Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada
Biénio 2003/2005

Uma Nova Abordagem à Teoria das Medidas de Young; Quasiconvexificação e Convergência Fraca-Forte

A New Approach to Young Measure Theory, Relaxation and Convergence in Energy

Dissertação realizada por
Luís Manuel Balsa Bicho

Orientador: Professor Doutor António Costa de Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri.

Évora
Novembro de 2003

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer ao orientador desta Dissertação, o Professor António Ornelas, pelo apoio, tanto a nível científico como a nível pessoal, que me tem dado ao longo dos vários anos em que tenho sido seu orientando.

Quero agradecer também ao meu bom amigo e colega, Dr. Luís Bandeira, pelos ensinamentos sobre o funcionamento do programa de tratamento de texto que usei para escrever esta Dissertação e por me ter ajudado desinteressadamente a passar a computador esta tese.

Agradeço também aos meus familiares, em particular aos meus pais, à minha irmã e ao meu cunhado, todo o apoio que sempre me prestaram de forma incondicional.

Finalmente quero agradecer a Deus, por 'Tudo' e ao mesmo tempo por 'Nada'.

Conteúdo

CAPÍTULO 1

Introdução

O objectivo desta dissertação é apresentar um estudo aprofundado do artigo: 'A New Approach to Young Measure Theory, Relaxation and Convergence in Energy', da autoria de M. A. Sychev, referência [**41**].

Nesse artigo científico o autor faz uma nova abordagem da teoria das medidas de Young gradiente e das suas aplicações a determinados problemas do Cálculo da Variações: semicontinuidade inferior, relaxação dos funcionais integrais, e demonstra também sob que condições tais funcionais possuem a propriedade da convergência fraca-forte.

Uma nova caracterização das medidas de Young como funções mensuráveis que tomam valores num determinado espaço métrico compacto é apresentada, o que permite utilizar o teorema de Lusin e teoremas de selecção para construir tais medidas. Usando esses métodos e o lema da compacidade simplificam-se as demonstrações dos resultados sobre a teoria das medidas de Young gradiente e introduzem-se novas aplicações desta teoria aos referidos problemas do Cálculo das Variações.

A New Approach to Young Measure Theory, Relaxation and Convergence in Energy

Abstract

This Master Thesis presentes a intensive study of the article 'A New Approach to Young Measure Theory, Relaxation and Convergence in Energy', written by M. A. Sychev.

In that article the author made a streamlined and selfcontained presentation of the theory of gradient Young measures and its applications to optimal results on lower semicontinuity and relaxation of variational integrals. Optimal conditions under which weak convergence and convergence of the functional imply strong convergence are also derived.

CAPíTULO 2

Preliminares

1. Espaços topológicos

DEFINIÇÃO 1. *Uma família τ de subconjuntos de um conjunto X diz-se uma topologia em X se τ contém o conjunto vazio, $\emptyset$, o próprio conjunto X, a união e a intersecção de qualquer uma sua subfamília finita. O par (X,τ) diz-se um espaço topológico.*

Os conjuntos de τ chamam-se os abertos de (X,τ).

DEFINIÇÃO 2. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Uma vizinhança de $x \in X$ é um conjunto que contém um conjunto aberto contendo x. Uma vizinhança de um conjunto $A \subset X$ é um conjunto que contém um conjunto aberto contendo A.*

DEFINIÇÃO 3. *Seja (X,τ) um espaço topológico, $S \subset X$. Um ponto $x \in S$ diz-se:*

a: *um ponto interior de S se S é uma vizinhança de x. O interior de S é o conjunto $int(S)$ formado pelos pontos interiores de S;*

b: *um ponto exterior de S se for interior ao complementar de S em X, $S^c = \{x \in X : x \notin S\}$. O exterior de S é o conjunto $ext(S)$ formado pelos pontos exteriores a S;*

c: *um ponto fronteiro de S se não for ponto interior nem ponto exterior a S. A fronteira de S é o conjunto ∂S formado pelos pontos fronteiros de S;*

d: *um ponto de acumulação ou ponto limite de S quando qualquer vizinhança V de x em X contém algum ponto $s \in S$, com $s \neq x$. O derivado de S é o conjunto S' formado pelos pontos de acumulação de S;*

e: *um ponto isolado se pertencer a S mas não for ponto de acumulação de S.*

DEFINIÇÃO 4. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que a sucessão (a_n) converge para $a \in X$, $a_n \to a$, se qualquer vizinhança de a contém todos os pontos a_n (excepto possivelmente para um número finito). Uma sucessão (a_n) diz-se convergente se $a_n \to a$ para algum $a \in X$.*

DEFINIÇÃO 5. *Um conjunto diz-se fechado se o seu complementar for aberto.*

LEMA 6. *A intersecção de qualquer família de subconjuntos fechados é fechada e a união de qualquer família finita de fechados é fechada. O conjunto vazio e X são fechados.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**26**], pág.74. □

DEFINIÇÃO 7. *A aderência ou fecho de A, $\overline{A}$, é a intersecção de todos os fechados que contêm A.*

DEFINIÇÃO 8. *Seja (X, τ) um espaço topológico. uma família qualquer $\{A_\alpha\}_\alpha$ de abertos de X diz-se uma base de abertos para a topologia τ se cada aberto do espaço for representável como a união de uma subfamília qualquer de $\{A_\alpha\}_\alpha$.*

OBSERVAÇÃO 9. Seja X um conjunto qualquer.

- **a:** Uma topologia τ em X fica completamente definida desde que se conheça uma sua base de abertos $\{A_\alpha\}_\alpha$, pois τ coincide com a totalidade dos conjuntos representáveis como uniões quaisquer de conjuntos de $\{A_\alpha\}_\alpha$.
- **b:** Uma classe importante de espaços topológicos é a constituída pelos espaços com base de abertos numerável, isto é, os espaço cuja topologia pode ser definida por uma base de abertos numerável, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$; estes espaços topológicos dizem-se separáveis.
- **c:** Um espaço topológico X que admite uma base de abertos numerável contém necessariamente um conjunto D numerável denso, isto é, contém um conjunto D que é numerável e cuja aderência é igual a X, note-se que a recíproca nem sempre é válida. Uma demonstração desta afirmação encontra-se por exemplo em [**21**], páginas 85-86.

TEOREMA 10. *Seja X um conjunto qualquer.*

1: *Qualquer base de abertos* $\{A_\alpha\}_\alpha$ *de um espaço topológico* (X,τ) *goza das seguintes propriedades:*

i: *para cada ponto* $x \in X$ *existe pelo um* α_0 *tal que* $x \in A_{\alpha_0}$*;*

ii: *se* $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2} \in \{A_\alpha\}_\alpha$ *e* $x \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$*, então existe um* α_3 *tal que* $x \in A_{\alpha_3} \subseteq A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$.

2: *Se* $\{A\}_\alpha$ *é uma família de partes de* X *verificando as condições i), ii) da alínea anterior, então a totalidade dos conjuntos representáveis como uniões quaisquer de conjuntos de* $\{A_\alpha\}_\alpha$ *é uma topologia sobre* X.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**21**], páginas 84-85. □

O teorema anterior diz-nos que para uma família de conjuntos abertos $\{A\}_\alpha$ ser uma base de abertos para um conjunto X é necessário e suficiente verificar as condições i)e ii).

TEOREMA 11. *A intersecção de uma família qualquer de topologias* $\tau = \bigcap_\alpha \tau_\alpha$ *sobre* X *é ainda uma topologia sobre* X*. Note-se que* τ *é mais fraca que qualquer uma das topologias* τ_α*, isto é,* τ *contém menos abertos que qualquer uma das outras topologias* τ_α.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**21**], página 83. □

COROLÁRIO 12. *Dado uma família arbitrária* P *de partes de um conjunto* X *munido de uma topologia* τ*, existe uma topologia* $\tau(P)$ *que é a mais fraca de entre todas as topologias que contêm* P*.* $\tau(P)$ *diz-se a topologia gerada por* P.

DEMONSTRAÇÃO. $\tau(P)$ é a intersecção de todas as topologias que contém a família P. □

DEFINIÇÃO 13. *Se* $Y \subseteq X$*, e* τ *é uma topologia para* X*, então a topologia gerada pela família:*

$$P = \{A : A = B \cap Y, B \in \tau\}$$

τ_Y *chama-se a topologia induzida em* Y *por* τ*, é de notar que neste caso* $P = \tau_Y$*. Um subconjunto de* Y *diz-se relativamente aberto se está em* τ_Y *e diz-se relativamente fechado se o seu complementar em* Y *é relativamente aberto.*

OBSERVAÇÃO 14. Um subconjunto de um espaço topológico é sempre tomado como um espaço topológico munido da topologia induzida, a não ser que outra topologia seja dada explicitamente.

DEFINIÇÃO 15. *Seja* $(X_\alpha, \tau_\alpha)_\alpha$ *uma família qualquer de espaços topológicos. A topologia produto em* $X = \prod_\alpha X_\alpha$ *é dada pela base de abertos formada pela colecção dos conjuntos da forma* $U = \prod_\alpha U_\alpha$*, onde cada* U_α *é um conjunto aberto de* X_α *e* $U_\alpha = X_\alpha$ *excepto para um numero finito de indices* α*.*

DEFINIÇÃO 16. *Se* (X, τ) *e* (Y, τ') *são espaços topológicos, e* $f : X \to Y$*, então* f *é contínua se* $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \in \tau$ *para qualquer* $A \in \tau'$*. Por outras palavras, uma aplicação entre dois espaço topológicos é contínua se a imagem inversa de qualquer aberto é um aberto. Uma função* f *diz-se contínua no ponto* x *se para qualquer vizinhança* U *de* $f(x)$ *existe uma vizinhança* V *de* x *tal que* $f(V) \subset U$*.*

DEFINIÇÃO 17. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, τ') *espaços topológicos,* $f : X \to Y$*. Dizemos que* f *é um homeomorfismo ou um isomorfismo topológico se* f *é contínua, bijectiva e* f^{-1} *é contínua. Neste caso dizemos que os espaços* X *e* Y *são homeomorfos.*

LEMA 18. *Sejam* (X, τ) *e* (Y, τ') *espaços topológicos,* $f : X \to Y$*. Então, cada uma das seguintes condições é equivalente à continuidade de* f*:*

- **a:** *A função* f *é contínua em cada* $x \in X$*.*
- **b:** *Para qualquer* $F \in Y$ *fechado,* $f^{-1}(F) \in X$ *é fechado*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**14**], pág.13. □

LEMA 19. *Sejam* (X, τ)*,* (Y, τ') *e* (Z, τ'') *espaços topológicos. Se* $f : X \to Y$ *e* $g : Y \to Z$ *são contínuas, então a função composta* $g \circ f : X \to Z$ *é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**26**], pág.60. □

LEMA 20. *Seja (X, τ) um espaços topológico, $f, g : X \to \mathbb{R}$, contínuas, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então as funções dadas pelas expressões*

$$|f(\cdot)|, \quad \alpha f(\cdot), \quad f(\cdot) + g(\cdot)$$

são contínuas. Se $X = \mathbb{R}$, então as expressões

$$\max_{x \in X}(f(x), g(x)), \quad \min_{x \in X}(f(x), g(x))$$

definem também funções contínuas.

DEMONSTRAÇÃO. Basta utilizar o lema anterior, e pensar nas regiões acima dos gráficos (para as funções max e min). □

DEFINIÇÃO 21. *Um espaço topológico X diz-se um espaço de Hausdorff (ou separado) se:*

i: *Para cada $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é fechado;*

ii: *Para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças disjuntas de x e y.*

DEFINIÇÃO 22. *Uma cobertura aberta de um conjunto A num espaço topológico X é uma família de conjuntos abertos cuja união contém A. Dizemos que X é compacto se de cada cobertura aberta for possível extrair uma subcobertura finita. Notemos que um subconjunto $A \subseteq X$ é compacto na sua topologia relativa sse de cada cobertura aberta de A por elementos de X for possível extrair uma subcobertura finita.*

DEFINIÇÃO 23. *Um subconjunto A de um espaço de Hausdorff X diz-se relativamente compacto se $\overline{A}$ é compacto.*

DEFINIÇÃO 24. *Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se sequencialmente compacto se qualquer sucessão $(a_n) \subset A$ possui uma subsucessão convergente para um elemento $a \in A$.*

DEFINIÇÃO 25. *Um espaço topológico X diz-se localmente compacto se cada um dos seus elementos possui uma vizinhança cujo fecho é compacto.*

LEMA 26. **a:** *Um subconjunto fechado de um compacto é compacto.*

b: *A imagem de um compacto por uma função contínua é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue directamente das definições. □

LEMA 27. *Uma função real contínua num compacto atinge o seu supremo e o seu ínfimo, i.e., tem máximo e mínimo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**14**], pág.18. □

DEFINIÇÃO 28. *Seja X um espaço topológico e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f por*

$$spt(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

OBSERVAÇÃO 29. Sendo X um espaço topológico, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

a: $spt(f+g) \subset spt(f) \cup spt(g)$;

b: $spt(\lambda f) = spt(f)$ se $\lambda \neq 0$;

c: $spt(fg) = spt(f) \cap spt(g)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**43**], pág.327. □

2. Espaços vectoriais topológicos

DEFINIÇÃO 30. *Chamamos espaço vectorial a qualquer conjunto $X \neq \emptyset$ com duas operações nele definidas:*

uma aplicação $(x, y) \mapsto x + y$ de $X \times X$ em X, chamada adição;

uma aplicação $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times X$ em X, chamada multiplicação por um escalar, verificando os seguintes axiomas:

a: $x + y = y + x$,

b: $(x + y) + z = x + (y + z)$,

c: $\forall x, y \in X\ \exists z \in X : x + z = y$,

d: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, e: $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,

f: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

g: $1x = x$,

para quaisquer $x, y, z \in X$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chamamos vectores aos elementos de X e escalares aos elementos de $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 31. *Seja X um espaço vectorial. Se $E \subset X$ e $x_0 \in X$, chamamos ao conjunto $E + x_0 = \{y \in X : y = x + x_0$ para algum $x \in E\}$ a translação-x_0 de E. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, escrevemos $\alpha E = \{y \in X : y = \alpha x$ para algum $x \in E\}$ e chamamos a este conjunto a dilatação de E pelo factor α.*

DEFINIÇÃO 32. *Seja X um espaço vectorial. Um vector $x \in X$ diz-se combinação linear dos vectores $x_1, ..., x_k \in X$ se existirem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k$ com $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$.*

DEFINIÇÃO 33. *Um conjunto finito $\{x_1, ..., x_k\} \subset X$ diz-se linearmente independente se*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0.$$

Um conjunto qualquer $X' \subset X$ diz-se linearmente independente se qualquer subconjunto finito é linearmente independente. Se um conjunto não é linearmente independente então diz-se linearmente dependente.

DEFINIÇÃO 34. *Seja A um subconjunto de um espaço vectorial X. Designamos por $lin(A)$ o invólucro linear de A, i.e.,*

$$lin(A) = \{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k : x_1, ..., x_k \in A \text{ e } \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ...\}$$

DEFINIÇÃO 35. *Um conjunto $B \subset X$ diz-se uma base de X se B é linearmente independente e gera X (i.e., $lin(B) = X$).*

DEFINIÇÃO 36. *Se existe em X uma base finita então diz-se que X tem dimensão finita.*

OBSERVAÇÃO 37. Neste caso demonstra-se (ver, p. ex. [28]) que todas as bases de X têm o mesmo número de elementos, número esse que é chamado a dimensão de X. Caso contrário diz-se que X tem dimensão infinita.

DEFINIÇÃO 38. *Sejam X, Y espaços vectoriais. Uma aplicação $L : X \to Y$ diz-se uma aplicação linear se*

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

DEFINIÇÃO 39. *Seja τ uma topologia num espaço vectorial X tal que*

a: *para cada $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é fechado;*

b: *as operações de espaço vectorial, $+ : X \times X \to X$ $((x, y) \to x + y)$ e $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ $((\lambda, x) \to \lambda.X)$, são contínuas com respeito a τ.*

Sob estas condições, diz-se que τ é uma topologia vectorial em X, e X um espaço vectorial topológico.

3. Espaços métricos

DEFINIÇÃO 40. *Seja X um espaço vectorial, $x, y, z \in X$ e d uma função real definida em $X \times X$, com as seguintes propriedades:*

i: *$d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;*

ii: *$d(x, y) = d(y, x)$;*

iii: *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Então d diz-se uma métrica em X. O conjunto X munido da métrica d chama-se espaço métrico. Por comodidade, sempre que não houver perigo de confusão, diremos o espaço métrico X, deixando subentendida a métrica d.

DEFINIÇÃO 41. *Seja X um espaço métrico, $r > 0$ e $a \in X$. A bola aberta de centro a e raio $r > 0$ é o conjunto*

$$B(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

DEFINIÇÃO 42. *Seja X um espaço métrico. Um conjunto $A \subset X$ diz-se limitado se existir $R \geq 0$ tal que $d(x, y) \leq R$, quaisquer que sejam $x, y \in A$. Além disso, se Y é um espaço métrico e $f : X \to Y$ é uma aplicação, diz-se que f é uma aplicação limitada se a sua imagem $f(X)$ é um subconjunto limitado de Y.*

PROPOSIÇÃO 43. *Qualquer espaço métrico é um espaço vectorial topológico.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14], pág.19. □

OBSERVAÇÃO 44. A união de todas a bolas abertas de um espaço métrico constituí uma base de abertos para para a topologia em X definida pela métrica d. O que significa que a topologia num espaço métrico fica totalmente definida desde que se conheçam as suas bolas abertas.

TEOREMA 45. *Se um espaço métrico (X, d) possui um conjunto numerável denso, então também possui uma base de abertos numerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $(x_n)_n$ é um conjunto numerável denso em (X, d), então a família formada pelas bolas abertas do tipo: $B(x_n, 1/m)$, com $n, m \in \mathbb{N}$, é uma base de abertos numerável do espaço. □

Assim um espaço métrico é separável sse possui um conjunto numerável denso.

PROPOSIÇÃO 46. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que o ponto $a \in X$ é limite da sucessão $(a_n) \subset X$ quando*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : \; d(a_n, a) < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq n_0.$$

Quando a é limite da sucessão (a_n), diz-se também que a_n tende para a, ou que a_n converge para a, denotando este facto por

$$a_n \to a \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Uma sucessão que possui limite diz-se convergente, caso contrário diz-se divergente.

DEMONSTRAÇÃO. A proposição é uma consequência que sai directamente da definição de limite num espaço topológico qualquer e do facto de as bolas abertas caracterizarem a topologia de um espaço métrico. □

DEFINIÇÃO 47. *Seja X um espaço métrico. Uma sucessão (a_n) diz-se uma sucessão de Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : \; d(a_n, a_m) < \varepsilon \; \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ com } n, m \geq n_0.$$

DEFINIÇÃO 48. *Um espaço métrico diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy é convergente.*

LEMA 49. *Num espaço métrico toda a sucessão convergente é sucessão de Cauchy. Uma sucessão de Cauchy converge sse possui uma subsucessão convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente das definições. □

LEMA 50. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$ sse para qualquer sucessão $(a_n) \subset X$*

$$a_n \to a \;\Rightarrow\; f(a_n) \to f(a).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**26**], pág.113. □

TEOREMA 51. *Sejam X um espaço métrico e $A \subset X$ um conjunto sequencialmente compacto. Então A é compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**21**], página 104. □

DEFINIÇÃO 52. *Sejam X, Y espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ diz-se lipschitziana se*

$$\exists k > 0 \;: d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y) \;\forall x, y \in X.$$

4. Espaços normados

DEFINIÇÃO 53. *Uma função $|\cdot|_X : X \to [0, +\infty)$ definida num espaço vectorial diz-se uma norma se:*

a: $|x|_X = 0$ *sse* $x = 0$,

b: $|\lambda x|_X = |\lambda||x|_X \;\forall x \in X,\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

c: $|x + y|_X \leq |x|_X + |y|_X,\; \forall x, y \in X$.

Chama-se espaço normado a um espaço vectorial com uma norma nele definida.

OBSERVAÇÃO 54. Um espaço normado é de modo natural um espaço métrico (logo um espaço vectorial topológico): a distância define-se por $d(x,y) = |x-y|_X$. A convergência definida pela norma e a convergência definida pela métrica coincidem, obviamente.

OBSERVAÇÃO 55. Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. Uma sucessão $(x_n) \subset X$ converge em norma ou fortemente para $x \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{R} \; : \; |x_n - x|_X < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N} \; com \; n \geq n_0.$$

Note-se que $x_n \to x$ em X significa $|x_n - x|_X \to 0$.

DEFINIÇÃO 56. *Duas normas definidas no mesmo espaço vectorial X dizem-se equivalentes se definem a mesma convergência, i.e., se as correspondentes sucessões convergentes são as mesmas:*

$$|\cdot|_1 \; e \; |\cdot|_2 \; dizem-se \; equivalentes \; se \; |x_n|_1 \to 0 \Leftrightarrow |x_n|_2 \to 0, \; \forall (x_n) \subset X.$$

PROPOSIÇÃO 57. *Seja X um espaço vectorial de dimensão finita. Então todas as normas em X são equivalentes.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[27]**, pág.142. □

TEOREMA 58. *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado, $C \subset X$. Se C é compacto, então é fechado e limitado. Se $X = \mathbb{R}^n$ então C é compacto sse é limitado e fechado.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[29]**, pág.20 e **[27]**, pág.80. □

DEFINIÇÃO 59. *Um espaço normado $(X, |\cdot|_X)$ diz-se completo se qualquer sucessão de Cauchy em X converge (para um elemento de X). Chama-se espaço de Banach a qualquer espaço normado completo.*

DEFINIÇÃO 60. *Sejam X, Y espaços normados. Uma aplicação linear $L : X \to Y$ diz-se limitada se*

$$\exists k > 0 \; : \; |L(x)|_Y \leq k|x|_X \quad \forall x \in X.$$

LEMA 61. *Sejam X, Y espaços normados, $L : X \to Y$ uma aplicação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a: *L é lipschitziana;*

b: *existe $x_0 \in X$ tal que $L(\cdot)$ é contínua em x_0;*

c: $\sup_{|x|\leq 1} |L(x)| < \infty$;

d: *L é limitada.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14], pág.59. □

DEFINIÇÃO 62. *Seja $(X, |\cdot|_X)$ um espaço normado. O espaço dual de X, X', é o espaço das aplicações lineares contínuas definidas sobre X.*

DEFINIÇÃO 63. *Sejam X, Y espaços normados, $L : X \to Y$ uma aplicação linear. A norma desta aplicação linear define-se por*

$$|L| = \sup_{|x|_X \leq 1} |L(x)|.$$

LEMA 64. *O espaço dual de um espaço normado X, X', com a norma acima definida é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14], pág.61. □

DEFINIÇÃO 65. *Sejam X, Y espaços normados e $f : X \to Y$ um operador. O operador f diz-se compacto se $f(A)$ é relativamente compacto em Y sempre que A é limitado em X.*

DEFINIÇÃO 66. *Dizemos que o espaço normado X se injecta no espaço normado Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, se*

i: *X é um subespaço vectorial de Y;*

ii: *o operador de injecção I definido de X para Y por $I(x) = x$ $\forall x \in X$ é contínuo.*

DEFINIÇÃO 67. *Dizemos que a injecção $X \hookrightarrow Y$ é compacta se o operador de injecção I é compacto.*

DEFINIÇÃO 68. *Seja X um espaço de Banach.*

i: *Um hiperplano H é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

onde f é um funcional linear sobre X e $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii: *Diz-se que hiperplano H, definido como acima, separa (resp. separa estritamente) os conjuntos $A, B \subset X$ se $f(x) \leq \alpha\ \forall x \in A$ e $f(x) \geq \alpha\ \forall x \in B$ (resp. se $\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq \alpha - \varepsilon\ \forall x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon\ \forall x \in B$).*

iii: *Os conjuntos*

$$\{x \in X : f(x) < \alpha\},\ \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

e

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\},\ \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

dizem-se, respectivamente, semi-espaços abertos e semi-espaços fechados limitados por H.

OBSERVAÇÃO 69. Note-se que o hiperplano H, definido por $f(x) = \alpha$, é fechado sse f é contínua.

TEOREMA 70. *(Teorema de Hahn-Banach)*
Seja X um espaço de Banach, $A, B \subset X$ dois conjuntos convexos, disjuntos e não vazios.

i: *Suponhamos que A é aberto. Então existe um hiperplano fechado H que separa A e B.*

ii: *Suponhamos que A é aberto e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado H que separa estritamente A e B.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**8**], pág.5 e 7. □

COROLÁRIO 71. *Seja C um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ tal que $C \neq \mathbb{R}^n$. Então existe um semi-espaço fechado que contém C.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**37**], pág.99. □

TEOREMA 72. *Sejam A, B conjuntos disjuntos, não vazios e convexos de um espaço normado X. Então existem $\Lambda \in X'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que se A é compacto e B é fechado $< \Lambda, x >< c << \Lambda, y >, \forall (x \in A, y \in B)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [36], página 58. □

5. Espaços com produto interno

DEFINIÇÃO 73. *Num espaço vectorial real X, uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \to \mathbb{R}$ diz-se um produto interno em X se $\forall x, y, z \in X$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valem as seguintes condições*

- **a:** $\langle x, y \rangle_X = \langle y, x \rangle_X$;
- **b:** $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle_X = \alpha \langle x, z \rangle_X + \beta \langle y, z \rangle_X$;
- **c:** $\langle x, x \rangle_X \geq 0$ e $\langle x, x \rangle_X = 0 \Rightarrow x = 0$.

Um espaço vectorial com um produto interno diz-se um espaço com produto interno.

PROPOSIÇÃO 74. *Num espaço com produto interno pode sempre definir-se uma norma por*

$$|x|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [29], pág.45. □

DEFINIÇÃO 75. *Num espaço com produto interno, chama-se norma associada ao produto interno à norma definida na proposição anterior.*

OBSERVAÇÃO 76. Temos então que qualquer espaço com produto interno é também um espaço normado. A recíproca é falsa.

DEFINIÇÃO 77. *Um espaço com produto interno que seja completo (para a norma associada ao produto interno) diz-se um espaço de Hilbert.*

DEFINIÇÃO 78. *Num espaço com produto interno dois vectores x, y dizem-se ortogonais (e escreve-se $x \perp y$) se $\langle x, y \rangle = 0$.*

OBSERVAÇÃO 79. Uma das mais importantes consequências de termos um produto interno é a possibilidade de definirmos a ortogonalidade de vectores, o que torna a teoria dos espaços de Hilbert muito mais próxima da teoria do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ do que da teoria geral dos espaços de Banach.

6. Espaços de Medida

6.1. σ -álgebras.

DEFINIÇÃO 80. *Seja X um conjunto arbitrário. Uma colecção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma álgebra de subconjuntos de X se satisfaz as seguintes condições:*

1: $X \in \mathcal{A}$;

2: $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$;

3: $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 81. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X diz-se uma σ-álgebra se, nas hipótese da definição anterior, substituirmos 3 por*

3': $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

DEFINIÇÃO 82. *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. O par $(X, \mathcal{A})$ chama-se um espaço mensurável.*

OBSERVAÇÃO 83. Para um conjunto arbitrário X, seja $\mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os subconjuntos de X, isto é, $A \in \mathcal{P}(X)$ é equivalente a $A \subset X$.

1: $\mathcal{P}(X)$ é a maior σ-álgebra de subconjuntos de X.

2: $\{\emptyset, X\}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X.

PROPOSIÇÃO 84. *Seja X um conjunto, e seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Então existe a menor σ-álgebra em X que contém $\mathcal{F}$, a que chamamos a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [11], pág.3. □

Definição 85. *(σ-álgebra Produto)*

Sejam $(X_1, \mathcal{A}_1), ..., (X_n, \mathcal{A}_n)$ espaços mensuráveis. Se

$$\mathcal{F} = \{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, ..., n\},$$

pela proposição 84 existe a menor σ-álgebra em $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ que contém $\mathcal{F}$, designemo-la por $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n$, ao par $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n)$ chama-se o espaço mensurável produto dos espaços $(X_1, \mathcal{A}_1), ..., (X_n, \mathcal{A}_n)$.

Definição 86. *Seja X um espaço topológico. A σ-álgebra de Borel em X é a σ-álgebra em X gerada pela colecção dos subconjuntos abertos do espaço topológico X e denotamos-la por $\mathcal{B}_X$. Os subconjuntos de Borel (ou borelianos) de X são os conjuntos que pertencem a $\mathcal{B}_X$.*

Observação 87. Um caso particular importante é quando $X = \mathbb{R}^n$.

6.2. Medidas.

Definição 88. *Seja X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ diz-se contavelmente aditiva se satisfaz*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos disjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$.

Definição 89. *Uma medida positiva (ou uma medida positiva contavelmente aditiva) em $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e é contavelmente aditiva.*

Para evitar repetições o termo medida significará daqui para a frente medida positiva.

Definição 90. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Então, chamamos a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Habitualmente diremos que μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$ ou, se a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é subentendida, diremos que μ é uma medida em X.*

Definição 91. *A uma medida em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ chamamos medida de Borel em $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se X é um subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^n$ e se $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra que consiste nos subconjuntos* *de Borel de $\mathbb{R}^n$ que estão contidos em X, então uma medida em $(X,\mathcal{A})$ diz-se uma medida de Borel em X.*

DEFINIÇÃO 92. *Seja X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida em $\mathcal{A}$. Dizemos que μ é uma medida de probabilidade se $\mu(X)=1$. Neste caso chamamos a $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de probabilidade.*

EXEMPLO 93. Um exemplo importante de uma medida de probabilidade é a medida de Dirac δ_x (suportada no ponto x, ver definição 194), que se define para qualquer subconjunto $A \in \mathcal{A}$ por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

PROPOSIÇÃO 94. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida, A e B subconjuntos de X pertencendo a $\mathcal{A}$ tais que $A \subset B$. Então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se, além disso A satisfaz $\mu(A) < +\infty$, então $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[11]**, pág.10. □

PROPOSIÇÃO 95. *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida. Se $\{A_k\}$ é uma sucessão arbitrária de conjuntos que pertencem a $\mathcal{A}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[11]**, pág.11. □

TEOREMA 96. *(A medida produto)*

Sejam $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1),\ldots,(X_n,\mathcal{A}_n,\mu_n)$ espaços de medida positivos. Então existe uma única medida $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$ definida sobre $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$ tal que:

$$\mu_1 \times \ldots \times \mu_n(A_1 \times \ldots \times A_n) = \Pi_{i=1}^{n} \mu_i(A_i),$$

para todo o conjunto $A_1 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[14]**, página 187. □

OBSERVAÇÃO 97. $\Pi_{i=1}^{n}\mu_i(A_i) = +\infty$ se para algum $i = 1, 2, ..., n$, $\mu_i(A_i) = +\infty$ e não existe nenhum $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\mu_i(A_i) = 0$; se existir i tal que $\mu_i(A_i) = 0$, então $\mu_1 \times ... \times \mu_n(A_1 \times ... \times A_n) = 0$.

6.3. Medidas exteriores.

DEFINIÇÃO 98. *Seja X um conjunto. Uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que*

a: $\mu^*(\emptyset) = 0$;

b: *Se $A \subset B \subset X$, então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;*

c: *Se $\{A_n\}$ é uma sucessão de subconjuntos de X, então $\mu^*(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ (subaditividade).*

OBSERVAÇÃO 99.

i: Pode-se dizer que uma medida exterior em X é uma função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ que é monótona e contavelmente subaditiva, e vale 0 no $\emptyset$.

ii: Note-se que uma medida pode não ser uma medida exterior; de facto, uma medida em X é uma medida exterior sse o seu domínio é $\mathcal{P}(X)$. Por outro lado, uma medida exterior geralmente não é contavelmente aditiva, e consequentemente não é uma medida.

DEFINIÇÃO 100. *Seja X um conjunto, e μ^* uma medida exterior em X. Um conjunto $B \subset X$ é μ^*-mensurável (ou mensurável com respeito a μ^*) se*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

é verificada para qualquer conjunto $A \subset X$.

OBSERVAÇÃO 101. Um subconjunto μ^*-mensurável de X é tal que divide cada subconjunto de X de tal modo que o seu tamanho (medido por μ^*) é a soma das suas partes.

TEOREMA 102. *Seja X um conjunto, μ^* uma medida exterior em X e $\mathcal{M}_{\mu^*}$ a colecção de todos os subconjuntos μ^*-mensuráveis de X. Então*

a: *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra;*

b: *a restrição de* μ^* *a* $\mathcal{M}_{\mu^*}$ *é uma medida em* $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [11], pág.18. □

Voltemos agora a nossa atenção para a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $|\cdot|^*$.

DEFINIÇÃO 103. *Um intervalo n-dimensional é um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *da forma* $I_1 \times ... \times I_n$ *onde* $I_1, ..., I_n$ *são intervalos de* $\mathbb{R}$ *e*

$$I_1 \times ... \times I_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in I_i,\ i = 1, ..., n\}.$$

OBSERVAÇÃO 104. Note-se que os intervalos $I_1, ..., I_n$, e consequentemente o intervalo n-dimensional $I_1 \times ... \times I_n$, podem ser abertos, fechados, ou nem abertos nem fechados.

DEFINIÇÃO 105. *O volume do intervalo limitado n-dimensional* $I_1 \times ... \times I_n$ *é o produto dos comprimentos dos intervalos* $I_1, ..., I_n$, *que denotamos por* $vol(I_1 \times ... \times I_n)$.

DEFINIÇÃO 106. *Para cada* $A \subset \mathbb{R}^n$ *seja* C_A *o conjunto de todas as sucessões* (R_i) *de intervalos abertos limitados n-dimensionais para as quais* $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$. *Então* $|A|^*$, *a medida exterior de Lebesgue de A, é o ínfimo do conjunto*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol(R_i) : (R_i) \in C_A \right\}.$$

PROPOSIÇÃO 107. *A medida exterior de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$ *é uma medida exterior, e associa a cada intervalo n-dimensional o seu volume.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [11], pág.17. □

DEFINIÇÃO 108. *Um subconjunto Lebesgue mensurável de* $\mathbb{R}^n$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *que é mensurável com respeito à medida exterior de Lebesgue.*

PROPOSIÇÃO 109. *Cada boreliano de* $\mathbb{R}^n$ *é Lebesgue mensurável*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [11], pág.21. □

6.4. A medida de Lebesgue.

DEFINIÇÃO 110. *A restrição da medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ à colecção $\mathcal{M}_{\mu^*}$ dos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ chama-se medida de Lebesgue, e denotaremos por $|A|$ a medida de Lebesgue dum conjunto $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.*

OBSERVAÇÃO 111. A restrição da medida exterior de Lebesgue a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ também será chamada de de Lebesgue (Ver proposição 120, abaixo).

PROPOSIÇÃO 112. *Seja A um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então*

a: $|A| = \inf\{|U| : U$ *é aberto e* $A \subset U\}$;

b: $|A| = \sup\{|K| : K$ *é compacto e* $K \subset A\}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[11]**, pág.26. □

TEOREMA 113. *A medida de Lebesgue $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$ é invariante por translações, i.e., se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então $|A| = |A + x|$. Além disso, um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável sse $B + x$ é Lebesgue mensurável $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[43]**, pág.429. □

TEOREMA 114. *A medida de Lebesgue $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$ é homogénea positiva, i.e., se $\alpha \neq 0$ e $A \subset \mathbb{R}^n$, então $|\alpha A| = |\alpha|^n |A|$. Além disso, um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável sse αB é Lebesgue mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[43]**, pág.435. □

DEFINIÇÃO 115. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida . A medida μ (ou o espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$) diz-se completa (completo) se as relações $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ e $B \subset A$ conjuntamente implicam $B \in \mathcal{A}$.*

DEFINIÇÃO 116. *Um conjunto $B \subset X$ diz-se μ-nulo, ou se não houver perigo de confusão de medida nula, se existe $A \subset X$ com $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$.*

OBSERVAÇÃO 117. Temos então, nas condições acima, que uma medida μ é completa sse todos os subconjuntos μ-nulos de X pertencem a $\mathcal{A}$.

DEFINIÇÃO 118. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, e μ uma medida em $\mathcal{A}$. O completamento de $\mathcal{A}$ relativamente a μ é a colecção $\mathcal{A}_\mu$ dos subconjuntos A de X para os quais existem conjuntos $E, F \in \mathcal{A}$ tais que $E \subset A \subset F$ e $\mu(F \backslash E) = 0$, onde $F \backslash E = \{x \in F : x \notin E\}$. Um conjunto que pertence a $\mathcal{A}_\mu$ diz-se μ-mensurável.*

Suponhamos que A, E e F são como acima. Segue imediatamente que $\mu(E) = \mu(F)$. Além disso, se $B \subset A$, com $B \in \mathcal{A}$, então

$$\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E).$$

Consequentemente

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\},$$

e o valor de $\mu(E)$ e $\mu(F)$ depende apenas do conjunto A (e da medida μ) e não da escolha dos conjuntos E e F satisfazendo as condições da definição 118. Podemos então definir

DEFINIÇÃO 119. *Seja $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\overline{\mu}(A) = \mu(E) (= \mu(F))$, onde $E, F \in \mathcal{A}$, $E \subset A \subset F$ e $\mu(F \backslash E) = 0$. Dizemos que $\overline{\mu}$ é o completamento de μ.*

PROPOSIÇÃO 120. *A medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{|\cdot|^*})$ é o completamento da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[11]**, pág.37. □

DEFINIÇÃO 121. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Uma propriedade do conjunto de elementos de X diz-se que é verificada μ-quase sempre se existe um conjunto $N \in \mathcal{A}$, satisfazendo $\mu(N) = 0$ (i.e., com medida μ nula) e que contém todos os elementos de X para os quais a propriedade não se verifica. Mais geralmente, se $E \subset X$, diz-se que uma propriedade é verificada μ-quase sempre em E se existe um conjunto $N \subset E$ (com $N \in \mathcal{A}$), satisfazendo $\mu(N) = 0$ e que contém todos os elementos de E para os quais a propriedade não se verifica.*

OBSERVAÇÃO 122. **i:** A expressão μ-quase sempre é abreviada por μ-q.s. e, nos casos em que a medida μ é clara no contexto, por q.s.;

ii: seja F o conjunto dos elementos de X para os quais a propriedade não se verifica. Então não é necessário que $F \in \mathcal{A}$; é apenas necessário que exista um conjunto $N \in \mathcal{A}$, com $F \subset N$, satisfazendo $\mu(N) = 0$. Note-se que se μ é completa, então $F \in \mathcal{A}$.

6.5. Funções mensuráveis.

DEFINIÇÃO 123. *Considerem-se $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e (Y, τ) um espaço topológico, uma função $f : X \to Y$ diz-se $\mathcal{A}$-mensurável se para qualquer $V \in \tau$ o conjunto $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$.*

OBSERVAÇÃO 124. Uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{A}$ diz-se $\mathcal{A}$-mensurável, ou, se a σ-álgebra $\mathcal{A}$ é clara no contexto, apenas mensurável.

DEFINIÇÃO 125. *Se $X = \mathbb{R}^n$, uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ diz-se Borel mensurável ou boreliana, e uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{M}_{|.|^*}$ diz-se Lebesgue mensurável.*

OBSERVAÇÃO 126. Toda a função Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável.

PROPOSIÇÃO 127. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $A \subset X$ tal que $A \in \mathcal{A}$ e $f, g : A \to [-\infty, +\infty]$. Então as funções $f \vee g$ e $f \wedge g$ dadas por*

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$$
$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

são mensuráveis.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**11**], pág.50. □

PROPOSIÇÃO 128. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $A \subset X$ tal que $A \in \mathcal{A}$ e $(f_n) : A \to [-\infty, +\infty]$ uma sucessão de funções mensuráveis. Então*

a: *as funções $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ são mensuráveis;*

b: *as funções*

$$\limsup_n f_n = \inf_{k>0} \sup_{n\geq k} f_n$$

e

$$\liminf_n f_n = \sup_{k>0} \inf_{n\geq k} f_n$$

são mensuráveis;

c: *a função* $\lim_n f_n$ *(cujo domínio é* $\{x \in A : \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)\}$*) é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**11**], pág.51. □

TEOREMA 129. *Sejam* Y, Z *espaços topológicos,* $g : Y \to Z$ *uma função contínua,* X *um espaço mensurável e* $f : X \to Y$ *uma função mensurável. Então* $g \circ f : X \to Z$ *é uma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**35**], página 10. □

TEOREMA 130. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e* (Y, τ) *um espaço topológico. Considerem-se* m *funções* $u_1, ..., u_m : X \to \mathbb{R}$ *mensuráveis e uma função* $\Phi : \mathbb{R}^m \to Y$ *contínua, e defina-se* $h(x) = \Phi(u_1(x), ..., u_m(x))$*, então a função* $h : X \to Y$ *é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**35**], página 11. □

COROLÁRIO 131. *(Corolário dos Teoremas 129 e 130)*

1 *A soma e o produto de um numero finito de funções mensuráveis é uma função mensurável;*

2 *o módulo* $|f|_{\mathbb{R}^m}$ *de uma função mensurável é uma função mensurável;*

3 *se* A *é um subconjunto mensurável de um espaço mensurável* X*, então a função:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \in X \setminus A \end{cases}$$

dita função característica de A *(em* X*), é mensurável.*

4 *a função* $u = (u_1, ..., u_m) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *é mensurável sse cada uma das funções* $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, ..., m$*, é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Estes resultados são consequência imediata dos teoremas 129 e 130. □

TEOREMA 132. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável,* Y *um topológico e* $f : X \to Y$*;*

1 *se* $\mathcal{F}$ *é a colecção de todos os conjuntos* $E \subset Y$ *tais que* $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$*, então* $\mathcal{F}$ *é uma* σ*-algebra em* Y*;*

2 *se* f *é mensurável e* $E \subset Y$ *é um conjunto Boreliano, então* $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$*;*

3 *Se* $Y = [-\infty, +\infty]$ *e* $f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{A}$ *para todo o numero real* α*, então* f *é mensurável.*

4 *se* f *é mensurável,* Z *é um espaço topológico,* $g : Y \to Z$ *é uma função Borel mensurável, isto é* g *é mensurável em relação à* σ*-algebra de* Y *gerada pelos conjuntos abertos de* Y*, então a função* $g \circ f : X \to Z$ *é mensurável, note-se que este resultado é uma generalização do teorema 129.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[35]**, página 13. □

6.6. Convergência quase sempre e convergência em medida.

DEFINIÇÃO 133. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Dizemos que* f_n *converge para* f *quase sempre se o conjunto dos elementos* $x \in D$ *para os quais a relação* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *falha é* μ*-nulo. Neste caso dizemos que* $f = \lim_n f_n$ *quase sempre.*

COROLÁRIO 134. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $(f_n), f : X \to [-\infty, +\infty]$ *tais que* (f_n) *converge para* f *quase sempre. Se* μ *é completa e cada* f_n *é* $\mathcal{A}$*-mensurável, então* f *é* $\mathcal{A}$*-mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[11]**, pág.59. □

PROPOSIÇÃO 135. *(Unicidade do limite q.s.)*
Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$*,* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $g_1, g_2 : D \to [-\infty, +\infty]$ *funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g_1 \text{ q.s. em } D \text{ e } \lim_{n\to\infty} f_n = g_2 \text{ q.s. em } D$$

então

$$g_1 = g_2 \text{ q.s. em } D.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**43**], pág.88. □

DEFINIÇÃO 136. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Diz-se que* (f_n) *converge na medida* μ *em* D *se existe uma função* $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$*-mensurável, tal que para cada* $\varepsilon > 0$ *tenhamos*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0,$$

i.e., para cada $\varepsilon > 0$ *e* $\eta > 0$ *existe* $n_{\varepsilon,\eta} \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} < \eta \text{ para } n \geq n_{\varepsilon,\eta}.$$

Escrevemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *em* D *para esta convergência.*

TEOREMA 137. *(Unicidade do limite da convergência em medida)*
Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$ *e* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ *funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis. Se*

$$f_n \xrightarrow{\mu} g_1 \text{ em } D \text{ e} f_n \xrightarrow{\mu} g_2 \text{ em } D$$

então

$$g_1 = g_2 \text{ q.s. em } D.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**43**], pág.97. □

TEOREMA 138. *(Teorema de H. Lebesgue)*
Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* $D \in \mathcal{A}$*,* $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções* $\mathcal{A}$*-mensuráveis e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função* $\mathcal{A}$*-mensurável. Suponhamos*

1: $f_n \to f$ *q.s em* D*;*

2: $\mu(D) < \infty$.

Então $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *em* D.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**43**], pág.98. □

TEOREMA 139. *(Teorema de F. Riesz)*

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $D \in \mathcal{A}$, $(f_n) : D \to [-\infty, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{A}$-mensuráveis e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável. Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ em D, então existe uma subsucessão (f_{n_k}) tal que $f_{n_k} \to f$ μ-q.s. em D.

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[43]**, pág.98. □

OBSERVAÇÃO 140. Note-se que se $f_n = (f_n^1, ..., f_n^m) : D \to \mathbb{R}^m$, então $(f_n)_n$ converge q.s. (converge em medida) para $f : D \to \mathbb{R}^m$ se a sucessão $|f_n - f|_{\mathbb{R}^m} : D \to [-\infty, +\infty]$ converge para zero q.s. (converge para zero em medida).

7. Definição do Integral de Lebesgue

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida.

DEFINIÇÃO 141. *Uma função $s : X \to \mathbb{R}$ diz-se uma função simples se toma apenas um número finito de valores. Se s é uma função simples tomando os valores $a_1, ..., a_m$, seja $A_i = s^{-1}(a_i) = \{x \in X : s(x) = a_i\}$ $(1 \leq i \leq m)$. Temos então $s(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)$.*

OBSERVAÇÃO 142. Temos que s é mensurável sse $A_1, A_2, ..., A_m$ são mensuráveis.

Definimos agora o integral de funções simples não-negativas.

DEFINIÇÃO 143. *Seja $s : X \to \mathbb{R}$ uma função simples, não-negativa, e $A \in \mathcal{A}$. Sejam $a_1, ..., a_m$ todos os valores distintos não-nulos de s e seja $A_i = s^{-1}(a_i), 1 \leq i \leq m$. Definimos o integral de s em A com respeito a μ como a soma*

$$I_A(s) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A \cap A_i).$$

OBSERVAÇÃO 144. Este valor pode ser $+\infty$ pois $\mu(A \cap A_i)$ pode ser $+\infty$.

Estendemos agora esta noção de integral a funções mensuráveis não-negativas pela aproximação por funções simples.

TEOREMA 145. *Seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sucessão de funções simples não-negativas*

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$$

tal que $s_i \to f$ pontualmente. Mais geralmente, se f é limitada, então $s_i \to f$ uniformemente.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.62. □

DEFINIÇÃO 146. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável e $A \in \mathcal{A}$. O integral de f em A com respeito a μ é definido por*

$$\int_A f d\mu = \sup\{I_A(s) : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ simples}\}.$$

PROPOSIÇÃO 147. *Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ e f uma função mensurável não-negativa.*

1: *Se $B \subset A$ então*

$$\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu \ ;$$

2: *Se $\mu(A) = 0$, então*

$$\int_A f d\mu = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.65. □

PROPOSIÇÃO 148. *Seja f uma função mensurável não-negativa e $A \in \mathcal{A}$. Se $\int_A f d\mu = 0$, então $f = 0$ q.s. em A.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.66. □

PROPOSIÇÃO 149. *Sejam f, g funções mensuráveis não-negativas e $A \in \mathcal{A}$. Se $f = g$ q.s. em A, então*

$$\int_A f d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.69. □

Estendemos finalmente esta noção de integral a funções mensuráveis com valores em $[-\infty, +\infty]$. Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Definimos as funções

$$f_+ = \max(f, 0) \quad e \quad f_- = -\min(f, 0).$$

Note-se que f_+ e f_- são funções mensuráveis (recorde-se a proposição 127), e temos

$$f = f_+ - f_-.$$

LEMA 150. *Seja $A \in \mathcal{A}$. As seguintes condições são equivalentes.*

1: $\int_A |f| d\mu < \infty$;

2: $\int_A f_+ d\mu < \infty$ *e* $\int_A f_- d\mu < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.76. □

DEFINIÇÃO 151. *Uma função mensurável $f : X \to [-\infty, +\infty]$ diz-se integrável em $A \in \mathcal{A}$ se for satisfeita uma das condições do lema anterior. Neste caso definimos*

$$\int_A f d\mu = \int_A f_+ d\mu - \int_A f_- d\mu.$$

DEFINIÇÃO 152. *Se uma f é integrável em relação à medida de Lebesgue, diz-se L-integrável e para representar o integral de f em relação à medida de Lebesgue usam-se notações do tipo $\int f(x, y, z) dx dy dz$.*

TEOREMA 153. *(Teorema da Linearidade)*

Sejam $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ integráveis em $A \in \mathcal{A}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então

a: *cf é integrável em A e $\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu$;*

b: *$f + g$ é integrável em A e $\int_A f + g\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.76. □

COROLÁRIO 154. *(Teorema da Monotonia do Integral)*

Sejam $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ integráveis em $A \in \mathcal{A}$, com $f \leq g$. Então

$$\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.77. □

TEOREMA 155. *(Teorema da convergência monótona)*

Seja (f_n) *uma sucessão de funções mensuráveis tal que* $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *e* $f_n(x) \to f(x), \forall x$. *Então*

$$\lim_n \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_n f_n d\mu = \int_A f d\mu \text{ para } A \in \mathcal{A}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [42], pág.66. □

COROLÁRIO 156. *Seja* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *integrável em* $A \in \mathcal{A}$. *Então*

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.77. □

TEOREMA 157. *(Lema de Fatou)*

Seja (f_n) *uma sucessão de funções mensuráveis positivas e* $A \in \mathcal{A}$. *Então*

$$\int_A \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_A f_n d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [11], pág.72. □

TEOREMA 158. *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue)*

Seja $(f_n) : X \to [-\infty, +\infty]$ *uma sucessão de funções mensuráveis em* X, $g : X \to [0, +\infty]$ *uma função integrável em* X *e* $A \in \mathcal{A}$ *tais que*

i: $f(x) = \lim_n f_n(x)$;

ii: $|f_n(x)| \leq g(x)$, $n = 1, 2, \dots$

são verificadas q.s. em A. *Então* f *e* (f_n) *são integráveis em* A *e*

$$\int_A f d\mu = \int_A \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [42], pág.71. □

TEOREMA 159. *Se para cada $x \in X$*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

e $f_n : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, para $n = 1, 2, ...,$ então

$$\int_X f dx = \int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n(x) dx,$$

é de notar que este teorema também inclui o caso em que

$$\int_X \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx = +\infty.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[35]**, página 22. □

TEOREMA 160. *Suponha-se que $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável e defina-se para cada $A \in \mathcal{A}$*

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu.$$

Então φ é uma medida sobre $\mathcal{A}$, e

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu,$$

para cada função $g : X \to [0, +\infty]$ mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[35]**, página 23. □

Se f é uma função definida num subconjunto A de $\mathbb{R}^{n+m}$, podemos considerar f como dependendo do par de variáveis (x, y), com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. O integral de f em A denota-se por

$$\int_A f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y)$$

ou, se quisermos definir o integral sobre todo o espaço $\mathbb{R}^{n+m}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) \chi_A(x, y) d\mu_1 \times \mu_2(x, y).$$

Se, em particular, $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$\int_A f(x) d\mu_1 \times ... \times \mu_n(x) = \int_A f(x_1, ... x_n) d\mu_1(x_1) ... d\mu_n(x_n).$$

TEOREMA 161. *(Teorema de Fubini)*

Seja f integrável em $\mathbb{R}^{n+m}$. Então

1: a: $f(x,\cdot)$ *é integrável q.s. em* $\mathbb{R}^n$;

b: $f(\cdot,y)$ *é integrável q.s. em* $\mathbb{R}^m$;

2: a: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,\cdot)d\mu_1(x)$ *é igual q.s. a uma função integrável de* y;

b: $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot,y)d\mu_2(y)$ *é igual q.s. a uma função integrável de* x;

3:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)=\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)d\mu_1(x)d\mu_2(y)$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [2], pág.99. □

DEFINIÇÃO 162. *Uma função mensurável $f=(f_1,...,f_m): X\to\mathbb{R}^m$ é integrável se cada uma das funções coordenadas f_i é integrável e define-se:*

$$\int_X f d\mu=\int_X (f_1,...,f_m)d\mu=(\int_X f_1 d\mu,...,\int_X f_m d\mu).$$

8. Topologias fracas

8.1. A topologia fraca $\sigma(X,X')$.

Seja X um espaço de Banach, X' o seu dual munido da norma dual

$$|f|_{X'}=\sup_{|x|_X\leq 1}|<f,x>|$$

e $f\in X'$. Denotamos por $\varphi_f: X\to\mathbb{R}$ a aplicação definida por $\varphi_f(x)=<f,x>$. Fazendo f percorrer X', obtemos uma família $(\varphi_f)_{f\in X'}$ de aplicações de X em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 163. *A topologia fraca $\sigma(X,X')$ em X é a topologia mais fraca (i.e., com menor número de abertos) em X que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f\in X'}$.*

PROPOSIÇÃO 164. *A topologia fraca $\sigma(X,X')$ é separada.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.35. □

OBSERVAÇÃO 165. Dada uma sucessão (x_n) em X, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ a convergência de x_n para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$, que se lê "x_n converge fracamente para x na topologia fraca $\sigma(X, X')$". Recordemos que $x_n \to x$ em X significa $|x_n - x|_X \to 0$ e, para evitar perigo de confusão, ler-se-á "x_n converge fortemente para x em X".

PROPOSIÇÃO 166. *Seja (x_n) uma sucessão em X. Então temos*

i: *$x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ sse $< f, x_n > \to < f, x > \quad \forall f \in X'$;*

ii: *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$;*

iii: *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$, então $|x_n|_X$ é limitada e $|x|_X \leq \liminf |x_n|_X$;*

iv: *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$ e se $f_n \to f$ em X' (i.e., $|f_n - f|_{X'} \to 0$), então $< f_n, x_n > \to < f, x >$.*

v: *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $|x_n|_X \to |x|_X$, então $x_n \to x$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.36, e [29], pág. 59. □

PROPOSIÇÃO 167. *Suponhamos que X tem dimensão finita. Então a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia usual coincidem. Em particular uma sucessão (x_n) converge fracamente sse converge fortemente.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.36. □

OBSERVAÇÃO 168.

i: Os abertos da topologia fraca $\sigma(X, X')$ são também abertos da topologia forte. Quando X tem dimensão infinita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ é estritamente mais fraca que a topologia forte, i.e., existem abertos da a topologia forte que não são abertos da topologia fraca;

ii: Em geral existem sucessões que convergem fracamente mas que não convergem fortemente.

8.2. A topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Seja X um espaço de Banach, X' o seu dual (munido da norma dual) e X'' o seu bidual, i.e., o dual de X', munido da norma

$$|\xi|_{X''} = \sup_{|f|_{X'}\leq 1} |<\xi, f>|.$$

Temos uma injecção canónica $J : X \to X''$ dada por: fixado $x \in X$, a aplicação $f \mapsto < f, x >$ de X' em $\mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo em X', i.e., um elemento de X'', que denotamos por Jx. Temos então

$$< Jx, f >_{X'',X'} = < f, x >_{X',X} \quad \forall x \in X, \ \forall f \in X'.$$

Sabemos que J é linear e que é uma isometria (i.e., $|Jx|_{X''} = |x|_X$ para qualquer $x \in X$). Com a ajuda de J podemos identificar X com um subespaço de X''. No espaço X' estão já definidas duas topologias:

i: a topologia forte (associada à norma de X');

ii: a topologia fraca $\sigma(X', X'')$.

Vamos agora definir uma terceira topologia em X': a topologia fraca* que denotamos por $\sigma(X', X)$. Para cada $x \in X$ consideramos a aplicação $\varphi_x : X' \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) =< f, x >$. Fazendo x percorrer X, obtemos uma família de aplicações $(\varphi_x)_{x\in X}$ de X' em $\mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 169. *A topologia fraca**, *designada por* $\sigma(X', X)$, *é a topologia mais fraca em* X' *que torna contínuas todas as aplicações* $(\varphi_x)_{x\in X}$.

Como $X \subset X''$, é claro que a topologia $\sigma(X', X)$ é menos fina que a topologia $\sigma(X', X'')$. Dito de outra forma, a topologia $\sigma(X', X)$ possui menos abertos que a topologia $\sigma(X', X'')$ (que possui menos abertos que a topologia forte).

OBSERVAÇÃO 170. **i:** Se uma topologia possui menos abertos, então ela possui mais compactos. Como os compactos têm um papel fundamental nos teoremas de existência, daí a importância destas topologias fracas.

ii: Dada uma sucessão $(f_n) \subset X'$, designamos por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ a convergência de f_n para f na topologia $\sigma(X', X)$.

PROPOSIÇÃO 171. *A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ é separada.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.40. □

PROPOSIÇÃO 172. *Seja f_n uma sucessão em X'. Então temos*

i: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *sse* $< f_n, x > \to < f, x > \quad \forall x \in X$;

ii: *Se* $f_n \to f$, *então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$;

iii: *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(X', X'')$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$;

iv: *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$, *então* $|f_n|_{X'}$ *é limitada e* $|f|_{X'} \leq \liminf |f_n|_{X'}$;

v: *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(X', X)$ *e se* $x_n \to x$ *em* X *(i.e.,* $|x_n - x|_X \to 0$*), então* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.41. □

OBSERVAÇÃO 173. Se X tem dimensão finita, então as três topologias coincidem.

TEOREMA 174. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*
O conjunto $B'(c) = \{f \in X' : |f|_{X'} \leq c\}$ *é compacto para a topologia fraca** $\sigma(X', X)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.43. □

8.3. Espaços reflexivos.

DEFINIÇÃO 175. *Seja X um espaço de Banach e J a injecção canónica de X em X''. Dizemos que X é reflexivo se $J(X) = X''$ (i.e., J é sobrejectiva).*

Quando X é reflexivo identificamos implicitamente X e X'' (com a ajuda do isomorfismo J).

TEOREMA 176. *(Teorema de Kakutani)*
Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo sse

$$B_X = \{x \in X : |x|_X \leq 1\}$$

é compacto para a topologia $\sigma(X, X')$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.44. □

PROPOSIÇÃO 177. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $M \subset X$ um subespaço vectorial fechado. Então M (munido da norma induzida por X) é ele próprio um espaço de Banach reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.45. □

COROLÁRIO 178. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo sse X' é reflexivo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.46 □

8.4. Espaços separáveis. Recorde-se que um espaço métrico X é separável sse possui um subconjunto numerável denso.

PROPOSIÇÃO 179. *Seja X um espaço métrico separável e $F \subset X$. Então F é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.47. □

TEOREMA 180. *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.47. □

OBSERVAÇÃO 181. A recíproca é falsa. Existem espaços de Banach X separáveis tal que X' não é separável. Ver, por exemplo, $X = L^1$, no próximo capítulo.

COROLÁRIO 182. *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo e separável sse X' é reflexivo e separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.48. □

TEOREMA 183. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sucessão limitada em X. Então existe uma subsucessão (x_{n_k}) que converge na topologia fraca $\sigma(X, X')$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.50. □

PROPOSIÇÃO 184. *Seja X um espaço de Banach separável e (f_n) uma sucessão limitada em X'. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia fraca* $\sigma(X', X)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.50. □

TEOREMA 185. *Se $B'(c)$ é a bola fechada de raio c do dual X' de um espaço normado separável X, então a topologia induzida sobre $B'(c)$ pela topologia fraca* de X' deriva da métrica:*

$$\rho(f,g) = \sum 2^{-k} \frac{|< f-g, x_k >|}{1+|< f-g, x_k >|},$$

onde $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão densa em X.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [14], página 426. □

OBSERVAÇÃO 186. Se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_k \neq 0,\ k = 1, 2, ...)$ é uma sucessão densa em X, então a métrica $\rho(\cdot,\cdot)$ é equivalente à métrica

$$\rho_c(f,g) = \sum \frac{1}{2^k |x_k|_X} |< f-g, x_k >|.$$

TEOREMA 187. *Todo o conjunto limitado no dual X' de um espaço normado separável é relativamente fracamente* compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [21], página 194. □

9. Medidas de Radon e o Dual de $C_0(X)$

9.1. Medidas sinal.

DEFINIÇÃO 188. *Dado um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$,uma função de conjuntos λ sobre $\mathcal{A}$ diz-se uma medida sinal se satisfaz as seguintes condições:*

1: $\lambda(E) \in (-\infty, +\infty]$ *para todo* $E \in \mathcal{A}$ *ou* $\lambda(E) \in [-\infty, +\infty)$ *para todo* $E \in \mathcal{A}$,

2: $\lambda(\emptyset) = 0$,

3: $\lambda(\cdot)$ *é contavelmente aditiva.*

$(X, \mathcal{A}, \lambda)$ *diz-se um espaço de medida sinal.*

DEFINIÇÃO 189. *Duas medidas sinal* λ_1 *e* λ_2 *definidas sobre um espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$ *dizem-se mutuamente singulares e escreve-se* $\lambda_1 \perp \lambda_2$ *se existem dois conjuntos* C_1 *e* C_2 $\mathcal{A}$-*mensuráveis tais que* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = X$, C_1 *é um conjunto de medida nula para* λ_2 *e* C_2 *é um conjunto de medida nula para* λ_1.

TEOREMA 190. *(Decomposição de Jordan de uma medida sinal)*
Dada uma medida sinal λ *sobre o espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$, *existem duas medidas positivas únicas* λ^+, λ^- *sobre* $(X, \mathcal{A})$ *tais que* $\lambda^+ \perp \lambda^-$ *e* $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, *isto é, para cada* $E \in \mathcal{A}$, $\lambda(E) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [43], páginas 182-183. □

Assim as definições e as propriedades das medidas positivas aplicam-se de forma óbvia às medidas sinal, visto que as medidas sinal são a 'soma' de duas medidas positivas. Por exemplo uma função f é integrável em relação a uma medida sinal sse é integrável em relação às medidas λ^+ e λ^-, nesse caso define-se:

$$\int_X f d\lambda = \int_X f d\lambda^+ - \int_X f d\lambda^-.$$

DEFINIÇÃO 191. *Dado um espaço de medida sinal* $(X, \mathcal{A}, \lambda)$, *seja* $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ *a decomposição de Jordan de* λ. λ^+ *diz-se a parte positiva de* λ *e* λ^- *a negativa. A variação total de* λ *sobre* $E \in \mathcal{A}$ *define-se por:*

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E).$$

λ *diz-se limitada se* $|\lambda|(X) < \infty$.
No conjunto de todas as medidas sinal limitadas sobre $(X, \mathcal{A})$ *define-se a norma de* λ *por:*

$$|\lambda| = |\lambda|(X). \tag{1}$$

9.2. Medidas de Radon.

OBSERVAÇÃO 192. Neste subcapítulo X é um espaço de Hausdorff localmente compacto.

DEFINIÇÃO 193. *(Medida regular)*
Sejam μ uma medida de Borel em X, E um subconjunto de Borel em X, $\mathcal{A}$ a colecção de todos os conjuntos abertos em X e $\mathcal{K}$ a colecção de todos os conjuntos compactos em X. Dizemos que a medida μ é

a: *exteriormente regular em E se $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \in \mathcal{A}\}$;*

b: *interiormente regular em E se $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \in \mathcal{K}\}$.*

Dizemos que uma medida de Borel μ é regular se é interiormente e exteriormente regular em todos os conjuntos de Borel.

DEFINIÇÃO 194. *(suporte de uma medida)*
Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre X e μ uma medida regular em $(X, \mathcal{A})$. Definimos suporte de μ como o complementar da união de todos os subconjuntos abertos μ-nulos, e denotamo-lo por $spt(\mu)$.

DEFINIÇÃO 195. *(Medida de Radon Positiva)*
Uma medida de Borel μ em X diz-se uma medida de Radon positiva se for exteriormente regular nos borelianos, interiormente regular nos abertos e satisfizer a condição

$$\mu(K) < \infty$$

para qualquer compacto $K \subset X$.

DEFINIÇÃO 196. *(Medida de Radon)*
Uma medida de Borel sinal λ, i.e., uma medida sinal definida no espaço mensurável (X, B_X) diz-se uma medida de Radon se as duas medidas em que se divide de forma única λ^+ e λ^- são medidas de Radon positivas.
O espaço das medidas de Radon limitadas designa-se por $M(X)$.

PROPOSIÇÃO 197. *Se $\lambda \in M(X)$, então λ é uma medida de Radon regular, i.e., as duas medidas positivas em que λ se divide são regulares.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [18], página 209. □

9.3. O Dual de $C_0(X)$.

DEFINIÇÃO 198. *Recorde-se que o espaço $C_0(X)$ é constituído pelas funções $u : X \to \mathbb{R}$ tais que*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Se $u \in C_0(X)$, então

$$||u||_{C_0} = \sup_{x\in X} |u(x)|.$$

TEOREMA 199. *(Teorema da representação de Riesz para C_0)*
Se $\varphi \in (C_0(X))'$, então existe uma única medida de Radon $\mu \in M(X)$ tal que para cada $f \in C_0(X)$

$$< \varphi, f >=< \mu, f >= \int_X f d\mu,$$

e

$$||\varphi||_{(C_0(X))'} = \sup_{||\Phi||_{C_0(X)}\leq 1} < \varphi, \Phi >= \sup_{||\Phi||_{C_0(X)}\leq 1} \int_X \Phi d\mu = |\mu|.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[18]**, página 216. □

Assim podemos identificar o dual de $C_0(X)$ com o espaço $M(X)$. Note-se que $C_0(\mathbb{R}^n)$ não é reflexivo.

EXEMPLO 200. Para cada $\mu \in M(X)$ defina-se $\Psi(\mu) = \sum_{x\in X} \mu(\{x\})$. Esta função está bem definida pois $\Psi(\mu) \leq |\mu|$. Se existir uma medida não trivial $\mu \in M(X)$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$, então $\Psi \in M(X)'$, mas não existe $x \in X$ tal que $\Psi(\cdot) = J_x(\cdot)$, logo $C_0(X)$ não é reflexivo. No caso em que $X = \mathbb{R}^n$, se f for uma função contínua, não trivial, positiva e de suporte compacto, então a medida que para cada $E \in B_{\mathbb{R}^n}$ vale:

$$\mu(E) = \int_E f dx,$$

está em $M(\mathbb{R}^n)$ é não trivial e para cada $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$.

OBSERVAÇÃO 201. Realcem-se alguns factos importantes sobre $M(X)$, que resultam do facto de podermos identificar este espaço com o dual de $C_0(X)$.

1: Em primeiro lugar note-se que $M(X)$ munido da norma:

$$|\mu| = \sup_{||\Phi||_{C_0(X)}\leq 1} \int_X \Phi d\mu,$$

é um espaço de Banach, visto que $M(X)$ é o dual do espaço normado $C_0(X)$.

2: Como nesta dissertação o caso que mais nos interessa é quando $X = \mathbb{R}^n$, e nesse caso $M(\mathbb{R}^n)$ não é reflexivo, nada nos garante que uma sucessão $(\mu_k)_k$ limitada em $M(\mathbb{R}^n)$ admita uma sucessão fracamente convergente, mas se falarmos da convergência fraca* o caso muda de figura, i. e., qualquer sucessão $(\mu_k)_k$ limitada em $M(\mathbb{R}^n)$ possui uma subsucessão $(\mu_j)_j$ fracamente* convergente.

3: $(\mu_j)_j \subset M(X)$ converge fracamente* para $\mu \in M(X)$ se para cada $\Phi \in C_0(X)$:

$$< \Phi, \mu_j >= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi d\mu_j \to \int_{\mathbb{R}^n} \Phi d\mu =< \Phi, \mu >,$$

quando $j \to \infty$.

4: Seja $(\Phi_j)_j$ ($\Phi_j \neq 0,\ j = 1, 2, ...$) uma sucessão densa em $C_0(X)$. Esta sucessão existe pois $C_0(X)$ é um espaço separável, para ver uma demonstração deste facto consultar por exemplo **[39]**, páginas 165 e seguintes. Seja $c > 0$. Então a topologia fraca* da bola fechada $B'(c)$ de $M(X)$ é dada pela métrica:

$$\rho_c(\mu, \nu) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j||\Phi_j||_{C_0}} | < \Phi_j, \nu - \mu > |.$$

10. Definição e propriedades dos espaços L^p

No que se segue Ω representa um aberto de $\mathbb{R}^n$, munido da medida de Lebesgue.

10.1. Definições e propriedades.

DEFINIÇÃO 202. *Dizemos que duas funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis são equivalentes ou estão na mesma classe de equivalência se $f - g : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função tal que*

$$\int_\Omega |f(x) - g(x)| dx = 0.$$

DEFINIÇÃO 203. *A classe de equivalência de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$, que denotamos por $[f]$, é o conjunto das funções $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis que lhe são equivalentes.*

OBSERVAÇÃO 204. Como usualmente, em vez de $[f]$, escreveremos f, pensando neste como um representante da sua classe de equivalência.

DEFINIÇÃO 205. *Designamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das classes de equivalência de funções Lebesgue integráveis em Ω com valores em $\mathbb{R}$, munido da norma*

$$|f|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

DEFINIÇÃO 206. *Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

munido da norma

$$|f|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

DEFINIÇÃO 207. *Definimos o espaço $L^\infty(\Omega)$ por*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ mensurável e } \exists\ c \geq 0 : |f(x)| \leq c \ \ q.s. \textit{ em } \Omega\},$$

munido da norma

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |f(x)| \leq c \ q.s. \textit{ em } \Omega\} = supess_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

PROPOSIÇÃO 208. *Se $f \in L^\infty$, temos*

$$|f(x)| \leq |f|_{L^\infty} \ q.s. \textit{ em } \Omega.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.56. □

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por p' o expoente conjugado de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

TEOREMA 209. *(Desigualdade de Hölder)*
Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq |f|_{L^p(\Omega)}|g|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.56. □

TEOREMA 210. *Para qualquer* $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ *é um espaço vectorial e* $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.57. □

TEOREMA 211. *(Teorema de Fischer-Riesz)*
Para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.57. □

COROLÁRIO 212. $L^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno*

$$< f, g >_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [29], pág.51. □

10.2. Reflexividade. Separabilidade. O dual de L^p.

TEOREMA 213. $L^p(\Omega)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.59. □

PROPOSIÇÃO 214. *Os espaços* $L^1(\Omega)$ *e* $L^\infty(\Omega)$ *não são reflexivos.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.64 e 65. □

OBSERVAÇÃO 215. O dual de $L^\infty(\Omega)$ contém estritamente $L^1(\Omega)$.

TEOREMA 216. *(Teorema da representação de Riesz para* L^p*)*
Seja $1 < p < \infty$ *e seja* $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. *Então existe um único* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que*

$$< \varphi, f > = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, temos

$$|u|_{L^{p'}(\Omega)} = |\varphi|_{(L^p(\Omega))'}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.61. □

OBSERVAÇÃO 217. No que segue faremos a identificação $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.

TEOREMA 218. *(Teorema da representação de Riesz para L^1)*
Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Então existe um único $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$< \varphi, f >= \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^1(\Omega).$$

Além disso, temos

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} = |\varphi|_{(L^1(\Omega))'}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.63. □

OBSERVAÇÃO 219. No que segue faremos a identificação $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 220. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para cada compacto $K \subset \Omega$.*

LEMA 221. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. tal que*

$$\int_\Omega f(x)u(x)dx = 0 \ \forall u \in C_c(\Omega).$$

Então $f = 0$ q.s. em Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.61. □

TEOREMA 222. *(Teorema de Densidade)*
Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, o que implica,

$$\forall \ f \in L^p(\Omega) \ \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ g \in C_c(\Omega) : |f - g|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.62. □

TEOREMA 223. *$L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.63. □

PROPOSIÇÃO 224. *O espaço $L^\infty(\Omega)$ não é separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.66. □

10.3. Convergência forte, fraca e fraca* em L^p.

OBSERVAÇÃO 225. Seja $1 \leq p \leq \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fortemente para $f \in L^p(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$) se

$$|f_n - f|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

OBSERVAÇÃO 226. Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $f \in L^p(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

qualquer que seja $g \in L^{p'}(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 227. Seja $p = \infty$. A sucessão $(f_n) \subset L^\infty(\Omega)$ converge fracamente* para $f \in L^\infty(\Omega)$ (e denotamos este facto por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $L^\infty(\Omega)$) se

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

qualquer que seja $g \in L^1(\Omega)$.

TEOREMA 228. *Sejam $1 \leq p < \infty$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ uma sucessão e $f \in L^p(\Omega)$, tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) tal que*

a: *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.s. em Ω;*

b: *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ e q.s. em Ω, para alguma função $h \in L^p(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.58. □

LEMA 229. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado. Então*

1º caso: *Se $p = 1$,*

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^1(\Omega)$$

sse

1: *existe $k \geq 0$ tal que $|f_n|_{L^1(\Omega)} \leq k$, qualquer que seja n;*

2: *$\int_D [f_n(x) - f(x)]dx \to 0$ para qualquer cubo $D \subset \Omega$;*

3: *para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existe* $\lambda(\varepsilon) > 0$ *tal que se* $E \subset \Omega$ *é mensurável, com* $|E| < \lambda(\varepsilon)$, *então*

$$\int_E |f_n(x)|dx < \varepsilon$$

qualquer que seja n.

2^o **caso:** *Se* $1 < p < \infty$,

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L^p(\Omega)$$

sse

1: *existe* $k \geq 0$ *tal que* $|f_n|_{L^p(\Omega)} \leq k$, *qualquer que seja* n;

2: $\int_D [f_n(x) - f(x)]dx \to 0$ *para qualquer cubo* $D \subset \Omega$;

3^o **caso:** *Se* $p = \infty$,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } L^\infty(\Omega)$$

sse

1: *existe* $k \geq 0$ *tal que* $|f_n|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$, *qualquer que seja* n;

2: $\int_D [f_n(x) - f(x)]dx \to 0$ *para qualquer cubo* $D \subset \Omega$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**12**], pág.20. □

OBSERVAÇÃO 230. Devido às propriedades das convergências fraca e fraca* temos: se $1 < p \leq \infty$ e $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ é uma sucessão limitada, então existe uma subsucessão $(f_k)_k$ de $(f_n)_n$ que é fracamente (fracamente* no caso $p = \infty$) convergente.

DEFINIÇÃO 231. *Uma família de funções* $\{f_\alpha\}_\alpha \subset L^1(\Omega)$ *diz-se equiintegrável se, para qualquer* $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ *tal que*

$$\int_E |f(x)|dx \leq \epsilon, \forall f \in \{f_\alpha\}_\alpha,$$

e para todo o conjunto $E \subset \Omega$ *tal que* $|E| \leq \delta$.

TEOREMA 232. *(Teorema do tipo de Dunford-Pettis)*
Seja $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções de* $L^1(\Omega)$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1: *a sucessão* $(f_n)_n$ *é sequencialmente fracamente relativamente compacta, i.e.,* $(f_n)_n$ *admite uma subsucessão que é fracamente convergente,*

2: *a sucessão $(f_n)_n$ é equiintegrável,*

3: *existem uma constante M e uma função $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ limitada inferiormente tal que $\phi(\zeta)/\zeta \rightarrow +\infty$ quando $\zeta \rightarrow +\infty$ e $\int_\Omega \phi(|f_n(x)|)dx \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*

4: *existe uma função $\psi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ limitada inferiormente tal que $\psi(\zeta)/\zeta \rightarrow +\infty$ quando $\zeta \rightarrow +\infty$, e a sucessão $(\psi(|f_n|))_n$ é equiintegrável,*

5:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_n \int_{\{|f_n|\geq k\}} |f_n|\, dx \right) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Em relação às primeiras quatro equivalências ver as referencias da página 329 de [**10**], para a ultima alínea do teorema ver [**33**]. □

10.4. Convolução e sucessões regularizadoras.

TEOREMA 233. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$.Então para quase todo o $x \in \mathbb{R}^n$ a função $y \rightarrow f(x-y)g(y)$ é integrável sobre $\mathbb{R}^n$. Defina-se*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Então $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}.$$

A função $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ diz-se a convolução de f e g.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**8**], página 66. □

DEFINIÇÃO 234. *seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Considere-se a família de todos os conjuntos abertos $(w_\alpha)_\alpha$ tais que para cada α: $w_\alpha \subset \Omega$ e $f(x) = 0$ q.s. em w_α. Defina-se $w = \bigcup_\alpha w_\alpha$. O conjunto $spt(f) = \Omega \setminus w$, diz-se o suporte de f.*

Note-se que $f(x) = 0$ q.s. em w; e se $f = g$ q.s. em Ω, então $spt(f) = spt(g)$, pelo que podemos falar do suporte de uma função em L^p.

PROPOSIÇÃO 235. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$spt(f * g) \subset \overline{spt(f) + spt(g)}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], página 68. □

DEFINIÇÃO 236. *Diz-se que a sucessão* $(f_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é uma sucessão regularizadora se para cada* $n \in \mathbb{N}$, $spt(f_n) \subset B(1/n)$ *e* $\int_{\mathbb{R}^n} f_n dx = 1$.

Recorde-se que $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções reais de suporte compacto e que têm derivadas de todas as ordens contínuas.

TEOREMA 237. *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *com* $1 \leq p < \infty$, *e* $(f_n)_n$ *uma sucessão regularizadora. Então a sucessão* $f_n * f \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág. 71. □

10.5. Definição do espaço $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

DEFINIÇÃO 238. *Uma função* $f = (f_1, ..., f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *está em* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, *se cada uma das funções coordenadas* f_i $(i = 1, ..., m)$ *está em* $L^p(\Omega)$.
A norma de f *define-se por:*

1: *se* $1 \leq p < \infty$

$$||f||_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} (|f|_{\mathbb{R}^m})^p dx \right)^{1/p}.$$

2: *se* $p = \infty$

$$|f|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |f(x)|_{\mathbb{R}^m} \leq c \text{ q.s. em } \Omega\} = supess_{x\in\Omega}|f(x)|.$$

OBSERVAÇÃO 239. Assim os resultados demonstrados para $L^p(\Omega)$ são de uma forma geral válidos para $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ depois de feitas as devidas alterações, por exemplo $f_k = (f_k^1, ..., f_k^m) \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ converge fracamente para $f = (f_1, ..., f_m) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se para cada $g = (g^1, ..., g^m) \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se tem a convergência:

$$\int_\Omega < g, f_k > dx \to \int_\Omega < g, f > dx \Leftrightarrow \int_\Omega g^1 f_k^1 + ... + g^m f_k^m dx \to \int_\Omega g^1 f^1 + ... + g^m f^m dx.$$

11. Os espaços $W^{1,p}$

11.1. Definições e propriedades.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

DEFINIÇÃO 240. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ define-se por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \right.$$
$$\left. = - \int_\Omega g_i(x) \varphi(x) dx \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, ..., n \right\}$$

onde $C_c^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas com derivadas parciais contínuas de todas as ordens, com suporte compacto, em Ω.

OBSERVAÇÃO 241. Pomos $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Quando não houver perigo de confusão, por vezes escreveremos $W^{1,p}$ em vez de $W^{1,p}(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 242. *Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$, denotamos por*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Este g_i é único pelo Lema 221.

O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é munido da norma

$$|u|_{W^{1,p}} = |u|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p}$$

ou, por vezes, da norma equivalente

$$\left(|u|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (se\ 1 \leq p < \infty).$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2};$$

a norma associada

$$|u|_{H^1} = \left(|u|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

é equivalente à norma de $W^{1,2}$.

TEOREMA 243. *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.150. □

OBSERVAÇÃO 244. Na definição de $W^{1,p}$ podemos utilizar indiferentemente $C_c^1(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ como conjunto das funções teste.

$\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω é um aberto tal que $\overline{\omega} \subset \Omega$ e $\overline{\omega}$ é compacto.

TEOREMA 245. *(Teorema de Friedrichs)*
Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sucessão $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_{n|\Omega} \to u \text{ em } L^p(\Omega)$$

$$\nabla u_{n|\omega} \to \nabla u_{|\omega} \text{ em } L^p(\Omega)^n \text{ para qualquer } \omega \subset\subset \Omega.$$

OBSERVAÇÃO 246. Supondo hipóteses adicionais sobre Ω (regularidade), podemos obter um resultado mais preciso (Ver [8],pág.162).

11.2. Desigualdades de Sobolev.

TEOREMA 247. *(Teorema de Rellich-Kondrachov)*
Suponhamos Ω limitado de classe C^1. Temos que

a: *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \frac{np}{n-p})$,*

b: *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$,*

c: *se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$,*

com injecções compactas.

OBSERVAÇÃO 248. **i:** Se substituirmos $W^{1,p}$ por $W_0^{1,p}$ (ver secção 10.3, abaixo), então não é necessária qualquer hipótese de regularidade sobre Ω.

ii: A injecção compacta pode ser lida da seguinte forma. Seja

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

- se $p < n$, então $u_\nu \to u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, \frac{np}{n-p})$,
- se $p = n$, então $u_\nu \to u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty)$,
- se $p > n$, então $u_\nu \to u$ em $L^\infty(\Omega)$.

11.3. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 249. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 250. O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável; é reflexivo se $1 < p < \infty$. $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno de H^1.

As funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ são "grosso modo"as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ "que se anulam em $\partial\Omega$". É delicado dar um sentido preciso a esta afirmação pois uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ está definida apenas q.s. (e $\partial\Omega$ pode ter medida nula). No entanto, as duas seguintes caracterizações dão sentido a esta afirmação.

LEMA 251. *Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, com spt(u) compacto contido em Ω. Então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.171. □

TEOREMA 252. *Suponhamos Ω de classe C^1. Seja*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ com } 1 \leq p < \infty.$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes:

i: $u = 0$ *em* $\partial\Omega$;

ii: $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.171. □

TEOREMA 253. *(Desigualdade de Poincaré)*

Suponhamos que Ω é um aberto limitado, $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (que depende de Ω e de p) tal que

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [8], pág.174. □

11.4. Convergência forte, fraca e fraca* em $W^{1,p}$.

OBSERVAÇÃO 254. Seja $1 \leq p \leq \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge fortemente para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$) se

$$|u_n - u|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

OBSERVAÇÃO 255. Seja $1 \leq p < \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge fracamente para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$) se

$$\int_\Omega u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^{p'}(\Omega) \text{ e}$$
$$\int_\Omega \nabla u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega \nabla u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 256. Seja $p = \infty$. A sucessão $(u_n) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ converge fracamente* para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (e denotamos este facto por $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $W^{1,\infty}(\Omega)$) se

$$\int_\Omega u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^1(\Omega) \text{ e}$$
$$\int_\Omega \nabla u_n(x)g(x)dx \to \int_\Omega \nabla u(x)g(x)dx \ \forall g \in L^1(\Omega).$$

OBSERVAÇÃO 257. A convergência forte (resp. fraca) em $W^{1,p}(\Omega)$ significa a convergência forte (resp. fraca) em $L^p(\Omega)$ das funções e dos seus gradientes conjuntamente.

11.5. Os espaços $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

OBSERVAÇÃO 258. Analogamente ao que fizemos para $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos definir os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ de aplicações que tomam valores em $\mathbb{R}^m$. Facilmente se prova que: $u = (u_1, ..., u_m) \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ sse para cada $i \in \{1, ..., m\}$, $u_i(\cdot) \in$

$W^{1,p}(\Omega)$. Portanto tudo o que vimos sobre $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser transferido para $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, aplicando os resultados a cada uma das funções coordenadas $u_i(\cdot)$ de $u(\cdot)$. O mesmo acontece com $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

OBSERVAÇÃO 259. Se $u = (u_1, ..., u_m) \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ então para cada $x \in \Omega$

$$\nabla u(x) = [\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)], \; com \; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

12. Pontos de Lebesgue

12.1. Pontos de Lebesgue de uma Função.

DEFINIÇÃO 260. *Sejam Ω um conjunto de $\mathbb{R}^n$, μ uma medida sobre Ω e $p \geq 1$.*

$$L^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é } \mu-\text{mensurável e } \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty\}.$$

TEOREMA 261. *(Teorema da Diferenciação de Lebesgue-Besicovitch) Sejam μ uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Então*

(2)
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\mu(y) = f(x),$$

μ-q.s. em $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [17], página 43. □

TEOREMA 262. *Sejam μ uma medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$, com $1 \leq p < \infty$. Então*

(3)
$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p d\mu(y) = 0,$$

μ-q.s. em $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [17], página 44. □

DEFINIÇÃO 263. *Um ponto x que verifique (3) diz-se um ponto de Lebesgue da função $f(\cdot)$ com respeito à medida de Radon μ.*

12.2. Pontos de Lebesgue de um conjunto.

DEFINIÇÃO 264. *Seja E um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. $x \in \mathbb{R}^n$ diz-se um ponto de densidade 1 para E se:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|} = 1,$$

e de densidade 0 para E se:

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|} = 0.$$

TEOREMA 265. *Seja E um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. Então:*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|} = 1,$$

q.s. em E e

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|} = 0,$$

q.s. em $\mathbb{R}^n \setminus E$.

DEMONSTRAÇÃO. Observe-se que a medida de Lebesgue é uma medida de Radon, assim para obter o resultado desejado basta em (2) fazer $f(\cdot) = \chi_E(\cdot)$. □

DEFINIÇÃO 266. *Seja E um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. $x \in E$ diz-se um ponto de Lebesgue de E se é de densidade 1 para E.*

OBSERVAÇÃO 267. Observe-se que se x é um ponto de Lebesgue para E, então existem vizinhanças de x, V_x, tão pequenas quanto se necessite tais que $|V_x \cap E| > 0$, em particular existem sucessões não triviais $(x_k)_k \subset E$ tais que $x_k \to x$.

De certa forma os pontos de Lebesgue de um conjunto mensurável formam o seu interior em medida, enquanto que os pontos de densidade 0 formam o exterior em medida, os que sobram pelas mesmas razões podem ser identificados com a fronteira do conjunto em medida. Para ver definições exactas de interior, exterior e fronteira de um conjunto em medida consultar por exemplo: [**17**], páginas 221 e seguintes.

13. Funções convexas

Seja X um espaço de Banach.

DEFINIÇÃO 268. *Um subconjunto $A \subset X$ diz-se convexo se para quaisquer $x, y \in A, \lambda \in [0,1]$ temos $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.*

DEFINIÇÃO 269. *Seja A um subconjunto qualquer de X. O conjunto de todas as combinações convexas de elementos de A, i.e.,*

$$conv(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, u_i \in A, 1 \leq i \leq n \right\}$$

diz-se o convexificado de A.

OBSERVAÇÃO 270. $conv(A)$ é o menor conjunto convexo que contém A.

TEOREMA 271. *(Teorema de Carathéodory)*
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$conv(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver **[12]**, pág.42. □

DEFINIÇÃO 272. *Seja $A \subset X$ um conjunto convexo. Uma função $f : A \to (-\infty, +\infty]$ diz-se convexa em A se*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para quaisquer $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$.

DEFINIÇÃO 273. *O domínio da função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é definido por*

$$dom(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

DEFINIÇÃO 274. *O epigráfico da função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é definido por*

$$epi(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

PROPOSIÇÃO 275. *Uma função $f : X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa sse $epi(f)$ é convexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**16**], pág.9. □

TEOREMA 276. *(Desigualdade de Jensen)*
Seja μ uma medida positiva de Radon sobre uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ num conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Seja $f \in L^1(\mu)$ uma função com valores vectoriais tal que $f(x) \in K$ μ-q.s. em Ω, onde $K \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo. Se φ é uma função convexa definida em K, então

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi(f) d\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**33**], pág.20. □

14. Funções Quasiconvexas

DEFINIÇÃO 277. *(Função quasiconvexa)*
Uma função $L : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ diz-se quasiconvexa no ponto $A \in \mathbb{R}^{nm}$ se para qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ é válida a desigualdade:

$$\int_\Omega L(A + \nabla\phi(y))dy \geq L(A)|\Omega|.$$

PROPOSIÇÃO 278. *A definição de função quasiconvexa não depende da escolha do aberto Ω, desde que $|\partial\Omega| = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver por exemplo [**5**]. □

15. Selecções Mensuráveis

DEFINIÇÃO 279. *Sejam X, Y dois conjuntos quaisquer. Uma relação do tipo $a \sim b$ onde, $a \in X$ e $b \in 2^Y$, que para cada $a \in X$ verifique a condição*

$$(a \sim b \wedge a \sim b_1) \Rightarrow (b = b_1),$$

diz-se uma multifunção.

DEFINIÇÃO 280. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e limitado e (K, ρ) um espaço métrico compacto. Uma multifunção $V : \Omega \to 2^K$ diz-se fechada e mensurável se para qualquer $x \in \Omega$ o conjunto $V(x)$ é fechado e para qualquer subconjunto fechado C de K o conjunto $\{x \in \Omega : V(x) \cap C \neq \emptyset\}$ é mensurável.*

TEOREMA 281. *Se* $V : \Omega \to 2^K$ *é uma multifunção fechada e mensurável, então existe uma selecção mensurável, isto é, existe uma função* $\nu : \Omega \to (K, \rho)$ *mensurável tal que* $\nu(x) \in V(x)$ *q.s. em* Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [9]. □

16. Cobertura de Vitali

DEFINIÇÃO 282. *Diz-se que uma sucessão de subconjuntos* $(E_i)_i$ *de* $\mathbb{R}^m$ *contrae suavemente para um dado ponto* $x \in \mathbb{R}^m$, *se existe* $\alpha > 0$ *tal que cada* $E_i \subset B(x, r_i)$ *e* $|E_i| \geq \alpha |B(x, r_i)|$, *onde* $r_i \to 0$, *quando* $i \to \infty$.

DEFINIÇÃO 283. *(Cobertura de Vitali)*
Uma família de subconjuntos abertos $(A_\alpha)_\alpha$ *diz-se uma Cobertura de Vitali de* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *se para cada* $x \in \Omega$ *existe uma sucessão de subconjuntos* $(A_i)_i \subset (A_\alpha)_\alpha$ *que contrae suavemente para* x.

TEOREMA 284. *(Teorema da cobertura de Vitali)*
Seja $(A_\alpha)_\alpha$ *uma Cobertura de Vitali de* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. *Então existe uma subfamília numerável* $(A_j)_j$ *da família inicial tal que*

$$|\Omega \setminus \bigcup_j A_j| = 0$$

e os conjuntos A_i *são mutuamente disjuntos.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [44], páginas 7 e seguintes. □

17. Alguns Resultados da Análise Real

Na segunda parte desta dissertação vamos usar alguns resultados importantes da Análise Real recordemo-los.

TEOREMA 285. *(Teorema da convergência de Dini)*
Seja $K \subset \mathbb{R}$ *um conjunto compacto. Se uma sucessão de funções contínuas* $f_n : K \to \mathbb{R}$ *converge monotonamente para uma função contínua* $f : K \to \mathbb{R}$, *então a convergência é uniforme.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [24], página 298. □

DEFINIÇÃO 286. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função p-vezes diferenciável continuamente, ou seja uma função de classe C^p, um ponto $x \in \Omega$ diz-se regular com respeito à função f se a característica da matriz $\bigtriangledown f(x)$ for igual a m, isto é, se a matriz $\bigtriangledown f(x)$ possui m colunas linearmente independentes; no caso contrário x diz-se um ponto crítico de f. Designamos por ϱ o conjunto de todos os pontos críticos de f e por $f(\varrho)$ o conjunto de todos os valores críticos da função.*

TEOREMA 287. *(Teorema de Sard)*
Se a função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é p-vezes diferenciável continuamente, então os valores críticos $f(\varrho)$ têm medida nula em $\mathbb{R}^m$, desde que $m - n + 1 \leq p$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [6], página 52. □

TEOREMA 288. *(Teorema da Função Implícita)*
Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $c^k, (k \geq 1)$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se o ponto $p = (x_0, y_0) \in U$ é tal que $f(p) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, então: existem uma bola aberta $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ tais que $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : B \to J$, de classe c^k e para cada $x \in B$ tem-se:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x)), (i = 1, ..., n).$$

A função $y = \xi(x)$ diz-se definida implicitamente pela equação $f(x, y) = c$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [25], página 164. □

TEOREMA 289. *(Teorema Global da Função Implícita)*
A imagem inversa $M = f^{-1}(c)$ de um valor regular c de uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de classe C^k. Para cada ponto $P \in M$ o espaço vectorial tangente à hipersuperfície em P, $T_p(M)$, ou ,equivalentemente, o conjunto dos vectores $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ perpendiculares ao vector $\bigtriangledown f(p)$ é o núcleo da diferencial $\bigtriangledown f(p) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [25], página 168. □

CAPÍTULO 3

Uma Nova Abordagem à teoria das Medidas de Young

1. Introdução

Neste capítulo da dissertação fala-se da teoria das medidas de Young gradiente e de como através delas se obtêm resultados de semicontinuidade inferior fraca e relaxação para problemas variacionais. Apresenta-se uma nova caracterização das medidas de Young como funções mensuráveis que tomam valores num determinado espaço métrico compacto, o que nos permite utilizar o teorema de Lusin e teoremas de selecção para construir tais medidas. Usando estes métodos e o lema da compacidade simplificam-se as demonstrações dos resultados sobre a teoria das medidas de Young gradiente e introduzem-se novas aplicações desta teoria nos problemas do Cálculo das Variações.

Considere-se o funcional

$$I(u) = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))dx,$$

onde Ω é um domínio em $\mathbb{R}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ é uma função de Caratheodory. Recorde-se que $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ é uma função ou um integrando de Caratheodory se para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \Omega_\epsilon| \leq \epsilon$ e a restrição de L a $\Omega_\epsilon \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$ é uma função contínua. Algumas questões fundamentais do Cálculo das Variações são:

- quais as condições que devemos impor a L para que $I(\cdot)$ seja semicontinuo inferiormente em relação à convergência fraca do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$;
- pode o invólucro semicontinuo inferior de $I(\cdot)$ ser expresso como um funcional integral;
- sobre que condições a convergência fraca $u_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e a convergência $I(u_k) \to I(u_0)$ implica a convergência forte de u_k para u_0.

Recentemente chegou-se à conclusão que resultados sobre estes problemas são mais facilmente apresentados e demonstrados se trabalharmos com medidas de Young.

2. Famílias de Medidas Fracamente* Mensuráveis

OBSERVAÇÃO 290. Recordem-se algumas relações entre $C_0(\mathbb{R}^l)$ e o seu dual.

1: Pelo teorema da representação de Riesz, os funcionais lineares limitados sobre

$$C_0(\mathbb{R}^l) = \{\Phi \in C(\mathbb{R}^l) : \lim_{|v|\to\infty} \Phi(v) = 0\},$$

podem ser escritos na forma:

$$l(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu,$$

onde ν é uma medida de Radon limitada. Assim o espaço $M(\mathbb{R}^l)$ das medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^l$ pode ser identificado com o dual de $C_0(\mathbb{R}^l)$.

Além disso $M(\mathbb{R}^l)$ é um espaço de Banach se munido da norma:

$$||\nu||_M := \sup_{||\Phi||_{C_0}\leq 1} \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu,$$

pois é o espaço dual do espaço normado $C_0(\mathbb{R}^l)$.

2: Para cada $c \in [0, +\infty)$ o conjunto

$$K_c = \{\nu \in M(\mathbb{R}^l) : ||\nu||_M \leq c\}$$

é limitado e fechado no dual de $C_0(\mathbb{R}^l)$ logo é fracamente* compacto e é metrizável, sendo a métrica definida pela expressão:

$$\rho_c(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i ||\Phi_i||_{C_0}} | < \Phi_i, \nu - \mu > |,$$

onde $(\Phi_i)_i$ ($\Phi_i \neq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$) é uma sucessão densa em $C_0(\mathbb{R}^l)$.

Note-se que se $\Psi_i = \frac{\Phi_i}{||\Phi_i||_{C_0}}$, então

$$\rho_c(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left| \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\nu - \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu \right|.$$

OBSERVAÇÃO 291. Observações sobre $M^{m\times n}$.

1: Identificamos $\mathbb{R}^{nm}$ com o espaço das matrizes $m \times n$, $M^{m\times n}$.

2: Para $A \in \mathbb{R}^{nm}$ denota-se por

$$l_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

a função que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ vale Ax que é o vector de $\mathbb{R}^m$ definido pela multiplicação das matrizes A e $[x]^T$.

3: Se $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$ e $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, então $a \otimes b$ é uma matriz $m \times n$ definida por $[a_i b_j]$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$.

DEFINIÇÃO 292. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ um conjunto limitado e mensurável. Uma família de medidas de Radon $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, verificando $\nu_x \in K_c$ q.s. em Ω, diz-se fracamente* mensurável se para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ a função:*

$$x \to < \Phi, \nu_x >$$

é mensurável; denota-se o conjunto destas medidas por $L_w(\Omega, K_c)$.

DEFINIÇÃO 293. *Diz-se que a sucessão $(\nu_x^k)_{x\in\Omega} \subset L_w(\Omega, K_c)$, $k \in \mathbb{N}$, converge fracamente* para a família $(\nu_x)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_c)$ se para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ se tem:*

$$< \Phi, \nu_{(\cdot)}^k > \rightharpoonup^* < \Phi, \nu_{(\cdot)} >,$$

em $L^\infty(\Omega)$; denota-se esta convergência por $(\nu_x^k)_{x\in\Omega} \rightharpoonup^* (\nu_x)_{x\in\Omega}$.

Note-se que o espaço das famílias fracamente* mensuráveis, $\bigcup_{c\geq 0} L_w(\Omega, K_c)$, é o espaço dual de $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^l))$, ver **[15]**, página 588.

TEOREMA 294. *(Teorema do tipo de Lusin sobre a caracterização das funções mensuráveis) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e limitado, (K, ρ) um espaço métrico compacto. Uma função $\xi : \Omega \to (K, \rho)$ é mensurável sse para qualquer $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tal que: $|\Omega \setminus \Omega_\epsilon| \leq \epsilon$ e a restrição da função $\xi(\cdot)$ a Ω_ϵ é uma função contínua.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstram-se separadamente as duas implicações que constituem o teorema.

i: Suponhamos que para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto Ω_ϵ verificando os requisitos do teorema. Assim podemos considerar uma sucessão $(\Omega_i)_i$ de conjuntos compactos tal que $|\Omega \setminus \Omega_i| \leq \frac{1}{i}$ e a função $\xi : \Omega_i \to (K, \rho)$ é contínua $\forall i \in \mathbb{N}$.

Seja C um conjunto fechado de K. Pela continuidade de $\xi(\cdot)$ sobre Ω_i, para cada $i \in \mathbb{N}$, tem-se que os conjuntos

$$\widetilde{\Omega}_i = \{x \in \Omega_i : \xi(x) \in C\}$$

são compactos. Além disso, como $|\xi^{-1}(C) \setminus \cup_i \widetilde{\Omega}_i| = 0$ ($|\Omega \setminus \Omega_i| \leq \frac{1}{i}$) e a medida de lebesgue é completa, o conjunto $\xi^{-1}(C)$ é mensurável. De onde se concluí a mensurabilidade da função $\xi(\cdot)$.

ii: Suponha-se agora que a função $\xi(\cdot)$ é mensurável.

Vamos ver que para qualquer $\delta > 0$ existe um conjunto $\Omega_\delta \subset \Omega$ compacto tal que a desigualdade:

$$\limsup_{y \in \Omega_\delta, y \to x} \rho(\xi(x), \xi(y)) \leq \delta$$

vale $\forall x \in \Omega_\delta$. Este facto é suficiente para completar a demonstração, pois se $\delta_n = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, ...)$, temos

$$|\Omega \setminus \bigcap_{n=k}^{\infty} \Omega_{\delta_n}| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

e

$$\xi : \bigcap_{n=k}^{\infty} \Omega_{\delta_n} \to (K, \rho)$$

é uma função contínua, visto que para cada $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} \Omega_{\delta_n}$

$$\lim_{y \in \bigcap_{n=k}^{\infty} \Omega_{\delta_n}, y \to x} \rho(\xi(x), \xi(y)) = 0.$$

Para demonstrar a afirmação desejada fixemos $\delta > 0$. Considere-se uma cobertura finita de K constituída por conjuntos compactos $K_1, ..., K_{m(\delta)}$ com diâmetros inferiores a δ. Defina-se $\Omega_1 = \xi^{-1}(K_1)$. Agora escolha-se um subconjunto compacto $\widetilde{\Omega}_1$ de Ω_1 tal que $|\Omega_1 \setminus \widetilde{\Omega}_1| \leq \frac{\delta}{2}$. Em seguida define-se $\Omega_2 = (\xi^{-1}(K_2) \setminus \Omega_1)$ e escolhe-se um subconjunto compacto $\widetilde{\Omega}_2$ de Ω_2 tal que $|\Omega_2 \setminus \widetilde{\Omega}_2| \leq \frac{\delta}{4}$. Continue-se este procedimento para $i = 3, ..., m(\delta)$: para $\Omega_1, ..., \Omega_i$ conhecidos $\widetilde{\Omega}_{i+1}$ é um subconjunto compacto de

$$\Omega_{i+1} = \xi^{-1}(K_{i+1}) \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \Omega_j = \xi^{-1}(K_{i+1}) \setminus \xi^{-1}(\bigcup_{j=1}^{i} K_j),$$

tal que $|\Omega_{i+1} \setminus \widetilde{\Omega}_{i+1}| \leq \frac{\delta}{2^{i+1}}$. Finalmente defina-se $\Omega_\delta = \bigcup_{i=1}^{m(\delta)} \widetilde{\Omega}_i$. Temos que

$$|\Omega \setminus \Omega_\delta| = |\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\delta)} \widetilde{\Omega}_i| \leq \delta,$$

onde os conjuntos $\widetilde{\Omega}_i$ são compactos disjuntos. Assim, se $x_0 \in \widetilde{\Omega}_{i_0}$, $(x_k)_k \subset \Omega_\delta$ e $x_k \to x_0$ então $x_k \in \widetilde{\Omega}_{i_0}$ para qualquer k suficientemente grande, pelo que $\rho(\xi(x_k), \xi(x_0)) \leq \delta$ para k suficientemente grande, pela definição de $\widetilde{\Omega}_{i_0}$, e diâmetro de $K_{i_0} \leq \delta$.

O que completa a demonstração.

□

TEOREMA 295. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e mensurável. Seja $\nu_x \in K_c$ q.s. em Ω. A família $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é fracamente* mensurável sse a função*

$$\nu : \Omega \to (K_c, \rho_c)$$

é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos dividir a demonstração nas duas implicações que constituem a equivalência.

i: Suponhamos que $(\nu_x)_{x\in\Phi}$ é fracamente* mensurável, isto é, para qualquer $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ a função $x \to < \Phi, \nu_x >$ é mensurável.

Considere-se uma sucessão de funções $(\Phi_i)_i$ densa em $C_0(\mathbb{R}^l)$. Fixemos $\epsilon > 0$. Pelo teorema 294 para cada $i \in \mathbb{N}$ existe um conjunto compacto $\Omega_i \subset \Omega$ tal que a função $< \Phi_i, \nu_{(\cdot)} >: \Omega_i \to \mathbb{R}$ é contínua e $|\Omega \setminus \Omega_i| \leq \frac{\epsilon}{2^i}$. Pelo que para cada $i \in \mathbb{N}$ a função

$$< \Phi_i, \nu_{(\cdot)} >: \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} \Omega_\alpha \to \mathbb{R}$$

é contínua e

$$|\Omega \setminus (\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} \Omega_\alpha)| = |\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus \Omega_\alpha)| \leq |\Omega \setminus \Omega_1| + |\Omega \setminus \Omega_2| + ... \leq \frac{\epsilon}{2^1} + \frac{\epsilon}{2^2} + ... = \epsilon \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} = \epsilon$$

Assim, para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tal que: $|\Omega \setminus \Omega_\epsilon| \leq \epsilon$ e para qualquer i a função $< \Phi_i, \nu_{(\cdot)} >: \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$ é continua. Finalmente, como a sucessão $(\Phi_i)_i$ é densa em $C_0(\mathbb{R}^l)$, conclui-se que para qualquer $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$, a função $< \Phi, \nu_{(\cdot)} >: \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$ é contínua; de onde se conclui que $\nu : \Omega_\epsilon \to (k_c, \rho_c)$ é uma função contínua, logo $\nu(\cdot)$ tem a propriedade de Lusin, o que faz dela uma função mensurável.

ii: Supomos agora que $\nu : \Omega \to (K_c, \rho_c)$ é uma função mensurável. Pelo teorema 294 para qualquer $\epsilon > 0$ fixo existe um conjunto compacto $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \Omega_\epsilon| \leq \epsilon$ e a restrição de ν a Ω_ϵ é uma função contínua em relação à métrica ρ_c, logo é continua em relação á topologia fraca* de K_c, o que implica que para qualquer $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ a função $< \Phi, \nu_{(\cdot)} >: \Omega_\epsilon \to \mathbb{R}$ é contínua. Portanto, pelo teorema 294, para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ a função $< \Phi, \nu_{(\cdot)} >: \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável.

O que completa a demonstração.

□

DEFINIÇÃO 296. *seja $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ uma família de medidas fracamente* mensurável. Define-se a média de $Av(\mu_x)_{x\in\Omega}$ por:*

$$< Av(\mu_x)_{x\in\Omega}, \Phi >= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega < \mu_x, \Phi > dx, \;\; \Phi \in C_0(\mathbb{R}^l).$$

OBSERVAÇÃO 297. Alguns factos importantes sobre a média de uma família de medidas.

1: Se $\mu_x \in K_c$ q.s. em Ω, então $Av(\mu_x)_{x\in\Omega}$ é um funcional linear limitado em norma por c, logo $Av(\mu_x)_{x\in\Omega}$ está no dual de $C_0(\mathbb{R}^l)$, o que faz com que $Av(\mu_x)_{x\in\Omega}$ esteja em K_c.

2: Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere-se uma função $\Phi_k(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^l)$ que verifique: $0 \leq \Phi_k(x) \leq 1 \; \forall x$, $\Phi_k(x) = 1$ se $x \in B(k) = \{x \in \mathbb{R}^l : |x| \leq k\}$ e $\Phi_k(x) = 0$ se $x \in B(k+1)$, então para qualquer $U \subset \mathbb{R}^l$ Borel mensurável

$$Av(\mu_x)_{x\in\Omega}(U) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_{U\cap B(k)} \Phi_k(v) d\mu_x(v) dx.$$

PROPOSIÇÃO 298. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ um conjunto limitado e mensurável e $(\mu_x^1)_{x\in\Omega}, (\mu_x^2)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_c)$. Então:*

1: *$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(c) > 0$ com a propriedade seguinte: se $\rho_c(\mu_x^1, \mu_x^2) \leq \delta$ para todo o $x \in \Omega_\delta$ e $|\Omega \setminus \Omega_\delta| \leq \delta|\Omega|$ Então*

$$\rho_c(Av(\mu_x^1)_{x\in\Omega}, Av(\mu_x^2)_{x\in\Omega}) \leq \epsilon.$$

Além disso, δ não depende de Ω.

2: *se $\rho_c(\mu^k(\cdot), \mu(\cdot)) \to 0$ em medida, onde $(\mu_x^k)_{x\in\Omega} \subset L_w(\Omega, K_c)$, $(\mu_x)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_c)$, então:*

$$(\mu_x^k)_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\mu_x)_{x\in\Omega}$$

em $L_w(\Omega, K_c)$, quando $k \to +\infty$.

Demonstração. Comecemos por demonstrar a primeira afirmação.

1:

$$Av(\mu_x^1)_{x\in\Omega}, Av(\mu_x^2)_{x\in\Omega}) =$$

por definição

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\{|\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i dAv(\mu_x^1)_{x\in\Omega} - \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i dAv(\mu_x^2)_{x\in\Omega}|\frac{1}{2^i}\} =$$

por definição

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\{|\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^1 dx - \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^2 dx|\frac{1}{2^i|\Omega|}\} \leq$$

pelas propriedades do integral de Lebesgue

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\{\int_\Omega|\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^1 - \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i dAv(\mu_x^2)|dx\frac{1}{2^i|\Omega|}\} \leq$$

por $|\Omega \setminus \Omega_\delta| \leq \delta|\Omega|$

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\{\int_{\Omega_\delta}|\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^1 - \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^2|dx\frac{1}{2^i|\Omega|}\} + 2c\delta \leq$$

pelo teorema 159

$$\int_{\Omega_\delta}\{\sum_{i\in\mathbb{N}}|\int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^1 - \int_{\mathbb{R}^l} \Psi_i d\mu_x^2|dx\frac{1}{2^i|\Omega|}\} + 2c\delta \leq$$

por definição

$$2c\delta + \int_{\Omega_\delta} \rho_c(\mu_x^1, \mu_x^2)dx\frac{1}{|\Omega|} \leq$$

por hipótese

$$2c\delta + \delta = \delta(2c+1).$$

Obtemos o resultado desejado se δ for suficientemente pequeno para verificar

$$\delta(2c+1) \leq \epsilon.$$

2: $\rho_c(\mu^k(\cdot), \mu(\cdot)) \to 0$ em medida é equivalente a dizer que

$$\lim_{k\to\infty} |\{x \in \Omega : \rho_c(\mu_x^k, \mu_x) \geq \epsilon\}| = 0,$$

para cada $\epsilon > 0$. Note-se que esta convergência em medida também é válida para qualquer cubo $D \subset \Omega$, pois

$$|\{x \in \Omega : \rho_c(\mu_x^k, \mu_x) \geq \epsilon\}| \geq$$

$$|\{x \in D : \rho_c(\mu_x^k, \mu_x) \geq \epsilon\}|.$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Observe-se que se $D \subset \Omega$, então

$$\lim_k \rho_c(Av(\mu_x^k)_{x\in D}, Av(\mu_x)_{x\in D}) = 0$$

equivale a dizer

$$Av(\mu_x^k)_{x\in D} \rightharpoonup *Av(\mu_x)_{x\in D},$$

enquanto elementos de $M(\mathbb{R}^l)$.

Fixemos $\epsilon > 0$. Seja $\delta(\epsilon) > 0$ o 'δ' da primeira afirmação da proposição. Sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} |\{x \in D : \rho_c(\mu_x^k, \mu_x) \geq \delta\}| = 0,$$

logo existe $K_{\delta,\delta|D|}$ tal que para $k > K_{\delta,\delta|D|}$

$$|\{x \in D : \rho_c(\mu_x^k, \mu_x) \geq \delta\}| \leq \delta|D|,$$

o que implica, pela primeira afirmação da proposição,

$$\rho_c(Av(\mu_x^k)_{x\in D}, Av(\mu_x)_{x\in D}) \leq \epsilon$$

para qualquer $k \geq K_{\delta,\delta|D|}$. Pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$ conclui-se

$$\lim_k \rho_c(Av(\mu_x^k)_{x\in D}, Av(\mu_x)_{x\in D}) = 0.$$

Note-se que

$$Av(\mu_x^k)_{x\in D} \rightharpoonup *Av(\mu_x)_{x\in D},$$

é equivalente a afirmar que para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$\frac{1}{|D|}\int_D\int_{\mathbb{R}^l}\Phi d\mu_x^k dx \to \frac{1}{|D|}\int_D\int_{\mathbb{R}^l}\Phi d\mu_x dx.$$

Finalmente pela arbitrariedade do cubo $D \subset \Omega$ o teorema 229 implica que para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$<\Phi, \mu_{(\cdot)}^k> \rightharpoonup * <\Phi, \mu_{(\cdot)}>,$$

em $L^\infty(\Omega)$.

□

TEOREMA 299. *Sejam $p > 1$ e $(u_k)_k \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ uma sucessão limitada. Então existem uma subsucessão $(u_j)_j$ da sucessão inicial, e uma sucessão $(v_j)_j \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tais que: $\nabla(v_j - u_j) \to 0$ em medida e $(|\nabla v_j|^p)_j$ é uma sucessão equiintegrável.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [20] teorema 3.10. □

LEMA 300. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, aberto, com $0 \in \Omega$ e tal que $|\partial\Omega| = 0$, e $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado qualquer. Então pelo teorema da cobertura de Vitali, para cada $\epsilon > 0$ existe uma decomposição de $\widetilde{\Omega}$ constituída por conjuntos da forma $a_i + \epsilon_i\Omega (i \in \mathbb{N})$, onde $\epsilon_i < \epsilon$, e um conjunto N_0 de medida nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5]. □

LEMA 301. *Seja $u_0 \in l_A + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ considere-se uma decomposição de $\widetilde{\Omega}$ formada por conjuntos do tipo $a_i^k + \epsilon_i^k\Omega$ ($i \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i^k \leq 1/k$) e um conjunto N_k de medida nula. Definindo:*

$$u_k(x) = \begin{cases} l_A(a_i^k) + \epsilon_i^k u_0((x - a_i^k)/\epsilon_i^k) & \text{se } x \in a_i^k + \epsilon_i^k\Omega, \\ Ax & \text{nos outros casos,} \end{cases}$$

obtemos uma sucessão $u_k \rightharpoonup l_A$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ e tal que a sucessão $(|\nabla u_k|^p)_k$ é equiintegrável com o mesmo módulo de equiintegrabilidade que a sucessão $|\nabla u_0|^p(|\widetilde{\Omega}|/|\Omega|)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [5], excepto para a estimação do modulo de equiintegrabilidade de $(|\nabla u_k|^p)_k$ que sai imediatamente da relação:

$$\frac{|\{x \in \tilde{\Omega} : |\nabla u_k(x)| \geq M\}|}{|\tilde{\Omega}|} = \frac{|\{x \in \Omega : |\nabla u_0(x)| \geq M\}|}{|\Omega|}.$$

□

3. Resultado de Compacidade

TEOREMA 302. *(Resultado de compacidade)*

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e mensurável, e $(\nu_x^k)_{x\in\Omega} \subset L_w(\Omega, K_c)$ $(k \in \mathbb{N})$. Então existe uma subsucessão $(\nu_x^k)_{x\in\Omega}$ da sucessão inicial e $(\nu_x)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_c)$ tais que:

$$(\nu_x^k)_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x)_{x\in\Omega}$$

em $L_w(\Omega, K_c)$, isto é, para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$< \Phi, \nu_{(\cdot)}^k > \rightharpoonup * < \Phi, \nu_{(\cdot)} >$$

em $L^\infty(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 303. Na demonstração do teorema anterior vamos utilizar uma métrica equivalente à que define a convergência fraca* em $L_w(\Omega, K_c)$.
Seja $\{\Omega_j : j \in \mathbb{N}\}$ um conjunto com a propriedade: para cada $\epsilon > 0$ e para cada subconjunto mensurável $\tilde{\Omega}$ de Ω existe $j \in \mathbb{N}$ tal que: $|(\tilde{\Omega} \setminus \Omega_j) \cup (\Omega_j \setminus \tilde{\Omega})| \leq \epsilon$. Considere-se também $(\Phi_i)_i$ $(\Phi_i \neq 0, i \in \mathbb{N})$ uma sucessão densa em $C_0(\mathbb{R}^l)$. Então a convergência na métrica

$$\tilde{\rho}((\nu_x)_{x\in\Omega}, (\mu_x)_{x\in\Omega}) =$$

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{2^{i+j}||\Phi_j||_C} | < \Phi_j, Av(\nu_x)_{x\in\Omega_i} > - < \Phi_j, (\mu_x)_{x\in\Omega_i} > |$$

implica a convergência fraca* em $L_w(\Omega, K_c)$.

DEMONSTRAÇÃO. Demonstração do teorema 302.
Ver página 5 do artigo. □

DEFINIÇÃO 304. *(Medida de Young)*

Uma família $(\nu_x)_{x\in\Omega} \subset (C_0(\mathbb{R}^l))'$ *de probabilidades diz-se uma medida de Young ou medida parametrizada se existe uma sucessão de funções mensuráveis* $(z_i)_i$ *tal que para cada* $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$*:*

$$\Phi(z_i) \rightharpoonup * \ \overline{\Phi} =< \Phi, \nu_x >= \int_{\mathbb{R}^l} \Phi d\nu_x,$$

em $L^\infty(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 305. *Uma medida de Young* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *diz-se homogénea se não depende de* x*, isto é, se para quase todo o* $x \in \Omega$ *existe uma probabilidade* $\nu \in (C_0(\mathbb{R}^l))'$ *tal que* $\nu_x = \nu$.

TEOREMA 306. *(Sucessões que geram medidas de Young)*

Se a família de medidas $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *é o limite fraco* da sucessão de famílias de probabilidades* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega}$*, então* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *é também uma família de probabilidades se existe uma função* $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^+$ *tal que:* $\lim_{|v|\to\infty} g(v) = \infty$ *e*

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^l} g(v) d\nu_x^i dx \leq c.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos por hipótese que ν_x é positiva e $||\nu_x||_M \leq 1$ q.s. em Ω. Seja Ω_k uma sucessão de subconjuntos compactos de Ω tal que: $|\Omega \setminus \Omega_k| \to 0$ quando $k \to \infty$ e as restrições da função $\nu : \Omega \to (K_1, \rho_1)$ a cada um dos conjuntos Ω_k são continuas. Considere-se $i \in \mathbb{N}$ e defina-se:

$$\Omega_{i,k} = \{x \in \Omega_k : ||\nu||_m \leq 1 - 1/i\}.$$

Note-se que cada conjunto $\Omega_{i,k}$ é um fechado de Ω_k, pois $\nu(\cdot)$ é contínua sobre Ω_k.

Suponha-se com vista a obter um absurdo que $|\Omega_{i,k}| > 0$.

Definam-se $\nu^j = Av(\nu_x^j)_{x\in\Omega_{i,k}}$ e $\nu = Av(\nu_x)_{x\in\Omega_{i,k}}$. Note-se que para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$< \Phi, \nu^j >=< \Phi, Av(\nu_x^j)_{x\in\Omega_{i,k}} >= \frac{1}{|\Omega_{i,k}|} \int_{\Omega_{i,k}} \int_{\mathbb{R}^l} \Phi d\nu_x^j dx$$

e

$$< \Phi, \nu >=< \Phi, Av(\nu_x)_{x\in\Omega_{i,k}} >= \frac{1}{|\Omega_{i,k}|} \int_{\Omega_{i,k}} \int_{\mathbb{R}^l} \Phi d\nu_x dx.$$

Por hipótese $(\nu_x^j)_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x)_{x\in\Omega}$, o que implica que para todo o $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$\lim_{j\to\infty} < \Phi, \nu^j >=< \Phi, \nu >,$$

isto é, $\nu^j \rightharpoonup *\nu$ em $M(\mathbb{R}^l)$. As hipóteses também nos dizem que $\int_{\mathbb{R}^l} g d\nu^j \leq c$, e $||\nu||_M \leq 1 - \frac{1}{i}$. Em particular, tem-se para todo o $C < +\infty$

$$\nu^j(\mathbb{R}^l \setminus B(0,C)) \inf\{g(v) : |v| \geq C\} \leq c,$$

porque

$$\nu^j(\mathbb{R}^l \setminus B(0,C)) \inf\{g(v) : |v| \geq C\} \leq \int_{\mathbb{R}^l \setminus B(0,C)} g d\nu^j \leq \int_{\mathbb{R}^l} g d\nu^j \leq c.$$

Assim para C suficientemente grande tem-se

$$\nu^j(B(0,C)) \geq 1 - \frac{1}{2i}$$

para todo o $j \in \mathbb{N}$. Se $\Phi : \mathbb{R}^l \to [0,1]$ é contínua, $\Phi(v) = 1$ para $|v| \leq C$, e $\Phi(v) = 0$ para $|v| \geq 2C$ então:

$$\int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu^j \geq 1 - 1/2i > 1 - 1/i \geq \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu,$$

para todo o $j \in \mathbb{N}$, o que é absurdo!

Assim $|\Omega_{i,k}| = 0$, o que implica $|\bigcup_{i,k} \Omega_{i,k}| = 0$, de onde se conclui $||\nu_x||_M = 1$ q.s. em Ω. □

COROLÁRIO 307. *Qualquer sucessão de funções mensuráveis $z_i : \Omega \to \mathbb{R}^l$ tal que*

$$\int_\Omega g(z_i(x)) dx \leq c$$

contém uma subsucessão que gera uma medida de Young.

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega g(z_i(x)) dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^l} g(v) d\delta_{z_i(x)} dx.$$

$(\delta_{z_i(x)})_{x \in \Omega}$ é uma sucessão de famílias de probabilidades fracamente* mensuráveis, pois cada uma das funções $z_i(\cdot)$ é mensurável, logo pelo teorema 302 existem uma subsucessão $(\delta_{z_j(x)})_{x\in\Omega}$ de $(\delta_{z_i(x)})_{x\in\Omega}$ e uma família $(\nu_x)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_1)$ tais que:

$$(\delta_{z_j(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x)_{x\in\Omega}.$$

Pelo teorema anterior $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma família de probabilidades. Finalmente, devido à convergência fraca* de $(\delta_{z_j(x)})_{x\in\Omega}$ para $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, conclui-se que a sucessão $(z_j)_j$ gera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ como uma medida de Young. □

DEFINIÇÃO 308. *(Condição de compacidade)*

Seja $F(x,v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^+$ *um integrando de Caratheodory não negativo, e seja* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega} \subset L_w(\Omega, K_c)$ $(i \in \mathbb{N})$. *dizemos que* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega}$ *satisfaz a condição de compacidade para* F *sobre* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *se:*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_i \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^l} \xi_m(F(x,\cdot))d\nu_x^i dx = 0,$$

onde $\xi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função continua que satisfaz as seguintes hipóteses:* $0 \le \xi(t) \le t$ *em toda a parte,* $\xi(t) = 0$ *para* $t < M$, $\xi(t) = t$ *para* $t \ge 2M$.

Note-se que se $\nu_x^i = \delta_{z_i(x)}$ *a condição de compacidade coincide com a de equiintegrabilidade de* $F(x, z_i(x))$, *ver teorema 232.*

TEOREMA 309. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto limitado e mensurável. Considerem-se também* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega} \subset (C_0(\mathbb{R}^l))'$ *uma sucessão de famílias de probabilidades,* $L(x,v) : \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ *um integrando de Caratheodory. Suponha-se que* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega}$ *satisfaz a condição de compacidade sobre* Ω *para a parte negativa* $L^-(\cdot)$ *de* $L(\cdot)$ *(o que faz com que os integrais das funções* $\int_{\mathbb{R}^l} L(\cdot, v)d\nu_{(\cdot)}^i$ *sejam finitos ou iguais a* $+\infty$*) e que* $(\nu_x^i)_{x\in\Omega}$ *gera a família de probabilidades* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$. *Então:*

$$\liminf_{i\to\to\infty} \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^l} L(x,v)d\nu_x^i\right) dx \ge \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^l} L(x,v)d\nu_x\right) dx.$$

Além disso,

$$\lim_{i\to+\infty} \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^l} L(x,v)d\nu_x^i\right) dx \to \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^l} L(x,v)d\nu_x\right) dx$$

sse $(\nu_x^i)_{x\in\Omega}$ *satisfaz a condição de compacidade para a função* $|L|$, *nesse caso:*

$$\int_{\mathbb{R}^l} L(\cdot, v)d\nu_{(\cdot)}^i \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^l} L(\cdot, v)d\nu_{(\cdot)}$$

em L^1.

DEMONSTRAÇÃO. Ver página 18 do artigo. □

PROPOSIÇÃO 310. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto limitado e mensurável. considere-se também uma sucessão* $z_i : \Omega \to \mathbb{R}^l$ *de funções mensuráveis que geram a medida de young* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$. *Então as seguintes afirmações são válidas:*

1: *a sucessão* $(z_j)_j$ *converge em medida sse* ν_x *é uma massa de Dirac quase sempre em* Ω*;*

2: *se a sucessão* $(y_j)_j$ *satisfaz* $(z_j - y_j) \to 0$ *em medida quando* $j \to +\infty$ *então* $(y_j)_j$ *gera a mesma medida de Young que* $(z_j)_j$.

DEMONSTRAÇÃO. Demonstre-se a primeira afirmação da proposição 310.

1: Suponha-se em primeiro lugar que a sucessão $(z_j)_j$ converge em medida para a função $z(\cdot)$. Por hipótese temos que para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ a sucessão de funções $(\Phi(z_j))_j$ converge fracamente* para a função $< \Phi, \nu_{(\cdot)} >$ em $L^\infty(\Omega)$, o que implica que:

$$\int_\Omega \left(\Phi(z_j(x)) - \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu_x(v) \right) dx \to 0,$$

o que implica

$$\left(\Phi(z_j(x)) - \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu_x \right) \to 0$$

quase sempre em Ω. Pelo que $(\Phi(z_j))_j$ converge em medida para $\int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu_x$, finalmente devido à arbitrariedade de Φ e à unicidade do limite em medida temos $z(x) = \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\nu_x$ q.s. em Ω, de onde concluímos $\nu_x = \delta_{z(x)}$ q.s. em Ω.

Suponhamos agora que $\nu_x = \delta_{z(x)}$ q.s. em Ω. Por hipótese para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$

$$\left(\int_\Omega [\Phi(z_j(x)) - \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(v) d\delta_{z(x)}(v)] dx \right) \to 0,$$

o que equivale a dizer:

$$\left(\int_\Omega [\Phi(z_j(x)) - \int_{\mathbb{R}^l} \Phi(z(x))] dx \right) \to 0,$$

o que implica que $\Phi(z_j(x)) \to \Phi(z(x))$ q.s. em Ω; pela a arbitrariedade da função Φ conclui-se que $z_j(x) \to z(x)$ q.s. em Ω, o que por sua vez implica que $z_j(\cdot) \to z(\cdot)$ em medida.

2: Para demonstrar a segunda afirmação considerem-se $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^l)$ e $\xi \in L^1(\Omega)$, então para qualquer j :

$$\left| \int_\Omega \xi(x)[\Phi(z_j(x)) - \Phi(y_j(x))] dx \right| \leq \int_{\{x \in \Omega : z_j(x) \neq y_j(x)\}} 2||\Phi||_{C_0} |\xi(x)| dx.$$

Note-se que a função $2||\Phi||_{C_0}|\xi(x)| \in L^1(\Omega)$ e que vai ser integrada sobre uma sucessão de conjuntos $(\Omega_j)_j$ tal que $\lim_{j \to \infty} |\Omega_j| = 0$, devido à convergência em medida das duas sucessões, o que faz com que

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\{x\in\Omega:z_j(x)\neq y_j(x)\}} 2||\Phi||_{C_0}|\xi(x)|dx = 0,$$

de onde se conclui que os limites fracos* das sucessões $(\Phi(z_j))_j, (\Phi(y_j))_j$ são iguais, o que implica a igualdade quase sempre das medidas de Young geradas por estas sucessões.

□

PROPOSIÇÃO 311. *Seja* $(z_j)_j \subset L^p(\Omega)$ *tal que* $(|z_j|^p)_j$ *é uma sucessão fracamente convergente em* $L^1(\Omega)$, $p < \infty$. *Se* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *é a medida de Young gerada pela sucessão* $(z_j)_j$, *então* $z_j \to z$ *em* $L^p(\Omega)$ *sse* $\nu_x = \delta_{z(x)}$ *q.s. em* Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**33**], página 111. □

DEFINIÇÃO 312. *(Produto tensorial)*
Sejam $(\mu_x)_{x\in\Omega} \subset C_0(\mathbb{R}^l)'$ *e* $(\nu_x)_{x\in\Omega} \subset C_0(\mathbb{R}^d)'$ *famílias de probabilidades. Define-se o produto tensorial das duas famílias de probabilidades* $(\mu_x \otimes \nu_x)_{x\in\Omega}$ *por*

$$\mu_x \otimes \nu_x = \mu_x \times \nu_x, \ \forall x \in \Omega.$$

OBSERVAÇÃO 313. **1:** A família $(\mu_x \otimes \nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma família de probabilidades contida em $C_0(\mathbb{R}^{l+d})'$.

2: Para ver definições mais gerais de produto tensorial de medidas de young e ficar a conhecer algumas das suas propriedades mais importantes consultar por exemplo [**3**].

PROPOSIÇÃO 314. *Considere-se uma sucessão de funções* $z_j = (u_j, v_j) : \Omega \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ *limitada em* $L^p(\Omega)$ *e tal que* $(u_j)_j$ *converge em norma para* $u(\cdot)$ *em* $L^p(\Omega)$. *Se* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *é a medida de Young gerada pela sucessão* $(z_j)_j$, *então* $\nu_x = \delta_{u(x)} \otimes \mu_x$ *q.s. em* Ω, *se* $(\mu_x)_{x\in\Omega}$ *é a medida de Young gerada por* $(v_j)_j$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**33**], página 112. □

4. Medidas de Young Gradiente

Seja Ω um domínio aberto de $\mathbb{R}^n$ com $|\partial\Omega| = 0$.

DEFINIÇÃO 315. *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, onde neste caso Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^m$, pertence a $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se $f \in W^{1,p}(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ para cada aberto $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$.*

OBSERVAÇÃO 316. Quando se falar de convergência forte (fraca) em $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ fala-se da convergência forte (fraca) em $W^{1,p}(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ para cada conjunto aberto $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$.

DEFINIÇÃO 317. *Uma medida de Young diz-se uma medida p-Young gradiente se é gerada pela sucessão dos gradientes $(\nabla u_j)_j$ de uma sucessão $(u_j)_j \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tal que $(u_j)_j$ converge fracamente para u_0 em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e a sucessão $(|\nabla u_j|^p)_j$ é equiintegrável.*
Note-se que

$$\nabla u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \lambda d\nu_x(\lambda);$$

u_0 diz-se a transformação subjacente.

DEFINIÇÃO 318. *Recorde-se que uma medida de Young homogénea não depende de x.*

1: *Por $M_p(A)$ denota-se o conjunto de todas as medidas p-Young gradiente que têm o centro de massa em $A = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \lambda d\nu(\lambda)$.*

2: *$M_\infty(A)$ denota o subconjunto de $M_p(A)$ constituído pelas medidas p-Young gradiente homogéneas que são geradas pela sucessão dos gradientes de uma sucessão que converge fracamente* em $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.*

3: *Por $\nu * A$ denota-se a medida que muda o centro de massa de ν para o ponto A, se ν é gerada como medida p-Young gradiente pelos gradientes da sucessão $(u_j)_j$, então $\nu * A$ é gerada por $(\nabla(u_j) + l_{A-B})_j$, se B é o centro de massa da medida ν.*

PROPOSIÇÃO 319. *(Sucessões que geram medidas p-Young gradiente)*

1: *Sejam $p \in]1, \infty[$, $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ uma medida de Young gerada pela sucessão de gradientes de uma sucessão $(u_j)_j$ limitada em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e seja u_0 a deformação subjacente.*
Então $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é gerada pela sucessão dos gradientes de uma sucessão $(v_k)_k \subset u_0 +$

$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tal que a sucessão $(|\nabla v_k|^p)_k$ é equiintegrável, e $v_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Em particular $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma medida p-Young gradiente.

2: *Sejam $p \in [1, \infty[$, $(|\nabla u_j|^p)_j$ uma sucessão equiintegrável e $u_j \rightharpoonup u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ em $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Suponha-se também que a sucessão $(|\nabla u_j|^p)_j$ gera uma medida de Young $(\nu_x)_{x\in\Omega}$.*

Então existe uma sucessão $(v_k)_k \subset u_0 + C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ cujos gradientes geram $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ como medida p-Young gradiente.

DEMONSTRAÇÃO. Demonstre-se a primeira afirmação da proposição.

1: Pelo teorema 299 existem uma subsucessão $(u_j)_j$ da sucessão inicial e uma sucessão $w_j \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tais que $(|\nabla w_j|^p)_j$ é sucessão equiintegrável e $|\nabla w_j - \nabla u_j| \to 0$ em medida. Note-se que pela proposição 310 as duas sucessões de gradientes geram a mesma medida de Young. Sem perda de generalidade podemos supor que $w_j \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Seja $\Omega_k \subset\subset \Omega$ uma sucessão crescente de conjuntos compactos com fronteira suave tal que: $|\Omega \setminus \Omega_k| \to 0$. para cada $k \in \mathbb{N}$ considere-se uma função $\Phi_k \in C_0^\infty(\Omega_{k+1})$ tal que: $0 \leq \Phi_k(x) \leq 1$ $\forall x \in \Omega_{k+1}$ e $\Phi_k(x) = 1$ $\forall x \in \Omega_k$; defina-se

$$v_k = u_0 + (w_{j(k)} - u_0)\Phi_k.$$

Vamos provar que existe uma subsucessão j(k) tal que a sucessão $(|\nabla v_k|^p)_k$ é equiintegrável e $v_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Em primeiro lugar note-se que

$$||v_k - u_0||_{L^p} = ||u_0 + (w_{j(k)} - u_0)\Phi_k - u_0||_{L^p} = ||(w_{j(k)} - u_0)\Phi_k||_{L^p} \leq$$

porque $\Phi_k(\cdot)$ anula-se fora de Ω_{k+1} e $0 \leq \Phi_k(x) \leq 1$ em Ω_{k+1}

$$||w_{j(k)} - u_0||_{L^p(\Omega_{k+1})}.$$

Como $w_j \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ é claro que existe uma subsucessão tal que $||w_{j(k)} - u_0||_{L^p(\Omega_{k+1})}$ converge para zero, logo $(v_k)_k$ converge fortemente para $u_0(\cdot)$.

Em segundo lugar observe-se que

$$\nabla v_k = \nabla(u_0 + (w_{j(k)} - u_0)\Phi_k) = \nabla[u_0 + (w_{j(k)} - u_0)\Phi_k] =$$

$$\nabla u_0 + (\nabla w_{j(k)} - \nabla u_0)\Phi_k + (w_{j(k)} - u_0) \otimes \nabla \Phi_k.$$

Pelo que

$$||\nabla (v_k - w_{j(k)})||_{L^p} = ||\nabla v_k - \nabla w_{j(k)}||_{L^p} =$$

$$||\nabla u_0 + (\nabla w_{j(k)} - \nabla u_0)\Phi_k + (w_{j(k)} - u_0) \otimes \nabla \Phi_k - \nabla w_{j(k)}||_{L^p} =$$

$$||\nabla u_0(1 - \Phi_k) + \nabla w_{j(k)}(\Phi_k - 1) + (w_{j(k)} - u_0) \otimes \nabla \Phi_k||_{L^p} \leq$$

$$||\nabla u_0(1 - \Phi_k)||_{L^p} + ||\nabla w_{j(k)}(\Phi_k - 1)||_{L^p} + ||(w_{j(k)} - u_0) \otimes \nabla \Phi_k||_{L^p} \leq$$

porque $(1 - \Phi_k)$ anula-se em Ω_k

$$||\nabla u_0||_{L^p(\Omega \backslash \Omega_k)} + ||\nabla w_{j(k)}||_{L^p(\Omega \backslash \Omega_k)} + ||(w_{j(k)} - u_0) \otimes \nabla \Phi_k||_{L^p} \leq$$

porque $\nabla \Phi_k(\cdot)$ se anula fora de Ω_{k+1} e em Ω_k

$$(4) \qquad ||\nabla u_0||_{L^p(\Omega \backslash \Omega_k)} + ||\nabla w_{j(k)}||_{L^p(\Omega \backslash \Omega_k)} + ||w_{j(k)} - u_0||_{L^p(\Omega_{k+1}) \backslash \Omega_k}||\nabla \Phi_k||_C$$

(4) converge para zero quando $k \to \infty$, visto acontecer o mesmo à sucessão $(|\Omega \setminus \Omega_k|)_k$, donde se conclui que a sucessão $(|\nabla v_k|^p)_k$ converge fortemente em L^1, logo é equiintegrável.

Agora devido à convergência em medida de $\nabla v_k \to \nabla w_{j(k)}$ a sucessão $(\nabla v_k)_k$ gera a medida de Young $(\nu_x)_{x \in \Omega}$, ver 310. Finalmente através de argumentos de aproximação ver por exemplo **[16]** capítulo 10, podemos escolher $(v_k)_k$ satisfazendo $v_k \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

2: A segunda parte do teorema demonstra-se através dos mesmos argumentos, com $w_j = u_j$.

□

PROPOSIÇÃO 320. *Considere-se uma sucessão de medidas p-Young gradiente $(\nu_x^j)_{x \in \Omega}$ que converge fracamente* para a família $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ e tal que a sucessão das respectivas deformações subjacentes $(u^j)_j$ é equilimitada em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $p \in [1, \infty[$.*

1: *Se $p > 1$*

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}} (1 + |v|^p) d\nu_x^j(v) dx < c,$$

então $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ é uma medida p-Young gradiente.

2: *Se a sucessão* $(\nu_x^j)_{x\in\Omega}$ *satisfaz a condição de compacidade para a função* $1+|\cdot|^p$*, então* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *é uma medida p-Young gradiente.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstre-se a primeira afirmação

1: Pela proposição 319 para cada j existe uma sucessão

$$(u_k^j)_k \subset u^j + C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m),$$

tal que $u_k^j \rightharpoonup u^j$ em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, e a sucessão $(|\nabla u_k^j|^p)_k$ é equiintegrável. Note-se que $u^j(\cdot)$ é a deformação subjacente associada a $(\nu_x^j)_{x\in\Omega}$ tal que

$$(\delta_{\nabla u_k^j(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x^j)_{x\in\Omega}$$

em $L_w(\Omega,K_1)$ quando $k\to\infty$, Em particular, pelo teorema 309,

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega(1+|\nabla u_k^j|^p)dx = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_x^j dx.$$

Devido à convergência $(\nu_x^j)_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x)_{x\in\Omega}$ por argumentos de diagonalização existe uma sucessão $(u_{k(j)}^j)_j$ limitada em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tal que: $(\delta_{\nabla u_{k(j)}^j(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\nu_x)_{x\in\Omega}$ em $L_w(\Omega,K_1)$ e

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega(1+|\nabla u_{K(j)}^j|^p)dx - \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_x^j dx = 0.$$

De onde se conclui que $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma família de probabilidades.

Assim pela proposição 319 a primeira afirmação está demonstrada.

2: Para demonstrar a segunda afirmação note-se que pelo teorema 309 a condição de compacidade implica que:

$$\int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_{(\cdot)}^j \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_{(\cdot)},\ \textit{em}\ L^1$$

e

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega(1+|\nabla u_{k(j)}^j|^p)dx = \int_\Omega\int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_x dx.$$

A segunda convergência garante que a sucessão $(|\nabla u_{k(j)}^j|^p)_j$ é equiintegrável.

Logo pela segunda parte da proposição 319 $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma medida p-Young gradiente.

□

TEOREMA 321. *Seja* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *uma medida p-Young gradiente com deformação subjacente* $u_0(\cdot)$, $p \in [1, \infty[$.

1: *(Princípio da Média)*

Se existe $A \in M^{mn}$ *tal que* $(u_0 - l_A) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *então* $Av(\nu_x)_{x\in\Omega} \in M_p(A)$. *Se* $(u_0 - l_A) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ *então* $Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega} \in M_\infty(A)$.

2: *(Princípio de localização)*

Para quase todo o $x \in \Omega$ *a medida* ν_x *é uma medida p-Young gradiente homogénea.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstre-se a primeira parte do teorema.

1: Sem perda de generalidade podemos assumir $0 \in \Omega$. Recorde-se que:

$$u_0 \in l_A + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

i: Consideremos primeiro o caso

$$(\nu_x)_{x\in\Omega} = (\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ considere-se uma decomposição de Ω formada por conjuntos disjuntos $(\Omega_j^i)_j$, da forma

$$\Omega_j^i = a_j^i + \epsilon_j^i\Omega \ (j \in \mathbb{N})$$

onde o diâmetro de cada conjunto Ω_j^i é inferior a $1/i$, e um conjunto de medida nula N_i. Suponha-se também que para cada $i' \geq i$,

(5) $$ou\ \Omega_{j'}^{i'} \subset \Omega_j^i\ ou\ \Omega_{j'}^{i'} \cap \Omega_j^i = \emptyset.$$

Defina-se

$$v^i(x) = \begin{cases} l_A(a_j^i) + \epsilon_j^i u_0((x - a_j^i)/\epsilon_j^i), & \text{se } x \in \Omega_j^i, \\ Ax, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Observe-se que

$$\nabla v^i(x) = \begin{cases} \nabla u_0((x - a_j^i)/\epsilon_j^i), & \text{se } x \in \Omega_j^i, \\ A, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

e para cada $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^{nm})$

$$< \Phi, (\delta_{\nabla v^i(x)})_{x\in\Omega_j^i} >=$$

$$\frac{1}{|\Omega_j^i|}\int_{\Omega_j^i}\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(\lambda)d\delta_{\bigtriangledown v^i(x)}(\lambda)dx =$$
$$\frac{1}{|\Omega_j^i|}\int_{\Omega_j^i}\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(\bigtriangledown v^i(x))dx =$$

$$\frac{1}{|\Omega_j^i|}\int_{\Omega_j^i}\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(\bigtriangledown u_0((x-a_j^i)/\epsilon_j^i))dx =$$

mudando para a variável $y = (x - a_j^i)/\epsilon_j^i$,

$$\frac{1}{|\Omega_j^i|(\epsilon_j^i)^n}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(\bigtriangledown u_0(y)dy =$$
$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\int_{\mathbb{R}^{nm}}\Phi(\bigtriangledown u_0(y)dy =$$

$$< \Phi, (\delta_{\bigtriangledown u_0(x)})_{x\in\Omega} >,$$

pelo que

$$Av(\delta_{\bigtriangledown v^i(x)})_{x\in\Omega_j^i} = Av(\delta_{\bigtriangledown u_0(x)})_{x\in\Omega},$$

para todo o $j \in \mathbb{N}$.

Prove-se que

$$\delta_{\bigtriangledown v^i(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup *Av(\delta_{\bigtriangledown u_0(x)})_{x\in\Omega}.$$

Recorde-se que o lema 301 garante que

$$v^i \rightharpoonup l_A, \text{ em } W_0^{1,p},$$

e a sucessão $(|\bigtriangledown v^i|^p)_i$ é equiintegrável.

Seja $\delta_{\bigtriangledown v^i(x)})_{x\in\Omega}$ uma subsucessão da sucessão inicial que gera uma medida de Young $(\nu_x)_{x\in\Omega}$, esta subsucessão existe pelo teorema 302 e porque $(|\bigtriangledown v^i|^p)_i$ é uma sucessão equiintegrável.

Defina-se

$$\widetilde{\Omega} = \bigcap_i(\bigcup_j int(\Omega_j^i)).$$

Note-se que $|\Omega \setminus \widetilde{\Omega}| = 0$.Temos também que para cada $x_0 \in \widetilde{\Omega}$ existe uma sucessão de conjuntos $\Omega_{j(i)}^i$ tal que: $x_0 \in \Omega_{j(i)}^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, por (5).

Como a função $\nu : \Omega \to (K_1, \rho_1)$ é mensurável, pelo teorema 294 existe uma sucessão de subconjuntos compactos de Ω, $(\Omega_\alpha)_\alpha$, tais que a restrição de $\nu(\cdot)$ a cada um desses conjuntos é uma função contínua em relação á métrica $\rho_1(\cdot)$. Podemos supor sem perda de generalidade que existe $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega^1_{j(1)} \subset \alpha_0$. Assim podemos aplicar a primeira afirmação da proposição 298 a $(\nu_x)_{x\in\Omega^i_{j(i)}}$ e a ν_{x_0}. Logo

$$Av(\nu_x)_{x\in\Omega^i_{j(i)}} \rightharpoonup * \ \nu_{x_0},$$

em $C_0(\mathbb{R}^{nm})'$, quando $i \to \infty$. Pela arbitrariedade do ponto x_0 conclui-se que a última convergência é válida q.s. em $\widetilde{\Omega}$. Como

$$Av(\delta_{\nabla v^k(x)})_{x\in\Omega^i_{j(i)}} \rightharpoonup * \ Av(\nu_x)_{x\in\Omega^i_{j(i)}}$$

em $C_0(\mathbb{R}^{nm})'$ quando $k \to \infty$ e

$$Av(\delta_{\nabla v^k(x)})_{x\in\Omega^i_{j(i)}} = Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}$$

para $k \geq i$, deduz-se que

$$\nu_{x_0} = Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}$$

para quase todo o $x_0 \in \widetilde{\Omega}$; pelo que

$$(\delta_{\nabla v^i(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup * \ Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}.$$

Como cada subsucessão da sucessão inicial $(\delta_{\nabla v^i(x)})_{x\in\Omega}$ contém uma subsucessão convergindo fracamente* em $L_w(\Omega, K_1)$ para medida de Young homogénea $Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}$ conclui-se que a sucessão inicial possui a mesma propriedade.

Recorde-se novamente que o lema 301 garante que

$$v^i \rightharpoonup l_A, \ em \ W_0^{1,p},$$

e a sucessão $(|\nabla v^i|^p)_i$ é equiintegrável. Pelo que acabamos de demonstrar $(v^i(\cdot))_i$ gera $Av(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega}$ como medida p-Young gradiente o que faz com que

$$\nabla l_A(x) = A = \int_{\mathbb{R}^{nm}} \lambda d\delta_{\nabla u_0(x)},$$

pelo que $(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega} \in M_p(A)$.

Se $p = \infty$, então (também pelo lema 301) $v^i \rightharpoonup * \ l_A$ em $W_0^{1,\infty}$, o que faz com que $(\delta_{\nabla u_0(x)})_{x\in\Omega} \in M_\infty(A)$.

ii: Demonstre-se agora a primeira afirmação do teorema 321 para o caso geral.

Seja $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ uma medida p-Young gradiente com deformação subjacente

$$u_0 \in l_A + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Então pela proposição 319 existe uma sucessão

$$u_k \in l_A + C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

que gera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ como medida p-young gradiente, note-se que neste caso a sucessão $(|\bigtriangledown u_k(\cdot)|^p)_k$ é equiintegrável. Temos em primeiro lugar que

$$Av(\delta_{\bigtriangledown u_k(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup * \; Av(\nu_x)_{x\in\Omega};$$

em segundo lugar a cada uma das medidas $[Av(\delta_{\bigtriangledown u_k(x)})_{x\in\Omega}$ podemos aplicar a alínea (1.i) desta demonstração, obtendo assim uma sucessão $v_k^i(\cdot)$ que gera $Av(\delta_{\bigtriangledown u_k(x)})_{x\in\Omega}$ e $(|\bigtriangledown v_k^i|^p)_i$ tem o mesmo módulo de equiintegrabilidade que $|\bigtriangledown u_k(\cdot)|^p$. Assim a sucessão $Av(\delta_{\bigtriangledown u_k(x)})_{x\in\Omega}$ $(k \in \mathbb{N})$ satisfaz a condição de compacidade para a função $1 + |\cdot|^p$, pela proposição 320 $Av(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma medida p-young gradiente, e como o seu centro de massa é o ponto A, conclui-se

$$Av(\nu_x)_{x\in\Omega} \in M_p(A).$$

2: Demonstre-se agora a segunda afirmação do teorema.

Seja $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ uma medida p-Young gradiente com deformação subjacente $u_0(\cdot)$. Existe uma sucessão de subconjuntos compactos de Ω, $(\Omega_k)_k$, tal que $|\Omega \setminus \Omega_k| \to 0$, quando $k \to \infty$, a restrição da função $\nu(\cdot)$ a cada um dos conjuntos Ω_k é uma função contínua na métrica $\rho_1(\cdot,\cdot)$, e todos os pontos de cada conjunto Ω_k são pontos de Lebesgue para a função

$$x \to < 1 + |v|^p, \nu_x > .$$

Seja $(\bigtriangledown u_i)_i$ uma sucessão que gera $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ como uma medida p-Young gradiente. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Seja x_0 um ponto de Lebesgue do conjunto Ω_k. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset \Omega_k$, pois Ω é aberto e os pontos da fronteira de Ω_k não são pontos de

Lebesgue de Ω_k.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ e para cada $j \in B(\epsilon)$ defina-se

$$u_i^j(x_0 + y) = j(u_i(x_0 + \frac{y}{j}) - u_i(x_0)).$$

Então

$$\nabla u_i^j(x_0 + y) = \nabla u_i(x_0 + \frac{y}{j})$$

e

$$\nu_{x_0+y}^j = \nu_{x_0+\frac{y}{j}}.$$

Assim $(\nu_x^j)_{x\in B(x_0,\epsilon)}$ é gerada por $(\nabla u_i^j)_j$. Pela continuidade da restrição de

$$\nu : \Omega \to (K_1, \rho_1)$$

a Ω_k, podemos aplicar a segunda afirmação da proposição 298 à sucessão $(\nu_x^j)_{x\in B(x_0,\epsilon)}$ e a ν_{x_0}, logo

$$(\nu_x^j)_{x\in B(x_0,\epsilon)} \rightharpoonup * \ \nu_{x_0}$$

em $L_w(B(x_0, \epsilon), K_1)$.

Agora, como x_0 é um ponto de Lebesgue para a função

$$x \to < 1 + |v|^p, \nu_x > .$$

tem-se

$$\int_{B(x_0,\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^{nm}} (1 + |v|^p) d\nu_x^j dx \to \int_{B(x_0,\epsilon)} \int_{\mathbb{R}^{nm}} (1 + |v|^p) d\nu_{x_0} dx,$$

quando $j \to \infty$. De onde se conclui que $(\nu_x^j)_{x\in B(x_0,\epsilon)}$ satisfaz a condição de compacidade para a função $1+|\cdot|^p$. Logo pela segunda afirmação da proposição 320 ν_{x_0} é uma medida p-Young gradiente homogénea.

□

COROLÁRIO 322. *(Corolário do teorema 321)*

Seja $L : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $|L(v)| \leq a|v|^p + b$, $p \geq 1$. *Então Para cada* $A \in \mathbb{R}^{nm}$

1:

$$\inf_{\nu\in M_p(A)} < L,\nu >= \inf_{\nu\in M_\infty(A)} < L,\nu >= \inf_{\Phi\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \frac{1}{|\Omega|}\int L(A+\nabla\Phi)dx;$$

2: *a função* $L(\cdot)$ *é quasiconvexa no ponto* A *sse*

$$\inf_{\nu\in M_p(A)} < L,\nu >\geq L(A).$$

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $A\in\mathbb{R}^{nm}$.

1: Demonstre-se a primeira parte do corolário.

i: Como $M_\infty(A)\subset M_P(A)$, temos a desigualdade:

$$\inf_{\nu\in M_P(A)} < L,\nu >\leq \inf_{\nu\in M_\infty(A)} < L,\nu > .$$

ii: Mostre-se agora que:

$$\inf_{\nu\in M_\infty(A)} < L,\nu >\leq \inf_{\Phi\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \int_\Omega L(A+\nabla\Phi(x))dx.$$

Observe-se para cada $\Phi\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ a função

$$u_0(x)=(\Phi+l_A)(x)\in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m),$$

$$(u_0-l_A)(x)=\Phi(x)+l_A(x)-l_A(x)=\Phi(x)\in W_0^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Assim pelo teorema 321 temos:

$$Av(\delta_{(\nabla(\Phi+A)(x))})_{x\in\Omega}=Av(\delta_{(\nabla\Phi(x)+A)})_{x\in\Omega}\in M_\infty(A).$$

Finalmente note-se que:

$$< L, Av(\delta_{(\nabla\Phi(x)+A)})_{x\in\Omega} >= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^{nm}} L(\cdot)d\delta_{(\nabla\Phi(x)+A)}dx =$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(\nabla\Phi(x)+A)dx.$$

pelo que

$$\inf_{\nu\in M_\infty(A)} < L,\nu >\leq \inf_{\Phi\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} < L, Av(\delta_{(\nabla\Phi(x)+A)})_{x\in\Omega} >=$$

$$\inf_{\Phi\in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \int_\Omega L(A+\nabla\Phi(x))dx.$$

iii: Mostre-se agora que:

$$\inf_{\Phi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \int_\Omega L(A + \nabla\Phi(x))dx \geq \inf_{\nu \in M_P(A)} < L, \nu > .$$

Pela proposição 319 cada medida $\nu \in M_P(A)$ é gerada como medida p-Young gradiente pela sucessão dos gradientes de uma sucessão

$$u_k \in l_A + C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Em particular temos

$$\lim_k < L, Av(\delta_{\nabla u_k(x)})_{x\in\Omega} >= \lim_k \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(\cdot)d\delta_{\nabla u_k(x)} dx =$$

$$\lim_k \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega L(\nabla u_k(x))dx.$$

Finalmente observe-se que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$|L(\nabla u_k(x))| \leq a| \nabla u_k(x)|^p + b, \ \forall x \in \Omega,$$

o que implica a equiintegrabilidade da sucessão $(|L(\nabla u_k)|)_k$, logo pelo teorema 309

$$\lim_k < L, Av(\delta_{\nabla u_k(x)})_{x\in\Omega} >= \lim_k \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega L(\nabla u_k(x))dx =$$

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(v)d\nu(v)dx =< L, \nu >,$$

de onde se conclui a desigualdade desejada.

2: Demonstre-se a segunda afirmação do corolário.

i: Suponha-se que $L(\cdot)$ é quasiconvexa e mostre-se que

$$\inf_{\nu \in M_P(A)} < L, \nu >\geq L(A).$$

Observe-se quanto mais não seja por curiosidade que

$$L(A) = \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(\cdot)d\delta_A =< L, \delta_A >,$$

além disso $\delta_A \in M_p(A)$.

Seja $\nu \in M_P(A)$ qualquer. Se $(u_k)_k$ é a sucessão da alínea (1.*iii*) desta demonstração então

$$\lim_k \int_\Omega L(\nabla u_k(x))dx =< L, \nu > |\Omega|$$

e para cada $k \in \mathbb{N}$, por $L(\cdot)$ ser quasiconvexa em A

$$\int_\Omega L(\nabla u_k(x))dx \geq L(A)|\Omega|,$$

o que nos permite concluir

$$< L, \nu > \geq L(A).$$

ii: Suponha-se agora que

$$\inf_{\nu \in M_P(A)} < L, \nu > \geq L(A).$$

e mostre-se que $L(\cdot)$ é quasiconvexa em A.

Seja $\Phi \in l_A + C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Então a desigualdade

$$< L, Av(\delta_{\nabla\Phi(x)})_{x\in\Omega} > \geq L(A)$$

é válida porque

$$Av(\delta_{\nabla\Phi(x)})_{x\in\Omega} \in M_\infty(A) \subset M_p(A).$$

Finalmente pela definição da média de uma família de medidas conclui-se

$$\int_\Omega L(A + \nabla\Phi(x))dx \geq L(A)|\Omega|,$$

o que faz com que a função $L(\cdot)$ seja quasiconvexa em A.

□

TEOREMA 323. *Seja $L : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$a_1|v|^p + b_1 \leq L(v) \leq a_2|v|^p + b_2, a_2 \geq a_1 > 0,$$

$p \in [1, \infty[$. *Então existe uma função $L^q(\cdot)$, que é a maior des funções quasiconvexas que minoram $L(\cdot)$. Essa função é dada pela fórmula:*

$$L^q(A) = \inf_{\nu \in M_p(A)} \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(v)d\nu,$$

onde $M_p(A)$ é o conjunto de todas as medidas p-Young gradiente com centro de massa no ponto A. Além disso, $L^q(\cdot)$ é contínua e satisfaz as mesmas desigualdades que $L(\cdot)$.

$L^q(\cdot)$ diz-se o invólucro quasiconvexo de $L(\cdot)$.

Observe-se que há demonstrações deste teorema que não envolvem medidas de Young, ver por exemplo [**12**], página 201 e seguintes, nesse caso o invólucro quasiconvexo de $L(\cdot)$ define-se por:

$$L^q(A) = \inf_{\Phi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(A + \nabla\Phi)dx.$$

DEMONSTRAÇÃO. Demonstração do teorema 323.

Ver página 27 do artigo. □

PROPOSIÇÃO 324. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Então, para qualquer $\eta > 0$ existe um conjunto aberto O_η (formado, possivelmente, por vários domínios) com fronteira suave e tal que $\sup_{x \in O_\eta} d(x, K) \leq \eta$ e $|\{(K \setminus O_\eta) \cup (O_\eta \setminus K)\}| \leq \eta |K|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \geq 0$ uma função regularizadora, isto é, f é uma função suave com suporte contido na bola unitária e $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. Para cada $\epsilon > 0$ defina-se $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} f(x/\epsilon)$, observe-se que de certa forma $(f_\epsilon(\cdot))_\epsilon$ é uma sucessão regularizadora. A convolução $f_\epsilon * \chi_K$ onde $\chi_K(\cdot)$ é a função característica de k, é uma função suave, cujo suporte está numa 2ϵ-vizinhança do suporte da função $\chi_K(\cdot)$.

Observe-se que para quase todo o $\delta \in]0, 1[$ o conjunto

$$S_\delta = \{x : f_\epsilon * \chi_K(x) = \delta\}$$

é uma hipersuperfície suave; pelo teorema de Sard (287) para quase todo o $\delta \in]0, 1[$,

$$| \nabla (f_\epsilon * \chi_K)(x)| > 0, \ \forall x \in S_\delta,$$

para tais δ e $x \in S_\delta$ a hipersuperfície é suave numa vizinhança de x suficientemente pequena pelo teorema global da função implícita (289) , finalmente pela compacidade de S_δ obtemos suavidade em todos os seus pontos.

A convergência em L^1 de $f_\epsilon * \chi_K \to \chi_K$ quando $\epsilon \to 0$ permite-nos concluir o resultado pretendido.

□

OBSERVAÇÃO 325. (O espaço de funções E^p.)

Na demonstração do próximo teorema vamos fazer uso de um espaço especial de funções:

$$E^p = \{\Phi \in C(\mathbb{R}^{nm}) : \lim_{|v|\to\infty} \frac{\Phi(v)}{1+|v|^p} \ existe\}.$$

Note-se que este espaço munido da norma $\sup_{v\in\mathbb{R}^{nm}} |\Phi(v)|/(1+|v|^p)$ é separável, e se $\nu \in M(\mathbb{R}^{nm})$ é tal que: $\int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu < \infty$, então ν pertence ao dual de E^p. No entanto o dual deste espaço não é apenas constituído pelas medidas de Radon com momento P finito, por exemplo a função $< T, \Phi >= \Phi(v)/(1+|v|^p)$ também está no dual de E^p.

TEOREMA 326. *(Caracterização das medidas p-Young gradiente)*
Uma família de probabilidades $(\nu_x)_{x\in\Omega} \in L_w(\Omega, K_c)$, com $\nu_x \in (C_0(\mathbb{R}^{nm}))'$ é uma medida p-Young gradiente, onde $p \in [1,\infty[$, sse verifica as condições seguintes:

i: *existe $u_0 \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tal que a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^{nm}} (\cdot)d\nu_x = \nabla u_0(x)$$

é válida q.s. em Ω,

ii: *para quase todo o x em Ω a desigualdade:*

$$L(\nabla u_0(x)) \leq \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(v)d\nu_x(v)$$

vale para qualquer função quasiconvexa L tal que: $c \leq L(v) \leq a|v|^p + b$,

iii: $\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}}(1+|v|^p)d\nu_x dx < \infty$.

OBSERVAÇÃO 327. No caso escalar m=1 a quasiconvexidade é equivalente à convexidade, pelo que qualquer família de probabilidades fracamente* mensurável é uma medida p-Young gradiente se verifica as condições i) e ii) do teorema anterior.

DEMONSTRAÇÃO. Ver página 31 do artigo. □

5. Quasiconvexificação e Convergência Fraca-Forte

TEOREMA 328. *seja $L(x,u,v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ um integrando de Caratheodory tal que:*

$$a_1|v|^p + b_1 \leq L(x,u,v) \leq a_2|v|^p + b_2,$$

onde $p > 1, a_2 \geq a_1 > 0$. Considerem-se também:

$$L^q(x,u,v_0) = \inf_{\Phi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega L(x,u,v_0 + \nabla\Phi(y))dy,$$

$$I^q(u) = \int_\Omega L^q(x,u(x),\nabla u(x))dx.$$

Então $L^q(\cdot)$ é um integrando de Caratheodory que satisfaz as mesmas desigualdades que $L(\cdot)$, e a função $v \to L^q(x,u,v)$ é quasiconvexa para quase todo o $x \in \Omega$ e para todo o $u \in \mathbb{R}^m$. Além disso, para qualquer $u_0 \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ existe uma sucessão $(u_k)_k \subset u_0 + C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tal que: a sucessão $(|\nabla u_k|^p)_k$ é equiintegrável, $u_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ e $I(u_k) \to I(u_0)$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver artigo página 34. □

TEOREMA 329. *Sejam $L : \Omega\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{nm}$ um integrando de Caratheodory tal que $|L(x,u,v)| \leq a|v|^p + b$, e $u_0 \in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.*

1: *Se a função $L(x,u_0(x),\cdot)$ é quasiconvexa no ponto $\nabla u_0(x)$ q.s. em Ω, então*

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u_0),$$

para qualquer sucessão $u_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tal que as partes negativas da sucessão $(L(x,u_k(x),\nabla u_k(x)))_k$ são equiintegráveis.

2: *Se $\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u_0)$, para qualquer sucessão $u_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ tal que $(|\nabla u_k|^p)_k$ é uma sucessão equiintegrável, então para quase todo o $x \in \Omega$ a função $L(x,u_0(x),\cdot)$ é quasiconvexa no ponto $\nabla u_0(x)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstre-se a primeira parte do teorema.

1: Devido às proposições 311, 314, 319 e ao corolário 307 podemos supor sem perda de generalidade que ∇u_k gera uma medida p-Young gradiente $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ e $((u_k,\nabla u_k))_k$ gera a medida de Young $(\delta_{u_0(x)} \otimes \nu_x)_{x\in\Omega}$. Note-se que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$I(u_k) = \int_\Omega L(x,u_k(x),\nabla u_k(x))dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}} \int_{\mathbb{R}^m} L(x,\cdot,\cdot)d\delta_{u_k(x)}d\delta_{\nabla u_k(x)}dx.$$

Além disso, por hipótese:

$$(\delta_{u_k(x)} \otimes \delta_{\nabla u_k(x)})_{x\in\Omega} \rightharpoonup *(\delta_{u_0(x)} \otimes \nu_x)_{x\in\Omega},$$

quando $k \to \infty$. Assim pelo teorema 309 temos:

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(x, u_0(x), \cdot) d\nu_x dx.$$

Observe-se que pelo princípio da localização, $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ é uma medida p-Young gradiente homogénea para quase todo o $x \in \Omega$.

Devido à quasiconvexidade tem-se para quase todo o $x \in \Omega$:

$$\int_{\mathbb{R}^{nm}} L(x, u_0(x), \cdot) d\nu_x \geq L(x, u_0(x), \nabla u_0(x)).$$

(Veja o corolário do teorema 321). A ultima desigualdade implica que:

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq \int_\Omega L(x, u_0(x), \nabla u_0(x)) dx = I(u_0).$$

2: A segunda afirmação demonstrá-la-emos por contradição.

Seja $(\Omega_k)_k$ uma sucessão de subconjuntos compactos de Ω tal que: $|\Omega \setminus \Omega_k| \leq \frac{1}{k}$, e as restrições de $u_0, \nabla u_0$ a qualquer dos conjuntos $\Omega_k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$ são funções contínuas. Suponha-se que para um ponto de Lebesgue $x_0 \in \Omega_k$ a função $L(x_0, u_0(x_0), \cdot)$ não é quasiconvexa em $\nabla u_0(x_0)$. Pelo corolário 322 existe $\nu \in M_p(\nabla u_0(x_0))$ tal que:

$$L(x_0, u_0(x_0), \nabla u_0(x_0)) > \int_{\mathbb{R}^{nm}} L(x, u_0(x), \cdot) d\nu + \epsilon \ (\epsilon > 0).$$

O mesmo é válido para todo o $x \in \Omega_k$ suficientemente próximo de x_0 e ν_x obtida através de ν por mudança do centro de massa de $\nabla u_0(x_0)$ para $\nabla u_0(x)$.Finalmente, a medida de young que vale ν_x nos pontos suficientemente próximos de x_0 e $\delta \nabla u_0(x)$ para os outros $x \in \Omega$ é uma medida p-Young gradiente pelo teorema 326, e pela ultima desigualdade a semicontinuidade do funcional $I(\cdot)$ falha na sucessão associada à medida de Young assim definida. Notando que o conjunto dos pontos de Lebesgue de Ω_k é um conjunto de medida total e que $lim_{k\to\infty} |\Omega \setminus \Omega_k| = 0$ a demonstração da segunda afirmação do teorema fica concluída, isto é, $L(x, u_0(x), \cdot)$ é uma função quasiconvexa em $\nabla u_0(x)$ q.s. em Ω.

$\square$

DEFINIÇÃO 330. *Diz-se que um funcional integral possui a propriedade da convergência fraca-forte se*

$$\left(u_k \rightharpoonup u_0, \text{ em } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m),\ I(u_k) \to I(u_0)\right) \Rightarrow (u_k \to u_0), \text{ em } W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

DEFINIÇÃO 331. *Seja $L : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|L(v)| \leq a|v|^p + b$, com $a > 0$. Diz-se que L é p-quasiconvexa fechada em v_0 se:*

$$\int_{\mathbb{R}^{nm}} L(\cdot)d\nu \geq L(v_0),$$

para qualquer medida p-gradiente $\nu \in M_p(v_0)$.
L diz-se p-quasiconvexa fechada estritamente se a desigualdade anterior for estrita excepto quando ν é a massa de Dirac δ_{v_0}.

TEOREMA 332. *Sejam $L : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{nm}$ um integrando de Caratheodory tal que $|L(x,u,v)| \leq a|v|^p + b$, com $a > 0$, e $u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $p \in]1, \infty[$.*

1: *Se $L(,x,u_0(x),v)$ é p-quasiconvexa fechada estritamente em $v = \nabla u_0(x)$ q.s. em Ω, então:*

$$\left(u_k \rightharpoonup u_0, \text{ em } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m),\ I(u_k) \to I(u_0)\right) \Rightarrow (u_k \to u_0), \text{ em } W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

sempre que as partes negativas de $(L(,x,u_k(x),\nabla u_k(x)))_k$ são equiintegráveis.

2: *Se para qualquer sucessão $(u_k)_k \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$*

$$\left(u_k \rightharpoonup u_0, \text{ em } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m),\ I(u_k) \to I(u_0)\right) \Rightarrow (u_k \to u_0), \text{ em } W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

então $L(,x,u_0(x),v)$, ou $-L(,x,u_0(x),v)$, é p-quasiconvexa em $v = \nabla u_0(x)$ q.s. em Ω.

DEMONSTRAÇÃO. Ver página 38 artigo. □

Bibliografia

[1] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press (1975)

[2] Adams, M., Guillemin, V., Measure theory and probability, Birkhäuser (1996)

[3] Balder, E. J., Lectures on Young Measures, CEREMADE, Université Paris IX - Dauphine (1994).

[4] Ball, J. M., Murat, F., Remarks on Chacon's Bitting Lemma, revised version (1988)

[5] Ball, J. M., Murat, F., $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals. J. Funct. Anal. 58 (1984), 225–253.

[6] Berger, M. S., Nonlinearity and Functional Analisys, Academic Press, 1977.

[7] Bethuel, F., Huisken, G., Müller, S., Steffen, K., Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, Springer, Lectures given at the 2nd Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Cetraro, Italy, June 15 – 22 (1996)

[8] Brezis, H., Analyse functionnelle, Théorie et applications, Masson (1987)

[9] Casting C., Valadier M., Convex Analysis and measurable multifunctions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 580. Springer-Verlag, Berlin-Nem York, 1977.

[10] Cesari, L., Optimization - theory and applications, Problems with ordinary differential equations, Applications of Mathematics, 17 Springer, (1983)

[11] Cohn, D. L., Measure Theory, Birkhäuser (1980)

[12] Dacorogna, B., Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer (1989)

[13] Dacorogna, B., Marcellini, P., A Counterexample in the Vectorial Calculus of Variations, Material instabilities in continuum mechanics and related mathematical problems (J.M. Ball, ed.), Oxford Univ. Press, 77-83 (1988)

[14] Dunford, N., Schwartz, J.T., Linear Operators, Interscience Publishers, inc., New York (1958)

[15] Edwards, R. E., Functional Analysis, Theory and applications, Dover Publications, Inc., New York (1995)

[16] Ekeland, I., Temam, R., Convex analysis and variational problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1976)

[17] Evans, L.C., Gariepy, R.F., CRC Press, Inc., (1992)

[18] Folland, G. B., Real Analysis,John Wiley & Sons, Inc., (1984)

[19] de Guzmán, M., Differentiation of integrals in R^n. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975)

[20] Kinderlehrer D., Pedregal P., Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev Spaces, J. Geom. Anal. 4, (1974), nž1, 59–90.

[21] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional, Editora Mir, (1982)

[22] Kristensen, J., On the non-locality of quasiconvexity, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16, no. 1, 1–13 (1999)

[23] Lieb, E. H., Loss, M., Analysis, Second edition, Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI (2001)

[24] Lima, E.L., Curso de Análise Volume 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (2002)

[25] Lima, E.L., Curso de Análise Volume 2, Instituto de Matemática Pura e Aplicad,CNPq, Rio de Janeiro, (1999)

[26] Lima, E.L., Elementos de Topologia Geral, IMPA, Rio de Janeiro (1970)

[27] Machado, A., Introdução à análise funcional, Escolar Editora (1991)

[28] Magalhães, L. T., Álgebra linear como introdução à matemática aplicada, Texto Editora (1989)

[29] Ornelas, A., Apontamentos de Análise Funcional I, Apontamentos da Licenciatura em Matemática Aplicada da Universidade de Évora, Évora (2001)

[30] Ornelas, A., Cálculo das Variações, Apontamentos da disciplina de Mestrado em Matemática Aplicada da Universidade de Évora, Évora (2002)

[31] Pedregal, P., Jensen's inequality in the calculus of variations. Differential Integral Equations 7, no. 1, 57–72 (1994)
[32] Pedregal, P., Some remarks on quasiconvexity and rank-one convexity, Proc. R. Soc. Edinb., 162, n 5, 1055-1065 (1996)
[33] Pedregal, P., Parametrized Measures and Variational Principles, Birkhäuser (1997)
[34] Pedregal, P., Variational Methods in Nonlinear Elasticity, SIAM (2000)
[35] Rudin, W., Real and complex analysis, Third edition, MacGraw-Hill (1987)
[36] Rudin, W., Functional Analysis, Second edition, MacGraw-Hill, Inc. (1991)
[37] Rockafellar, R. T., Convex analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1972)
[38] Roubícěk, T., Relaxation in the optimization theory and variational calculus, De Gruyter series in nonlinear analysis and applications 4, Berlin; New York (1997)
[39] Simmons, G. F., Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc. (1963)
[40] Šverák, V., Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, Proc. R. Soc. Edinb., 120A, 185-189 (1992)
[41] Sychev ,M. A., A New Approach to Young Measure Teory, Relaxation and Convergence in Energy, S.I.S.S.A., 44/97/M (1997)
[42] Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker, Inc. (1977)
[43] Yeh, J., Lectures on Real Analysis, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge (2000)
[44] Ziemer, W.P., Weakly Differentiable Functions, Springer, New-York (1989)