

Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 1997/1999

**A convexidade característica 1 no contexto
da semi-continuidade inferior de integrais do
cálculo das variações envolvendo gradientes
2x2 simétricos**

Dissertação apresentada por
Graça Maria Rezinho Carita

Orientador: António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

Évora
2001



Universidade de Évora

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 1997/1999

**A convexidade característica 1 no contexto
da semi-continuidade inferior de integrais do
cálculo das variações envolvendo gradientes
2x2 simétricos**

Dissertação apresentada por
Graça Maria Rezinho Carita

Orientador: António da Costa Ornelas Gonçalves
(Professor Associado)

131508

Évora
2001

2001

Esta dissertação não inclui as observações e críticas feitas pelo júri

Esta dissertação foi suportada pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito do
programa PRAXIS XXI/BM/15070/98
No período de 1 de Novembro de 1998 a 15 de Março de 1999

Agradecimentos

A realização desta dissertação foi possível, graças à colaboração de várias pessoas às quais deixo aqui os meus sinceros agradecimentos.

Ao Professor António Ornelas agradeço as sugestões e críticas formuladas.

Ao Professor Pablo Pedregal agradeço a sua disponibilidade no esclarecimento de algumas dúvidas relativas a medidas de Young.

Ao Dr. Paulo Correia expresso a minha gratidão pela disponibilidade na resolução de problemas relacionados com software, e por todo o apoio moral e incentivo proporcionados.

Ao Dr. Nuno Franco agradeço o tempo dispendido na instalação da impressora que me permitiu imprimir a versão final desta dissertação.

Ao Dr. Luís Silva agradeço as úteis indicações para a elaboração e inserção das figuras no texto.

Às colegas Rosvita e Patrícia estou grata pela camaradagem e o apoio prestados.

Por último, mas em primeiro lugar, à minha família agradeço o apoio moral e compreensão manifestados desde sempre.

A todas as pessoas que directa ou indirectamente contribuíram para a elaboração desta dissertação e que, por lapso, poderão não ter sido mencionadas queria manifestar também o meu apreço.

Índice

1	Introdução	3
2	Definições e resultados preliminares	7
2.1	Espaços topológicos	7
2.2	Espaços métricos	9
2.3	Espaços vectoriais	9
2.4	Espaços normados	11
2.5	Espaços de Banach	11
2.6	Mensurabilidade	12
2.6.1	σ - álgebras	12
2.6.2	Medidas	12
2.6.3	Medidas exteriores	13
2.6.4	Funções mensuráveis	15
2.7	O integral de Lebesgue	17
2.8	Topologias fracas	19
2.8.1	Definições e propriedades elementares da topologia $\sigma(X, X')$	19
2.8.2	A topologia fraca* $\sigma(X', X)$	20
2.8.3	Espaços reflexivos	21
2.8.4	Espaços separáveis	21
2.9	Os espaços L^p	21
2.9.1	Reflexividade. Separabilidade. O dual de L^p	22
2.9.2	Convergências forte, fraca e fraca* em L^p	25
2.10	Os espaços de Sobolev	28
2.10.1	Definições e propriedades	28
2.10.2	O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$	29
3	Convexidade, policonvexidade, quasiconvexidade e convexidade característica 1	31
3.1	Definições e propriedades.	32
3.1.1	Propriedades das funções quasiconvexas	34
3.1.2	Como se relacionam os vários tipos de convexidade.	41
3.2	Propriedades das funções convexas característica 1	45
3.3	Exemplos	49
3.3.1	Funções quasi-afins	49
3.3.2	Formas quadráticas	50
3.3.3	Contra-exemplos	53
4	Medidas de Young	57
4.1	Medidas de Young e quasiconvexidade	57
4.1.1	Medidas parametrizadas: motivação e definição	58
4.1.2	Existência de medidas de Young	62

4.1.3	Semi-continuidade inferior fraca	70
4.2	Quasiconvexidade e medidas parametrizadas gradiente homogéneas.	76
4.2.1	O caso $p = \infty$	77
4.3	Laminados	80
4.3.1	Caracterização de laminados	82
5	Propriedades de convexidade em funções homogéneas de grau 1	87
6	O contra-exemplo de Šverak	103
7	Uma tentativa para relacionar quasiconvexidade e convexidade característica 1 no caso $m = 2$	111
7.1	Condições necessárias para a quasiconvexidade	111
7.2	A convexidade característica 1 não implica a quasiconvexidade	116
7.3	O caso $m = 2$	118
8	A quasiconvexidade e a convexidade car-1 para matrizes simétricas 2×2	125
8.1	A quasiconvexificação	126
8.2	A convexificação característica 1	132
8.3	A deformação óptima	134
9	Exemplos de caracterização dos conjuntos de medidas associados aos vários tipos de convexidade	137
9.1	A convexidade	137
9.2	O caso das matrizes do exemplo de Šverak	143
9.2.1	A policonvexidade	143
9.2.2	A convexidade car-1	144
9.2.3	A quasiconvexidade	145
9.3	O caso das matrizes simétricas 2×2	146
9.3.1	A policonvexidade	146
9.3.2	A convexidade car-1	148
10	Conclusão	153
	Bibliografia	

Capítulo 1

Introdução

O objectivo do cálculo das variações é a optimização de problemas que podemos caracterizar do seguinte modo: dado um conjunto de funções, curvas ou superfícies, encontrar aquelas que possuem uma certa propriedade máxima ou mínima.

Podemos considerar, por exemplo, todas as curvas planas de comprimento fixo e procurar quais delas delimitam a maior área.

Os problemas variacionais surgem-nos em muitas áreas no dia a dia tais como a física, a química, a biologia, a economia.

O problema de extremos mais antigo de que há memória é conhecido por problema isoperimétrico. Este problema consiste na determinação de linhas fechadas simples, com perímetro fixado à partida, de modo a maximizar a área delimitada.

Mas embora estes problemas sejam conhecidos desde a antiguidade só depois do cálculo diferencial e integral ter sido desenvolvido por Leibnitz e Newton se começou a sistematizar a investigação.

Newton levantou o problema da forma que deveria ter um sólido de revolução, movendo-se num fluido na direcção do seu eixo, com velocidade constante, para que a resistência ao movimento fosse mínima. Mais tarde, em 1696, John Bernoulli propôs o problema da determinação de uma trajectória unindo dois pontos fixados, seguindo a qual, um corpo sujeito apenas à força da gravidade efectua o percurso em tempo mínimo. Depois surgiu o problema de obtenção de geodésicas – linhas de menor comprimento entre dois pontos da Terra.

O que é que estes problemas têm em comum?

Em todos eles pretendemos encontrar o extremo de uma função dependente de um número infinito de variáveis, através de uma expressão envolvendo um integral.

Podemos dizer que o problema central do cálculo das variações consiste em encontrar, entre todas as funções satisfazendo uma determinada condição de fronteira, aquelas que minimizam um dado funcional. Mais precisamente, consideremos o funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado contido em \mathbb{R}^n e u é uma função definida em Ω com valores em \mathbb{R}^m .

A função $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ supõe-se uma função de tipo Carathéodory (isto é, mensurável em x e contínua em u e ∇u). O nosso problema, em abstracto, consiste em encontrar

$$\min \{I(u) : u \in X \text{ e } u = u_0 \text{ em } \partial\Omega\} \quad (\text{P})$$

onde X é um espaço de funções reflexivo.

Durante o século XIX foram desenvolvidas, por Lagrange, Riemann, Weierstrass, Jacobi e Hamilton entre outros, importantes técnicas que nos permitiram resolver um grande número de problemas de optimização. Estes métodos são designados por métodos clássicos. Com o começo do século XX, surgiram novos métodos introduzidos por Hilbert e Lebesgue que foram mais tarde generalizados por Tonelli e são hoje conhecidos por métodos directos.

O método clássico segue um raciocínio semelhante ao da dimensão finita. Baseia-se na ideia de que todo o problema de mínimo tem uma solução. Para determinarmos essa solução procuramos primeiro estabelecer condições que têm de ser satisfeitas por um minimizador; são as chamadas condições necessárias. Por exemplo, se um funcional diferenciável $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é minimizado para um dado $u \in \mathcal{C}$, então a condição $I'(u) = 0$ conduz-nos a uma equação diferencial, designada por equação de Euler-Lagrange.

A positividade da segunda derivada do funcional perto das soluções da equação de Euler-Lagrange permite-nos garantir que a solução encontrada é, na realidade, um mínimo para o problema.

Assim, se $u \in \mathcal{C}^2$ é um mínimo para o problema então

$$I'(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_{i\alpha}}(x, u, \nabla u) \right) + \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}(x, u, \nabla u) = 0 \quad (1.1)$$

onde $f = f(x, u, A)$.

A equação (1.1) reduz-se a uma equação diferencial ordinária se $n = m = 1$, a um sistema de equações diferenciais ordinárias se $n = 1$ e $m > 1$, a uma equação diferencial parcial se $n > 1$, $m = 1$ ou a um sistema de equações diferenciais parciais se $n > 1$ e $m > 1$.

Então digamos que o problema de obtenção de mínimo fica reduzido, desta forma, à determinação de soluções de equações diferenciais associadas ao correspondente funcional. Sempre que estas soluções se possam encontrar explicitamente ou mostrar que existem, podemos estabelecer sob condições adequadas, a existência de soluções para o problema variacional.

Este procedimento é eficaz em dimensão 1, quando a equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial ordinária. Mas quando trabalhamos em dimensões superiores somos conduzidos a determinar as soluções de equações diferenciais parciais muitas vezes não-lineares o que não é nada fácil. Repare-se também que encontrar uma solução \mathcal{C}^2 é, em geral, muito difícil.

Se não conseguirmos encontrar uma solução exacta para a equação de Euler-Lagrange resta-nos recorrer a métodos de aproximação para resolver o problema variacional – são os chamados métodos directos do cálculo das variações.

Neste trabalho referimo-nos apenas ao método directo desenvolvido, por volta dos anos 30, por Tonelli e que consiste em procurar os minimizadores directamente no funcional.

Para compreendermos mais claramente a essência destas técnicas, relembremos o caso dimensional finito.

Seja $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Pretendemos encontrar $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $I(x_0) \leq I(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.

Para garantirmos a existência de ínfimo precisamos de impor que I seja limitado inferiormente (isto é, $I(x) \geq c > -\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$).

Seja

$$-\infty < m = \inf \{I(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

e seja (x_n) uma sucessão minimizante, isto é, $I(x_n) \rightarrow m$.

Se tal sucessão minimizante estiver num conjunto fechado e limitado, como o espaço tem dimensão finita, isto significa que (x_n) está contida num conjunto compacto, logo, podemos extrair uma subsucessão (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Então $I(x_{n_k}) \rightarrow m$, porque $I(x_{n_k})$ é uma subsucessão de $I(x_n)$, logo converge para o mesmo limite de $I(x_n)$. Por outro lado, como I é contínuo temos $I(x_{n_k}) \rightarrow I(x_0)$, logo, por unicidade do limite, concluímos que $I(x_0) = m$ e, portanto, x_0 é um minimizador.

De facto, não é necessário que I seja contínuo, isto é, não é necessário que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(x_n) = I(x)$ sempre que $x_n \rightarrow x$, mas apenas $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(x_n) \geq I(x)$, ou seja que I seja semi-contínuo inferiormente, uma vez que estamos apenas interessados no mínimo.

A ideia do método directo é, reproduzir esta análise no caso dimensional infinito, encontrar sucessões minimizantes pertencendo a um conjunto fechado e limitado e assegurar a semi-continuidade inferior.

O problema é mais delicado que antes, no sentido que no espaço de dimensão infinita, a primeira hipótese não é, em geral, suficiente para permitir a extracção de uma subsucessão convergente. Isto é possível apenas, com uma topologia mais fraca que a usual. A segunda imposição é então que I seja semi-contínuo inferiormente

com respeito a esta topologia fraca, para garantir que o ínfimo seja de facto um minimizador. Este último requisito é cumprido por uma vasta classe de funcionais I , nomeadamente aqueles cuja função integranda é convexa relativamente à variável gradiente.

O problema de obter boas propriedades de compacidade e o problema de obter a semi-continuidade inferior do funcional, são antagónicos, na medida em que quanto mais se enfraquece a topologia menos possibilidades temos de I ser semi-contínuo inferiormente.

Um espaço de funções X razoável deve ser completo, munido das normas de tipo integral. Pode ser por exemplo, um espaço de Sobolev e não um espaço de funções suaves C^1 .

Devemos revestir X com a topologia fraca para obtermos a compacidade das soluções minimizantes. Uma das características notáveis das topologias fracas é que sucessões limitadas são pré-compactas (se X é reflexivo). Assim, para obter compacidade na topologia fraca, é suficiente obter a limitação das sucessões minimizantes, e isto pode ser facilmente obtido impondo um comportamento apropriado da função integranda, f , no infinito (coercividade).

A verificação da semi-continuidade inferior de I com respeito à topologia fraca, é contudo muito mais delicada e será o principal objecto de estudo deste trabalho.

O capítulo II começa por nos apresentar as definições e resultados básicos de topologia, lembrando-nos as noções essenciais da teoria da medida e terminando com um breve estudo dos espaços de Lebesgue e dos espaços de Sobolev, que vão ser amplamente utilizados em todo o trabalho.

O capítulo III vai estabelecer-nos o resultado de que a semi-continuidade inferior do funcional está relacionada com “uma certa propriedade de convexidade” da função integranda f . Na realidade, verifica-se que no caso vectorial não é necessário a função integranda ser convexa para obtermos a semi-continuidade inferior do funcional. Introduzem-se três diferentes noções de convexidade – policonvexidade, quasiconvexidade e convexidade car-1. Deduzem-se algumas propriedades das mesmas e estabelecem-se algumas relações entre elas.

Durante muito tempo tentaram-se estabelecer relações entre estes vários tipos de convexidade. Conjecturou-se que no caso vectorial a quasiconvexidade e a convexidade característica 1 não coincidem. Em 1992, Šverak demonstrou que existem, realmente, funções convexas característica 1 que não são quasiconvexas no caso 2×3 . O seu notável contra-exemplo é apresentado no capítulo VI.

O capítulo VII mostra-nos a dificuldade de extensão do contra-exemplo de Šverak ao caso das matrizes simétricas 2×2 . Depois de reformulado o problema em termos de medidas de Young:

Convexidade característica 1 \implies quasiconvexidade?

\Updownarrow

Toda a medida parametrizada gradiente homogénea é um laminado?

vamos ter oportunidade de perceber que a resolução do mesmo em dimensão 2×2 traz-nos muitas dificuldades devido ao número de direcções característica 1 não ser finito.

Com o intuito de justificarmos a dualidade existente entre a convexidade car-1 e os laminados e a quasiconvexidade e as medidas gradiente parametrizadas homogéneas e de melhor entender as ideias contidas no capítulo VII, tornou-se indispensável a inclusão prévia do capítulo IV onde se introduzem as noções e resultados essenciais sobre medidas de Young.

No capítulo VIII apresentam-se as ideias contidas no artigo “*A note on quasiconvexity and rank-one convexity for symmetric matrices*” de Pedregal e Šverak onde se tenta encontrar o contra-exemplo por dois processos diferentes. Primeiro fixa-se uma função integranda convexa característica 1 e tenta-se encontrar uma deformação u que viole a desigualdade da quasiconvexidade. O segundo processo consiste em fixar uma deformação u conveniente e tentar arranjar uma função convexa característica 1 que não verifique a desigualdade da quasiconvexidade.

O capítulo IX apresenta os conjuntos das medidas que caracterizam os vários tipos de convexidade. Voltamos a apresentar o contra-exemplo de Šverak mostrando que, para o caso 2×3 , o conjunto das medidas que caracterizam a convexidade característica 1 está estritamente contido no conjunto das medidas que caracterizam a quasiconvexidade. Para o caso 2×2 não conseguimos determinar o conjunto das medidas que caracteriza a quasiconvexidade. Determinámos um conjunto, mas não sabemos se este conjunto é ou não maximal.

Capítulo 2

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos fundamentais para os capítulos seguintes.

Desenvolveremos a teoria partindo das noções mais gerais e especializaremos gradualmente.

Os resultados são aqui apresentados sem demonstração. O leitor interessado nas demonstrações pode consultar, em cada caso, a referência sugerida. Os resultados sem referência consideram-se de demonstração trivial.

2.1 Espaços topológicos

Definição 2.1.1 *Um espaço topológico (X, \mathcal{T}) é um conjunto X com uma colecção \mathcal{T} de subconjuntos de X (isto é, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$) satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$;
2. Se $A \in \mathcal{T}$ e $B \in \mathcal{T}$ então $A \cap B \in \mathcal{T}$;
3. Sendo I um conjunto qualquer de índices, e $A_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I$ então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Os elementos de \mathcal{T} são os **abertos** de X e a colecção \mathcal{T} diz-se uma **topologia** em X .

Definição 2.1.2 *Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico. Um conjunto F diz-se **fechado**, se o seu complementar for um aberto, isto é, se $F^c \in \mathcal{T}$.*

Definição 2.1.3 *Seja (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e $A \subseteq X$. Um ponto $x \in X$ diz-se:*

1. **ponto interior** a A , se existir um aberto U ($\in \mathcal{T}$) tal que $x \in U \subseteq A$;
2. **ponto exterior** a A , se for interior a A^c ;
3. **ponto fronteiro** a A , se para qualquer $U \in \mathcal{T}$ com $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap A^c \neq \emptyset$.
4. **ponto de acumulação** se, para cada $U \in \mathcal{T}$ com $x \in U$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.
5. **ponto isolado** se pertencer a A , mas não for ponto de acumulação.

Notação: Designamos por:

1. **interior** de A , o conjunto dos pontos interiores a A , e escrevemos $\text{int}A$.
2. **exterior** de A , o conjunto dos pontos exteriores a A , e escrevemos $\text{ext}A$.
3. **fronteira** de A , o conjunto dos pontos fronteiros a A , e escrevemos $\text{fr}A$ ou ∂A .

4. **derivado de A** , o conjunto dos pontos limite de A , e escrevemos A' .

5. **fecho ou aderência de A** , o conjunto $\bar{A} = A \cup A'$.

Definição 2.1.4 Dizemos que $V \subset X$ é uma **vizinhança** do ponto $a \in X$ quando $a \in \text{int}V$.

Definição 2.1.5 Uma sucessão $(x_n) \subseteq X$ diz-se **convergente** para $x \in X$ (e denota-se por $x_n \rightarrow x$) se qualquer vizinhança de x contém todos os pontos x_n excepto um número finito.

Proposição 2.1.6 Um conjunto A é aberto se e só se contém uma vizinhança de cada um dos seus pontos.

Definição 2.1.7 Um conjunto $A \subseteq X$ diz-se **denso** em X se $\bar{A} = X$.

O próximo resultado diz-nos que a estrutura topológica de um espaço topológico pode ser “transportada” para um subconjunto desse espaço.

Teorema 2.1.8 Seja (X, T) um espaço topológico e seja $S \subseteq X$. Definamos

$$\mathcal{T}_S = \{S \cap A : A \in T\}.$$

Então \mathcal{T}_S é uma topologia em S , à qual chamamos **topologia relativa** de S ou **topologia induzida** em S por T .

Definição 2.1.9 Sejam (X, \mathcal{T}_X) e (Y, \mathcal{T}_Y) dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$. Dizemos que a aplicação f é **contínua** no ponto $x \in X$, se para cada $V \in \mathcal{T}_Y$ com $f(x) \in V$ existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $x \in U$ e $f(U) \subseteq V$.

Se f for contínua em x para qualquer $x \in X$, diz-se que é uma **função contínua**.

Proposição 2.1.10 Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se e só se a imagem inversa, $f^{-1}(F)$, de qualquer fechado F em Y é fechada em X .

Demonstração: [ver [D-S], I.4.16.]

Notação: $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$.

Definição 2.1.11 Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ diz-se um **homeomorfismo** se for bijectiva e f e f^{-1} forem ambas contínuas.

Proposição 2.1.12 A composição de funções contínuas é contínua.

Debrucemo-nos agora sobre a noção de compacidade e as suas principais consequências.

Definição 2.1.13 Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma **cobertura** de X se a sua união contém X . Se X for um espaço topológico e cada $V \in \mathcal{V}$ for aberto, então \mathcal{V} diz-se uma **cobertura aberta** de X .

Definição 2.1.14 Um espaço topológico X diz-se **compacto** se de cada cobertura aberta de X for possível extrair uma subcobertura finita de X .

Proposição 2.1.15 ’

1. Um subconjunto fechado de um compacto é compacto.
2. A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é compacta.

Demonstração: [ver [D-S], I.5.7.]

Proposição 2.1.16 Uma função real definida num compacto, atinge o seu máximo e o seu mínimo.

Demonstração: [ver [D-S], I.5.10.]

Definição 2.1.17 Um subconjunto A de um espaço topológico X diz-se **sequencialmente compacto** se de qualquer sucessão de A se pode extrair uma subsucessão convergente.

Definição 2.1.18 Seja (X, T) um espaço topológico. Suponhamos que para quaisquer dois elementos $x_1 \neq x_2$ de X , existem abertos U_1, U_2 tais que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Então X diz-se um espaço de **Hausdorff**, ou **separado**.

2.2 Espaços métricos

Definição 2.2.1 Um espaço métrico é um espaço (X, d) onde X é um conjunto e d é uma métrica (ou distância) em X , isto é, uma função definida em $X \times X$, com valores reais não-negativos, tal que para quaisquer $x, y, z \in X$, se tem

1. $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular).

Definição 2.2.2 Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que o conjunto $A \subseteq X$ é limitado se existir um número real k tal que $d(x, y) \leq k$ para quaisquer $x, y \in A$.

Definição 2.2.3 Dado um ponto $x_0 \in X$ e um número real $r \geq 0$, a bola aberta $B_r(x_0)$ centrada em x_0 e de raio r é o conjunto

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Proposição 2.2.4 Num espaço métrico (X, d) dizemos que uma sucessão (x_n) em X converge se existir $x \in X$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Escrevemos então $x_n \rightarrow x$.

Proposição 2.2.5 Qualquer espaço métrico é um espaço topológico.

Definição 2.2.6 Uma sucessão $(x_n) \subseteq X$ diz-se sucessão de Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : m, n \geq p \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.2.7 Qualquer sucessão convergente é sucessão de Cauchy.

Definição 2.2.8 Um espaço métrico diz-se completo se qualquer sucessão de Cauchy for convergente.

Nota 2.2.9 O espaço métrico (\mathbb{R}, d) , onde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $d(x, y) = |x - y|$, é completo.

Proposição 2.2.10 Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos é contínua num ponto x se e só se $(f(x_n))$ converge para $f(x)$ sempre que (x_n) converge para x .

Demonstração: [ver [D-S], I.6.8.]

2.3 Espaços vectoriais

Vamos considerar apenas espaços vectoriais definidos sobre o corpo \mathbb{R} dos escalares reais.

Definição 2.3.1 Chamamos espaço vectorial a qualquer conjunto $X \neq \emptyset$ com duas operações nele definidas:

uma aplicação em $X \times X$ com valores em X definida por $(x, y) \mapsto x + y$, chamada adição;

uma aplicação em $\mathbb{R} \times X$ com valores em X definida por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, chamada multiplicação por

um escalar;

verificando os seguintes axiomas:

1. $x + y = y + x$;

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $\forall x, y \in X \quad \exists z \in X : x + z = y$;
4. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$;
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$;
7. $1x = x$

para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Chamamos **vetores** aos elementos de X , e os elementos de \mathbb{R} são designados por **escalares**. Dizemos que X é um espaço vectorial real. Por simplicidade referi-lo-emos por espaço vectorial apenas.

Definição 2.3.2 *Seja X um espaço vectorial. Um vector $x \in X$ diz-se **combinação linear** dos vectores $x_1, \dots, x_k \in X$ se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$.*

Definição 2.3.3 *Um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq X$ diz-se **linearmente independente** se*

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

*Um conjunto $C \subseteq X$ diz-se **linearmente independente**, se qualquer subconjunto finito é linearmente independente. Se um conjunto não é linearmente independente então diz-se **linearmente dependente**.*

Definição 2.3.4 *Seja A um subconjunto de um espaço vectorial X . Designamos $\text{lin}(A)$ o **invólucro linear** de A , isto é,*

$$\text{lin}A = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k : x_1, \dots, x_k \in X, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots\}$$

Definição 2.3.5 *Um conjunto $B \subseteq X$ diz-se uma **base** de X se B é linearmente independente e $\text{lin}(B) = X$ (isto é, se B gera X).*

Se existe em X uma base finita então diz-se que X tem **dimensão finita**; demonstra-se então que o número de elementos de qualquer base de X coincide e esse número diz-se a **dimensão** de X . Caso contrário, diz-se que X tem **dimensão infinita**.

Definição 2.3.6 *Seja $f : X \rightarrow Y$ definida entre dois espaços vectoriais. A aplicação f diz-se **linear** se:*

- a) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X$;
- b) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 2.3.7 *Uma aplicação $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se um **funcional**.*

Definição 2.3.8 *Um conjunto X diz-se um **espaço vectorial topológico** (e.v.t.) se X é um espaço vectorial e:*

1. *qualquer conjunto constituído por um elemento é fechado;*
2. *a soma de vectores e a multiplicação por um escalar são aplicações contínuas.*

2.4 Espaços normados

O conceito de norma é uma generalização do conceito de comprimento de um vector em \mathbb{R}^n .

Definição 2.4.1 Uma função real $\|\cdot\|$ num espaço vectorial X diz-se uma **norma** se

1. $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, (homogeneidade)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$. (desigualdade triangular)

Definição 2.4.2 Chamamos **espaço normado** a um espaço vectorial com uma norma nele definida.

Nota 2.4.3 ' ,

1. Verifica-se que a aplicação $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica; assim, podemos afirmar que qualquer espaço normado é um espaço métrico.
2. Uma sucessão $(x_n) \subseteq X$ converge para x se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \implies \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Proposição 2.4.4 Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $C \subseteq X$ um conjunto compacto. Então C é limitado e fechado.

Proposição 2.4.5 Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é limitado e fechado.

Teorema 2.4.6 (de Tietze) Sejam F um subconjunto fechado de um espaço normado X e f uma função real contínua definida em F .

Então existe uma função contínua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.

Demonstração: [ver [Lima], capítulo X, proposição 2.]

2.5 Espaços de Banach

Definição 2.5.1 Um espaço normado completo diz-se um **espaço de Banach**.

Definição 2.5.2 Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. O **dual** X' , de X , é o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em X .

A norma de uma aplicação linear L , entre dois espaços normados define-se como

$$\|L\| = \sup_{|x| \leq 1} |Lx|.$$

Proposição 2.5.3 O dual X' , munido da norma definida acima, é um espaço de Banach.

Demonstração: [ver [D-S], II.3.2.]

Teorema 2.5.4 (Hahn-Banach) Seja X um espaço vectorial topológico, A um conjunto não-vazio, aberto e convexo, e \mathcal{M} um subespaço não-vazio afim que não intersecta A . Então existe um hiperplano fechado afim \mathcal{H} que contém \mathcal{M} e não intersecta A .

Demonstração: [ver [Ed], teorema 2.2.1]

Corolário 2.5.5 Num espaço vectorial real X , localmente convexo e separado, todo o conjunto convexo fechado é a intersecção dos semi-espaços fechados que o contém.

2.6 Mensurabilidade

2.6.1 σ - álgebras

Definição 2.6.1 *Seja X um conjunto. Uma colecção \mathcal{A} de subconjuntos de X diz-se uma σ -álgebra em X se*

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. para cada conjunto $A \in \mathcal{A}$, o conjunto A^c pertence a \mathcal{A} ,
3. para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos que pertencem a \mathcal{A} , o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertence a \mathcal{A} ,
4. para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos que pertencem a \mathcal{A} , o conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ pertence a \mathcal{A} .

Definição 2.6.2 *Seja X um conjunto e \mathcal{A} uma σ -álgebra em X . Então (X, \mathcal{A}) diz-se um **espaço mensurável**.*

Definição 2.6.3 *Se $A \subseteq X$ for um elemento de \mathcal{A} dizemos que A é \mathcal{A} -mensurável.*

Proposição 2.6.4 *Seja X um conjunto, e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de X . Então existe a mais pequena σ -álgebra em X que contém \mathcal{F} , que recebe o nome de σ -álgebra gerada por \mathcal{F} .*

Demonstração: [ver [Cohn], corolário 1.1.2.]

Definição 2.6.5 *A σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^n é a σ -álgebra em \mathbb{R}^n gerada pela colecção de abertos (usuais) de \mathbb{R}^n , e é denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Os subconjuntos de Borel, ou borelianos, de \mathbb{R}^n são os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.6.6 *Seja \mathcal{G} a família de todos os abertos de \mathbb{R}^n e seja \mathcal{F} a família de todos os fechados de \mathbb{R}^n .*

Seja \mathcal{G}_δ a colecção de todas as intersecções de sucessões de conjuntos em \mathcal{G} , e seja \mathcal{F}_σ a colecção de todas as uniões de sucessões de conjuntos em \mathcal{F} .

Os elementos de \mathcal{G}_δ são chamados conjuntos G_δ e os elementos de \mathcal{F}_σ são chamados conjuntos F_σ .

Proposição 2.6.7 *Cada subconjunto fechado de \mathbb{R}^n é um G_δ , e cada subconjunto aberto de \mathbb{R}^n é um F_σ .*

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.1.5.]

2.6.2 Medidas

Definição 2.6.8 *Seja X um conjunto e seja \mathcal{A} uma σ -álgebra em X . Uma função μ cujo domínio é a σ -álgebra \mathcal{A} , e cujos valores estão no conjunto $[0, +\infty]$, diz-se **contavelmente aditiva** se satisfaz*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

para cada sucessão infinita $\{A_i\}$ de conjuntos disjuntos (2 a 2) de \mathcal{A} .

Definição 2.6.9 *Uma **medida** em \mathcal{A} é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$ e que é contavelmente aditiva.*

Definição 2.6.10 *Seja X um conjunto, \mathcal{A} uma σ -álgebra em X , e μ uma medida em \mathcal{A} . Então (X, \mathcal{A}, μ) diz-se um **espaço de medida**.*

Proposição 2.6.11 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, e sejam $A, B \in \mathcal{A}$ com $A \subseteq B$; então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se, além disso, $\mu(A) < +\infty$ então $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.*

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.2.1.]

Proposição 2.6.12 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Se $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ é uma sucessão arbitrária de conjuntos, então*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.2.2.]

Proposição 2.6.13 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida.*

1. *Se $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ é uma sucessão crescente (por inclusão), então $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i)$.*
2. *Se $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ é uma sucessão decrescente (por inclusão), e se $\mu(A_i) < +\infty$ se verifica para todo i , então $\mu \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(A_i)$.*

2.6.3 Medidas exteriores

Definição 2.6.14 *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{P}(X)$ a colecção de todos os subconjuntos de X .*

*Um **medida exterior** em X é um função $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ tal que*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. *Se $A \subseteq B \subseteq X$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*
3. *Se $\{A_i\}$ é uma sucessão de subconjuntos de X , então*

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i).$$

Podemos dizer que uma medida exterior em X é uma função monótona e contavelmente subaditiva de $\mathcal{P}(X)$ em $[0, +\infty]$ tal que o valor de \emptyset é zero.

Nota 2.6.15 *Uma medida pode não ser uma medida exterior, bastando para isso que o seu domínio não seja $\mathcal{P}(X)$. Uma medida exterior poderá não ser uma medida, pois pode não ser contavelmente aditiva.*

Um **intervalo** de \mathbb{R}^n é um subconjunto de \mathbb{R}^n do tipo $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ onde I_1, I_2, \dots, I_n são subintervalos de \mathbb{R} e

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in I_i, i = 1, \dots, n\}.$$

O **volume** de um intervalo $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ é dado pelo produto do comprimento dos intervalos I_1, \dots, I_n e nota-se por $\text{vol}(I_1 \times \cdots \times I_n)$.

Para cada subconjunto A de \mathbb{R}^n seja \mathcal{C}_A o conjunto de todas as sucessões $\{R_i\}$ de intervalos abertos limitados tais que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{+\infty} R_i$. Então a **medida exterior de Lebesgue**, denotada por $\lambda^*(A)$, é definida por

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \text{vol}(R_i) : \{R_i\} \in \mathcal{C}_A \right\}.$$

Definição 2.6.16 *Seja X um conjunto, e seja μ^* uma medida exterior em X . Um subconjunto B de X diz-se μ^* -**mensurável** se a igualdade*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

se verifica para qualquer subconjunto A de X .

Definição 2.6.17 Um subconjunto de \mathbb{R}^n diz-se **Lebesgue mensurável** se é mensurável relativamente à medida exterior de Lebesgue.

Teorema 2.6.18 Seja X um conjunto, seja μ^* uma medida exterior em X , e seja \mathcal{M}_{μ^*} a colecção de todos os subconjuntos de X μ^* -mensuráveis. Então:

1. \mathcal{M}_{μ^*} é uma σ -álgebra;
2. a restrição de μ^* a \mathcal{M}_{μ^*} é uma medida em \mathcal{M}_{μ^*} .

Demonstração: [ver [Cohn], teorema 1.3.4.]

Proposição 2.6.19 Qualquer boreliano de \mathbb{R}^n é Lebesgue mensurável.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.3.6.]

Definição 2.6.20 A restrição da medida exterior de Lebesgue em \mathbb{R}^n , à colecção \mathcal{M}_{λ^*} dos subconjuntos de \mathbb{R}^n Lebesgue mensuráveis é chamada **medida de Lebesgue** e será denotada por λ .

Nota 2.6.21 A restrição da medida exterior de Lebesgue ao conjunto dos borelianos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é também chamada medida de Lebesgue.

Proposição 2.6.22 Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n Lebesgue mensurável. Então:

1. $\lambda(A) = \inf \{ \lambda(U) : U \text{ é aberto e } A \subseteq U \}$;
2. $\lambda(A) = \sup \{ \lambda(K) : K \text{ é compacto e } K \subseteq A \}$.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.4.1.]

Proposição 2.6.23 A medida de Lebesgue é invariante por translacções no sentido que, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ então $\lambda(A) = \lambda(x + A)$.

Definição 2.6.24 Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida.

A medida μ diz-se **completa** se

$$A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \text{ e } B \subseteq A \implies B \in \mathcal{A}.$$

Proposição 2.6.25 A medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis é o completamento da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 1.5.2.]

Lema 2.6.26 Seja A um subconjunto Lebesgue mensurável de \mathbb{R}^n . Então existem subconjuntos borelianos E e F de \mathbb{R}^n tais que $E \subseteq A \subseteq F$ e $\lambda(F \setminus E) = 0$.

Demonstração: [ver [Cohn], lema 1.5.3.]

Definição 2.6.27 Seja μ Borel Mensurável em X e E um subconjunto de Borel em X . A medida μ é chamada **exterior regular** em E se

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \supseteq E, U \text{ aberto} \}$$

e **interior regular** em E se

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compacto} \}.$$

Se μ é interior e exterior regular em todos os conjuntos Borel então μ é regular.

Definição 2.6.28 Um **medida de Radon** em X é uma medida Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior nos borelianos e regular interior nos abertos.

2.6.4 Funções mensuráveis

Nesta secção introduzimos as funções mensuráveis e estudamos as suas propriedades elementares.

Proposição 2.6.29 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, e seja $A \in \mathcal{A}$. Para uma função $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ as seguintes condições são equivalentes:*

1. para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) \leq t\}$ pertence a \mathcal{A} ;
2. para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) < t\}$ pertence a \mathcal{A} ;
3. para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) \geq t\}$ pertence a \mathcal{A} ;
4. para cada real t o conjunto $\{x \in A : f(x) > t\}$ pertence a \mathcal{A} .

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.1.1.]

Definição 2.6.30 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, e seja $A \in \mathcal{A}$. A função $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ é \mathcal{A} -mensurável se satisfaz uma, e portanto, todas as condições da proposição 2.6.29.*

Definição 2.6.31 *Se $X = \mathbb{R}^n$, uma função que é mensurável com respeito a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é chamada **Borel mensurável** e uma função que é mensurável com respeito a \mathcal{M}_{λ^*} chama-se **Lebesgue-mensurável**.*

Nota 2.6.32 *Toda a função Borel mensurável é Lebesgue mensurável.*

Proposição 2.6.33 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, e seja $A \in \mathcal{A}$. Para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ as seguintes condições são equivalentes:*

1. f é \mathcal{A} -mensurável;
2. para cada subconjunto aberto U de \mathbb{R} o conjunto $f^{-1}(U)$ pertence a \mathcal{A} ;
3. para cada subconjunto fechado F de \mathbb{R} o conjunto $f^{-1}(F)$ pertence a \mathcal{A} ;
4. para cada subconjunto boreliano B de \mathbb{R} o conjunto $f^{-1}(B)$ pertence a \mathcal{A} .

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.1.8.]

Sejam f e g funções que tomam valores na recta acabada $[-\infty, +\infty]$ e têm o mesmo domínio A . O máximo e o mínimo de f e g são funções de A para $[-\infty, +\infty]$ definidas por

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\}.\end{aligned}$$

Proposição 2.6.34 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, seja $A \in \mathcal{A}$, e sejam f e g funções mensuráveis definidas em A com valores em $[-\infty, +\infty]$.*

Então $f \vee g$ e $f \wedge g$ são mensuráveis.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.1.3.]

Proposição 2.6.35 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, seja $A \in \mathcal{A}$ e seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis definidas de A em $[-\infty, +\infty]$. Então*

1. as funções $\sup_n f_n$ e $\inf_n f_n$ são mensuráveis,
2. as funções $\limsup_n f_n$ e $\liminf_n f_n$ são mensuráveis,

3. a função $\lim_n f_n$ (cujo domínio é $\left\{x \in A : \lim_n \sup f_n(x) = \lim_n \inf f_n(x)\right\}$) é mensurável.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.1.4.]

Proposição 2.6.36 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável, seja A um subconjunto de X que pertence a \mathcal{A} , sejam f e g funções mensuráveis definidas de A em \mathbb{R} , e seja α um número real.*

Então αf , $f + g$, $f - g$, fg e $\frac{f}{g}$ (onde o domínio de $\frac{f}{g}$ é $\{x \in A : g(x) \neq 0\}$) são mensuráveis.

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.1.6.]

Definição 2.6.37 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Diz-se que uma propriedade no conjunto dos pontos de X se verifica **quase-sempre**, se o conjunto dos pontos em X para os quais a propriedade não se verifica tiver medida nula.*

Por outras palavras, uma propriedade verifica-se quase sempre se existe um conjunto N que pertence a \mathcal{A} , satisfazendo $\mu(N) = 0$, e contém todos os pontos onde a propriedade não é satisfeita.

Abreviadamente escrevemos, *q.s.* quando queremos afirmar que uma propriedade se verifica quase-sempre.

Proposição 2.6.38 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, e sejam f e g funções definidas em X e com valores reais que são iguais *q.s.* Se μ é completa e se f é \mathcal{A} -mensurável, então g é \mathcal{A} -mensurável.*

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.2.1.]

Corolário 2.6.39 *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida, seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em X de valores reais, e seja f definida em X e com valores reais tal que (f_n) converge para f *q.s.* Se μ é completa e cada f_n é \mathcal{A} -mensurável, então f é \mathcal{A} -mensurável.*

Demonstração: [ver [Cohn], proposição 2.2.2.]

Definição 2.6.40 *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A função χ_A definida por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

*é a chamada **função característica** de A .*

Definição 2.6.41 *Uma função $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função simples** se o seu contradomínio, $s(\mathbb{R}^n)$, for um conjunto finito.*

Proposição 2.6.42 *Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e seja B um subconjunto de X . Então a função característica de B , χ_B , é \mathcal{A} -mensurável se e só se $B \in \mathcal{A}$.*

Observe que se $s(x) \in \{a_1, \dots, a_m\} \forall x \in \mathbb{R}^n$ então claramente $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ onde $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = a_j\}$.

Além disso, s é mensurável se e só se A_1, \dots, A_m são mensuráveis.

Teorema 2.6.43 *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos garantir a existência de uma sucessão (s_n) de funções simples convergindo pontualmente para f em A .*

Se f é limitada, (s_n) pode ser escolhida de modo a que a convergência seja uniforme.

Se f é mensurável, cada s_n pode ser mensurável.

Se f tem valores não negativos, a sucessão (s_n) pode ser escolhida crescente em cada ponto.

Demonstração: [ver [Fe], proposição 3.7.]

2.7 O integral de Lebesgue

Estamos agora em condições de definir o integral de Lebesgue de uma função mensurável definida num conjunto mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Nesta secção, quando falarmos de conjuntos ou funções mensuráveis queremos dizer Lebesgue mensuráveis. Para uma função simples $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ onde $A_j \subseteq A$, sendo A_j mensurável, definimos

$$\int_A s(x) dx = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

Se f é mensurável e não negativa, definimos

$$\int_A f(x) dx = \sup \int_A s(x) dx,$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto das funções mensuráveis que se anulam fora de A e satisfazem $0 \leq s(x) \leq f(x)$ em A .

Nota 2.7.1 *O integral de uma função não negativa pode ser $+\infty$.*

Se f é mensurável e tem valores reais, escrevemos $f = f^+ - f^-$, onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \min\{-f, 0\}$ são ambas mensuráveis (proposição 2.6.34) e não negativas.

Definição 2.7.2 *Definimos*

$$\int_A f(x) dx = \int_A f^+(x) dx - \int_A f^-(x) dx$$

sempre que pelo menos um dos integrais do lado direito é finito.

Se ambos os integrais são finitos dizemos que f é Lebesgue integrável em A .

Proposição 2.7.3 *Suponhamos que todas as funções e conjuntos citados são mensuráveis.*

- a) *Se f é limitada em A e $\mu(A) < \infty$, então f é Lebesgue integrável em A .*
 b) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in A$ e se $\mu(A) < \infty$, então*

$$a\mu(A) \leq \int_A f \leq b\mu(A).$$

- c) *Se $f \leq g$ para todo $x \in A$, e se ambos os integrais existem então*

$$\int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx.$$

- d) *Se f, g são Lebesgue integráveis em A , então $f + g$ é Lebesgue integrável em A e*

$$\int_A (f + g)(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_A g(x) dx.$$

- e) *Se f é Lebesgue integrável em A e $c \in \mathbb{R}$, então cf é Lebesgue integrável em A e*

$$\int_A (cf)(x) dx = c \int_A f(x) dx.$$

- f) *Se f é Lebesgue integrável em A então $|f|$ é Lebesgue integrável em A e*

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

g) Se f é Lebesgue integrável em A e $B \subseteq A$, então f é Lebesgue integrável em B . Se além disso $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, então

$$\int_B f(x) dx \leq \int_A f(x) dx.$$

h) Se $\mu(A) = 0$ então $\int_A f(x) dx = 0$.

i) Se f é Lebesgue integrável em A e se $\int_B f(x) dx = 0$ para todo $B \subseteq A$, então $f(x) = 0$ q.s. em A .

Proposição 2.7.4 Se f é Lebesgue integrável em \mathbb{R}^n ou mensurável e não-negativa em \mathbb{R}^n , então a função de conjuntos λ definida por

$$\lambda(A) = \int_A f(x) dx$$

é contavelmente aditiva, e por isso é uma medida na σ -álgebra dos subconjuntos mensuráveis de \mathbb{R}^n .

Uma consequência desta aditividade do integral é que podemos ignorar conjuntos de medida nula na integração.

Assim, se f e g são mensuráveis em A e se $f(x) = g(x)$ q.s. em A então $\int_A f(x) dx = \int_A g(x) dx$.

Teorema 2.7.5 (da convergência monótona) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável, e (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis satisfazendo $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ para todo $x \in A$. Então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Demonstração: [Ver [W-Z], teorema 5.6.]

Lema 2.7.6 (Lema de Fatou) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis não-negativas. Então

$$\int_A \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) dx.$$

Demonstração: [Ver [W-Z], teorema 5.17.]

Teorema 2.7.7 (da convergência dominada) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mensurável e seja (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis convergindo pontualmente em A . Se existe uma função g Lebesgue integrável em A tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n e todo $x \in A$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Demonstração: [Ver [W-Z], teorema 5.19.]

Teorema 2.7.8 (de Fubini) Seja f uma função mensurável em \mathbb{R}^{n+m} e suponhamos que pelo menos um dos integrais

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x, y)| dx dy \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dy \right) dx \end{aligned}$$

existe e é finito.

Então

a) $f(\cdot, y)$ é Lebesgue integrável em \mathbb{R}^n para quase todo $y \in \mathbb{R}^m$,

b) $f(x, \cdot)$ é Lebesgue integrável em \mathbb{R}^m para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$,

c) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \cdot) dx$ é Lebesgue integrável em \mathbb{R}^m ,

d) $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, y) dy$ é Lebesgue integrável em \mathbb{R}^n e

e) $I_1 = I_2 = I_3$.

Demonstração: [Ver [W-Z], teorema 6.1.]

2.8 Topologias fracas

2.8.1 Definições e propriedades elementares da topologia $\sigma(X, X')$.

Retomamos aqui o estudo do dual, iniciado em 5.2.

Definição 2.8.1 O espaço *dual* de X , denotado por X' , designa o espaço dos funcionais lineares contínuos e está munido da norma dual¹

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Quando $f \in X'$ e $x \in X$ escrevemos geralmente $\langle f, x \rangle$ em vez de $f(x)$; diz-se que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar na dualidade X', X .

Definição 2.8.2 A *topologia fraca* $\sigma(X, X')$ em X , é a topologia menos fina que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f \in X'}$, onde $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$.

Proposição 2.8.3 A topologia fraca $\sigma(X, X')$ é separada.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.3.]

Notação: Sendo dada uma sucessão (x_n) de X , nota-se por $x_n \rightarrow x$ a convergência fraca de (x_n) para x .

Proposição 2.8.4 Seja (x_n) uma sucessão em X . Temos:

1. $x_n \rightarrow x$ para $\sigma(X, X')$ se e só se $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X'$;
2. Se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightarrow x$ para $\sigma(X, X')$;
3. Se $x_n \rightarrow x$ para $\sigma(X, X')$ então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$;
4. Se $x_n \rightarrow x$ para $\sigma(X, X')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em X' então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.5.]

Proposição 2.8.5 Quando X tem dimensão finita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ e a topologia usual coincidem. Em particular, uma sucessão (x_n) converge fracamente se e só se converge fortemente.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.6.]

Nota 2.8.6 Os abertos (respectivamente, fechados) da topologia fraca $\sigma(X, X')$ são também abertos (respectivamente, fechados) para a topologia forte.

Quando X tem dimensão infinita, a topologia fraca $\sigma(X, X')$ é estritamente menos fina que a topologia forte, isto é, existem menos abertos (respectivamente, fechados) para a topologia fraca.

Exemplo 2.8.7 A esfera unitária $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ não é um fechado para a topologia fraca.

Exemplo 2.8.8 O conjunto $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ não é aberto para a topologia fraca.

¹Em geral escrevemos $\|f\|$ em vez de $\|f\|_{X'}$, desde que não haja perigo de confusão.

2.8.2 A topologia fraca* $\sigma(X', X)$

Seja X um espaço de Banach, seja X' o seu dual munido da norma dual definida atrás e seja X'' o seu bidual, isto é, o dual de X' , munido da norma

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle|.$$

Temos uma injeção canónica definida da seguinte forma:

fixando $x \in X$, a aplicação $f \mapsto \langle f, x \rangle$ de X' em \mathbb{R} é uma aplicação linear contínua, isto é, um elemento de X'' que notamos por Jx . Temos assim,

$$\langle Jx, f \rangle_{X'' \times X'} = \langle f, x \rangle_{X' \times X} \quad \forall x \in X, \forall f \in X'.$$

A aplicação J é linear e é uma isometria, isto é, $\|Jx\|_{X''} = \|x\|_{X'}$, para todo $x \in X$. Com a ajuda da aplicação J podemos identificar X com um subespaço de X'' .

No espaço X' temos já definidas duas topologias:

1. a topologia forte (associada à norma de X');
2. a topologia fraca $\sigma(X', X'')$.

Podemos definir uma terceira topologia sobre X' : a topologia fraca* que se nota por $\sigma(X', X)$. Para cada $x \in X$ consideramos a aplicação $\varphi_x : X' \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f, x \rangle$. Quando x percorre X obtemos uma família de aplicações de X' em \mathbb{R} .

Definição 2.8.9 A topologia fraca*, designada também por $\sigma(X', X)$ é a topologia menos fina que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_x)_{x \in X}$.

Nota 2.8.10 Como $X \subseteq X''$, é claro que a topologia $\sigma(X', X)$ é uma topologia menos fina que a topologia $\sigma(X', X'')$. Isto é, a topologia $\sigma(X', X)$ possui menos abertos que a topologia $\sigma(X', X'')$ que por sua vez possui menos abertos que a topologia forte.

Proposição 2.8.11 A topologia fraca* $\sigma(X', X)$ é separada.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.10.]

Proposição 2.8.12 Seja (f_n) uma sucessão em X' . Temos

1. $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(X', X)$ se e só se $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in X$,
2. se $f_n \rightarrow f$ fortemente, então $f_n \rightarrow f$ para $\sigma(X', X'')$,
se $f_n \rightarrow f$ para $\sigma(X', X'')$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(X', X)$,
3. se $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(X', X)$ então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$,
4. se $f_n \xrightarrow{*} f$ para $\sigma(X', X)$ e se $x_n \rightarrow x$ fortemente em X , então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.12.]

Teorema 2.8.13 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) O conjunto $B_{X'} = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ é compacto para a topologia fraca* $\sigma(X', X)$.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.15.]

2.8.3 Espaços reflexivos

Definição 2.8.14 *Seja X um espaço de Banach e seja J a injeção canónica de X em X'' . Diz-se que X é reflexivo se $J(X) = X''$.*

Nota 2.8.15 *Se X é reflexivo podemos dizer que $X = X''$, a menos de um isomorfismo.*

Teorema 2.8.16 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se e só se o conjunto*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é compacto para a topologia $\sigma(X, X')$.

Demonstração: [ver [Br], proposição III.16.]

Proposição 2.8.17 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se e só se X' for reflexivo.*

Demonstração: [ver [Br], corolário III.18.]

2.8.4 Espaços separáveis

Definição 2.8.18 *Dizemos que um espaço métrico X é separável, se existe um subconjunto $D \subseteq X$ numerável denso.*

Proposição 2.8.19 *Seja X um espaço métrico separável e seja F um subconjunto de X . Então F é separável.*

Teorema 2.8.20 *Seja X um espaço de Banach tal que X' é separável. Então X é separável.*

Demonstração: [ver [Br], teorema III.23.]

Nota 2.8.21 *A recíproca não é verdadeira. Ver o caso de $L^1(\Omega)$ na secção seguinte.*

Corolário 2.8.22 *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo e separável se e só se X' é reflexivo e separável.*

Demonstração: [ver [Br], corolário III.24.]

Teorema 2.8.23 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sucessão limitada em X . Então existe uma subsucessão (x_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(X, X')$.*

Demonstração: [ver [Br], teorema III.27.]

2.9 Os espaços L^p

Nesta secção, Ω designa um aberto de \mathbb{R}^n e munimos \mathbb{R}^n com a medida de Lebesgue.

Definição 2.9.1 *Definimos suporte de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ao fecho do conjunto dos pontos onde f não se anula, isto é,*

$$\text{supt } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 2.9.2 *Designamos por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas com suporte compacto.*

Definição 2.9.3 *Designamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis em Ω com valores em \mathbb{R} , e definimos em $L^1(\Omega)$ a norma*

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| \, dx.$$

Nota 2.9.4 Duas funções de L^1 são idênticas se coincidirem q.s., isto é, se o conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}$ tiver medida nula. De facto, L^1 é, na realidade, um espaço de classes de equivalência, para a relação de equivalência $f = g$ q.s.

Definição 2.9.5 Seja $p \in [1, +\infty[$ e defina-se

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Em $L^p(\Omega)$ define-se a norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 2.9.6 Definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Consideramos em $L^\infty(\Omega)$ a norma definida por

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C : |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Notação:

1- Seja $1 \leq p < \infty$; designa-se por p' o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Se $p = +\infty$ consideramos $p' = 1$.

2- Se considerarmos f definida de Ω em \mathbb{R}^m então escrevemos $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Teorema 2.9.7 (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |(f \cdot g)(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.6.]

Teorema 2.9.8 $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.8.]

Teorema 2.9.9 Sejam (f_n) uma sucessão em L^p e $f \in L^p$, tais que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$. Então existe $h \in L^p(\Omega)$ e uma subsucessão (f_{n_k}) tal que

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.s. em Ω .
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ e q.s. em Ω .

2.9.1 Reflexividade. Separabilidade. O dual de L^p .

Estudo de L^p para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.9.10 O espaço L^p é reflexivo para $1 < p < \infty$.

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.10.]

Teorema 2.9.11 (da representação de Riesz) *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p)'$. Então existe $u \in L^p$ único tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^p} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.11.]

Nota 2.9.12 *Este teorema diz-nos que qualquer funcional linear contínuo em L^p , com $1 < p < \infty$, se representa com uma função de L^p . Assim, podemos identificar o dual de L^p com L^p .*

Teorema 2.9.13 (Densidade) *O espaço $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.12.]

Definição 2.9.14 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para qualquer $K \subseteq \Omega$ compacto.*

Lema 2.9.15 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} u(x)f(x) dx = 0 \quad \forall u \in C_c(\Omega),$$

então $f = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: [Ver [Br], lema IV.2.]

Teorema 2.9.16 *O espaço L^p é separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.13.]

Estudo de L^1

Teorema 2.9.17 *Seja $\varphi \in (L^1)'$. Então existe $u \in L^\infty$ único tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1.$$

Tem-se além disso,

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$$

Demonstração: [ver [Br], teorema IV.14.]

Nota 2.9.18 *Este teorema afirma que qualquer funcional linear contínuo em L^1 se pode representar com uma função L^∞ . Assim podemos identificar o dual de L^1 com L^∞ .*

Proposição 2.9.19 *L^1 não é reflexivo.*

Demonstração:

Suponhamos que $0 \in \Omega$. Consideremos a sucessão $(f_n) = \alpha_n \chi_{B(0, \frac{1}{n})}$. Como Ω é aberto podemos considerar n suficientemente grande de modo que $B(0, \frac{1}{n}) \subseteq \Omega$ e $\alpha_n = \frac{1}{\text{med}(B(0, \frac{1}{n}))}$.

Então

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f_n(x)| dx = \int_{\Omega} \alpha_n \chi_{B(0, \frac{1}{n})} dx = \frac{1}{\text{med}(B(0, \frac{1}{n}))} \int_{B(0, \frac{1}{n})} 1 dx = 1.$$

Se L^1 fosse reflexivo então a bola unitária seria compacta para a topologia fraca (teorema 2.8.16) logo poderíamos extrair uma subsucessão (f_{n_k}) fracamente convergente em L^1 , isto é,

$$\int_{\Omega} f_{n_k} \varphi \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in L^{\infty}$$

para algum $f \in L^1$.

Se tomarmos $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ vemos que $\int_{\Omega} f_{n_k} \varphi = 0$ para k suficientemente grande, pois

$$\int_{\Omega} f_{n_k} \varphi = \int_{\text{supt } \varphi} f_{n_k} \varphi \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Com efeito, se $\text{supt } \varphi$ é compacto então podemos afirmar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_{\varepsilon}(0) \cap \text{supt } \varphi = \emptyset$. Para k suficientemente grande, podemos considerar $B(0, \frac{1}{n_k}) \subseteq V_{\varepsilon}(0)$. Logo $f_{n_k} = 0$ em $\text{supt } \varphi$ e portanto $\int_{\Omega} f_{n_k} \varphi = 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Então $\int_{\Omega} f \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$. Aplicando o lema 2.9.15 no aberto $\Omega \setminus \{0\}$ à função f restringida a $\Omega \setminus \{0\}$ obtemos $f = 0$ q.s. em $\Omega \setminus \{0\}$. Logo $f = 0$ q.s. em Ω .

Por outro lado, se tomarmos $\varphi \equiv 1$ temos

$$\int_{\Omega} f_{n_k} \rightarrow \int_{\Omega} f$$

mas como $\int_{\Omega} f_{n_k} = 1 \quad \forall k$ então $\int_{\Omega} f = 1$ o que é absurdo pois tínhamos visto que $f = 0$ q.s..

■

Estudo de L^{∞}

Sabemos que $(L^1)' = L^{\infty}$ então podemos concluir que L^{∞} não é reflexivo, pois caso contrário L^1 seria reflexivo.

O dual de L^{∞} contém estritamente L^1 . Existem formas lineares φ contínuas sobre L^{∞} que não são do tipo

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^{\infty} \text{ com } u \in L^1.$$

Proposição 2.9.20 *O espaço L^{∞} não é separável.*

Antes de demonstrarmos este resultado, vamos introduzir primeiro o seguinte lema.

Lema 2.9.21 *Seja X um espaço de Banach. Suponha-se que existe uma família $(O_i)_{i \in I}$ tal que*

1. *para qualquer $i \in I$, O_i é aberto não-vazio de X .*
2. *$O_i \cap O_j = \emptyset$ se $i \neq j$.*
3. *I não é numerável.*

Então X não é separável.

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que X é separável. Seja (u_n) uma sucessão densa em X . Então para cada $i \in I$ $O_i \cap (u_n) \neq \emptyset$ ou seja existe $n(i)$ tal que $u_{n(i)} \in O_i$. Se $i \neq j$ então $n(i) \neq n(j)$ pois $O_i \cap O_j = \emptyset$. Logo, a aplicação $i \mapsto n(i)$ é injectiva e portanto $I \approx \mathbb{N}$ logo I é numerável o que é absurdo por 3. Conclui-se que X não é separável. ■

Demonstração da proposição 2.9.20

Para qualquer $a \in \Omega$ fixemos $r_a > 0$ tal que $d(a, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > r_a$. Consideremos $u_a = \chi_{B(a, r_a)}$ e

$$O_a = \left\{ f \in L^\infty : \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Vamos verificar que $(O_a)_{a \in \Omega}$ verifica 1, 2, 3 do lema anterior.

1- O_a é aberto não-vazio para todo $a \in \Omega$.

Seja $u_a = \chi_{B(a, r_a)}$, temos $u_a \in L^\infty$ e $\|u_a - u_a\| = 0 < \frac{1}{2}$, logo $u_a \in O_a$.

O conjunto O_a é a imagem inversa do aberto $]-\infty, \frac{1}{2}[$ pela aplicação contínua $f \mapsto \|f - u_a\|$ logo é aberto.

2- $O_a \cap O_b = \emptyset$ se $a \neq b$.

Consideremos $a \neq b$. Suponhamos por absurdo que $f \in O_a \cap O_b$ então $f \in L^\infty$, $\|f - u_a\| < \frac{1}{2}$ e $\|f - u_b\| < \frac{1}{2}$. Temos $u_a, u_b \in L^\infty$ e como $a \neq b$ então $u_a \neq u_b$. Logo $\|u_a - u_b\|_{L^\infty} = 1$. Assim

$$1 = \|u_a - u_b\| \leq \|u_a - f\| + \|f - u_b\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

obtendo-se uma contradição, concluindo-se que $O_a \cap O_b = \emptyset$.

3- Obviamente Ω não é numerável.

Logo pelo lema anterior L^∞ não é separável. ■

Podemos dizer em suma que:

- Se $1 < p < \infty$ o espaço L^p é reflexivo e separável e o espaço dual identifica-se com $L^{p'}$.
- Se $p = 1$, L^1 não é reflexivo, é separável e o espaço dual identifica-se com L^∞ .
- Se $p = \infty$, L^∞ não é reflexivo nem separável e o seu dual contém estritamente L^1 .

2.9.2 Convergências forte, fraca e fraca* em L^p

Nota 2.9.22 Se $1 \leq p < \infty$, uma sucessão $(f_n) \subseteq L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ converge fortemente para $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ $((f_n) \rightarrow f)$ se (por definição)

$$\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Nota 2.9.23 Se $1 \leq p < \infty$, uma sucessão $(f_n) \subseteq L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$ converge fracamente para $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $((f_n) \rightharpoonup f)$ se e só se

$$\int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Nota 2.9.24 A sucessão $(f_n) \subseteq L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ converge fracamente* para $f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ $((f_n) \overset{*}{\rightharpoonup} f)$ se e só se

$$\int_{\Omega} f_n(x)g(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad \forall g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Apresentam-se a seguir os critérios de compacidade fraca. O caso $p = 1$ é muito especial.

Proposição 2.9.25 *Seja $1 < p \leq \infty$. A sucessão (f_n) é fracamente relativamente compacta em $L^p(\Omega)$ (fracamente* relativamente compacta se $p = \infty$) se e só se existe uma constante $k \geq 0$ tal que $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq k$ uniformemente para todo n .*

Seja $p = 1$. A sucessão (f_n) é fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega)$ se e só se:

1. *existe uma constante $k \geq 0$ tal que $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq k$ para todo n ;*
2. *para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para qualquer subconjunto mensurável E com $\text{med } E < \delta$, temos*

$$\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon$$

uniformemente em n .

Demonstração: [ver [Ed], teorema 4.2.1.2..]

A condição 2 é conhecida por propriedade de equi-integrabilidade.

Proposição 2.9.26 *Seja $1 < p \leq \infty$. A sucessão (f_n) converge fracamente para f em $L^p(\Omega)$ (ou fracamente* em $L^\infty(\Omega)$) se e só se*

1. $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq k, \quad k > 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D (f_n(x) - f(x)) dx = 0$, para todo o cubo $D \subseteq \Omega$.

Se $p = 1$, $f_n \rightharpoonup f$ em $L^1(\Omega)$ se e só se

1. $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq k, \quad k > 0;$
2. *a propriedade de equi-integrabilidade verifica-se;*
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D (f_n(x) - f(x)) dx = 0$, para todos os cubos $D \subseteq \Omega$.

Demonstração: [ver [Da1], capítulo 2, lema 1.4.]

Convergência em média

Suponhamos $1 < p < +\infty$ e consideremos $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.

1. Consideremos $E \subseteq \Omega$ limitado e mensurável. Tomando $g = \chi_E$ na definição de convergência fraca em $L^p(\Omega)$ obtemos

$$\int_E f_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx. \quad (2.1)$$

Isto diz-nos que a média das funções (f_n) em E converge para a média de f em E .

2. Reciprocamente, se (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e verifica (2.1) para todo o conjunto $E \subseteq \Omega$ limitado e mensurável então $f_n \rightharpoonup f$ em $L^p(\Omega)$.

Pretendemos mostrar que

$$\int_\Omega (f_n(x) - f(x)) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

Como $g \in L^{p'}(\Omega)$ então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma função simples $g_\varepsilon \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $\|g - g_\varepsilon\|_{L^{p'}} < \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g_\varepsilon(x) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) (g(x) - g_\varepsilon(x)) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g_\varepsilon(x) dx \right| + \|f_n - f\|_{L^p} \|g - g_\varepsilon\|_{L^{p'}} < \\ & < \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g_\varepsilon(x) dx \right| + (\|f_n\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) \varepsilon. \end{aligned}$$

Como g_ε é função simples então $g_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ para algum $k \in \mathbb{N}$, logo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g_\varepsilon(x) dx \right| & \leq \sum_{i=1}^k \left| \int_{A_i} (f_n(x) - f(x)) \alpha_i dx \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \int_{A_i} |f_n(x) - f(x)| dx. \end{aligned}$$

Como cada A_i é mensurável então, por hipótese, $\int_{A_i} |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g(x) dx \right| < \\ & < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g_\varepsilon(x) dx \right| + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|f_n\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}) \varepsilon \leq K\varepsilon \end{aligned}$$

Como ε é arbitrariamente pequeno podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) g(x) dx \right| = 0.$$

Logo $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$.

Teorema 2.9.27 *Seja $\Omega = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Estenda-se f por periodicidade de Ω para \mathbb{R}^n . Seja*

$$f_n(x) = f(nx),$$

então

$$f_n \rightarrow \bar{f} \equiv \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} f(x) dx \text{ em } L^p(\Omega), \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$f_n \xrightarrow{*} \bar{f} \text{ se } p = \infty.$$

Demonstração: [ver [Da1], capítulo 2, teorema 1.5.]

2.10 Os espaços de Sobolev

2.10.1 Definições e propriedades

Mais uma vez consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.10.1 *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, define-se por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

Nota 2.10.2 ,

1. Notamos por $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

2. Para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ notamos por $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.

Dizemos que g_i é a derivada parcial de u no sentido das distribuições. Pelo lema 2.9.15 vemos que cada g_i é único.

Definimos em $W^{1,p}(\Omega)$ a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

ou, por vezes, a norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ está munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

Nota 2.10.3 *Por convergência fraca em $W^{1,p}(\Omega)$, entendemos a convergência fraca em $L^p(\Omega)$ para as funções e os seus gradientes.*

Proposição 2.10.4 *O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.*

O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

Demonstração: [ver [Br], teorema IX.1.]

Nota 2.10.5 *Se Ω é limitado e suficientemente regular, $W^{1,\infty}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções lipschitzianas em Ω .*

Teorema 2.10.6 (Rellich - Kondrachov)

Suponha-se Ω limitado de classe C^1 . Tem-se

1. se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

2. se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$

3. se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: [ver [Br], teorema IX. 16.]

2.10.2 O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definição 2.10.7 *Seja $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$.*

Podemos dizer, “grosso modo”, que as funções $W_0^{1,p}(\Omega)$ são as funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega$. Esta afirmação não é muito precisa porque já vimos que as funções $u \in W^{1,p}$, apenas estão definidas a menos de um conjunto de medida nula, pelo que se $\partial\Omega$ tiver medida nula é indiferente o valor que u toma em $\partial\Omega$.

Lema 2.10.8 *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, com $\text{supt } u$ compacto contido em Ω , então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: [ver [Br], lema IX.5.]

Teorema 2.10.9 *Suponha-se Ω de classe C^1 . Seja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ com $1 \leq p < \infty$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $u = 0$ em $\partial\Omega$;
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: [ver [Br], teorema IX.17.]

Teorema 2.10.10 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω é um aberto limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Demonstração: [ver [Br], corolário IX.19.]

Capítulo 3

Convexidade, policonvexidade, quasiconvexidade e convexidade característica 1

Vamos considerar integrais variacionais do tipo

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

definidos para funções suficientemente regulares $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ onde Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $\nabla u(x)$ representa o gradiente de u em x e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Como foi mencionada no capítulo I, para aplicarmos o método directo do cálculo das variações precisamos garantir a semi-continuidade inferior fraca (*s.c.i.f.*) do funcional I . Esta propriedade de *s.c.i.f.* depende essencialmente de propriedades da função integranda f .

Enquanto a convexidade de f , relativa à variável ∇u , é a condição fundamental, no caso escalar $m = 1$, para assegurar a semi-continuidade inferior fraca (*s.c.i.f.*) de I em $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, no caso vectorial ($m, n > 1$) a convexidade está longe de ser uma condição necessária.

Uma condição necessária e suficiente para a *s.c.i.f.* no caso vectorial, é a quasiconvexidade. Contudo, é muito difícil verificar se uma dada função f , é ou não quasiconvexa. Assim, somos levados a introduzir uma condição ligeiramente mais fraca — a **convexidade característica 1** (convexidade car-1) — e uma condição ligeiramente mais forte — a **policonvexidade** — ambas condições pontuais sobre f , e por isso mais fáceis de verificar.

O seguinte diagrama elucida as relações entre estas condições.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f \text{ quasiconvexa} & & f \text{ convexa car-1} \\
 f \text{ convexa} \Rightarrow f \text{ policonvexa} \Rightarrow & & \Updownarrow & \Rightarrow & \Updownarrow \\
 & & I \text{ s.c.i.f.} & & \text{equação de Euler elíptica}
 \end{array}$$

No caso escalar todas estas noções são equivalentes à condição usual de convexidade.

Começaremos por definir diferentes noções de convexidade, apresentando as suas principais propriedades. Daremos alguns exemplos de funções policonvexas, quasiconvexas e convexas car-1, apresentando em particular dois exemplos de funções convexas car-1 que não são policonvexas.

Apresentaremos também um resultado típico do caso vectorial: enquanto no caso escalar não existe nenhuma função não-linear que seja fracamente contínua, tais funções existem no caso vectorial. O determinante de uma matriz quadrada, por exemplo, é uma dessas funções.

3.1 Definições e propriedades.

Definição 3.1.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. A função f diz-se **convexa** se*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para qualquer $\lambda \in [0, 1]$, e $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Quando a função é suficientemente suave, existe a seguinte caracterização alternativa para funções convexas, onde $\nabla^2 f(x)$ designa a derivada de segunda ordem de f no ponto x , e ≥ 0 significa que este operador é semi-definido positivo.

Proposição 3.1.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 . Então f é convexa se e só se*

$$\nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: [ver [Rc], teorema 4.5.]

A desigualdade de Jensen ocupará, ao longo deste trabalho, um papel fundamental, incluímos por isso, uma demonstração básica da clássica desigualdade para funções convexas.

Proposição 3.1.3 (Desigualdade de Jensen) *Seja μ uma medida de Radon positiva definida numa σ -álgebra, \mathcal{M} de subconjuntos de um conjunto Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$. Seja f uma função em $L^1(\mu)$ com valores vectoriais tais que $f(x) \in K$ para μ -q.t. $x \in \Omega$ onde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ é um conjunto convexo. Se φ é uma função convexa definida em K então*

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi(f) d\mu.$$

Demonstração:

Como K é convexo e $\mu(\Omega) = 1$, então $t = \int_{\Omega} f d\mu \in K$.

A convexidade de φ implica que podemos encontrar $\beta \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \langle \beta, s - t \rangle, \quad s \in K.$$

Em particular para μ -q.t. $x \in \Omega$ e considerando $s = f(x)$ temos

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \langle \beta, f(x) - t \rangle$$

e integrando sobre Ω temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(f) d\mu &\geq \int_{\Omega} \varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) + \left\langle \beta, \int_{\Omega} f(x) d\mu - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \right\rangle = \\ &= \mu(\Omega)\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) + \left\langle \beta, \int_{\Omega} f d\mu - \mu(\Omega) \int_{\Omega} f d\mu \right\rangle = \\ &= \varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right). \end{aligned}$$

A última igualdade resulta do facto de $\mu(\Omega) = 1$. ■

Definição 3.1.4 *Uma função $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se **convexa característica 1** (convexa car-1) se*

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, e $A, B \in \mathbb{M}^{m \times n}$ com $\text{car}(A - B) \leq 1$.

(Aqui $\text{car}(A)$ é a característica da matriz A , o número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes da matriz A .)

Definição 3.1.5 Uma função Borel mensurável e localmente integrável $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **quasiconvexa** se

$$f(A) \leq \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} f(A + \nabla u(x)) dx$$

para qualquer aberto limitado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, para qualquer $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e para qualquer $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Nota 3.1.6 Se considerarmos f a depender de x e u , a desigualdade da quasiconvexidade reescreve-se

$$f(x, u(x), A) \leq \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} f(x, u(x), A + \nabla u(x)) dx.$$

Definição 3.1.7 Uma função Borel mensurável e localmente integrável diz-se **quasi-afim** se f e $-f$ são quasiconvexas.

Definição 3.1.8 Uma função $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ diz-se **policonvexa** se é uma função convexa dos seus subdeterminantes ou, mais precisamente, se existe $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa, tal que

$$f(A) = g(T(A))$$

onde $T : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ é tal que

$$T(A) = (A, \text{adj}_2 A, \dots, \text{adj}_{n \wedge m} A).$$

Na definição precedente, $\text{adj}_s A$ representa a matriz de todos os menores $s \times s$ da matriz $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $2 \leq s \leq n \wedge m = \min\{n, m\}$ e

$$\tau(n, m) = \sum_{s=1}^{n \wedge m} \sigma(s)$$

onde

$$\sigma(s) = \binom{m}{s} \binom{n}{s} = \frac{m!n!}{(s!)^2(m-s)!(n-s)!}.$$

Nota 3.1.9 .

1. No caso $m=n=2$, que é aquele que nos interessa particularmente nesta dissertação, a noção de policonvexidade pode ser interpretada como segue,

$$\begin{cases} \tau(n, m) = \tau(2, 2) = \sum_{s=1}^2 \sigma(s) = \sigma(1) + \sigma(2) = 4 + 1 = 5 \\ T(A) = (A, \det A) \\ f(A) = g(A, \det A). \end{cases}$$

2. Note-se que não demos uma definição de função quasiconvexa permitindo que ela tomasse o valor $+\infty$, contrariamente à policonvexidade e convexidade car-1. Existem algumas definições dadas por Dacorogna-Fusco e Ball-Murat de quasiconvexidade, permitindo que f tome o valor $+\infty$. No entanto, embora estas definições sejam necessárias para a s.c.i.f., não se demonstrou que elas são suficientes e isto parece um problema bastante difícil.
3. Ball e Murat enfraqueceram a noção de quasiconvexidade, introduzindo a noção de $W^{1,p}$ -quasiconvexidade. Na notação deles a definição acima corresponde à $W^{1,\infty}$ -quasiconvexidade.
4. Na definição de quasiconvexidade, podemos substituir o conjunto das funções teste $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ por $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$, usando um argumento de densidade.

Nota 3.1.10 Na definição de policonvexidade de uma função f , a função g associada não é em geral única. Por exemplo, tomemos $n = m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f(A) &= |A|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + (a_{21} + a_{12})^2 + 2 \det A. \end{aligned}$$

Tomando $g_1, g_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} g_1(A, \det A) &= |A|^2 \text{ e} \\ g_2(A, \det A) &= (a_{11} - a_{22})^2 + (a_{21} + a_{12})^2 + 2 \det A. \end{aligned}$$

Então $g_1 \neq g_2$ e

$$f(A) = g_1(T(A)) = g_2(T(A)).$$

3.1.1 Propriedades das funções quasiconvexas

Apresentamos seguidamente duas importantes propriedades das funções quasiconvexas que nos irão ser úteis mais tarde.

Proposição 3.1.11 A classe das funções quasiconvexas é independente de Ω .

Demonstração:

Admitamos que a desigualdade da definição de quasiconvexidade se verifica para um dado subconjunto Ω , aberto limitado de \mathbb{R}^n ; e mostremos que para qualquer subconjunto Ω' , aberto limitado de \mathbb{R}^n , se tem

$$\int_{\Omega'} f(A + \nabla u(x)) dx \geq f(A) \text{ med } \Omega' \quad \forall A \in \mathbb{M}^{m \times n} \text{ e } u \in W_0^{1, \infty}(\Omega', \mathbb{R}^m).$$

Sendo Ω aberto e Ω' limitado podemos tomar $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 + \varepsilon\Omega' \subseteq \Omega$. Definindo $v \in W_0^{1, \infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ por

$$v(x) = \begin{cases} \varepsilon u\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) & \text{se } x \in x_0 + \varepsilon\Omega' \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus (x_0 + \varepsilon\Omega'). \end{cases}$$

então considerando $y = \frac{x-x_0}{\varepsilon}$ e integrando por substituição temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(A + \nabla u(y)) dy &= \int_{x_0 + \varepsilon\Omega'} f\left(A + \nabla u\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)\right) \left| \det \nabla \left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) \right| dx = \\ &= \varepsilon^{-n} \left(\int_{\Omega} f(A + \nabla v(x)) dx - f(A) \text{ med } (\Omega - (x_0 + \varepsilon\Omega')) \right). \end{aligned}$$

Utilizando a quasiconvexidade de f e algumas propriedades da medida de Lebesgue obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(A + \nabla u(y)) dy &\geq \varepsilon^{-n} (f(A) \text{ med } \Omega - f(A) (\text{med } \Omega - \text{med } (x_0 + \varepsilon\Omega'))) = \\ &= \varepsilon^{-n} f(A) ((\text{med } \Omega - \text{med } \Omega + \text{med } (x_0 + \varepsilon\Omega'))) = \\ &= \varepsilon^{-n} f(A) \text{ med } (\varepsilon\Omega') = \varepsilon^{-n} f(A) \varepsilon^n \text{ med } \Omega' = \\ &= f(A) \text{ med } \Omega', \end{aligned}$$

obtendo-se o resultado pretendido. ■

Apresentamos em seguida, uma formulação equivalente para a quasiconvexidade em termos de deformações periódicas.

Teorema 3.1.12 *Uma função contínua $f : \mathbb{M}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}$ é quasiconvexa se e só se*

$$\int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u(x)) dx \geq f(A),$$

para cada $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e cada função $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que é $[0,1]^n$ -periódica, isto é, $u(x+l) = u(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e cada $l \in \mathbb{Z}^n$.

Antes de demonstrar o teorema, vamos apresentar um resultado que será usado na demonstração.

Lema 3.1.13 *Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa em cada variável.*

1. *Se f é limitada superiormente numa vizinhança de um ponto x , então f é contínua em x .*
2. *A função f é localmente lipschitziana no interior do seu domínio.*

Demonstração:

Parte 1:

Sem perda de generalidade, podemos assumir $x = 0$ e $f(0) = 0$.

Como f é limitada superiormente numa vizinhança de $x = 0$, então existem $\lambda > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\|x\|_M = \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \} \leq \lambda \implies f(x) \leq a. \quad (3.1)$$

Fixando $\varepsilon > 0$ e assumindo $\varepsilon \leq an$ vamos mostrar que

$$\|x\|_M \leq \frac{\varepsilon}{an} \lambda \implies |f(x)| \leq \varepsilon, \quad (3.2)$$

ou seja, f é contínua na origem.

Usando a convexidade em cada variável de f temos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\delta \frac{x_1}{\delta}, x_2, \dots, x_n\right) + (1-\delta)f(0, x_2, \dots, x_n) \leq \\ &\leq \delta f\left(\frac{x_1}{\delta}, x_2, \dots, x_n\right) + (1-\delta)f(0, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde $\delta = \frac{\varepsilon}{an} \leq 1$.

Repetindo o processo na segunda variável temos

$$f(x) \leq \delta f\left(\frac{x_1}{\delta}, x_2, \dots, x_n\right) + (1-\delta)\delta f\left(0, \frac{x_2}{\delta}, \dots, x_n\right) + (1-\delta)^2 f(0, 0, x_3, \dots, x_n).$$

Repetindo o processo para as restantes variáveis e usando o facto que $1-\delta \leq 1$ obtém-se

$$f(x) \leq \delta \left(f\left(\frac{x_1}{\delta}, x_2, \dots, x_n\right) + f\left(0, \frac{x_2}{\delta}, \dots, x_n\right) + f(0, 0, x_3, \dots, x_n) + \dots + f(0, \dots, 0, x_n) \right).$$

Se tomarmos $\|x\|_M \leq \delta \lambda = \frac{\varepsilon}{an} \lambda$ temos $\|x\|_M \leq \frac{\|x\|_M}{\delta} \leq \lambda$.

Como cada vector na soma acima tem norma inferior ou igual a $\frac{\|x\|_M}{\delta}$, logo inferior ou igual a λ , por (3.1) obtém-se

$$f(x) \leq \delta(a + \dots + a) = \delta an = \frac{\varepsilon}{an} an = \varepsilon. \quad (3.3)$$

Para obtermos (3.2) é necessário mostrar que $f(x) \geq -\varepsilon$.

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= f(0, \dots, 0) = f\left(\frac{1}{1+\delta}(0, \dots, 0, x_n) + \frac{\delta}{1+\delta}(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta})\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\delta} \left(f(0, \dots, 0, x_n) + \delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}) \right) \leq f(0, \dots, 0, x_n) + \delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}) \end{aligned}$$

logo

$$f(0, \dots, 0, x_n) \geq -\delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}).$$

Repetindo o processo temos

$$\begin{aligned} 0 &= f(0, \dots, 0) \leq \\ &\leq \frac{1}{1+\delta} f(0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n) + \frac{\delta}{1+\delta} f(0, \dots, 0, -\frac{x_{n-1}}{\delta}, x_n) + \delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}) \leq \\ &\leq f(0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n) + \delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_{n-1}}{\delta}, x_n) + \delta f(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}). \end{aligned}$$

Iterando o processo para as restantes variáveis, obtém-se

$$f(x) \geq -\delta \left(f\left(-\frac{x_1}{\delta}, -x_2, \dots, -x_n\right) + f\left(0, -\frac{x_2}{\delta}, -x_3, \dots, -x_n\right) + \dots + f\left(0, \dots, 0, -\frac{x_n}{\delta}\right) \right),$$

tomando novamente $\|x\|_M \leq \frac{\varepsilon}{an} \lambda$, então $\|x\|_M \leq \frac{\|x\|_M}{\delta} \leq \lambda$. Como cada vector na soma acima tem norma inferior ou igual a $\frac{\|x\|_M}{\delta}$, por (3.1) obtém-se

$$f(x) \geq \delta(-a - \dots - a) = -na\delta = -\varepsilon,$$

concluindo-se então (3.2) logo a continuidade de f .

Parte 2:

1- Primeiro vamos provar que se $x \in \text{int dom } f$ então f é contínua em x .

Novamente, sem perda de generalidade, vamos supor $x = 0$ e $f(0) = 0$.

Como $0 \in \text{int dom } f$, que é um aberto, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_M = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\} \leq 2\varepsilon\} \subseteq \text{dom } f. \quad (3.4)$$

Considerando

$$E = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\} \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad (3.5)$$

como $\|(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\|_M \leq \varepsilon < 2\varepsilon$ então $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \text{dom } f$. Como E é um conjunto finito de pontos de \mathbb{R}^n , podemos garantir a existência de $a = \max f(E)$. Como $E \subseteq \text{dom } f$ então $a < +\infty$.

O objectivo é mostrar que

$$\|x\|_M \leq \varepsilon \implies f(x) \leq a. \quad (3.6)$$

Se $0 \leq x_n \leq \varepsilon$ e $\varepsilon_i \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, então a convexidade de f relativamente à última variável implica que

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, x_n) &\leq \frac{x_n}{\varepsilon} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon) + \left(1 - \frac{x_n}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, 0) \leq \\ &\leq \frac{x_n}{\varepsilon} a + \left(1 - \frac{x_n}{\varepsilon}\right) a = a. \end{aligned}$$

Tendo em conta esta desigualdade e a convexidade de f relativamente à variável x_{n-1} , com $0 \leq x_{n-1} \leq \varepsilon$ obtém-se

$$\begin{aligned} & f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \leq \\ & \leq \frac{x_{n-1}}{\varepsilon} f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon, x_n) + \left(1 - \frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right) f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2}, 0, x_n) \leq a. \end{aligned}$$

Repetindo o processo para as restantes variáveis obtém-se

$$f(x) \leq a \text{ para } 0 \leq x_i \leq \varepsilon, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

Quando $-\varepsilon \leq x_i \leq 0$ aplicamos o mesmo processo, mas considerando $-\frac{x_i}{\varepsilon}$ e $1 + \frac{x_i}{\varepsilon}$.

A desigualdade (3.6) implica que se $x \in \text{int dom } f$ então f é limitada numa vizinhança de x , aplicando a primeira parte do teorema obtemos a continuidade de f em x .

2- Falta provar que f é localmente lipschitziana no interior do domínio de f .

Seja $x \in \text{int dom } f$.

Pela continuidade de f em x , existe $\delta > 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|y - x\|_M = \max\{|y_i - x_i| : i = 1, \dots, n\} \leq 2\delta \implies \alpha \leq f(y) \leq \beta. \quad (3.7)$$

Sejam z e z_1 tais que

$$\|z_1 - z\|_M, \|z_1 - x\|_M \leq \delta, \quad (3.8)$$

então

$$\|z - x\|_M = \|z - z_1 + z_1 - x\|_M \leq \|z - z_1\|_M + \|z_1 - x\|_M \leq 2\delta.$$

Por (3.7), se $\|z - x\|_M \leq 2\delta$ então $f(z) \leq \beta$ e se $\|z_1 - x\|_M \leq \delta$ então $f(z_1) \geq \alpha$. Logo se

$$\|z - z_1\|_M \leq \delta \text{ temos } f(z) - f(z_1) \leq \beta - \alpha.$$

Seja $\varepsilon > 0$, combinando (3.2) e (3.8) obtém-se

$$\|z - z_1\| \leq \frac{\delta\varepsilon}{(\beta - \alpha)n} \implies |f(z) - f(z_1)| \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

Escolhendo $\delta\varepsilon = \|z - z_1\| (\beta - \alpha)n$ e tendo em conta, (3.6),

$$\|z - z_1\| \leq \delta \implies |f(z) - f(z_1)| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta} \|z - z_1\|. \quad (3.10)$$

Seja z_2 tal que $\|z_2 - x\| \leq \delta$.

Sejam $u_1, \dots, u_M \in [z_1, z_2]$ tais que $u_1 = z_1, \dots, u_M = z_2$ e $\|u_m - u_{m+1}\| \leq \delta$ para $m = 1, \dots, M - 1$.

Usando (3.9) obtém-se

$$\|u_m - u_{m+1}\| \leq \delta \implies |f(u_m) - f(u_{m+1})| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta} \|u_m - u_{m+1}\|,$$

donde, somando

$$\|z_1 - x\|, \|z_2 - x\| \leq \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{(\beta - \alpha)n}{\delta} \|z_1 - z_2\|.$$

Conclui-se assim que f é lipschitziana em $B_\delta(x)$. ■

Demonstração do teorema 3.1.12:

Seja $f : \mathbb{M}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}$ contínua e quasiconvexa.

Seja $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Seja $\eta_\varepsilon : [0, 1]^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função suave, igual a 1 em $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^n$ e igual a zero numa vizinhança da fronteira de $[0, 1]^n$, satisfazendo $|\nabla \eta_\varepsilon| \leq \frac{2}{\varepsilon}$.

Para uma função u como no enunciado do lema, defina-se $u_\varepsilon : [0, 1]^n \mapsto \mathbb{R}^m$ por

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon \eta_\varepsilon(x) u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Como $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\eta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ então $u_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Uma vez que η_ε se anula numa vizinhança da fronteira de $(0, 1)^n$, então u_ε é igual a zero na fronteira de $(0, 1)^n$.

Aplicando a quasiconvexidade de f , temos

$$f(A) \leq \int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u_\varepsilon(x)) dx,$$

para cada ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e cada $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

Provemos então que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u_\varepsilon(x)) dx = \int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u(x)) dx.$$

Vamos considerar $A = 0$ para simplificar. Derivando u_ε obtém-se,

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u_\varepsilon(x)) dx &= \int_{[0,1]^n} f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) dx = \\ &= \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) dx + \\ &\quad + \int_{[0,1]^n} f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) dx + \\ &\quad - \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) dx. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\int_{[0,1]^n} \left(f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) \right) dx \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ora,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[0,1]^n} f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,1]^n} \left| f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) \right| dx = \\ &= \int_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} \left| f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) \right| dx + \\ &+ \int_{[0,1]^n \setminus [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} \left| f(\varepsilon \nabla \eta_\varepsilon(x) \otimes u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)) \right| dx. \end{aligned}$$

Como $\nabla\eta_\varepsilon(x) = 0$ em $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^n$ então o primeiro integral anula-se. Por outro lado, como f é quasiconvexa então f é convexa car-1 logo é convexa em cada variável. Pelo teorema anterior podemos afirmar que f é localmente lipschitziana. Designando por K uma sua constante de Lipschitz em $[0, 1]^n$, vem

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} \left| f(\varepsilon \nabla\eta_\varepsilon(x) \otimes u(\frac{x}{\varepsilon}) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right| dx = \\ & = \int_{[0,1]^n \setminus [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} \left| f(\varepsilon \nabla\eta_\varepsilon(x) \otimes u(\frac{x}{\varepsilon}) + \eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{[0,1]^n \setminus [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} K \left| \varepsilon \nabla\eta_\varepsilon(x) \otimes u(\frac{x}{\varepsilon}) \right| dx. \end{aligned}$$

Tendo em conta que $|\nabla\eta_\varepsilon(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} \quad \forall x \in [0, 1]^n$ vem

$$\int_{[0,1]^n \setminus [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} K \left| \varepsilon \nabla\eta_\varepsilon(x) \otimes u(\frac{x}{\varepsilon}) \right| dx \leq \frac{2}{\varepsilon} K \|u\|_\infty (1 - (1 - 2\varepsilon)^n) \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u_\varepsilon(x)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx.$$

Resta-nos mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx = \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(x)) dx.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx = \\ & = \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx + \int_{[0,1]^n} \left(f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right) dx. \end{aligned}$$

Provemos que:

$$\int_{[0,1]^n} \left(f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right) dx \rightarrow 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^n} \left(f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right) dx \right| \leq \\ & \leq \int_{[0,1]^n} \left| f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) - f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{[0,1]^n} K |\eta_\varepsilon(x) - 1| |\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})| dx \leq K \|\nabla u\|_\infty \int_{[0,1]^n} |\eta_\varepsilon(x) - 1| dx = \\ & \leq K \|\nabla u\|_\infty \int_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} |\eta_\varepsilon(x) - 1| dx + K \|\nabla u\|_\infty \int_{[0,1]^n \setminus [\varepsilon, 1-\varepsilon]^n} |\eta_\varepsilon(x) - 1| dx = \\ & = K \|\nabla u\|_\infty (1 - (1 - 2\varepsilon)^n) \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Temos então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u_\varepsilon(x)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\eta_\varepsilon(x) \nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(\frac{x}{\varepsilon})) dx.$$

Considerando $\frac{1}{\varepsilon} = m(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)$, onde $m(\varepsilon)$ designa a parte inteira de $\frac{1}{\varepsilon}$ e $\delta(\varepsilon)$ a parte decimal, fazendo a substituição $y = xm(\varepsilon)$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(x(m(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)))) = \\ & \leq \int_{[0, m(\varepsilon)]^n} f(\nabla u(y(1 + \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}))) dy \times m(\varepsilon)^{-n} = \\ & \leq m(\varepsilon)^n \times m(\varepsilon)^{-n} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(y(1 + \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}))) dy = \\ & = \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(y(1 + \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}))) dy. \end{aligned}$$

A penúltima igualdade resulta do facto de u ser $[0, 1]^n$ -periódica.

Como $\delta(\varepsilon) < 1$ e $m(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ então

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} < \frac{1}{m(\varepsilon)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{m(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

obtendo-se

$$0 \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(y) &= f(\nabla u(y(1 + \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}))) \\ f_0(y) &= f(\nabla u(y)). \end{aligned}$$

Fixemos $\rho > 0$. O nosso objectivo é provar que

$$\int_{[0,1]^n} |f_\varepsilon(y) - f_0(y)| dy < \rho$$

para ε suficientemente pequeno. Para cada $\varepsilon \geq 0$, como $f_\varepsilon \in L^1((0, 1)^n)$ e $C_c((0, 1)^n)$ é denso em $L^1((0, 1)^n)$ então podemos afirmar que existe $\psi_\varepsilon \in C_c((0, 1)^n)$ tal que

$$\int_{[0,1]^n} |f_\varepsilon(y) - \psi_\varepsilon(y)| dy < \frac{\rho}{3}.$$

Vamos estender ψ_ε periodicamente a \mathbb{R}^n e considerar

$$\psi_\varepsilon(y) = \psi_0(y + y \frac{\delta(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}).$$

Pela continuidade uniforme de ψ_ε existe $\lambda \in]0, 1[$ tal que para $|\varepsilon| < \lambda$

$$d(\psi_\varepsilon, \psi_0) < \frac{\rho}{3},$$

isto é,

$$\int_{[0,1]^n} |\psi_\varepsilon(y) - \psi_0(y)| dy < \frac{\rho}{3}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^n} |f_\varepsilon(y) - f_0(y)| \, dy &\leq \int_{[0,1]^n} |f_\varepsilon(y) - \psi_\varepsilon(y)| \, dy + \\ &+ \int_{[0,1]^n} |\psi_\varepsilon(y) - \psi_0(y)| \, dy + \int_{[0,1]^n} |\psi_0(y) - f_0(y)| \, dy < \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \rho, \end{aligned}$$

utilizando a densidade e a continuidade uniforme de ψ_0 .

Conclui-se então que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,1]^n} f(\nabla u_\varepsilon(x)) \, dx = \int_{[0,1]^n} f(\nabla u(x)) \, dx,$$

como pretendíamos.

A implicação recíproca é imediata, pois se $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e u é $[0, 1]^n$ -periódica então $u|_{[0,1]^n}$ é arbitrária em $W^{1,\infty}([0, 1]^n, \mathbb{R}^m)$. Como a definição de quasiconvexidade não depende do domínio que se considera, então

$$f(A) \leq \int_{\Omega} f(A + \nabla v(x)) \, dx, \quad \forall v \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

■

3.1.2 Como se relacionam os vários tipos de convexidade.

Notemos primeiramente que a função T apresentada na definição 3.1.8, que a cada matriz A faz corresponder o vector de todos os subdeterminantes, é uma função quasi-afim. Esta função é o exemplo essencial de função não-linear quasi-afim. No próximo lema este resultado é demonstrado no caso particular $m = n = 2$, que é aquele que nos interessa aqui. O resultado vale em qualquer dimensão, mas optámos por apresentar aqui apenas a demonstração do caso particular plano, para evitar complicações técnicas que não são essenciais.

Lema 3.1.14 *Seja $A \in \mathbb{M}^{2 \times 2}$ e $T(A) = (A, \det A)$*

1. *Para quaisquer $A, B \in \mathbb{M}^{2 \times 2}$ com $\text{car}(A - B) \leq 1$, e para $\lambda \in [0, 1]$, tem-se*

$$T(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda T(A) + (1 - \lambda)T(B).$$

2. *Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e limitado, para quaisquer $A \in \mathbb{M}^{2 \times 2}$ e $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ tem-se*

$$T(A) = \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} T(A + \nabla u(x)) \, dx.$$

Demonstração:

1. Temos

$$T(\lambda A + (1 - \lambda)B) = (\lambda A + (1 - \lambda)B, \det(\lambda A + (1 - \lambda)B))$$

e

$$\begin{aligned} \lambda T(A) + (1 - \lambda)T(B) &= (\lambda A, \lambda \det A) + ((1 - \lambda)B, (1 - \lambda) \det B) = \\ &= (\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda \det A + (1 - \lambda) \det B). \end{aligned}$$

Então para obtermos a igualdade pretendida temos de mostrar que o determinante é uma função afim car-1, isto é,

$$\det(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda \det A + (1 - \lambda) \det B,$$

quando $\text{car}(A - B) \leq 1$.

Por uma questão de simplicidade, vamos identificar $M^{2 \times 2}$ com \mathbb{R}^4 e considerar o produto interno usual em \mathbb{R}^4 definido por $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^4 A_i B_i$.

Designando por Q a forma quadrática do determinante, temos

$$Q = \left(\frac{\partial^2 \det A}{\partial A_i \partial A_j} \right)_{i,j=1}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $QA = (A_4, -A_3, -A_2, A_1)$, $\langle B, QA \rangle = B_1 A_4 - B_2 A_3 - B_3 A_2 + B_4 A_1$ e $\langle A, QA \rangle = 2 \det A$.

Como $2 \det A = \langle A, QA \rangle$ basta mostrar que

$$\langle \lambda A + (1 - \lambda)B, Q(\lambda A + (1 - \lambda)B) \rangle = \lambda \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda) \langle B, QB \rangle$$

para obter o resultado pretendido.

Temos

$$\begin{aligned} & \langle \lambda A + (1 - \lambda)B, Q(\lambda A + (1 - \lambda)B) \rangle = \\ & = \lambda^2 \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda)^2 \langle B, QB \rangle + \lambda(1 - \lambda) \langle A, QB \rangle + \lambda(1 - \lambda) \langle B, QA \rangle = \\ & = \lambda \langle A, QA \rangle - \lambda(1 - \lambda) \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda) \langle B, QB \rangle + \\ & \quad - \lambda(1 - \lambda) \langle B, QB \rangle + \lambda(1 - \lambda) \langle A, QB \rangle + \lambda(1 - \lambda) \langle B, QA \rangle = \\ & = \lambda \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda) \langle B, QB \rangle + \lambda(1 - \lambda) \langle A, Q(B - A) \rangle - \lambda(1 - \lambda) \langle B, Q(B - A) \rangle = \\ & = \lambda \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda) \langle B, QB \rangle - \lambda(1 - \lambda) \langle B - A, Q(B - A) \rangle = \\ & = \lambda \langle A, QA \rangle + (1 - \lambda) \langle B, QB \rangle, \end{aligned}$$

onde a última igualdade resulta de $\langle B - A, Q(B - A) \rangle = 2 \det(B - A) = 0$ pois sendo $\text{car}(B - A) \leq 1$ temos $\det(B - A) = 0$.

2. Sendo $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

considerando

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det \nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

Como

$$\begin{aligned} 2 \det(A + \nabla u(x)) & = \langle A + \nabla u(x), QA + Q\nabla u(x) \rangle = \\ & = \langle A, QA \rangle + \langle A, Q\nabla u(x) \rangle + \langle QA, \nabla u(x) \rangle + \langle \nabla u(x), Q\nabla u(x) \rangle, \end{aligned}$$

e $Q = Q^T$, obtemos

$$\det(A + \nabla u(x)) = \det A + \det \nabla u(x) + \langle QA, \nabla u(x) \rangle.$$

Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ então $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ com $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2\}$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \det(A + \nabla u(x)) \, dx = \\ & = \text{med } \Omega \det A + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) \right) dx_1 dx_2 + \\ & + \int_{\Omega} \left(A_4 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) - A_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) - A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) + A_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) \right) dx_1 dx_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{med } \Omega \det A + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) \left(A_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) \right) \right\} dx_1 dx_2 + \\
&- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) \left(A_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) \right) + A_4 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + A_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) \right\} dx_1 dx_2 = \\
&= \text{med } \Omega \det A + \int_{\Omega_1} \left((A_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x)) u_2(x) \right)_{\partial \Omega_2} dx_1 - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x) u_2(x) dx + \\
&- \int_{\Omega_2} \left((A_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x)) u_2(x) \right)_{\partial \Omega_1} dx_2 + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x) u_2(x) dx + \\
&+ \int_{\Omega_2} A_4 [u_1(x)]_{\partial \Omega_1} dx_2 - \int_{\Omega_1} A_3 [u_1(x)]_{\partial \Omega_2} dx_1.
\end{aligned}$$

Atendendo ao facto de termos $u = 0$ em $\partial \Omega$ e $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1}$, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \det(A + \nabla u(x)) dx = \text{med } \Omega \det A,$$

terminando a demonstração. ■

Vamos agora apresentar um resultado de Morrey, que relaciona os vários tipos de convexidade apresentados.

Teorema 3.1.15 Consideremos $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$,

1. Temos,

$$f \text{ convexa} \implies f \text{ policonvexa} \implies f \text{ quasiconvexa} \implies f \text{ convexa car-1.}$$

Se $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ então

$$f \text{ convexa} \implies f \text{ policonvexa} \implies f \text{ convexa car-1.}$$

2. Se $m = 1$ ou $n = 1$, todas estas noções são equivalentes.

Demonstração:

1. A implicação f convexa $\implies f$ policonvexa é trivial. Basta considerar g tal que

$$g(x_1, \dots, x_{\tau(n,m)}) = f(x_1, \dots, x_{n \times m})$$

na definição de policonvexidade.

Quanto à implicação f policonvexa $\implies f$ quasiconvexa, vamos apenas ilustrar a demonstração no caso particular $m = n = 2$. A demonstração no caso geral é semelhante, e pode ser encontrada em [Da1] capítulo 4, teorema 1.1.

Supondo que f é policonvexa, então existe $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ convexa tal que $f(A) = g(T(A))$. Usando a desigualdade de Jensen e a alínea 2 do lema anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} f(A + \nabla u(x)) dx &= \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} g(T(A + \nabla u(x))) dx \geq \\
&\geq g\left(\frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} T(A + \nabla u(x)) dx\right) = g(T(A)) = f(A)
\end{aligned}$$

logo f é quasiconvexa.

Vamos demonstrar agora a implicação: f quasiconvexa $\implies f$ convexa car-1.

Consideremos $\eta \in \mathbb{R}^n$ unitário e $a \in \mathbb{R}^m$. Seja

$$u(x) = \int_0^{x \cdot \eta} \chi(s) ds a,$$

onde $\chi(x) = \chi_{(0,\lambda)}(x) - \lambda$, para $0 < \lambda < 1$. A função $\chi_{(0,\lambda)}$ designa a função característica de $(0, \lambda)$ em $(0, 1)$ (igual a 1 em $(0, \lambda)$, zero em $(\lambda, 1)$) e $x \cdot \eta$ designa o produto interno em \mathbb{R}^n dos vectores x e η .

Consideremos χ extendida por periodicidade a todo o \mathbb{R} , isto é,

$$\chi(x) = \chi_{(0,\lambda)}(\delta(x)) - \lambda,$$

onde $\delta(x)$ designa a parte decimal do número real x .

Note-se que a média $\bar{\chi}$ de χ é zero:

$$\bar{\chi} = \int_0^1 \chi(s) ds = \int_0^1 \chi_{(0,\lambda)}(s) ds - \lambda = \lambda - \lambda = 0.$$

Se escolhermos para η um dos eixos do cubo $[0, 1]^n$, então η é um vector com todas as coordenadas nulas excepto a i -ésima, η_i , que é igual a 1, para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Podemos então escrever $x \cdot \eta = x_i$, onde x_i designa a i -ésima coordenada de x .

Vamos ver que neste caso u é $[0, 1]^n$ -periódica, isto é, $u(x+l) = u(x)$ para cada $x \in [0, 1]^n$ e cada $l \in \mathbb{Z}^n$.

Designando por m_i a parte inteira de $x_i + l_i$, e $\delta(x_i)$ a parte decimal, utilizando a periodicidade de χ e observando que $\delta(x_i + l_i) = \delta(x_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x+l) &= \int_0^{(x+l) \cdot \eta} \chi(s) ds a = \int_0^{x_i+l_i} \chi(s) ds a = \\ &= \int_0^{m_i} \chi(s) ds a + \int_{m_i}^{x_i+l_i} \chi(s) ds a = \\ &= m_i \int_0^1 \chi(s) ds a + \int_0^{\delta(x_i+l_i)} \chi(s) ds a = \\ &= \int_0^{\delta(x_i)} \chi(s) ds a + \int_0^{x_i} \chi(s) ds a = u(x). \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.1.12, se f é quasiconvexa então

$$f(A) \leq \int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u(x)) dx.$$

Mas $\nabla u(x) = \chi(x \cdot \eta) a \otimes \eta$, onde $a \otimes \eta$ designa a matriz

$$a \otimes \eta = \begin{pmatrix} a_1 \eta_1 & \cdots & a_1 \eta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \eta_1 & \cdots & a_m \eta_n \end{pmatrix},$$

logo, por ser

$$\chi(x_i) = \begin{cases} 1 - \lambda & \text{se } x_i \in (0, \lambda) \\ -\lambda & \text{se } x_i \in (0, 1) \setminus (0, \lambda) \end{cases},$$

resulta

$$\int_{[0,1]^n} f(A + \nabla u(x)) dx = \int_0^1 f(A + \chi(x_i)a \otimes \eta) dx_i = \lambda f(A + (1-\lambda)a \otimes \eta) + (1-\lambda)f(A - \lambda a \otimes \eta).$$

Logo,

$$f(A) \leq \lambda f(A + (1-\lambda)a \otimes \eta) + (1-\lambda)f(A - \lambda a \otimes \eta)$$

para quaisquer $a \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, sendo η a intersecção de $[0, 1]^n$ com um dos eixos coordenados. Como $a \otimes \eta$ representa qualquer matriz car-1, então a desigualdade precedente expressa a convexidade car-1. Provando-se que a convexidade car-1 é uma condição necessária para a quasiconvexidade. ■

3.2 Propriedades das funções convexas característica 1

Apresentam-se a seguir outras caracterizações das funções convexas car-1.

Definição 3.2.1 *Seja $\lambda_i > 0$ com $\sum_{i=1}^L \lambda_i = 1$, onde L é inteiro, e $A_i \in \mathbb{M}^{m \times n}$, com $1 \leq i \leq L$. O conjunto $\{(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq L}\}$ diz-se satisfazer a condição H_L se:*

1. para $L = 2$ se tem $\text{car}(A_1 - A_2) \leq 1$;
2. para $L > 2$, a menos de uma permutação, se tem $\text{car}(A_1 - A_2) \leq 1$ e se para

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, & B_1 = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \mu_i = \lambda_{i+1}, & B_i = A_{i+1} \quad 2 \leq i \leq L-1 \end{cases}$$

então (μ_i, B_i) satisfaz a condição (H_{L-1}) .

Exemplo 3.2.2 ’

1. $L = 2$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então $(\lambda_1, A_1), (\lambda_2, A_2)$ satisfazem (H_2) se e só se $\text{car}(A_1 - A_2) \leq 1$.
2. $L = 3$: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, então $(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq 3}$ satisfazem (H_3) se, a menos de uma permutação,

$$\begin{cases} \text{car}(A_1 - A_2) \leq 1 \\ \text{car}\left(A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq 1. \end{cases}$$

3. $L = 4$: $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$, então $(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ satisfaz (H_4) se uma das seguintes condições se verifica, ou

$$\begin{cases} \text{car}(A_1 - A_2) \leq 1 \\ \text{car}\left(A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leq 1 \\ \text{car}\left(A_4 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right) \leq 1, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \text{car}(A_1 - A_2) \leq 1, \text{ car}(A_3 - A_4) \leq 1 \\ \text{car}\left(\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{\lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4}{\lambda_3 + \lambda_4}\right) \leq 1. \end{cases}$$

Proposição 3.2.3 Para $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, as seguintes condições são equivalentes:

1. f é convexa car-1;
2. vale a desigualdade

$$f\left(\sum_{i=1}^L \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^L \lambda_i f(A_i), \quad (3.11)$$

sempre que $\{(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq L}\}$ satisfaz (H_L) .

Demonstração:

2 \implies **1** É trivial. Basta tomar $L = 2$.

1 \implies **2** Vamos provar (3.11) por indução.

Por definição de convexidade car-1 (3.11) é verdadeira para $L = 2$.

Admitamos que a proposição é verdadeira para $L - 1$.

Temos

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i f(A_i) = (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(A_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(A_2) \right) + \sum_{i=3}^L \lambda_i f(A_i).$$

Usando a convexidade car-1 de f , obtemos

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i f(A_i) \geq (\lambda_1 + \lambda_2) f\left(\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) + \sum_{i=3}^L \lambda_i f(A_i).$$

Considerando $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $B_1 = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\mu_i = \lambda_{i+1}$ e $B_i = A_{i+1}$ para $2 \leq i \leq L - 1$ podemos escrever

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i f(A_i) \geq \sum_{i=1}^{L-1} \mu_i f(B_i).$$

Como $\sum_{i=1}^{L-1} \mu_i = 1$ podemos aplicar a hipótese de indução obtendo-se

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i f(A_i) \geq \sum_{i=1}^{L-1} \mu_i f(B_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{L-1} \mu_i B_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^L \lambda_i A_i\right),$$

tendo-se estabelecido (3.11). ■

Exemplo 3.2.4 Seja $m = n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{5} \\ A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C, A_4 = D, A_5 = A. \end{cases}$$

É fácil ver que $(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq 5}$ satisfaz (H_5) pois

$$\det(A_1 - A_2) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \det \left(A_3 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(A_4 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \right) &= \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{14}{3} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} = -\frac{4 \times 7}{12} + \frac{14}{6} = -\frac{14}{6} + \frac{14}{6} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(A_5 - \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} \right) &= \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= \det \left(-\frac{5}{4} \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0. \end{aligned}$$

No entanto, se juntarmos A_1 e A_5 e considerarmos

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_5 = \frac{2}{5}, & \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{1}{5} \\ B_1 = A, & B_2 = B, \quad B_3 = C, \quad B_4 = D \end{cases}$$

verificamos facilmente que $(\mu_i, B_i)_{1 \leq i \leq 4}$ não verifica (H_4) .

Com efeito,

$$\det(B_1 - B_2) = 0,$$

mas

$$\begin{aligned} \det \left(B_3 - \frac{\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0. \end{aligned}$$

Ou seja, pela proposição 3.2.3 sabemos que, se f é convexa car-1 então

$$f\left(\frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{5}D + \frac{1}{5}A\right) \leq \frac{1}{5}f(A) + \frac{1}{5}f(B) + \frac{1}{5}f(C) + \frac{1}{5}f(D) + \frac{1}{5}f(A)$$

pois $(\lambda_i, A_i)_{i=1, \dots, 5}$ satisfaz (H_5) .

Usando a comutatividade da soma temos

$$f\left(\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B + \frac{1}{5}C + \frac{1}{5}D\right) \leq \frac{2}{5}f(A) + \frac{1}{5}f(B) + \frac{1}{5}f(C) + \frac{1}{5}f(D)$$

mas, no entanto $(\mu_i, B_i)_{i=1, \dots, 4}$ não satisfaz a condição (H_4) .

Proposição 3.2.5 *A função f é convexa car-1 se e só se $F(t) = f(A + ta \otimes b)$ é convexa em t para todo $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, para $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$, onde $a \otimes b = a_i b_\alpha$ para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq \alpha \leq n$.*

Demonstração:

Suponhamos que f é convexa car-1, com vista a mostrar que $F(t) = f(A + ta \otimes b)$ é convexa, isto é,

$$F(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda F(t_1) + (1 - \lambda)F(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Temos

$$\begin{aligned} F(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= f(A + (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)a \otimes b) = \\ &= f(\lambda(A + t_1 a \otimes b) + (1 - \lambda)(A + t_2 a \otimes b)) \leq \\ &\leq \lambda f(A + t_1 a \otimes b) + (1 - \lambda)f(A + t_2 a \otimes b) = \lambda F(t_1) + (1 - \lambda)F(t_2). \end{aligned}$$

A desigualdade precedente resulta da hipótese, pois

$$(A + t_1 a \otimes b) - (A + t_2 a \otimes b) = (t_1 - t_2)a \otimes b \quad \text{e} \quad \text{car}((t_1 - t_2)a \otimes b) = \text{car}(a \otimes b) \leq 1.$$

Reciprocamente, suponhamos que F é convexa, para mostrar que

$$f(tA + (1 - t)B) \leq tf(A) + (1 - t)f(B), \quad \forall A, B \in \mathbb{M}^{m \times n}, \quad \text{com} \quad \text{car}(A - B) \leq 1.$$

Podemos escrever $f(tA + (1 - t)B) = f(B + t(A - B))$.

Como $\text{car}(A - B) \leq 1$, por transformações lineares podemos escrever $A - B = a \otimes b$, para algum $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Assim $f(B + t(A - B)) = F(t)$ e como $F(\cdot)$ é convexa por hipótese, temos

$$F(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda F(t_1) + (1 - \lambda)F(t_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$f(B + (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)(A - B)) \leq \lambda f(B + t_1(A - B)) + (1 - \lambda)f(B + t_2(A - B)).$$

Mas,

$$\begin{aligned} F(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= f(B + (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)(A - B)) = \\ &= f(B + \lambda t_1 A - \lambda t_1 B + (1 - \lambda)t_2 A - (1 - \lambda)t_2 B) = \\ &= f(\lambda(t_1 A + (1 - t_1)B) + (1 - \lambda)(t_2 A + (1 - t_2)B)) = \\ &= f(\lambda(B + t_1(A - B)) + (1 - \lambda)(B + t_2(A - B))) \leq \\ &\leq \lambda f(B + t_1(A - B)) + (1 - \lambda)f(B + t_2(A - B)). \end{aligned}$$

Como A e B são arbitrários satisfazendo $\text{car}(A - B) \leq 1$,

$$B + t_1(A - B) - B - t_2(A - B) = (t_1 - t_2)(A - B)$$

e

$$\text{car}((t_1 - t_2)(A - B)) = \text{car}(A - B) \leq 1,$$

obtivemos o resultado pretendido. ■

Proposição 3.2.6 Condição de Legendre-Hadamard

Se f é C^2 então a convexidade car-1 é equivalente a

$$\sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial^2 f(A)}{\partial A_\alpha^i \partial A_\beta^j} \lambda^i \lambda^j \mu_\alpha \mu_\beta \geq 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ e $A = (A_\alpha^i)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \alpha \leq n}} \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

Demonstração:

Se escrevermos cada matriz B de característica 1 na forma $\lambda \otimes \mu$, e atendendo ao facto de que $F(t) = f(A + t\lambda \otimes \mu)$ é convexa, a condição de Legendre Hadamard obtém-se pelo cálculo de $F''(\cdot)$, que pela proposição 3.1.2 sabemos que é não negativa. ■

3.3 Exemplos

Vamos dar alguns exemplos de funções convexas, policonvexas, quasiconvexas e convexas car-1.

Apresentamos nesta secção três resultados principais:

1. O primeiro resultado caracteriza completamente as funções quasi-afins (isto é, as funções f tais que f e $-f$ são quasiconvexas) mostrando que elas são funções afins dos menores da matriz ∇u .
2. O segundo resultado, é dedicado ao caso particular das funções quadráticas. O resultado principal é que neste caso a convexidade car-1 e a quasiconvexidade são equivalentes.

Note-se que o caso quadrático é importante no sentido que conduz a equações de Euler-Lagrange lineares, logo no caso linear a elipticidade das equações de Euler corresponde exactamente à *s.c.i.f.* do problema variacional associado.

3. O terceiro resultado apresenta contra-exemplos para as diferentes implicações.

3.3.1 Funções quasi-afins

Teorema 3.3.1 *Seja $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. f é quasi-afim;
2. f é afim car-1, isto é, f e $-f$ são convexas car-1, ou seja,

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, $A, B \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$,

$$f(A + a \otimes b) = f(A) + \langle \nabla f(A), a \otimes b \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{M}^{m \times n}$.

3. f é poli-afim, isto é, f e $-f$ são policonvexas.
4. Existe $\beta \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ tal que

$$f(A) = f(0) + \langle \beta, T(A) \rangle$$

para todo $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^{\tau(n,m)}$.

Demonstração: [ver [Da1], capítulo 4, teorema 1.5.]

Exemplo 3.3.2

1. Se $m = n = 2$, então o teorema diz-nos que a única função não-linear quasi-afim é $\det A$.

As funções quasi-afins são do tipo

$$f(A) = f(0) + \langle \beta, A \rangle + \gamma \det A.$$

2. Mais geralmente se $n, m > 1$, então as únicas funções quasi-afins são as funções afins dos subdeterminantes $s \times s$ da matriz $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ onde $2 \leq s \leq n \wedge m = \min \{n, m\}$.

3.3.2 Formas quadráticas

Vamos agora apresentar um resultado para funções quadráticas. Como já afirmámos, este caso tem um interesse particular pois as equações de Euler associadas são lineares.

Lema 3.3.3 *Seja M uma matriz simétrica em $\mathbb{M}^{nm \times nm}$ e seja*

$$f(A) = \langle MA, A \rangle,$$

então

1. f é convexa se e só se $f(A) \geq 0$ para qualquer $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

2. f é policonvexa se e só se existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\sigma(2)}$ tal que

$$f(A) \geq \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle \quad \forall A \in \mathbb{M}^{m \times n}$$

e onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^{\sigma(2)}$ e $\sigma(2) = \binom{m}{2} \binom{n}{2}$.

3. f é quasiconvexa se e só se

$$\int_D f(\nabla \varphi(x)) dx \geq 0$$

para qualquer domínio limitado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e para qualquer $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^m)$.

4. f é convexa car-1 se e só se $f(a \otimes b) \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: [ver [Dal], capítulo 4, lema 1.8.]

Teorema 3.3.4 *Seja M uma matriz simétrica em $\mathbb{M}^{mn \times mn}$. Seja*

$$f(A) = \langle MA, A \rangle$$

onde $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{M}^{m \times n}$. Então

1. f é convexa car-1 se e só se f é quasiconvexa,

2. se $m = 2$ ou $n = 2$, então

$$f \text{ policonvexa} \iff f \text{ quasiconvexa} \iff f \text{ convexa car-1.}$$

3. se $m, n \geq 3$, então em geral

$$f \text{ convexa car-1} \not\Rightarrow f \text{ policonvexa.}$$

Demonstração: [ver [Da1], capítulo 4, teorema 1.7.]

A demonstração de 1 foi dada por Van Hove, embora já se conhecesse o resultado antes. Tartar e Murat também demonstraram este resultado numa perspectiva diferente.

Em virtude das demonstrações de 1 e 2 serem longas e envolverem outros resultados, vamos apenas demonstrar 3.

Queremos provar que se $m = n = 3$, então existe f convexa car-1 que não é policonvexa. Apresentamos um exemplo dado por Serre.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

e seja

$$f(A) = (a_{11} - a_{32} - a_{23})^2 + (a_{12} - a_{31} + a_{13})^2 + (a_{21} - a_{31} - a_{13})^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2.$$

Dividimos a demonstração em duas partes.

Na primeira parte mostramos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(a \otimes b) - \varepsilon |a \otimes b| \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3 \quad (3.12)$$

e onde $|\cdot|$ denota a norma euclídeana. O lema anterior assegurará que

$$g(A) = f(A) - \varepsilon |A|^2$$

é convexa car-1. (Note que podemos escrever, $g(A) = \langle (M - \varepsilon I)A, A \rangle$, e $M - \varepsilon I$ é simétrica.)

Na segunda parte provamos que g não é policonvexa, concluindo a demonstração.

Parte 1- Consideremos

$$\varepsilon_0 = \inf \{ f(a \otimes b) : a, b \in \mathbb{R}^3, |a \otimes b| = 1 \}. \quad (3.13)$$

Como $f \geq 0$, temos $\varepsilon_0 \geq 0$. Com vista a provar (3.12) é suficiente provar que $\varepsilon_0 > 0$.

Suponhamos por contradição que $\varepsilon_0 = 0$.

Observe que em (3.13) o mínimo obtém-se trivialmente logo existem $a, b \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} f(a \otimes b) = \varepsilon_0 = 0, \\ |a \otimes b| = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Recorde que

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix},$$

assim, para que $f(a \otimes b) = 0$ é necessário

$$\begin{cases} a_1 b_1 = a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ a_1 b_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_2 b_1 = a_3 b_1 + a_1 b_3 \\ a_2 b_2 = 0 \\ a_3 b_3 = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Vamos mostrar que (3.15) contradiz a condição $|a \otimes b| = 1$.

Se $a_2 = a_3 = 0$, as equações (3.15) reescrevem-se

$$\begin{cases} a_1 b_1 = 0 \\ a_1 b_2 = -a_1 b_3 \\ a_2 = a_3 = 0 \\ a_1 b_3 = 0. \end{cases}$$

Se $a_1 = 0$ então $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, logo $|a \otimes b| = 0 \neq 1$.

Se $b_1 = 0$ e $a_1 \neq 0$ então $b_2 = -b_3$, mas da última equação vem $b_3 = 0$ logo $b_2 = 0$. Ou seja $b = 0$, logo $|a \otimes b| = 0$, obtendo-se novamente contradição.

Se $a_2 = b_3 = 0$, as equações (3.15) reescrevem-se

$$\begin{cases} a_1 b_1 = a_3 b_2 \\ a_1 b_2 = a_3 b_1 \\ a_3 b_1 = 0 \\ a_2 = b_3 = 0. \end{cases}$$

Se $a_3 = 0$ então $a_1 b_1 = a_1 b_2 = 0$. Então ou $a_1 = 0$ e nesse caso $a = 0$ ou $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$ obtendo-se $b = 0$. Resultando novamente $|a \otimes b| = 0$.

Considerando os casos $a_3 = b_2 = 0$ e $b_2 = b_3 = 0$ chegamos ao mesmo resultado. Logo podemos concluir que $\varepsilon_0 > 0$ e assim $f(a \otimes b) - \varepsilon |a \otimes b|^2 \geq 0$, ou seja $g(a \otimes b) \geq 0$ é convexa car-1 para qualquer $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ pela alínea 4 do lema anterior.

Parte 2-

Mostremos agora que g não é policonvexa. Tendo em conta o lema 3.3.3, é suficiente mostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^9$, existe $A \in \mathbb{R}^9$ tal que

$$g(A) + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle < 0. \quad (3.16)$$

Mostraremos que (3.16) se verifica para matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} b+d & c-a & a \\ c+a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Para tais matrizes $f(A) = 0$ e

$$g(A) = f(A) - \varepsilon \langle A, A \rangle = -\varepsilon \left((b+d)^2 + (c-a)^2 + a^2 + b^2 + (a+c)^2 + c^2 + d^2 \right)$$

e

$$\text{adj}_2 A = \begin{pmatrix} -bd & bc & cd+ad \\ ad & -ac & -(bd+d^2-c^2+ac) \\ bc-ab & ac+a^2-b^2-bd & a^2-c^2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle &= -\alpha_1 bd + \alpha_2 bc + \alpha_3 (cd+ad) + \alpha_4 ad - \alpha_5 ac - \alpha_6 (bd+d^2-c^2+ac) + \\ &\quad + \alpha_7 (bc-ab) + \alpha_8 (ac+a^2-b^2-bd) + \alpha_9 (a^2-c^2). \end{aligned}$$

Como na parte 1, iremos considerar vários casos:

1- Se $\alpha_8 > 0$

Tomando $a = c = d = 0$ e $b \neq 0$, obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle = -\varepsilon |A|^2 + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle = -2\varepsilon b^2 - \alpha_8 b^2 < 0.$$

2- Se $\alpha_6 > 0$

Tomando $a = b = c = 0$ e $d \neq 0$ obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle = -2\epsilon d^2 - \alpha_6 d^2 < 0.$$

Podemos então supor $\alpha_8 \leq 0$ e $\alpha_6 \leq 0$.

3- Se $\alpha_9 - \alpha_6 > 0$ então tomando $a = b = d = 0$ e $c \neq 0$ obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle = -3\epsilon c^2 + (\alpha_6 - \alpha_9) c^2 < 0.$$

Supondo $\alpha_8 \leq 0$, $\alpha_6 \leq 0$ e $\alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$. Destas três desigualdades deduzimos $\alpha_8 + \alpha_6 + \alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$, ou seja, $\alpha_8 + \alpha_9 \leq 0$. Assim, tomando $b = c = d = 0$ e $a \neq 0$, obtemos

$$g(A) + \langle \alpha, \text{adj}_2 A \rangle = -3\epsilon a^2 + (\alpha_8 + \alpha_9) a^2 < 0.$$

Isto conclui a demonstração do teorema. ■

3.3.3 Contra-exemplos

Indicam-se alguns contra-exemplos. Vimos no teorema 3.1.15 que

$$f \text{ convexa} \implies f \text{ policonvexa} \implies f \text{ quasiconvexa} \implies f \text{ convexa car-1}.$$

Sabemos que

$$f \text{ policonvexa} \not\Rightarrow f \text{ convexa},$$

basta considerar $f(A) = \det A$.

O teorema 3.3.4 diz-nos que se $m, n \geq 3$ então

$$f \text{ convexa car-1} \not\Rightarrow f \text{ policonvexa}.$$

Vamos ainda demonstrar nesta subsecção que a última implicação mantém-se falsa se $m = n = 2$.

Quanto à implicação

$$f \text{ convexa car-1} \implies f \text{ quasiconvexa}$$

no caso $n = m = 2$, é um problema ainda em aberto e constitui o tema principal desta dissertação.

Vamos então demonstrar que existe uma função convexa car-1 que não é policonvexa no caso $m = n = 2$.

O contra-exemplo que apresentamos envolve funções f que podem tomar o valor $+\infty$. Em [Da1, capítulo 4] apresenta-se também um outro contra-exemplo em que f é uma função que toma sempre valores finitos. (Ver proposições 1.13 e 1.14 pag. 151.)

Antes do exemplo vamos apresentar o seguinte resultado.

Teorema 3.3.5 *Seja $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ policonvexa. Então*

$$f\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i f(A_i), \quad (3.18)$$

para quaisquer $A_i \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i = 1$, satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(A_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right) \quad (3.19)$$

onde $\tau = \tau(n, m)$.

Demonstração: Se f é policonvexa então existe $g : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que $f(A) = g(T(A))$. Assim, aplicando (3.19) e em seguida a convexidade de g vem

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right) &= g\left(T\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i A_i\right)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i T(A_i)\right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i g(T(A_i)) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i f(A_i), \end{aligned}$$

para todo $A_i \in \mathbb{M}^{m \times n}$, $\lambda_i \geq 0$ com $\sum_{i=1}^{\tau+1} \lambda_i = 1$. ■

Exemplo 3.3.6 *Sejam, $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^4$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in]0, 1[$ tais que*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \det A_i = \det\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i\right) \\ \det(A_1 - A_2) \neq 0, \det(A_1 - A_3) \neq 0, \det(A_2 - A_3) \neq 0. \end{cases}$$

Se tomarmos, por exemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ e

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificamos que $(\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq 3}$ não satisfaz (H_3) .

Definimos então $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ como

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X = A_1, A_2, A_3 \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que f é convexa car-1, mas não é policonvexa.

Demonstração:

1- Para mostrar que f é convexa car-1, temos de provar que

$$f(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1 - \lambda)f(Y)$$

para todo $X, Y \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{car}(X - Y) \leq 1$, e para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Podem ocorrer três casos:

Caso 1- $X \neq A_i$ ou $Y \neq A_j$: então $f(X) = +\infty$ ou $f(Y) = +\infty$ e por isso a desigualdade é trivialmente verdadeira;

Caso 2- $X = A_i$ e $Y = A_j$ com $i \neq j$.

Este caso é impossível porque $\text{car}(A_i - A_j) = 2$ se $i \neq j$;

Caso 3- $X = Y = A_i$ então a desigualdade é trivialmente satisfeita.

2- Falta mostrar que f não é policonvexa.

Suponhamos, por contradição, que f é policonvexa.

Note que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ e $\det A_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Assim,

$$T\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i\right) = \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i, 0\right) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (A_i, 0) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i T(A_i).$$

Então, pelo teorema anterior, f verifica a desigualdade

$$f\left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i f(A_i).$$

Como $\sum_{i=1}^3 \lambda_i A_i \neq A_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$, teríamos o lado esquerdo da desigualdade igual a infinito enquanto que o lado direito seria nulo, o que é absurdo. ■

Capítulo 4

Medidas de Young

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre medidas de Young ou medidas parametrizadas.

Inicialmente, descrevemos alguns problemas que nos surgem quando trabalhamos com a convergência fraca e funcionais não-lineares, e as sucessões envolvidas oscilam com frequência cada vez maior. Mostramos também a importância das medidas de Young na caracterização dos limites fracos de tais sucessões.

Sob certas condições, podemos associar a cada sucessão uma família de medidas de Young – este é o teorema de existência.

O nosso objectivo principal é estabelecer relações entre as medidas de Young e a quasiconvexidade e entre as medidas de Young e a convexidade car-1 .

Pensando primeiro na quasiconvexidade: estabelecida a existência de uma família de medidas de Young associada a uma determinada sucessão, podemos obter uma outra sucessão cuja medida de Young associada é homogénea; e considerando, em particular, as sucessões de gradientes concluímos que uma medida de Young gradiente homogénea é uma medida de probabilidade para a qual a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função quasiconvexa.

Voltando a atenção para a convexidade car-1 : sabendo que a quasiconvexidade implica a convexidade car-1 , então uma medida de probabilidade que verifica a desigualdade de Jensen para toda a função convexa car-1 é um caso particular de uma medida de Young gradiente homogénea. Vamos mostrar que tais medidas de probabilidade são, na realidade, laminados.

Neste sentido, o problema de decidir se toda a função convexa car-1 é quasiconvexa é equivalente a decidir se toda a medida parametrizada gradiente homogénea é um laminado.

4.1 Medidas de Young e quasiconvexidade

A convergência fraca é uma importante ferramenta da moderna análise não-linear, porque possui as mesmas propriedades de compacidade que os espaços de dimensão finita: basicamente, de uma sucessão limitada pode extrair-se uma subsucessão convergente.

Contudo, a convergência fraca não comuta com os funcionais e operações não-lineares. Isto levanta uma dificuldade que é preciso ultrapassar, e as medidas parametrizadas são uma ferramenta para resolver este problema: lidar com o comportamento da convergência fraca no que respeita a funcionais não-lineares.

Para garantirmos a existência de minimizantes para um dado funcional, pelo método directo, deve começar-se por estabelecer primeiro a propriedade de *s.c.i.f.*. Um longo trabalho foi desenvolvido no sentido de saber sob que condições podemos obter esta propriedade de *s.c.i.*, com respeito a topologias fracas, para funcionais integrais não-lineares. Neste capítulo, vamos ter oportunidade de demonstrar que a quasiconvexidade da função integranda é uma condição necessária e suficiente para a obtenção da *s.c.i.f.* do funcional.

Outra questão é como lidar com os funcionais que não possuem esta propriedade de *s.c.i.f.* Nalguns casos, a existência de minimizantes pode ainda ser obtida, mas muitas vezes a perda de convexidade conduz a sucessões minimizantes oscilantes, cujo limite fraco não é um minimizante. Foi precisamente no contexto destes problemas

variacionais irregulares que Young introduziu as medidas parametrizadas, para compreender e lidar com a natureza altamente oscilatória das sucessões minimizantes.

Uma vez que as medidas parametrizadas servem para representar limites fracos de funcionais não-lineares, elas podem também ser usadas para compreender a *s.c.i.f.* Na realidade, quase todos os resultados de *s.c.i.f.* (envolvendo desigualdades) podem ser transformados em desigualdades de Jensen com respeito à correspondente medida parametrizada. A relação é mais profunda: como iremos ver, a desigualdade de Jensen fornece a caracterização de uma família particular de medidas parametrizadas que podem ser geradas por sucessões de funções com propriedades especiais.

Deste ponto de vista, o tratamento da convergência fraca reduz-se a manipular famílias de medidas de probabilidade. O passo fundamental é compreender que tipo de restrições nestas famílias de medidas fornecem propriedades gerando sucessões fracamente convergentes.

4.1.1 Medidas parametrizadas: motivação e definição

Estudar a propriedade de *s.c.i.f.* para um funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx$$

onde, por simplicidade, omitimos a dependência de x e u , é estudar o comportamento dos integrais

$$\int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx,$$

quando a sucessão (u_n) converge fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$.

Se esta convergência é de facto forte, isto é, se $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$ e $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$ então pelo teorema 2.9.9 existem subsucessões tais que $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$ e $\nabla u_{n_k}(x) \rightarrow \nabla u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$.

Se $f \geq 0$ for contínua, pelo lema de Fatou (lema 2.7.6) temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx \geq \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx.$$

Então, se f é contínua e limitada inferiormente (por zero ou outra constante qualquer), o funcional associado goza da propriedade de *s.c.i.f.*

As perguntas que se colocam são:

- 1- Podemos obter esta desigualdade mesmo que a convergência seja apenas fraca?
- 2- Que hipóteses deveremos impor a f para assegurar a *s.c.i.f.* do funcional?

Note que no caso de convergência fraca, nós podemos também aplicar o lema de Fatou, mas neste caso $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx$, não é em geral, $\int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx$.

Vamos estudar alguns exemplos para salientar o comportamento da convergência fraca no que diz respeito aos funcionais não-lineares.

Exemplo 4.1.1 Seja $\Omega =]0, \frac{\pi}{2}[$ e $f_n(x) = \text{sen}(nx)$, $g_n(x) = f_n^2(x)$, $x \in \Omega$.

Da trigonometria elementar temos

$$\int_a^b \text{sen}(nx) dx = \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right)_a^b = \frac{1}{n} (\cos(na) - \cos(nb)),$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \text{sen}^2(nx) dx &= \int_a^b \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \frac{b-a}{2} - \left(\frac{\text{sen}(2nx)}{4n} \right)_a^b = \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{1}{4n} (\text{sen}(2na) - \text{sen}(2nb)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b g_n(x) dx = \frac{b-a}{2}$$

para todo o intervalo $]a, b[\subseteq \Omega$.

Isto significa que $f_n \rightarrow 0$ e $g_n \rightarrow \frac{1}{2}$. Note-se que o quadrado do limite fraco, que é 0, não coincide com o limite fraco do quadrado, que é $\frac{1}{2}$.

Note, no entanto, que se verifica a desigualdade para a s.c.i.f., isto é,

$$\liminf_{f_n \rightarrow 0} I(f_n) \geq I(f).$$

Com efeito, tendo em conta que, $I(f_n) = \int_{\Omega} f_n^2(x) dx$, como $f_n \rightarrow 0$ temos $I(0) = \int_{\Omega} 0^2 dx = 0$ logo

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \liminf_{f_n \rightarrow 0} I(f_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n^2(x) dx > I(0) = 0.$$

Consideremos $\varphi(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$ e examinemos o limite fraco da sucessão $(\varphi(g_n))$. Neste caso, aplicando uma mudança de variável, usando a periodicidade da função seno e tendo em conta que $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |\sin(nx)| dx &= \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} |\sin y| dy = \\ &= \frac{2}{n} \left\langle \frac{n(b-a)}{\pi} \right\rangle + \frac{1}{n} \int_{na+\pi \left\langle \frac{n(b-a)}{\pi} \right\rangle}^{nb} |\sin y| dy = \\ &= \frac{2(b-a)}{\pi} + \frac{2}{n} \left(\left\langle \frac{n(b-a)}{\pi} \right\rangle - \frac{n(b-a)}{\pi} \right) + \frac{1}{n} \int_{na+\pi \left\langle \frac{n(b-a)}{\pi} \right\rangle}^{nb} |\sin y| dy \end{aligned}$$

onde $\langle a \rangle$ representa a parte inteira de a .

Como as duas últimas parcelas da soma convergem para zero, conclui-se então que

$$\varphi(g_n) \rightarrow \frac{2}{\pi},$$

e novamente $\varphi(g_n)$ não converge fracamente para $\varphi(0)$.

Além disso,

$$1 = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(g_n(x)) dx < \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) dx = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

ou seja, neste caso não temos s.c.i.f..

Exemplo 4.1.2 Consideremos três sucessões de funções $f_n, g_n, h_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \sin(ny) \\ g_n(x, y) &= \cos(nx) \\ h_n(x, y) &= \sin(n(x-y)). \end{aligned}$$

Vamos ver que estas três sucessões convergem fracamente para zero:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f_n(x, y) dy dx &= \int_a^b \int_c^d \sin(ny) dy dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_a^b \int_{nc}^{nd} \sin z dz dx = \frac{1}{n} \int_a^b (\cos(nc) - \cos(nd)) dx = \\ &= \frac{b-a}{n} (\cos(nc) - \cos(nd)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b \int_c^d f_n(x, y) dy dx \right| = 0.$$

O raciocínio é análogo para $g_n(x, y)$.

Demonstremos agora que $h_n \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d h_n(x, y) dy dx &= \int_a^b \int_c^d \operatorname{sen}(n(x-y)) dy dx = \\ &= -\frac{1}{n} \int_a^b \int_c^d -n \operatorname{sen}(n(x-y)) dy dx = \\ &= -\frac{1}{n} \int_a^b [-\cos(n(x-y))]_c^d dx = \\ &= -\frac{1}{n} \int_a^b (-\cos(n(x-d)) + \cos(n(x-c))) dx = \\ &= -\frac{1}{n} \frac{1}{n} \int_a^b n \cos(n(x-c)) - n \cos(n(x-d)) dx = \\ &= -\frac{1}{n^2} [\operatorname{sen}(n(x-c))]_a^b + \frac{1}{n^2} [\operatorname{sen}(n(x-d))]_a^b \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(u, v, w) = uvw$.

Neste caso, usando fórmulas trigonométricas,

$$\begin{aligned} F(f_n, g_n, h_n) &= \operatorname{sen}(ny) \cos(nx) \operatorname{sen}(n(x-y)) = \\ &= \operatorname{sen}(ny) \cos(nx) \operatorname{sen}(nx) \cos(ny) - \operatorname{sen}(ny) \cos(nx) \cos(nx) \operatorname{sen}(ny) = \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2ny) \operatorname{sen}(2nx) - \operatorname{sen}^2(ny) \cos^2(nx). \end{aligned}$$

Como na última igualdade as variáveis estão separadas e pelo que vimos no exemplo 4.1.1

$$\begin{aligned} \int_c^d \operatorname{sen}(2ny) dy &\rightarrow 0, & \int_c^d \operatorname{sen}^2(ny) dy &\rightarrow \frac{d-c}{2} \text{ e} \\ \int_c^d \cos^2(nx) dx &= \int_c^d (1 - \operatorname{sen}^2(nx)) dx &\rightarrow d-c - \frac{d-c}{2} = \frac{d-c}{2}. \end{aligned}$$

Logo

$$F(f_n, g_n, h_n) \rightarrow \frac{1}{4}.$$

No entanto, $F(0, 0, 0) = 0$, e mais uma vez $F(f_n, g_n, h_n)$ não converge fracamente para $F(0, 0, 0)$.

Os exemplos examinados acima, mostram que existe algo de especial com as sucessões altamente oscilantes, quando a convergência é apenas fraca e não forte.

Em termos gerais o problema que se coloca é o seguinte:

Suponha que $f_n \xrightarrow{*} f$ em $L^\infty(\Omega)$ tal que $\|f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C < \infty$, e seja φ uma função contínua. A sucessão $(\varphi(f_n))$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega)$. Logo podemos extrair uma subsucessão fracamente* convergente em $L^\infty(\Omega)$, isto é,

$$\varphi(f_n) \xrightarrow{*} g \quad \text{em } L^\infty(\Omega).$$

A pergunta que se coloca é: o que é g ?

A resposta não é $\varphi(f)$ como elucidam os exemplos atrás.

As medidas parametrizadas vêm responder-nos a esta questão.

Definição 4.1.3 Uma *medida parametrizada* ou *medida de Young* é uma família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ associada a uma sucessão de funções $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

1. $\text{supt}(\nu_x) \subseteq \mathbb{R}^m$;
2. ν_x depende mensuravelmente de $x \in \Omega$, o que significa que para toda a função contínua $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$x \mapsto \bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = \langle \varphi, \nu_x \rangle \quad (4.1)$$

é mensurável;

3. sempre que $(\varphi(f_n))_n$ converge fracamente* em $L^\infty(\Omega)$ (ou mais geralmente, fracamente nalgum $L^p(\Omega)$), o seu limite fraco pode ser identificado com a função $\bar{\varphi}$ em (4.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi(f_n) h(x) dx = \int_{\Omega} h(x) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx, \quad (4.2)$$

para todo $h \in L^1(\Omega)$.

A condição 3 é a chamada *propriedade fundamental da medida parametrizada*.

Intuitivamente, a medida parametrizada dá-nos a distribuição de probabilidade limite, dos valores de (f_n) quando os pontos são tomados aleatoriamente em Ω . Uma forma precisa de exprimir esta ideia é a seguinte:

seja $f_n : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e seja $B_r(x)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $x \in \Omega$. Para todo o subconjunto mensurável $E \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\nu_x(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{med}(\{y \in B_r(x) : f_n(y) \in E\})}{\text{med}(B_r(x))}.$$

Vamos observar outros exemplos.

Exemplo 4.1.4 Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x_1, x_2) = \int_0^{x_1+x_2} \chi_{\frac{3}{4}}(s) ds,$$

onde $\chi_{\frac{3}{4}}$ é a função característica do intervalo $]0, \frac{3}{4}[\subset]0, 1[$ extendida por periodicidade a todo o \mathbb{R} . Seja $\bar{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\bar{u}(x) = (g(x), g(x))$ com $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $u_n(x) = \frac{1}{n} \bar{u}(nx)$. Se calcularmos os gradientes destas funções, obtemos

$$\nabla u_n(x) = \frac{1}{n} \nabla \bar{u}(nx) = \chi_{\frac{3}{4}}(n(x_1 + x_2))(1, 1) \otimes (1, 1),$$

ou mais explicitamente

$$\nabla u_n(x) = \chi_{\frac{3}{4}}(n(x_1 + x_2)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{se } 0 < n(x_1 + x_2) - \langle n(x_1 + x_2) \rangle < \frac{3}{4} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } \frac{3}{4} < n(x_1 + x_2) - \langle n(x_1 + x_2) \rangle < 1. \end{cases}$$

Estamos interessados em determinar a medida parametrizada associada a esta sucessão de gradientes. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Certamente, se $E \subseteq \mathbb{M}^{2 \times 2}$ não contém nem A nem O então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{med}(\{y \in B_r(x) : \nabla u_n(y) \in E\})}{\text{med}(B_r(x))} = 0,$$

o que significa que ν_x está concentrada em A e O e

$$\nu_x = \lambda(x)\delta_A + (1 - \lambda(x))\delta_0 \quad \lambda(x) \in [0, 1].$$

Além disso, se pensarmos como os valores do gradiente estão distribuídos por A e O ,

$$\lambda(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{med}(\{y \in B_r(x) : \nabla u_n(y) = A\})}{\text{med}(B_r(x))} = \frac{3}{4},$$

independentemente de $x \in \Omega$. Assim,

$$\nu = \frac{3}{4}\delta_A + \frac{1}{4}\delta_0.$$

Para toda a função contínua $\varphi : \mathbb{M}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ temos

$$\varphi(\nabla u_n) \xrightarrow{*} \frac{3}{4}\varphi(A) + \frac{1}{4}\varphi(O) = \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) = \langle \varphi, \nu \rangle \text{ em } L^\infty(\Omega). \quad (4.3)$$

Vamos continuar com o seguinte exemplo,

Exemplo 4.1.5 Consideremos $\varphi_0(F) = |F|^2$ para $F \in \mathbb{M}^{2 \times 2}$. Então

$$\varphi_0(\nabla u_n) = |\nabla u_n|^2 = \begin{cases} 4 & \text{se } 0 < n(x_1 + x_2) - \langle n(x_1 + x_2) \rangle < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{se } \frac{3}{4} < n(x_1 + x_2) - \langle n(x_1 + x_2) \rangle < 1. \end{cases}$$

Sabemos que a sucessão de gradientes (∇u_n) converge fracamente* em $L^\infty(\Omega)$ para $\nabla u = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}O = \frac{3}{4}A$. Basta para isso tomar φ igual à função identidade em (4.3).

Como φ_0 é convexa pela desigualdade de Jensen

$$\int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} |F|^2 d\nu(F) \geq \left| \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} F d\nu(F) \right|^2,$$

que nesse caso é

$$\frac{3}{4} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right|^2 \geq \left| \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right|^2.$$

Por (4.3) aplicado a φ_0 esta desigualdade é exactamente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

ou seja, temos a propriedade de s.c.i.f..

4.1.2 Existência de medidas de Young

Nas próximas secções vamos supor f coerciva, isto é,

$$f(F) \geq c|F|^p - 1, \quad \forall F \in M^{m \times n}, \text{ para algum } p > 1 \text{ e } c > 0.$$

Como já foi dito, a propriedade fundamental (4.2) das medidas parametrizadas dá-nos uma maneira de representar e manipular o limite de integrais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx.$$

O principal objectivo agora é, determinar sob que condições podemos realmente representar limites de integrais, do tipo acima, por medidas parametrizadas.

Teorema 4.1.6 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e sejam $z_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções mensuráveis tais que*

$$\sup_n \int_{\Omega} g(|z_n(x)|) dx < +\infty, \quad (4.4)$$

onde $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função contínua crescente tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$.

Então existe uma subsucessão e uma família de medidas de probabilidade, $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ (a medida parametrizada associada), dependendo mensuravelmente de x , com a propriedade que sempre que a sucessão $\{\psi(x, z_n(x))\}$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega)$ qualquer que seja a função Carathéodory $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o seu limite fraco é a função $\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$.

Um exemplo particular importante é obtido tomando $g(t) = t^p$ para $p \geq 1$. Neste caso, toda a sucessão limitada em $L^p(\Omega)$ contém uma subsucessão que gera uma medida parametrizada no sentido do teorema 4.1.6.

Antes de demonstrarmos o teorema vamos demonstrar um resultado que nos será útil.

Lema 4.1.7 *Seja (f_n) uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$,*

$$\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq C < \infty.$$

A sucessão é fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega)$ se e só se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_n \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n(x)| dx \right) = 0.$$

Demonstração:

Tendo em conta que $\frac{|f_n|}{k} \geq 1$ e $\{|f_n| \geq k\} \subseteq \Omega$, podemos escrever

$$\text{med}(\{|f_n| \geq k\}) = \int_{\{|f_n| \geq k\}} 1 dx \leq \int_{\{|f_n| \geq k\}} \frac{|f_n(x)|}{k} dx \leq \int_{\Omega} \frac{|f_n(x)|}{k} dx \leq \frac{C}{k}.$$

Assim, para k suficientemente grande $\text{med}(\{|f_n| \geq k\})$ é uniformemente pequeno em n , e por equi-integrabilidade

$$\int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n(x)| dx \leq \varepsilon,$$

para qualquer n , e k suficientemente grande. Logo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_n \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n(x)| dx \right) = 0.$$

Reciprocamente, se o limite acima é zero, fixado um $\varepsilon > 0$ podemos encontrar k_0 tal que

$$\int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo n , e $k \geq k_0$. Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2k_0}$.

Se $E \subseteq \Omega$ e $\text{med}E < \delta$

$$\int_E |f_n(x)| dx = \int_{E \cap \{|f_n| < k_0\}} |f_n(x)| dx + \int_{E \cap \{|f_n| \geq k_0\}} |f_n(x)| dx \leq k_0 \text{med}E + \frac{\varepsilon}{2} < k_0 \frac{\varepsilon}{2k_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo (f_n) é equi-integrável. ■

Necessitamos de dar algumas noções básicas de espaços L^p quando o espaço imagem para as funções é um espaço de Banach X com dual X' . Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ escrevemos

$$L^p(\Omega, X) = \left\{ f : \Omega \rightarrow X : f \text{ é fortemente mensurável e } \int_{\Omega} \|f(x)\|_X^p dx < +\infty \right\}.$$

Uma função f diz-se fortemente mensurável se existe uma sucessão de funções mensuráveis simples (f_n) tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.s. e

$$\int_{\Omega} \|f_n(x) - f_k(x)\|_X^p dx \rightarrow 0, \text{ quando } n, k \rightarrow +\infty.$$

Escrevemos

$$L_w^p(\Omega, X) = \left\{ \begin{array}{l} f : \Omega \rightarrow X : f \text{ é fracamente mensurável, } \|f(x)\|_X \text{ é uma função mensurável de } x \\ \text{e } \int_{\Omega} \|f(x)\|_X^p dx < +\infty \end{array} \right\}.$$

Da mesma forma,

$$L_w^{p*}(\Omega, X') = \left\{ \begin{array}{l} f : \Omega \rightarrow X' : f \text{ é fracamente* mensurável, } \|f(x)\|_{X'} \text{ é uma função mensurável de } x \\ \text{e } \int_{\Omega} \|f(x)\|_{X'}^p dx < +\infty \end{array} \right\}.$$

Nota 4.1.8 $L^p(\Omega, X)$, $L_w^p(\Omega, X)$ e $L_w^{p*}(\Omega, X')$ são espaços de Banach sob a norma L^p .

Teorema 4.1.9 *Seja X um espaço de Banach separável com dual X' . Então*

$$(L^p(\Omega, X))' = L_w^{q*}(\Omega, X') \quad 1 \leq p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

sob a dualidade

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \langle f(x), g(x) \rangle dx$$

onde $f \in L^p(\Omega, X)$ e $g \in L_w^{q*}(\Omega, X')$.

Demonstração: [ver [Ed], teorema 8.20.5.]

Nós estamos interessados apenas no caso particular

$$\begin{aligned} X &= C_0(\mathbb{R}^m) = \left\{ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0 \right\} \\ X' &= \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) = \{ \text{medidas de Radon, limitadas em } \mathbb{R}^m \}. \end{aligned}$$

Neste caso temos a dualidade

$$[L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^m))] = L_w^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)).$$

Demonstração do teorema 4.1.6:

Vamos dividir a demonstração em várias partes:

1- Existência de ν .

O espaço vectorial

$$C_0(\mathbb{R}^m) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^m) : \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0 \right\}$$

é um espaço de Banach sob a norma do supremo. O seu dual é o espaço das medidas de Radon suportadas em \mathbb{R}^m , denotado por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, com a norma dual da variação limitada. Como $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ é separável, temos de acordo com as afirmações acima

$$[L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))]^\prime = L_{w^*}^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$$

sob a dualidade

$$\langle \psi, \mu \rangle = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) dx$$

para $\psi \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$ e $\mu \in L_{w^*}^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$.

A norma em $L_{w^*}^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ é

$$\|\mu\| = \sup_{x \in \Omega} \|\mu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)}.$$

Para cada n , definimos $\nu_n \in L_{w^*}^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$, através da identificação $\nu_n(x) = \delta_{z_n(x)}$. Para $\psi \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$

$$\langle \psi, \nu_n \rangle = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\delta_{z_n(x)}(\lambda) dx = \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx.$$

Sabemos que

$$\|\nu_n\| = \sup_{x \in \Omega} \|\nu_n\| = 1, \text{ para qualquer } n.$$

Pelo teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki (2.8.13) existe uma subsucessão, e $\nu \in L_{w^*}^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m))$ tal que $\nu_n \xrightarrow{*} \nu$, ou seja, $\langle \psi, \nu_n \rangle \rightarrow \langle \psi, \nu \rangle$ para qualquer $\psi \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx, \quad (4.5)$$

para qualquer $\psi \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$.

2- Alguns preliminares

Seja ψ uma função Carathéodory não negativa tal que $\{\psi(x, z_n(x))\}$ converge fracamente em $L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$. Pelo lema 4.1.7

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{\{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}} \psi(x, z_n(x)) dx = 0. \quad (4.6)$$

Por outro lado como g é crescente e não negativa, se $|z_n(x)| \geq k$ então $g(|z_n(x)|) \geq g(k)$, vindo

$$\int_{\Omega} g(|z_n(x)|) dx \geq \int_{\Omega} g(k) dx = \text{med } \Omega g(k) \geq \sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq k\}) g(k) \quad \forall n.$$

Logo

$$\sup_n \int_{\Omega} g(|z_n(x)|) dx \geq \sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq k\}) g(k).$$

Mas $\sup_n \int_{\Omega} g(|z_n(x)|) dx < +\infty$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = +\infty$, por hipótese, logo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq k\}) = 0.$$

Assim, podemos escolher $m_k \geq k$ de modo que

$$\sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq m_k\}) \leq \frac{1}{k^2},$$

resultando

$$k \sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq m_k\}) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (4.7)$$

Finalmente, sejam θ^k funções auxiliares definidas para $t \in \mathbb{R}$ por

$$\theta^k(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq k \\ 1 - |t| + k & k \leq |t| \leq k + 1 \\ 0 & |t| \geq k + 1 \end{cases}$$

e $\psi^k(x, \lambda) = \theta^k(|\lambda|)\theta^k(\psi(x, \lambda))\psi(x, \lambda)$.

Vamos ver que se verificam as seguintes propriedades:

- i) $\psi^k = \psi$ se $\psi \leq k$ e $|\lambda| \leq k$;
- ii) $\psi^k \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$ para qualquer k ;
- iii) $0 \leq \psi^k \leq \psi$ para qualquer k ; uma vez que $0 \leq \theta^k \leq 1 \quad \forall k$;
- iv) (ψ^k) é uma sucessão crescente;
- v) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k = \psi$ pontualmente.

A condição i) verifica-se pois se $\psi \leq k$ e $|\lambda| \leq k$ então $\theta^k(|\lambda|) = \theta^k(\psi(x, \lambda)) = 1$ logo $\psi^k(x, \lambda) = \psi(x, \lambda)$.

A condição ii) é imediata.

Como $0 \leq \theta^k \leq 1 \quad \forall k$ então temos iii).

Para justificar iv), basta observar que θ^k é crescente e ψ é não-negativa.

Tendo em conta que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x, \lambda) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \theta^k(|\lambda|)\theta^k(\psi(x, \lambda))\psi(x, \lambda)$$

e, como a sucessão (θ^k) converge para 1 pontualmente, vem

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi^k(x, \lambda) = \psi(x, \lambda),$$

obtendo-se v).

Passo 3- Extensão de (4.5)

Gostaríamos de concluir que (4.5) é verdadeira sob as hipóteses do passo 2. Consideremos então

$$\gamma_{n,k} = \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) - \psi(x, z_n(x)) dx.$$

Observe-se que se $|z_n| \leq m_k$ e $\psi(x, z_n(x)) \leq m_k$ então por i) $\psi^{m_k} = \psi$ logo

$$\int_{\{|z_n| \leq m_k \text{ e } \psi(x, z_n(x)) \leq m_k\}} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) - \psi(x, z_n(x)) dx = 0,$$

e como para $|z_n| \geq m_k$ ou $\psi(x, z_n(x)) \geq m_k$, podemos afirmar que $\psi^{m_k} \leq C\psi$ para algum $C \in]0, 1[$, então

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}| &\leq (C-1) \int_{\{|z_n| \geq m_k\} \cup \{\psi(x, z_n(x)) \geq m_k\}} \psi(x, z_n(x)) dx \leq \\ &\leq (C-1) \int_{\{|z_n| \geq m_k\} \cup \{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}} \psi(x, z_n(x)) dx. \end{aligned}$$

A última igualdade resulta de $m_k \geq k$ pois nesse caso $\{\psi(x, z_n(x)) \geq m_k\} \subseteq \{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}$.

Observe que $\{|z_n| \geq m_k\} \cup \{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}$ pode-se escrever como união disjunta dos conjuntos $\{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}$ e $\{|z_n| \geq m_k\} \cap \{\psi(x, z_n(x)) < k\}$ logo temos

$$\begin{aligned} |\gamma_{n,k}| &\leq (C-1) \int_{\{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}} \psi(x, z_n(x)) dx + (C-1) \int_{\{|z_n| \geq m_k\} \cap \{\psi(x, z_n(x)) < k\}} \psi(x, z_n(x)) dx \leq \\ &\leq (C-1) \sup_n \int_{\{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}} \psi(x, z_n(x)) dx + (C-1) \int_{\{|z_n| \geq m_k\}} k dx < \\ &< (C-1) \sup_n \int_{\{\psi(x, z_n(x)) \geq k\}} \psi(x, z_n(x)) dx + (C-1) k \sup_n \text{med}(\{|z_n| \geq m_k\}). \end{aligned}$$

Por (4.6) e (4.7) temos $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\gamma_{n,k}| = 0$, isto é,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx \quad (4.8)$$

uniformemente em n .

Assim,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx, \quad (4.9)$$

isto é,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx.$$

Com efeito,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : m_k \geq k \implies \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx \right| < \varepsilon,$$

como o limite em (4.8) é uniforme em n então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx - \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx \right| = \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi^{m_k}(x, z_n(x)) dx - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx \right| < \varepsilon,$$

logo concluímos (4.9).

Como $\psi^{m_k} \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m))$ para todo k , por (4.5)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \psi^{m_k}(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx.$$

Tendo em conta iv) podemos aplicar o teorema da convergência monótona ao 2º membro da igualdade precedente e concluímos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx.$$

Passo 4- Conclusão

Se retirarmos a condição de não-negatividade para ψ , podemos separar ψ em partes positivas e negativas, $\psi^+ = \sup\{\psi, 0\}$, $\psi^- = \sup\{-\psi, 0\}$ e aplicar os passos 2 e 3 a estas funções não esquecendo que a convergência fraca em $L^1(\Omega)$ implica a equi-integrabilidade da sucessão $(|\psi(x, z_n(x))|)$ e logo a equi-integrabilidade de ψ^+ e ψ^- . Note que $\psi = \psi^+ - \psi^-$ e $|\psi| = \psi^+ + \psi^-$.

Para $\xi \in L^\infty(\Omega)$ podemos tomar $\varphi(x, \lambda) = \xi(x)\psi(x, \lambda)$ de modo que φ seja uma função Carathéodory e em seguida aplica-se os argumentos precedentes.

Observe que, como a sucessão $(\psi(x, z_n(x)))$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$, o mesmo podemos dizer da sucessão $(\xi(x)\psi(x, z_n(x)))$.

Assim, (4.5) verifica-se para φ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \xi(x)\psi(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \xi(x)\psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx \quad \forall \xi \in L^\infty(\Omega),$$

logo

$$\psi(x, z_n(x)) \rightharpoonup \bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Para concluir vamos verificar que para quase todo $x \in \Omega$, ν_x é uma medida de probabilidade.

Pela *s.c.i.f.* da norma temos

$$\|\nu\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\delta_{z_n}\| = 1,$$

logo $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)} \leq 1$ para quase todo $x \in \Omega$. Se tomarmos em particular $\psi = \chi_{B_R}(x)$, em (4.5), onde B_R designa a bola de raio R , centrada na origem, então

$$\int_{B_R \cap \Omega} \int_{\mathbb{R}^m} 1 d\nu_x(\lambda) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_R \cap \Omega} 1 dx = \text{med}(B_R \cap \Omega).$$

Assim,

$$\text{med}(B_R \cap \Omega) = \int_{B_R \cap \Omega} \int_{\mathbb{R}^m} 1 d\nu_x(\lambda) dx \leq \int_{B_R \cap \Omega} \|\nu_x\| dx \leq \text{med}(B_R \cap \Omega).$$

Logo $\|\nu_x\| = 1$ para quase todo o $x \in \Omega$, como se pretendia. ■

Uma observação importante a ter em conta é que, quando pretendemos identificar a medida parametrizada associada a uma particular sucessão de funções (z_n) , é suficiente obter $\varphi(z_n) \xrightarrow{*} \bar{\varphi}$ em $L^\infty(\Omega)$, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ onde como usual

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda).$$

É igualmente suficiente ter

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \xi(x)\varphi(z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \xi(x) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx \quad (4.10)$$

para ξ e φ pertencendo a subconjuntos densos contáveis de $L^1(\Omega)$ e $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, respectivamente. Se isto se verifica para uma dada família de medidas de probabilidade $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ e (z_n) satisfaz (4.4) então ν é a medida parametrizada associada a (z_n) e além disso

$$\psi(x, z_n(x)) \rightharpoonup \bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda),$$

para toda a função Carathéodory ψ tal que $(\psi(x, z_n(x)))$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega)$. A razão para isto suceder é que medidas de probabilidade ν são identificadas pela sua acção em $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$. A igualdade (4.10) identifica cada ν_x para quase todo $x \in \Omega$.

Existem duas situações interessantes onde esta nota terá alguma relevância para nós. Para referência, incluímo-las no seguinte lema.

Lema 4.1.10 *Suponha que temos duas sucessões, (z_n) e (w_n) , ambas limitadas em $L^p(\Omega)$.*

1. *Se $|\{z_n \neq w_n\}| \rightarrow 0$, a medida parametrizada para ambas as sucessões é a mesma.*
2. *Se $\|z_n - w_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$, (z_n) e (w_n) possuem a mesma medida parametrizada.*

Demonstração:

1- Seja $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ e $\xi \in L^1(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \xi(x) \varphi(z_n(x)) dx - \int_{\Omega} \xi(x) \varphi(w_n(x)) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\xi(x)| |\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x))| dx \leq \\ &\leq \int_{\{z_n \neq w_n\}} 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} |\xi(x)| dx. \end{aligned}$$

A integranda no lado direito é uma função $L^1(\Omega)$ e é integrada sobre uma sucessão de conjuntos cuja medida tende para zero. Logo o limite quando $n \rightarrow +\infty$ é nulo e isto implica que os limites fracos para $(\varphi(z_n))$ e $(\varphi(w_n))$ são os mesmos. Pela nota, vimos que basta conhecer o limite fraco para obter ν , logo as sucessões compartilham a mesma medida parametrizada.

2- Fazendo a estimativa

$$|\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x))| \leq |\varphi(z_n(x))| + |\varphi(w_n(x))| \leq 2 \|\varphi\|_{L^\infty} \text{ quase sempre em } \Omega$$

e aplicando o teorema da convergência dominada vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \xi(x) (\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x))) dx = \int_{\Omega} \xi(x) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x)))$$

para $\xi \in L^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Como (z_n) e (w_n) são sucessões limitadas em $L^p(\Omega)$ então podemos extrair subsucessões convergentes. Tendo em conta a convergência da norma podemos garantir que tais subsucessões convergem fortemente e para o mesmo limite, logo convergem quase-sempre. Assim, atendendo à continuidade de φ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x))) = 0$. Concluimos então que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \xi(x) (\varphi(z_n(x)) - \varphi(w_n(x))) dx = 0,$$

ou seja, os limites fracos de $\varphi(z_n)$ e $\varphi(w_n)$ coincidem, logo (z_n) e (w_n) possuem a mesma medida parametrizada. ■

Suponhamos agora que a sucessão $(f(\nabla u_n))$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega)$, onde (u_n) é uma sucessão minimizante para o funcional I , tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} f(A) d\nu_x(A) dx. \quad (4.11)$$

Aqui $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ é a medida parametrizada associada à sucessão $\{z_n = \nabla u_n\}$ que é limitada em $L^p(\Omega)$ devido à coercividade de f .

Como

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} A d\nu_x(A)$$

é o limite fraco de (∇u_n) tomando $\psi(x, \lambda) = \lambda$ no teorema 4.1.6, a propriedade de *s.c.i.f.* verificar-se-á se

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} f(A) d\nu_x(A) dx \geq \int_{\Omega} f \left(\int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} A d\nu_x(A) \right) dx. \quad (4.12)$$

A suposição que fizemos – $(f(\nabla u_n))$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega)$ – não é sempre verdadeira. O próximo resultado diz-nos que mesmo que a igualdade (4.11) não se verifique, a desigualdade

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} f(A) d\nu_x(A) \geq \int_{\Omega} f \left(\int_{\mathbb{M}^{2 \times 2}} A d\nu_x(A) \right) dx, \quad (4.13)$$

é sempre verdadeira.

4.1.3 Semi-continuidade inferior fraca

Teorema 4.1.11 *Se (z_n) é uma sucessão de funções mensuráveis, tendo uma medida parametrizada associada $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$, e seja ψ uma função coerciva*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E \psi(x, z_n(x)) dx \geq \int_E \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx, \quad (4.14)$$

para toda a função Carathéodory ψ , limitada inferiormente, e todo o subconjunto mensurável $E \subseteq \Omega$.

Em conclusão, se f verifica a desigualdade de coercividade e (4.12) para toda a medida parametrizada ν associada à sucessão limitada de gradientes em $W^{1,p}(\Omega)$, então

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(\nabla u_n(x)) dx \geq \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) dx,$$

sempre que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.

Antes de demonstrarmos este resultado é necessário apresentar mais uma noção de convergência e relacioná-la com a convergência fraca.

Sempre que uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$ não é equi-integrável, podemos “retirar” o conjunto onde as concentrações ocorrem e transformá-la numa sucessão bem comportada. Isto é essencialmente o que o denominado lema das mordidelas de Chacon nos diz.

Teorema 4.1.12 (Lema de Chacon) *Seja (f_n) uma sucessão uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$,*

$$\sup_n \|f_n\|_{L^1(\Omega)} = C < \infty.$$

Então existe uma subsucessão de (f_n) , uma sucessão decrescente de conjuntos mensuráveis $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\text{med } \Omega_i \searrow 0$ e $f \in L^1(\Omega)$ tais que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em } L^1(\Omega \setminus \Omega_i) \quad \text{para qualquer } i.$$

Demonstração:

Para $n, k \in \mathbb{N}$ seja

$$\alpha_{n,k} = \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n| dx \geq 0.$$

Note que a sucessão $\left(\sup_n \alpha_{n,k}\right)$ é monótona decrescente. Com efeito, se $k_1 \geq k_2$ então $\{|f_n| \geq k_1\} \subseteq \{|f_n| \geq k_2\}$, logo

$$\alpha_{n,k_1} = \int_{\{|f_n| \geq k_1\}} |f_n(x)| dx \leq \int_{\{|f_n| \geq k_2\}} |f_n(x)| dx = \alpha_{n,k_2}.$$

A sucessão é monótona decrescente e limitada inferiormente logo, existe limite em k de $(\alpha_{n,k})$.

Seja $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \alpha_{n,k} \geq 0$.

Se $L = 0$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_n \int_{\{|f_n| \geq k\}} |f_n(x)| dx \right) = 0$$

e pelo lema 4.1.7 concluímos que existe uma subsucessão fracamente convergente logo consideramos $\Omega_i = \emptyset$.

Suponhamos agora que $L > 0$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, pela definição de supremo sabemos que existe n_m tal que

$$\alpha_{n_m, 2^m} \geq \sup_n \alpha_{n, 2^m} - \frac{1}{m},$$

e como a sucessão $(\alpha_{n, 2^m})$ é decrescente em n , tem-se

$$\alpha_{n_m, 2^m} \geq L - \frac{1}{m}. \quad (4.15)$$

Como $\{r \leq |f_{n_m}| < 2^m\} \subseteq \{|f_{n_m}| \geq r\}$ então

$$\sup_m \int_{\{r \leq |f_{n_m}| < 2^m\}} |f_{n_m}(x)| dx \leq \sup_m \alpha_{n_m, r},$$

logo também existe limite

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_m \int_{\{r \leq |f_{n_m}| < 2^m\}} |f_{n_m}(x)| dx = L' \geq 0$$

e em particular existe uma subsucessão $m(r)$ para r suficientemente grande, tal que

$$\int_{\{r \leq |f_{n_m(r)}| < 2^{m(r)}\}} |f_{n_m(r)}(x)| dx \geq \frac{L'}{2}.$$

Finalmente tendo em conta a monotonia de $\left(\sup_n \alpha_{n, k}\right)$,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_n \alpha_{n, r} \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_m \alpha_{n_m, r} \geq \lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_{n_m(r), r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\int_{\{r \leq |f_{n_m(r)}| < 2^{m(r)}\}} |f_{n_m(r)}(x)| dx + \int_{\{|f_{n_m(r)}| \geq 2^{m(r)}\}} |f_{n_m(r)}(x)| dx \right) \geq \\ &\geq \frac{L'}{2} + \lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha_{n_m(r), 2^{m(r)}} \underset{\text{por (4.15)}}{\geq} \frac{L'}{2} + L. \end{aligned}$$

Assim, $L' = 0$, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\sup_m \int_{\{r \leq |f_{n_m}| < 2^m\}} |f_{n_m}(x)| dx \right) = 0 \quad (4.16)$$

Defina-se o conjunto Ω_i por

$$\Omega_i = \bigcup_{m=i}^{+\infty} \{|f_{n_m}| \geq 2^m\} \subseteq \Omega.$$

As seguintes propriedades verificam-se:

1. $\Omega_{i+1} \subseteq \Omega_i$ para todo i ;
 $\Omega_{i+1} = \bigcup_{m=i+1}^{+\infty} \{|f_{n_m}| \geq 2^m\} \subseteq \{|f_{n_i}| \geq 2^i\} \cup \bigcup_{m=i+1}^{+\infty} \{|f_{n_m}| \geq 2^m\}.$

2. $\text{med} \Omega_i \searrow 0$:

Ora

$$2^m \text{med}(\{|f_{n_m}| \geq 2^m\}) \leq \int_{\{|f_{n_m}| \geq 2^m\}} |f_{n_m}(x)| dx \leq C,$$

logo

$$\text{med } \Omega_i \leq \sum_{m=i}^{+\infty} \text{med}(\{|f_{n_m}| \geq 2^m\}) \leq C \sum_{m=i}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = C \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

Logo

$$\text{med } \Omega_i \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

como o último termo da desigualdade tende para zero quando $i \rightarrow +\infty$, vem $\text{med } \Omega_i \rightarrow 0$.

Para i fixo e tendo em conta (4.16),

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq i} \int_{\{r \leq |f_{n_m}|\} \setminus \Omega_i} |f_{j_m}(x)| dx \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{m \geq i} \int_{\{r \leq |f_{n_m}| < 2^m\}} |f_{n_m}(x)| dx = 0.$$

Pelo lema (4.1.7), a sucessão (f_{n_m}) é sequencialmente relativamente fracamente compacta em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$ para todo i .

A seguinte proposição técnica ajuda-nos a concluir a demonstração.

Proposição 4.1.13 *Seja (f_n) uma sucessão de funções limitada em $L^1(\Omega)$ tais que existem conjuntos $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\Omega_{i+1} \subseteq \Omega_i$, $\text{med } \Omega_i \searrow 0$. Suponha que (f_n) é sequencialmente fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$ para qualquer i . Então, existe uma subsucessão (f_{n_k}) e $f \in L^1(\Omega)$ tais que*

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{em } L^1(\Omega \setminus \Omega_i) \text{ para qualquer } i.$$

Demonstração:

Como f_n é sequencialmente fracamente relativamente compacta em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$ então podemos construir indutivamente uma sucessão decrescente (A_n) de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$ a sucessão $(f_{n,i})_{n \in A_i}$ converge em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$.

Pelo processo da diagonal podemos definir a aplicação φ tal que

$$\varphi(i) = \text{elemento } i + 1 \text{ de } A_i.$$

Como $\varphi(i+1)$ é estritamente superior ao elemento $i+1$ de A_{i+1} (elemento $i+2$ de A_{i+1} é menor que elemento $i+1$ de A_{i+1}) que por sua vez é superior ao elemento $i+1$ de A_i que é $\varphi(i)$. Logo φ é estritamente crescente. Além disso, para $i \in \mathbb{N}$ a subsucessão $(f_{\varphi(n),i})_{n \geq i}$ é uma subsucessão da sucessão $(f_{n,i})_{n \in A_i}$, porque se $n \geq i$, temos $\varphi(n) \in A_n \subseteq A_i$. Assim, a sucessão $(f_{\varphi(n),i})_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Como $\varphi(n)$ não depende de i obtemos o pretendido. ■

Definição 4.1.14 *A sucessão $(f_n) \subseteq L^1(\Omega)$ b-converge (ou seja, converge no sentido de biting) para $f \in L^1(\Omega)$ e denota-se por*

$$f_n \xrightarrow{b} f \quad \text{em } L^1(\Omega),$$

se existe uma sucessão decrescente de conjuntos mensuráveis (Ω_i) tais que $\text{med } \Omega_i \searrow 0$ e $f_n \rightharpoonup f$ em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$ para qualquer i .

Podemos reformular o lema de Chacon dizendo que uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$ contém uma subsucessão que b-converge para uma função em $L^1(\Omega)$.

A relação entre a b-convergência e as medidas parametrizadas é dada no seguinte teorema.

Teorema 4.1.15 *Seja (z_n) uma sucessão de funções com valores vectoriais e com medida parametrizada associada $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$.*

Se $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função Carathéodory tal que a sucessão $(\varphi(x, z_n(x)))$ é limitada em $L^1(\Omega)$, então, possivelmente para uma subsucessão,

$$\varphi(x, z_n(x)) \xrightarrow{b} \bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda). \quad (4.17)$$

Demonstração:

Pelo lema de Chacon, existe uma colecção de subconjuntos (Ω_i) e $\tilde{\varphi} \in L^1(\Omega)$ tais que $med \Omega_i \searrow 0$ e

$$\varphi(x, z_n(x)) \rightarrow \tilde{\varphi} \text{ em } L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$$

para qualquer i . Pelo teorema 4.1.6 sempre que se verifica a convergência fraca em $L^1(E)$ para todo o subconjunto $E \subseteq \Omega$, o limite fraco tem de ser $\bar{\varphi}$ em (4.17). Como $med \Omega_i \searrow 0$, concluímos que $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi}$ para quase todo $x \in \Omega$. ■

Nalgumas circunstâncias a b-convergência pode ser melhorada para a convergência fraca tal que medidas parametrizadas fornecerão limites fracos. O lema seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente para um tal melhoramento: b-convergência pode ser de facto convergência fraca.

Lema 4.1.16 *Seja $f_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ uma sucessão de funções em $L^1(\Omega)$, b-convergente para $f \in L^1(\Omega)$.*

Então, pelo menos uma subsucessão converge fracamente em $L^1(\Omega)$ para f se e só se

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (4.18)$$

Além disso, a própria sucessão (f_n) converge fracamente em $L^1(\Omega)$ para f se e só se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (4.19)$$

Demonstração:

Supondo a b-convergência da sucessão (f_n) e tendo em conta a equi-integrabilidade, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \Omega_i \subseteq \Omega \text{ mensurável } med \Omega_i < \delta \implies \int_{\Omega_i} |f_n(x)| dx < \varepsilon$$

temos

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f_n(x) dx + \int_{\Omega_i} f_n(x) dx.$$

Como $f_n \xrightarrow{b} f$ então $\int_{\Omega \setminus \Omega_i} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f(x) dx$ (para uma subsucessão de f_n), logo

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f(x) dx + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário e tomando $i \rightarrow +\infty$ temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Na implicação recíproca vamos ver que, supondo a b-convergência e a falha do critério de Dunford-Pettis (2.9.25) somos conduzidos à falha de (4.18).

Seja $(\Omega_i) \subseteq \Omega$ uma sucessão de subconjuntos associados à b -convergência tal que $\text{med } \Omega_i \searrow 0$, $\Omega_{i+1} \subseteq \Omega_i$ e

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^1(\Omega \setminus \Omega_i) \text{ para qualquer } i.$$

Por hipótese podemos assumir, trabalhando com subsucessões, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) dx < +\infty. \quad (4.20)$$

Suponha que nenhuma subsucessão converge fracamente em $L^1(\Omega)$. Pelo critério de Dunford-Pettis, então existe $\varepsilon > 0$ e uma subsucessão (k_n) tal que $\varepsilon \leq \int_{\Omega_i} f_{k_n}(x) dx$ para i suficientemente grande, porque fora de Ω_i temos convergência fraca.

Em particular, se $m > i$, como $f_{k_m} \geq 0$, tem-se $\varepsilon \leq \int_{\Omega_m} f_{k_m}(x) dx \leq \int_{\Omega_i} f_{k_m}(x) dx$ porque $\Omega_m \subseteq \Omega_i$, e para i fixo,

$$\int_{\Omega} f_{k_m}(x) dx = \int_{\Omega_i} f_{k_m}(x) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f_{k_m}(x) dx \geq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f_{k_m}(x) dx.$$

Finalmente tomando $m \rightarrow +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{k_m}(x) dx \geq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus \Omega_i} f(x) dx$$

pois $f_{k_m} \rightarrow f$ em $L^1(\Omega \setminus \Omega_i)$ para qualquer i , logo

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{k_m}(x) dx \geq \varepsilon + \int_{\Omega} f(x) dx$$

o que contradiz (4.20). ■

Corolário 4.1.17 *Seja (z_n) uma sucessão de funções com valores vectoriais com medida parametrizada associada $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$. Se para φ_0 , uma função Carathéodory não-negativa, temos*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi_0(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx < +\infty,$$

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi_0(x, z_n(x)) dx = \int_E \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx < +\infty,$$

para qualquer subconjunto mensurável $E \subseteq \Omega$ e para qualquer φ no espaço

$$\varepsilon^{\varphi_0} = \{\varphi, \text{funções Carathéodory, } |\varphi| \leq C(1 + \varphi_0)\}.$$

Demonstração:

Como $(\varphi_0(x, z_n(x)))$ é uma sucessão limitada em $L^1(\Omega)$, pelo teorema 4.1.15 podemos afirmar que existe uma subsucessão, não renomeada, $(\varphi_0(x, z_n(x)))$ que b -converge para $\overline{\varphi_0}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$.

Como

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi_0(x, z_n(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx < +\infty,$$

então pelo lema 4.1.16 podemos afirmar que existe uma subsucessão de $(\varphi_0(x, z_n(x)))$ que converge fracamente em $L^1(\Omega)$, logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi_0(x, z_n(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) \psi(x) dx$$

$\forall \psi \in L^\infty(\Omega)$.

Como $|\varphi| \leq C(1 + \varphi_0)$ então a sucessão $(\varphi(x, z_n(x)))$ também converge em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(x, z_n(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) \psi(x) dx$$

$\forall \psi \in L^\infty(\Omega)$.

Tomando em particular $\psi(x) = \chi_E(x)$ então vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi(x, z_n(x)) dx = \int_E \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx$$

para qualquer subconjunto mensurável $E \subseteq \Omega$. ■

Se após todos os esforços, o corolário 4.1.17 não puder ser aplicado para evitar as concentrações, podemos mesmo assim extrair alguma informação que poderá ser útil nalgumas circunstâncias. É o que nos diz o teorema 4.1.11.

Demonstração do teorema 4.1.11:

Se o lado esquerdo de (4.20) é infinito, nada temos a demonstrar. Se é finito, a sucessão $(\psi(x, z_n(x)))$ é limitada em $L^1(E)$.

Se considerarmos

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda)$$

então $\psi(x, z_n(x)) \xrightarrow{b} \bar{\psi}$ em $L^1(E)$.

Pelo lema 4.1.16 temos

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E \psi(x, z_n(x)) dx \leq \int_E \bar{\psi}(x) dx.$$
■

A desigualdade estrita (4.20) ocorre quando a sucessão $(\psi(x, z_n(x)))$ desenvolve concentrações. Neste sentido dizemos que a medida parametrizada não capta os efeitos de concentração.

No próximo resultado, vamos considerer a função integranda a depender apenas da variável gradiente e provar um resultado muito geral de *s.c.i.f.* para o funcional I .

Teorema 4.1.18 *Seja φ uma função contínua definida sobre matrizes e limitada inferiormente. Seja (u_n) uma sucessão de funções em $W^{1,p}(\Omega)$ convergindo fracamente em $W^{1,p}(\Omega)$ para u . Seja $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ a medida parametrizada associada a (∇u_n) , tal que*

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} A d\nu_x(A),$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_n(x)) dx < \infty$, então

$$\int_E \varphi(\nabla u(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi(\nabla u_n(x)) dx,$$

para todo o conjunto mensurável $E \subseteq \Omega$, se e só se

$$\varphi(\nabla u(x)) \leq \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \varphi(A) d\nu_x(A) \tag{4.21}$$

para quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração:

Utilizando primeiro o teorema 4.1.11 e seguidamente a desigualdade de Jensen (4.21) temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E \varphi(\nabla u(x)) dx &\geq \int_E \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \varphi(A) d\nu_x(A) dx \geq \\ &\geq \int_E \varphi(\nabla u(x)) dx. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $(\varphi(\nabla u_n))$ é uma sucessão uniformemente limitada em $L^1(\Omega)$, pelo lema de Chacon, existe uma sucessão $(\Omega_k)_k$ de conjuntos mensuráveis, $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$ e $med \Omega_k \searrow 0$ tal que

$$\varphi(\nabla v_n) \rightarrow \bar{\varphi} \text{ em } L^1(\Omega \setminus \Omega_k) \quad \forall k$$

onde

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \varphi(A) d\nu_x(A).$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus \Omega_k} \varphi(\nabla u(x)) dx &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E \setminus \Omega_k} \varphi(\nabla u_n(x)) dx = \\ &= \int_{E \setminus \Omega_k} \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \varphi(A) d\nu_x(A) dx = \\ &= \int_{E \setminus \Omega_k} \bar{\varphi}(x) dx. \end{aligned}$$

Pelo teorema 4.1.11, $\bar{\varphi} \in L^1(\Omega)$ e, por hipótese, e pela propriedade de *s.c.i.f.* $\varphi(\nabla u) \in L^1(\Omega)$. Assim, $med \Omega_k \searrow 0$, tomando o limite temos

$$\int_E \varphi(\nabla u(x)) dx \leq \int_E \bar{\varphi}(x) dx = \int_E \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \varphi(A) d\nu_x(A) dx.$$

A arbitrariedade de E leva-nos a concluir (4.21). ■

Existe um resultado análogo considerando a função integranda a depender também das variáveis x e u (ver [Pe2], teorema 3.2)

4.2 Quasiconvexidade e medidas parametrizadas gradiente homogêneas.

A restrição principal na função integranda f que assegura a *s.c.i.f.* é (4.12).

Esta desigualdade deve ser válida para todas as possíveis medidas parametrizadas geradas por gradientes de uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Como cada ν_x é uma medida de probabilidade, se f é convexa então (4.13) é certamente verdadeira (corresponde à desigualdade de Jensen). Em particular a *s.c.i.* verifica-se para toda a função integranda convexa. No entanto, como já afirmámos anteriormente, a convexidade de f não é uma condição necessária. O nosso objectivo nesta secção é explorar a condição (4.13).

Designamos por $W^{1,p}(\Omega)$ -medida de Young se é gerada como uma medida de Young correspondente a uma sucessão de gradientes (∇u_n) onde (u_n) é uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$. Se a medida de Young é tal que $\nu_x = \nu_0$ para quase todo o $x \in \Omega$ onde ν_0 é uma medida de probabilidade fixada, dizemos que ν é homogênea.

Proposição 4.2.1 *Seja $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ uma $W^{1,p}$ -medida de Young. Para quase todo $a \in \Omega$ e todo o domínio Q , existe uma sucessão limitada, $\{w_{a,j}\}$, em $W^{1,p}(Q)$ tal que a medida de Young associada a $\{\nabla w_{a,j}\}$ é ν_a , homogénea. Além disso cada função $w_{a,j}$ pode ser escolhida de modo a que $w_{a,j} - u_{F(a)} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ onde $u_F(x)$ é a função linear Fx e*

$$F(a) = \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} A d\nu_a(A).$$

Demonstração: [ver [Pe2], teorema 8.4.]

Devido a este resultado, faz sentido definir uma $W^{1,p}$ -medida de Young homogénea (não depende do domínio) como uma medida de probabilidade ν suportada no conjunto das matrizes $\mathbb{M}^{m \times n}$ tais que para todo o domínio $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ existe uma sucessão de gradientes (∇u_n) , onde (u_n) é uma sucessão limitada em $W^{1,p}(Q)$ gerando ν , e $u_n - u_F \in W_0^{1,p}(Q)$ onde F é o primeiro momento de ν .

Tem-se que se $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ é uma $W^{1,p}(\Omega)$ -medida de Young então, para quase todo o x , ν_x é uma $W^{1,p}$ -medida de Young homogénea.

Definição 4.2.2 *Dizemos que uma função $f : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é $W^{1,p}$ -quasiconvexa fechada se*

$$\int_{\mathbb{M}^{m \times n}} f(A) d\nu(A) \geq f\left(\int_{\mathbb{M}^{m \times n}} A d\nu(A)\right)$$

para todas as $W^{1,p}$ -medidas de Young homogéneas.

Note que esta definição traduz a desigualdade de Jensen para uma subclasse própria de medidas de probabilidade suportada no conjunto das matrizes $\mathbb{M}^{m \times n}$.

A conclusão das notas e definições precedentes é que a $W^{1,p}$ -quasiconvexidade fechada é uma condição suficiente (e necessária) para a obtenção de (4.13). Para uma função geral Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ a condição $W^{1,p}$ -quasiconvexidade fechada pode ser formulada da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{M}^{m \times n}} f(x, u, A) d\nu(A) \geq f(x, u, \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} A d\nu(a)), \quad (4.22)$$

para todo $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ e para toda a $W^{1,p}$ -medida parametrizada homogénea ν .

4.2.1 O caso $p = \infty$

Observámos nas secções anteriores que uma condição necessária e suficiente para a *s.c.i.f.* é uma propriedade de convexidade da função integranda, denominada na secção anterior por quasiconvexidade fechada.

Nesta secção, particularizando para $p = \infty$, vamos ver que a propriedade que obtemos é a usual condição de quasiconvexidade.

Seja u_F a função afim lipschitziana $u_F(x) = Fx$ para $x \in \Omega$. Para $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que $u - u_F \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ podemos construir uma família de medidas de probabilidade admissível em (4.13). Isto pode ser feito através do Lema de Riemann-Lebesgue que é um caso particular de uma homogenização geral. Antes de introduzir o lema precisamos de apresentar alguns resultados técnicos.

Definição 4.2.3 *Para um dado ponto $x \in \mathbb{R}^m$, uma sucessão de conjuntos $\{E_n\}$ **contraí-se suavemente** para x , se existe $\alpha > 0$ tal que cada $E_i \subseteq B(x, r_i)$, e $\text{med } E_i \geq \alpha \text{med}(B(x, r_i))$, onde $r_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$.*

Definição 4.2.4 *Uma família de subconjuntos abertos $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ diz-se uma **cobertura de Vitali** de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ se para todo $x \in \Omega$ existe uma subsucessão $\{A_i\}$ de subconjuntos da dada família que **contraí-se suavemente** para x .*

Lema 4.2.5 (da cobertura de Vitali) *Seja $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma cobertura de Vitali de Ω . Então existe uma sucessão $\lambda_i \in \Lambda$ tal que*

$$\text{med}(\Omega \setminus \bigcup_i A_{\lambda_i}) = 0$$

e os subconjuntos A_{λ_i} são disjuntos dois a dois.

Demonstração: [ver [Gu] teorema 3.1].

Apresentamos de seguida o lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 4.2.6 (de Riemann-Lebesgue) *Sejam Ω e D dois abertos limitados regulares em \mathbb{R}^n com $\text{med} \partial\Omega = \text{med} \partial D = 0$. Seja (z_j) uma sucessão de funções mensuráveis sobre Ω , tal que*

$$C = \sup_j \int_{\Omega} g(|z_j(x)|) dx < +\infty,$$

para g , contínua, crescente, não negativa com $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$.

Seja $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ a medida parametrizada associada a uma subsucessão ainda denotada (z_j) . Então existe uma sucessão (w_j) de funções mensuráveis definida sobre D tal que

$$\sup_j \int_D g(|w_j(x)|) dx < +\infty,$$

e a sua medida parametrizada é $\bar{\nu}$, homogénea, dada por

$$\langle \bar{\nu}, \varphi \rangle = \frac{1}{\text{med} \Omega} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx.$$

Demonstração:

Vamos ver que a família de subconjuntos de D dada por

$$\mathcal{A}_j = \left\{ a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega} : a \in D, \varepsilon \leq \frac{1}{j} \right\}$$

é uma cobertura de Vitali de D .

Como Ω é limitado então $a + \varepsilon \bar{\Omega}$ também é limitado logo existe $r_j > 0$ tal que $a + \varepsilon \bar{\Omega} \subseteq B(a, r_j)$ para cada $a \in D$.

Fixado $\varepsilon \leq \frac{1}{j}$, como Ω é limitado então $a + \varepsilon \bar{\Omega}$ também é limitado logo existe $r_j > 0$ tal que $a + \varepsilon \bar{\Omega} \subseteq B(a, r_j)$. Tomando $\alpha \leq \frac{\varepsilon^n \text{med} \Omega}{\text{med} B(x, r_j)}$ conclui-se que \mathcal{A}_j é uma cobertura de Vitali.

Então pelo teorema da cobertura de Vitali existe uma sucessão de conjuntos $\{a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega}\}$, $\varepsilon_{ij} \leq \frac{1}{j}$, disjuntos dois a dois e

$$D = \bigcup_i \{a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega}\} \cup N_j, \quad \text{med } N_j = 0.$$

Como $\text{med } D = \sum_i \text{med} \{a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega}\} + \text{med } N_j = \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \text{med } \Omega$ logo $\sum_i (\varepsilon_{ij})^n = \frac{\text{med } D}{\text{med } \Omega}$.

Vamos definir então

$$w_j(x) = z_j\left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)$$

com $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega}$. Usando a mudança de variável $x = y\varepsilon_{ij} + a_{ij}$ vem

$$\begin{aligned} \int_D g(|w_j(x)|) dx &= \sum_i \int_{a_{ij} + \varepsilon_{ij} \bar{\Omega}} g\left(\left|z_j\left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\right)\right|\right) dx = \\ &= \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \int_{\Omega} g(|z_j(y)|) dy \leq C \frac{\text{med } D}{\text{med } \Omega} < +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado, e usando a mesma mudança de variável, se $\xi \in C(\overline{D})$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ temos

$$\begin{aligned} \int_D \varphi(w_j(x))\xi(x) dx &= \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \int_{\Omega} \varphi(z_j(y))\xi(a_{ij} + \varepsilon_{ij}y) dy = \\ &= \sum_i (\varepsilon_{ij})^n \xi(a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{y}_{ij}) \int_{\Omega} \varphi(z_j(y)) dy. \end{aligned}$$

A última igualdade resulta do teorema do valor médio para integrais. O primeiro termo é uma soma de Riemann para o integral em D e

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_D \varphi(w_j(x))\xi(x) dx &= \int_D \xi(x) dx \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\lambda) d\nu(\lambda) dx = \\ &= \int_D \xi(x) dx \langle \overline{\nu}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Pelo que vimos após a demonstração do teorema 4.1.6, para caracterizar a medida basta tomar ξ num subconjunto denso numerável de $L^1(\Omega)$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^m)$. Logo $\overline{\nu}$ é a medida associada a (w_j) . ■

O caso que estamos interessados é $z_j = \nabla u_j$ onde (u_j) é uma sucessão limitada em $W^{1,p}(\Omega)$.

Considerando $\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} A d\nu_x(A)$, sendo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ o limite fraco de uma subsucessão de (u_j) e $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$, podemos apresentar o seguinte resultado.

Teorema 4.2.7 *Seja (u_j) uma sucessão limitada de funções em $W^{1,p}(\Omega)$ com valores afins na fronteira dados por $u_F = Fx$, com $F \in \mathbb{M}^{m \times n}$. Seja $\nu = \{\nu_x\}_{x \in \Omega}$ a medida parametrizada associada a (∇u_j) . Então existe uma sucessão (w_j) limitada em $W^{1,p}(\Omega)$ com os mesmos valores na fronteira, cuja medida parametrizada é $\overline{\nu}$, homogênea e dada por*

$$\langle \overline{\nu}, \varphi \rangle = \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) dx.$$

Demonstração:

Tendo em conta a demonstração do lema de Riemann-Lebesgue precisamos apenas encontrar uma sucessão de funções $w_j \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$\nabla w_j(x) = \nabla u_j \left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right) \tag{4.23}$$

para $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega$.

Mais uma vez pelo lema da cobertura de Vitali

$$\Omega = \bigcup_i \{a_{ij} + \varepsilon_{ij}\overline{\Omega}\} \cup N_j, \quad \text{med } N_j = 0,$$

A condição (4.23) pode ser obtida tomando simplesmente

$$w_j(x) = \varepsilon_{ij} u_j \left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right),$$

para $x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega$. No entanto, w_j pode não pertencer a $W^{1,p}(\Omega)$.

Consideremos $F \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e $u_F = Fx$. Se $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ e $u_j - u_F \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a função

$$w_j(x) = \begin{cases} \varepsilon_{ij} u_j \left(\frac{x - a_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \right) + u_F(a_{ij}), & x \in a_{ij} + \varepsilon_{ij}\Omega, \\ u_F(x), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma função em $W^{1,p}(\Omega)$ (uma vez que cada um dos ramos pertence a $W^{1,p}(\Omega)$ e na fronteira as funções coincidem), $w_j - u_F \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e o seu gradiente satisfaz 4.23. Pelo lema de Riemann-Lebesgue concluímos o pretendido. ■

Se usarmos $\bar{\nu}$ em (4.13), obtemos a desigualdade

$$f(F) \leq \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} f(F + \nabla u(x)) dx,$$

para todo $F \in \mathbb{M}^{m \times n}$ e todo $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Vimos atrás que uma função que satisfaz esta propriedade é chamada quasiconvexa. Esta propriedade é de facto equivalente a (4.13) sob convergência fraca* em $W^{1,\infty}(\Omega)$. Quasiconvexidade é equivalente à $W^{1,\infty}$ -quasiconvexidade.

4.3 Laminados

Na secção anterior, vimos que uma medida de Young gradiente homogénea é uma medida de probabilidade para a qual a desigualdade de Jensen se verifica para qualquer função quasiconvexa.

Como sabemos, a quasiconvexidade implica a convexidade car-1. Logo, as medidas de probabilidade para as quais a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função convexa car-1, são casos particulares de medidas de Young gradiente homogéneas. Nesta secção, iremos ver que tais medidas de probabilidade são na realidade laminados, de acordo com a definição seguinte.

Definição 4.3.1 *Seja ν uma medida de probabilidade suportada em $\mathbb{M}^{m \times n}$ e seja $K = \text{supt } \nu$ um conjunto compacto. A medida ν diz-se um laminado se existe uma sucessão de conjuntos de pares $\{(t_i^k, Y_i^k)\}_{1 \leq i \leq k}$ ($k \geq 2$), verificando a condição (H_k) tal que $\sum_i t_i^k \delta_{Y_i^k} \xrightarrow{*} \nu$ no sentido das medidas.*

Uma condição necessária para uma medida de probabilidade ν ser um laminado é a desigualdade de Jensen se verificar para todas as funções convexas car-1.

Isto é fácil de demonstrar devido ao modo recursivo como as condições (H_k) estão definidas. No capítulo seguinte iremos perceber melhor esta afirmação.

Seguidamente, vamos demonstrar a suficiência, ou seja, que dada uma medida de probabilidade se a desigualdade de Jensen se verificar para qualquer função convexa car-1 então essa medida é um laminado.

Para já, introduzimos a seguinte definição que estabelece a relação entre laminados e convexidade car-1.

Definição 4.3.2 *Seja $\varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. A convexificação car-1 está definida por*

$$R\varphi = \sup \{g \leq \varphi : g \text{ é convexa car-1}\}.$$

Lema 4.3.3 *1. Se $\{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l}$ e $\{(s_j, Z_j)\}_{1 \leq j \leq k}$ satisfazem as condições (H_l) e (H_k) respectivamente, então*

$$\left\{ \{(tt_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l}, \{((1-t)s_j, Z_j)\}_{1 \leq j \leq k} \right\} \text{ satisfaz } (H_{l+k}) \quad (4.24)$$

para qualquer $t \in [0, 1]$ desde que

$$\text{car} \left(\sum_{i=1}^l t_i Y_i - \sum_{j=1}^k s_j Z_j \right) \leq 1. \quad (4.25)$$

2. Se $\varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é limitada inferiormente, $R\varphi$ é uma função convexa car-1.

Demonstração:

1- Vamos mostrar por indução que $\left\{ \{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l}, \{((1-t)s_j, Z_j)\}_{1 \leq j \leq k} \right\}$ satisfaz a condição (H_{l+k}) .

a) Se $l+k=2$ então $l=k=1$ logo $t_1=1$ e $s_1=1$. Por hipótese temos

$$\text{car}(t_1 Y_1 - s_1 Z_1) = \text{car}(Y_1 - Z_1) \leq 1.$$

b) Suponhamos que para $l+k-1$ a condição (4.24) se verifica.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $l \geq 2$. Como $(t_i, Y_i)_{1 \leq i \leq l}$ satisfaz (H_l) temos, a menos de uma permutação, que $\text{car}(Y_1 - Y_2) \leq 1$ e se

$$\begin{cases} \mu_1 = t_1 + t_2 & B_1 = \frac{t_1 Y_1 + t_2 Y_2}{t_1 + t_2} \\ \mu_i = t_{i+1} & B_i = Y_{i+1} \quad 2 \leq i \leq l-1 \end{cases}$$

(μ_i, B_i) satisfaz a condição (H_{l-1}) .

Note-se que (4.25) é idêntico a

$$\text{car} \left(\sum_{i=1}^{l-1} \mu_i B_i - \sum_{j=1}^k s_j Z_j \right) \leq 1.$$

A hipótese de indução assegura que $\left((t_i, B_i)_{1 \leq i \leq l-1}, ((1-t)s_j, Z_j)_{1 \leq j \leq k} \right)$ satisfaz H_{l+k-1} . Como $\text{car}(Y_1 - Y_2)$ então obtemos (4.24).

2- Pretendemos mostrar que $R\varphi$ é convexa car-1 ou seja

$$R\varphi(tX + (1-t)Y) \leq tR\varphi(X) + (1-t)R\varphi(Y) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } \forall X, Y \in \mathbb{M}^{m \times n}$$

tais que $\text{car}(X - Y) \leq 1$.

Por definição,

$$R\varphi(tX + (1-t)Y) = \sup \{ \psi(tX + (1-t)Y) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \}.$$

Como ψ é convexa car-1 temos

$$\psi(tX + (1-t)Y) \leq t\psi(X) + (1-t)\psi(Y)$$

logo

$$\begin{aligned} & \sup \{ \psi(tX + (1-t)Y) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \} \leq \\ & \leq \sup \{ t\psi(X) + (1-t)\psi(Y) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \}. \end{aligned}$$

Tendo em conta que o supremo da soma é menor ou igual que a soma dos supremos, e que as variáveis t e $1-t$ são não negativas vem

$$\begin{aligned} & \sup \{ \psi(tX + (1-t)Y) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \} \leq \\ & \leq t \sup \{ \psi(X) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \} + \\ & + (1-t) \sup \{ \psi(Y) : \psi(\cdot) \text{ é convexa car-1 e } \psi(\cdot) \leq \varphi(\cdot) \} = \\ & = tR\varphi(X) + (1-t)R\varphi(Y). \end{aligned}$$

■

Teorema 4.3.4 *Seja $\varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Para todo $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$*

$$R\varphi(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^l t_i \varphi(Y_i) : Y = \sum_{i=1}^l t_i Y_i, \{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l} \text{ verifica } (H_l) \right\}$$

ou equivalentemente

$$R\varphi(Y) = \inf \left\{ \int_{M^{m \times n}} \varphi(A) d\nu(A) : \nu \text{ é um laminado e } Y = \int_{M^{m \times n}} A d\nu(A) \right\}.$$

Demonstração:

Designamos por

$$R'\varphi(Y) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^l t_i \varphi(Y_i) : Y = \sum_{i=1}^l t_i Y_i, \{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l} \text{ verifica } (H_l) \right\}.$$

Primeiro vamos demonstrar que $R'\varphi$ é convexa car-1 e depois concluir que $R'\varphi = R\varphi$.

Ora, $R'\varphi$ é convexa car-1 se e só se

$$\alpha R'\varphi(Y) + (1 - \alpha)R'\varphi(Z) \geq R'\varphi(\alpha Y + (1 - \alpha)Z)$$

para todo Y, Z tal que $\text{car}(Y - Z) \leq 1$.

Fixando $\varepsilon > 0$ e usando a definição de $R'\varphi$ podemos afirmar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon + R'\varphi(Y) \geq \sum_{i=1}^l t_i \varphi(Y_i) \\ \varepsilon + R'\varphi(Z) \geq \sum_{j=1}^k s_j \varphi(Z_j) \\ \sum_{i=1}^l t_i Y_i = Y \quad \{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l} \text{ verifica } (H_l) \\ \sum_{j=1}^k s_j Z_j = Z \quad \{(s_j, Z_j)\}_{1 \leq j \leq k} \text{ verifica } (H_k). \end{array} \right.$$

Multiplicando a primeira desigualdade por α , a segunda por $1 - \alpha$ e adicionando membro a membro obtemos

$$\varepsilon + \alpha R'\varphi(Y) + (1 - \alpha)R'\varphi(Z) \geq \sum_{i=1}^l \alpha t_i \varphi(Y_i) + \sum_{j=1}^k (1 - \alpha) s_j \varphi(Z_j) \quad (4.26)$$

Analogamente das duas últimas desigualdades obtemos

$$\sum_{i=1}^l \alpha t_i Y_i + \sum_{j=1}^k (1 - \alpha) s_j Z_j = \alpha Y + (1 - \alpha)Z.$$

Pelo lema precedente $\left((\alpha t_i, Y_i)_{1 \leq i \leq l}, ((1 - \alpha) s_j, Z_j)_{1 \leq j \leq k} \right)$ satisfaz H_{l+k} .

Por definição

$$R'\varphi(\alpha Y + (1 - \alpha)Z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^l \alpha t_i \varphi(Y_i) + \sum_{j=1}^k (1 - \alpha) s_j \varphi(Z_j) : \sum_{i=1}^l \alpha t_i Y_i + \sum_{j=1}^k (1 - \alpha) s_j Z_j = \alpha Y + (1 - \alpha)Z \right\}.$$

Por (4.26)

$$R'\varphi(\alpha Y + (1 - \alpha)Z) \leq \varepsilon + \alpha R'\varphi(Y) + (1 - \alpha)R'\varphi(Z).$$

Como ε é arbitrário obtemos a convexidade car-1 de $R'\varphi$.

Note que se φ é convexa car-1 então, pela proposição 3.2.3 $R'\varphi = \varphi$. Então $R'(R'\varphi) = R'\varphi$.

Seja $g \leq \varphi$ convexa car-1, então

$$g = R'g \leq R'(R'\varphi) = R'\varphi \leq \varphi.$$

Como $R'\varphi \geq g$ e g é arbitrário temos $R'\varphi \geq R\varphi$. Por outro lado, sendo $R'\varphi$ convexa car-1, por definição de $R\varphi$ temos $R'\varphi \leq R\varphi$, concluindo-se que $R'\varphi = R\varphi$. ■

4.3.1 Caracterização de laminados

Vamos então estabelecer a caracterização de laminados em termos da desigualdade de Jensen.

Teorema 4.3.5 *Seja K um conjunto compacto de matrizes. Uma medida de probabilidade ν suportada em K , é um laminado se e só se existe uma bola fechada B contendo K tal que*

$$R(\widehat{\varphi})(Y) \leq \int_K \varphi(A) d\nu(A), \quad Y = \int_K A d\nu(A),$$

onde

$$\widehat{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{em } B \\ +\infty & \text{em } \mathbb{M}^{m \times n} \setminus B. \end{cases}$$

Demonstração:

Suponha que existe uma bola fechada B contendo K com a propriedade indicada, e seja Y o primeiro momento de ν .

Pretendemos mostrar que ν é um laminado, isto é, precisamos encontrar uma sucessão $\{(t_i^k, Y_i^k)\}$, ($k \geq 2$) verificando a condição (H_k) tal que $\sum_i t_i \delta_{Y_i} \xrightarrow{*} \nu$ no sentido das medidas. Consideremos o conjunto das medidas de probabilidade

$$M_Y = \left\{ \sum_i t_i \delta_{Y_i} : t_i > 0, \sum_i t_i = 1, Y_i \in B, Y = \sum_i t_i Y_i, \{(t_i, Y_i)\} \text{ satisfaz } (H_l) \right\}.$$

Pretendemos mostrar que:

1- M_Y é convexo.

Sejam $\sum_i t_i \delta_{Y_i}$ e $\sum_j s_j \delta_{Z_j}$ elementos de M_Y , isto é, $t_i > 0$, $s_j > 0$, $\sum_i t_i = 1$, $\sum_j s_j = 1$, $Y_i \in B$, $Z_j \in B$ e $Y = \sum_i t_i Y_i$, $Y = \sum_j s_j Z_j$ e $\{(t_i, Y_i)\}$ satisfaz a condição (H_l) e $\{(s_j, Z_j)\}$ satisfaz (H_k) .

Pretendemos mostrar que

$$t \sum_i t_i \delta_{Y_i} + (1-t) \sum_j s_j \delta_{Z_j} \in M_Y$$

para isso precisamos provar que $tt_i > 0$, $(1-t)s_j > 0$, $\sum_{i=1}^l tt_i + \sum_{j=1}^k (1-t)s_j = t + 1 - t = 1$, $Y = \sum_{i=1}^l tt_i Y_i + \sum_{j=1}^k (1-t)s_j Z_j = tY + (1-t)Y = Y$ e pelo lema 4.3.3 $\{(tt_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l}$, $\{((1-t)s_j, Z_j)\}_{1 \leq j \leq k}$ satisfaz H_{l+k} .

Como B é convexo e $Y_i \in B$, $Z_j \in B$ então $tY_i + (1-t)Z_j \in B$ logo, concluímos que M_Y é convexo. Portanto, $coM_Y = \overline{M_Y}$.

2- $\nu \in \overline{M_Y}$ na topologia fraca* das medidas.

Seja T um funcional linear contínuo, na topologia fraca* das medidas, definido no espaço das medidas suportadas em B . Então T pode ser representado por uma função contínua φ , em B . E, pelo teorema de Tietze, podemos estender φ continuamente a todo o espaço.

Suponhamos que

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \langle T, \mu \rangle \geq 0$$

para todo $\mu = \sum_i t_i \delta_{Y_i} \in M_Y$.

Como $0 \leq \langle \varphi, \mu \rangle \leq \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \widehat{\varphi}(A) d\mu(A)$ temos $R(\widehat{\varphi})(Y) \geq 0$. Utilizando a hipótese $\int_K \varphi(A) d\nu(A) \geq R(\widehat{\varphi})(Y) \geq 0$ temos $\langle \varphi, \nu \rangle \geq 0$. Pelo corolário do teorema de Hahn-Banach (2.5.5) concluímos que $\nu \in coM_Y$. Como M_Y é convexo então $coM_Y = \overline{M_Y}$ logo, $\nu \in \overline{M_Y}$ e isto significa que ν é um laminado de acordo com a definição.

Reciprocamente, suponhamos que ν é um laminado suportado em K então, por definição, existe uma sucessão de pares $\{(t_i^k, Y_i^k)\}_{1 \leq i \leq k}$ ($k \geq 2$) verificando (H_k) tal que

$$\sum_i t_i^k \delta_{Y_i^k} \xrightarrow{*} \nu$$

no sentido das medidas.

Se $\text{supt}(\nu)$ é compacto, o conjunto ds matrizes $\{Y_i^k\}$ é limitado. Com efeito se $Y_i^k \rightarrow \infty$ para alguma subsucessão, podemos tomar uma função contínua, φ , tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi|_K = 0$ e $\varphi(Y_i^k) = \frac{1}{t_i^k}$ e isto contradiz a convergência fraca*, pois $\sum_i t_i^k \varphi(Y_i^k) = k$ e $\int_K \varphi(Y) d\nu(Y) = 0$.

Resta-nos provar que $R(\widehat{\varphi})(Y) \leq \int_K \varphi(A) d\nu(A)$.

Ora, utilizando o facto de ν ter suporte K vem,

$$\begin{aligned} R(\widehat{\varphi})(Y) &= \inf \left\{ \int_{M^{m \times n}} \widehat{\varphi}(A) d\nu(A) : \nu \text{ é um laminado e } Y = \int_{M^{m \times n}} \varphi(Y) d\nu(Y) \right\} \leq \\ &\leq \int_{M^{m \times n}} \widehat{\varphi}(A) d\nu(A) = \int_K \widehat{\varphi}(A) d\nu(A), \end{aligned}$$

■

Lema 4.3.6 *Seja $\varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada inferiormente, tal que $C\varphi = \varphi$ fora de uma bola fechada B . Se $Y \in B$ então*

$$R\varphi(Y) = \inf \left\{ \sum_i t_i \varphi(Y_i) : Y = \sum_i t_i Y_i, Y_i \in B, \{(t_i, Y_i)\}_{1 \leq i \leq l} \text{ verifica } (H_l) \right\}.$$

$C\varphi$ denota a convexificação de φ .

A condição $C\varphi = \varphi$ pode ser substituída por $R\varphi = \varphi$ fora de B , mantendo-se a conclusão.

Demonstração:

Consideremos a função

$$\psi = \begin{cases} R(\widehat{\varphi}) & \text{em } B \\ \varphi & \text{em } \mathbb{M}^{m \times n} \setminus B. \end{cases}$$

Pretendemos que ψ seja convexa car-1.

A demonstração baseia-se no mesmo argumento usado em dimensão 1. Nomeadamente, se g é uma função contínua definida em \mathbb{R} tal que $g = Cg$ fora de algum intervalo fechado J , então para $\alpha \in J$

$$Cg(\alpha) = \inf \{tg(\alpha_1) + (1-t)g(\alpha_2) : t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 = \alpha, \alpha_i \in J\}.$$

Note que se estamos fora de B , $\psi = \varphi$ e $C\varphi = \varphi$ logo $C\psi = \psi$, se estamos em B então $\psi = R(\widehat{\varphi}) = R(\varphi)$ e $C\psi \leq R\psi$. Logo $C\psi \leq \psi$ em $\mathbb{M}^{m \times n}$.

Então

$$\varphi = C\varphi \leq C\psi \leq \psi = \varphi$$

fora de B .

Assim, $C\psi = \psi$ fora de B , aplicando o resultado em dimensão 1 para cada função $g(\alpha) = \psi(Y + \alpha F)$ para Y e F matrizes fixas e $\text{car} F = 1$ provamos a convexidade car-1 de ψ .

Por definição de convexificação car-1,

$$\psi \leq R(\varphi) \leq R(\widehat{\varphi}) = \psi$$

em B , e o facto de $R(\varphi) = R(\widehat{\varphi})$ implica a conclusão do lema.

■

Teorema 4.3.7 *Seja ν uma medida de probabilidade compactamente suportada em $\mathbb{M}^{m \times n}$ e seja $K = \text{supt}(\nu)$. Então ν é um laminado se e só se*

$$\varphi \left(\int_K A d\nu(A) \right) \leq \int_K \varphi(A) d\nu(A)$$

para toda a função convexa car-1 $\varphi : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração:

Se ν é um laminado é fácil deduzir a desigualdade de Jensen para φ convexa car-1.

Vamos mostrar a suficiência.

Seja $Y \in \text{co}(K)$ o primeiro momento de ν , isto é $Y = \int_K A d\nu(A)$.

Consideremos duas bolas fechadas, $B_{\frac{r_1}{2}}$, e B_{r_1} de raios $\frac{r_1}{2}$ e r_1 , respectivamente e tais que $K \subseteq B_{\frac{r_1}{2}} \subseteq B_{r_1}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que estão centradas na origem. Seja φ uma função contínua definida sobre o espaço das matrizes e sempre finita.

Seja

$$M = \max_{B_1} \varphi \quad g(r) = \min_{|A|=r} \varphi(A).$$

Note que g está bem definida, pois φ é contínua, logo, existe mínimo de φ no compacto $\{A : |A| = r\}$. Analogamente garantimos a existência de M .

Como g é contínua então transforma compactos em compactos logo $g([0, \frac{r_1}{2}])$ é compacto e portanto limitado. Assim podemos escolher $c \in \mathbb{R}$ tal que para $f(r) = c(r - r_1) + M$ temos $f(r) < g(r)$ para $r \in [0, \frac{r_1}{2}]$. Com efeito, como

$$\min_{r \in [0, \frac{r_1}{2}]} g(r) \leq g(r) \leq \max_{r \in [0, \frac{r_1}{2}]} g(r),$$

basta considerar $c(r - r_1) + M < \min g(r) \leq g(r)$, ou seja $c > \frac{\min g(r) - M}{r - r_1}$.

Defina-se

$$\psi(A) = \begin{cases} \varphi(A) & A \in B_{\frac{r_1}{2}} \\ \max \{ \varphi(A), f(|A|) \} & A \in B_{r_1} \setminus B_{\frac{r_1}{2}} \\ f(|A|) & A \in \mathbb{M}^{m \times n} \setminus B_{r_1}. \end{cases}$$

Se $|A| = \frac{r_1}{2}$ temos

$$f(|A|) = c\left(\frac{r_1}{2} - r_1\right) + M = -c\frac{r_1}{2} + M \underset{f(\frac{r_1}{2}) < g(\frac{r_1}{2})}{<} \min_{|A|=\frac{r_1}{2}} \varphi(A) \leq \varphi(A),$$

logo $\max \{ \varphi(A), f(|A|) \} = \varphi(A)$.

Se $|A| = r_1$

$$f(|A|) = M = \max_{B_1} \varphi \geq \varphi(A)$$

logo $\max \{ \varphi(A), f(|A|) \} = f(|A|)$.

Concluimos que ψ é contínua.

Note-se que $f(|A|) \leq \psi(A)$. Com efeito

$$f(|A|) < g(|A|) = \min_{|A|} \varphi(A) < \varphi(A) = \psi(A) \quad \text{para } A \in B_{\frac{r_1}{2}};$$

$$f(|A|) \leq \max \{ \varphi(A), f(|A|) \} = \psi(A) \quad \text{para } A \in B_{r_1} \setminus B_{\frac{r_1}{2}}$$

$$f(|A|) = \psi(A) \quad \text{para } A \in \mathbb{M}^{m \times n} \setminus B_{r_1}.$$

Fora de B_1 $\psi(A) = f(|A|)$ que é afim logo $\psi^{**} = \psi$ fora de B_1 .

Pelo lema 4.3.3, $R\psi$ é convexa car-1, pois ψ é limitada inferiormente e

$$R\psi(Y) \leq \int_K \psi(A) d\nu(A) = \int_K \varphi(A) d\nu(A),$$

onde a última igualdade resulta de $K \subseteq B_{\frac{1}{2}}$ e $\psi = \varphi$ em K .

Pretendemos que $R(\widehat{\varphi})(Y) \leq R\psi(Y)$ onde $\widehat{\varphi}$ está definido atrás.

Pelo lema 4.3.6, com vista a encontrar a convexificação car-1 de ψ é suficiente restringirmo-nos às matrizes em B_1 . O mesmo acontece para $\widehat{\varphi}$ e $\psi \geq \varphi$ em B_1 logo $R\widehat{\varphi} \leq R\psi$, ou seja

$$R\widehat{\varphi}(Y) \leq \int_K \varphi(A) d\nu(A), \quad Y = \int_K A d\nu(A)$$

logo ν é um laminado pelo teorema 4.3.5. ■

Lema 4.3.8 *Seja ν um laminado suportado num conjunto compacto K com primeiro momento $Y \in \text{co}(K)$. Então existe uma sucessão de pares $\{(t_i^k, Y_i^k)\}_{1 \leq i \leq k}$ satisfazendo a condição (H_k) tal que $Y_i^k \in \text{co}(K)$ para quaisquer k e i , e*

$$\sum_i t_i^k \delta Y_i^k \xrightarrow{*} \nu.$$

Nota 4.3.9 *Pela definição 4.3.1 sabemos que existe uma sucessão de pares $\{(s_j^k, Z_j^k)\}_{1 \leq j \leq k}$ verificando a condição (H_k) e*

$$\sum_j s_j^k \delta Z_j^k \xrightarrow{*} \nu.$$

Considera-se $t_i^k = \sum_j s_j^k$, $Y_i^k = \sum_i \frac{s_i^k}{t_i^k} Z_j^k$ e prova-se que os pares $\{(t_i^k, Y_i^k)\}$ satisfazem o pretendido.

A demonstração é demasiado técnica, mas pode ser encontrada em [Pe2] lema 9.9.

Proposição 4.3.10 *Seja V o conjunto dos vértices do cubo $C = [-1, 1]^3$. Se μ é um laminado com $\text{supt}(\mu) = V$ e primeiro momento 0, então*

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{8} (\delta(1, 1, 1) + \delta(1, -1, -1) + \delta(-1, 1, -1) + \delta(-1, -1, 1)) + \\ &\quad \frac{1}{8} (\delta(1, 1, -1) + \delta(1, -1, 1) + \delta(-1, 1, 1) + \delta(-1, -1, -1)). \end{aligned}$$

Esta proposição diz-nos que μ é o único laminado suportado em V .

A demonstração reduz-se à observação que pelo lema anterior, na tentativa de encontrar laminados suportados no conjunto dos vértices V e tendo como primeiro momento 0, podemos-nos restringir apenas ao cubo C . Como as únicas direcções car-1 em C são as direcções dos eixos, a única possibilidade é a apresentada pela definição. A demonstração pode ser encontrada em [Pe2] proposição 9.10.

Capítulo 5

Propriedades de convexidade em funções homogêneas de grau 1

Este capítulo tem como objectivo principal apresentar uma família de funções homogêneas de grau 1 que são convexas car-1, mas não são convexas.

Consideremos $f : \mathbb{M}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, homogênea de grau 1, isto é,

$$f(t\xi) = tf(\xi) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{M}^{2 \times 2}.$$

Para este tipo de funções não é evidente que a convexidade car-1, não seja equivalente à convexidade.

Na realidade, [Mu] já respondeu a esta questão construindo um exemplo de uma função homogênea de grau 1 quasiconvexa que não é convexa. Por outro lado Dacorogna [Da3] demonstrou que se além de impormos a homogeneidade assumirmos f rotacionalmente invariante, então toda a função convexa car-1 é convexa.

Uma função f diz-se rotacionalmente invariante se

$$f(A\xi) = f(\xi) \quad \forall A, \xi \in \mathbb{M}^{2 \times 2},$$

onde A representa uma matriz de rotação, ou seja, A é ortogonal ($AA^T = I$) e $\det A = 1$.

Um exemplo de uma função rotacionalmente invariante é $f(\xi) = g(|\xi|, \det \xi)$.

Para simplificar, vamos identificar o espaço das matrizes 2×2 com \mathbb{R}^4 .

Ora se $\xi \in \mathbb{R}^4$ então $\det \xi = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3$ e $\nabla(\det \xi) = (\xi_4, -\xi_3, -\xi_2, \xi_1)$ que vamos denotar por $\tilde{\xi}$.

Designando por E a forma quadrática associada ao determinante temos

$$E = \left(\frac{\partial^2 \det \xi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right)_{i,j=1}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_4 \\ -\xi_3 \\ -\xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix} = \tilde{\xi}$$

e

$$\langle \xi, \tilde{\xi} \rangle = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2 + \xi_4 \xi_1 = 2(\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3) = 2 \det \xi.$$

Em resumo

$$\begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^4 \xi_i \eta_i & \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^4 \\ \det \xi = \frac{1}{2} \langle \xi, \tilde{\xi} \rangle \\ E\xi = \tilde{\xi}. \end{cases}$$

Consideremos então a seguinte função

$$f(\xi) = \begin{cases} |\xi| + \gamma \frac{\langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|} & \text{se } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{se } \xi = 0, \end{cases}$$

onde $\gamma \geq 0$ e $M \in \mathbb{M}^{4 \times 4}$ é uma matriz simétrica cujos valores próprios são $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$.

Nos seguintes teoremas, veremos que, escolhendo M e γ apropriadamente teremos uma família de funções convexas car-1 que não são convexas.

Teorema 5.0.11 *Sejam f , M e γ definidos como acima. Então*

$$f \text{ é convexa} \iff \gamma \leq \gamma_c$$

onde

$$\gamma_c = \begin{cases} \frac{1}{\mu_4 - 2\mu_1} & \text{se } \mu_4 - 2\mu_1 > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu_4 - 2\mu_1 \leq 0. \end{cases}$$

Demonstração:

Pela proposição 3.1.2, para mostrar que f é convexa, basta mostrar que $\nabla^2 f(\xi)$ é definida não-negativa, isto é,

$$\langle \nabla^2 f(\xi)\lambda, \lambda \rangle \geq 0 \quad \forall \xi, \lambda \in \mathbb{R}^4.$$

Mas repare que, no nosso caso, f não é diferenciável na origem. No entanto, se restringirmos o domínio de f a um aberto convexo não contendo a origem, já podemos aplicar o teorema. Podemos considerar, por exemplo, abertos convexas não contendo a origem, mas cuja fronteira já contém a origem. Depois de aplicado o teorema a esses abertos, resta averiguar a convexidade de f no caso $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\xi \neq \eta$ e $t\xi + (1-t)\eta = 0$ para algum $t \in (0, 1)$.

Vamos considerar primeiro $\xi \neq 0$ e determinar a Hessiana de f .

Observando que

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}(\xi) = \frac{\partial |E|}{\partial \xi_\alpha} + \gamma \frac{\partial \langle M\xi, \xi \rangle}{\partial \xi_\alpha |\xi|}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$$

e tendo em conta que $\langle M\xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \xi_i \xi_j$ vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\xi|}{\partial \xi_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\xi_\alpha}{|\xi|}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \langle M\xi, \xi \rangle &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \xi_i \xi_j. \end{aligned}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que $\alpha = 1$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \xi_j \xi_i &= 2m_{11}\xi_1 + \sum_{j=2}^4 m_{1j}\xi_j + \sum_{i=2}^4 m_{i1}\xi_i = \\ & \stackrel{\text{simetria de } M}{=} 2m_{11}\xi_1 + \sum_{j=2}^4 m_{1j}\xi_j + \sum_{i=2}^4 m_{1i}\xi_i \\ &= 2m_{11}\xi_1 + 2 \sum_{j=2}^4 m_{1j}\xi_j = 2 \sum_{j=1}^4 m_{1j}\xi_j = 2(M\xi)_1. \end{aligned}$$

Assim $\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \langle M\xi, \xi \rangle = 2(M\xi)_\alpha$ ¹.

Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}(\xi) &= \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} + \gamma \frac{2(M\xi)_\alpha |\xi| - \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} \langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|^2} = \\ &= \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} + \gamma \frac{2(M\xi)_\alpha |\xi|^2 - \xi_\alpha \langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|^3} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} + \gamma \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{2(M\xi)_\alpha |\xi|^2 - \xi_\alpha \langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|^3}.$$

Mas

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} = \frac{\delta_{\alpha\beta} |\xi| - \frac{\xi_\beta}{|\xi|} \xi_\alpha}{|\xi|^2} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\xi|} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{|\xi|^3},$$

onde

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (M\xi)_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left(\sum_{j=1}^4 m_{\alpha j} \xi_j \right) = m_{\alpha\beta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left(\frac{2(M\xi)_\alpha |\xi|^2 - \xi_\alpha \langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{|\xi|^6} \left(\left(2m_{\alpha\beta} |\xi|^2 + 4|\xi| (M\xi)_\alpha \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} - 2(M\xi)_\beta \xi_\alpha - \delta_{\alpha\beta} \langle M\xi, \xi \rangle \right) |\xi|^3 \right) + \\ &\quad - \frac{1}{|\xi|^6} \left(3|\xi|^2 \frac{\xi_\beta}{|\xi|} \left(2(M\xi)_\alpha |\xi|^2 - \xi_\alpha \langle M\xi, \xi \rangle \right) \right) = \\ &= \frac{1}{|\xi|^5} \left(-2|\xi|^2 \xi_\alpha (M\xi)_\alpha + 2m_{\alpha\beta} |\xi|^4 - \delta_{\alpha\beta} \langle M\xi, \xi \rangle |\xi|^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{|\xi|^5} \left(-2(M\xi)_\beta \xi_\alpha |\xi|^2 + 3\xi_\beta \xi_\alpha \langle M\xi, \xi \rangle \right), \end{aligned}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} &= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\xi|} - \frac{\xi_\alpha \xi_\beta}{|\xi|^3} + \\ &+ \frac{\gamma}{|\xi|^5} \left(2m_{\alpha\beta} |\xi|^4 - \delta_{\alpha\beta} \langle M\xi, \xi \rangle |\xi|^2 - 2|\xi|^2 \xi_\beta (M\xi)_\alpha - 2|\xi|^2 \xi_\alpha (M\xi)_\beta + 3\xi_\alpha \xi_\beta \langle M\xi, \xi \rangle \right). \end{aligned}$$

Vamos determinar então $\sum_{\alpha, \beta=1}^4 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta$. Para simplificar, apresentamos os cálculos parcela a parcela.

¹ $(M\xi)_\alpha$ é o produto da linha α da matriz M pelo vector ξ .

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \delta_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = |\lambda|^2, \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^4 \xi_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^4 \xi_{\beta} \lambda_{\beta} = \langle \xi, \lambda \rangle \langle \xi, \lambda \rangle = \langle \xi, \lambda \rangle^2, \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^4 m_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^4 \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^4 m_{\alpha\beta} \lambda_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^4 \lambda_{\alpha} (M\lambda)_{\alpha} = \langle \lambda, M\lambda \rangle \underset{M \text{ é simétrica}}{=} \langle M\lambda, \lambda \rangle, \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \xi_{\beta} (M\xi)_{\alpha} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^4 (M\xi)_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^4 \xi_{\beta} \lambda_{\beta} = \langle M\xi, \lambda \rangle \langle \xi, \lambda \rangle, \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^4 (M\xi)_{\beta} \xi_{\alpha} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} &= \sum_{\alpha=1}^4 \xi_{\alpha} \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^4 (M\xi)_{\beta} \lambda_{\beta} = \langle \xi, \lambda \rangle \langle M\xi, \lambda \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha, \beta=1}^4 \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi_{\alpha} \partial \xi_{\beta}} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} = \tag{5.1} \\ &= \frac{|\lambda|^2}{|\xi|} - \frac{\langle \xi, \lambda \rangle^2}{|\xi|^3} + \frac{\gamma}{|\xi|^5} \left(|\xi|^2 \left(2 \langle M\lambda, \lambda \rangle |\xi|^2 - |\lambda|^2 \langle M\xi, \xi \rangle - 4 \langle \xi, \lambda \rangle \langle M\xi, \lambda \rangle \right) + 3 \langle \xi, \lambda \rangle^2 \langle M\xi, \xi \rangle \right). \end{aligned}$$

Relembramos que pretendemos averiguar quando f é convexa, ou seja, pretendemos saber quando se verifica

$$\inf_{\xi \neq 0} \inf_{\lambda} \{ \langle \nabla^2 f(\xi) \lambda, \lambda \rangle \} \geq 0.$$

Note que, como f é homogénea de grau 1 então a forma quadrática também é homogénea de grau 1.

Com efeito,

$$\frac{\partial^2 f(t\xi)}{\partial \xi_{\alpha} \partial \xi_{\beta}} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_{\alpha} \partial \xi_{\beta}} (tf(\xi)) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_{\alpha} \partial \xi_{\beta}}(\xi).$$

Como $\xi \neq 0$ podemos considerar, sem perda de generalidade, $|\xi| = 1$. Podemos também escrever $\lambda = t\xi + s\eta$ com $t, s \in \mathbb{R}$, $|\eta| = |\xi| = 1$ e $\langle \xi, \eta \rangle = 0$.

Vamos demonstrar que

$$\begin{cases} |\lambda|^2 = t^2 + s^2 \\ \langle \xi, \lambda \rangle = t \\ \langle M\xi, \lambda \rangle = t \langle M\xi, \xi \rangle + s \langle M\xi, \eta \rangle \\ \langle M\lambda, \lambda \rangle = t^2 \langle M\xi, \xi \rangle + 2st \langle M\xi, \eta \rangle + s^2 \langle M\eta, \eta \rangle. \end{cases}$$

Ora, tendo em conta que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$ e $\langle \xi, \xi \rangle = |\xi|^2 = 1 = |\eta|^2 = \langle \eta, \eta \rangle$ vem

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= \langle \lambda, \lambda \rangle = \langle t\xi + s\eta, t\xi + s\eta \rangle = \\ &= t^2 \langle \xi, \xi \rangle + 2st \langle \xi, \eta \rangle + s^2 \langle \eta, \eta \rangle = t^2 + s^2, \\ \langle \xi, \lambda \rangle &= \langle \xi, t\xi + s\eta \rangle = t \langle \xi, \xi \rangle + s \langle \xi, \eta \rangle = t, \\ \langle M\xi, \lambda \rangle &= \langle M\xi, t\xi + s\eta \rangle = t \langle M\xi, \xi \rangle + s \langle M\xi, \eta \rangle, \\ \langle M\lambda, \lambda \rangle &= \langle M(t\xi + s\eta), t\xi + s\eta \rangle = \langle tM\xi + sM\eta, t\xi + s\eta \rangle = \\ &= t^2 \langle M\xi, \xi \rangle + st \langle M\xi, \eta \rangle + st \langle M\eta, \xi \rangle + s^2 \langle M\eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Como M é simétrica $\langle M\eta, \xi \rangle = \langle \eta, M^T \xi \rangle = \langle \eta, M\xi \rangle = \langle M\xi, \eta \rangle$, logo

$$\langle M\lambda, \lambda \rangle = t^2 \langle M\xi, \xi \rangle + 2st \langle M\xi, \eta \rangle + s^2 \langle M\eta, \eta \rangle.$$

Substituindo então na expressão (5.1) temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 f(\xi)\lambda, \lambda \rangle &= \\ &= t^2 + s^2 - t^2 + \gamma 2t^2 \langle M\xi, \xi \rangle + 4ts \langle M\xi, \eta \rangle + 2s^2 \langle M\eta, \eta \rangle - \\ &\quad - (t^2 + s^2) \langle M\xi, \xi \rangle - 4t(t \langle M\xi, \xi \rangle + s \langle M\xi, \eta \rangle) = \\ &= s^2 + \gamma (-s^2 \langle M\xi, \xi \rangle + 2s^2 \langle M\eta, \eta \rangle) = \\ &= s^2(1 + \gamma(2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle)). \end{aligned}$$

Assim, f é convexa se e só se

$$\inf_{\xi \neq 0} \inf_{\lambda} \{1 + \gamma(2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle)\} \geq 0.$$

Como $\gamma \geq 0$, o ínfimo obtém-se quando $\langle M\eta, \eta \rangle$ toma o menor valor possível e $\langle M\xi, \xi \rangle$ toma o maior valor possível.

Considerando $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ a base ortonormada constituída pelos vectores próprios de M , podemos escrever $\eta = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \varphi_i$ onde $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim

$$M\eta = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mu_i \varphi_i \quad \text{e} \quad \langle M\eta, \eta \rangle = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 \mu_i.$$

Analogamente, se $\xi = \sum_{i=1}^4 \beta_i \varphi_i$, obtemos

$$\langle M\xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 \mu_i.$$

Atendendo a que $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$, vemos que $\langle M\eta, \eta \rangle$ será mínimo quando $\eta = \varphi_1$ e $\langle M\xi, \xi \rangle$ será máximo quando $\xi = \varphi_4$.

Nesse caso $\langle M\eta, \eta \rangle = \langle M\varphi_1, \varphi_1 \rangle = \mu_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \mu_1$ e $\langle M\xi, \xi \rangle = \langle M\varphi_4, \varphi_4 \rangle = \mu_4 \langle \varphi_4, \varphi_4 \rangle = \mu_4$.

Logo, f é convexa se e só se $1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0$.

Se $2\mu_1 - \mu_4 \geq 0$, então $1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0$ uma vez que admitimos $\gamma \geq 0$.

Se $2\mu_1 - \mu_4 < 0$ então

$$1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0 \text{ sse } \gamma \leq \frac{1}{\mu_4 - 2\mu_1}.$$

Considerando

$$\gamma_c = \begin{cases} \frac{1}{\mu_4 - 2\mu_1} & \text{se } \mu_4 - 2\mu_1 > 0 \\ +\infty & \text{se } \mu_4 - 2\mu_1 \leq 0 \end{cases}$$

concluimos assim que f é convexa se e só se $\gamma \leq \gamma_c$.

Vamos então considerar o caso $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\xi \neq \eta$ e $t\xi + (1-t)\eta = 0$ para algum $t \in (0, 1)$.

Podemos considerar $\eta = -\xi$, pois sendo f homogénea de grau 1 o comprimento do vector é irrelevante, apenas nos interessa a direcção. Se considerássemos η com uma direcção diferente de $-\xi$ poderíamos sempre considerar uma combinação linear convexa de η e ξ que não passasse na origem.

Pretendemos mostrar que

$$f((1-t)\xi - t\xi) \leq (1-t)f(\xi) + tf(-\xi) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4.$$

Usando a homogeneidade de f podemos afirmar que

$$f((1-2t)\xi) = |1-2t|f(\xi)e(1-t)f(\xi) + tf(-\xi) = (1-t)f(\xi) + tf(\xi) = f(\xi).$$

Assim para obtermos a convexidade de f precisamos demonstrar a desigualdade

$$|1-2t|f(\xi) \leq f(\xi) \iff (|1-2t|-1)f(\xi) \leq 0.$$

Como $t \in [0, 1]$ então $1-2t \in [-1, 1]$ logo $|1-2t| \in [0, 1]$ e $|1-2t|-1 \in [-1, 0]$. Agora basta-nos mostrar que $f(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi$.

Tomando $\xi = \xi_1\varphi_1 + \dots + \xi_4\varphi_4$, vem

$$\begin{aligned} f(\xi) &= |\xi| + \frac{\gamma}{|\xi|} \langle M(\xi_1\varphi_1 + \dots + \xi_4\varphi_4), \xi_1\varphi_1 + \dots + \xi_4\varphi_4 \rangle = \\ &= |\xi| + \frac{\gamma}{|\xi|} \langle \mu_1\xi_1\varphi_1 + \dots + \mu_4\xi_4\varphi_4, \xi_1\varphi_1 + \dots + \xi_4\varphi_4 \rangle = \\ &= |\xi| + \frac{\gamma}{|\xi|} (\mu_1\xi_1^2 + \dots + \mu_4\xi_4^2) \geq \\ &\geq |\xi| + \frac{\gamma}{|\xi|} \mu_1 (\xi_1^2 + \dots + \xi_4^2) = |\xi| + \gamma\mu_1 |\xi| = \\ &= |\xi| (1 + \gamma\mu_1). \end{aligned}$$

Mas $1 + \gamma\mu_1 \geq 1 + \gamma(\mu_1 + \mu_1 - \mu_4) = 1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0$. Logo se $1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0$ obtemos a convexidade de f também para este caso.

Nota 5.0.12 Se $\gamma \leq 0$, f é convexa se e só se $-\gamma \leq \frac{1}{2\mu_4 - \mu_1}$.

Demonstração:

Se $\gamma \leq 0$, $1 + \gamma(2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle)$ toma o valor menor possível quando $2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle$ tomar o maior valor possível, e este valor obtém-se quando $\langle M\eta, \eta \rangle$ for máximo e $\langle M\xi, \xi \rangle$ for mínimo. Assim, obtemos $\eta = \varphi_4$ e $\xi = \varphi_1$ e concluímos então que f é convexa se e só se $1 + \gamma(2\mu_4 - \mu_1) \geq 0$. Como $\mu_1 \leq \mu_4$ então $2\mu_4 - \mu_1 \geq 0$ resultando $-\gamma \leq \frac{1}{2\mu_4 - \mu_1}$. ■

Teorema 5.0.13 Sejam M , f e γ definidos como no teorema precedente e seja φ_i , o vector próprio associado ao valor próprio μ_i . Admite-se que M comuta com E . Então temos dois casos:

1. Se $\det \varphi_4 = -\det \varphi_1$ então f é convexa se e só se f é convexa car-1.
2. Se $\det \varphi_4 = \det \varphi_1$ então f é convexa car-1 se e só se $\gamma \leq \gamma_r$ onde

$$\gamma_r = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2} \right\} & \text{se } \gamma_1 > 0 \text{ e } \gamma_2 > 0 \\ \frac{1}{\gamma_2} & \text{se } \gamma_1 \leq 0 \text{ e } \gamma_2 > 0 \\ \frac{1}{\gamma_1} & \text{se } \gamma_1 > 0 \text{ e } \gamma_2 \leq 0 \\ +\infty & \text{se } \gamma_1 \leq 0 \text{ e } \gamma_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$e \gamma_1 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - 2\mu_1, \quad \gamma_2 = \mu_4 - \mu_1 + \mu_2.$$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em três partes:

Parte 1- A função f é convexa car-1 se verificar a desigualdade da convexidade para todos os elementos ξ, η de $\mathbb{M}^{2 \times 2}$ tais que $\det(\xi - \eta) = 0$.

Assim, podemos afirmar que f é convexa car-1 se e só se

$$\inf_{\xi \neq 0} \inf_{\det \lambda = 0} \{ \langle \nabla^2 f(\xi) \lambda, \lambda \rangle \} \geq 0.$$

Escrevendo $\lambda = t\xi + s\eta$ onde $|\xi| = |\eta| = 1$ e $\langle \xi, \eta \rangle = 0$, pelo teorema precedente vimos que f é convexa car-1 se e só se

$$\inf \left\{ \begin{array}{l} 1 + \gamma (2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle) : |\xi| = |\eta| = 1 : \\ \langle \xi, \eta \rangle = 0, \det(t\xi + s\eta) = 0, t, s \in \mathbb{R}, t^2 + s^2 \neq 0 \end{array} \right\} \geq 0.$$

Tomando

$$m = \inf \{ 2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle : |\xi| = |\eta| = 1 : \langle \xi, \eta \rangle = \det(t\xi + s\eta) = 0, t, s \in \mathbb{R}, t^2 + s^2 \neq 0 \} \quad (5.2)$$

afirmamos que f é convexa car-1 se e só se $1 + \gamma m \geq 0$.

Nos passos seguintes mostraremos que no caso 1, $m = 2\mu_1 - \mu_4$ enquanto no caso 2

$$m = \min \left\{ \mu_1 + \mu_2 - \mu_4, 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \right\}.$$

Parte 2- Como M comuta com E temos

$$M(E\varphi_i) = E(M\varphi_i) = E(\mu_i\varphi_i) = \mu_i E\varphi_i,$$

ou seja, $E\varphi_i$ é vector próprio associado ao valor próprio μ_i , para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, logo $E\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$. Mas por outro lado, $E\varphi_i = \tilde{\varphi}_i$, logo $|E\varphi_i| = |\tilde{\varphi}_i| = |\varphi_i| = 1$, vindo $|\alpha_i| |\varphi_i| = 1$ obtendo-se $\alpha_i = \pm 1$, ou seja $\tilde{\varphi}_i = \pm \varphi_i$.

Assim $\det \varphi_i = \frac{1}{2} \langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_i \rangle = \pm \frac{1}{2} \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \pm \frac{1}{2}$.

Repare-se que se $E\varphi_i = \varphi_i$, isto é, $\det \varphi_i = \frac{1}{2}$, então

$$E\varphi_i = (\varphi_{i,4}, -\varphi_{i,3}, -\varphi_{i,2}, \varphi_{i,1}) = (\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,3}, \varphi_{i,4}) = \varphi_i \implies \begin{cases} \varphi_{i,4} = \varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,3} = -\varphi_{i,2} \end{cases}$$

tendo-se $(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, -\varphi_{i,2}, \varphi_{i,1}) = \varphi_{i,1}(1, 0, 0, 1) + \varphi_{i,2}(0, 1, -1, 0)$, logo $\varphi_i \in \text{lin} \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$, por outro lado, se $E\varphi_i = -\varphi_i$ que corresponde a $\det \varphi_i = -\frac{1}{2}$, então

$$E\varphi_i = (\varphi_{i,4}, -\varphi_{i,3}, -\varphi_{i,2}, \varphi_{i,1}) = (-\varphi_{i,1}, -\varphi_{i,2}, -\varphi_{i,3}, -\varphi_{i,4}) = -\varphi_i \implies \begin{cases} \varphi_{i,4} = -\varphi_{i,1} \\ \varphi_{i,3} = \varphi_{i,2} \end{cases}$$

tendo-se $(\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,2}, -\varphi_{i,1}) = \varphi_{i,1}(1, 0, 0, -1) + \varphi_{i,2}(0, 1, 1, 0)$, logo $\varphi_i \in \text{lin} \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$. Como podemos considerar sempre um sistema formado por vectores próprios linearmente independentes, então temos exactamente dois determinantes iguais a $\frac{1}{2}$ e dois determinantes iguais a $-\frac{1}{2}$. Com efeito, se $\det \varphi_i = \frac{1}{2}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\det \varphi_4 = -\frac{1}{2}$ então $\varphi_i \in \text{lin} \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ e portanto $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ seria linearmente dependente, logo $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ seria também linearmente dependente, contrariando a hipótese admitida.

Aparentemente, parece não ser muito relevante o facto de termos dois determinantes iguais a $\frac{1}{2}$ e dois determinantes iguais a $-\frac{1}{2}$, no entanto este resultado vai ser utilizado na terceira parte da demonstração.

Note-se também que este resultado, levou-nos à determinação de uma base ortonormada para os vectores próprios. Assim, desde que M e E satisfaçam as condições do teorema podemos tomar

$$\varphi_i \in \text{lin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \right\} \text{ para } i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Caso 1- Se $\det \varphi_1 = -\det \varphi_4$

Tomando $\eta = \varphi_1$ e $\xi = \varphi_4$, temos

$$\begin{aligned} \det(\varphi_1 + \varphi_4) &= \frac{1}{2} \langle \varphi_1 + \varphi_4, E(\varphi_1 + \varphi_4) \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi_1 + \varphi_4, E\varphi_1 + E\varphi_4 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_4, E\varphi_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_4, E\varphi_4 \rangle = \\ &= \det \varphi_1 + \det \varphi_4 + \frac{1}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_4, E\varphi_1 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle = \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle = \langle \varphi_1, \pm \varphi_4 \rangle = 0, \end{aligned}$$

logo a escolha é admissível.

Pelo teorema 5.0.11 tínhamos, para $\eta = \varphi_1$ e $\xi = \varphi_4$, $m = 2\mu_1 - \mu_4$. Agora temos mais uma restrição logo o infimo não pode diminuir. Como $m = 2\mu_1 - \mu_4$ é admissível então temos

$$f \text{ convexa car-1} \implies 1 + \gamma(2\mu_1 - \mu_4) \geq 0 \implies \gamma \leq \gamma_c \implies f \text{ convexa.}$$

Como toda a função convexa é convexa car-1 concluímos a equivalência entre a convexidade e a convexidade car-1, neste caso.

Parte 3- Suponhamos então que $\det \varphi_1 = \det \varphi_4$. A escolha $\eta = \varphi_1$ e $\xi = \varphi_4$ não é admissível em (5.2), pois

$$\det(t\varphi_4 + s\varphi_1) = \frac{1}{2}t^2 \langle \varphi_4, E\varphi_4 \rangle + \frac{s^2}{2} \langle \varphi_1, E\varphi_1 \rangle + st \langle \varphi_1, E\varphi_4 \rangle,$$

supondo que $\det \varphi_1 = \det \varphi_4 = \frac{1}{2}$, então $E\varphi_4 = \varphi_4$ e $E\varphi_1 = \varphi_1$, obtendo-se

$$\begin{aligned} \det(t\varphi_4 + s\varphi_1) &= \frac{1}{2}t^2 \langle \varphi_4, \varphi_4 \rangle + \frac{s^2}{2} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + st \langle \varphi_1, \varphi_4 \rangle = \\ &= \frac{1}{2}t^2 |\varphi_4|^2 + \frac{s^2}{2} |\varphi_1|^2 = \frac{t^2 + s^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Supondo, por sua vez, que $\det \varphi_1 = \det \varphi_4 = -\frac{1}{2}$, então $E\varphi_4 = -\varphi_4$ e $E\varphi_1 = -\varphi_1$, obtendo-se

$$\det(t\varphi_4 + s\varphi_4) = -\frac{t^2 + s^2}{2} < 0.$$

Iremos demonstrar que a escolha correcta é

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \xi = \varphi_4 \quad \text{e} \quad t = 0, s = 1$$

ou

$$\eta = \varphi_1 \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 + \varphi_4) \quad \text{e} \quad t = 1, s = 0,$$

que corresponde a $m = \min \left\{ \mu_1 + \mu_2 - \mu_4, 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \right\}$.

Consideremos $\xi, \eta \in \mathbb{R}^4$ tais que $\xi = \sum_{i=1}^4 \xi_i \varphi_i$, $\eta = \sum_{i=1}^4 \eta_i \varphi_i$. Então

$$\begin{aligned} M\eta &= M \left(\sum_{i=1}^4 \eta_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^4 \eta_i M\varphi_i = \sum_{i=1}^4 \eta_i \mu_i \varphi_i, \\ \langle M\eta, \eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^4 \eta_i \mu_i \varphi_i, \sum_{i=1}^4 \eta_i \varphi_i \right\rangle = \sum_{i=1}^4 \eta_i^2 \mu_i \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^4 \eta_i^2 \mu_i. \end{aligned}$$

Analogamente $M\xi = \sum_{i=1}^4 \xi_i \mu_i \varphi_i$ e $\langle M\xi, \xi \rangle = \sum_{i=1}^4 \xi_i^2 \mu_i$. Assim podemos escrever

$$2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle = 2 \sum_{i=1}^4 \eta_i^2 \mu_i - \sum_{i=1}^4 \xi_i^2 \mu_i = \sum_{i=1}^4 (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \mu_i.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\det \varphi_1 = \det \varphi_4 = \frac{1}{2}$, nesse caso temos $E\varphi_1 = \varphi_1$, $E\varphi_4 = \varphi_4$, $E\varphi_2 = -\varphi_2$, $E\varphi_3 = -\varphi_3$. Tendo em conta que $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1 \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle \xi, E\xi \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^4 \xi_i \varphi_i, \sum_{i=1}^4 \xi_i E\varphi_i \right\rangle = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2, \\ \langle \eta, E\eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^4 \eta_i \varphi_i, \sum_{i=1}^4 \eta_i E\varphi_i \right\rangle = \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2, \\ \langle \xi, E\eta \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^4 \xi_i \varphi_i, \sum_{i=1}^4 \eta_i E\varphi_i \right\rangle = \xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3 + \xi_4 \eta_4. \end{aligned}$$

Relembrando (5.2), temos de admitir que

$$\begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle = 0 \\ \det(t\xi + s\eta) = 0. \end{cases}$$

Ora

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle &= 0 \iff \xi_1 \eta_1 + \xi_4 \eta_4 = -(\xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3) \text{ e} \\ \det(t\xi + s\eta) &= 0 \iff t^2 \langle \xi, E\xi \rangle + 2ts \langle \xi, E\eta \rangle + s^2 \langle \eta, E\eta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Substituindo pelas expressões precedentes temos

$$t^2(\xi_1^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) + 2ts(\xi_1 \eta_1 + \xi_4 \eta_4 - \xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3) + s^2(\eta_1^2 + \eta_4^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2) = 0.$$

Assim, as nossas hipóteses são

$$\begin{cases} |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = |\eta|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 = 1 \\ \langle \xi, \eta \rangle = 0 \iff \xi_1 \eta_1 + \xi_4 \eta_4 = -(\xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3) \\ \det(t\xi + s\eta) = 0 \iff \\ t^2(\xi_1^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) + 2ts(\xi_1 \eta_1 + \xi_4 \eta_4 - \xi_2 \eta_2 - \xi_3 \eta_3) + s^2(\eta_1^2 + \eta_4^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

e pretendemos mostrar que

$$m = \min \left\{ \mu_1 + \mu_2 - \mu_4, 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \right\},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \geq \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \geq 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Usando a hipótese $|\xi| = |\eta| = 1$, podemos escrever

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) - \mu_1(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) - \mu_2(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) + \mu_4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2) \geq 0 \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) - 2\mu_1(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) + \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2) \geq 0, \\ \begin{cases} \mu_1(\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2 - \xi_1^2) + \mu_2(\eta_2^2 - \eta_1^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2 - \xi_2^2) + \mu_3(2\eta_3^2 - \xi_3^2) + \\ + \mu_4(2\eta_4^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \geq 0 \\ \text{ou} \\ \mu_1(-2\eta_2^2 - 2\eta_3^2 - 2\eta_4^2 - \xi_1^2) + \mu_2(2\eta_2^2 - \xi_2^2) + \mu_3(2\eta_3^2 - \frac{\xi_3^2}{2} + \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{\xi_2^2}{2} + \frac{\xi_4^2}{2}) + \\ + \mu_4(2\eta_4^2 - \frac{\xi_4^2}{2} + \frac{\xi_1^2}{2} + \frac{\xi_2^2}{2} + \frac{\xi_3^2}{2}) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Pondo em evidência os termos com η_i^2 e ξ_i^2 temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_2 - \mu_1)(\eta_2^2 - \eta_1^2) + (2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2)\eta_3^2 + (2\mu_4 - \mu_2 - \mu_1)\eta_4^2 + \\ \quad + (\mu_4 - \mu_1)\xi_1^2 + (\mu_4 - \mu_2)\xi_2^2 + (\mu_4 - \mu_3)\xi_3^2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ (2\mu_2 - 2\mu_1)\eta_2^2 + (2\mu_3 - 2\mu_1)\eta_3^2 + (2\mu_4 - 2\mu_1)\eta_4^2 + \left(\frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - \mu_1\right)\xi_1^2 + \\ \quad + \left(\frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - \mu_2\right)\xi_2^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{2}(\xi_3^2 - \xi_4^2) \geq 0. \end{array} \right.$$

Como $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \mu_4$ então $\mu_2 - \mu_1, \mu_4 - \mu_1, \mu_4 - \mu_2, \mu_4 - \mu_3, \mu_3 - \mu_2, \mu_3 - \mu_1, \geq 0$. Assim $2\mu_3 - \mu_2 - \mu_1 = \mu_3 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_1 \geq 0$ e $2\mu_4 - \mu_2 - \mu_1 = \mu_4 - \mu_2 + \mu_4 - \mu_1 \geq 0$.

Na primeira fórmula, temos uma soma de termos não negativos e a parcela $(\mu_2 - \mu_1)(\eta_2^2 - \eta_1^2)$. Se $\mu_1 = \mu_2$ então a expressão seria sempre não-negativa e nada mais haveria a demonstrar, logo podemos considerar $\mu_1 \neq \mu_2$.

Na segunda fórmula temos uma soma de termos não-negativos e $\frac{\mu_4 - \mu_3}{2}(\xi_3^2 - \xi_4^2)$. Se $\mu_4 = \mu_3$ então a expressão seria não-negativa e por isso consideramos $\mu_4 \neq \mu_3$.

Assim podemos dividir ambos os membros por $\mu_2 - \mu_1$ na primeira expressão, e por $\mu_4 - \mu_3$ na segunda expressão, vindo

$$\left\{ \begin{array}{l} (\eta_2^2 - \eta_1^2) + \frac{2\mu_3 - 2\mu_2 + \mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\eta_3^2 + \frac{2\mu_4 - 2\mu_2 + \mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\eta_4^2 + \\ \quad + \frac{\mu_4 - \mu_2 + \mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\xi_1^2 + \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\xi_2^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\xi_3^2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ 2\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}\eta_2^2 + 2\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}\eta_3^2 + 2\frac{\mu_4 - \mu_3 + \mu_3 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}\eta_4^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3 + 2\mu_3 - 2\mu_1}{2(\mu_4 - \mu_3)}\xi_1^2 + \\ \quad + \frac{\mu_4 - \mu_3 + 2\mu_3 - 2\mu_2}{2(\mu_4 - \mu_3)}\xi_2^2 + \frac{1}{2}(\xi_3^2 - \xi_4^2) \geq 0, \end{array} \right.$$

obtendo-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_2^2 - \eta_1^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 + \xi_1^2 + \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}(2\eta_4^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\eta_3^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\xi_3^2 \geq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2) + 2\eta_4^2 + \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}(2\eta_4^2 + 2\eta_3^2 + \xi_1^2) + 2\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}\eta_2^2 + \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_4 - \mu_2}\xi_2^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Suponhamos, por absurdo, que existem ξ, η, s, t como em (5.3) que não verificam (5.4), isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_2^2 - \eta_1^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 + \xi_1^2 + \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}(2\eta_4^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\eta_3^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\xi_3^2 < 0 \\ \text{e} \\ (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2) + 4\eta_4^2 + 2\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}(2\eta_4^2 + 2\eta_3^2 + \xi_1^2) + 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}\eta_2^2 + 2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_4 - \mu_2}\xi_2^2 < 0. \end{array} \right.$$

Multiplicando por -1 ambos os membros de cada uma das inequações, vem

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 > \eta_4^2 + \xi_1^2 + \frac{\mu_4 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}(2\eta_4^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2) + 2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\eta_3^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}\xi_3^2 \\ \text{e} \\ \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > \xi_1^2 + 4\eta_4^2 + 2\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}(2\eta_4^2 + 2\eta_3^2 + \xi_1^2) + 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_1}\eta_2^2 + 2\frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_4 - \mu_2}\xi_2^2. \end{array} \right.$$

Tendo em conta os membros da direita de cada uma das inequações podemos desprezar alguns termos não-negativos, e notando que $\mu_4 - \mu_2 \geq \mu_4 - \mu_3 \geq 0$, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 > \frac{(\mu_4 - \mu_2)\xi_2^2 + (\mu_4 - \mu_3)\xi_3^2}{\mu_2 - \mu_1} \geq \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}(\xi_2^2 + \xi_3^2) \\ \text{e} \\ \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}(\eta_2^2 - \eta_3^2). \end{array} \right.$$

Como $\det(t\xi + s\eta) = 0$ e usando as desigualdades acima temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(t\xi + s\eta) = t^2(\xi_1^2 + \xi_4^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) + s^2(\eta_1^2 + \eta_4^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2) - 4ts(\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) > \\ &> t^2\left(\xi_1^2 + 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}(\eta_2^2 + \eta_3^2)\right) + s^2\left(\eta_4^2 + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}(\xi_2^2 + \xi_3^2)\right) - 4|ts|\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 \geq \\ &\geq 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}t^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}s^2(\xi_2^2 + \xi_3^2) - 4|ts|\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$|\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3| = |((\xi_2, \xi_3), (\eta_2, \eta_3))| \leq |(\xi_2, \xi_3)| |(\eta_2, \eta_3)| = \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}$$

logo

$$-|\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3| \geq -\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2}.$$

Retomando a desigualdade e aplicando este resultado, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &> 4\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_4 - \mu_3}t^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + \frac{\mu_4 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_1}s^2(\xi_2^2 + \xi_3^2) - 4|ts|\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} = \\ &= \frac{1}{(\mu_4 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_1)} \left(4(\mu_2 - \mu_1)^2 t^2 (\eta_2^2 + \eta_3^2) - 4|ts| \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} (\mu_4 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_1) + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_4 - \mu_3)^2 s^2 (\xi_2^2 + \xi_3^2) \right) = \\ &= \frac{1}{(\mu_4 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_1)} \left(2(\mu_2 - \mu_1)|t|\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} - (\mu_4 - \mu_3)|s|\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $(\mu_4 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_1) \geq 0$ temos

$$\left(2(\mu_2 - \mu_1)|t|\sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} - (\mu_4 - \mu_3)|s|\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} \right)^2 < 0$$

o que é absurdo, logo temos (5.4).

Assim f é convexa car-1 se e só se $1 + \gamma m \geq 0$ com $m = \min \left\{ \mu_1 + \mu_2 - \mu_4, 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \right\}$.

Tomando $\gamma_1 = \mu_4 - \mu_1 - \mu_2$ e $\gamma_2 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - 2\mu_1$.

1- Se $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$ então $m = \min \{-\gamma_1, -\gamma_2\} < 0$ e assim $1 + \gamma m \geq 0 \iff \gamma \leq -\frac{1}{m} = \min \left\{ \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2} \right\}$.

2- Se $\gamma_1 \leq 0$ e $\gamma_2 \leq 0$ então $m \geq 0$, logo a desigualdade $1 + \gamma m \geq 0$ verifica-se sempre, por isso nesse caso f é sempre convexa car-1.

3- Se $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 \leq 0$ então $-\gamma_1 < 0$ e $-\gamma_2 \geq 0$ logo $m = -\gamma_1 < 0$, obtendo-se $1 - \gamma\gamma_1 \geq 0$, isto é, $\gamma \leq \frac{1}{\gamma_1}$.

4- Se $\gamma_1 \leq 0$ e $\gamma_2 > 0$ então $-\gamma_1 \geq 0$ e $-\gamma_2 < 0$ logo $m = -\gamma_2 < 0$, obtendo-se $1 - \gamma\gamma_2 \geq 0$, isto é, $\gamma \leq \frac{1}{\gamma_2}$.

Concluimos então que f é convexa car-1 se e só se $\gamma \leq \gamma_r$ onde

$$\gamma_r = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2} \right\} & \gamma_1 > 0 \text{ e } \gamma_2 > 0 \\ \frac{1}{\gamma_2} & \gamma_1 \leq 0 \text{ e } \gamma_2 > 0 \\ \frac{1}{\gamma_1} & \gamma_1 > 0 \text{ e } \gamma_2 \leq 0 \\ +\infty & \gamma_1 \leq 0 \text{ e } \gamma_2 \leq 0. \end{cases}$$

■

Corolário 5.0.14 Considere-se a função $g(\xi) = \frac{\langle M\xi, \xi \rangle}{|\xi|}$.

1. Seja M como no teorema 5.0.11, então g é convexa $\iff 2\mu_1 - \mu_4 \geq 0$.
2. Seja M como no teorema 5.0.13 com $\det \varphi_1 = \det \varphi_4$ então, g é convexa car-1 se e só se $\mu_1 + \mu_2 - \mu_4 \geq 0$ e $2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \geq 0$.

Demonstração:

1. Comparando a função f do teorema 5.0.11 com a função g do corolário, podemos de imediato concluir que g é convexa se e só se

$$\inf_{\substack{|\xi|=|\eta|=1 \\ \langle \xi, \eta \rangle = 0}} \{2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle\} \geq 0 \quad \text{sse} \quad 2\mu_1 - \mu_4 \geq 0.$$

2. Pelo teorema 5.0.13 podemos afirmar que g é convexa car-1 se e só se

$$m = \inf \{2 \langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle : |\xi| = |\eta| = 1 \text{ e } \langle \xi, \eta \rangle = \det(t\xi + s\eta) = 0, t^2 + s^2 \neq 0\} \geq 0.$$

$$\text{Provamos que } m = \min \left\{ \mu_1 + \mu_2 - \mu_4, 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \right\} \geq 0, \text{ logo } \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 \geq 0 \text{ e } 2\mu_1 - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \geq 0.$$

■

Note que se $\det \varphi_1 = -\det \varphi_4$, pelo teorema 5.0.13 g é convexa car-1 se e só se g é convexa se e só se $2\mu_1 - \mu_4 \geq 0$.

Proposição 5.0.15 Considere-se a função $q(\xi) = \langle M\xi, \xi \rangle$

1. q é convexa sse $\mu_1 \geq 0$
2. q é convexa car-1 sse

$$\begin{cases} \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \geq 0 & \text{se } \det \varphi_1 = -\det \varphi_2 \\ \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} \geq 0 & \text{se } \det \varphi_1 = \det \varphi_2. \end{cases}$$

Demonstração:

1. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi_\alpha} &= 2(M\xi)_\alpha, \\ \frac{\partial^2 q(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} &= 2m_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \frac{\partial^2 q(\xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta &= 2 \sum_{\alpha, \beta=1}^4 m_{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta = 2 \langle M\lambda, \lambda \rangle, \end{aligned}$$

temos então que f é convexa se e só se $\inf_{\lambda \neq 0} \{\langle M\lambda, \lambda \rangle\} \geq 0$. O mínimo obtém-se para $\lambda = \varphi_1$ e $\langle M\lambda, \lambda \rangle = \langle \mu_1 \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \mu_1$.

Logo a condição é $\mu_1 \geq 0$.

2. No caso em que $\det \varphi_1 = -\det \varphi_2$, dizemos que q é convexa car-1 se e só se

$$\inf_{\xi \neq 0} \inf_{\det \lambda = 0} \{\langle \nabla^2 q(\xi) \lambda, \lambda \rangle\} \geq 0 \iff \inf_{\det \lambda = 0} \{\langle M\lambda, \lambda \rangle\} \geq 0.$$

Pelo que vimos no teorema precedente o mínimo de $2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle$ para $\eta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}$ e $\xi = \varphi_4$. Repare que como μ_4 é o maior valor próprio de M então para $\xi = \varphi_4$ a expressão $\langle M\xi, \xi \rangle$ atinge o seu valor máximo.

Assim, fixado $\xi = \varphi_4$, a expressão $2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle$ toma o valor mínimo para o mínimo valor de $\langle M\eta, \eta \rangle$ e pelo que vimos esse valor obtém-se quando $\eta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}$. A escolha $\lambda = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}$ é admissível pois $\det \lambda = 0$, logo podemos concluir que q é convexa car-1 se e só se

$$\langle M\lambda, \lambda \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2), \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}} \right\rangle = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \geq 0.$$

Se $\det \varphi_1 = \det \varphi_2$ então $\det \varphi_1 = -\det \varphi_3$ logo podemos escolher $\lambda = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{\sqrt{2}}$ obtendo-se $\det \lambda = 0$ e $\langle M\lambda, \lambda \rangle = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} \geq 0$.

Proposição 5.0.16 *Considerando novamente as hipóteses do teorema 5.0.13, mas agora tomando $\gamma < 0$, temos*

$$f \text{ é convexa car-1} \iff \begin{cases} 1 - |\gamma| \left(2\mu_4 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right) \geq 0 \\ 1 - |\gamma| (\mu_4 + \mu_3 - \mu_1) \geq 0. \end{cases}$$

Demonstração:

A função f é convexa car-1 se e só se

$$\inf \{ 1 + \gamma (2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle) : |\xi| = |\eta| = 1 \text{ e } \langle \xi, \eta \rangle = \det(t\xi + s\eta) = 0, t^2 + s^2 \neq 0 \} \geq 0.$$

Como $\gamma < 0$ basta mostrar que $1 + \gamma (2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle) \geq 0$ para o supremo de $2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle$. Assim tomando

$$m = \sup \{ 2\langle M\eta, \eta \rangle - \langle M\xi, \xi \rangle : |\xi| = |\eta| = 1 \text{ e } \langle \xi, \eta \rangle = \det(t\xi + s\eta) = 0, t^2 + s^2 \neq 0 \},$$

afirmamos que f é convexa car-1 se e só se $1 + \gamma m \geq 0$.

Como $|\gamma| = -\gamma$ vem $1 + \gamma m = 1 - |\gamma| m \geq 0$.

O nosso objectivo é mostrar que

$$m = \left\{ \sup \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \right\} = \max \left\{ 2\mu_4 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \mu_4 + \mu_3 - \mu_1 \right\},$$

isto é,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \leq 2\mu_4 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \\ \text{ou} \\ \sum_{i=1}^4 \mu_i (2\eta_i^2 - \xi_i^2) \leq \mu_4 + \mu_3 - \mu_1. \end{cases}$$

Comparando estas duas desigualdades com (5.4) no teorema 5.0.13, vemos que podemos utilizar o mesmo raciocínio tomando μ_1 no lugar de μ_4 , μ_2 no lugar de μ_3 e vice-versa.

Note-se, contudo, que neste caso vamos dividir a primeira desigualdade por $\mu_1 - \mu_2$ e a segunda por $\mu_3 - \mu_4$ que são números negativos, logo teremos de trocar o sinal das desigualdades.

Podemos então afirmar que

$$m = \max \left\{ 2\mu_4 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \mu_4 + \mu_3 - \mu_1 \right\}$$

²Considerámos φ_3 e não φ_4 porque $\mu_3 \leq \mu_4$ e queremos o ínfimo.

logo f é convexa car-1 sse

$$\begin{cases} 1 - |\gamma| \left(2\mu_4 - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right) \geq 0 \\ 1 - |\gamma| (\mu_4 + \mu_3 - \mu_1) \geq 0. \end{cases}$$

■

Podemos observar que, enquanto γ_c depende apenas dos valores próprios de M , γ_r depende também do sinal dos determinantes dos vectores próprios de M e por isso se acrescenta a hipótese de M comutar com E .

Nota 5.0.17 Vejamos agora uma função convexa car-1 que não é convexa. Seja

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

e consideremos f definida como nos teoremas 5.0.11 e 5.0.13.

É fácil ver que M comuta com E , logo podemos aplicar o teorema 5.0.13 e considerar

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \right)$$

a base ortonormada constituída pelos vectores próprios de M .

Vamos então determinar qual o valor próprio associado a cada vector próprio

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mu_1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mu_2 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \mu_3 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \mu_4 = 10.$$

Pelo teorema 5.0.11, f é convexa sse $\gamma \leq \gamma_c$. Como $\mu_4 - 2\mu_1 = 10 - 8 = 2 \geq 0$ então $\gamma_c = \frac{1}{2}$, logo f é convexa se e só se $\gamma \leq \frac{1}{2}$.

Como $\det \varphi_1 = \det \varphi_4 = \frac{1}{2}$, pelo teorema 5.0.13 temos $\gamma_1 = \frac{10+8}{2} - 8 = 1 > 0$, $\gamma_2 = 10 - (4+8) = -2 \leq 0$ logo $\gamma_r = \frac{1}{\gamma_1} = 1$, logo f é convexa car-1 se e só se $\gamma \leq 1$.

Se tomarmos $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ temos uma função convexa car-1 que não é convexa.

Nota 5.0.18 Consideremos $M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. A matriz M é simétrica e comuta com E . Os valores

próprios de M são: 8, 10 e 0 com multiplicidade. Podemos considerar para respectivos espaços próprios $E_0 = \text{lin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0) \right\}$, $E_8 = \text{lin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \right\}$, $E_{10} = \text{lin} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \right\}$.

Neste caso $\det \varphi_1 = -\frac{1}{2} = -\det \varphi_4$ e assim f é convexa car-1 se e só se f é convexa se e só se $\gamma \leq \gamma_c$. Como $\mu_4 - 2\mu_1 = 10 \geq 0$ temos $\gamma_c = \frac{1}{10}$, logo f é convexa car-1 se e só se $\gamma \leq \frac{1}{10}$.

Nota 5.0.19 Se $M = E$ temos $\langle M\xi, \xi \rangle = \langle E\xi, \xi \rangle = 2 \det \xi$.

Assim,

$$f(\xi) = \begin{cases} |\xi| + 2\gamma \frac{\det \xi}{|\xi|} & \text{se } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

Os valores próprios de E são 1 e -1 ($\mu_1 = \mu_2 = -1$ e $\mu_3 = \mu_4 = 1$).

Pelo teorema 5.0.11, temos $1 - 2(-1) = 3 > 0$, logo $\gamma_c = \frac{1}{3}$.

Pelo teorema 5.0.13, obtemos $\gamma_1 = 3 > 0$, $\gamma_2 = 3 > 0$, logo $\gamma_r = \frac{1}{3} = \gamma_c$.

Logo, neste caso, a convexidade car-1 é equivalente à convexidade.

Repare, que neste caso, f é rotacionalmente invariante.

Para a quasiconvexidade iremos ter: f quasiconvexa sse $\gamma \leq \gamma_q$ para um certo $\gamma_q \in \mathbb{R}$.

Como a quasiconvexidade é uma condição mais forte que a convexidade car-1 e mais fraca que a convexidade então $\gamma_q \in [\gamma_c, \gamma_r]$.

Falta então decidir se $\gamma_q = \gamma_r$ ou $\gamma_q < \gamma_r$. A segunda hipótese seria mais interessante pois ficaria resolvida a questão da equivalência ou não da quasiconvexidade e da convexidade car-1. No entanto, os resultados numéricos tendem a mostrar que $\gamma_q = \gamma_r$, obtendo-se assim exemplos de funções homogêneas de grau 1 quasiconvexas que não são convexas.

Capítulo 6

O contra-exemplo de Šverak

Ao longo dos anos tem-se trabalhado arduamente na tentativa de compreender a propriedade de quasiconvexidade.

Conforme já afirmámos, é muito difícil averiguar se uma dada função é ou não quasiconvexa. Por outro lado, é relativamente fácil (em princípio) verificar se uma dada função é convexa car-1. Isto leva-nos a investigar em que condições a convexidade car-1 é equivalente à quasiconvexidade.

Morrey apresentou, em 1952, uma conjectura segundo a qual a convexidade car-1 não implica a quasiconvexidade para $n \geq 2$ e $m \geq 2$.

Recentemente (1993) Šverak mostrou que a convexidade car-1 não implica a quasiconvexidade para $n \geq 2$, $m \geq 3$.

É este elegante contra-exemplo que vamos apresentar em seguida.

Šverak começou por criar uma função f convexa car-1 definida num subespaço tri-dimensional de $\mathbb{M}^{3 \times 2}$. Posteriormente procurou uma deformação u para a qual não se verifica a desigualdade da quasiconvexidade. Encontrada essa deformação, o próximo passo foi a extensão de f ao espaço $\mathbb{M}^{3 \times 2}$, de modo a preservar a propriedade de convexidade car-1 e a não quasiconvexidade.

Vamos, então descrever a função f convexa car-1, e a deformação u definida no espaço \mathbb{R}^2 , com valores em \mathbb{R}^3 , para as quais não se verifica a desigualdade da quasiconvexidade.

Seja $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ dada por

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \sin 2\pi x_1 \\ \sin 2\pi x_2 \\ \sin 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix},$$

então

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi x_2 \\ \cos 2\pi(x_1 + x_2) & \cos 2\pi(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ $\nabla u(x)$ pertence ao subespaço L de $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ dado por

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} : r, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma base para L cujos elementos tenham característica-1 é

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Seja $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f \left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \\ t & t \end{pmatrix} \right) = -rst. \quad (6.1)$$

Para cada direcção car-1 contida em L temos que f é convexa. De facto, para cada direcção car-1, f é linear. Sendo assim f é convexa car-1.

Usando a fórmula conhecida da trigonometria

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} f(\nabla u(x)) dx &= - \int_{[0,1]^2} \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \cos(2\pi(x_1 + x_2)) dx_1 dx_2 = \\ &= - \int_{[0,1]^2} (\cos(2\pi x_1))^2 (\cos(2\pi x_2))^2 dx_1 dx_2 + \int_{[0,1]^2} \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \sin(2\pi x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Vejamos que

$$\int_0^1 \cos(2\pi x_i) \sin(2\pi x_i) dx_i = 0 \text{ para } i \in \{1, 2\}.$$

Integrando por partes temos,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(2\pi x_i) \sin(2\pi x_i) dx_i &= \left(-\frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi x_i))^2 \right)_0^1 - \int_0^1 \cos(2\pi x_i) \sin(2\pi x_i) dx_i = \\ &= - \int_0^1 \cos(2\pi x_i) \sin(2\pi x_i) dx_i. \end{aligned}$$

obtendo-se

$$2 \int_0^1 \cos(2\pi x_i) \sin(2\pi x_i) dx_i = 0,$$

logo

$$\int_{[0,1]^2} \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \sin(2\pi x_2) dx_1 dx_2 = 0.$$

Assim

$$\int_{[0,1]^2} f(\nabla u(x)) dx = - \int_{[0,1]^2} (\cos(2\pi x_1))^2 (\cos(2\pi x_2))^2 dx_1 dx_2 < 0 = f(0). \quad (6.2)$$

Concluindo-se que f não é quasiconvexa.

O próximo passo é estender f ao espaço $\mathbb{M}^{3 \times 2}$.

Para facilitar, vamos identificar $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ com \mathbb{R}^6 e a norma euclideana, $|X|$, em \mathbb{R}^6 para $X \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$.

Lema 6.0.20 *Seja L o subespaço linear de $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ definido acima, e seja $P : \mathbb{M}^{3 \times 2} \rightarrow L$ a projecção ortogonal. Seja $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por 6.2. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon) > 0$ tal que a função $F : \mathbb{M}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(X) = f(PX) + \varepsilon |X|^2 + \varepsilon |X|^4 + k |X - PX|^2, \quad (6.3)$$

é convexa car-1 em $\mathbb{M}^{3 \times 2}$.

Demonstração:

Começemos por definir explicitamente a projecção $P : \mathbb{M}^{3 \times 2} = \mathbb{R}^6 \mapsto L$.

Seja $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \in \mathbb{R}^6$ arbitrário e

$$(L_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), L_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0), L_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1)),$$

a base de L como vimos.

A projecção de X em L define-se por

$$P(X) = \sum_{i=1}^3 \langle X, L_i \rangle L_i = (X_1, 0, 0, X_4, \frac{X_5 + X_6}{2}, \frac{X_5 + X_6}{2}).$$

Para $A, Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$ arbitrários determinemos $\left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0}$:

$$\begin{aligned} F(A + tY) &= \\ &= f(P(A + tY)) + \varepsilon |A + tY|^2 + \varepsilon |A + tY|^4 + k |A + tY - P(A + tY)|^2. \end{aligned}$$

Calculemos, separadamente,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\varepsilon |A + tY|^2) &= \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} (\langle A + tY, A + tY \rangle) = \\ &= \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} (\langle A, A \rangle + 2t \langle A, Y \rangle + t^2 \langle Y, Y \rangle) = 2\varepsilon \langle Y, Y \rangle = 2\varepsilon |Y|^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\varepsilon |A + tY|^4) = \frac{d}{dt} \left(4\varepsilon |A + tY|^3 \frac{d}{dt} |A + tY| \right)$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |A + tY| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle A, A \rangle + 2t \langle A, Y \rangle + t^2 \langle Y, Y \rangle} = \\ &= \frac{\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle}{|A + tY|}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\varepsilon |A + tY|^4) &= \frac{d}{dt} \left(4\varepsilon |A + tY|^3 \frac{\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle}{|A + tY|} \right) = \\ &= 4\varepsilon \frac{d}{dt} \left(|A + tY|^2 (\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle) \right) = \\ &= 4\varepsilon \left(2 |A + tY| \frac{\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle}{|A + tY|} (\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle) + \langle Y, Y \rangle |A + tY|^2 \right) = \\ &= 4\varepsilon \left(2 (\langle A, Y \rangle + t \langle Y, Y \rangle)^2 + \langle Y, Y \rangle |A + tY|^2 \right). \end{aligned}$$

Assim, para $t = 0$ vem

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} (\varepsilon |A + tY|^4) \right)_{t=0} = 8\varepsilon \langle A, Y \rangle^2 + 4\varepsilon |Y|^2 |A|^2.$$

Do mesmo modo,

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(|A + tY - PA - tPY|^2 \right) = 2 |Y - PY|^2.$$

Substituindo, temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} = \\ & = \left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0} + 2\varepsilon |Y|^2 + 8\varepsilon \langle A, Y \rangle^2 + 4\varepsilon |A|^2 |Y|^2 + 2k |Y - PY|^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Considerando $A = (A_1, \dots, A_6)$ e $Y = (Y_1, \dots, Y_6)$ vamos determinar

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0}.$$

Tendo em conta que

$$\begin{aligned} A + tY &= (A_1 + tY_1, \dots, A_6 + tY_6) \quad \text{e} \\ P(A + tY) &= \left(A_1 + tY_1, 0, 0, A_4 + tY_4, \frac{A_5 + tY_5 + A_6 + tY_6}{2}, \frac{A_5 + tY_5 + A_6 + tY_6}{2} \right), \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0} = \\ & = \left(\frac{d^2}{dt^2} \left(-(A_1 + tY_1)(A_4 + tY_4) \frac{A_5 + A_6 + t(Y_5 + Y_6)}{2} \right) \right)_{t=0} = \\ & \left[\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (-Y_1(A_4 + tY_4)(A_5 + A_6 + t(Y_5 + Y_6)) + \\ & -Y_4(A_1 + tY_1) \frac{A_5 + A_6 + t(Y_5 + Y_6)}{2} - \frac{Y_5 + Y_6}{2} (A_1 + tY_1)(A_4 + tY_4)) \end{aligned} \right]_{t=0} = \\ & = -Y_1 Y_4 \frac{A_5 + A_6}{2} - Y_1 A_4 \frac{Y_5 + Y_6}{2} - Y_4 Y_1 \frac{A_5 + A_6}{2} + \\ & \quad -Y_4 A_1 \frac{Y_5 + Y_6}{2} - Y_1 A_4 \frac{Y_5 + Y_6}{2} - A_1 Y_4 \frac{Y_5 + Y_6}{2} = \\ & = -(Y_1 Y_4 (A_5 + A_6) + Y_1 A_4 (Y_5 + Y_6) + Y_4 A_1 (Y_5 + Y_6)) = \\ & = -(Y_1 Y_4 (A_5 + A_6) + A_4 Y_1 Y_5 + A_4 Y_1 Y_6 + A_1 Y_4 Y_5 + A_1 Y_4 Y_6), \end{aligned}$$

como $(Y_i - Y_j)^2 \geq 0$ então $Y_i Y_j \leq \frac{1}{2}(Y_i^2 + Y_j^2) \leq \frac{1}{2}|Y|^2$, $\forall i, j \in \{1, \dots, 6\}$ tais que $i \neq j$ logo

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0} &\geq -|Y|^2 (A_1 + A_1 + A_4 + A_4 + A_5 + A_6) \geq \\ &\geq -2|Y|^2 (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6|) \geq \\ &\geq -c|A||Y|^2. \end{aligned}$$

A última desigualdade resulta da equivalência das normas da soma e euclidiana em \mathbb{R}^6 .

Resumindo

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0} \geq -c|A||Y|^2,$$

para todo $A, Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$.

Atendendo a (6.4) podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} \geq \\ & \geq -c|A||Y|^2 + 2\varepsilon|Y|^2 + 4\varepsilon|A|^2|Y|^2 + 8\varepsilon\langle A, Y \rangle^2 + 2k|Y - PY|^2 \geq \\ & \geq -c|A||Y|^2 + 4\varepsilon|A|^2|Y|^2 = \\ & = (-c|A| + 4\varepsilon|A|^2)|Y|^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

para todo $A, Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$.

Isto mostra que

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} \geq 0 \text{ para cada } A \in \mathbb{R}^6, \text{ com } |A| \geq \frac{c}{4\varepsilon} \text{ e cada } Y \in \mathbb{R}^6.$$

De (6.4) vemos também que

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} \geq \left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A + tY)) \right)_{t=0} + 2\varepsilon|Y|^2 + 2k|Y - PY|^2,$$

para todo $A, Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$, pois os termos eliminados são não negativos.

Denominemos o lado direito da última desigualdade por $g(A, Y, k)$.

Temos que, g é contínua em $\mathbb{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{R}$, pois é a soma de funções contínuas.

Seja

$$\mathcal{K} = \left\{ (A, Y) \in \mathbb{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{M}^{3 \times 2}, |A| \leq \frac{c}{4\varepsilon}, \text{ car}Y = 1 \text{ e } |Y| = 1 \right\}.$$

Vamos mostrar que \mathcal{K} é um subconjunto compacto de $\mathbb{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{M}^{3 \times 2}$, mostrando que \mathcal{K} é fechado e limitado.

$$\mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \text{ onde } \mathcal{A} = \left\{ A \in \mathbb{M}^{3 \times 2} : |A| \leq \frac{c}{4\varepsilon} \right\} \text{ e } \mathcal{Y} = \{ Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2} : \text{car}Y = 1 \text{ e } |Y| = 1 \}.$$

\mathcal{A} é limitado por definição.

\mathcal{A} pode ser encarado como a pré-imagem do fechado $[0, \frac{c}{4\varepsilon}]$ de \mathbb{R} pela aplicação contínua $|\cdot|$ definida de $\mathbb{M}^{3 \times 2}$ em \mathbb{R} , logo \mathcal{A} é fechado.

Mostremos então que \mathcal{Y} é fechado.

Para tal consideremos $(Y_n)_n \subseteq \mathcal{Y}$ tal que $Y_n \rightarrow Y$ e mostremos que $Y \in \mathcal{Y}$.

Se $Y_n \in \mathcal{Y}$ então $\text{car}(Y_n) = 1$ e $|Y_n| = 1$.

Suponhamos $(Y_n)_n \subseteq \mathcal{Y}$ tal que $Y_n \rightarrow Y$ e mostremos que $Y \in \mathcal{Y}$.

Se $Y_n \in \mathcal{Y}$ então $\text{car}(Y_n) = 1$ e $|Y_n| = 1$.

Como a norma é contínua então

$$|Y| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |Y_n| = 1.$$

Se $\text{car}Y_n = 1$ então para cada submatriz Y'_n de Y_n tem-se $\det(Y'_n) = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Utilizando a continuidade do determinante obtemos $\det Y' = 0$, onde Y' designa uma submatriz de Y , arbitrária, logo $\text{car}Y \leq 1$. Mas como vimos, $|Y| = 1$, logo $\text{car}Y \geq 1$.

Assim, $\text{car}Y = 1$ e $|Y| = 1$ logo $Y \in \mathcal{Y}$, concluindo-se que \mathcal{Y} é fechado como pretendíamos.

Se \mathcal{A} e \mathcal{Y} são fechados então $\mathcal{K} = \mathcal{A} \times \mathcal{Y}$ é fechado.

O conjunto \mathcal{K} é limitado pois $\mathcal{K} \subseteq B((0, 0), \frac{c}{4\varepsilon} + 1)$. Podemos então concluir que \mathcal{K} é compacto.

O nosso objectivo é mostrar que existe k_0 tal que $g(A, Y, k_0) > \varepsilon$, para todo o $(A, Y) \in \mathcal{K}$.

Suponhamos, por absurdo, que não existe k_0 nestas condições. Então nesse caso, existiria uma sucessão de pontos $(A^{(k)}, Y^{(k)}) \in \mathcal{K}$, tais que $g(A^{(k)}, Y^{(k)}, k) \leq \varepsilon$, $\forall k$.

Como \mathcal{K} é compacto, podemos extrair uma subsucessão de pontos $(A^{(k_1)}, Y^{(k_1)}) \in \mathcal{K}$, convergente, com limite $(\bar{A}, \bar{Y}) \in \mathcal{K}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(A^{(k_1)} + tY^{(k_1)})) \right)_{t=0} &= g(A^{(k_1)}, Y^{(k_1)}, k_1) - 2\varepsilon |Y^{(k_1)}| - 2k_1 |Y^{(k_1)} - PY^{(k_1)}|^2 \leq \\ &\leq g(A^{(k_1)}, Y^{(k_1)}, k_1) - 2\varepsilon |Y^{(k_1)}|. \end{aligned}$$

Como $Y^{(k_1)} \rightarrow \bar{Y}$, $A^{(k_1)} \rightarrow \bar{A}$ e $|\bar{Y}| = 1$ então

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} f(P(\bar{A} + t\bar{Y})) \right)_{t=0} \leq \varepsilon - 2\varepsilon = -\varepsilon.$$

Mas isto contradiz o facto de f ser convexa car-1 em L (proposição 3.2.6).

Logo podemos admitir que existe $k_0 > 0$ tal que $g(A; Y, k_0) > \varepsilon \quad \forall (A, Y) \in \mathcal{K}$.

Assim, para $k = k_0$ temos $\left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} > \varepsilon \quad \forall (A, Y) \in \mathcal{K}$.

Como $\left(\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \right)_{t=0} \geq 0$ para cada $A \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$ com $|A| \geq \frac{c}{4\varepsilon}$ e cada $Y \in \mathbb{M}^{3 \times 2}$ então $\frac{d^2}{dt^2} F(A + tY) \geq 0 \quad \forall (A, Y) \in \mathbb{M}^{3 \times 2} \times \mathbb{M}^{3 \times 2}$, concluindo-se que F é convexa car-1. ■

Teorema 6.0.21 *Existe $\varepsilon > 0$ e $k > 0$ tais que, a função F dada por (6.3) é convexa car-1, mas não é quasiconvexa.*

Demonstração:

Seja u a função trigonométrica definida acima.

Como as funções *seno* e *coseno* são limitadas por 1 então $|\nabla u| \leq 2$ e assim por (6.2) podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{[0,1]^2} (f(\nabla u(x)) + \varepsilon |\nabla u(x)|^2 + \varepsilon |\nabla u(x)|^4) dx < 0. \quad (6.6)$$

Pelo lema anterior F é convexa car-1, como $\nabla u \in L$ então $\nabla u = P\nabla u$ logo $|\nabla u(x) - P\nabla u(x)| = 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^2$.

Assim

$$F(\nabla u(x)) = f(\nabla u(x)) + \varepsilon |\nabla u(x)|^2 + \varepsilon |\nabla u(x)|^4,$$

logo, por (6.6), tem-se

$$\int_{[0,1]^2} F(\nabla u(x)) dx < 0 = F(0),$$

concluindo-se que F não é quasiconvexa. ■

Corolário 6.0.22 *Seja $N \geq 2$ e $m \geq 3$ e $T: \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{M}^{3 \times 2}$ definida por*

$$T(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Seja $\bar{F}: \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\bar{F}(X) = F(T(X))$, onde F designa a função do teorema anterior. Então \bar{F} é convexa car-1, mas não é quasiconvexa.

Demonstração:

Como T transforma matrizes car-1 em matrizes car-1 ou car-0, então se F é convexa car-1 também \bar{F} é convexa car-1.

Considerando a função periódica

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_N) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2), 0, \dots, 0),$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a função trigonométrica definida acima, temos

$$D\bar{u}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\bar{F}(D\bar{u}) = F(TD\bar{u}) = F(\nabla u),$$

logo

$$\int_{[0,1]^n} \bar{F}(D\bar{u}(x)) dx = \int_{[0,1]^2} F(\nabla u(x)) dx < 0 = F(0) = \bar{F}(0),$$

concluindo-se que \bar{F} não é quasiconvexa, encontrando-se o contra-exemplo desejado para $m \geq 3$ e $N \geq 2$. ■

Capítulo 7

Uma tentativa para relacionar quasiconvexidade e convexidade característica 1 no caso $m = 2$

Neste capítulo apresentam-se algumas ideias contidas no artigo “Some Remarks on quasiconvexity and Rank-one convexity” de Pedregal.

Este trabalho baseia-se na comparação entre laminados e medidas de Young gradiente homogéneas. Como vimos no capítulo anterior, um laminado é uma medida de probabilidade para a qual a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função convexa car-1, enquanto uma medida de Young gradiente homogénea é uma medida de probabilidade para a qual a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função quasiconvexa. Assim, averiguar se toda a função convexa car-1 é quasiconvexa, é equivalente a averiguar se toda a medida de Young gradiente homogénea é um laminado.

Todas as medidas de probabilidade apresentadas consideram-se de suporte compacto em $\mathbb{M}^{m \times n}$.

O capítulo está organizado do seguinte modo: na primeira secção, introduzimos condições necessárias para a quasiconvexidade e, em particular, apresenta-se uma condição mais forte que a convexidade car-1 que está de algum modo relacionada com o contra-exemplo de Šverak; na segunda secção, reformulamos o contra-exemplo de Šverak, apresentado no capítulo V, mostrando que uma determinada medida de Young gradiente homogénea associada a uma deformação periódica, não é um laminado; na terceira e última secção ocupar-nos-emos do caso $m = 2$. Conjectura-se que o mesmo tipo de deformação envolvida no contra-exemplo do caso $m \geq 3$, é um laminado quando $m = 2$.

7.1 Condições necessárias para a quasiconvexidade

Nesta secção iremos ver como se obtêm algumas condições necessárias para a quasiconvexidade. Em particular iremos ver como se deduz uma condição mais forte que a convexidade car-1 e que está, de algum modo, relacionada com o contra-exemplo de Šverak.

Este raciocínio baseia-se na utilização de um determinado tipo de deformação já antes utilizada por Murat e Tartar e é semelhante à demonstração da necessidade da convexidade car-1 para a quasiconvexidade.

Tomando $n \in \mathbb{R}^n$ unitário e $a \in \mathbb{R}^m$ consideremos

$$u(x) = \int_0^{x \cdot n} \chi(s) ds a,$$

onde $\chi(x) = \chi_{(0,\lambda)}(x) - \lambda$ para $0 < \lambda < 1$ e $x \cdot n$ designa o produto interno em \mathbb{R}^n dos vectores x e n . Depois de estendermos por periodicidade χ a todo o \mathbb{R} , vemos na secção 3.1, teorema 3.1.15 que a condição que se obtém é a convexidade car-1.

Note-se que para toda a deformação $[0, 1]^n$ – periódica, temos, aplicando o teorema da divergência,

$$\int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx = 0.$$

A ideia agora é explorar as condições que resultam da utilização deste tipo de deformação periódica. Se n_1 e n_2 são dois vectores ortonormados de \mathbb{R}^n e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^m$, então podemos considerar

$$u(x) = \int_0^{x \cdot n_1} \chi(s) ds a_1 + \int_0^{x \cdot n_2} \chi(s) ds a_2.$$

Se n_1 e n_2 tiverem a direcção de dois eixos coordenados de $[0, 1]^n$ então u é $[0, 1]^n$ -periódica, pois é a soma de funções $[0, 1]^n$ -periódicas, e neste caso

$$\nabla u(x) = \chi(x \cdot n_1) a_1 \otimes n_1 + \chi(x \cdot n_2) a_2 \otimes n_2.$$

Se f é quasiconvexa então

$$\begin{aligned} f(F) &\leq \int_{[0,1]^n} f(F + \chi(x \cdot n_1) a_1 \otimes n_1 + \chi(x \cdot n_2) a_2 \otimes n_2) dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(F + \chi(x_i) a_1 \otimes n_1 + \chi(x_j) a_2 \otimes n_2) dx_i dx_j = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} f(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \chi(x_j) a_2 \otimes n_2) + \frac{1}{2} f(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \chi(x_j) a_2 \otimes n_2) \right) dx_j = \\ &= \frac{1}{4} f(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \frac{1}{4} f(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \\ &\quad + \frac{1}{4} f(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \frac{1}{4} f(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2). \end{aligned}$$

No entanto, como iremos verificar de seguida, esta condição obtém-se, igualmente, utilizando a propriedade de convexidade car-1 duas vezes.

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(F) &\leq f\left(\frac{F}{2} + \frac{1}{4} a_1 \otimes n_1 + \frac{F}{2} - \frac{1}{4} a_1 \otimes n_1\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} f\left(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1\right) + \frac{1}{2} f\left(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1\right) = \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{F}{2} + \frac{1}{4} (a_1 \otimes n_1 + a_2 \otimes n_2) + \frac{F}{2} + \frac{1}{4} (a_1 \otimes n_1 - a_2 \otimes n_2)\right) + \\ &+ \frac{1}{2} f\left(\frac{F}{2} + \frac{1}{4} (-a_1 \otimes n_1 + a_2 \otimes n_2) + \frac{F}{2} + \frac{1}{4} (-a_1 \otimes n_1 - a_2 \otimes n_2)\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} f(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \frac{1}{4} f(F + \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \\ &\quad + \frac{1}{4} f(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2) + \frac{1}{4} f(F - \frac{1}{2} a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2} a_2 \otimes n_2). \end{aligned}$$

Considerando a deformação

$$u(x) = \int_0^{x \cdot n_1} \chi(s) ds a_1 + \int_0^{x \cdot n_2} \chi(s) ds a_2 + \int_0^{x \cdot (n_1 + n_2)} \chi(s) ds a_3,$$

usando novamente a propriedade de quasiconvexidade para este u chegamos à desigualdade que resulta de aplicar a convexidade car-1 três vezes consecutivas.

Fazendo uma ligeira modificação

$$u(x) = \int_0^{x \cdot n_1} \chi(s) ds a_1 + \int_0^{x \cdot n_2} \chi(s) ds a_2 + \int_0^{x \cdot (n_1 + n_2)} \chi(s + \frac{1}{4}) ds a_3.$$

u é a soma de funções $[0, 1]^n$ -periódicas logo é $[0, 1]^n$ -periódica.

Neste caso,

$$\nabla u(x) = \chi(x \cdot n_1) a_1 \otimes n_1 + \chi(x \cdot n_2) a_2 \otimes n_2 + \chi(x \cdot (n_1 + n_2) + \frac{1}{4}) a_3 \otimes (n_1 + n_2)$$

e para toda a função contínua f temos,

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} f(F + \nabla u(x)) dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(F + \chi(x_i) a_1 \otimes n_1 + \chi(x_j) a_2 \otimes n_2 + \chi(x_i + x_j + \frac{1}{4}) a_3 \otimes (n_1 + n_2)) dx_i dx_j \end{aligned}$$

$$\chi(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x_i \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x_i \in (0, 1) \setminus (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\chi(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x_j \in (0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x_j \in (0, 1) \setminus (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\chi(x_i + x_j + \frac{1}{4}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x_i + x_j + \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \\ -\frac{1}{2} & \text{se } x_i + x_j + \frac{1}{4} \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{3}{2}, 2) \end{cases}$$

Assim

$$\chi(x_i + x_j + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \text{ se}$$

$$0 \leq x_i + x_j \leq \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} \leq x_i + x_j \leq \frac{5}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{4} \leq x_i + x_j < 2$$

$$\chi(x_i + x_j + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \text{ se}$$

$$\frac{1}{4} \leq x_i + x_j \leq \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5}{4} \leq x_i + x_j \leq \frac{7}{4}.$$

Para determinação do integral $\int_{[0,1]^n} f(F + \nabla u(x)) dx$ é útil desenhar uma figura que mostra as regiões onde as funções χ de variáveis x_i , x_j e $x_i + x_j + \frac{1}{2}$ respectivamente são positivas e negativas.

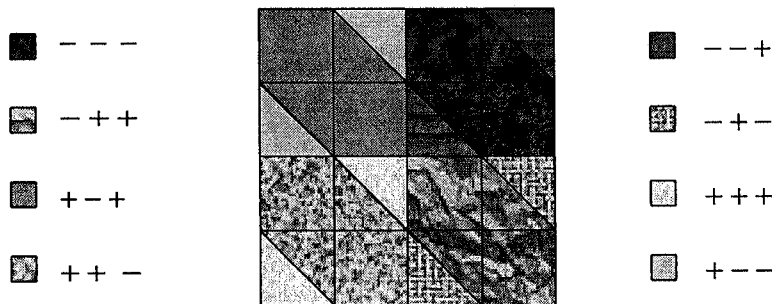


Figura 7.1:

Observando a figura podemos então escrever,

$$\int_{[0,1]^n} f(F + \nabla u(x)) dx = \frac{1}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

Utilizando a quasiconvexidade de f , temos

$$f(F) \leq \frac{1}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{1}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F + \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 + \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 + \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$

$$+ \frac{3}{16}f(F - \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1 - \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2 - \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2)) +$$
(7.1)

Pedregal acredita que esta última condição não é uma propriedade local como a convexidade car-1. Contudo, a convexidade car-1 é um caso particular de (7.1), tomando $a_2 = a_3 = 0$. Podemos assim afirmar que a condição encontrada é mais forte que a convexidade car-1.

Se considerarmos f quasiconvexa e suave e u uma função $[0, 1]^n$ -periódica então tu é também $[0, 1]^n$ -periódica para todo o real t .

Tomando a função

$$g(t) = \int_{[0,1]^n} f(F + t\nabla u(x)) dx,$$

sendo f quasiconvexa temos

$$g(0) = f(F) \leq \int_{[0,1]^n} f(F + t\nabla u(x)) dx = g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

logo, 0 é mínimo absoluto de g , donde

$$g''(0) = \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) \nabla^2 f(F) \nabla u(x) dx \geq 0, \quad (7.2)$$

para toda a função $[0, 1]^n$ -periódica u .

Note-se que a condição anterior, além de ser uma condição necessária para a quasiconvexidade de f , pode ser tomada como a quasiconvexidade para a função quadrática $f_F(A) = A\nabla^2 f(F)A$ $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$.

Com efeito,

se $g''(0) \geq 0$ então

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) \nabla^2 f(F) \nabla u(x) dx = \\ &= \nabla^2 f(F)A \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx + A\nabla^2 f(F) \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx + \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) \nabla^2 f(F) \nabla u(x) dx, \end{aligned}$$

uma vez que $\int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx = 0$.

Assim

$$\begin{aligned} A\nabla^2 f(F)A &\leq A\nabla^2 f(F)A + \nabla^2 f(F)A \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx + \\ &+ A\nabla^2 f(F) \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) dx + \int_{[0,1]^n} \nabla u(x) \nabla^2 f(F) \nabla u(x) dx = \\ &= \int_{[0,1]^n} (A + \nabla u(x)) \nabla^2 f(F) (A + \nabla u(x)) dx, \end{aligned}$$

logo,

$$f_F(A) \leq \int_{[0,1]^n} f_F(A + \nabla u(x)) dx \quad \forall u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad [0, 1]^n - \text{periódica}$$

obtendo-se a quasiconvexidade de f_F .

Seguidamente, vamos ver que a convexidade car-1 de f_F se reduz à convexidade car-1 de f .

A função f_F é convexa car-1 se e só se

$$f_F(tA + (1-t)B) \leq tf_F(A) + (1-t)f_F(B) \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall A, B \in \mathbb{M}^{m \times n}$$

tais que $\text{car}(A - B) \leq 1$, ou seja,

$$(tA + (1-t)B) \nabla^2 f(F) (tA + (1-t)B) \leq tA \nabla^2 f(F) A + (1-t)B \nabla^2 f(F) B.$$

Mas

$$\begin{aligned} & (tA + (1-t)B)\nabla^2 f(F)(tA + (1-t)B) - tA\nabla^2 f(F)A - (1-t)B\nabla^2 f(F)B = \\ & = t^2 A\nabla^2 f(F)A + t(1-t)A\nabla^2 f(F)B + t(1-t)B\nabla^2 f(F)A + \\ & + (1-t)^2 B\nabla^2 f(F)B - tA\nabla^2 f(F)A - (1-t)B\nabla^2 f(F)B \leq 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 e associando os termos convenientes

$$\begin{aligned} & t(1-t)A\nabla^2 f(F)A - t(1-t)A\nabla^2 f(F)B - t(1-t)B\nabla^2 f(F)A + t(1-t)B\nabla^2 f(F)B = \\ & = t(1-t) [A\nabla^2 f(F)A - A\nabla^2 f(F)B - B\nabla^2 f(F)A + B\nabla^2 f(F)B] = \\ & = t(1-t) [A\nabla^2 f(F)(A-B) - B\nabla^2 f(F)(A-B)] = \\ & = t(1-t)(A-B)\nabla^2 f(F)(A-B) \geq 0. \end{aligned}$$

Pela proposição 3.2.6, podemos concluir que f é convexa car-1.

Como a quasiconvexidade e a convexidade car-1 são equivalentes para as funções quadráticas então podemos afirmar que a condição (7.2) se reduz à convexidade car-1 de f . Tudo isto leva-nos a acreditar que a melhor propriedade local que se obtém da quasiconvexidade é a convexidade car-1.

7.2 A convexidade característica 1 não implica a quasiconvexidade

Pedregal, baseando-se na condição mais restritiva, deduzida na secção anterior e tendo em conta o contra-exemplo de Šverak, encontrou uma medida parametrizada gradiente homogénea que não é um laminado, quando $m \geq 3$.

Considerando a condição (7.1), vemos que todas as matrizes intervenientes nesta desigualdade, são elementos do subespaço L de $M^{m \times n}$ gerado pelas matrizes

$$M_1 = \frac{1}{2}a_1 \otimes n_1, \quad M_2 = \frac{1}{2}a_2 \otimes n_2, \quad M_3 = \frac{1}{2}a_3 \otimes (n_1 + n_2).$$

Se considerarmos $m \geq 3$ podemos tomar a_1, a_2, a_3 linearmente independentes.

Vamos ver neste caso que $(M_i)_{i=1,2,3}$ é linearmente independente, logo constitui uma base de L .

Ou seja, precisamos provar que

$$\text{se } xM_1 + yM_2 + zM_3 = 0 \quad \text{então} \quad x = y = z = 0.$$

Vamos considerar $n = 2$ para simplificar. Se considerássemos $n > 2$, o problema resolver-se-ia de forma análoga, teríamos apenas as matrizes M_i com $n - 1$ colunas identicamente nulas.

$$M_1 = \frac{1}{2}a_1 \otimes (1, 0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_1^2 & 0 \\ a_1^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \frac{1}{2}a_2 \otimes (0, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a_2^1 \\ 0 & a_2^2 \\ 0 & a_2^3 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \frac{1}{2}a_3 \otimes (1, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_3^1 & a_3^1 \\ a_3^2 & a_3^2 \\ a_3^3 & a_3^3 \end{pmatrix}.$$

$$xM_1 + yM_2 + zM_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} xa_1^1 + za_3^1 & ya_2^1 + za_3^1 \\ xa_1^2 + za_3^2 & ya_2^2 + za_3^2 \\ xa_1^3 + za_3^3 & ya_2^3 + za_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtendo-se

$$\begin{cases} xa_1^1 + ya_2^1 + 2za_3^1 = 0 \\ xa_1^2 + ya_2^2 + 2za_3^2 = 0 \\ xa_1^3 + ya_2^3 + 2za_3^3 = 0 \end{cases} \implies x = y = z = 0$$

porque a_1, a_2, a_3 são linearmente independentes.

Nota 7.2.1 - Se tomarmos $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$ então vem

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e o subespaço gerado por $(M_i)_{i=1,2,3}$ é o subespaço do contra-exemplo de Šverak.

Se identificarmos cada matriz neste subespaço, pelas suas coordenadas relativamente à base $(M_i)_{i=1,2,3}$, e designarmos também por f a restrição de f a este subespaço, então a desigualdade 7.1 pode ser escrita como

$$f(0,0,0) \leq \frac{1}{16} [f(1,1,1) + f(1,-1,-1) + f(-1,1,-1) + f(-1,-1,1)] + \frac{3}{16} [f(1,1,-1) + f(1,-1,1) + f(-1,1,1) + f(-1,-1,-1)].$$

Consideramos a medida discreta,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{16} [\delta(1,1,1) + \delta(1,-1,-1) + \delta(-1,1,-1) + \delta(-1,-1,1)] + \\ &+ \frac{3}{16} [\delta(1,1,-1) + \delta(1,-1,1) + \delta(-1,1,1) + \delta(-1,-1,-1)], \end{aligned}$$

onde δ representa a medida de Dirac, isto é

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= \frac{1}{16} [(1,1,1) + (1,-1,-1) + (-1,1,-1) + (-1,-1,1)] + \\ &+ \frac{3}{16} [(1,1,-1) + (1,-1,1) + (-1,1,1) + (-1,-1,-1)], \end{aligned}$$

então a desigualdade (4.11) pode ser traduzida na desigualdade de Jensen

$$\bar{f}(0) = f \left(\int_{\mathbf{M}^{m \times N}} A d\nu(A) \right) \leq \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} f(A) d\nu(A), \quad (7.3)$$

com respeito à medida ν .

Como afirmámos atrás, uma medida parametrizada gradiente homogénea é uma medida de probabilidade para a qual a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função quasiconvexa. Como toda a função quasiconvexa verifica (7.1), logo verifica a desigualdade de Jensen (7.3) então podemos afirmar que ν é um medida parametrizada gradiente homogénea.

Para verificar se ν é um laminado, a etapa fundamental é determinar todas as direcções de característica 1 no subespaço gerado pelas matrizes $(M_i)_{i=1,2,3}$, e é aqui que se torna relevante o facto de m ser igual a dois ou superior ou igual a três.

Se $m \geq 3$, podemos tomar a_1, a_2, a_3 linearmente independentes. Neste caso, a única forma de obter uma matriz de característica 1 de

$$xM_1 + yM_2 + zM_3$$

é tomando duas das coordenadas x, y, z , iguais a zero.

Considerando as matrizes $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$ podemos considerar a medida de probabilidade

$$\nu = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \delta_{Q_i},$$

onde Q_i representa cada uma das oito matrizes precedentes para $i = 1, \dots, 8$.

Para verificar que ν é um laminado, basta observar que a desigualdade (7.3), com esta medida, resulta de se aplicar a convexidade car-1 três vezes consecutivas.

A proposição 4.3.10 diz-nos que ν é realmente, o único laminado suportado no conjunto dos vértices do cubo $[-1, 1]^3$ e tendo como primeiro momento a matriz nula, isto é,

$$(0, 0, 0) = \int_{M^{m \times n}} A d\nu(A).$$

Daqui decorre que a medida parametrizada gradiente homogénea de pesos $\frac{1}{16}$ e $\frac{3}{16}$ considerada antes não é um laminado. Logo, encontrámos uma medida parametrizada gradiente homogénea que não é um laminado, concluindo-se, por isso, que a convexidade car-1 não implica a quasiconvexidade.

7.3 O caso $m = 2$

Vamos agora analisar, o caso em que o espaço imagem das deformações é \mathbb{R}^2 .

A primeira etapa consiste em examinar as direcções de car-1 no subespaço gerado pelas três matrizes M_i .

Assumindo a_1 e a_2 linearmente independentes podemos escrever $a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2$, uma vez que o espaço agora considerado tem dimensão 2.

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} xM_1 + yM_2 + zM_3 &= xa_1 \otimes n_1 + ya_2 \otimes n_2 + z(\alpha a_1 + \beta a_2) \otimes (n_1 + n_2) = \\ &= (x + \alpha z)a_1 \otimes n_1 + \alpha za_1 \otimes n_2 + \beta za_2 \otimes n_1 + (y + \beta z)a_2 \otimes n_2. \end{aligned}$$

Considerando sempre $n = 2$, $n_1 = (1, 0)$ e $n_2 = (0, 1)$ temos

$$\begin{aligned} a_1 \otimes n_1 &= \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_1^2 & 0 \end{pmatrix}, & a_1 \otimes n_2 &= \begin{pmatrix} 0 & a_1^1 \\ 0 & a_1^2 \end{pmatrix}, \\ a_2 \otimes n_1 &= \begin{pmatrix} a_2^1 & 0 \\ a_2^2 & 0 \end{pmatrix}, & a_2 \otimes n_2 &= \begin{pmatrix} 0 & a_2^1 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} &(x + \alpha z)a_1 \otimes n_1 + \alpha za_1 \otimes n_2 + \beta za_2 \otimes n_1 + (y + \beta z)a_2 \otimes n_2 = \\ &= \begin{pmatrix} (x + \alpha z)a_1^1 & 0 \\ (x + \alpha z)a_1^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha za_1^1 \\ 0 & \alpha za_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta za_2^1 & 0 \\ \beta za_2^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (y + \beta z)a_2^1 \\ 0 & (y + \beta z)a_2^2 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (x + \alpha z)a_1^1 + \beta z a_2^1 & \alpha z a_1^1 + (y + \beta z)a_2^1 \\ (x + \alpha z)a_1^2 + \beta z a_2^2 & \alpha z a_1^2 + (y + \beta z)a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \det(xM_1 + yM_2 + zM_3) &= \\ &= ((x + \alpha z)a_1^1 + \beta z a_2^1)(\alpha z a_1^2 + (y + \beta z)a_2^2) - (\alpha z a_1^1 + (y + \beta z)a_2^1)((x + \alpha z)a_1^2 + \beta z a_2^2) = \\ &= (x + \alpha z)\alpha z a_1^1 a_1^2 + (x + \alpha z)(y + \beta z)a_1^1 a_2^2 + \beta z \alpha z a_2^1 a_1^2 + \beta z (y + \beta z)a_2^1 a_2^2 + \\ &\quad - \alpha z (x + \alpha z)a_1^1 a_1^2 - \alpha z \beta z a_1^1 a_2^2 - (y + \beta z)(x + \alpha z)a_2^1 a_1^2 - (y + \beta z)\beta z a_2^1 a_2^2 = \\ &= (x + \alpha z)(y + \beta z)(a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2) - \beta z \alpha z (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2) = \\ &= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)((x + \alpha z)(y + \beta z) - \beta z \alpha z) = \det A \times \det \begin{pmatrix} x + \alpha z & \alpha z \\ \beta z & y + \beta z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$.

Como a_1 e a_2 são linearmente independentes então A tem car-2 logo $\det A \neq 0$.

Assim $\det(xM_1 + yM_2 + zM_3) = 0$ se e só se $\det \begin{pmatrix} x + \alpha z & \alpha z \\ \beta z & y + \beta z \end{pmatrix} = 0$, se e só se

$$xy + \alpha yz + \beta xz = 0.$$

Verificámos então que para $m = 2$, este subespaço de matrizes tem mais direcções car-1 tornando-se difícil, e até agora impossível, deduzir (7.3) da convexidade car-1.

Pedregal acredita que para $m = 2$ a condição (7.1) é equivalente à convexidade car-1. Para tornar a sua conjectura credível, ele mostrou que no caso especial $\alpha = \beta = 1$, a condição (7.3) e consequentemente a condição (7.1) são uma consequência da convexidade car-1.

Proposição 7.3.1 - Se $a_3 = a_1 + a_2$ e f é convexa car-1 então a desigualdade (7.3) verifica-se.

Demonstração:

Considere-se o cubo $[-1, 1]^3$, na figura 7.2.

As coordenadas de todos os pontos aí representados são:

$$\begin{aligned} P_0 &= (0, 0, 0), & P_1 &= \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), & P_2 &= \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), & P_3 &= \left(1, -\frac{5}{7}, 1\right), \\ P_4 &= \left(-\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{5}{11}\right), & P_5 &= (1, 1, -1), & P_6 &= (-1, -1, 0), \\ P_7 &= (-1, -1, 1), & P_8 &= (-1, -1, -1). \end{aligned}$$

É fácil verificar que $P_1 - P_0$, $P_3 - P_2$, $P_5 - P_4$, $P_7 - P_6$ têm car-1.

Como $\alpha = \beta = 1$, mostrar que um vector (x, y, z) , tem car-1 equivale a verificar que $xy + yz + xz = 0$.

Vamos então construir uma medida de probabilidade suportada no conjunto dos vértices do cubo $[-1, 1]^3$, usando estas direcções.

Escrevamos primeiro

$$P_0 = \lambda_1 P_2 + (1 - \lambda_1) P_1,$$

e determinemos λ_1

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= \lambda_1 \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right) + (1 - \lambda_1) \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \\ &= \left(\frac{\lambda_1}{10} + \frac{\lambda_1}{2} - \frac{1}{2}, -\frac{\lambda_1}{5} - \lambda_1 + 1, -\frac{\lambda_1}{5} - \lambda_1 + 1\right), \end{aligned}$$

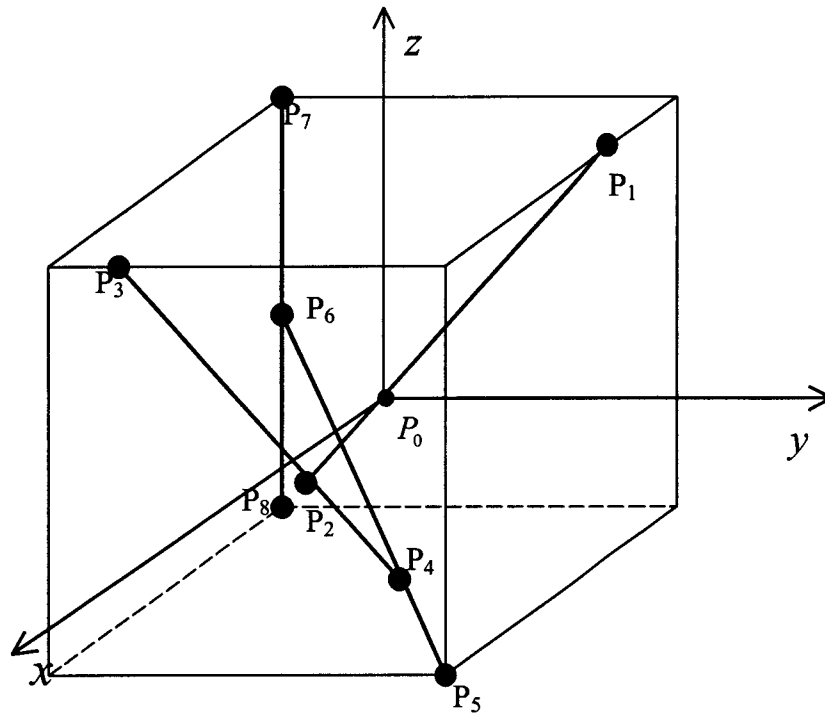


Figura 7.2:

obtendo-se $\frac{6}{5}\lambda_1 = 1$ logo $\lambda_1 = \frac{5}{6}$.

Analogamente podemos escrever

$$\begin{aligned} P_2 &= \lambda_2 P_3 + (1 - \lambda_2) P_4, \\ P_3 &= \lambda_4 (1, -1, 1) + (1 - \lambda_4) (1, 1, 1), \\ P_4 &= \lambda_5 P_5 + (1 - \lambda_5) P_6, \\ P_6 &= \lambda_6 P_7 + (1 - \lambda_6) P_8, \\ P_1 &= \lambda_3 (1, 1, 1) + (1 - \lambda_3) (-1, 1, 1). \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos obtém-se $\lambda_2 = \frac{7}{40}$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, $\lambda_4 = \frac{6}{7}$, $\lambda_5 = \frac{5}{11}$, $\lambda_6 = \frac{1}{2}$.

Assim

$$\begin{aligned} P_0 &= \lambda_1 P_2 + (1 - \lambda_1) P_1 = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 P_3 + \lambda_1 (1 - \lambda_2) P_4 + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (-1, 1, 1) = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 (1, -1, 1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) (1, 1, 1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 (1, 1, -1) + \\ &\quad + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) P_6 + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (-1, 1, 1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 (1, -1, 1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) (1, 1, 1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 (1, 1, -1) + \\
&\quad + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) \lambda_6 (-1, -1, 1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) (1 - \lambda_6) (-1, -1, -1) + \\
&\quad + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (-1, 1, 1) = \\
&= \frac{5}{6} \times \frac{7}{40} \times \frac{6}{7} (1, -1, 1) + \frac{5}{6} \times \frac{7}{40} \times \frac{1}{7} (1, 1, 1) + \frac{5}{6} \times \frac{33}{40} \times \frac{5}{11} (1, 1, -1) + \\
&\quad + \frac{5}{6} \times \frac{33}{40} \times \frac{6}{11} \times \frac{1}{2} (-1, -1, 1) + \frac{5}{6} \times \frac{33}{40} \times \frac{6}{11} \times \frac{1}{2} (-1, -1, -1) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} (1, 1, 1) + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} (-1, 1, 1) = \\
&= \frac{2}{16} (1, -1, 1) + \frac{1}{16} (1, 1, 1) + \frac{5}{16} (1, 1, -1) + \frac{3}{16} (-1, -1, 1) + \frac{3}{16} (-1, -1, -1) + \frac{2}{16} (1, 1, -1).
\end{aligned}$$

Como apenas se usaram direcções de característica 1 então a medida de probabilidade

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \frac{3}{16} (\delta(-1, -1, -1) + \delta(-1, -1, 1)) + \\
&\quad + \frac{2}{16} (\delta(1, -1, 1) + \delta(-1, 1, 1)) + \\
&\quad + \frac{1}{16} (\delta(1, 1, 1) + 5\delta(1, 1, -1))
\end{aligned}$$

é um laminado.

Podemos então afirmar que para toda a função ψ convexa car-1 se tem

$$\psi(0, 0, 0) \leq \int_{\mathbb{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_1(A), \quad (7.4)$$

decompondo o integral da direita ao longo das direcções car-1 usadas na determinação de ν_1 e usando a convexidade de ψ ao longo destas direcções.

No primeiro passo podemos escrever

$$\psi(P_0) \leq \lambda_1 \psi(P_2) + (1 - \lambda_1) \psi(P_1),$$

pois como vimos, $P_2 - P_1$ tem característica 1 e ψ é convexa car-1.

Analogamente,

$$\psi(P_2) \leq \lambda_2 \psi(P_3) + (1 - \lambda_2) \psi(P_4),$$

$$\psi(P_1) \leq \lambda_3 \psi(1, 1, 1) + (1 - \lambda_3) \psi(-1, 1, 1).$$

Substituindo, obtém-se

$$\psi(P_0) \leq \lambda_1 \lambda_2 \psi(P_3) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \psi(P_4) + (1 - \lambda_1) \lambda_3 \psi(1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \psi(-1, 1, 1).$$

Mas

$$\psi(P_3) \leq \lambda_4 \psi(1, -1, 1) + (1 - \lambda_4) \psi(1, 1, 1),$$

$$\psi(P_4) \leq \lambda_5 \psi(1, 1, -1) + (1 - \lambda_5) \psi(P_6),$$

$$\psi(P_6) \leq \lambda_6 \psi(-1, -1, 1) + (1 - \lambda_6) \psi(-1, -1, -1),$$

obtendo-se

$$\begin{aligned}
\psi(P_0) &\leq \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \psi(1, -1, 1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) \psi(1, 1, 1) + \\
&\quad + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 \psi(1, 1, -1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) \psi(P_6) + \\
&\quad + (1 - \lambda_1) \lambda_3 \psi(1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \psi(-1, 1, 1) = \\
&\quad = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \psi(1, -1, 1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) \psi(1, 1, 1) + \\
&\quad + \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 \psi(1, 1, -1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) \lambda_6 \psi(-1, -1, 1) + \\
&\quad + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) (1 - \lambda_6) \psi(-1, -1, -1) + \\
&\quad + (1 - \lambda_1) \lambda_3 \psi(1, 1, 1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \psi(-1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Substituindo pelos valores λ_i determinados anteriormente obtemos

$$\begin{aligned} \psi(P_0) \leq & \frac{3}{16}\psi(-1, -1, -1) + \frac{3}{16}\psi(-1, -1, 1) + \\ & + \frac{2}{16}\psi(1, -1, 1) + \frac{2}{16}\psi(-1, 1, 1) + \\ & + \frac{1}{16}\psi(1, 1, 1) + \frac{5}{16}\psi(1, 1, -1), \end{aligned}$$

que traduz a desigualdade (7.4) pretendida.

Por simetria podemos construir dois outros laminados com a origem como primeiro momento.

Fazendo uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- x ao cubo da fig 17.1, seguido de uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- z e distribuindo os pesos como em ν_1 obtém-se

$$\begin{aligned} \nu_2 = & \frac{3}{16}(\delta(-1, -1, -1) + \delta(-1, 1, -1)) + \\ & + \frac{2}{16}(\delta(-1, 1, 1) + \delta(1, 1, -1)) + \\ & + \frac{1}{16}(\delta(1, 1, 1) + 5\delta(1, -1, 1)). \end{aligned}$$

Fazendo uma rotação de 90° em torno do eixo- y , seguido de uma rotação de 90° em torno do eixo- z obtemos

$$\begin{aligned} \nu_3 = & \frac{3}{16}(\delta(-1, -1, -1) + \delta(1, -1, -1)) + \\ & + \frac{2}{16}(\delta(1, 1, -1) + \delta(1, -1, 1)) + \\ & + \frac{1}{16}(\delta(1, 1, 1) + 5\delta(-1, 1, 1)). \end{aligned}$$

Determinemos então

$$\nu = \frac{1}{3}\nu_1 + \frac{1}{3}\nu_2 + \frac{1}{3}\nu_3.$$

$$\begin{aligned} \nu = & \frac{1}{16}\delta(-1, -1, -1) + \frac{1}{16}\delta(-1, -1, 1) + \frac{2}{3 \times 16}\delta(1, -1, 1) + \frac{2}{3 \times 16}\delta(-1, 1, 1) + \\ & + \frac{1}{3 \times 16}\delta(1, 1, 1) + \frac{5}{3 \times 16}\delta(1, 1, -1) + \frac{1}{16}\delta(-1, -1, -1) + \frac{1}{16}\delta(-1, 1, -1) + \\ & + \frac{2}{3 \times 16}\delta(-1, 1, 1) + \frac{2}{3 \times 16}\delta(1, 1, -1) + \frac{1}{3 \times 16}\delta(1, 1, 1) + \frac{5}{3 \times 16}\delta(1, -1, 1) + \\ & + \frac{1}{16}\delta(-1, -1, -1) + \frac{1}{16}\delta(1, -1, -1) + \frac{2}{3 \times 16}\delta(1, 1, -1) + \frac{2}{3 \times 16}\delta(1, -1, 1) + \\ & + \frac{1}{3 \times 16}\delta(1, 1, 1) + \frac{5}{3 \times 16}\delta(-1, 1, 1), \end{aligned}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \nu = & \frac{3}{16}(\delta(-1, -1, -1) + \delta(1, -1, 1) + \delta(-1, 1, 1) + \delta(1, 1, -1)) + \\ & + \frac{1}{16}(\delta(-1, -1, 1) + \delta(1, 1, 1) + \delta(-1, 1, -1) + \delta(1, -1, -1)). \end{aligned}$$

Vamos verificar que ν é um laminado.

Como ν_1, ν_2, ν_3 são laminados então

$$\psi(0, 0, 0) \leq \int_{M^{m \times N}} \psi(A) d\nu_1(A),$$

$$\psi(0, 0, 0) \leq \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_2(A),$$

$$\psi(0, 0, 0) \leq \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_3(A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(0, 0, 0) &= \frac{1}{3}\psi(0, 0, 0) + \frac{1}{3}\psi(0, 0, 0) + \frac{1}{3}\psi(0, 0, 0) \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_1(A) + \frac{1}{3} \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_2(A) + \frac{1}{3} \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu_3(A) = \\ &= \frac{3}{16}\psi(-1, -1, -1) + \frac{1}{16}\psi(-1, -1, 1) + \frac{3}{16}\psi(1, -1, 1) + \frac{3}{16}\psi(-1, 1, 1) + \\ &\quad + \frac{1}{16}\psi(1, 1, 1) + \frac{3}{16}\psi(1, 1, -1) + \frac{1}{16}\psi(-1, 1, -1) + \frac{1}{16}\psi(1, -1, -1) \\ &= \int_{\mathbf{M}^{m \times N}} \psi(A) d\nu(A), \end{aligned}$$

concluindo-se a demonstração da proposição. ■

Para se mostrar que a condição (7.1) pode ser sempre deduzida da convexidade car-1, teria de se encontrar uma construção análoga à precedente para todos os valores de α e β . Por outro lado, poder-se-ia tentar mostrar que, para uma escolha adequada dos parâmetros α e β , a medida de probabilidade ν não é um laminado. Este último caminho é difícil de tomar pois teriam de se analisar todas as direcções car-1; no entanto, se conseguíssemos demonstrá-lo concluiríamos que a convexidade car-1 não é equivalente à quasiconvexidade para $m = 2$.

Capítulo 8

A quasiconvexidade e a convexidade car-1 para matrizes simétricas 2×2

A tentativa de encontrar um contra-exemplo para o facto da convexidade car-1 não implicar a quasiconvexidade vai agora a ser explorada no espaço das matrizes simétricas de ordem 2.

As ideias que se irão expor estão contidas no artigo [Pe-Sv].

Para encontrar tais contra-exemplos vão-se seguir dois processos:

- Fixar uma função integranda φ convexa car-1 e tentar encontrar uma deformação que viole a desigualdade da quasiconvexidade;
- Fixar uma deformação u conveniente e tentar arranjar uma função convexa car-1 não-linear para a qual a desigualdade da quasiconvexidade não se verifica.

Como não existem muitos exemplos explícitos de funções convexas car-1, é-nos útil reformular as duas tentativas atrás enunciadas em termos da quasiconvexificação e da convexificação característica 1 de funções.

A quasiconvexificação em F da função φ é definida por

$$Q\varphi(F) = \inf_w \frac{1}{\text{med}\Omega} \int_{\Omega} \varphi(F + \nabla w(x)) dx.$$

Tal como a quasiconvexidade também a quasiconvexificação pode ser definida em termos de funções periódicas, ou seja,

$$Q\varphi(F) = \inf_u \int_T \varphi(F + \nabla u(x)) dx, \quad (8.1)$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto das deformações periódicas.

A quasiconvexificação considerando matrizes simétricas pode ser obtida por

$$Q^s\varphi(F) = \sup \{ \psi(F) : \psi \text{ é quasiconvexa para matrizes simétricas e } \psi \leq \varphi \}. \quad (8.2)$$

Outro modo de definir a quasiconvexificação no que diz respeito a matrizes simétricas, é

$$Q^s\varphi(F) = \inf_w \frac{1}{\text{med}\Omega} \int_{\Omega} \varphi(F + \nabla^2 w(x)) dx,$$

onde o ínfimo é tomado no conjunto de todas as deformações suaves compactamente suportadas em Ω . Poderíamos ainda substituir Ω por T , como anteriormente, e tomar o ínfimo sobre todas as deformações periódicas.

Do mesmo modo, como vimos atrás, podemos definir convexificação car-1 por

$$R\varphi(F) = \sup \{ \psi(F) : \psi \text{ é convexa car-1 e } \psi \leq \varphi \}.$$

Podemos também defini-la de forma mais directa por

$$R\varphi(F) = \inf \left\{ \sum_i \lambda_i \varphi(A_i) : \{(\lambda_i, A_i)\} \text{ satisfaz a condição } H_N \text{ e } \sum_i \lambda_i A_i = F \text{ é uma combinação convexa} \right\} \quad (8.3)$$

Como o conjunto das funções quasiconvexas inferiores ou iguais a φ está contido no conjunto das funções convexas car-1 inferiores ou iguais φ , e atendendo ao resultado de que se $A \subseteq B$ então $\sup A \leq \sup B$ obtém-se $Q\varphi(F) \leq R\varphi(F)$.

Assim o primeiro processo referido atrás para encontrar o contra-exemplo pode ser traduzido por: encontrar uma função cuja quasiconvexificação num ponto é estritamente inferior à convexificação car-1 no mesmo ponto.

O segundo processo é equivalente a encontrar uma função contínua ψ tal que para uma matriz dada F e uma deformação dada u , temos

$$R\psi(F) > \frac{1}{\text{med } \Omega} \int_{\Omega} R\psi(F + \nabla u(x)) dx. \quad (8.4)$$

O contra-exemplo vai ser explorado nestes dois caminhos, mas restringindo-nos apenas a matrizes simétricas 2×2 . As definições de convexidade car-1, quasiconvexidade e os seus correspondentes convexificados são definidos da mesma forma, mas considerando apenas matrizes simétricas e gradientes pontualmente simétricos.

Vamos considerar a função

$$\begin{cases} \varphi \left(\begin{array}{cc} x+z & z \\ z & y+z \end{array} \right) = xyz & \text{se } \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1 \\ \varphi = +\infty & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (8.5)$$

definida sobre matrizes simétricas 2×2 .

Tomaremos novamente $F = 0$.

Vamos determinar primeiro a quasiconvexificação na origem, $Q\varphi(0)$, e posteriormente, a correspondente convexificação car-1 $R\varphi(0)$. A conclusão será, infelizmente, $Q\varphi(0) = R\varphi(0)$, não se encontrando por isso o desejado contra-exemplo.

8.1 A quasiconvexificação

Teorema 8.1.1 *Seja φ a função definida no conjunto das matrizes simétricas por (8.5). Então $Q\varphi(0) = -\frac{1}{2}$.*

Demonstração:

Considerando a função

$$\psi(X) = \begin{cases} \det X & \text{se } X \text{ é positivamente definida} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Esta função é um exemplo de uma função quasiconvexa. (Ver [Sv2].)

Considerando a identificação

$$X = \begin{pmatrix} x+z & z \\ z & y+z \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z), \quad (8.6)$$

e tomando

$$X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

consideremos a função

$$q(x, y, z) = \frac{3}{2} \psi(X + X_0)$$

que é quasiconvexa sobre matrizes simétricas.

Designemos por B o cubo $[-1, 1]^3$.

Lema 8.1.2 Para todo $(x, y, z) \in B$

$$q(x, y, z) \leq (x+1)(y+1)(z+1).$$

Demonstração:

Atendendo à identificação das matrizes simétricas 2×2 com os ternos ordenados estabelecida atrás, relembramos que (x, y, z) tem car-1 se e só se $\det X = 0$, isto é, se e só se $xy + yz + xz = 0$.

Defina-se

$$\chi(x, y, z) = (x+1)(y+1)(z+1).$$

Se q é quasiconvexa então é convexa car-1. Como os três eixos coordenados são direcções car-1, podemos afirmar que χ é convexa ao longo destas direcções. Na realidade, χ é uma função afim ao longo de cada um dos três eixos coordenados.

Observemos que $q = \chi$ nos oito vértices de B .

$$\begin{aligned} \chi(-1, -1, -1) &= \chi(-1, -1, 1) = \chi(-1, 1, -1) = \chi(1, -1, -1) = \\ &= \chi(1, 1, -1) = \chi(1, -1, 1) = \chi(-1, 1, 1) = 0 \quad \text{e} \quad \chi(1, 1, 1) = 8. \end{aligned}$$

Vamos determinar o valor de q para estes pontos.

Para o ponto $(-1, -1, -1)$ tem-se

$$X + X_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

determinando os valores próprios da matriz encontrada obtém-se $\lambda = -6$ ou $\lambda = -2$. Concluindo-se que $X + X_0$ não é definida positiva resultando $q(-1, -1, -1) = 0$.

Para os pontos $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ as matrizes $X + X_0$ também não são definidas positivas concluindo-se que os valores de q nestes pontos também é nulo.

Para o ponto $(-1, 1, 1)$ tem-se

$$q(-1, 1, 1) = \frac{3}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2} \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = 0.$$

Para o ponto $(1, -1, 1)$ tem-se

$$q(1, -1, 1) = \frac{3}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2} \det \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0.$$

Para o ponto $(1, 1, -1)$ tem-se

$$q(1, 1, -1) = \frac{3}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2} \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0.$$

Para o ponto $(1, 1, 1)$ tem-se

$$q(1, 1, 1) = \frac{3}{2} \det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2} \det \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \times \frac{64 - 16}{9} = 8.$$

Observando a figura abaixo verifica-se que todo o ponto em B se pode decompor ao longo de direcções paralelas aos eixos e terminando nos vértices de B .

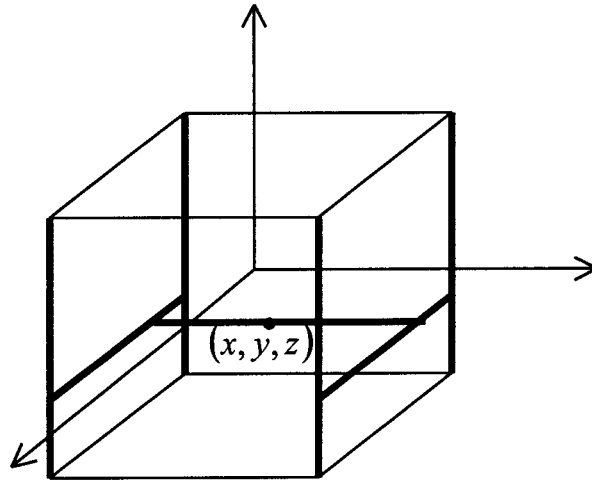


Figura 8.1:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) &= \lambda_1(x, -1, z) + (1 - \lambda_1)(x, 1, z) & \lambda_1 &= \frac{1 - y}{2}, \\
 (x, -1, z) &= \lambda_2(-1, -1, z) + (1 - \lambda_2)(1, -1, z) & \lambda_2 &= \frac{1 - x}{2}, \\
 (x, 1, z) &= \lambda_3(-1, 1, z) + (1 - \lambda_3)(1, 1, z) & \lambda_3 &= \frac{1 - x}{2}, \\
 (-1, -1, z) &= \lambda_4(-1, -1, -1) + (1 - \lambda_4)(-1, -1, 1), & \lambda_4 &= \frac{1 - z}{2}, \\
 (1, -1, z) &= \lambda_5(1, -1, -1) + (1 - \lambda_5)(1, -1, 1), & \lambda_5 &= \frac{1 - z}{2}, \\
 (-1, 1, z) &= \lambda_6(-1, 1, -1) + (1 - \lambda_6)(-1, 1, 1), & \lambda_6 &= \frac{1 - z}{2}, \\
 (-1, -1, z) &= \lambda_7(1, 1, -1) + (1 - \lambda_7)(1, 1, 1). & \lambda_7 &= \frac{1 - z}{2}
 \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) &= \lambda_1 (\lambda_2(-1, -1, z) + (1 - \lambda_2)(1, -1, z)) + \\
 &+ (1 - \lambda_1) (\lambda_3(-1, 1, z) + (1 - \lambda_3)(1, 1, z)) \equiv \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 (-1, -1, -1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) (-1, -1, 1) + \\
 &+ \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 (1, -1, -1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) (1, -1, 1) + \\
 &+ (1 - \lambda_1) \lambda_3 \lambda_6 (-1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1 - \lambda_6) (-1, 1, 1) + \\
 &+ (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \lambda_7 (1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (1 - \lambda_7) (1, 1, 1).
 \end{aligned}$$

Sendo assim, se todo o ponto em B se decompõe ao longo de direcções paralelas aos eixos, isto é, ao longo de direcções car-1 e como q é convexa car-1 então

$$\begin{aligned}
 q(x, y, z) &\leq \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 q(-1, -1, -1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) q(-1, -1, 1) + \\
 &+ \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 q(1, -1, -1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) q(1, -1, 1) + \\
 &+ (1 - \lambda_1) \lambda_3 \lambda_6 q(-1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1 - \lambda_6) q(-1, 1, 1) + \\
 &+ (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \lambda_7 q(1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (1 - \lambda_7) q(1, 1, 1),
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
q(x, y, z) &\leq \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \chi(-1, -1, -1) + \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_4) \chi(-1, -1, 1) + \\
&+ \lambda_1 (1 - \lambda_2) \lambda_5 \chi(1, -1, -1) + \lambda_1 (1 - \lambda_2) (1 - \lambda_5) \chi(1, -1, 1) + \\
&+ (1 - \lambda_1) \lambda_3 \lambda_6 \chi(-1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) \lambda_3 (1 - \lambda_6) \chi(-1, 1, 1) + \\
&+ (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) \lambda_7 \chi(1, 1, -1) + (1 - \lambda_1) (1 - \lambda_3) (1 - \lambda_7) \chi(1, 1, 1) = \\
&= 8 \times \left(1 - \frac{1-x}{2}\right) \left(1 - \frac{1-y}{2}\right) \left(1 - \frac{1-z}{2}\right) = \\
&= 8 \times \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{8} = \chi(x, y, z),
\end{aligned}$$

concluindo-se a demonstração do Lema. ■

Se tomarmos agora

$$\chi(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1$$

isto é,

$$\chi = \varphi + L \quad \text{onde } L = xy + xz + yz + x + y + z + 1.$$

Pelo que vimos atrás $xy + xz + yz = \det X$ onde $X = (x, y, z)$. Como o determinante é quasi-afim, $f(x, y, z) = x + y + z + 1$ é afim e a soma de funções quasi-afins é quasi-afim, obtemos L quasi-afim. Pelo Lema precedente $\chi = \varphi + L \geq q$ logo $\varphi \geq q - L$.

Como q e $-L$ são quasiconvexas então $q - L$ é quasiconvexa.

Por (8.2) obtém-se

$$q(0, 0, 0) - L(0, 0, 0) \leq Q\varphi(0),$$

como

$$q(0, 0, 0) = \frac{3}{2} \det \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad L(0, 0, 0) = 1$$

então

$$Q\varphi(0) \geq \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Para obtermos a igualdade vamos considerar a seguinte deformação periódica $U : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$U(x_1, x_2) = (\tilde{u}(x_1) + \tilde{\omega}(x_1 + x_2), \tilde{v}(x_2) + \tilde{\omega}(x_1 + x_2)), \quad (8.7)$$

onde \tilde{f} denota a primitiva de f

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t f(s) ds$$

e $u = v = \theta$, $\omega = \theta(\cdot + \frac{1}{4})$ com $\theta = 2\chi_{(0, \frac{1}{2})} - 1$ definida no intervalo unitário e estendida periodicamente a todo o \mathbb{R} .

Temos então

$$\nabla U(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u(x_1) + \omega(x_1 + x_2) & \omega(x_1 + x_2) \\ \omega(x_1 + x_2) & v(x_2) + \omega(x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

simétrica.

$$u(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{se } x_1 \in (0, 1) \setminus (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$v(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_2 \in (0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{se } x_2 \in (0, 1) \setminus (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\omega(x_1 + x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 + x_2 + \frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \\ -1 & \text{se } x_1 + x_2 + \frac{1}{4} \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{3}{2}, 2) \end{cases}$$

Tal como no capítulo anterior, vamos determinar as regiões onde ω é positiva e negativa, respectivamente.

Ora, $\omega(x_1 + x_2) = 1$ se

$$0 < x_1 + x_2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 1 < x_1 + x_2 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2}$$

$$x_1 + x_2 < \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{4} < x_1 + x_2 < 2 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} < x_1 + x_2 < \frac{5}{4}$$

$\omega(x_1 + x_2) = -1$ se

$$\frac{1}{2} \leq x_1 + x_2 + \frac{1}{4} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} \leq x_1 + x_2 + \frac{1}{4} < 2.$$

$$\varphi(\nabla U(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \begin{matrix} u(x_1) = 1 & v(x_2) = 1 & \omega(x_1 + x_2) = 1 \\ u(x_1) = 1 & v(x_2) = -1 & \omega(x_1 + x_2) = -1 \\ u(x_1) = -1 & v(x_2) = 1 & \omega(x_1 + x_2) = -1 \\ u(x_1) = -1 & v(x_2) = -1 & \omega(x_1 + x_2) = 1 \end{matrix} \\ -1 & \text{se } \begin{matrix} u(x_1) = 1 & v(x_2) = -1 & \omega(x_1 + x_2) = -1 \\ u(x_1) = 1 & v(x_2) = 1 & \omega(x_1 + x_2) = 1 \\ u(x_1) = -1 & v(x_2) = -1 & \omega(x_1 + x_2) = 1 \\ u(x_1) = -1 & v(x_2) = 1 & \omega(x_1 + x_2) = -1 \end{matrix} \end{cases}$$

Para determinar $\int_T \varphi(\nabla U(x)) dx$ é útil observar novamente a figura 7.1.

$$\int_T \varphi(\nabla U(x)) dx = \frac{1}{16} (\varphi(1, 1, 1) + \varphi(1, -1, -1) + \varphi(1, -1, 1) + \varphi(-1, -1, 1)) +$$

$$+ \frac{3}{16} (\varphi(1, 1, -1) + \varphi(1, -1, 1) + \varphi(-1, 1, 1) + \varphi(-1, -1, -1)) = -\frac{1}{2},$$

como

$$Q\varphi(0) = \inf_u \int_T \varphi(\nabla u(x)) dx$$

então $Q\varphi(0) \leq -\frac{1}{2}$.

Logo $Q\varphi(0) = -\frac{1}{2}$, como se pretendia. ■

Consideremos a desigualdade

$$\left| \int_T u(x_1)v(x_2)\omega(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq C \|u\|_{L^\infty(I)} \|v\|_{L^\infty(I)} \|\omega\|_{L^\infty(I)} \quad (8.8)$$

onde $I = [0, 1]$, $T = I \times I$ e u, v, ω são funções I -periódicas de média zero em cada período e $C > 0$ é uma constante.

Vamos ver seguidamente que o problema de determinar a quasiconvexificação de φ na origem é equivalente ao problema de determinar a menor constante $C_0 > 0$ para a qual a desigualdade (8.8) se verifica, para quaisquer funções I -periódicas de média zero.

Note-se que $0 < C_0 \leq 1$, visto que

$$\begin{aligned} \left| \int_T u(x_1)v(x_2)\omega(x_1+x_2) dx_1 dx_2 \right| &\leq \int_T |u(x_1)v(x_2)\omega(x_1+x_2)| dx_1 dx_2 \leq \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(I)} \|v\|_{L^\infty(I)} \|\omega\|_{L^\infty(I)}. \end{aligned}$$

Vamos tentar perceber como se estabelece a relação de (8.8) com a quasiconvexificação de φ na origem. Dividindo (8.8) pelas normas em $L^\infty(I)$ de u, v, ω , podemos reescrever a desigualdade como

$$\left| \int_T u(x_1)v(x_2)w(x_1+x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq C_0$$

onde u, v e w são funções I -periódicas de média zero e limitadas por 1.

Observemos que, se u é uma função I -periódica de média zero, necessitamos apenas de encontrar o ínfimo, m , do integral

$$\int_T u(x_1)v(x_2)\omega(x_1+x_2) dx_1 dx_2. \quad (8.9)$$

Consideremos a deformação $U : T \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por (8.7).

Como vimos atrás

$$\nabla U(x) = \begin{pmatrix} u(x_1) + \omega(x_1+x_2) & \omega(x_1+x_2) \\ \omega(x_1+x_2) & v(x_2) + \omega(x_1+x_2) \end{pmatrix}$$

é simétrica e (8.8) pode ser escrita como

$$\int_T \varphi(\nabla U(x)) dx.$$

Como m designa o ínfimo do integral, mas apenas para deformações do tipo (8.6) então $Q\varphi(0) \leq m$.

Como $Q\varphi(0) = -\frac{1}{2}$ então

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq \int_T u(x_1)v(x_2)\omega(x_1+x_2) dx_1 dx_2,$$

podendo-se então escrever

$$\left| \int_T u(x_1)v(x_2)\omega(x_1+x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq \frac{1}{2},$$

logo $0 < C_0 \leq \frac{1}{2}$.

Mas considerando $u = v = \theta$ e $w = \theta \left(\cdot + \frac{1}{4} \right)$, como anteriormente vimos, obtemos

$$\int_T u(x_1)v(x_2)w(x_1+x_2) dx_1 dx_2 = -\frac{1}{2},$$

logo $m = -\frac{1}{2}$. Concluindo-se que a menor constante para a qual (8.7) se verifica é $C_0 = \frac{1}{2}$.

8.2 A convexificação característica 1

Nesta secção irá verificar-se que $R\varphi(0) = -\frac{1}{2}$, concluindo-se que a existir um contra-exemplo, ele não pode ser encontrado deste modo.

Teorema 8.2.1 *Seja φ a função definida em matrizes simétricas por (8.6) então $R\varphi(0) = -\frac{1}{2}$.*

Demonstração:

Como toda a função quasiconvexa é convexa car-1 então $R\varphi(0) \geq Q\varphi(0) = -\frac{1}{2}$.

Como $R\varphi(0)$ é obtido por (8.3) como um ínfimo então, é suficiente encontrar um conjunto de pares $\{(\lambda_i, A_i)\}$ satisfazendo a condição (H_N) para a qual

$$\sum_i \lambda_i \varphi(A_i) = -\frac{1}{2}.$$

Observando a figura 17.1, não é difícil admitir que o conjunto dos pares

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{16}, (-1, -1, -1) \right), \left(\frac{3}{16}, (-1, -1, 1) \right), \left(\frac{2}{16}, (1, -1, 1) \right), \\ \left(\frac{2}{16}, (-1, 1, 1) \right), \left(\frac{1}{16}, (1, 1, 1) \right), \left(\frac{5}{16}, (1, 1, -1) \right) \end{array} \right\},$$

satisfaz a condição H_7 .

No entanto, vamos apresentar o resultado numericamente.

Para facilitar vamos designar

$$\begin{array}{lll} A_1 = (-1, -1, -1), & A_2 = (-1, -1, 1), & A_3 = (1, -1, 1), \\ A_4 = (-1, 1, 1), & A_5 = (1, 1, 1), & A_6 = (1, 1, -1) \end{array}$$

Tomando novamente os pontos

$$P_0 = (0, 0, 0), \quad P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right), \quad P_3 = \left(1, -\frac{5}{7}, 1\right),$$

$$P_4 = \left(-\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{5}{11}\right), \quad P_5 = (1, 1, -1), \quad P_6 = (-1, -1, 0)$$

$$P_7 = (-1, -1, 1), \quad P_8 = (-1, -1, -1)$$

e tendo em conta os cálculos efectuados anteriormente podemos escrever

$$P_0 = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} A_4 + \frac{1}{4} A_5 \right) + \frac{5}{6} \left\{ \frac{7}{40} \left(\frac{6}{7} A_3 + \frac{1}{7} A_5 \right) + \frac{33}{40} \left(\frac{5}{11} A_6 + \frac{6}{11} \left(\frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} A_1 \right) \right) \right\}.$$

A distribuição dos vectores e os respectivos pesos é feita pela seguinte ordem

$$\left(\frac{3}{16}, A_1 \right), \left(\frac{3}{16}, A_2 \right), \left(\frac{5}{16}, A_6 \right), \left(\frac{2}{16}, A_3 \right), \left(\frac{1}{48}, A_5 \right), \left(\frac{2}{16}, A_4 \right), \left(\frac{2}{48}, A_5 \right).$$

Passo 1

Como $\text{car}(A_1 - A_2) \leq 1$ toma-se

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{\frac{3}{16}A_1 + \frac{3}{16}A_2}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 & \lambda_1 &= \frac{6}{16} \\
 B_2 &= A_6 & \lambda_2 &= \frac{5}{16} \\
 B_3 &= A_3 & \lambda_3 &= \frac{2}{16} \\
 B_4 &= A_5 & \lambda_4 &= \frac{1}{48} \\
 B_5 &= A_4 & \lambda_5 &= \frac{2}{16} \\
 B_6 &= A_5 & \lambda_6 &= \frac{2}{48}.
 \end{aligned}$$

Passo 2

Como $\text{car}(B_2 - B_1) = \text{car}(P_5 - P_6) \leq 1$ toma-se

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\frac{5}{16}A_6 + \frac{6}{16}(\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1)}{\frac{11}{16}} = \frac{5}{11}A_6 + \frac{6}{11}(\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1) & \lambda_1 &= \frac{11}{16} \\
 C_2 &= A_3 & \lambda_2 &= \frac{2}{16} \\
 C_3 &= A_5 & \lambda_3 &= \frac{1}{48} \\
 C_4 &= A_4 & \lambda_4 &= \frac{2}{16} \\
 C_5 &= A_5 & \lambda_5 &= \frac{2}{48}.
 \end{aligned}$$

Passo 3

Faz-se uma permutação nos três primeiros elementos

$$\begin{aligned}
 C'_1 &= C_2 = A_3 & \lambda_1 &= \frac{2}{16} \\
 C'_2 &= C_3 = A_5 & \lambda_2 &= \frac{1}{48} \\
 C'_3 &= C_1 & \lambda_3 &= \frac{11}{16} \\
 C'_4 &= C_4 = A_4 & \lambda_4 &= \frac{2}{16} \\
 C'_5 &= C_5 = A_5 & \lambda_5 &= \frac{2}{48}.
 \end{aligned}$$

Passo 4

Como $\text{car}(A_3 - A_5) \leq 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{\frac{6}{48}A_3 + \frac{1}{48}A_5}{\frac{7}{48}} = \frac{6}{7}A_3 + \frac{1}{7}A_5 & \lambda_1 &= \frac{7}{48} \\
 D_2 &= C_1 & \lambda_2 &= \frac{11}{16} \\
 D_3 &= A_4 & \lambda_3 &= \frac{2}{16} \\
 D_4 &= A_5 & \lambda_4 &= \frac{2}{48}
 \end{aligned}$$

Passo 5

Como $\text{car}(D_1 - D_2) = \text{car}(P_3 - P_4) \leq 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{\frac{7}{48}D_1 + \frac{33}{48}D_2}{\frac{40}{48}} = \frac{7}{40}D_1 + \frac{33}{40}D_2 & \lambda_1 &= \frac{40}{48} \\
 E_2 &= A_4 & \lambda_2 &= \frac{2}{16} \\
 E_3 &= A_5 & \lambda_3 &= \frac{2}{48}
 \end{aligned}$$

Passo 6

Faz-se uma permutação

$$\begin{aligned}
 E'_1 &= E_2 & \lambda_1 &= \frac{2}{16} \\
 E'_2 &= E_3 & \lambda_2 &= \frac{2}{48} \\
 E'_3 &= E_1 & \lambda_3 &= \frac{40}{48}
 \end{aligned}$$

Passo 7

Como $\text{car}(E_2 - E_3) \leq 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\frac{6}{48}A_4 + \frac{2}{48}A_5}{\frac{8}{48}} = \frac{3}{4}A_4 + \frac{1}{4}A_5 & \lambda_1 &= \frac{8}{48} \\
 F_2 &= E_1 & \lambda_2 &= \frac{40}{48}
 \end{aligned}$$

Como $\text{car}(F_1 - F_2) \leq 1$ então conclui-se que $\{(\lambda_i, A_i)\}_{1 \leq i \leq 7}$ satisfaz a condição H_7 . Por (8.3) obtemos

$$R\varphi(0) \leq \sum_{i=1}^6 \lambda_i \varphi(A_i) = -\frac{1}{2},$$

concluindo-se que $R\varphi(0) = Q\varphi(0)$.

8.3 A deformação óptima

Seguidamente vamos analisar a segunda tentativa de extensão do contra-exemplo proposta por Pedregal e Šverak.

Vamos averiguar a possibilidade de fixar uma deformação periódica apropriada, u , e procurar uma função contínua conveniente ψ , tal que

$$R\psi(0) > \int_T R\psi(\nabla u(x)) dx. \quad (8.10)$$

Vamos tomar a deformação adoptada na determinação da quasiconvexificação da polinomial cúbica φ , ou seja, a deformação tal que

$$\begin{aligned} \int_T \psi(\nabla U(x)) dx &= \frac{1}{16} (\psi(1, 1, 1) + \psi(1, -1, -1) + \psi(-1, 1, -1) + \psi(-1, -1, 1)) + \\ &+ \frac{3}{16} (\psi(1, 1, -1) + \psi(1, -1, 1) + \psi(-1, 1, 1) + \psi(-1, -1, -1)) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Será possível encontrar uma função tal que

$$R\psi(0) > \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx ?$$

A resposta é negativa e baseia-se no que vimos no capítulo anterior. Pois como observámos a medida de probabilidade ν_1 verifica a condição H_7 . Logo, por simetria, podemos afirmar que ν_2 e ν_3 também satisfazem a condição H_7 . Isto implica que

$$R\psi(0) \leq \langle R\psi, \nu_i \rangle = \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Mas $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, logo

$$\begin{aligned} R\psi(0) &= \frac{1}{3}R\psi(0) + \frac{1}{3}R\psi(0) + \frac{1}{3}R\psi(0) \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx + \frac{1}{3} \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx + \frac{1}{3} \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx = \\ &= \int_T R\psi(\nabla U(x)) dx, \end{aligned}$$

contrariando (8.10).

Capítulo 9

Exemplos de caracterização dos conjuntos de medidas associados aos vários tipos de convexidade

Neste capítulo, vamos abordar geometricamente o problema da equivalência ou não da convexidade car-1 e quasiconvexidade para as matrizes simétricas 2×2 .

Averiguar se toda a função convexa car-1 é quasiconvexa é equivalente, como vimos, a averiguar se toda a medida de Young gradiente homogénea é um laminado, ou seja, precisamos caracterizar o conjunto das medidas de probabilidade, suportadas no conjunto das matrizes simétricas 2×2 , para as quais a desigualdade de Jensen se verifica para toda a função quasiconvexa e convexa car-1, respectivamente.

Começamos por trabalhar no subespaço das matrizes 3×2 apresentado no contra-exemplo de Šverak. Para facilitar, representamos primeiro o conjunto das medidas de probabilidade suportadas neste subespaço que caracterizam a convexidade. Teremos oportunidade de compreender geometricamente que a convexidade car-1 não implica a quasiconvexidade. Para isso, basta-nos mostrar que o conjunto das medidas que caracterizam a convexidade car-1 está estritamente contido no conjunto das medidas que caracterizam a quasiconvexidade.

Tendo em conta as ideias apresentadas nos capítulos anteriores, consideramos as medidas de probabilidade suportadas nos vértices do cubo $[-1, 1]^3$. (Note que as coordenadas dos vértices do cubo representam as coordenadas das combinações lineares de umas certas matrizes relativamente à base do subespaço de Šverak e, posteriormente, relativamente à base do subespaço das matrizes simétricas 2×2 .)

No caso das matrizes simétricas 2×2 , devido à infinidade de direcções car-1 envolvidas, torna-se difícil a caracterização do sólido. Apresentamos um sólido que está contido (não sabemos se estritamente) no sólido que caracteriza a convexidade car-1.

Terminamos o capítulo com algumas observações.

9.1 A convexidade

Vamos considerar o cubo $[-1, 1]^3$ e a cada vértice do cubo associar um peso de forma a que o conjunto dos oito pesos seja uma medida de probabilidade, ou seja a sua soma terá de ser igual a 1. Para facilitar a apresentação dos resultados, consideramos a soma igual a 8 e o peso real correspondente a cada vértice será o peso obtido dividido por 8.

Vamos centrar o problema na origem, isto é, consideramos a origem como o primeiro momento, ou seja

$$\sum_{i=1}^8 p_i v_i = 0,$$

onde p_i designa o peso no i -ésimo vértice v_i .

Formalmente, pretendemos determinar e representar geometricamente o subconjunto dos pontos $(p_1, \dots, p_8) \in \mathbb{R}^8$ tais que:

- i) $\sum_{i=1}^8 p_i = 8;$
- ii) $\sum_{i=1}^8 p_i v_i = 0.$

Assim para toda a função convexa temos

$$f(0) = f\left(\sum_{i=1}^8 p_i v_i\right) \leq \sum_{i=1}^8 p_i f(v_i).$$

Note que a desigualdade precedente pode escrever-se na forma integral

$$f(0) = f\left(\int_M A d\nu(A)\right) \leq \int_M f(A) d\nu(A)$$

onde ν é a medida de probabilidade

$$\nu = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 p_i \delta_{v_i}$$

e δ_{v_i} designa a medida de Dirac.

Para fixar a notação começemos por representar o cubo $[-1, 1]^3$ renomeando os pesos em cada vértice, e os respectivos vértices

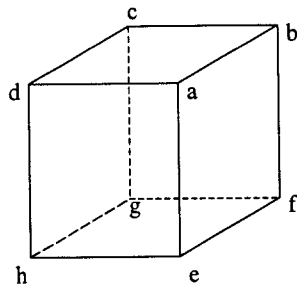


Figura 9.1:

$A = (1, 1, 1)$	$E = (1, 1, -1)$
$B = (-1, 1, 1)$	$F = (-1, 1, -1)$
$C = (-1, -1, 1)$	$G = (-1, -1, -1)$
$D = (1, -1, 1)$	$H = (1, -1, -1)$

Assim as restrições que o conjunto dos pesos deve verificar são:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f + g + h &= 8 \\ aA + bB + cC + dD + eE + fF + gG + hH &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f + g + h = 8 \\ a - b - c + d + e - f - g + h = 0 \\ a + b - c - d + e + f - g - h = 0 \\ a + b + c + d - e - f - g - h = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema vem

$$\begin{cases} h = -a - d - e + 4 \\ f = -b - a - e + 4 \\ g = 2a + d + b + e - 4 \\ c = -a - b - d + 4. \end{cases}$$

Como cada um destes pesos não pode ser negativo temos

$$\begin{cases} a + d + e \leq 4 \\ b + a + e \leq 4, \\ a + b + d \leq 4 \\ 2a + d + b + e \geq 4, \end{cases} \quad (9.1)$$

obtendo-se um sólido em \mathbb{R}^4 .

Para esboçarmos este sólido, vamos fixar a , variar as três restantes variáveis e para cada caso determinar o sólido em \mathbb{R}^3 correspondente.

Caso 1- $a = 0$

Substituindo em (9.1) temos

$$\begin{cases} b + d \leq 4 \\ b + e \leq 4 \\ d + e \leq 4 \\ b + d + e \leq 4. \end{cases}$$

O sólido resultante é uma pirâmide triangular com base no hiperplano $b + d + e = 4$.

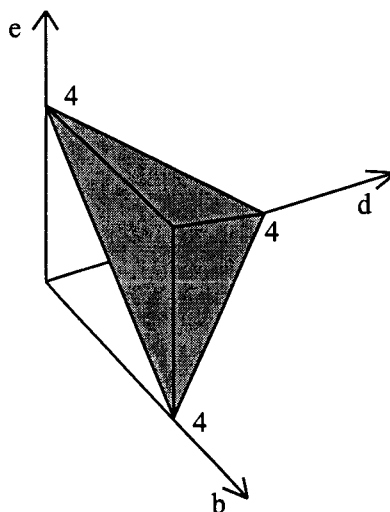


Figura 9.2:

Neste caso temos 4 pontos extremais

$$P_1 = (0, 4, 0, 0), \quad P_2 = (0, 0, 4, 0), \quad P_3 = (0, 0, 0, 4), \quad P_4 = (0, 2, 2, 2).$$

Note que P_4 é a intersecção dos hiperplanos $b + d = 4$, $b + e = 4$, $d + e = 4$.

A distribuição dos pesos pelos vértices pode observar-se na seguinte figura

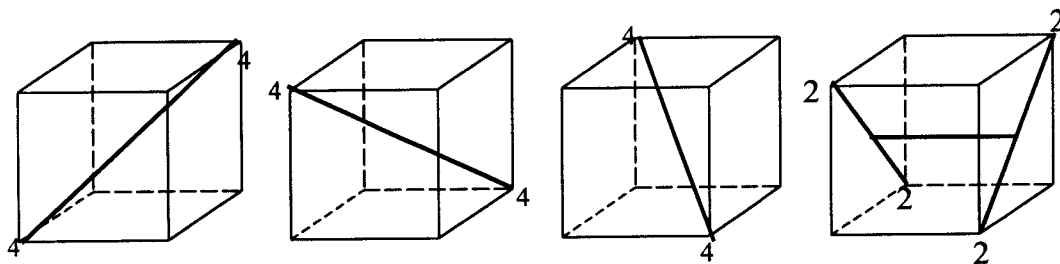


Figura 9.3:

Note que, enquanto nos primeiros três cubos a direcção fica univocamente determinada, no último cubo existem outras direcções possíveis, por exemplo

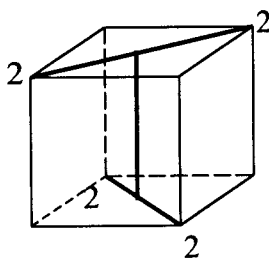


Figura 9.4:

Caso 2- $a \in]0, 2[$

As restrições são

$$\begin{cases} b + d \leq 4 - a \\ b + e \leq 4 - a \\ b + d + e \leq 4 - 2a. \end{cases}$$

Neste caso temos duas pirâmides com base triangular em comum, estando uma delas truncada.

Para ilustrar, vamos apresentar a figura no caso $a = 1$. (Ver figura 9.5)

Neste caso o sólido tem sete pontos extremais dados por:

$$P_1 = (a, 4 - a, 0, 0) \quad P_2 = (a, 0, 4 - a, 0) \quad P_3 = (a, 0, 0, 4 - a) \\ P_4 = (a, 4 - 2a, 0, 0) \quad P_5 = (a, 0, 4 - 2a, 0), \quad P_6 = (a, 0, 0, 4 - 2a) \quad P_7 = (a, 2 - \frac{a}{2}, 2 - \frac{a}{2}, 2 - \frac{a}{2}).$$

A distribuição dos pesos pelos vértices está ilustrada na figura 9.6:

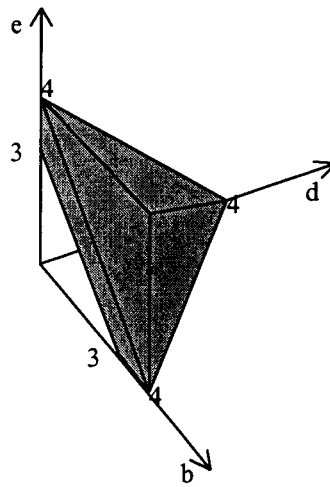


Figura 9.5:

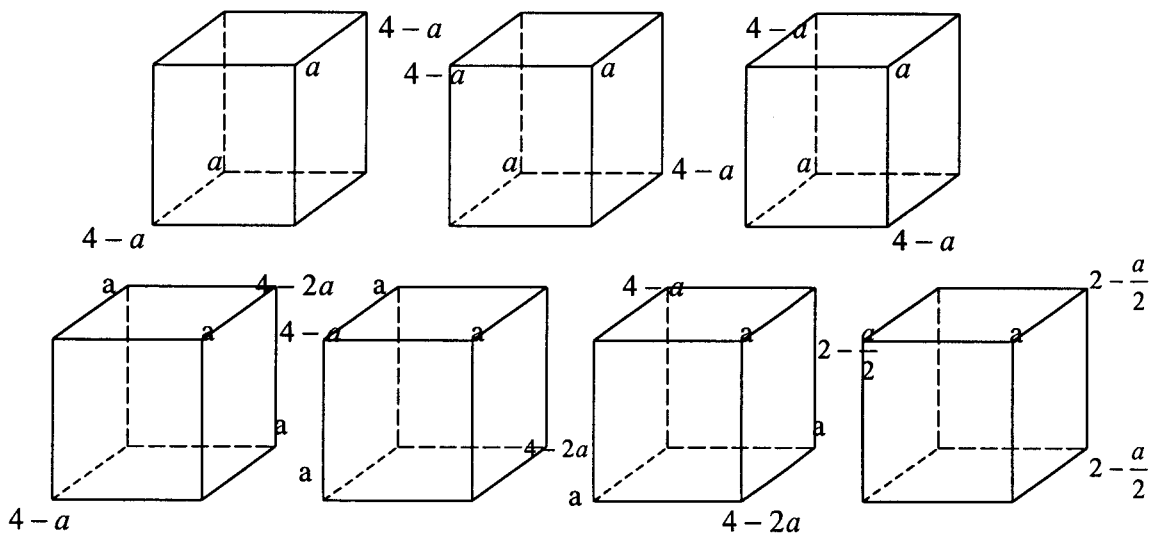


Figura 9.6:

Caso 3- $a \in [2, 4[$

Para este caso temos cinco pontos extremais sendo quatro idênticos aos pontos extremais P_1, P_2, P_3, P_7 do caso precedente para valores de a agora no intervalo $[2, 4[$ e o quinto ponto extremal é $(a, 0, 0, 0)$.

O sólido pode ver-se representado na figura 9.7

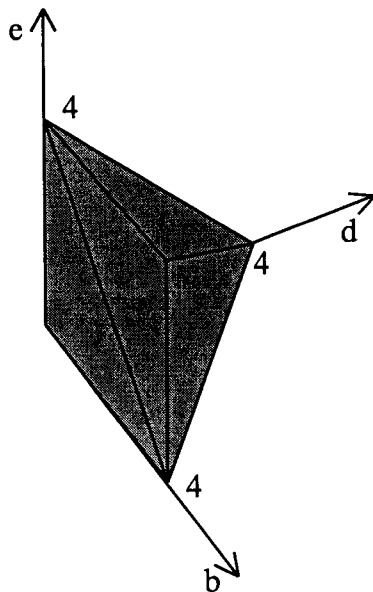


Figura 9.7:

Caso 4- $a = 4$

Temos as seguintes restrições

$$\begin{cases} b + d \leq 0 \\ b + e \leq 0 \\ b + d + e \geq -4, \end{cases}$$

mas como b, d, e são não negativos então $b = d = e = 0$.

Ou seja, quando $a = 4$ o sólido reduz-se ao ponto $(4, 0, 0, 0)$.

Assim o sólido quadridimensional vai ser o envólucro convexo dos pontos extremais

$$(4, 0, 0, 0), (0, 4, 0, 0), (0, 0, 4, 0), (0, 0, 0, 4), (2, 0, 0, 0).$$

Para isso vamos verificar que todos os pontos extremais do sólido tridimensional correspondente a cada valor de a fixado, se obtêm como combinação convexa dos pontos extremais do sólido em \mathbb{R}^4 .

Para o caso $a = 0$ os pontos extremais do sólido em \mathbb{R}^3 são pontos extremais do sólido em \mathbb{R}^4 .

Para o caso $a \in [2, 4[$ temos

$$\begin{aligned} (a, 4 - a, 0, 0) &= \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - a}{4}(0, 4, 0, 0) \\ (a, 0, 4 - a, 0) &= \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - a}{4}(0, 0, 4, 0) \\ (a, 0, 0, 4 - a) &= \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - a}{4}(0, 0, 0, 4) \\ (a, 2 - \frac{a}{2}, 2 - \frac{a}{2}, 2 - \frac{a}{2}) &= \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - a}{4}(0, 2, 2, 2) \\ (a, 0, 0, 0) &= \frac{4 - a}{2}(2, 0, 0, 0) + \frac{a - 2}{2}(4, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Para o caso $a \in]0, 2[$ temos os primeiros quatro pontos extremais anteriores mais

$$(a, 4 - 2a, 0, 0) = \frac{a}{2}(2, 0, 0, 0) + \frac{4 - 2a}{4}(0, 4, 0, 0)$$

$$(a, 0, 4 - 2a, 0) = \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - 2a}{4}(0, 0, 4, 0)$$

$$(a, 0, 0, 4 - 2a) = \frac{a}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{4 - 2a}{4}(0, 0, 0, 4).$$

A figura 9.8 representa o sólido que caracteriza a convexidade.

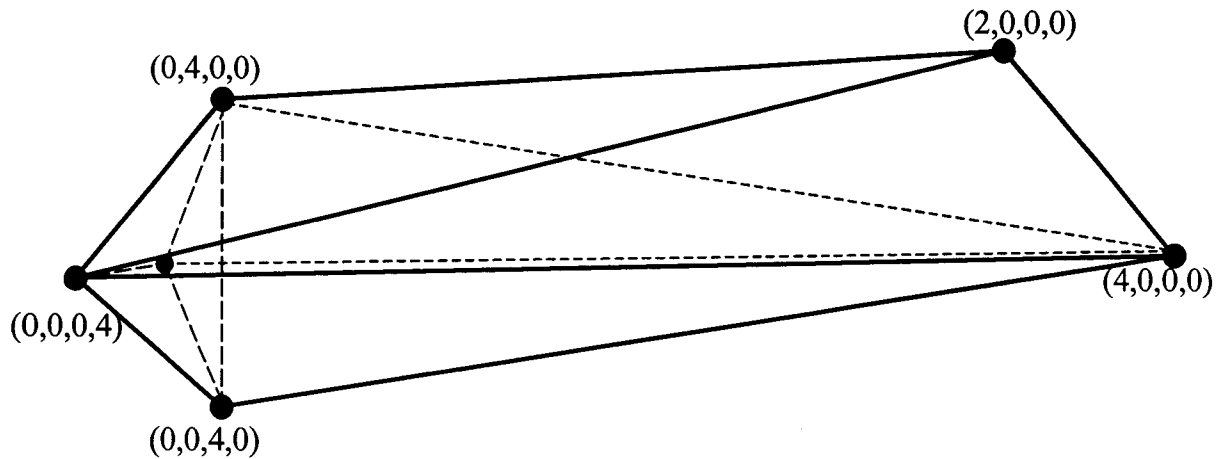


Figura 9.8: sólido que caracteriza a convexidade

9.2 O caso das matrizes do exemplo de Šverak

9.2.1 A policonvexidade

Como toda a função convexa é policonvexa então o conjunto dos pesos que caracterizam a policonvexidade é um subconjunto do conjunto dos pesos que caracterizam a convexidade.

Com efeito, considerando uma medida de probabilidade suportada nos oito vértices tal que a desigualdade de Jensen se verifica para qualquer função policonvexa então em particular a desigualdade de Jensen verifica-se para qualquer função convexa.

Por isso, procuramos um sólido que esteja contido no sólido quadridimensional atrás representado.

Sabemos que uma função policonvexa é função dos menores da matriz. Neste caso, os menores da matriz

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ z & z \end{pmatrix}$$

são x, y, z, xy, xz e $-yz$. Logo a cada matriz está associado o ponto em $\mathbb{R}^6 (x, y, z, xy, xz, -yz)$. Mas como as três últimas coordenadas são univocamente determinadas pelas três primeiras podemos, analogamente ao que fizemos para a convexidade, associar a cada ponto de \mathbb{R}^6 o respectivo vértice do cubo $[-1, 1]^3$.

Assim

$$\begin{array}{ll} A = (1, 1, 1, 1, 1, -1) & E = (1, 1, -1, 1, -1, 1) \\ B = (-1, 1, 1, -1, -1, -1) & F = (-1, 1, -1, -1, 1, 1) \\ C = (-1, -1, 1, 1, -1, 1) & G = (-1, -1, -1, 1, 1, -1) \\ D = (1, -1, 1, -1, 1, 1) & H = (1, -1, -1, -1, -1, -1). \end{array}$$

As restrições para a policonvexidade são dadas pelo sistema

$$\begin{cases} a - b - c + d + e - f - g + h = 0 \\ a + b - c - d + e + f - g - h = 0 \\ a + b + c + d - e - f - g - h = 0 \\ a - b + c - d + e - f + g - h = 0 \\ a - b - c + d - e + f + g - h = 0 \\ -a - b + c + d + e + f - g - h = 0 \\ a + b + c + d + e + f + g + h = 8, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} b = 2 - a \\ c = a \\ d = 2 - a \\ e = 2 - a \\ f = a \\ g = 2 - a \\ h = a, \end{cases}$$

com $a \geq 0$, $2 - a \geq 0$. Logo $a \in [0, 2]$.

Obtemos assim um segmento de recta de extremos

$$\begin{aligned} a = 0 &\implies (0, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 0) \\ a = 2 &\implies (2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2). \end{aligned}$$

A respectiva distribuição dos pesos pelos vértices é dada pela figura 9.9:

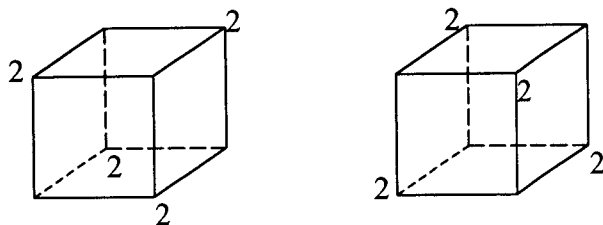


Figura 9.9:

A projecção em \mathbb{R}^4 do segmento de recta em \mathbb{R}^8 é

$$\overline{(0, 2, 2, 2), (2, 0, 0, 0)}$$

que é um subconjunto do sólido que caracteriza a convexidade.

9.2.2 A convexidade car-1

Como toda a função policonvexa é convexa car-1 então o conjunto dos pesos que caracterizam a convexidade car-1 será um subconjunto do conjunto dos pesos que caracterizam a policonvexidade, ou seja, será um segmento contido no segmento $(0, 2, 2, 2), (2, 0, 0, 0)$.

Em dimensão 3×2 as únicas direcções car-1 são as direcções dos eixos.

Geometricamente vê-se que usando apenas as direcções dos eixos, para que a média dê zero, os pesos terão de ser sempre iguais entre si. (Ver figura 9.10.)

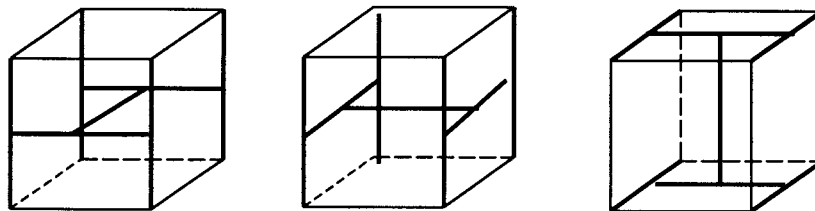


Figura 9.10:

Como a soma dos oito pesos é oito então cada peso terá de ser igual a 1. (Uma justificação formal para este facto é a proposição 4.3.10.)

Assim a convexidade car-1 é caracterizada pelo único ponto $(1, 1, 1, 1)$ que está estritamente contido no segmento que caracteriza a policonvexidade pois

$$(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) + \frac{1}{2}(2, 0, 0, 0).$$

O exposto mostra que para $m = 3$ e $n = 2$ existem funções convexas car-1 que não são policonvexas.

9.2.3 A quasiconvexidade

No capítulo VII, apresentámos uma medida parametrizada gradiente homogénea construída através de gradientes simétricos que não é um laminado. Tal medida é dada por

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{16} (\delta(1, 1, 1) + \delta(1, -1, -1) + \delta(-1, 1, -1) + \delta(-1, -1, 1)) + \\ &+ \frac{3}{16} (\delta(1, 1, -1) + \delta(1, -1, 1) + \delta(-1, 1, 1) + \delta(-1, -1, -1)) \end{aligned}$$

logo o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ pertence ao sólido que caracteriza a quasiconvexidade. O ponto $(1, 1, 1, 1)$ que caracteriza a convexidade car-1 também é elemento do conjunto dos pontos que caracterizam a quasiconvexidade.

Assim o segmento $(1, 1, 1, 1)(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ caracteriza a quasiconvexidade.

Podemos obter por simetria, a medida

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{16} (\delta(-1, 1, 1) + \delta(1, -1, 1) + \delta(1, 1, -1) + \delta(-1, -1, -1)) + \\ &+ \frac{3}{16} (\delta(1, 1, 1) + \delta(-1, -1, 1) + \delta(-1, 1, -1) + \delta(1, -1, -1)). \end{aligned}$$

Assim o segmento de extremos $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ é um subconjunto do conjunto dos pontos que caracterizam a quasiconvexidade.

Será que este segmento é maximal?

Obviamente ele poderia ser alargado no máximo até ao segmento que caracteriza a policonvexidade e se tal acontecesse poderíamos dizer que, neste caso, a quasiconvexidade é equivalente à policonvexidade. (Observe a figura 9.11.)

Testaram-se algumas deformações semelhantes às aqui apresentadas na tentativa de alargar o segmento, mas todas as medidas resultantes estão contidas no segmento $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Note, no entanto, que embora não se tenha conseguido determinar o conjunto das medidas que caracteriza a quasiconvexidade, demonstrou-se que a convexidade car-1 não implica a quasiconvexidade neste tipo de matrizes 3×2 .

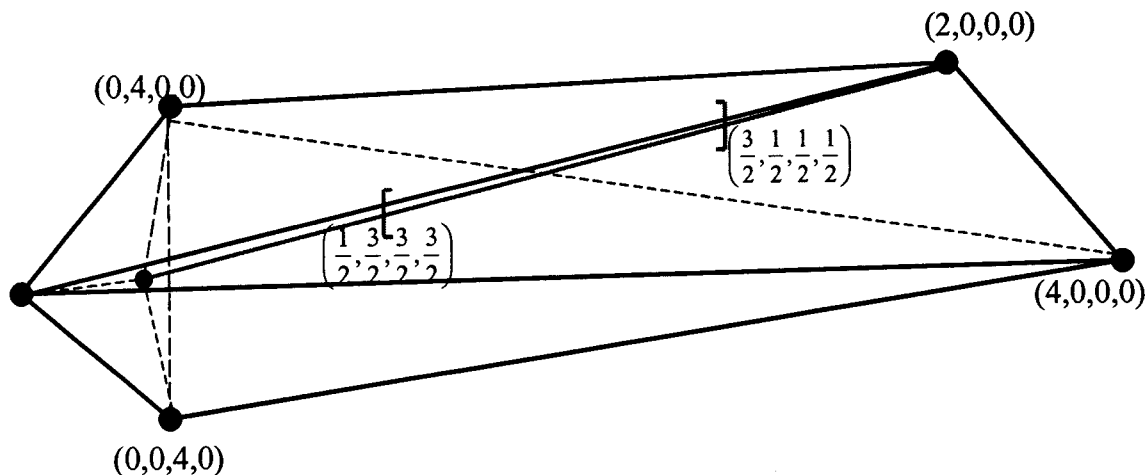


Figura 9.11:

9.3 O caso das matrizes simétricas 2×2

Vamos considerar, mais uma vez, as matrizes simétricas 2×2 representadas por

$$\begin{pmatrix} x+z & z \\ z & y+z \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x, y, z)$$

9.3.1 A policonvexidade

Analogamente ao que foi apresentado na subsecção 9.2.1, iremos considerar as três variáveis x, y e z e cada menor da matriz.

Os menores da matriz (x, y, z) são $z, x+z, y+z$ e $xy+yz+xz$. Mas como dois dos menores se obtêm univocamente das variáveis x, y e z , basta considerar as variáveis

$$(x, y, z, xy+xz+yz)$$

obtendo-se os vértices

$$\begin{aligned} A &= (1, 1, 1, 3) & E &= (1, 1, -1, -1) \\ B &= (-1, 1, 1, -1) & F &= (-1, 1, -1, -1) \\ C &= (-1, -1, 1, -1) & G &= (-1, -1, -1, 3) \\ D &= (1, -1, 1, -1) & H &= (1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

As restrições são dadas por

$$\begin{cases} a-b-c+d+e-f-g+h=0 \\ a+b-c-d+e+f-g-h=0 \\ a+b+c+d-e-f-g-h=0 \\ 3a-b-c-d-e-f+3g-h=0 \\ a+b+c+d+e+f+g+h=8. \end{cases}$$

A solução é

$$\begin{cases} c=4-a-b-d \\ e=6-3a-b-d \\ f=2a+d-2 \\ g=2-a \\ h=2a+b-2. \end{cases}$$

Impondo que cada peso seja não-negativo obtemos

$$\begin{cases} a + b + d \leq 4 \\ 3a + b + d \leq 6 \\ 2a + d \geq 2 \\ a \leq 2 \\ 2a + b \geq 2. \end{cases}$$

Obtemos então para a policonvexidade um sólido tridimensional com 6 faces triangulares e 5 pontos extremais:

$$P_1 = (2, 0, 0), \quad P_2 = (1, 0, 0), \\ P_3 = (1, 0, 3), \quad P_4 = (1, 3, 0), \quad P_5 = (0, 2, 2).$$

Vamos verificar que este sólido está contido no sólido quadridimensional da convexidade. Para isso basta verificar que cada ponto extremal, P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, está no envólucro convexo do sólido quadridimensional.

Ora

1- para $P_1 = (2, 0, 0)$, ou seja $a = 2$ e $b = d = 0$ vem $e = 6 - 3a - b - d = 6 - 6 = 0$. O ponto $(2, 0, 0, 0)$ é ponto extremal do sólido quadridimensional;

2- para $P_2 = (1, 0, 0)$ vem $e = 3$ e $(1, 0, 0, 3) = \frac{1}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{3}{4}(0, 0, 0, 4)$;

3- para $P_3 = (1, 0, 3)$ vem $e = 0$ e $(1, 0, 3, 0) = \frac{1}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{3}{4}(0, 0, 4, 0)$;

4- para $P_4 = (1, 3, 0)$ vem $e = 0$ e $(1, 3, 0, 0) = \frac{1}{4}(4, 0, 0, 0) + \frac{3}{4}(0, 4, 0, 0)$;

5- para $P_5 = (0, 2, 2)$ vem $e = 2$ e $(0, 2, 2, 2)$ é ponto extremal do sólido em \mathbb{R}^4 .

O sólido que caracteriza a policonvexidade está representado na figura 9.12 a sombreado.

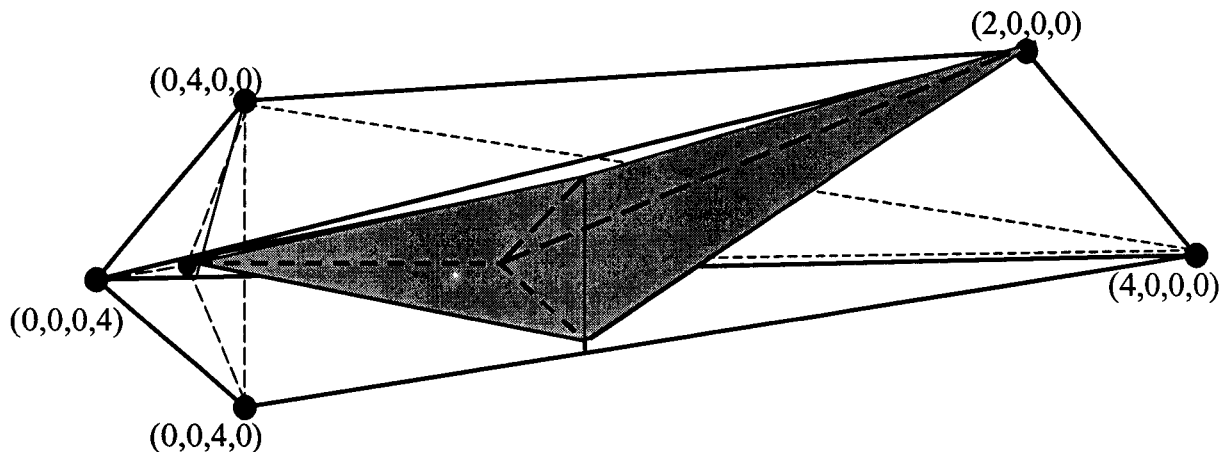


Figura 9.12:

A distribuição dos pesos pelos vértices para cada ponto extremal é dada na figura 9.13:

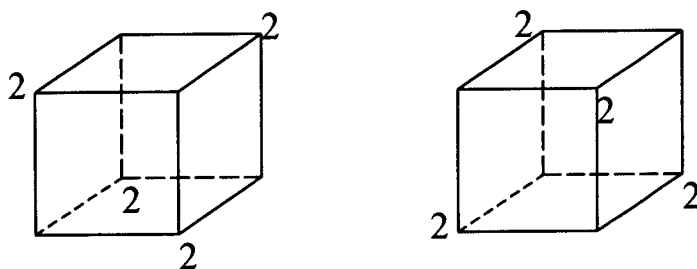


Figura 9.13:

9.3.2 A convexidade car-1

Como vimos, um segmento é uma direcção car-1 se e só se o vector (x, y, z) que se obtém tomando a diferença em cada coordenada de quaisquer dois pontos do segmento verifica $xy + xz + yz = 0$.

Note que, enquanto em dimensão 3×2 tínhamos apenas três direcções car-1 que correspondiam às direcções dos eixos, na dimensão 2×2 não nos é possível experimentar todas as direcções car-1. É esta a principal dificuldade na determinação do sólido que caracteriza a convexidade car-1. Como a média é zero tem de haver uma direcção car-1 que passa pela origem. Os pontos que verificam esta condição e pertencem a uma aresta do cubo são:

$$\begin{array}{ll} (-\frac{1}{2}, 1, 1) & (\frac{1}{2}, -1, -1) \\ (1, -\frac{1}{2}, 1) & (-1, \frac{1}{2}, -1) \\ (1, 1, -\frac{1}{2}) & (-1, -1, \frac{1}{2}). \end{array}$$

A direcção car-1 que passa pela origem e pelo ponto $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$ intervém no laminado obtido por Pedregal, que apresentamos na secção 7.3.

Na figura 9.14 apresentam-se as várias direcções car-1 associadas ao laminado.

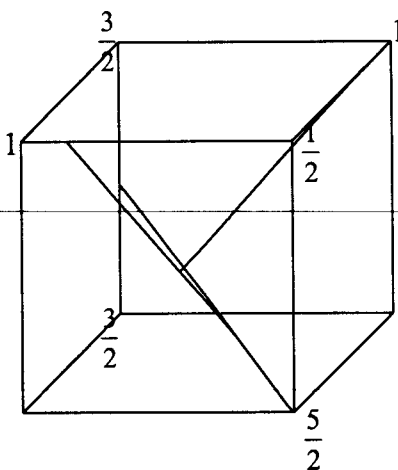


Figura 9.14:

O peso nos respectivos vértices é dado por $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0)$. Por simetria podemos obter mais cinco laminados.

1- Fazendo uma rotação de 90° , no sentido directo, em torno do eixo- x , seguido de uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- z , obtemos o laminado cuja a distribuição dos pesos pelos vértices é $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

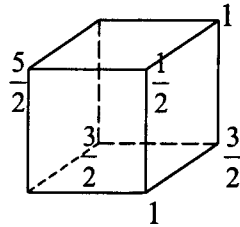


Figura 9.15:

2- Fazendo uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- y seguido de uma rotação no sentido inverso em torno do eixo- z , obtemos o laminado cuja a distribuição dos pesos pelos vértices é $(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

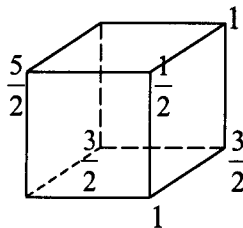


Figura 9.16:

3- Fazendo uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- x seguido de uma rotação 180° em torno do eixo- y , obtemos o laminado cuja a distribuição dos pesos pelos vértices é $(\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

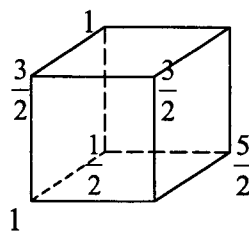


Figura 9.17:

4- Fazendo uma rotação de 90° no sentido directo em torno do eixo- z , seguido de uma rotação 180° em torno do eixo- y , obtemos o laminado cuja a distribuição dos pesos pelos vértices é $(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1, 0, 1)$.

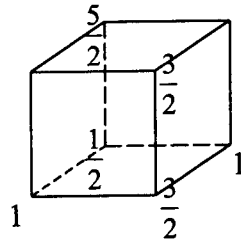


Figura 9.18:

5- Fazendo uma rotação de 90° , no sentido inverso em torno do eixo- y , seguido de uma rotação 180° em torno do eixo- z , obtemos o laminado cuja a distribuição dos pesos pelos vértices é $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

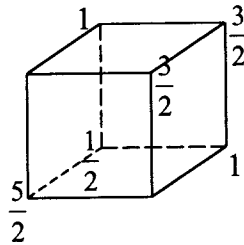


Figura 9.19:

Assim estes seis pontos correspondentes aos laminados são pontos que caracterizam a convexidade car-1 e por isso também caracterizam a quasiconvexidade e a policonvexidade.

Convém então verificar que cada um destes pontos se escreve como combinação convexa dos pontos extremais da policonvexidade.

Para cada ponto fazemos a projecção nas coordenadas a, b, d, e e determinamos a respectiva combinação convexa.

$$\begin{aligned}
 1- & \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}\right) \\
 & \left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, 0, 0, 3) + \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) \\
 2- & \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1\right) \\
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{2}(1, 3, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) \\
 3- & \left(\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{5}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 1\right) \\
 & \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(1, 0, 3, 0) + \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) \\
 4- & \left(\frac{3}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) \\
 & \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}(2, 0, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 3, 0) \\
 5- & \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2}, 1, 0, 1\right) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right) \\
 & \left(\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(2, 0, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, 0, 0, 3) \\
 6- & \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right) \\
 & \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right) = \frac{1}{2}(2, 0, 0, 0) + \frac{1}{2}(1, 3, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Assim pelo menos o envólucro convexo destes seis pontos caracteriza a convexidade car-1. Mas na realidade também os pontos $(1, 3, 0, 0)$, $(1, 0, 3, 0)$ e $(1, 0, 0, 3)$ caracterizam a convexidade car-1.

Ao ponto $(1, 3, 0, 0)$ corresponde o laminado $(1, 3, 0, 0, 0, 0, 1, 3)$ que é representado pela figura 9.20.

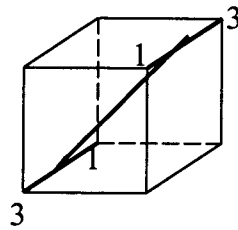


Figura 9.20:

É fácil ver que as duas direcções intervenientes são direcções car-1.
Com efeito,

$$\begin{aligned} (-1, 1, 1) - (1, 1, 1) &= (-2, 0, 0) \quad \text{e} \quad -2 \times 0 + 0 \times 0 - 2 \times 0 = 0 \\ \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right) - \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right) &= (-1, 2, 2) \quad \text{e} \quad -2 - 2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Analogamente, ao ponto $(1, 0, 3, 0)$ corresponde o laminado $(1, 0, 0, 3, 0, 3, 1, 0)$ que é representado pela figura 9.21.

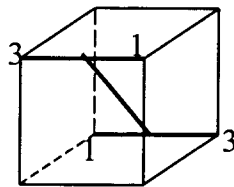


Figura 9.21:

Ao ponto $(1, 0, 0, 3)$ corresponde o laminado $(1, 0, 3, 0, 3, 0, 1, 0)$ representado pela figura 9.22

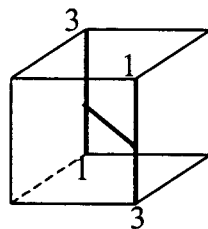


Figura 9.22:

Na figura 9.23, apresenta-se um sólido que caracteriza a convexidade car-1, mas nada nos garante que este é o sólido maximal. Não sabemos se este sólido pode ser alargado ou não.

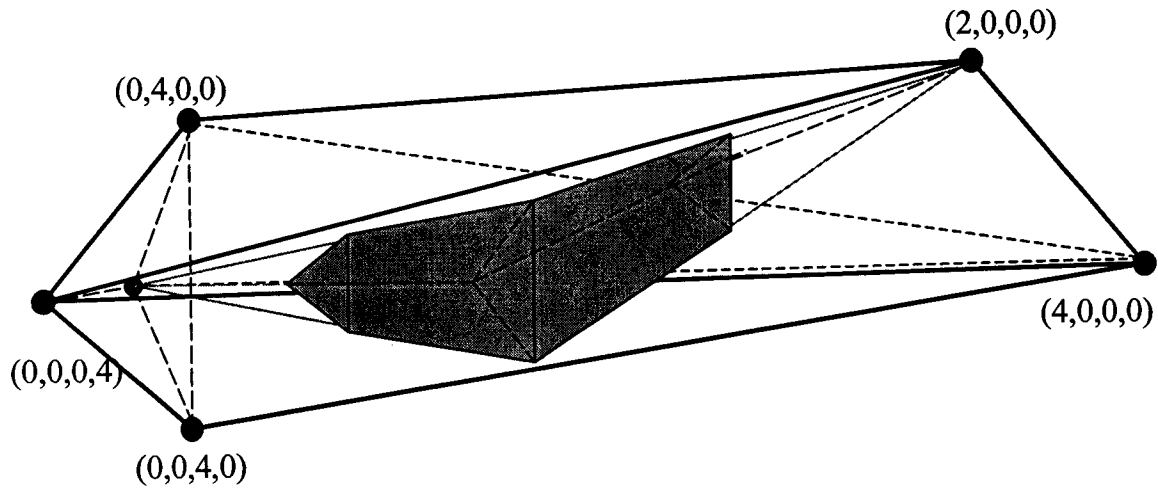


Figura 9.23:

Poderíamos tentar construir outros laminados baseando-nos nos que já apresentámos. Por exemplo, para cada laminado referido, considerar a direcção car-1 que passa pela origem, mas em vez do segmento tocar numa aresta do cubo, ficar no seu interior. Por exemplo para o primeiro laminado, em vez da direcção car-1 atingir o ponto $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$ atingiria o ponto $(-\frac{1-\rho}{2}, 1-\rho, 1-\rho)$ com $\rho \in [0, 1[$.

Podemos, por outro lado, considerar outras medidas de Young gradiente homogéneas e tentar encontrar uma que não seja um laminado.

Fizemos muitas tentativas para caracterizar o sólido da convexidade car-1, mas nunca conseguimos obter nenhum ponto fora daquele sólido, nem conseguimos demonstrar que o sólido é maximal.

Capítulo 10

Conclusão

Genericamente, podemos dizer que a principal dificuldade na obtenção de um minimizador para um dado funcional reside na obtenção da propriedade de semi-continuidade inferior fraca do funcional. Vimos que a quasiconvexidade da função integranda é uma condição necessária e suficiente para a obtenção da semi-continuidade inferior fraca do integral. Devido ao carácter não-local da propriedade de quasiconvexidade apresentaram-se outros tipos de convexidade.

Estabelecendo-se, primeiramente, a fundamentação teórica que considerámos essencial para melhor enquadramento de todos os conceitos envolvidos, desenvolvemos a nossa abordagem terminando nas relações entre os vários tipos de convexidade.

Durante muito tempo, vários matemáticos questionaram e investigaram a seguinte questão: para o caso vectorial, a convexidade característica 1 será ou não equivalente à quasiconvexidade. Em 1993 chega-nos o contra-exemplo notável de Šverak que nos diz que existem realmente funções convexas característica 1 que não são quasiconvexas para os casos $m \geq 3$ e $n \geq 2$.

Desde então várias tentativas se fizeram com vista a estender o contra-exemplo de Šverak ao caso $m = 2$. Como pudémos observar no capítulo VII, Pedregal reformulou o problema em termos de laminados e medidas parametrizadas gradiente homogéneas e considerou o caso particular das matrizes simétricas 2×2 . Mas surge-nos a grande dificuldade de não podermos, neste caso, determinar exactamente todas as direcções característica 1, contrariamente ao que acontece nos casos $m \geq 3$ e $n \geq 2$.

Devido ao facto de se conhecerem muito poucos exemplos explícitos de funções convexas característica 1 e quasiconvexas, reformulou-se o problema em termos de quasiconvexificação e convexificação característica 1. Mas também aí o contra-exemplo “teimou em não querer surgir”.

O capítulo IX apresenta o problema seguindo a ideia de Pedregal, mas numa perspectiva geométrica. Estas ideias, sugeridas por Ornelas, foram postas em prática no trabalho final da cadeira de mestrado “Cálculo das Variações”, por ele ministrada.

Os primeiros dois anos desta dissertação foram anos de trabalho centrado na tentativa de encontrar uma medida parametrizada gradiente homogénea que não fosse um laminado no caso particular das matrizes simétricas 2×2 . Em termos menos formais, mas mais próximos das ideias contidas no capítulo IX, tratou-se de tentar encontrar um ponto do conjunto das medidas que caracterizam a quasiconvexidade que não estivesse no conjunto das medidas que caracterizam a convexidade característica 1.

Decorridos dois anos, sem obtenção de resultados positivos pareceu-me mais importante virar a minha atenção para o estudo mais formal de certos conceitos relacionados com medidas de Young para poder compreender a abordagem do problema efectuada por Pedregal.

Dada a dificuldade do problema central, termino esta dissertação pensando que será útil conhecer novas ferramentas matemáticas, novas ideias do Cálculo das Variações para poder atacar este problema com êxito.

Espera-se que novas ideias surjam, na tentativa de arranjar um contra-exemplo ou que surja a demonstração de que para $m = n = 2$ as duas condições de convexidade são equivalentes, contradizendo no último caso a conjectura de Morrey.

Bibliografia

- [Ad] Adams, R. A. 1975 *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York.
- [Br] Brézis, H. 1983 *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris.
- [Ce] Cesari, L. 1983 *Optimization, Theory and Applications*, Springer Verlag.
- [Cohn] Cohn, D. L. 1993 *Measure Theory*, Birkhauser, Berlim.
- [Da1] Dacorogna, B. 1989 *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer Verlag.
- [Da2] Dacorogna, B. 1992 *Introduction au Calcul des Variations*.
- [Da3] Dacorogna, B. 1995 On rank one convex functions which are homogeneous of degree one, '*Progress in partial differential equations, Pont-à-Mousson, 1994*', C. Bandle, Longman.
- [Da-H] Dacorogna, B. e Haerberley, J. P. 1996 On convexity properties of homogeneous functions of degree one, Proc. R. Soc. Edinb., 126, n5, 947-956.
- [D-S] Dunford, N e Schwartz, J. T., (1958) *Linear Operators*, Interscience Publishers, inc., New York.
- [Ed] Edwards, R. E. 1965 *Functional Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [Ev] Evans, L., C. 1990 Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 74, American Mathematical Society, Providence, RI.
- [E-T] Ekeland, I. e Temam, R. 1976 *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- [Fo] Folland, G. B. 1984 *Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- [Fe] Fernandez, P. J. 1976 *Medida e Integração*, IMPA.
- [Gu] Gúzman, M. *Differentiation of Integrals in \mathbb{R}^n* .
- [H] Halmos, P. R. 1950 *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton.
- [H-L] Hirsch, F. e Lacombe 1999 G. *Elements of Functional Analysis*, Springer Verlag.
- [K-F] Kolmogorov, A. N. e Fomin, S. V. 1982 *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editora Mir, Moscovo.
- [Lima] Lima, E. L., 1970 *Elementos de Topologia Geral*, IMPA.
- [Mu] Muller, S. 1992 On quasiconvex functions which are homogeneous of degree one, Indiana Univ. Math. J., 41, 295-300.
- [Pe1] Pedregal, P. 1996 *Some Remarks on quasiconvexity and rank-one convexity*, Proc. R. Soc. Edinb., 126, n5, 1055-1065.

- [Pe2] Pedregal, P. 1997 *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhauser, Berlin.
- [Pe-Sv] Pedregal, P. and Šverak, V. 1998 A note on quasiconvexity and rank-one convexity for symmetric 2×2 matrices, *J. Convex Anal.*,5 107-117.
- [R-R] Renardy, R. e Rogers, R., C. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer Verlag.
- [Rc] Rockafellar, R. T. 1972 *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [Ru] Rudin, W. 1974 *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York.
- [Ru] Rudin, W. 1973 *Functional Analysis*, McGraw Hill, New York.
- [Sv1] Šverak, V. 1992 Rank-one convexity does not imply quasiconvexity, *Proc. R. Soc. Edinb.* 120A, 185-189.
- [Sv2] Šverak, V. 1992 New examples of quasiconvex functions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*,119, 293-300.
- [Tr] Troutman, J. L. 1983 *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer, New York.
- [W] Warga, J. 1972 *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York.
- [W-Z] Wheeden, R. L. e Zygmund 1977 *A. Measure and Integral*, Marcel Dekker, Inc., New York.