z) dz \leq \int_{y_2}^{+\infty} C z^{\frac{2r}{\sigma^2}} f(y_2)^{-1} dz < +\infty$$

como queríamos mostrar.

◇ Finalmente, mostramos que $M_2 = \int_{y_1}^{y_2} m(z) dz < +\infty$.

Seja $M_2 = M_2' + M_2'' = \int_{y_1}^n m(z) dz + \int_n^{y_2} m(z) dz$. Vamos mostrar que M_2' é finito; para M_2'' é análogo.

Seja $z\epsilon(y_1, n)$, $\theta\epsilon(z, n)$. Então

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{1}{\sigma^2 n z} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} \int_z^n \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2 y_1^2} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2} f(n) \int_z^n \frac{1}{\theta} d\theta\right) \\ &= C \left(\frac{n}{z}\right)^{-2r/\sigma^2 f(n)} \\ &= C \left(\frac{z}{y_1}\right)^{2r/\sigma^2 f(n)} \left(\frac{n}{y_1}\right)^{-2r/\sigma^2 f(n)} \\ &\leq C \left(\frac{y_1}{y_1}\right)^{2r/\sigma^2 f(n)} \left(\frac{n}{y_1}\right)^{-2r/\sigma^2 f(n)}, \end{aligned}$$

com C uma constante positiva finita, pelo que $\int_{y_1}^n m(z) dz < +\infty$. Deste modo $M_2' < +\infty$.

Assim, provamos que existe densidade estacionária quando usamos o cálculo de Stratonovich quando f é estritamente decrescente e $K = \inf\{N > 0 : f(N) = 0\} < +\infty$, obtendo-se para densidade estacionária

$$\begin{aligned} p_N(N) &= \frac{m(N)}{M} = \frac{\frac{1}{\sigma^2 n N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right)}{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2 n z} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^z \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right) dz} \\ &= D \frac{1}{N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{f(\theta)}{\theta} d\theta\right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde D é uma constante positiva tal que $\int_0^{+\infty} p_N(N) dN = 1$.

No caso particular de $f(\theta) = \ln \frac{K}{\theta}$ para (2.54), temos a densidade estacionária para o **modelo de Gompertz de Stratonovich** dada por

$$p_N(N) = C \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) \quad (0 < N < +\infty),$$

com C tal que $\int_0^{+\infty} p_N(N) dN = 1$.

A distribuição tem moda \hat{N} , solução da equação $p'_N(N) = 0$. Neste caso a moda é $\hat{N} = K \exp(-\frac{\sigma^2}{2r})$. Quando a intensidade do ruído é pequena ($\sigma \cong 0$), $\hat{N} \cong K$ coincide com o ponto de equilíbrio estável no caso do modelo determinístico.

Façamos uma mudança de variável, $X = \ln \frac{N}{K} = -f(N) = g(N)$. A função $g(N)$ é monótona em $(0, +\infty)$ e $\{X : X = \ln \frac{N}{K} \text{ para } N \in (0, +\infty)\} = \mathbb{R}$. Deste modo, existe a inversa de $g(N)$, $g^{-1}(X) = K \exp(X) = N$ e tem derivada contínua em \mathbb{R} . Então a função densidade de X é dada por

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_N(g^{-1}(x)) \left| \frac{dg^{-1}(x)}{dx} \right| \\ &= C \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2/r}\right) \text{ para } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

com C constante positiva tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$. O que significa que X segue uma distribuição normal com média 0 e variância $\frac{\sigma^2}{2r}$.

Neste caso podemos obter a distribuição transiente (distribuição num certo instante t). Já tínhamos visto (quando determinamos a solução do modelo de Gompertz de Stratonovich) que

$$X(t) = X(0)e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dw(s).$$

Como a função integranda do integral estocástico é determinística, o integral é gaussiano com média zero e variância

$$E \left[\left(\int_0^t e^{rs} dw(s) \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t e^{2rs} ds \right] = \frac{1}{2r} (e^{2rt} - 1).$$

Esta é uma propriedade do integral de Ito (ver [18] ou [11], por exemplo).

Logo, $X(t)$ segue uma distribuição normal com média $X(0)e^{-rt}$ e variância $\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2rt})$. Quando $t \rightarrow +\infty$, $X(t)$ converge para a distribuição estacionária, pois $X(0)e^{-rt} \rightarrow 0$ e $\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2rt}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2r}$.



Para determinar a densidade estacionária do **modelo de Gompertz de Ito**, vamos começar por provar que $M = \int_{0^+}^{+\infty} m(z) dz < +\infty$.

Com efeito de (2.40) vem $m(z) = C \frac{1}{z^2} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right)$ e

$$M = C \int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{z^2} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz.$$

Fazendo a mudança de variável $X = \ln \frac{z}{K}$, vem

$$\begin{aligned} M &= C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} x^2\right) \frac{1}{K} e^{-x} dx \\ &= \frac{C}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + 2\sigma^2/2rx + (\sigma^2/2r)^2}{2\sigma^2/2r}\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4r}\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4r}\right) \frac{C\sqrt{2\pi\sigma^2/2r}}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/2r}} \exp\left(-\frac{(x + \sigma^2/2r)^2}{2\sigma^2/2r}\right) dx \\ &< +\infty \end{aligned}$$

pois o último integral é igual a 1.

Como M é finito, existe a densidade estacionária para o modelo de Gompertz de Ito,

$$p_N(N) = \frac{m(N)}{\int_{0^+}^{+\infty} m(z) dz} = \frac{D}{N^2} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) \quad (0 < N < +\infty),$$

com $D > 0$ constante tal que $\int_{0^+}^{+\infty} p_N(N) dN = 1$. A moda é a solução da equação $p'_N(N) = 0$, $\hat{N} = K \exp(-\frac{\sigma^2}{r})$. Quando a intensidade do ruído é pequena vem $\hat{N} \simeq K$, a solução do modelo determinístico.

Fazendo $X = \ln \frac{N}{K} = -f(N) = g(N)$ com $N \in (0, +\infty)$, obtemos a função densidade de X

$$f_X(x) = C \exp\left(-\frac{(x + \sigma^2/2r)^2}{\sigma^2/r}\right),$$

com C tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$, pelo que X é uma variável gaussiana com média $\sigma^2/2r$ e variância igual.

A solução da equação diferencial estocástica depois de feita a mudança de variável é dada por $X(t) = X(0)e^{-rt} - \frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-rt}) + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dw(s)$ com $X(0) = \ln \frac{N_0}{K}$. Assim, a distribuição transiente segue uma distribuição normal com média $X(0)e^{-rt} - \frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-rt})$ e variância $\frac{\sigma^2}{2r}(1 - e^{-2rt})$. Quando $t \rightarrow +\infty$ a distribuição de $X(t)$ converge para a distribuição estacionária.

Quanto ao **modelo logístico de Stratonovich**, a densidade estacionária existe. Vem, fazendo $f(\theta) = 1 - \frac{\theta}{K}$ em (2.54)

$$\begin{aligned} p_N(N) &= \frac{D}{N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \int_n^N \frac{1 - \theta/k}{\theta} d\theta\right) \\ &= \frac{C}{N} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \left(\ln N - \frac{N}{K}\right)\right) \\ &= CN^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{N}{\frac{\sigma^2 K}{2r}}\right) \text{ com } N \in (0, +\infty), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva tal que $\int_0^{+\infty} p_N(N) dN = 1$. A densidade estacionária, com $C = \frac{1}{\left(\frac{\sigma^2 K}{2r}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \Gamma\left(\frac{2r}{\sigma^2}\right)}$, tem distribuição Gama com média K e variância $\frac{\sigma^2 K^2}{2r}$. A moda é $\hat{N} = K\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right)$. Quando a intensidade do ruído é pequena, $\hat{N} \cong K$, a solução do modelo determinístico.

Por último vamos estudar a densidade estacionária do **modelo logístico de Ito** para $r \geq \sigma^2/2$, uma vez que, neste caso ambas as fronteiras são não-atractivas. Mais, para $r < \sigma^2/2$, a fronteira $N = 0$ é a única fronteira atractiva e vem $N(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, não existindo densidade estacionária. Vamos começar por provar que $M < +\infty$.

Com efeito, de (2.52), vem

$$\begin{aligned} M &= D \int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{z^2} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2} \ln z - \frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz \\ &= D \int_{0+}^{+\infty} z^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz \\ &= C \int_{0+}^{+\infty} u^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-u} du \\ &= C \Gamma\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

com a mudança de variável $u = \frac{2r}{\sigma^2 K} z$ e C e D constantes.

Deste modo, podemos concluir que existe densidade estacionária para $r > \sigma^2/2$ igual a

$$p_N(N) = C.m(N) = CN^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} \exp\left(-\frac{N}{\sigma^2 K/2r}\right),$$

onde C é a constante tal que a função densidade estacionária é uma Gama com média $K - \frac{\sigma^2 K}{2r}$ e variância $(\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\sigma^4 K^2}{4r^2}$. A moda é $\hat{N} = K(1 - \frac{\sigma^2}{r})$. Quando σ é pequeno, vem $\hat{N} \simeq K$, a solução do modelo determinístico.

Ao contrário do modelo de Gompertz, não foi possível determinar explicitamente a distribuição transiente para o modelo logístico.

3. TEMPOS DE PRIMEIRA PASSAGEM

Dada uma população cujo tamanho inicial seja $N(0) = x > 0$, vamos, neste capítulo apresentar o tempo médio, o desvio padrão e a função densidade de probabilidade do tempo que leva a atingir o tamanho a pela primeira vez com $0 < a < x$. Designamos este tempo por tempo de primeira passagem por a . Vamos considerar que $a < N(0)$ é o limiar de extinção da população modelada pelos modelos malthusiano, de Gompertz ou logístico.

Começamos com um resultado mais geral, ou seja, considerar o tempo para que a população atinja a ou b , sabendo que no instante inicial eram x indivíduos e $a < x < b$. Depois particularizamos para o caso do tempo de primeira passagem por a , com $a < x$ e supondo que a é o limiar de extinção.

No início do nosso estudo, o objectivo era determinar a transformada de Laplace da função de distribuição do tempo de primeira passagem por a ou b , uma vez que, mediante certas condições teríamos a função densidade de probabilidade e os momentos de ordem n , em particular, o tempo médio e o desvio padrão. No entanto, não conseguimos resolver explicitamente a equação diferencial que tem como solução a transformada de Laplace para os modelos de Gompertz e logístico. Assim, optámos por resolver as equações diferenciais que tinham como solução o primeiro e o segundo momento, e apresentar o tempo médio e o desvio padrão para os modelos malthusiano, de Gompertz e logístico. Quanto à função densidade de probabilidade, obtemo-la através da inversa da transformada de Laplace, mas com já dissemos não conseguimos resolver a equação diferencial analiticamente, pelo que resolvemos numericamente, o que significa que não temos a função densidade de probabilidade exacta, mas sim uma aproximada. Sempre que foi possível, utilizámos métodos analíticos, recorrendo aos métodos numéricos quando foi necessário.

Seja $\{N(t), t \geq 0\}$ um processo de difusão homogéneo, satisfazendo as seguintes condições:

(1) O espaço de estados é um intervalo I da forma $(0, +\infty)$, $(0, +\infty]$, $[0, +\infty)$ ou $[0, +\infty]$.

(2) O processo é regular no intervalo I , isto é,

$$P[T_y < \infty | X(0) = x] > 0$$

com $x, y \in (0, +\infty)$ e T_y é o primeiro instante que a população atinge y .

(3) O processo tem parâmetros infinitesimais $\mu(x)$ e $\sigma^2(x)$ com $0 < x < +\infty$,

$$\mu(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[\Delta N | N(0) = x]}{h} \quad (3.1)$$

e

$$\sigma^2(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[(\Delta N)^2 | N(0) = x]}{h}, \quad (3.2)$$

onde $\Delta N = N(h) - N(0)$, $\mu(x)$ é o coeficiente de tendência e $\sigma^2(x)$ é o coeficiente de difusão.

(4) Os parâmetros infinitesimais $\mu(x)$ e $\sigma^2(x)$ são funções contínuas em x e $\sigma^2(x) > 0$ para $0 < x < +\infty$.

Ao primeiro instante que a população atinge o tamanho a ou b designamos por T^* ,

$$T^* = \min\{T_a, T_b\},$$

com a e b fixos, tais que $0 < a < x < b < +\infty$. Aqui T_a e T_b são os tempos de primeira passagem por a e por b respectivamente.

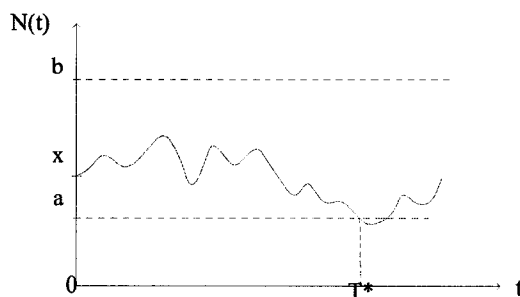


Fig. 3.1: Gráfico de uma trajetória $N(t)$ onde T^* é o tempo de primeira passagem por a ou b .

Seja

$$u(x) = P[T_b < T_a | N(0) = x], \quad (3.3)$$

a probabilidade da população atingir o tamanho b antes de atingir o tamanho a , sabendo que no instante inicial era igual a x , com $a < x < b$. Se $N(t)$ verificar as condições de (1) a (4), então $u(x)$ tem primeira e segunda derivada limitadas e é solução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + \mu(x)\frac{du}{dx} = 0,$$

com $u(a) = 0$ e $u(b) = 1$. As condições de fronteira são óbvias. A probabilidade de atingir b antes de atingir a , sabendo que no instante inicial era a , é claramente 0 ($u(a) = 0$). Se no instante inicial temos b indivíduos, então a probabilidade de atingir b antes de atingir a é obviamente igual a 1 ($u(b) = 1$).

Consideramos $a < x < b$, e escolhemos um intervalo de tempo bastante pequeno h tal que seja desprezável a probabilidade de atingir a ou b antes do instante h . No instante h , condicionado na posição de $N(h)$, a probabilidade de atingir b antes de a é $u(N(h))$. Então, pela lei das probabilidades totais,

$$u(x) = E[u(N(h)) | N(0) = x] + o(h),$$

onde $o(h)$ é o erro de ordem inferior a h . Seja $\Delta N = N(h) - N(0) = N(h) - x$ e consideremos o desenvolvimento em série de Taylor. Temos

$$\begin{aligned} u(N(h)) &= u(x + \Delta N) \\ &= u(x) + \Delta N u'(x) + \frac{1}{2}(\Delta N)^2 u''(x) + \dots \end{aligned}$$

os outros termos são de ordem inferior a $(\Delta N)^2$ e por isso de $o(h)$, portanto, desprezáveis. Pela definição de coeficiente de difusão e coeficiente de tendência, temos

$E[\Delta N | N(0) = x] = \mu(x)h + o(h)$ e $E[(\Delta N)^2 | N(0) = x] = \sigma^2(x)h + o(h)$. Assim,

$$\begin{aligned} u(x) &= E[u(N(h)) | N(0) = x] + o(h) \\ &= E[u(x + \Delta N) | N(0) = x] + o(h) \\ &= u(x) + E[\Delta N | N(0) = x]u'(x) + \frac{1}{2}E[(\Delta N)^2 | N(0) = x]u''(x) + o(h) \\ &= u(x) + \mu(x)hu'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)hu''(x) + o(h), \end{aligned}$$

equivalente a

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)hu''(x) + \mu(x)hu'(x) + o(h) = 0.$$

Dividimos tudo por h e como $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x) + \mu(x)u'(x) = 0,$$

com $a < x < b$, como queríamos mostrar. Esta é uma justificação heurística; a demonstração completa pode ser vista em [14].

De seguida resolvemos a equação diferencial para obter a expressão da probabilidade de atingir b antes de atingir a . Temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x) + \mu(x)u'(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x) - \frac{1}{2}\sigma^2(x) \left(-2\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} \right) u'(x) = 0. \end{aligned}$$

Como a derivada da função densidade de escala é $s'(x) = -2\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}s(x)$, e a equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2(x)u''(x) - \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{s'(x)}{s(x)}u'(x) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x) \left(\frac{u''(x)}{s(x)} - \frac{ds(x)}{s^2(x)} \frac{1}{dx} \frac{du(x)}{dx} \right) = 0, \end{aligned}$$

substituindo $\frac{1}{\sigma^2(x)s(x)}$ por $m(x)$ (função densidade de velocidade), temos

$$\frac{1}{2} \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{du(x)}{dx} \right) = 0.$$

Para simplificar a equação escrevemos, $s(x) = \frac{dS(x)}{dx}$ e $m(x) = \frac{dM(x)}{dx}$, e vem

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dM(x)} \left(\frac{du(x)}{dS(x)} \right) = 0.$$

Integrando duas vezes, a primeira em ordem a $M(x)$ e depois em ordem a $S(x)$, obtemos a solução geral da equação diferencial, $u(x) = \beta S(x) + \alpha$, com α e β constantes. Utilizando as condições de fronteira $u(a) = 0$ e $u(b) = 1$, determinamos o valor das constantes e obtemos a expressão para a

probabilidade da população atingir o tamanho b antes de atingir o tamanho a , sabendo que no instante inicial é igual a x ,

$$\begin{aligned} P[T_b < T_a | N(0) = x] &= \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)} \\ &= \frac{\int_a^x s(N) dN}{\int_a^b s(N) dN}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

(ver [16]). A probabilidade da população atingir o tamanho a antes de atingir o tamanho b , sabendo que no instante inicial é x é dada por

$$\begin{aligned} P[T_a < T_b | N(0) = x] &= 1 - P[T_b < T_a | N(0) = x] \\ &= \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} \\ &= \frac{\int_x^b s(N) dN}{\int_a^b s(N) dN}. \end{aligned}$$

Se a for o limiar de extinção da população, temos a probabilidade da população se extinguir antes de chegar a b .

Assim, a probabilidade de atingir b antes de atingir a sabendo que no instante inicial é x , para o **modelo malthusiano de Stratonovich** (ver(2.21)) é

$$u(x) = \frac{\int_a^x \left(\frac{N}{n}\right)^{-2r/\sigma^2 - 1} dN}{\int_a^b \left(\frac{N}{n}\right)^{-2r/\sigma^2 - 1} dN} = \frac{\int_a^x N^{-2r/\sigma^2 - 1} dN}{\int_a^b N^{-2r/\sigma^2 - 1} dN},$$

pelo que

$$u(x) = \frac{x^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}}{b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}}. \quad (3.5)$$

No caso de utilizar o cálculo de **Ito**, a expressão para o **modelo malthusiano** (ver(2.27)) é

$$u(x) = \frac{\int_a^x \left(\frac{N}{n}\right)^{-2r/\sigma^2} dN}{\int_a^b \left(\frac{N}{n}\right)^{-2r/\sigma^2} dN},$$

pelo que

$$u(x) = \frac{x^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1}}{b^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1}}. \quad (3.6)$$

A probabilidade de atingir b antes de atingir a sabendo que no instante inicial é x , para o **modelo de Gompertz de Stratonovich** é (ver(2.33))

$$u(x) = \frac{\int_a^x \frac{1}{N} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{N} - \ln^2 \frac{K}{n}\right)\right) dN}{\int_x^b \frac{1}{N} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \left(\ln^2 \frac{K}{N} - \ln^2 \frac{K}{n}\right)\right) dN}$$

e, fazendo a mudança de variável $z = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{N}{K}$, temos

$$u(x) = \frac{\int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{a}{K}} e^{z^2} dz}{\int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{b}{K}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{a}{K}} e^{z^2} dz}. \quad (3.7)$$

Para o **modelo de Gompertz** utilizando o cálculo de **Ito**, (ver(2.39)) temos

$$u(x) = \frac{\int_a^x \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) dN}{\int_a^b \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{N}\right) dN}$$

e, fazendo a mudança de variável $z = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{N}{K} + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$ vem

$$u(x) = \frac{\int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{x}{K} + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{a}{K} + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}} e^{z^2} dz}{\int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{b}{K} + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \frac{a}{K} + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}} e^{z^2} dz}. \quad (3.8)$$

Para o **modelo logístico de Stratonovich**, a probabilidade de atingir b antes de atingir a , sabendo que no instante inicial é igual a x (ver(2.45)), é

$$u(x) = \frac{\int_a^x N^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right) dN}{\int_x^b N^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right) dN}$$

e, fazendo a mudança de variável $z = \frac{2r}{\sigma^2 K} N$, vem

$$u(x) = \frac{\int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^z dz}{\int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} b} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^z dz}. \quad (3.9)$$

No caso do **modelo logístico de Ito** (ver(2.51)),

$$u(x) = \frac{\int_a^x N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right) dN}{\int_a^b N^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} N\right) dN}$$

e, fazendo a mudança de variável $z = \frac{2r}{\sigma^2 K} N$, vem

$$u(x) = \frac{\int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^z dz}{\int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} b} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^z dz}. \quad (3.10)$$

3.1 Tempo Médio

Nesta secção vamos começar por determinar a expressão geral do tempo médio para a população atingir o tamanho a ou b (ver [16]). Depois determinamos o tempo médio de primeira passagem por a ou b para os modelos malthusiano, de Gompertz e logístico utilizando ambos os cálculos, Stratonovich e Ito. Terminamos com a expressão do tempo médio para a população atingir a , que consideramos ser o limiar de extinção, ou seja, o tempo médio de extinção de uma população descrita pelos modelos em estudo. Indicamos ainda, o tempo médio para a população atingir b .

Seja $g(x)$ uma função contínua, limitada e

$$w(x) = E \left[\int_0^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = x \right], \quad a < x < b. \quad (3.11)$$

O integral é definido, desde que o caminho amostral do processo de difusão seja contínuo. Se se verificarem as condições (1) a (4), $w(x)$ é finito, tem primeira e segunda derivada limitadas e satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2 w}{dx^2} + \mu(x) \frac{dw}{dx} = -g(x) \quad (3.12)$$

com $a < x < b$ e $w(a) = w(b) = 0$.

De seguida daremos uma justificação heurística que $w(x)$ satisfaz esta equação diferencial (a demonstração pode ser vista em [14]). As condições de fronteira são óbvias. Se no instante inicial a população é igual a a ou b , então o tempo médio para atingir a ou b é igual a zero. Escolhemos um

intervalo de tempo bastante pequeno, que designamos por h e condicionamos o integral com $N(h) = z$,

$$\begin{aligned} w(x) &= E \left[\int_0^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = x \right] \\ &= E \left[\int_0^h g(N(s)) ds | N(0) = x \right] + E \left[\int_h^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = x \right]. \end{aligned}$$

Ora, pelo teorema das probabilidades totais

$$E \left[\int_h^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = x \right] = E \left[E \left[\int_h^{T^*} g(N(s)) ds | N(h) \right] | N(0) = x \right].$$

Contudo

$$E \left[\int_h^{T^*} g(N(s)) ds | N(h) = z \right] = E \left[\int_0^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = z \right] = w(z),$$

pela propriedade de Markov e pela estacionaridade. Logo

$$E \left[\int_h^{T^*} g(N(s)) ds | N(0) = x \right] = E [w(N(h)) | N(0) = x].$$

Como $g(x)$ e o caminho amostral são contínuos obtemos a seguinte aproximação

$$E \left[\int_0^h g(N(s)) ds | N(0) = x \right] = g(x)h + o(h). \quad (3.13)$$

Pelo desenvolvimento em série de Taylor com $\Delta N = N(h) - x$,

$$\begin{aligned} E [w(N(h)) | N(0) = x] &= E [w(x + \Delta N) | N(0) = x] \\ &= w(x) + w'(x) E [\Delta N | N(0) = x] \\ &\quad + \frac{1}{2} w''(x) E [(\Delta N)^2 | N(0) = x] \\ &= w(x) + w'(x) \mu(x) h + \frac{1}{2} w''(x) \sigma^2(x) h + o(h). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, de (3.13) e (3.14) temos

$$w(x) = g(x)h + o(h) + w(x) + w'(x)\mu(x)h + \frac{1}{2}w''(x)\sigma^2(x)h + o(h),$$

dividindo tudo por h , obtemos

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)w''(x) + w'(x)\mu(x) + \frac{o(h)}{h} = -g(x),$$

e, quando $h \rightarrow 0$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)w''(x) + w'(x)\mu(x) = -g(x).$$

A equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)s(x) \left(\frac{1}{s(x)}w''(x) - \frac{s'(x)}{s^2(x)}w'(x) \right) = -g(x),$$

equivalente a

$$\frac{1}{2m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{s(x)} \frac{dw'(x)}{dx} - \frac{ds(x)}{s^2(x)} w'(x) \right) = -g(x),$$

ou, escrito doutra forma,

$$\frac{1}{2m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \frac{w(x)}{s(x)} \right) = -g(x),$$

ou ainda, fazendo $dM = m(x)dx$ e $dS = s(x)dx$, a equação diferencial é dada pela seguinte expressão

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dM} \left(\frac{dw(x)}{dS} \right) = -g(x)$$

com as condições de fronteira, $w(a) = w(b) = 0$. Integrando em ordem a M , temos

$$\frac{dw(\eta)}{dS} - \beta = -2 \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi$$

e integrando novamente, mas desta vez em ordem a S , obtemos

$$w(x) - \beta[S(x) - S(a)] - \alpha = -2 \int_a^x \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi s(\eta)d\eta,$$

ou seja,

$$w(x) = -2 \int_a^x \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi s(\eta)d\eta + \beta[S(x) - S(a)] + \alpha,$$

é a solução geral da equação diferencial, com α e β constantes. Com $w(a) = 0$ temos $\alpha = 0$ e fazendo $w(b) = 0$ implica que

$$\beta = \frac{2}{S(b) - S(a)} \int_a^b \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi s(\eta)d\eta.$$

Sabendo que $u(x) = \frac{S(x)-S(a)}{S(b)-S(a)}$, a solução particular da equação diferencial é dada por

$$w(x) = 2 \left\{ u(x) \int_a^b \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi s(\eta)d\eta - \int_a^x \int_a^\eta g(\xi)m(\xi)d\xi s(\eta)d\eta \right\}.$$

Invertendo a ordem de integração,

$$w(x) = 2 \left\{ u(x) \int_a^b [S(b) - S(\xi)]g(\xi)m(\xi)d\xi - \int_a^x [S(x) - S(\xi)]g(\xi)m(\xi)d\xi \right\},$$

somando e subtraindo no segundo membro $u(x) \int_a^x [S(b) - S(\xi)]g(\xi)m(\xi)d\xi$, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} w(x) &= 2u(x) \int_x^b [S(b) - S(\xi)]g(\xi)m(\xi)d\xi \\ &\quad + 2(1 - u(x)) \int_a^x [S(\xi) - S(a)]g(\xi)m(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

solução particular da equação diferencial que satisfaz as condições de fronteira. Donde

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^{T^*} g(N(s))ds | N(0) = x \right] &= 2u(x) \int_x^b [S(b) - S(\xi)]g(\xi)m(\xi)d\xi + \\ &\quad + 2(1 - u(x)) \int_a^x [S(\xi) - S(a)]g(\xi)m(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Em particular, se fizermos $g(N(s)) = 1$, então $\int_0^{T^*} ds = T^*$ e temos o tempo médio que a população leva para atingir a ou b ,

$$\begin{aligned} E[T^* | N(0) = x] &= 2u(x) \int_x^b [S(b) - S(\xi)]m(\xi)d\xi + \\ &\quad + 2(1 - u(x)) \int_a^x [S(\xi) - S(a)]m(\xi)d\xi. \quad (3.15) \end{aligned}$$

De seguida, vamos calcular o tempo médio para atingir a ou b para populações que possam ser descritas pelos modelos em estudo.

Começamos pelo modelo de **Gompertz de Stratonovich**. A expressão (3.15), depois de feitas algumas simplificações, tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} u(x) \int_x^b \int_\zeta^b z^{-\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 z\right) dz \\ &\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta \\ &\quad + \frac{2}{\sigma^2} (1 - u(x)) \int_a^x \int_a^\zeta z^{-\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 z\right) dz \\ &\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta. \end{aligned}$$

Usando a mudança de variável $y = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln z$, obtemos

$$\begin{aligned} E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{\sigma \sqrt{r} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 K\right)} \int_x^b \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \zeta}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln b} \exp\left(\left(y - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dy \\ &\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta \\ &\quad + \frac{2(1 - u(x))}{\sigma \sqrt{r} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 K\right)} \int_a^x \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln a}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \zeta} \exp\left(\left(y - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dy \\ &\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta \end{aligned}$$

e, fazendo a mudança de variável $v = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln \zeta$ temos

$$\begin{aligned} E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln x}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln b} \int_v^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln b} \exp\left(\left(y - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dy \\ &\quad \exp\left(-\left(v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dv \\ &\quad + \frac{2(1 - u(x))}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln a}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln x} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln a}^v \exp\left(\left(y - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dy \\ &\quad \exp\left(-\left(v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dv. \end{aligned}$$

Façamos nova mudança de variável $t = y - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K$ para obter

$$\begin{aligned} E[T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln x}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln b} \int_{v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K)} e^{t^2} dt \\ &\quad \exp\left(-\left(v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dv \\ &\quad + \frac{2(1-u(x))}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln a}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln x} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K)}^{v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K} e^{t^2} dt \\ &\quad \exp\left(-\left(v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K\right)^2\right) dv \end{aligned}$$

e, por último, fazemos $s = v - \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln K$ para obter finalmente

$$\begin{aligned} E[T^* | X(0) = x] &= \frac{2u(x)}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K)}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K)} \int_s^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K)} e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \\ &\quad + \frac{2(1-u(x))}{r} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K)}^{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K)} \int_{\frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K)}^s e^{t^2} dt e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Temos, então a expressão do tempo médio no caso do modelo de Gompertz utilizando o cálculo de Stratonovich

$$\begin{aligned} E[T^* | N(0) = x] &= \frac{2}{r \int_{\alpha}^{\beta} e^{t^2} dt} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_{\gamma}^{\beta} \int_s^{\beta} e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma}^{\beta} e^{t^2} dt \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^s e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

com $\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K)$, $\gamma = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K)$ e $\beta = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K)$.

O processo tem densidade estacionária e é ergódico, pelo que passa por a q.c.. Então fazendo $b \rightarrow +\infty$ temos o tempo médio que a população leva para atingir o tamanho a (uma vez que não pode atingir $+\infty$) com $a < x = N(0)$. Vamos supor que a é o limiar de extinção da população, ou seja, que o primeiro instante em que a população atinge o tamanho a é o tempo de extinção da população.

Como $b \rightarrow +\infty$ então $\beta \rightarrow +\infty$ e

$$E[T_a|N(0) = x] = \frac{2}{r \int_{\alpha}^{+\infty} e^{t^2} dt} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_{\gamma}^{+\infty} \int_s^{+\infty} e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right. \\ \left. + \int_{\gamma}^{+\infty} e^{t^2} dt \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^s e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right).$$

Invertendo a ordem de integração, obtemos

$$E[T_a|N(0) = x] = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2}{r \int_{\alpha}^u e^{t^2} dt} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_{\gamma}^u \int_{\gamma}^t e^{-s^2} ds e^{t^2} dt \right. \\ \left. + \int_{\gamma}^u e^{t^2} dt \int_{\alpha}^{\gamma} \int_t^{\gamma} e^{-s^2} ds e^{t^2} dt \right) \\ = \frac{2}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u \int_{\gamma}^t e^{-s^2} ds e^{t^2} dt}{\int_{\alpha}^u e^{t^2} dt} \\ + \frac{2}{r} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u e^{t^2} dt \int_{\alpha}^{\gamma} \int_t^{\gamma} e^{-s^2} ds e^{t^2} dt}{\int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt + \int_{\gamma}^u e^{t^2} dt}.$$

Na primeira parcela temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ e utilizando a regra de Cauchy, levantamos a indeterminação. Na segunda parcela dividimos o numerador e o denominador por $\int_{\gamma}^u e^{t^2} dt$ e, como $\lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^u e^{t^2} dt = +\infty$, temos

$$E[T_a|N(0) = x] = \frac{2}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_{\gamma}^{+\infty} e^{-s^2} ds + \frac{2}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_t^{\gamma} e^{-s^2} ds e^{t^2} dt \\ = \frac{2}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_t^{+\infty} e^{-s^2} ds \\ = \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}t)\right) e^{t^2} dt, \quad (3.17)$$

onde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt$ é a função de distribuição de uma variável aleatória gaussiana standard.

Como o processo também passa por b com probabilidade um, fazendo $a \rightarrow 0$ podemos calcular o tempo médio para a população atingir o tamanho b , superior ao tamanho da população no instante inicial, x . Se $a \rightarrow 0$ então $\alpha \rightarrow -\infty$ e o tempo médio para a população atingir o tamanho b , é dado por

$$E[T_b|N(0) = x] = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{2}{r \int_u^\beta e^{t^2} dt} \left(\int_u^\gamma e^{t^2} dt \int_\gamma^\beta \int_s^\beta e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right. \\ \left. + \int_\gamma^\beta e^{t^2} dt \int_u^\gamma \int_u^s e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right),$$

pele que, fazendo o mesmo raciocínio que fizemos anteriormente,

$$E[T_b|N(0) = x] = \frac{2}{r} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\int_u^\gamma e^{t^2} dt \int_\gamma^\beta \int_\gamma^t e^{-s^2} ds e^{t^2} dt}{\int_u^\beta e^{t^2} dt} \\ + \frac{2}{r} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\int_\gamma^\beta e^{t^2} dt \int_u^\gamma \int_t^\gamma e^{-s^2} ds e^{t^2} dt}{\int_u^\beta e^{t^2} dt} \\ = \frac{2}{r} \int_\gamma^\beta \int_\gamma^t e^{-s^2} ds e^{t^2} dt + \\ + \frac{2}{r} \int_\gamma^\beta e^{t^2} dt \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\int_u^\gamma \int_t^\gamma e^{-s^2} ds e^{t^2} dt}{\int_u^\beta e^{t^2} dt} \\ = \frac{2}{r} \left(\int_\gamma^\beta \int_\gamma^t e^{-s^2} ds e^{t^2} dt + \int_\gamma^\beta e^{t^2} dt \int_{-\infty}^\gamma e^{-s^2} ds \right) \\ = \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \left(\int_\gamma^\beta \Phi(\sqrt{2}t) e^{t^2} dt \right). \quad (3.18)$$

Vejamos agora, como fica a expressão (3.15) para o **modelo de Gompertz de Ito**. Depois de feitas algumas simplificação, o tempo médio para atingir a ou b é dado por

$$E[T^*|N(0) = x] = \frac{2u(x)}{\sigma^2} \int_x^b \int_\zeta^b z^{-\frac{2r}{\sigma^2} \ln K} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 z\right) dz \\ \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 2} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta \\ + \frac{2(1-u(x))}{\sigma^2} \int_a^x \int_a^\zeta z^{-\frac{2r}{\sigma^2} \ln K} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 z\right) dz \\ \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2} \ln K - 2} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \zeta\right) d\zeta$$

e, depois de fazer as mudanças de variáveis muito semelhantes às feitas no cálculo de Stratonovich, temos o tempo médio para a população atingir o tamanho a ou b utilizando o cálculo de Ito,

$$E [T^* | N(0) = x] = \frac{2}{r \int_{\alpha}^{\beta} e^{t^2} dt} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} e^{t^2} dt \int_{\gamma}^{\beta} \int_s^{\beta} e^{t^2} dt e^{-s^2} ds + \int_{\gamma}^{\beta} e^{t^2} dt \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^s e^{t^2} dt e^{-s^2} ds \right), \quad (3.19)$$

agora com $\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$, $\gamma = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$ e $\beta = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$.

Podemos concluir que o tempo médio do modelo de Gompertz para os dois cálculos utilizados difere nos extremos de integração. Quando calculado através de Ito o intervalo de integração sofre uma deslocação para a direita de $\frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$.

Assim como no cálculo de Stratonovich, também no cálculo de Ito existe densidade estacionária e o processo é ergódico. Podemos fazer $b \rightarrow +\infty$ e obtemos o tempo médio para a população atingir o tamanho a e fazendo $a \rightarrow 0$ temos o tempo médio para a população atingir um tamanho superior ao instante inicial, que designamos por b . Assim,

$$E [T_a | N(0) = x] = \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}t) \right) e^{t^2} dt \quad (3.20)$$

e

$$E [T_b | N(0) = x] = \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \int_{\gamma}^{\beta} \Phi(\sqrt{2}t) e^{t^2} dt. \quad (3.21)$$

Os cálculos efectuados foram exactamente os mesmos, que fizemos no cálculo de Stratonovich.

No caso do **modelo logístico de Stratonovich**, a expressão (3.15) depois de feitas algumas simplificações, dá

$$\begin{aligned}
E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{\sigma^2} \int_x^b \int_\zeta^b z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz \\
&\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) d\zeta \\
&\quad + \frac{2(1-u(x))}{\sigma^2} \int_a^x \int_a^\zeta z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz \\
&\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) d\zeta.
\end{aligned}$$

Em primeiro lugar, fazemos a mudança de variável $y = \frac{2r}{\sigma^2 K} z$, vindo

$$\begin{aligned}
E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{\sigma^2} \int_x^b \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} b} \left(\frac{\sigma^2 K}{2r} y\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y \frac{\sigma^2 K}{2r} dy \\
&\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) d\zeta \\
&\quad + \frac{2(1-u(x))}{\sigma^2} \int_a^x \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta} \left(\frac{\sigma^2 K}{2r} y\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y \frac{\sigma^2 K}{2r} dy \\
&\quad \zeta^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta\right) d\zeta.
\end{aligned}$$

De seguida, fazemos a substituição, $v = \frac{2r}{\sigma^2 K} \zeta$ e obtemos

$$\begin{aligned}
E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2u(x)}{\sigma^2} \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} x}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} b} \int_v^{\frac{2r}{\sigma^2 K} b} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \\
&\quad + \frac{2(1-u(x))}{\sigma^2} \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^{\frac{2r}{\sigma^2 K} x} \int_{\frac{2r}{\sigma^2 K} a}^v y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv.
\end{aligned}$$

Daqui por diante vamos designar no caso do modelo logístico $\frac{2r}{\sigma^2 K} a$ por α , $\frac{2r}{\sigma^2 K} x$ por γ e $\frac{2r}{\sigma^2 K} b$ por β . Assim

$$\begin{aligned}
E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \\
&\quad \left(\int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \int_{\gamma}^{\beta} \int_{\nu}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \right. \\
&\quad \left. + \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\nu} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

é o tempo médio para a população atingir o tamanho a ou b , sabendo que, no instante inicial é igual a x .

No modelo logístico quando utilizamos o cálculo de Stratonovich as fronteiras $N = 0$ e $N = +\infty$ são não-atractivas e o processo tem densidade estacionária e é ergódico (o mesmo não acontece necessariamente quando utilizamos o cálculo de Ito, como vimos no capítulo anterior). Se fizermos $b \rightarrow +\infty$ então $\beta \rightarrow +\infty$ e temos o tempo médio para a população atingir a ,

$$\begin{aligned}
E [T_a | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2 \int_{\alpha}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\
&\quad \int_{\gamma}^{+\infty} \int_{\nu}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2 \int_{\alpha}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \int_{\gamma}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\
&\quad \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^{\nu} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv.
\end{aligned}$$

Invertendo a ordem de integração, vem

$$\begin{aligned}
E [T_a | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}{\int_{\alpha}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\nu}^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}{\int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy + \int_{\gamma}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}.
\end{aligned}$$

Como o $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y = +\infty$ e o integral $\int_{\alpha}^{+\infty} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy$ é divergente, na segunda parcelas dividimos tudo pelo integral e na primeira parcela temos

uma indeterminação do tipo ∞/∞ , pelo que utilizamos a regra de Cauchy. Deste modo,

$$E [T_a | N(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^u v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \\ + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_y^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy,$$

donde

$$E [T_a | N(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_y^{+\infty} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\ = \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy, \quad (3.23)$$

com $\Gamma(a, x) = \int_x^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ a função gama incompleta.

Vamos agora fazer $a \rightarrow 0$, ou seja, $\alpha \rightarrow 0$, para obter

$$E [T_b | N(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}{\int_u^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \int_{\gamma}^{\beta} \int_v^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \\ + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} \int_u^v y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv}{\int_u^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}$$

e, invertendo a ordem de integração,

$$E [T_b | N(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}{\int_u^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy} \int_{\gamma}^{\beta} \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\ + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} \int_y^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}{\int_u^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy}.$$

Como $y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y \geq 0 \forall y \in]0, \beta]$ e $y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \leq y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y$, pelo critério geral da comparação $\int_0^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy$ é divergente. Na segunda parcela vamos utilizar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação ∞/∞ e obter

$$\begin{aligned}
E [T_b | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \lim_{u \rightarrow 0} \int_u^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \int_0^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

onde $\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função Gama incompleta.

Passamos agora para o **modelo logístico de Ito**. As substituições feitas são exactamente as mesmas que fizemos no cálculo de Stratonovich. Assim, em média o tempo que demora para a população atingir o tamanho a ou b é dado pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
E [T^* | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2 \int_{\alpha}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \\
&\quad \left(\int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \int_{\gamma}^{\beta} \int_v^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv \right. \\
&\quad \left. + \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \int_{\alpha}^{\gamma} \int_{\alpha}^v y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2 K} a$, $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2 K} x$ e $\beta = \frac{2r}{\sigma^2 K} b$.

A diferença entre utilizar um cálculo ou outro está na função integranda que é ligeiramente diferente e não nos extremos (ao contrário do que sucedeu no caso do modelo de Gompertz).

No caso de $r > \sigma^2/2$ existe densidade estacionária e o processo é ergódico. Assim, neste caso, podemos fazer $b \rightarrow +\infty$, ou seja $\beta \rightarrow +\infty$ e, seguindo o mesmo raciocínio que fizemos no cálculo de Stratonovich, temos

$$\begin{aligned}
E [T_a | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy}{\int_{\alpha}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \\
&+ \frac{2}{\sigma^2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\gamma}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy}{\int_{\alpha}^u y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_y^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^u v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv \\
&+ \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_y^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \int_y^{+\infty} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Também para $r > \sigma^2/2$ podemos fazer $a \rightarrow 0$ para obter

$$\begin{aligned}
E [T_b | N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy}{\int_u^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \int_{\gamma}^{\beta} \int_v^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv \\
&+ \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} \int_u^y y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv}{\int_{\alpha}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy + \\
&+ \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\int_u^{\gamma} \int_y^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy}{\int_{\alpha}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy} \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \int_{\gamma}^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy + \\
&+ \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \int_0^{\gamma} v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \int_0^y v^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-v} dv y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \\
&= \frac{2}{\sigma^2} \int_{\gamma}^{\beta} \gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

que é o tempo médio para a população atingir o tamanho b .

Para o **modelo malthusiano de Stratonovich**, a expressão (3.15), depois de feitas algumas simplificações é atendendo a (2.21), (2.22) e (3.66), dada por

$$\begin{aligned}
 E[T^*|N(0) = x] &= \frac{2}{\sigma^2} \left\{ u(x) \int_x^b \int_\zeta^b z^{-2r/\sigma^2-1} dz \zeta^{2r/\sigma^2-1} d\zeta \right. \\
 &\quad \left. + (1 - u(x)) \int_a^x \int_a^\zeta z^{-2r/\sigma^2-1} dz \zeta^{2r/\sigma^2-1} d\zeta \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ u(x) \int_x^b \left(\zeta^{-2r/\sigma^2} - b^{-2r/\sigma^2} \right) \zeta^{2r/\sigma^2-1} d\zeta \right. \\
 &\quad \left. + (1 - u(x)) \int_a^x \left(a^{-2r/\sigma^2} - \zeta^{-2r/\sigma^2} \right) \zeta^{2r/\sigma^2-1} d\zeta \right\} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ u(x) \left(\ln \frac{b}{x} - \frac{\sigma^2}{2r} \left(1 - \left(\frac{b}{x} \right)^{-2r/\sigma^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - u(x)) \left(-\ln \frac{x}{a} + \frac{\sigma^2}{2r} \left(\left(\frac{a}{x} \right)^{-2r/\sigma^2} - 1 \right) \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Logo

$$E[T^*|N(0) = x] = \frac{1}{r} \left(\frac{x^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}}{b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{x}{a} \right). \quad (3.28)$$

Agora, o processo não é ergódico e sabemos até que a probabilidade de passar por a é menor que 1, isto é, há uma probabilidade positiva de o processo nunca passar por a , caso em que $T_a = +\infty$. Por isso, o tempo médio de passagem por a é $E[T_a|N(0) = x] = +\infty$, resultado que se obtém fazendo $b \rightarrow +\infty$ na expressão (3.69). Porém, estamos certamente interessados em determinar o tempo médio de passagem por a para as trajetórias que passam por a , isto é $E[T_a|N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty]$. Como a solução da equação diferencial estocástica é o conhecido movimento browniano geométrico

$$N(t) = x \exp(rt + \sigma w(t)),$$

se fizermos $Z(t) = \ln \frac{N(t)}{x} = rt + \sigma w(t)$, $Z(t)$ é o movimento browniano com *drift* $r \geq 0$ e com condição inicial $Z(0) = 0$. Claro que, T_a é também o tempo de primeira passagem de $Z(t)$ por $\ln \frac{a}{x}$. Assim, pondo

$$A = \ln \frac{a}{x},$$

vem

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : N(t) = a\} = \inf\{t \geq 0 : Z(t) = A\}.$$

O movimento browniano e, em particular, o movimento browniano com *drift* já foi estudado por diversos autores e, pode ser visto em qualquer livro de processos estocásticos (ver por exemplo [15] ou [13]).

De facto, a função densidade de probabilidade imprópria do tempo de primeira passagem por a , é dada por

$$f_{T_a}(t) = |A| \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(A - rt)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (0 < t < +\infty). \quad (3.29)$$

Note-se, porém, que T_a tem um átomo em $T_a = +\infty$ com probabilidade $1 - \int_0^{+\infty} f_{T_a}(t) dt > 0$.

A transformada de Laplace para o tempo de primeira passagem de $Z(t)$ por $A = \ln \frac{a}{x}$, é dada por

$$E[e^{-\lambda T_a} | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \exp\left(A \frac{r}{\sigma^2} - \frac{|A|}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2\sigma^2 \lambda}\right) \quad (3.30)$$

que, é também, a transformada de Laplace para o tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a .

Facilmente se conclui, derivando uma vez a transformada de Laplace em ordem a λ e depois substituindo λ por 0, que

$$E[T_a | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \ln \frac{x}{a}, \quad (3.31)$$

é o tempo médio de primeira passagem pelo limiar de extinção a das trajectórias que passam por a (excluindo as trajectórias em que $T_a = +\infty$).

O tempo de primeira passagem de $N(t)$ por b , com $b > N(0)$ é igual ao tempo de primeira passagem de $Z(t)$ por $\ln \frac{b}{x}$. Considerando

$$B = \ln \frac{b}{x},$$

vem

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : N(t) = b\} = \inf\{t \geq 0 : Z(t) = B\}.$$

De facto a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem por b , é dada por

$$f_{T_b}(t) = |B| \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(B - rt)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad 0 \leq t \leq +\infty. \quad (3.32)$$

Esta densidade é própria já que $N(t) \rightarrow +\infty$ q.c. quando $t \rightarrow +\infty$ e, portanto, $N(t)$ passa por b com probabilidade um.

A transformada de Laplace para o tempo de primeira passagem de $Z(t)$ por $B = \ln \frac{b}{x}$ é dada por

$$E[e^{-\lambda T_b} | N(0) = x] = \exp\left(B \frac{r}{\sigma^2} - \frac{|B|}{\sigma^2} \sqrt{r^2 + 2\sigma^2 \lambda}\right) \quad (3.33)$$

que é também a transformada de Laplace para o tempo de primeira passagem de $N(t)$ por b .

Assim, o tempo médio de primeira passagem por b ,

$$E[T_b | N(0) = x] = \frac{1}{r} \ln \frac{b}{x}. \quad (3.34)$$

Para o **modelo malthusiano de Ito**, a expressão (3.15) depois de simplificar vem, atendendo a (2.27), (2.28) e (3.6),

$$E[T^* | N(0) = x] = \frac{2}{\sigma^2} \left\{ u(x) \int_x^b \int_\zeta^b z^{-2r/\sigma^2 - 1} dz \zeta^{2r/\sigma^2 - 2} d\zeta \right. \\ \left. + (1 - u(x)) \int_a^x \int_a^\zeta z^{-2r/\sigma^2 - 1} dz \zeta^{2r/\sigma^2 - 2} d\zeta \right\}.$$

Cálculos semelhantes aos efectuados para o cálculo de Stratonovich dão para o tempo médio de primeira passagem por a ou b ,

$$E[T^* | N(0) = x] = \frac{1}{r - \sigma^2/2} \left(\frac{x^{-2r/\sigma^2 + 1} - a^{-2r/\sigma^2 + 1}}{b^{-2r/\sigma^2 + 1} - a^{-2r/\sigma^2 + 1}} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{x}{a} \right). \quad (3.35)$$

De modo análogo, ao que fizemos quando utilizamos o cálculo de Stratonovich, pondo $Z(t) = \ln \frac{N(t)}{x}$ vem $Z(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)$. Neste caso, $Z(t)$ é o movimento browniano com *drift* $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$. Para $r > \sigma^2/2$, o caso mais relevante, temos

$$f_{T_a} = |A| \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(A - (r - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad (0 \leq t < +\infty),$$

a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a , que é imprópria, pois $P\{T_a = +\infty\} > 0$.

A transformada de Laplace para $r > \sigma^2/2$ é

$$E[e^{-\lambda T_a} | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \exp\left(A \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma^2} - \frac{|A|}{\sigma^2} \sqrt{(r - \sigma^2/2)^2 + 2\sigma^2 \lambda}\right), \quad (3.36)$$

pelo que

$$E[T_a | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \frac{1}{r - \sigma^2/2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-2r/\sigma^2 + 1} \ln \frac{x}{a}, \quad (3.37)$$

é o tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a para as trajectórias que passam por a .

A função densidade de probabilidade de T_b , que é própria ($P\{T_b = +\infty\} = 0$), é dada por

$$f_{T_b}(t) = |B| \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(B - (r - \sigma^2/2)t)^2}{2\sigma^2 t}\right) \quad 0 \leq t \leq +\infty. \quad (3.38)$$

E, a respectiva transformada de Laplace,

$$E[e^{-\lambda T_b} | N(0) = x] = \exp\left(B \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma^2} - \frac{|B|}{\sigma^2} \sqrt{(r - \sigma^2/2)^2 + 2\sigma^2 \lambda}\right). \quad (3.39)$$

Deste modo, o tempo médio de primeira passagem por b é

$$E[T_b | N(0) = x] = \frac{1}{r - \sigma^2/2} \ln \frac{b}{x}. \quad (3.40)$$

Se $r < \sigma^2/2$, então as trajectórias passa por a q.c. e vem

$$E[T_a | N(0) = x] = \frac{1}{r - \sigma^2/2} \ln \frac{a}{x}. \quad (3.41)$$

Porém, neste caso, há uma probabilidade positiva de as trajectórias não passarem por b e vem

$$E[T_b | N(0) = x \text{ e } T < +\infty] = \frac{1}{r - \sigma^2/2} \left(\ln \frac{x}{b} \right)^{-2r/\sigma^2 + 1} \ln \frac{x}{b}. \quad (3.42)$$

3.2 Desvio Padrão

Nesta secção vamos determinar o desvio padrão do tempo de extinção para os modelos malthusiano, Gompertz e logístico, utilizando o cálculo de Stratonovich e Ito. Começamos por determinar a expressão do segundo momento do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a ou b , para os modelos em estudo. Depois, uma vez que já calculámos o tempo médio na secção anterior, podemos escrever a variância do tempo de primeira passagem por a , o tempo de extinção.

Seja

$$\begin{aligned} U(x) &= E \left[f \left(\int_0^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \mid N(0) = x \right] \\ &= E_x \left[f \left(\int_0^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right] \end{aligned}$$

onde T^* é o primeiro instante que a população atinge o tamanho a ou b . Consideramos f uma função de classe C^2 e g suavemente contínua por troços. Por definição de T^* , temos as seguintes condições de fronteira,

$$U(a) = U(b) = f(0).$$

Assumimos que $g(x)$ é limitada e h suficientemente pequeno. Então

$$U(x) = E_x \left[f \left(\int_0^h g(N(\tau)) d\tau + \int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right]$$

e, desenvolvimento em série de Taylor,

$$U(x) = E_x \left[f \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) + f' \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \int_0^h g(N(\tau)) d\tau \right] + o(h).$$

Como $g(\xi)$ é contínua em x ,

$$U(x) = E_x \left[f \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) + hg(x) f' \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right] + o(h).$$

Pela lei das probabilidades totais e pela propriedade de Markov,

$$\begin{aligned} U(x) &= E_x \left[E_{N(h)} \left[f \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right] \right] \\ &\quad + hg(x) E_x \left[E_{N(h)} \left[f' \left(\int_h^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right] \right] + o(h) \\ &= E_x[U(N(h))] + hg(x) E_x[V(N(h))] + o(h), \end{aligned}$$

com

$$V(x) = E_x \left[f' \left(\int_0^{T^*} g(N(\tau)) d\tau \right) \right].$$

O caminho amostral é contínuo, h é suficientemente pequeno e $\Delta N = N(h) - x$, donde

$$E_x[U(N(h))] = U(x) + U'(x) E_x[N(h) - x] + \frac{1}{2} U''(x) E_x[(N(h) - x)^2] + o(h)$$

e

$$E_x[V(N(h))] = V(x) + O(h).$$

Substituindo em $U(x)$ e utilizando a definição de coeficiente de tendência e de difusão, vem

$$\begin{aligned} U(x) &= E_x[U(N(h))] + hg(x) E_x[V(N(h))] + o(h) \\ &= U(x) + U'(x) E_x[N(h) - x] + \frac{1}{2} U''(x) E_x[(N(h) - x)^2] + hg(x) V(x) + o(h) \\ &= U(x) + \mu(x) h U'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) h U''(x) + hg(x) V(x) + o(h). \end{aligned}$$

Dividindo tudo por h e atendendo a que $o(h)/h \rightarrow 0$, temos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) U''(x) + \mu(x) U'(x) + g(x) V(x) = 0. \quad (3.43)$$

Neste caso, e ao contrário do que foi feito para as outras equações diferenciais, não conseguimos determinar a expressão geral da solução da equação diferencial, ou seja, $U(x)$. Apenas sabemos que $U(x)$ é a solução desta equação diferencial satisfazendo as condições de fronteira [16]. Assim para cada modelo temos que resolver a equação diferencial e determinar a solução geral e com as condições de fronteira obtemos a solução particular, $U(x)$.

Em particular, se $g(x) = 1$,

$$U(x) = E[f(T^*)|N(0) = x] \quad (3.44)$$

é a solução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) + V(x) = 0. \quad (3.45)$$

Se $f(x) = x$, $U(x)$ é o tempo médio, que calculámos anteriormente. Com efeito, neste caso, vem $V(x) = E[1|N(0) = x]$, donde a equação $\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) = -1$ tem como solução o tempo médio. Se $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ temos a transformada de laplace para T^* . E, se fizermos $f(x) = x^n$ temos o n -ésimo momento do tempo de primeira passagem por a ou b . Daqui por diante $g(x) = 1$.

No caso de $f(x) = x^n$, temos $f'(x) = nx^{n-1}$ e

$$U_n(x) = E[(T^*)^n|N(0) = x]$$

é solução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U_n''(x) + \mu(x)U_n'(x) + nU_{n-1}(x) = 0$$

sujeita as condições de fronteira $U_n(a) = U_n(b) = 0$. Assim, para $n = 2$,

$$U_2(x) = E[T^{*2}|N(0) = x], \quad (3.46)$$

o segundo momento do tempo de primeira passagem por a ou b , é a solução da equação diferencial,

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U_2''(x) + \mu(x)U_2'(x) + 2U_1(x) = 0 \quad (3.47)$$

com $U_2(a) = U_2(b) = 0$ e $U_1(x) = E[T^*|N(0) = x]$.

De seguida, apresentamos a solução da equação diferencial (3.47) para cada modelo. A solução geral foi determinada através do *software* Maple 7.

Assim, depois de encontrada a solução geral, a solução particular obtêm-se determinando o valor das constantes de modo que a solução verifique as condições de fronteira.

Depois de determinado a $E[T_a^2|N(0) = x]$ e como já determinámos na secção anterior a $E[T_a|N(0) = x]$, podemos escrever o desvio padrão do tempo de primeira passagem por a para cada um dos modelos.

Começamos com o **modelo de Gompertz de Stratonovich**. A solução geral da equação diferencial (3.47) é dada por

$$E [T^{*2}|N(0) = x] = -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) \left(4 \int_a^y z^{-1} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz - c_1 \sigma^2\right) dy + c_2,$$

com c_1 e c_2 constantes. A solução particular que verifica as condições de fronteira $E [T^{*2}|N(0) = a] = E [T^{*2}|N(0) = b] = 0$ é

$$E [T^{*2}|N(0) = x] = \frac{4}{\sigma^2 \int_a^b y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy} \left(\int_a^x y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy \int_a^b y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) \int_a^y E [T^*|N(0) = z] z^{-1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz dy - \int_a^b y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy \int_a^x y^{-1} \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) \int_a^y E [T^*|N(0) = z] z^{-1} \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz dy \right).$$

Fazendo as mudanças de variável $s = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln\left(\frac{y}{K}\right)$ e, depois, $t = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{K}\right)$, temos

$$E [T^{*2}|N(0) = x] = \frac{4}{r \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} ds \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds - \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds \right),$$

que é equivalente a

$$E [T^{*2}|N(0) = x] = \frac{4}{r \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} ds \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds - \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds \quad (3.48)$$

com $\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K)$, $\gamma = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K)$ e $\beta = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K)$.

Fazendo $b \rightarrow +\infty$, ou seja, $\beta \rightarrow +\infty$, temos a expressão do segundo momento para a população atingir o tamanho a ,

$$E [T_a^2|N(0) = x] = \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} ds \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds} - \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T_a|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt ds.$$

Na primeira parcela temos uma indeterminação do tipo ∞/∞ . Tendo em atenção que no numerador o limite afecta o extremo superior do integral e a função integranda (uma vez que $T^* = \min\{T_a, T_b\}$ e $b \rightarrow +\infty$) e sabendo que $\frac{\partial \int_{\alpha}^{\beta} G(\theta, \beta) d\theta}{\partial \beta} = G(\beta, \beta) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} G(\theta, \beta) d\theta$, o limite anterior dá então, com $G(s, \beta) = e^{s^2} \int_{\alpha}^s E [T^*|N(0) = Ke^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}}t}] e^{-t^2} dt$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} G(s, \beta) ds}{\int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{G(\beta, \beta) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial G(s, \beta)}{\partial \beta} ds}{e^{\beta^2}} \\
&= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} E \left[T^* | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t} \right] e^{-t^2} dt \\
&\quad + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\beta^2}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} \int_{\alpha}^s \frac{\partial E \left[T^* | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t} \right]}{\partial \beta} e^{-t^2} dt ds
\end{aligned}$$

e, usando a expressão (3.16), pode mostrar-se que a segunda parcela é nula. Logo

$$\begin{aligned}
E [T_a^2 | N(0) = x] &= \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} E \left[T_a | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t} \right] e^{-t^2} dt ds \\
&= \frac{8\sqrt{\pi}}{r^2} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \left(1 - \Phi(\sqrt{2}z) \right) e^{z^2} dz e^{-t^2} dt ds.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

A variância é dada por

$$\begin{aligned}
Var(T_a | N(0) = x) &= \frac{8\sqrt{\pi}}{r^2} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \left(1 - \Phi(\sqrt{2}z) \right) e^{z^2} dz e^{-t^2} dt ds \\
&\quad - \frac{4\pi}{r^2} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}t) \right) e^{t^2} dt \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

e o desvio padrão é a sua raiz quadrada positiva.

A solução geral da equação diferencial ordinária (3.47) para o **modelo de Gompertz de Ito** é dada por,

$$\begin{aligned}
E [T^{*2} | N(0) = x] &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x \exp \left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y} \right) \\
&\quad \left(4 \int_a^y z^{-2} E [T^* | N(0) = z] \exp \left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z} \right) dz \right. \\
&\quad \left. - c_1 \sigma^2 \right) dy + c_2,
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes. Com as condições de fronteira $E [T^{*2}|N(0) = a] = 0$ e $E [T^{*2}|N(0) = b] = 0$, obtemos a solução particular procurada

$$\begin{aligned}
 E [T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{\int_a^b \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy} \\
 &\quad \left(\int_a^x \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy \int_a^b \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) \right. \\
 &\quad \int_a^y z^{-2} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz dy \\
 &\quad - \int_a^b \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) dy \int_a^x \exp\left(\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{y}\right) \\
 &\quad \left. \int_a^y z^{-2} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{r}{\sigma^2} \ln^2 \frac{K}{z}\right) dz dy \right).
 \end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $s = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln\left(\frac{y}{K}\right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$ e $t = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln\left(\frac{z}{K}\right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 E [T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{r \int_\alpha^\beta e^{s^2} ds} \left(\int_\alpha^\gamma e^{s^2} ds \right. \\
 &\quad \int_\alpha^\beta e^{s^2} \int_\alpha^s E \left[T^* | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t - \frac{\sigma^2}{2r}} \right] e^{-t^2} dt ds \\
 &\quad \left. - \int_\alpha^\beta e^{s^2} ds \int_\alpha^\gamma e^{s^2} \int_\alpha^s E \left[T^* | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t - \frac{\sigma^2}{2r}} \right] e^{-t^2} dt ds \right),
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

com $\alpha = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(a/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$, $\gamma = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(x/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$ e $\beta = \frac{\sqrt{r}}{\sigma} \ln(b/K) + \frac{\sigma}{2\sqrt{r}}$.

Quando $b \rightarrow +\infty$, $\beta \rightarrow +\infty$ e temos o segundo momento para o tempo de primeira passagem por a

$$\begin{aligned}
E [T_a^2 | N(0) = x] &= \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} ds \\
&\quad \frac{\int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E \left[T^* | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t - \frac{\sigma^2}{2r}} \right] e^{-t^2} dt ds}{\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{s^2} ds} \\
&= \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_{\alpha}^s E \left[T_a | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t - \frac{\sigma^2}{2r}} \right] e^{-t^2} dt ds.
\end{aligned}$$

Resolvendo o limite, da mesma forma que fizemos para o modelo de Gompertz de Stratonovich, temos

$$\begin{aligned}
E [T_a^2 | N(0) = x] &= \frac{4}{r} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} E \left[T_a | N(0) = K e^{\frac{\sigma}{\sqrt{r}} t - \frac{\sigma^2}{2r}} \right] e^{-t^2} dt ds \\
&= \frac{8\sqrt{\pi}}{r^2} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \left(1 - \Phi(\sqrt{2}z) \right) e^{z^2} dz e^{-t^2} dt ds.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Depois de calculados os momentos de primeira e segunda ordem, podemos escrever a variância,

$$\begin{aligned}
Var (T_a^2 | N(0) = x) &= \frac{8\sqrt{\pi}}{r^2} \int_{\alpha}^{\gamma} e^{s^2} \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \left(1 - \Phi(\sqrt{2}z) \right) e^{z^2} dz e^{-t^2} dt ds \\
&\quad - \frac{4\pi}{r^2} \left(\int_{\alpha}^{\gamma} \left(1 - \Phi(\sqrt{2}z) \right) e^{z^2} dz \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

e o desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

Para o **modelo logístico de Stratonovich** a solução geral da equação diferencial (3.47) é dada por

$$\begin{aligned}
E [T^{*2} | N(0) = x] &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp \left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y \right) \\
&\quad \left(4 \int_a^y z^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E [T^* | N(0) = z] \exp \left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z \right) dz \right. \\
&\quad \left. - c_1 \sigma^2 \right) dy + c_2,
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes. As condições de fronteira $E[T^{*2}|N(0) = a] = 0$ e $E[T^{*2}|N(0) = b] = 0$ permitem-nos escrever a solução particular

$$\begin{aligned} E[T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{\int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy} \\ &\left(\int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy \int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \right. \\ &\int_a^y z^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E[T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz dy \\ &- \int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy \int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \\ &\left. \int_a^y z^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E[T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz dy \right). \end{aligned}$$

Fazendo duas mudanças de variável, $s = \frac{2r}{\sigma^2 K} y$ e $t = \frac{2r}{\sigma^2 K} z$, temos

$$\begin{aligned} E[T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \frac{1}{\int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds} \left(\int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds \right. \\ &\int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E\left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t\right] e^{-t} dt ds \\ &- \int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds \\ &\left. \int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E\left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t\right] e^{-t} dt ds \right), \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} E[T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \frac{\int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds}{\int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds} \int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \\ &\int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E\left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t\right] e^{-t} dt ds \\ &- \frac{4}{\sigma^2} \int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E\left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t\right] e^{-t} dt ds, \end{aligned} \tag{3.54}$$

com $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2 K} a$, $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2 K} x$ e $\beta = \frac{2r}{\sigma^2 K} b$.

Quando $b \rightarrow +\infty$ temos o segundo momento do tempo de primeira passagem por a ,

$$\begin{aligned} E [T_a^2 | N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds \\ &\quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_{\alpha}^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E [T^* | N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t] e^{-t} dt ds}{\int_{\alpha}^{\beta} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds} \\ &\quad - \frac{4}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_{\alpha}^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E [T_a | N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t] e^{-t} dt ds. \end{aligned}$$

Como o $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s = +\infty$, o integral $\int_{\alpha}^{+\infty} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s ds$ é divergente, assim como o integral do numerador. Resolvemos o limite utilizando a regra de Cauchy, sabendo que $\frac{\partial \int_{\alpha}^{\beta} G(\theta, \beta) d\theta}{\partial \beta} = G(\beta, \beta) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} G(\theta, \beta) d\theta$ e, depois de alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} E [T_a^2 | N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_s^{+\infty} t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} E [T_a | N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t] e^{-t} dt ds \\ &= \frac{8}{\sigma^4} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-t} dt ds. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, dada por

$$\begin{aligned} Var(T_a^2 | N(0) = x) &= \frac{8}{\sigma^4} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^s \\ &\quad \int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy t^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^{-t} dt ds \\ &\quad - \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2}, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} e^y dy \right)^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para o **modelo logístico de Ito** com $r > \sigma^2/2$ a solução geral da equação diferencial ordinária (3.47) é

$$\begin{aligned}
E [T^{*2}|N(0) = x] &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \\
&\quad \left(4 \int_a^y z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-2} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) \right. \\
&\quad \left. - c_1 \sigma^2\right) dy + c_2
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes. Dadas as condições iniciais, $E [T^{*2}|N(0) = a] = E [T^{*2}|N(0) = b] = 0$, obtemos a solução particular,

$$\begin{aligned}
E [T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2 \int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy} \\
&\quad \left(\int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy \int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \right. \\
&\quad \int_a^y z^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz dy \\
&\quad \left. - \int_a^b y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) dy \int_a^x y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2 K} y\right) \right. \\
&\quad \left. \int_a^y z^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E [T^*|N(0) = z] \exp\left(-\frac{2r}{\sigma^2 K} z\right) dz dy\right).
\end{aligned}$$

Depois de feitas duas mudanças de variável, $s = \frac{2r}{\sigma^2 K} y$ e $t = \frac{2r}{\sigma^2 K} z$, obtemos

$$\begin{aligned}
E [T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2 \int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds} \left(\int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds \right. \\
&\quad \int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s \int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E \left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t \right] e^{-t} dt ds \\
&\quad \left. - \int_\alpha^\beta s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds \right. \\
&\quad \left. \int_\alpha^\gamma s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s \int_\alpha^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E \left[T^*|N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t \right] e^{-t} dt ds \right),
\end{aligned} \tag{3.57}$$

com $\alpha = \frac{2r}{\sigma^2 K} a$, $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2 K} x$ e $\beta = \frac{2r}{\sigma^2 K} b$.

Se $b \rightarrow +\infty$ então $\beta \rightarrow +\infty$ e temos o segundo momento do tempo de primeira passagem por a ,

$$E [T_a^2 | N(0) = x] = \frac{4}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s \int_{\alpha}^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E [T^* | N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t] e^{-t} dt ds}{\int_{\alpha}^{\beta} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds}$$

$$- \frac{4}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s \int_{\alpha}^s t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} E [T_a | N(0) = \frac{\sigma^2 K}{2r} t] e^{-t} dt ds,$$

e, utilizando o mesmo raciocínio que fizemos no cálculo de Stratonovich, temos

$$E [T_a^2 | N(0) = x] = \frac{8}{\sigma^4} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds$$

$$\int_s^{+\infty} \int_{\alpha}^t \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-t} dt.$$

(3.58)

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, esta última dada por

$$Var (T_a^2 | N(0) = x) = \frac{8}{\sigma^4} \int_{\alpha}^{\gamma} s^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^s ds \int_s^{+\infty} \frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^t \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy$$

$$t^{\frac{2r}{\sigma^2}-2} e^{-t} dt - \left(\frac{2}{\sigma^2} \int_{\alpha}^{\gamma} \Gamma \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1, y \right) y^{-\frac{2r}{\sigma^2}} e^y dy \right)^2.$$

(3.59)

Para o **modelo malthusiano de Stratonovich**, a solução da equação diferencial ordinária (3.47), é

$$E[T^{*2} | N(0) = x] = -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x y^{-2r/\sigma^2-1}$$

$$\left(4 \int_a^y z^{2r/\sigma^2-1} E[T^* | N(0) = z] dz - c_1 \sigma^2 \right) dy + c_2$$

com c_1 e c_2 constantes. Dadas as condições iniciais, obtemos a solução particular

$$E[T^{*2}|N(0) = x] = \frac{4}{\sigma^2} \int_a^b y^{-2r/\sigma^2-1} dy \left(\int_a^x y^{-2r/\sigma^2-1} dy \int_a^y z^{2r/\sigma^2-1} E[T^*|N(0) = z] dz dy - \int_a^b y^{-2r/\sigma^2-1} dy \int_a^x y^{-2r/\sigma^2-1} \int_a^y z^{2r/\sigma^2-1} E[T^*|N(0) = z] dz dy \right),$$

equivalente a

$$E[T^{*2}|N(0) = x] = \frac{4}{r\sigma^2 (b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2})} \left((x^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \int_a^b y^{-2r/\sigma^2-1} \int_a^y z^{2r/\sigma^2-1} \left(\frac{z^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}}{b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{z}{a} \right) dz dy - (b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \int_a^x y^{-2r/\sigma^2-1} \int_a^y z^{2r/\sigma^2-1} \left(\frac{z^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}}{b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{z}{a} \right) dz dy \right).$$

Integrando em ordem a z e depois em ordem a y , obtemos

$$E[T^{*2}|N(0) = x] = \frac{2}{r^2 (b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2})^2} \left\{ (x^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \ln \frac{b}{a} \left((b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \left(\frac{\sigma^2}{2r} - \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right) - \left(\ln \frac{b}{a} \right) (b^{-2r/\sigma^2} + a^{-2r/\sigma^2}) \right) - (b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \ln \frac{x}{a} \left((b^{-2r/\sigma^2} - a^{-2r/\sigma^2}) \left(\frac{\sigma^2}{2r} - \frac{1}{2} \ln \frac{x}{a} \right) - \ln \frac{b}{a} (x^{-2r/\sigma^2} + a^{-2r/\sigma^2}) \right) \right\}, \quad (3.60)$$

o segundo momento do tempo de primeira passagem por a ou b .

Utilizando a transformada de Laplace (3.30), obtemos o segundo momento do tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção

$$E[T_a^2 | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \ln \frac{x}{a} \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{\sigma^2}{r}\right) \quad (3.61)$$

para as trajectórias que passam por a . Assim, a variância do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a é, para as trajectórias que passam por a ,

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_a | N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty) &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{a}\right)^{-2r/\sigma^2} \ln \frac{x}{a} \\ &\quad \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{\sigma^2}{r} - \left(\frac{x}{a}\right)^{-2r/\sigma^2} \ln \frac{x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

A solução geral da equação diferencial (3.47) para o **modelo malthusiano de Ito** é

$$\begin{aligned} E[T^{*2} | N(0) = x] &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_a^x y^{-2r/\sigma^2} \\ &\quad \left(4 \int_a^y z^{2r/\sigma^2-2} E[T^* | N(0) = z] dz - c_1 \sigma^2\right) dy + c_2 \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes. A solução que verifica as condições de fronteira $E[T^{*2} | N(0) = a] = E[T^{*2} | N(0) = b] = 0$ é a seguinte

$$\begin{aligned} E[T^{*2} | N(0) = x] &= \frac{4}{\sigma^2 \int_a^b y^{-2r/\sigma^2} dy} \\ &\quad \left(\int_a^x y^{-2r/\sigma^2} dy \int_a^b y^{-2r/\sigma^2} \int_a^y z^{2r/\sigma^2-2} E[T^* | N(0) = z] dz dy \right. \\ &\quad \left. - \int_a^b y^{-2r/\sigma^2} dy \int_a^x y^{-2r/\sigma^2} \int_a^y z^{2r/\sigma^2-2} E[T^* | N(0) = z] dz dy \right). \end{aligned}$$

Integrando em ordem a z e depois em ordem a y , vem

$$\begin{aligned}
E[T^{*2}|N(0) = x] &= \frac{2}{(r - \sigma^2/2)^2 (b^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1})^2} \left\{ \left(x^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \right. \\
&\quad \ln \frac{b}{a} \left(\left(b^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \left(\frac{1}{2r/\sigma^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(b^{-2r/\sigma^2+1} + a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(b^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \ln \frac{x}{a} \left(\left(b^{-2r/\sigma^2+1} - a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{1}{2r/\sigma^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{x}{a} \right) - \ln \frac{b}{a} \left(x^{-2r/\sigma^2+1} + a^{-2r/\sigma^2+1} \right) \right) \right\}, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

o segundo momento do tempo de primeira passagem por a ou b para o modelo malthusiano de Ito.

Para escrever o segundo momento do tempo de primeira passagem por um limiar constante a para as trajetórias que passam por a , utilizamos a transformada de Laplace (3.36), sendo

$$E[T_a^2|N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty] = \frac{1}{(r - \sigma^2/2)^2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \ln \frac{x}{a} \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{\sigma^2}{r - \sigma^2/2} \right). \tag{3.64}$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, esta última dada por

$$\begin{aligned}
Var(T_a|N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty) &= \frac{1}{(r - \sigma^2/2)^2} \left(\frac{x}{a} \right)^{-2r/\sigma^2+1} \ln \frac{x}{a} \\
&\quad \left(\ln \frac{x}{a} + \frac{\sigma^2}{r - \sigma^2/2} - \left(\frac{x}{a} \right)^{-2r/\sigma^2+1} \ln \frac{x}{a} \right). \tag{3.65}
\end{aligned}$$

3.3 Alguns Exemplos

Ilustramos os resultados obtidos anteriormente, através de representação gráfica. Para reduzir o número de parâmetros em análise, vamos considerar

$$R = \frac{r}{\sigma^2}, d = \frac{a}{K} \text{ e } z = \frac{x}{a}.$$

No eixo da abcissa considerámos a variável z . Relembramos que $a < x$, logo $z < 1$. A ordenada representa $rE[T_a|N(0) = x]$. O que significa que, conhecido o instante inicial x e querendo calcular a $E[T_a|X(0) = x]$, determinamos a abcissa z ; a imagem de z dividida por r (taxa de crescimento) dá-nos o valor esperado do tempo de primeira passagem por a (do tempo de extinção).

Restringimos o nosso estudo a $R = 1$ e $R = 10$, o que significa que $\sigma^2 = r$ ou $\sigma^2 = r/10$, ou seja, a intensidade do ruído é forte ou fraca. Quanto a d , fizemos $d = 0.01$, $d = 0.1$ e $d = 1$, ou seja, $a = \frac{1}{100}K$, $a = \frac{1}{10}K$ e $a = K$; este último valor não é muito realista se considerarmos que a é o limiar de extinção da população, pois estamos a dizer que esse limiar é exactamente igual à capacidade de sustento do meio.

Dada a complexidade das expressões e a limitação computacional, achámos que seria suficiente considerar z a variar entre 1 e 10.

Começamos com o modelo malthusiano, já estudado por vários autores. Claro que estamos aqui a falar do tempo médio de extinção das trajectórias em que há extinção (recorde-se que a probabilidade de uma trajectória não passar pelo limiar de extinção a é positiva). Neste caso, não faz sentido falar no parâmetro d , uma vez que, não temos o parâmetro K . Assim, para $R = 1$ e $R = 10$, o tempo médio de extinção é superior quando x está próximo de a . De facto, é interessante que neste caso quando a diferença entre o tamanho da população no instante inicial e o limiar de extinção é significativa, $rE[T_a|N(0) = x \text{ e } T_a < +\infty]$ é nula, ao contrário do que seria de esperar (que o tempo médio aumentasse à medida que x se afasta de a). A intensidade do ruído fraco, comparativamente com a intensidade do ruído forte, tem tempo médio de extinção inferior. Em relação ao cálculo utilizado, quando usamos o cálculo de Stratonovich o tempo médio de extinção é inferior. Estes resultados, além de contraditórios, parecem em contradição com os que vamos obter adiante para o modelo de Gompertz e logístico. A razão é que estamos a falar do tempo médio de extinção apenas das trajectórias que se extinguem. Ora, quanto mais difícil for a extinção, menor será a percentagem de trajectórias que se extinguem e, mais ainda, só se extinguem

aquelas que se extinguem depressa (as outras têm mais tempo de escapar na direcção $+\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$). Essa a razão de os tempos médios de extinção serem baixos quando as condições não favorecem a extinção.

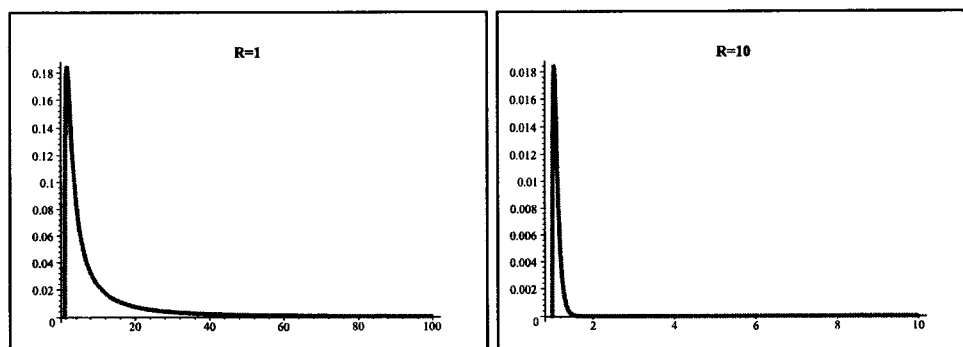


Fig. 3.2: Tempo médio de extinção para as trajectórias em que há extinção para uma população descrita pelo **modelo malthusiano de Stratonovich** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

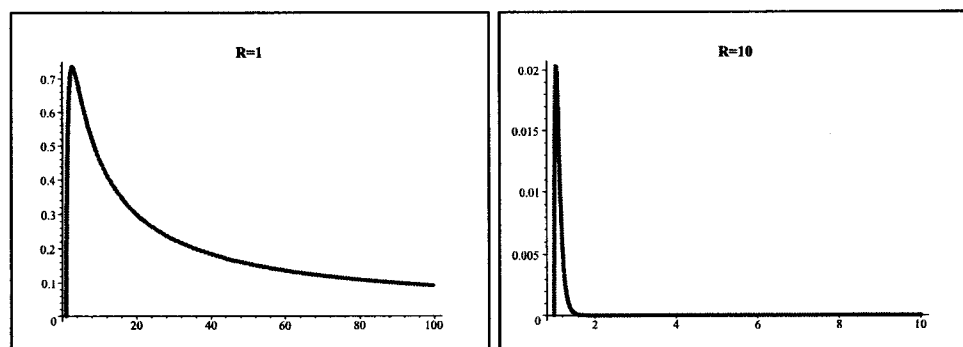


Fig. 3.3: Tempo médio de extinção para as trajectórias em que há extinção para uma população descrita pelo **modelo malthusiano de Ito** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

De seguida apresentamos os gráficos para os dois modelos, modelo de Gompertz e modelo logístico, utilizando em ambos o cálculo de Stratonovich e Ito.

Não podemos esquecer que os gráficos apresentados não representam o tempo de primeira passagem por a , mas sim $rE[T_a|X(0) = x]$. Assim, quaisquer comparações entre os dois modelos não podem ser rigorosas, uma vez que a taxa de crescimento não é a mesma para o modelo de Gompertz e o modelo logístico. No modelo logístico o r é o valor da taxa de crescimento per capita quando $N=0$, enquanto que, no modelo de Gompertz o $N = 0$ não faz sentido, e r é o valor da taxa de crescimento per capita quando $N = \frac{K}{e}$.

Como seria de esperar, à medida que z aumenta, ou seja, quanto maior for a população no instante inicial, maior será o tempo médio de extinção (entendendo extinção como o tempo de primeira passagem por a).

À medida que o d aumenta, o que significa que a está mais próximo de K (capacidade de sustento do meio), o tempo médio para a população atingir a diminui.

Para quaisquer parâmetros, a partir de um determinada altura, ou seja, de um determinado z , o tempo médio de extinção quase estabiliza.

O tempo médio para atingir a dado o instante inicial igual a x , é menor se utilizarmos o cálculo de Ito ao invés do cálculo de Stratonovich.

Uma população com taxa de crescimento relativa igual a 1 leva menos tempo a atingir a do que uma população com taxa de crescimento relativa igual a 10, independente do modelo e cálculo utilizado. Assim, sendo a o limiar de extinção, podemos dizer que, quanto maior for a intensidade das flutuações aleatórias σ , mais rapidamente se extingue a população, como seria de esperar.

Por último, talvez seja interessante escrever a relação entre o modelo de Gompertz utilizando o cálculo de Stratonovich e o cálculo de Ito. Assim:

$$F_{Ito}(R, d, z) = F_{Str}(R, de^{\frac{1}{2R}}, z)$$

com $F_{Str}(R, d, z) = rE[T_a|X(0) = x] = 2\sqrt{\pi} \int_{\frac{\sqrt{R} \ln d}{\sqrt{R} \ln d}}^{\sqrt{R} \ln(dz)} (1 - \Phi(\sqrt{2}y)) e^{y^2} dy$.

No modelo logístico a diferença entre os cálculos utilizados, reside na função integranda, os extremos são os mesmos para o cálculo de Stratonovich e para o cálculo de Ito.

Não devemos falar de tempo médio sem analisar o desvio padrão, uma vez que esta medida de localização deve ser acompanhada com a respectiva medida de dispersão. De seguida apresentamos os gráficos do desvio padrão,

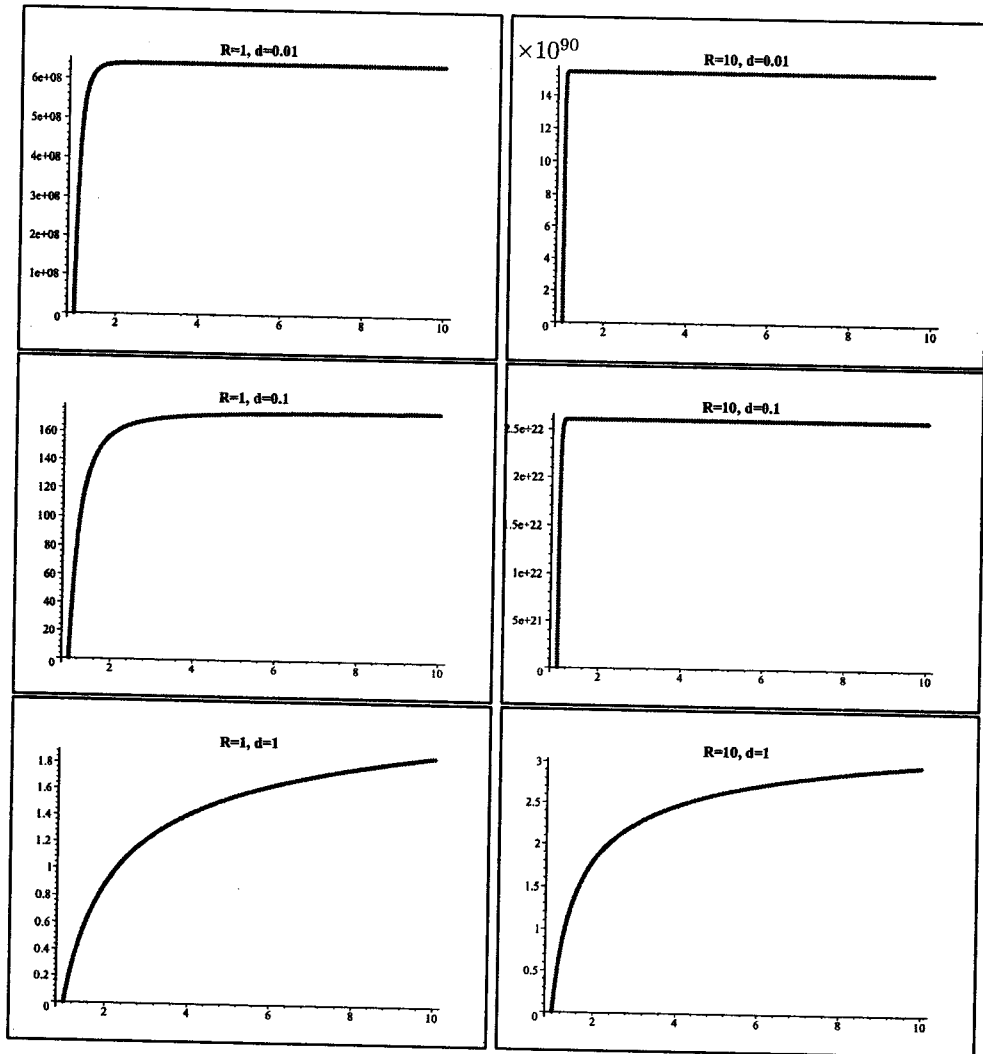


Fig. 3.4: Tempo médio de extinção para uma população descrita pelo **modelo de Gompertz de Stratonovich** com a abscissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abscissa 1.

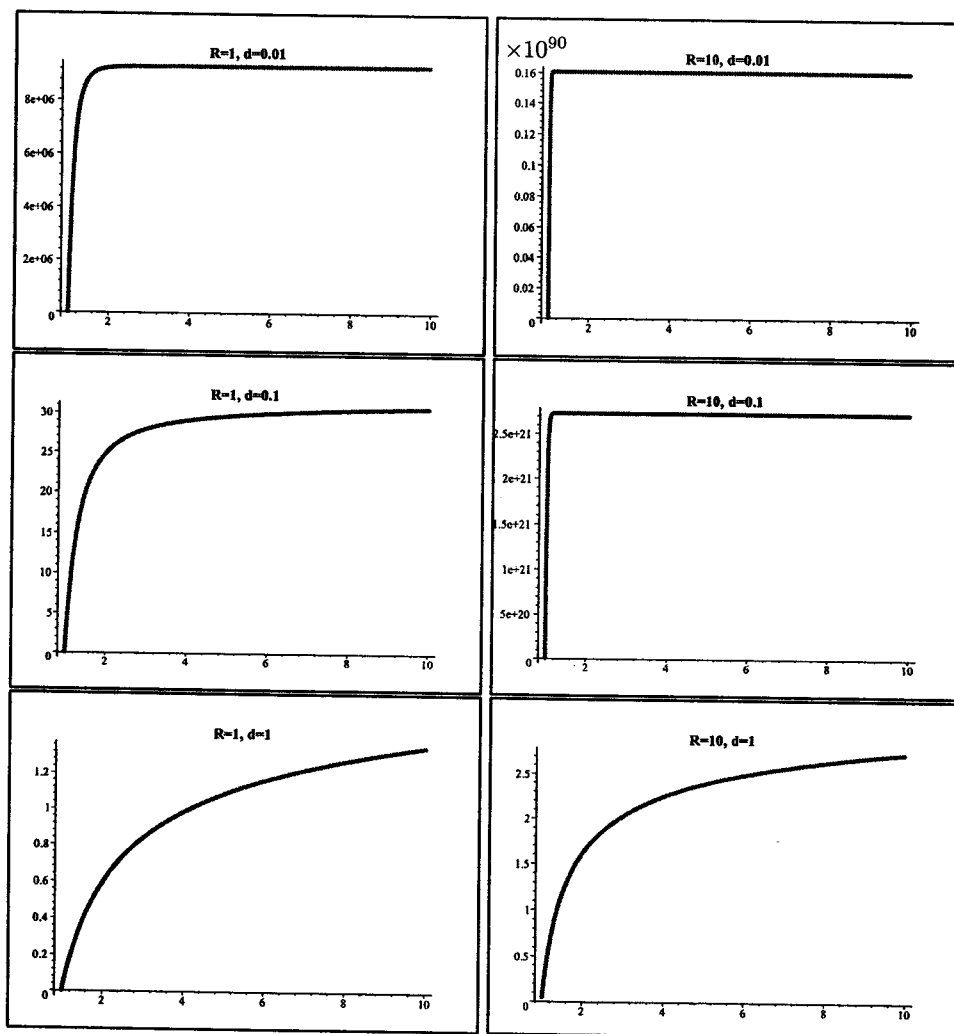


Fig. 3.5: Tempo médio de extinção para uma população descrita pelo **modelo de Gompertz de Ito** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

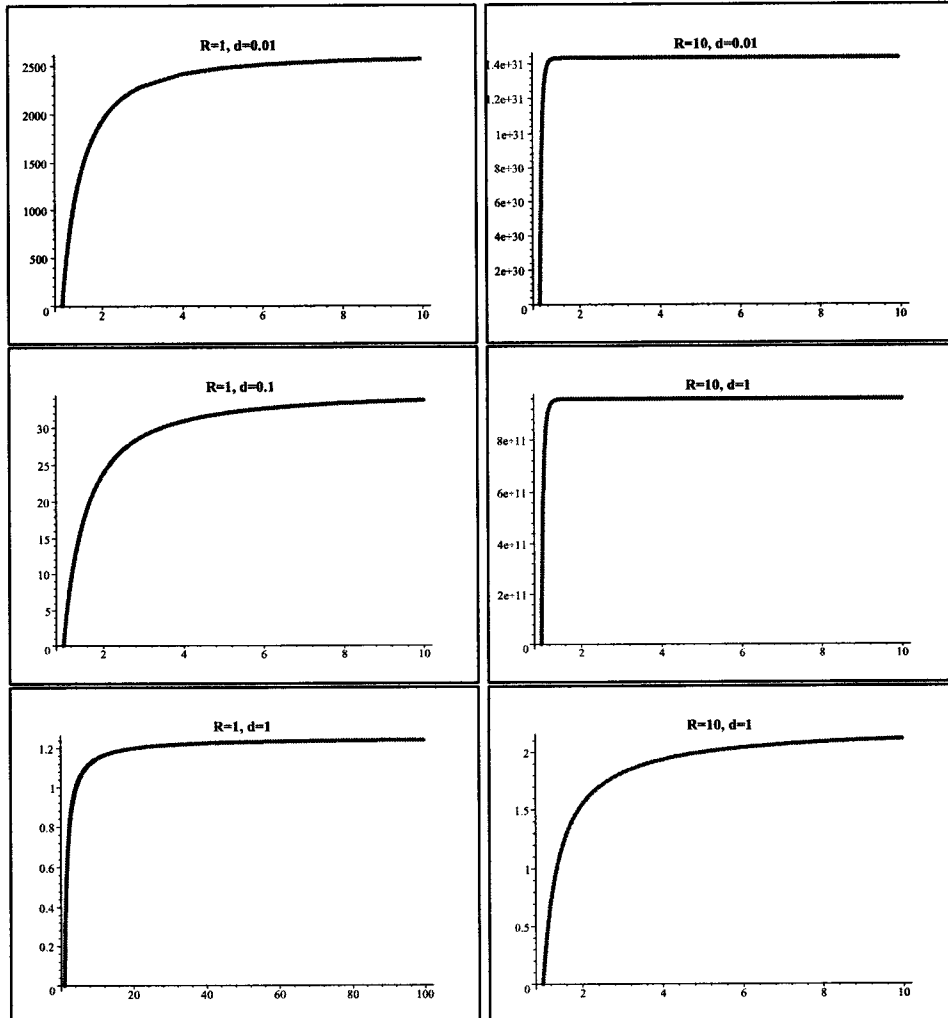


Fig. 3.6: Tempo médio de extinção para uma população descrita pelo **modelo logístico de Stratonovich** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a | X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

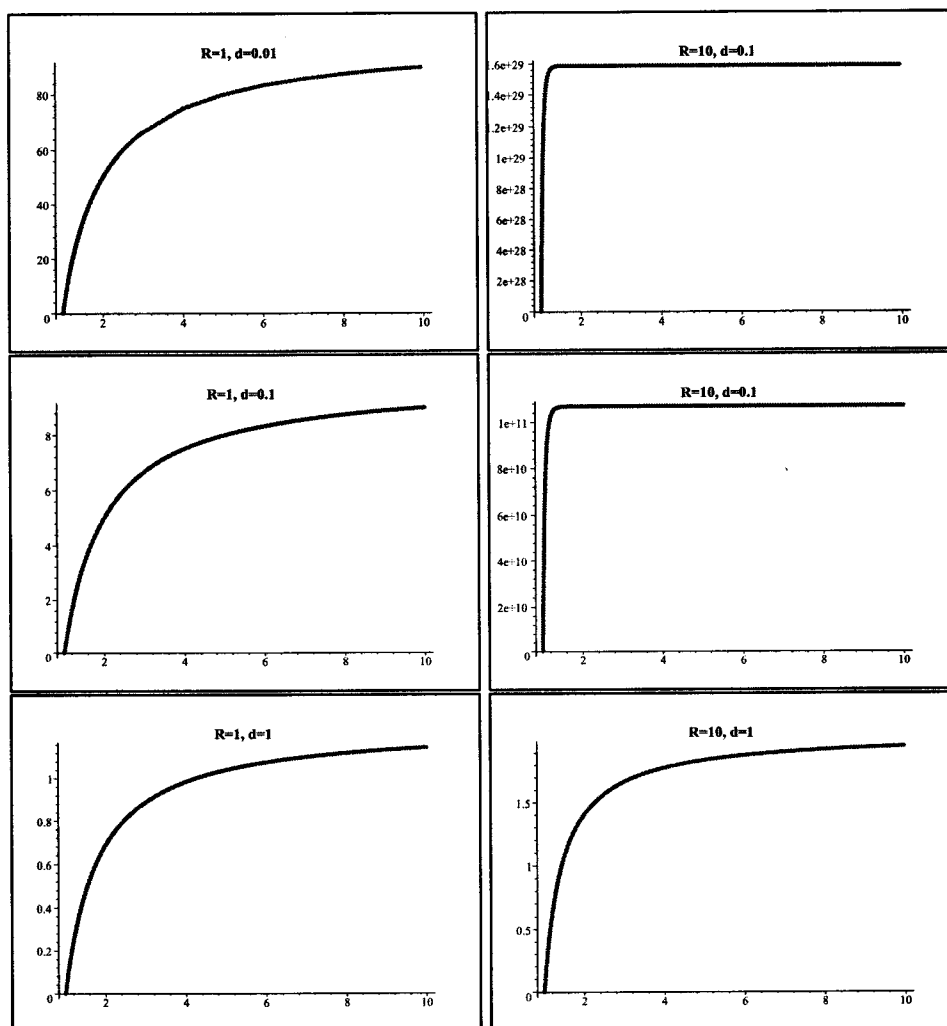


Fig. 3.7: Tempo médio de extinção para uma população descrita pelo **modelo logístico de Ito** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rE[T_a | X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

multiplicado por r , para poder fazer comparações. É óbvio que quando $z = 1$ o desvio padrão é igual a zero, e vai aumentando à medida que o z aumenta, ou seja, à medida que a se afasta do tamanho da população no instante inicial.

Nos exemplos estudados, o desvio padrão tem a mesma ordem de grandeza do tempo médio, donde podemos concluir que existe uma grande variabilidade do tempo médio de extinção.

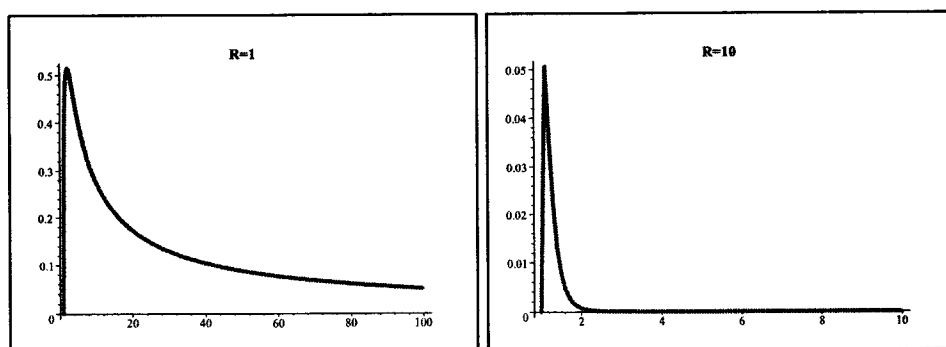


Fig. 3.8: Desvio padrão do tempo de extinção para as trajectórias em que há extinção para o **modelo malthusiano de Stratonovich** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

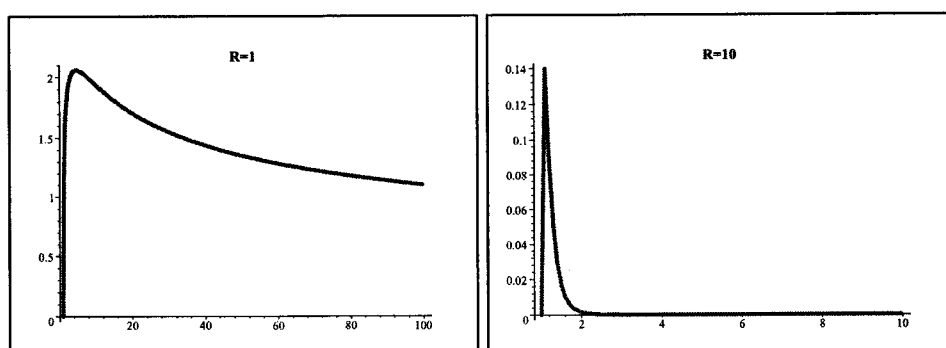


Fig. 3.9: Desvio padrão do tempo de extinção para as trajectórias em que há extinção para o **modelo malthusiano de Ito** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

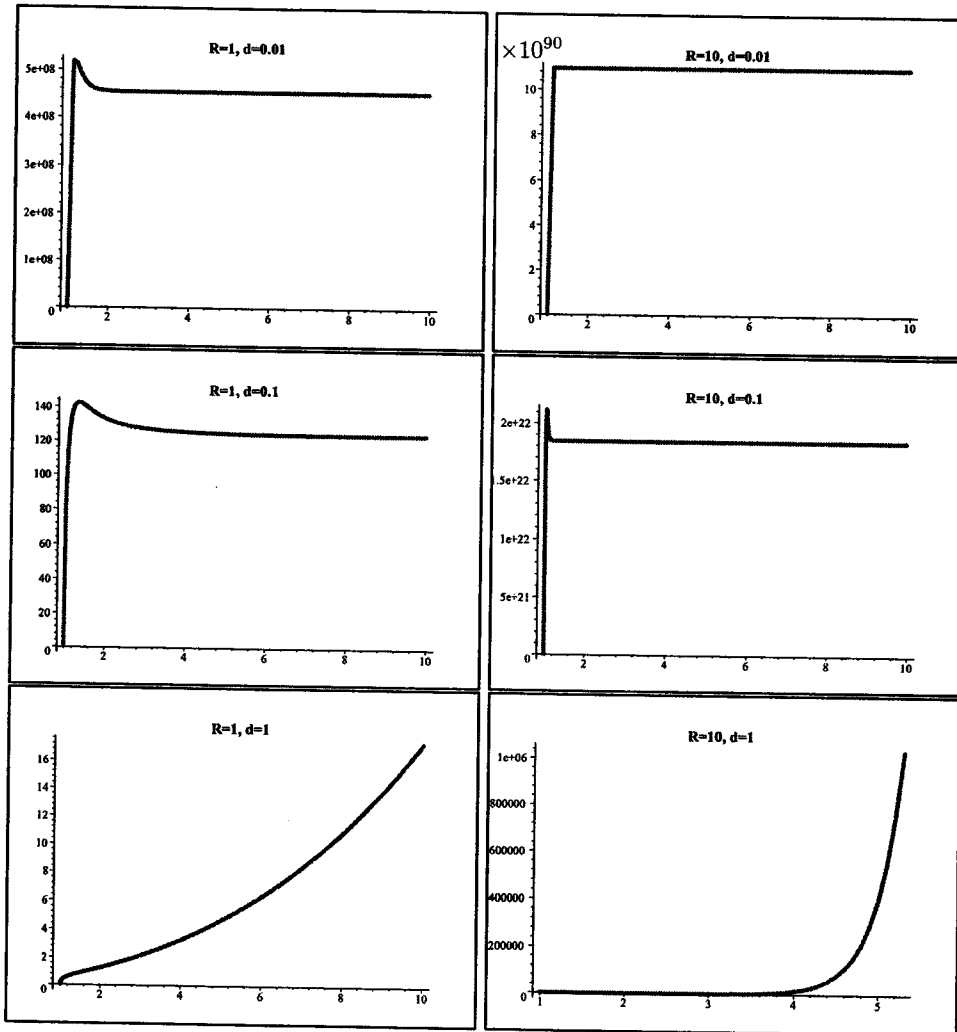


Fig. 3.10: Desvio padrão do tempo de extinção para o modelo de Gompertz de Stratonovich com a abscissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abscissa 1. Quando $R = 10$ e $d = 1$ só foi possível calcular até à abscissa 5 por limitações computacionais.

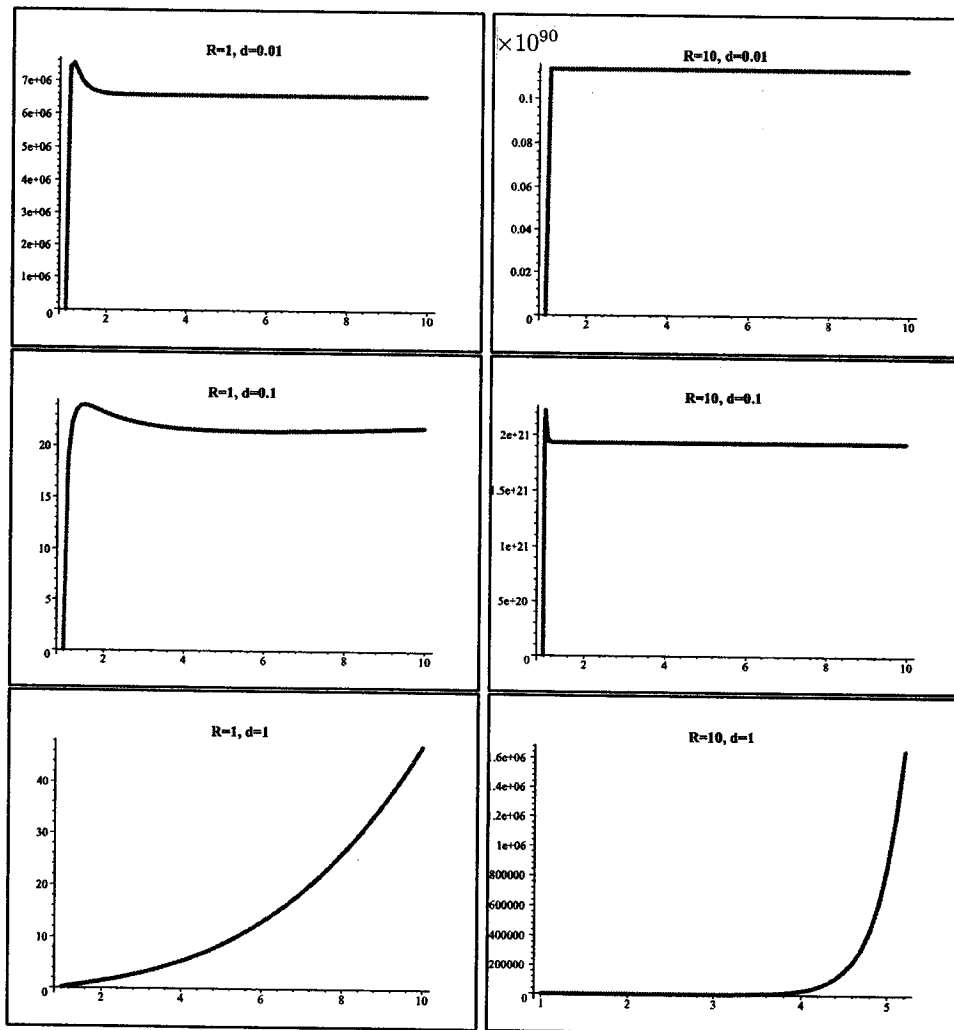


Fig. 3.11: Desvio padrão do tempo de extinção para o modelo de Gompertz de Ito com a abscissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abscissa 1. Quando $R = 10$ e $d = 1$ só foi possível calcular até à abscissa 5 por limitações computacionais.

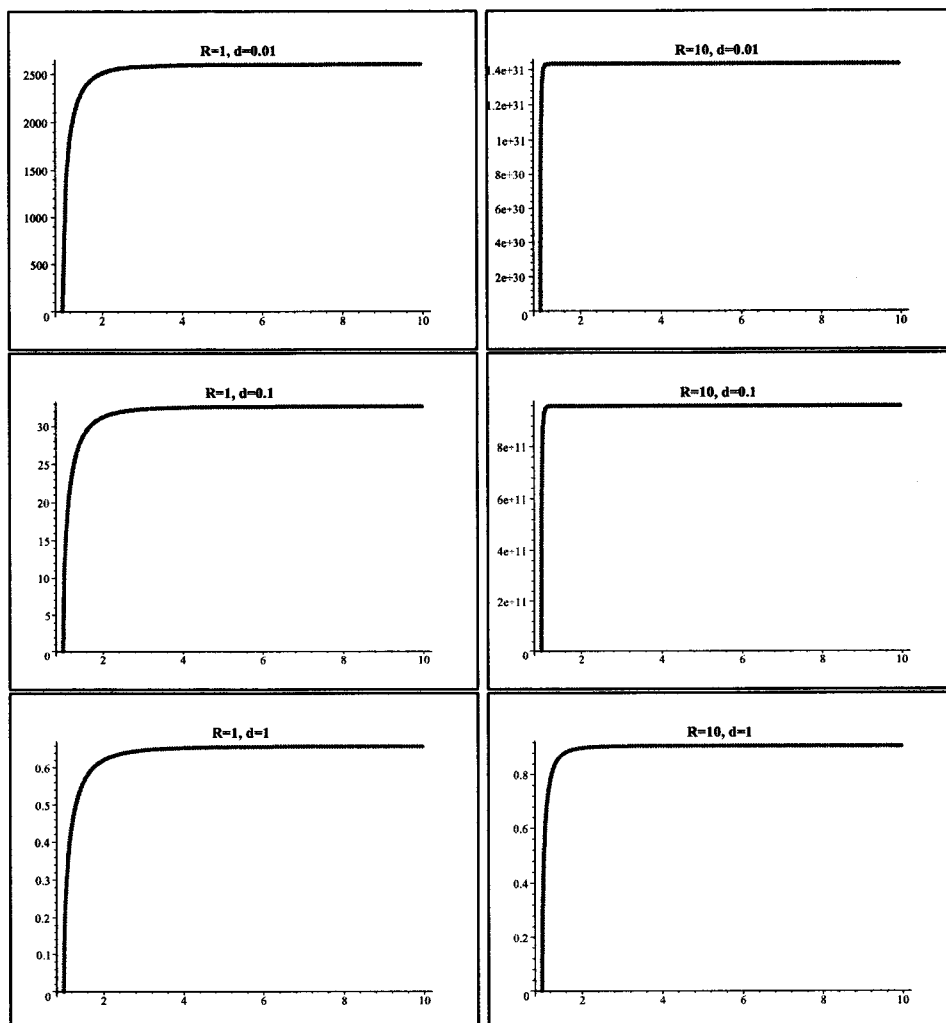


Fig. 3.12: Desvio padrão do tempo de extinção para o **modelo logístico de Stratonovich** com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

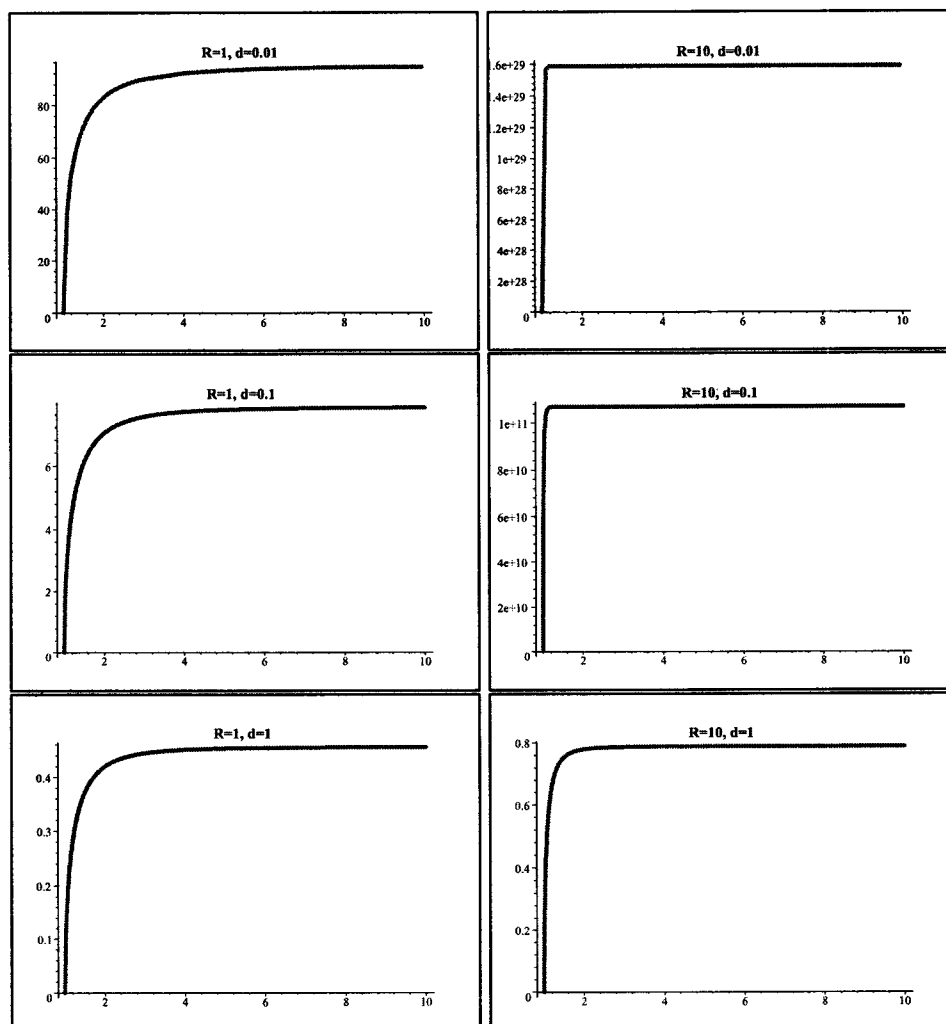


Fig. 3.13: Desvio padrão do tempo de extinção para o modelo logístico de Ito com a abcissa $z = x/a$ e ordenada $rDP[T_a|X(0) = x]$. A curva foi discretizada em intervalos 0.01 e 0.1, consoante a necessidade e por limitações computacionais. As curvas cruzam o eixo dos xx no ponto de abcissa 1.

3.4 Função Densidade de Probabilidade

A distribuição do tempo de primeira passagem associado a um processo estocástico tem importantes aplicações nas mais diversas áreas. Exemplos disso estão problemas relacionados com a Física, Astronomia e Engenharias. A probabilidade do tempo de primeira passagem associada à velocidade de uma partícula livre do movimento Brownian é um dos muitos exemplos. Chandrasekhar estimou a taxa de fuga dos "clusters" de estrelas através das probabilidades do tempo de primeira passagem das velocidades iniciais. Em aplicações de Engenharia, a probabilidade do tempo de primeira passagem está intimamente relacionada com o problema de falha de sistemas ou estruturas, quando a falha é devido às primeiras grandes excursões excedendo um determinado nível.

Vimos na secção 3.2 que a solução da equação diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U_\lambda''(x) + \mu(x)U_\lambda'(x) - \lambda U_\lambda(x) = 0 \quad (3.66)$$

com $a < x < b$ e $U_\lambda(a) = U_\lambda(b) = 1$, é

$$U_\lambda(x) = E[e^{-\lambda T^*} | N(0) = x]. \quad (3.67)$$

Ao contrário do que aconteceu até aqui, não foi possível resolver analiticamente a equação diferencial ordinária para os modelos em análise. Se fosse possível, a solução da equação diferencial ordinária era a conhecida transformada de Laplace de T^* e poderíamos obter os momentos de ordem n (em particular, a média e a variância), bem como a função densidade de probabilidade de T^* .

Assim, para determinar a função densidade de probabilidade, resolvemos a equação diferencial por métodos numéricos, utilizando o método das diferenças finitas para obter não a solução exacta mas uma solução aproximada.

Definição 3.1. *Seja $f(t)$ uma função de variável real (geralmente o tempo), definida apenas para $t \geq 0$. A transformada de Laplace de $f(t)$ é uma função complexa U_λ com $\lambda = \sigma + wi$ definida por*

$$U_\lambda = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (3.68)$$

Existe geralmente um número real σ_0 ($|\sigma_0| \leq \infty$) tal que

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\sigma t) |f(t)| dt \quad (3.69)$$

existe para $\sigma > \sigma_0$ e não existe para $\sigma < \sigma_0$. O parâmetro σ_0 chama-se abcissa de convergência absoluta de U_λ .

A transformada de Laplace tem inversa única definida por

$$f(t) = L^{-1}\{U_\lambda\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U_\lambda e^{\lambda t} d\lambda. \quad (3.70)$$

com $\sigma < \sigma_0$.

Consideramos agora o caso de $f(t)$ ser uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória T . Para $\sigma_0 = 0$, o integral (3.69) é o integral da função densidade, convergente e igual a 1. Logo, para $\sigma = 1$, a transformada de Laplace tem inversa única definida por

$$f_T(t) = L^{-1}\{U_\lambda\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} U_\lambda e^{\lambda t} d\lambda. \quad (3.71)$$

Uma vez que não conseguimos determinar a solução ($U_\lambda(x)$) da equação diferencial (3.66), o método das diferenças finitas consiste em calcular um valor aproximado para os valores nodais. Fazendo uma partição do intervalo $[a, b]$, em $a = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1} = b$, determinamos o valor aproximado da função nos respectivos pontos, $U_\lambda(a) = U_\lambda(x_0), U_\lambda(x_1), \dots, U_\lambda(x_i), \dots, U_\lambda(x_{n+1}) = U_\lambda(b)$. Note que, $U_\lambda(a)$ e $U_\lambda(b)$ são conhecidos.

A ideia é substituir as derivadas que intervêm na equação diferencial por diferenças finitas. Consideramos sobre o intervalo $[a, b]$ uma malha e designamos a solução aproximada por \tilde{U}_λ e $U_{\lambda,i} = \tilde{U}_\lambda(x_i)$ os respectivos valores nodais com $i = 1, \dots, n$. Se aproximarmos U_λ'' por diferenças centrais, temos que,

$$U_\lambda''(x_i) \cong \frac{U_{\lambda,i+1} - 2U_{\lambda,i} + U_{\lambda,i-1}}{\Delta^2}$$

e a primeira derivada centrada é

$$U_\lambda'(x_i) \cong \frac{U_{\lambda,i+1} - U_{\lambda,i-1}}{2\Delta}.$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos a expressão para cada nó interior da malha

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x_i)\frac{U_{\lambda,i+1} - 2U_{\lambda,i} + U_{\lambda,i-1}}{\Delta^2} + \mu(x_i)\frac{U_{\lambda,i+1} - U_{\lambda,i-1}}{2\Delta} - \lambda U_{\lambda,i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

com as condições de fronteira

$$U_{\lambda,0} = U_{\lambda}(a) = U_{\lambda,n+1} = U_{\lambda}(b) = 1.$$

Repare que, temos um sistema de $n + 2$ equações, com $n + 2$ incógnitas que podemos escrever na forma matricial. Assim, ficamos com um sistema de equações algébricas $AU = B$ em que A é uma matriz quadrada, com elementos a_{ij} (onde i é o número da linha e j o número da coluna),

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma^2(x_i)}{2\Delta^2} - \frac{\mu(x_i)}{2\Delta} & \text{se } j = i - 1 \\ -\frac{\sigma^2(x_i)}{\Delta^2} - \lambda, & \text{se } j = i \\ \frac{\sigma^2(x_i)}{2\Delta^2} + \frac{\mu(x_i)}{2\Delta} & \text{se } j = i + 1 \\ 0 & \text{se } |j - i| > 1 \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n$,

$$a_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{se } j \neq 0 \end{cases}$$

e

$$a_{n+1,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = n + 1 \\ 0 & \text{se } j \neq n + 1, \end{cases}$$

$B = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ é um vector $1 \times n + 2$ e

$$U = [U_{\lambda,0} \ U_{\lambda,1} \ \dots \ U_{\lambda,n} \ U_{\lambda,n+1}]^T.$$

É um sistema com matriz tridiagonal simétrica de diagonal estritamente dominante por linhas, logo invertível, ficando garantida a existência e unicidade de solução (ver Pina [20]).

Como fizemos até aqui, pondo $b \rightarrow +\infty$, as condições de fronteira são diferentes, $U(a) = 1$ e $U(+\infty) = 0$, e a solução da equação diferencial não é a transformada de Laplace do tempo de primeira passagem por a ou b mas a transformada de Laplace para o tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a . Note que neste caso $B = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$. Assim, determinada a transformada de Laplace conseguimos mediante certas condições, encontrar a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a .

Para podermos comparar com o que foi feito anteriormente para o tempo médio e o desvio padrão, não vamos determinar $f_{T_a}(t)$ mas sim a função densidade de probabilidade de $\bar{T}_a = rT_a$ que designamos por $f_{\bar{T}_a}(\bar{t})$. Assim,

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U_\lambda''(x) + \mu(x)U_\lambda'(x) - \lambda rU_\lambda(x) = 0 \quad (3.72)$$

com $a < x < +\infty$, $U_\lambda(a) = 1$ e $U_\lambda(+\infty) = 0$, tem como solução,

$$U_\lambda(x) = E[e^{-\lambda\bar{T}_a} | N(0) = x]. \quad (3.73)$$

Fazendo $y = \frac{x}{a}$, a equação diferencial estocástica sofre ligeiras alterações, em particular no que diz respeito ao coeficiente de tendência e coeficiente de difusão e a equação diferencial ordinária é equivalente a

$$\frac{1}{2}\sigma^2(y)U_\lambda''(y) + \mu(y)U_\lambda'(y) - \lambda rU_\lambda(y) = 0 \quad (3.74)$$

com $1 < y < +\infty$, $U_\lambda(1) = 1$ e $U_\lambda(+\infty) = 0$ e, tem solução

$$U_\lambda(y) = E[e^{-\lambda\bar{T}_a} | Y(0) = \frac{x}{a}]. \quad (3.75)$$

Para diminuir o comprimento do intervalo vamos fazer a seguinte mudança de variável, $z = 1 - e^{1-y}$, o que significa que $y = 1 - \ln(1-z) = \gamma^{-1}(z)$. Assim $U_\lambda(y) = \bar{U}_\lambda(z)$, $U_\lambda'(y) = \bar{U}'_\lambda(z)(1-z)$ e $U_\lambda''(y) = \bar{U}''_\lambda(z)(1-z)^2 - \bar{U}'_\lambda(z)(1-z)$. A equação diferencial toma a forma

$$\frac{\sigma^2}{2}(\gamma^{-1}(z))(1-z)^2\bar{U}''_\lambda(z) + \left(\mu(\gamma^{-1}(z)) - \frac{\sigma^2}{2}(\gamma^{-1}(z)) \right) (1-z)\bar{U}'_\lambda(z) - \lambda r\bar{U}_\lambda(z) = 0$$

com $0 < z < 1$, $\bar{U}(0) = 1$ e $\bar{U}(1) = 0$.

Começamos por discretizar o intervalo $[0, 1]$ em subintervalos de comprimento $\Delta = \frac{1}{1000}$, onde $z_i = i\Delta = \frac{i}{1000}$ e $\bar{U}_\lambda(z_i) = U_{\lambda,i}$. A equação diferencial para cada nó da malha é dada pela seguinte expressão

$$\left(\frac{g(z_i)}{\Delta^2} + \frac{h(z_i)}{2\Delta} \right) \bar{U}_{\lambda,i+1} + \left(-\frac{2g(z_i)}{\Delta^2} - \lambda r \right) \bar{U}_{\lambda,i} + \left(\frac{g(z_i)}{\Delta^2} - \frac{h(z_i)}{2\Delta} \right) \bar{U}_{\lambda,i-1} = 0,$$

onde

$$g(z_i) = \frac{\sigma^2(\gamma^{-1}(z_i))}{2}(1-z_i)^2$$

e

$$h(z_i) = \left(\mu(\gamma^{-1}(z_i)) - \frac{1}{2}\sigma^2(\gamma^{-1}(z_i)) \right) (1 - z_i),$$

com $\bar{U}_{\lambda,0} = 1$ e $\bar{U}_{\lambda,1} = 0$.

Para cada modelo, vamos resolver o sistema matricial (e obter \bar{U}_λ para a malha dos z_i) para cada λ . Fixando agora z_i , podemos considerar os $\bar{U}_{\lambda,i}$ para os vários λ 's e inverter numericamente a transformada de Laplace.

Assim, para cada z , ou seja, para cada instante inicial x , temos a inversa da transformada de Laplace e conseqüentemente a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem por a .

Põe-se então a seguinte questão: Que valores escolhemos para λ 's? Como não é conhecida a função densidade do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a para os modelos de Gompertz e logístico, resolvemos utilizar o modelo malthusiano, onde esta é conhecida, como modelo de referência, onde esta é conhecida. Assim, para o modelo malthusiano de Stratonovich encontramos a função densidade de probabilidade aproximada e podemos comparar com a exacta. A aproximação não foi tão boa quanto o desejável mas, dadas as limitações de *software*, pareceu-nos razoável, pelo menos por agora.

Atendendo a (3.29), o modelo malthusiano de Stratonovich, fazendo $\bar{t} = rt$, tem a seguinte função densidade de \bar{T}_a ,

$$f_{\bar{T}_a}(\bar{t}) = \frac{1}{r} f_T(\bar{t}/r) = \frac{|\ln \frac{a}{N(0)}|}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{r} \bar{t}^3}} \exp \left(-\frac{\left(\ln \frac{a}{N(0)} - \bar{t} \right)^2}{2 \frac{\sigma^2}{r} \bar{t}} \right).$$

De seguida, ilustramos graficamente para $\frac{x}{a} = 1,1$ e $\frac{x}{a} = 5$ a função densidade de probabilidade exacta e a aproximada.

Considerando aceitável a aproximação, não tão boa quanto o desejado mas, dadas as limitações computacionais e temporais achámos que seria razoável sabendo que podemos e devemos em trabalhos futuros melhorar tais aproximações. E, não sendo conhecido para os modelos aqui estudados (modelo de Gompertz e modelo logístico) a função densidade de probabilidade, não podemos comparar os resultados e saber se cometemos um erro inaceitável ao utilizar este método numérico. No entanto, é de presumir que este erro será tão aceitável como era no caso do movimento browniano geométrico.

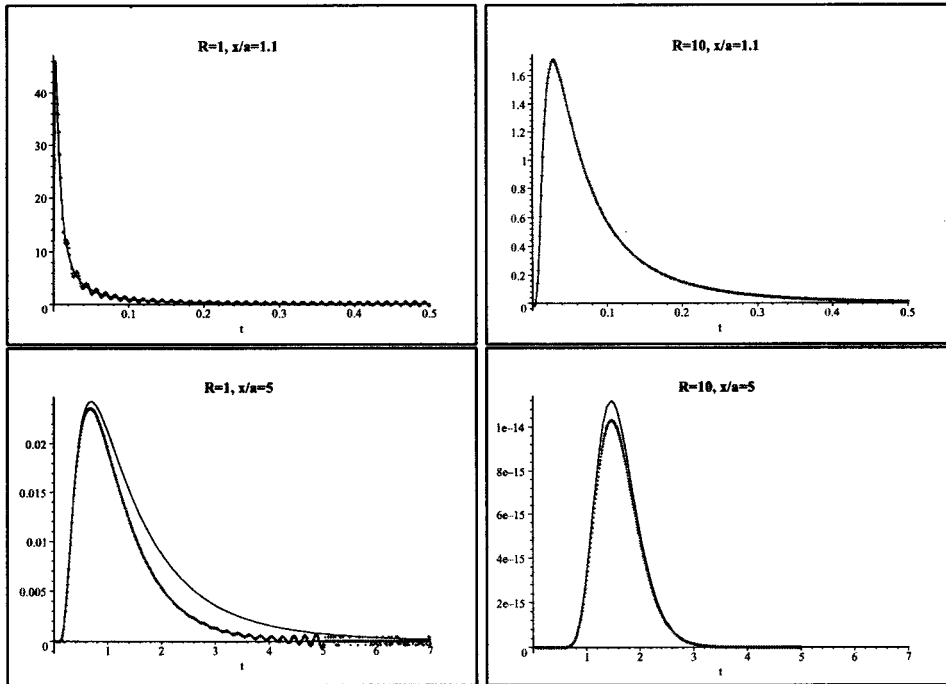


Fig. 3.14: Função densidade de probabilidade aproximada e exacta do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a para o movimento **Browniano geométrico** utilizando o cálculo de Stratonovich. Aqui $N(0) = x$, a abscissa é $\tilde{t} = rt$ e a ordenada é $f_{\tilde{T}_a}(\tilde{t})$ com $\tilde{T}_a = rT_a$.

Apresentamos os gráficos para o modelo de Gompertz e logístico utilizando o cálculo de Ito e escolhemos $d = 0.1$. Para $R = 1$ e $R = 10$ calculámos a função densidade de \tilde{T}_a para $x/a = 1.1$ e $x/a = 5$.

Os gráficos têm todos caudas longas e a área concentra-se nos primeiros instantes. Como era de esperar, quanto mais próximo está o tamanho da população no instante inicial do limiar de extinção maior é a probabilidade de extinção. Em relação ao ruído forte ou fraco, quando $R = 10$ a função densidade é mais achatada. Quando $x/a = 5$, comparativamente com $x/a = 1.1$ a probabilidade da população se extinguir num espaço de tempo maior é superior.

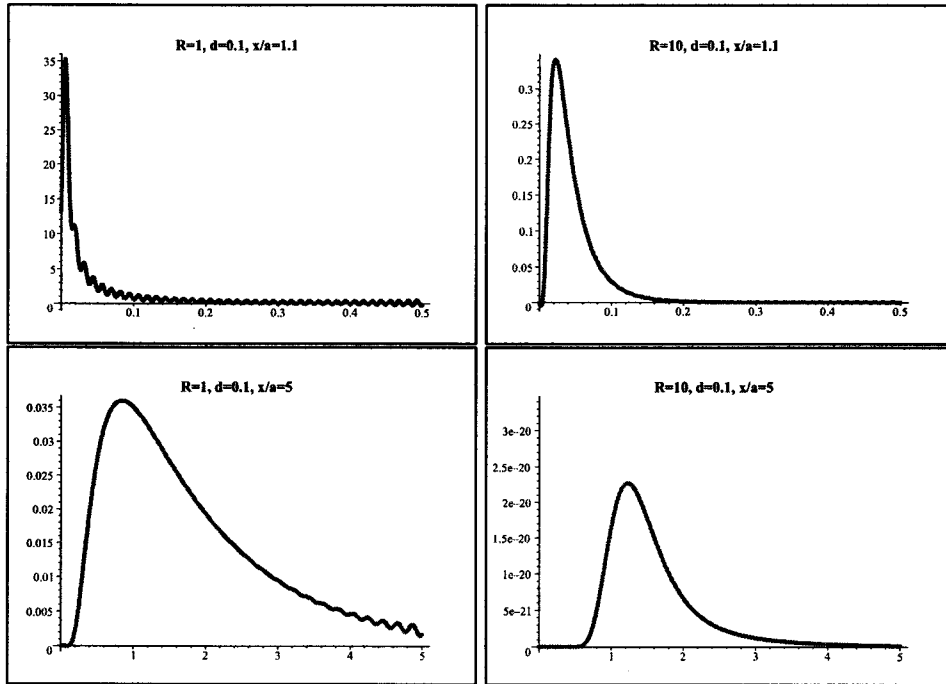


Fig. 3.15: Função densidade de probabilidade aproximada do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a para o **modelo de Gompertz de Ito**. Aqui $N(0) = x$, a abcissa é $\bar{t} = rt$ e a ordenada é $f_{\bar{T}_a}(\bar{t})$ com $\bar{T}_a = rT_a$.

Conhecida a função densidade de probabilidade $f_{\bar{T}}(\bar{t})$, e sabendo que no instante inicial haviam x indivíduos, o tempo médio é

$$\begin{aligned}
 E[\bar{T}_a | N(0) = x] &= \int_0^{+\infty} \bar{t} f_{\bar{T}_a}(\bar{t}) d\bar{t} \\
 &= \int_0^{+\infty} rt f_{T_a}(t) \frac{1}{r} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} t f_{T_a}(t) dt \\
 &= r E[T_a | N(0) = x],
 \end{aligned}$$

que havíamos calculado anteriormente. Aqui, temos apenas a função densidade de probabilidade para um x/a específico, podemos obter a esperança matemática calculando a área por baixo da curva. Esta esperança matemática

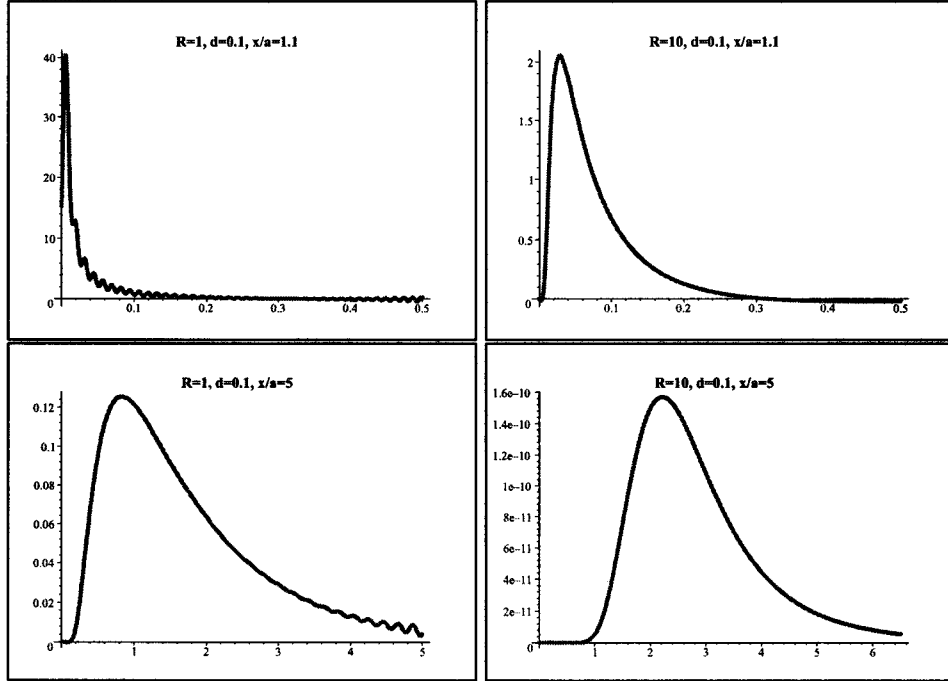


Fig. 3.16: Função densidade de probabilidade aproximada do tempo de primeira passagem de $N(t)$ por a para o **modelo logístico de Ito**. Aqui $N(0) = x$, a abscissa é $\bar{t} = rt$ e a ordenada é $f_{\bar{T}_a}(\bar{t})$ com $\bar{T}_a = rT_a$.

pode ser comparada com o valor da ordenada do gráfico anteriormente obtido de $rE[T_a|N(0) = x]$ para abscissa $z = x/a$. Quanto à variância,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\bar{T}_a|N(0) = x) &= E[\bar{T}_a^2|N(0) = x] - (E[\bar{T}_a|N(0) = x])^2 \\
 &= \int_0^{+\infty} \bar{t}^2 f_{\bar{T}_a}(\bar{t}) d\bar{t} - (rE[T_a|N(0) = x])^2 \\
 &= r^2 \int_0^{+\infty} t^2 f_{T_a}(t) dt - r^2 (E[T_a|N(0) = x])^2 \\
 &= r^2 (E[T_a^2|N(0) = x] - (E[T_a|N(0) = x])^2) \\
 &= r^2 \text{Var}(T_a|N(0) = x)
 \end{aligned}$$

o que significa, em termos do desvio-padrão,

$$DP(\bar{T}_a|N(0) = x) = rDP(T_a|N(0) = x)$$

que já havíamos calculado e de que apresentámos graficamente alguns exemplos.

3.5 Probabilidade de Extinção

Uma vez que este trabalho tem como tema os tempos de extinção, não poderíamos terminar sem esta secção, sobre a probabilidade de extinção, porque pode existir uma probabilidade não nula da população não se extinguir. Assim, e como vimos a considerar ao longo do trabalho, a população é considerada extinta quando atinge pela primeira vez o limiar a .

A probabilidade de extinção no horizonte temporal $[0, T]$ é dada por

$$P(\text{extinção}) = P(N(t) \leq a \text{ para algum } t \in [0, T]),$$

onde a se define como o limiar de extinção de uma população e a população considera-se extinta se alguma vez $N(t) \leq a$.

Quando definimos o tempo de primeira passagem, assumimos que o processo era regular, isto é, que $P(T_y < +\infty) > 0$ para qualquer $y \in (0, +\infty)$. Em particular, para $y = a$, a população atinge o tamanho a com probabilidade positiva mas não necessariamente com probabilidade um. Assim, pode suceder que a população nunca atinja o limiar de extinção.

Para o modelo malthusiano de Stratonovich a probabilidade de extinção no horizonte temporal $[0, T]$, uma vez que se não admite recuperação, é dada por

$$\begin{aligned} P(T) &= P\{N(t) \leq a \text{ para algum } t \in [0, T]\} \\ &= P\{T_a \leq T\} \\ &= \int_0^T f_{T_a}(t) dt \\ &= \Phi\left(\frac{A - rT}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2}A\right)\Phi\left(\frac{A + rT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

com $0 \leq T < +\infty$ e

$$\begin{aligned} P(+\infty) &= P\{N(t) \leq a \text{ para algum } t \geq 0\} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} P(T) \\ &= \exp\left(\frac{2r}{\sigma^2}A\right), \end{aligned}$$

com $A = \ln \frac{a}{x}$ e onde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx$ é a função distribuição da normal reduzida. A função densidade de T_a é imprópria, pois a probabilidade

de $N(t)$ atingir a em tempo infinito é positiva ($P\{T_a = +\infty\} > 0$). O que significa que a população pode nunca atingir o limiar de extinção.

De modo análogo, poderíamos obter conclusões semelhantes para o modelo malthusiano de Ito, com $r > \sigma^2/2$.

Infelizmente para os modelos de Gompertz e logístico não podemos obter a probabilidade de extinção no horizonte temporal $[0, T]$, uma vez que não temos a expressão da função densidade de probabilidade de T_a . Mas, para o modelo de Gompertz de Stratonovich e Ito, para o modelo logístico de Stratonovich e para o modelo logístico de Ito com $r > \sigma^2/2$, temos

$$\begin{aligned} P(+\infty) &= P\{N(t) \leq a \text{ para algum } t \in [0, +\infty[)\} \\ &= P\{T_a < +\infty\} \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f_{T_a}(t) dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Neste caso, a função densidade de probabilidade de T_a é própria porque a $P\{T_a = +\infty\} = 0$. Relembramos que, para estes modelos, temos distribuição estacionária e a solução é ergódica, o que significa que, mais cedo ou mais tarde, a população passa pelo limiar de extinção. Passará até infinitas vezes mais do que uma vez, embora só nos interessa a primeira vez, porque a partir daí consideramos a população extinta.

4. CONCLUSÕES

Começámos por fazer um estudo prévio dos modelos logístico e de Gompertz. Primeiro introduzimos os modelos determinísticos e só depois obtivemos os resultados necessários para os modelos estocásticos, em que utilizámos ruído branco aditivo, em particular a classificação das fronteiras e a existência de densidade estacionária.

Estudámos em seguida o tempo de primeira passagem de $N(t)$ por $a < N(0)$ ou $b > N(0)$, determinando o seu valor médio e o desvio-padrão. Depois particularizámos para o tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção (que designamos por tempo de extinção) e conseguimos encontrar expressões para o tempo médio de extinção e o respectivo desvio padrão para os modelos de Gompertz e logístico. Usando estes resultados, fizemos um estudo gráfico do comportamento destas grandezas em função da população inicial para alguns valores dos parâmetros que nos pareceram mais relevantes e retirámos algumas conclusões. É reconfortante verificar que os resultados encontrados eram os esperados. Em particular, o tempo médio de extinção é tanto maior quanto maior for a população inicial e diminui quando a intensidade das flutuações ambientais aumenta ou quando a capacidade de sustento se aproxima do limiar de extinção.

No entanto, a função densidade de probabilidade do tempo de primeira passagem pelo limiar de extinção não pôde ser calculada com a precisão desejada por limitações computacionais e temporais. Pensamos que podemos melhorar bastante as nossas aproximações se utilizarmos outros métodos, que necessitarão de um estudo mais aprofundado na área da análise numérica e um *software* adequado.

Como trabalho futuro, seria interessante considerar flutuações aleatórias com intensidade dependente do tamanho da população, já que considerar σ constante é uma simplificação muito útil matematicamente mas possivelmente um pouco afastada da realidade. No entanto, isto poderá trazer dificuldades na resolução das equações diferenciais estocásticas, e talvez não seja possível através de métodos analíticos determinar o tempo médio e o desvio padrão do tempo de primeira passagem por um limiar de extinção,

caso em que se tornaria necessário o recurso a métodos numéricos. Outro trabalho possível seria determinar o tempo de extinção para populações com outras formas de dependência da densidade populacional. Em geral, essa forma de dependência é muito mal conhecida em populações reais. É certo que a densidade de probabilidade e os momentos do tempo de extinção dependem da forma funcional daquela dependência. Mas, ainda assim, poderá ser possível determinar propriedades dos mesmos que sejam invariantes para certas classes de formas funcionais de dependência da densidade populacional caracterizadas por certos comportamentos biológicos das populações. Outra via alternativa a explorar seria a obtenção de estimadores não-paramétricos da densidade de probabilidade ou dos momentos do tempo de extinção. Talvez seja também possível obter aproximações dos mesmos que só requeiram o conhecimento de algumas características facilmente determináveis da forma de dependência da densidade populacional.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley, New York.
- [2] Braumann, C. (1995). Threshold Crossing Probabilities For Population Growth Models in Random Environments. *Journal of Biological Systems*, 3(2):505-517.
- [3] Braumann, C. (1998). O acaso, a Bolsa e a vida. Em *Estatística: a diversidade na unidade* (M. Souto de Miranda e I. Pereira, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, edições Salamandra, pág.29-55.
- [4] Braumann, C. (1999). Applications of Stochastic Differential to Population Growth. Em *9th Int. Coll.on Differential Equations* (D. Bainov, ed.), VSP, pág.47-52.
- [5] Braumann, C. (1999). Variable effort fishing models in random environments. Em *Mathematical Biosciences*, 156:1-19.
- [6] Braumann, C. (2000). Crescimento de populações em ambiente aleatório: generalização a intensidades de ruído dependentes da densidade populacional. Em *A Estatística em Movimento* (Maria Manuela Neves, Jorge Cadima, Maria João Martins e Fernando Rosado, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, pág.119-128.
- [7] Braumann, C. (2001). Constant effort and constant quota fishing policies with cut-offs in random environment. Em *Natural Resource Modeling*, 14(2):199-232.
- [8] Braumann, C. (2002). Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities. Em *Mathematical Biosciences* 177&178:229-245.
- [9] Braumann, C. (2002). O uso de diferentes cálculos estocásticos na modelação do crescimento populacional em ambiente aleatório. Em *Literacia e Estatística* (P. Brito, A. Figueiredo, F. Sousa, P. Teles e Fernando Rosado, eds.), Sociedade Portuguesa de Estatística, pág.141-153.

-
- [10] Carlos, C. (1999). *Estudo Introdutório das Equações Diferenciais Estocásticas com Aplicação a Dados Financeiros*, Trabalho de Fim de Curso, Universidade de Évora.
- [11] Carlos, C. (2004). Tempos de Extinção para Populações em Ambiente Aleatório, em preparação.
- [12] Casella, G. e Berger, R. (1990). *Statistical Inference*, Belmonte, California.
- [13] Cox, D. R. e Miller, H. D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*, London: Chapman e Hall.
- [14] Gihman, I. I e A. V. Skorohod. (1972). *Stochastic Differential Equations*, Springer, New York.
- [15] Karlin, S. e Taylor, H. (1975). *A First Course in Stochastic Processes* (Second Edition), Academic Press, Orlando.
- [16] Karlin, S. e Taylor, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, Orlando.
- [17] Krylov, V.I e Skoblay, N. S. (1977). *A Handbook of Methods of approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation*, Mir Publishers, Moscow.
- [18] Oksendal, B. (1998). *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications* (5th Edition), Springer, New York.
- [19] Pestana, D. e Velosa, S. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, vol I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [20] Pina, H. (1995). *Métodos Numéricos*, McGraw-Hill, Portugal.