

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

*Análise da entropia como medida de incerteza e  
valor ordinal da informação no mercado bolsista  
de acções português.*

Dissertação apresentada como requisito  
parcial para a obtenção do Grau de Mestre  
em Organização e Sistemas de Informação

**Por:**

**Andreia Teixeira Marques Dionísio**

**Sob orientação de:**

**Prof. Doutor Amílcar Serrão**

**ÉVORA**

**2001**

**UNIVERSIDADE DE ÉVORA**

*Análise da entropia como medida de incerteza e valor ordinal da  
informação no mercado bolsista de acções português.*

Dissertação apresentada como requisito  
parcial para a obtenção do Grau de Mestre  
em Organização e Sistemas de Informação

Por:

Andreia Teixeira Marques Dionísio

Sob orientação de:

Prof. Doutor Amílcar Serrão

108 030

**ÉVORA**

**2001**

31/10/01

Este trabalho não inclui as  
observações e as críticas feitas  
pelo júri.

## AGRADECIMENTOS

No momento da conclusão não posso deixar de expressar o meu reconhecido agradecimento a todos os professores, colegas, alunos, família e amigos que contribuíram de forma directa ou indirecta para o enriquecimento de conhecimentos e experiências e concretização deste trabalho. Apesar da impossibilidade de nomear todos os que me ajudaram não posso deixar de agradecer individualmente a algumas pessoas.

Aos meus pais e irmãs por todo o carinho, compreensão e apoio sempre demonstrados, principalmente em alguns momentos críticos, incentivando-me sempre a concluir o trabalho que aqui se apresenta..

Um agradecimento muito especial ao Paulo Basílio por toda a ajuda prestada, não só a nível informático e discussão do trabalho, mas também pela compreensão, carinho, incentivo e apoio demonstrados de forma permanente.

Ao Prof. Doutor Amílcar Serrão, Orientador deste trabalho, pela valiosa orientação prestada, pelo apoio, pelas sugestões, comentários e todos os ensinamentos transmitidos que contribuíram para que fossem ultrapassadas inúmeras dificuldades durante a realização deste trabalho.

O meu reconhecido agradecimento ao Prof. Doutor António Heitor Reis por todos os ensinamentos transmitidos, pela disponibilidade e amizade sempre demonstradas, essenciais para a prossecução e desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento especial ao Prof. Doutor António Serrano por todo o apoio prestado ao longo do mestrado, ao Dr. Luís Coelho, ao Dr. João Assunção e ao Dr. José Correia pela amizade e disponibilidade sempre demonstradas, ao Eng. Rui Fragoso pela colaboração na parte informática e à Dr.<sup>a</sup> Elizabete Félix pela disponibilidade manifestada para a discussão de vários aspectos deste trabalho.

À Dr.<sup>a</sup> Susete Lourenço da Bolsa de Valores de Lisboa por toda a disponibilidade e simpatia demonstradas na recolha de informação para este trabalho.

Um profundo agradecimento à Fundação Eugénio de Almeida pelo apoio e incentivos prestados à elaboração deste trabalho.

Ao IAPMEI por todos os incentivos, apoio, disponibilidade prestadas que promoveram a possibilidade de realização de uma investigação mais profunda e detalhada.

# ÍNDICE

<i>Índice de quadros</i>	VII
<i>Índice de figuras</i>	IX
<i>Resumo</i>	XIII
<b>1 - Introdução</b>	1
1.1 - <i>Considerações gerais</i>	1
1.2 - <i>Problema em estudo</i>	4
1.3 - <i>Objectivos do trabalho</i>	5
1.4 - <i>Procedimentos</i>	7
<b>2 - Revisão Bibliográfica</b>	9
2.1 - <i>O valor da informação</i>	9
2.2 - <i>Modelos tradicionais de gestão de carteiras</i>	16
2.2.1 - Critério do valor esperado	17
2.2.2 - O risco no investimento em acções	18
2.2.3 - Utilidade esperada	20
2.2.4 - Modelo da média-variância	23
2.2.5 - Modelo diagonal de Sharpe	30
2.2.6 - O modelo de equilíbrio de mercado – CAPM (Capital Asset Pricing Model)	37
2.2.7 - O modelo APT – Arbitrage Pricing Theory	41
2.3 - <i>Modelos de entropia e informação mútua</i>	43
2.3.1 - Enquadramento geral	44
2.3.2 - Conceito de entropia e sua origem	48
2.3.3 - Entropia e teoria da informação	54
2.3.4 - Entropia e teoria financeira	60
2.4 - <i>Síntese do capítulo</i>	64
<b>3 - Metodologia</b>	66
3.1 - <i>Fundamentação teórica</i>	66
3.1.1 - A hipótese de eficiência do mercado de acções	66
3.1.1.1 - Distribuições de probabilidade alternativas	68

3.1.1.2 - Distribuição independente e idêntica das taxas de rendibilidade das acções	72
3.1.1.3 - Evidência empírica da existência de caos nos mercados accionistas	74
3.1.1.4 - Aplicação da entropia à análise da eficiência do mercado de acções	76
3.1.2 - Adequabilidade da entropia à teoria financeira	81
3.1.2.1 - Propriedades da entropia	87
3.1.2.2 - Entropia e informação	92
3.1.2.3 - Entropia e teoria de carteiras	94
<b>3.2 - Modelos</b>	98
3.2.1 - Modelos estatísticos	99
3.2.2 - Entropia versus desvio-padrão	102
3.2.3 - Modelo da média-variância versus média entropia	107
3.2.4 - Modelo diagonal de Sharpe e CAPM (Capital Asset Pricing Model) versus entropia e informação mútua	109
<b>3.3 - Validação dos Modelos</b>	114
<b>3.4 - Síntese do capítulo</b>	115
<b>4 - Dados e Informação</b>	117
4.1 - O mercado bolsista de acções português	117
4.2 - Recolha e tratamento de dados	119
4.2.1 - Títulos da amostra	119
4.2.2 - Evolução da Bolsa de Valores de Lisboa	121
4.3 - Síntese do capítulo	126
<b>5 - Resultados</b>	127
5.1 - Análise estatística dos títulos	128
5.2 - Comparação entre a entropia e o desvio-padrão	141
5.3 - Modelo da média-variância versus média entropia	149
5.4 - Modelo diagonal de Sharpe e CAPM versus entropia e informação mútua	155
5.5 - Síntese do capítulo	169

<b>6 – Conclusões, limitações e sugestões</b>	172
<b>6.1 – Conclusões</b>	172
<b>6.2 – Limitações e sugestões</b>	179
<b>7 - Bibliografia</b>	182
<b>8 – Anexos - Análise estatística da variável <math>\varepsilon_i</math> das regressões lineares obtidas na secção 5.4.</b>	192
<b>8.1 – BVL 30 versus Banif</b>	193
<b>8.2 – BVL 30 versus Barbosa &amp; Almeida</b>	194
<b>8.3 – BVL 30 versus BCP</b>	195
<b>8.4 – BVL 30 versus BTA</b>	196
<b>8.5 – BVL 30 versus Corticeira Amorim</b>	197
<b>8.6 – BVL 30 versus Caima</b>	198
<b>8.7 – BVL 30 versus Centralcer</b>	199
<b>8.8 – BVL 30 versus CIN</b>	200
<b>8.9 – BVL 30 versus Engil</b>	201
<b>8.10 – BVL 30 versus Império</b>	202
<b>8.11 – BVL 30 versus Inapa</b>	203
<b>8.12 – BVL 30 versus Jerónimo Martins</b>	204
<b>8.13 – BVL 30 versus Modelo &amp; Continente</b>	205
<b>8.14 – BVL 30 versus Mota &amp; Companhia</b>	206
<b>8.15 – BVL 30 versus Mundial Confiança</b>	207
<b>8.16 – BVL 30 versus Portucel</b>	208
<b>8.17 – BVL 30 versus Portugal Telecom</b>	209
<b>8.18 – BVL 30 versus Salvador Caetano</b>	210
<b>8.19 – BVL 30 versus Semapa</b>	211
<b>8.20 – BVL 30 versus Soares da Costa</b>	212
<b>8.21 – BVL 30 versus Somague</b>	213
<b>8.22 – BVL 30 versus Sonae Investimentos</b>	214
<b>8.23 – BVL 30 versus Soporcel</b>	215
<b>8.24 – BVL 30 versus Tranquilidade</b>	216
<b>8.25 – BVL 30 versus Unicer</b>	217

8.26 – <i>BVL 30 versus Vista Alegre</i>	218
<b>9 – Glossário</b>	219

## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 3.1 – Comparação entre informação mútua e entropia.	94
Quadro 3.2 – Equivalência entre a análise de regressão e medidas da teoria da informação	112
Quadro 4.1 – Títulos da amostra	120
Quadro 5.1 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Centralcer e Unicer	128
Quadro 5.2 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Caima, Portucel e Soporcel	129
Quadro 5.3 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título da CIN	130
Quadro 5.4 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Barbosa & Almeida e Vista Alegre	131
Quadro 5.5 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título Salvador Caetano	132
Quadro 5.6 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Mota & Companhia e Soares da Costa	133
Quadro 5.7 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título Portugal Telecom	134
Quadro 5.8 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Banif, BCP e BTA	135
Quadro 5.9 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Império, Mundial Confiança e Tranquilidade	136
Quadro 5.10 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Corticeira Amorim, Engil Jerónimo Martins, Inapa e Modelo & Continente	137
Quadro 5.11 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Semapa, Somague e Sonae Investimentos	139
Quadro 5.12 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao índice BVL 30	140

Quadro 5.13 – Valores de entropia e desvio-padrão para todos os títulos	143
Quadro 5.14 – Entropia, informação mútua e desvio-padrão de carteiras	146
Quadro 5.15 – Carteiras ótimas seleccionadas pelo modelo da média-variância	150
Quadro 5.16 – Valores da média, variância e entropia para as carteiras seleccionadas	151
Quadro 5.17 – Medidas da análise de regressão (modelo diagonal de Sharpe) <i>versus</i> medidas da teoria de informação	158
Quadro 5.18 – Coeficiente de determinação $R^2$ (modelo diagonal de Sharpe) <i>versus</i> medidas da teoria de informação	163
Quadro 5.19 – Medidas da análise de regressão do CAPM <i>versus</i> medidas da teoria de informação	167
Quadro 5.20 – Coeficiente de determinação $R^2$ (modelo CAPM) <i>versus</i> medidas da teoria de informação	168
Quadro 8.1 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Banif	193
Quadro 8.2 – Teste à normalidade dos resíduos do título Banif	193
Quadro 8.3 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Barbosa & Almeida	194
Quadro 8.4 – Teste à normalidade dos resíduos do título Barbosa & Almeida	194
Quadro 8.5 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título BCP	195
Quadro 8.6 – Teste à normalidade dos resíduos do título BCP	195
Quadro 8.7 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título BTA	196
Quadro 8.8 – Teste à normalidade dos resíduos do título BTA	196
Quadro 8.9 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Corticeira Amorim	197
Quadro 8.10 – Teste à normalidade dos resíduos do título Corticeira Amorim	197
Quadro 8.11 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Caima	198
Quadro 8.12 – Teste à normalidade dos resíduos do título Caima	198
Quadro 8.13 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Centralcer	199
Quadro 8.14 – Teste à normalidade dos resíduos do título Centralcer	199
Quadro 8.15 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título CIN	200
Quadro 8.16 – Teste à normalidade dos resíduos do título CIN	200
Quadro 8.17 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Engil	201
Quadro 8.18 – Teste à normalidade dos resíduos do título Engil	201
Quadro 8.19 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Império	202
Quadro 8.20 – Teste à normalidade dos resíduos do título Império	202
Quadro 8.21 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Inapa	203
Quadro 8.22 – Teste à normalidade dos resíduos do título Inapa	203
Quadro 8.23 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Jerónimo Martins	204
Quadro 8.24 – Teste à normalidade dos resíduos do título Jerónimo Martins	204

Quadro 8.25 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Modelo & Continente	205
Quadro 8.26 – Teste à normalidade dos resíduos do título Modelo & Continente	205
Quadro 8.27 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Mota & Companhia	206
Quadro 8.28 – Teste à normalidade dos resíduos do título Mota & Companhia	206
Quadro 8.29 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Mundial Confiança	207
Quadro 8.30 – Teste à normalidade dos resíduos do título Mundial Confiança	207
Quadro 8.31 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Portucel	208
Quadro 8.32 – Teste à normalidade dos resíduos do título Portucel	208
Quadro 8.33 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Portugal Telecom	209
Quadro 8.34 – Teste à normalidade dos resíduos do título Portugal Telecom	209
Quadro 8.35 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Salvador Caetano	210
Quadro 8.36 – Teste à normalidade dos resíduos do título Salvador Caetano	210
Quadro 8.37 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Semapa	211
Quadro 8.38 – Teste à normalidade dos resíduos do título Semapa	211
Quadro 8.39 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Soares da Costa	212
Quadro 8.40 – Teste à normalidade dos resíduos do título Soares da Costa	212
Quadro 8.41 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Somague	213
Quadro 8.42 – Teste à normalidade dos resíduos do título Somague	213
Quadro 8.43 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Sonae Investimentos	214
Quadro 8.44 – Teste à normalidade dos resíduos do título Sonae Investimentos	214
Quadro 8.45 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Soporcel	215
Quadro 8.46 – Teste à normalidade dos resíduos do título Soporcel	215
Quadro 8.47 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Tranquilidade	216
Quadro 8.48 – Teste à normalidade dos resíduos do título Tranquilidade	216
Quadro 8.49 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Unicer	217
Quadro 8.50 – Teste à normalidade dos resíduos do título Unicer	217
Quadro 8.51 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Vista Alegre	218
Quadro 8.52 – Teste à normalidade dos resíduos do título Vista Alegre	218

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – Curvas de utilidade e atitude face ao risco	22
Figura 2.2 – Fronteira de eficiência	26
Figura 2.3 – Risco específico e risco sistemático	33
Figura 2.4 – “Security Market Line”	34
Figura 2.5 – Recta do mercado de capitais	39
Figura 2.6 – Recta de equilíbrio do mercado de capitais	39

Figura 2.7 - Conjunto microcanónico	51
Figura 2.8 - Conjunto canónico	52
Figura 2.9 - Grande conjunto canónico	53
Figura 2.10 - Níveis de gestão de Anthony versus níveis de informação disponíveis e entropia subjacentes.	58
Figura 3.1 – Entropia dos acontecimentos X e Y	88
Figura 3.2 – Informação mútua versus entropia	93
Figura 4.1– Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1996 e 31/12/1996	122
Figura 4.2 – Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1997 e 31/12/1997	123
Figura 4.3 – Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1998 e 30/12/1998	124
Figura 4.4 - Evolução do índice BVL 30 no período entre 4/01/1999 e 30/12/1999	125
Figura 5.1 – Entropia versus desvio-padrão	144
Figura 5.2 – Entropia versus logaritmo do desvio-padrão	145
Figura 5.3 – Relação da entropia, informação mútua e desvio-padrão com o número de títulos	147
Figura 5.4 – Fronteira de eficiência para as carteiras seleccionadas	151
Figura 5.5 – Curva de frequências da carteira 2	152
Figura 5.6 – Curva de frequências da carteira 3	152
Figura 5.7 – Relação média-entropia	153
Figura 5.8 – Fronteira eficiente da média-variância <i>versus</i> média-entropia	154
Figura 5.9 – Diagrama de dispersão entre o índice BVL 30 e o título Mundial Confiança	156
Figura 5.10 – Análise da informação mútua e SQR versus betas	159
Figura 5.11 – Soma de quadrados do erro versus entropia condicional	160
Figura 5.12 – Soma de quadrados totais versus entropia total	161
Figura 5.13 – $R^2$ versus entropia condicional relativa e informação mútua relativa	164
Figura 8.1 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Banif	193
Figura 8.2 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Barbosa & Almeida	194
Figura 8.3 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título BCP	195
Figura 8.4 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título BTA	196
Figura 8.5 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Corticeira Amorim	197

Figura 8.6 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Caima	198
Figura 8.7 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Centralcer	199
Figura 8.8 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título CIN	200
Figura 8.9 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Engil	201
Figura 8.10 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Império	202
Figura 8.11 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Inapa	203
Figura 8.12 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Jerónimo Martins	204
Figura 8.13 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Modelo & Continente	205
Figura 8.14 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Mota & Companhia	206
Figura 8.15 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Mundial Confiança	207
Figura 8.16 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Portucel	208
Figura 8.17 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Portugal Telecom	209
Figura 8.18 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Salvador Caetano	210
Figura 8.19 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Semapa	211
Figura 8.20 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Soares da Costa	212
Figura 8.21 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Somague	213
Figura 8.22 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Sonae Investimentos	214
Figura 8.23 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Soporcel	215

Figura 8.24 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Tranquilidade	216
Figura 8.25 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Unicer	217
Figura 8.26 – Linearidade e homocedasticidade com $Y = Z_{resid}$ e $X = Z_{pred}$ do título Vista Alegre	218

## RESUMO

*Dionísio, Andreia Teixeira Marques , Tese de Mestrado em Organização e Sistemas de Informação, Universidade de Évora, Fevereiro 2001. Análise da entropia como medida de incerteza e valor ordinal da informação no mercado bolsista de acções português. Orientador: Prof. Doutor Amílcar Serrão.*

As decisões económicas e financeiras são tomadas num contexto em permanente mudança e transformação, logo a informação surge como um recurso de suprema importância no desenvolvimento de qualquer actividade, constituindo um factor crítico de sucesso para quem a detém e a utiliza correctamente. De entre as inúmeras actividades onde a informação assume vital relevância, realça-se, neste trabalho de investigação, a importância por ela assumida no mercado bolsista de acções caracterizado por elevados níveis de incerteza, sendo a sua posse e correcta utilização a diferença entre a ruína e a fortuna amiudadas vezes.

O problema em estudo neste trabalho de investigação é a falta de adequabilidade dos modelos tradicionais utilizados na gestão de carteiras à realidade que caracteriza o mercado bolsista de acções português, principalmente na forma como é avaliada a incerteza neste mercado. A falta de adequabilidade dos modelos está associada ao facto dos mesmos terem como base a distribuição normal das taxas de rendibilidade dos títulos.

Este trabalho de investigação visa atingir quatro objectivos. O primeiro objectivo avalia a adequabilidade dos modelos tradicionais de gestão de carteiras ao mercado bolsista português através da análise da distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos e do índice BVL 30. O segundo objectivo avalia a eficácia da entropia como medida de dispersão e de incerteza face ao desvio-padrão e à variância quando a distribuição empírica não pode ser realmente representada pela distribuição normal. O terceiro objectivo determina as principais vantagens e desvantagens da utilização dos modelos da entropia e informação mútua relativamente aos modelos tradicionais mais utilizados na gestão e selecção de carteiras (média-variância, modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM), principalmente no que concerne à disponibilização da informação mais credível e completa ao investidor. O último objectivo mostra que a entropia pode ser encarada como medida ordinal do valor da informação.

No sentido de dar resposta ao problema colocado e atingir os objectivos propostos são utilizados alguns modelos estatísticos, o modelo da média-variância, o

modelo diagonal de Sharpe, o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) e modelos de entropia e informação mútua. Estes modelos são aplicados aos dados e informação recolhidos, tendo sido seleccionados 26 títulos continuamente cotados no período entre 2/01/1996 a 30/12/1999 na Bolsa de Valores de Lisboa. As cotações diárias destes títulos são a principal fonte de informação utilizada neste estudo, analisadas não só a nível estatístico mas também ao nível económico-financeiro.

A análise estatística efectuada para os títulos seleccionados da Bolsa de Valores de Lisboa e para o índice BVL 30 demonstra que nenhuma das séries analisadas segue a distribuição normal. Deste modo um dos pressupostos base dos modelos tradicionais de gestão de carteiras não se verifica. A forma como é assumida a incerteza pode não ser a mais correcta se se atender apenas à variância. É introduzida a entropia como medida de incerteza e dispersão global no seio da teoria de carteiras sendo comparados os seus resultados com os dos modelos tradicionais de gestão de carteiras. Verifica-se que a entropia é sensível ao efeito diversificação e que o facto de a sua forma de cálculo ser independente da distribuição de probabilidade contribui para melhor caracterizar um título, uma carteira ou até o mercado.

Os resultados obtidos revelam que a entropia é mais eficaz na forma como é medida a incerteza dado que é independente da distribuição de probabilidade em causa, medindo a dispersão global patente numa determinada distribuição empírica. Além disso, o facto de ser sensível ao efeito diversificação possibilita a sua utilização no seio da teoria de carteiras como medida de incerteza, alertando o investidor para a possibilidade de ocorrência de acontecimentos raros de forma mais concreta que a variância (“crashes” por exemplo). Há ainda que evidenciar o papel da entropia como valor ordinal da informação do ponto de vista do investidor. Assiste-se a uma maior disponibilização de informação fidedigna ao investidor, no sentido de auxiliar o processo de tomada de decisão. A principal limitação da entropia decorre do facto de não poder ser utilizada como medida de selecção se não forem conhecidas as distribuições de probabilidade que melhor caracterizem as taxas de rendibilidade dos títulos e do mercado. Neste sentido é evidente a necessidade de desenvolver esta área para tornar possível a utilização da entropia em toda a sua plenitude.

Este trabalho de investigação revela que a entropia e a informação mútua são fontes de informação privilegiadas para o investidor, que tem ferramentas mais concretas que o auxiliam no momento de tomar uma decisão. Estas medidas permitem ainda uma leitura diferente e complementar da informação económica e financeira, auxiliando investidores, operadores e instituições financeiras.

# **1 - INTRODUÇÃO**

## **1.1 – Considerações gerais**

No actual contexto de mudança permanente, a informação surge como um recurso de suprema importância no desenvolvimento de qualquer actividade, constituindo um factor crítico de sucesso para quem a detém e a utiliza correctamente. As pressões e oportunidades, sentidas pelas pessoas e organizações, revelam-se cada vez mais complexas, dinâmicas, diversificadas e turbulentas.

A informação é uma variável universal a par com o espaço, o tempo e a matéria, onde todos os sistemas assumem as suas propriedades. O universo está imerso em informação, grandeza esta que precisa de ser medida e avaliada tal como acontece com o espaço, a matéria e a energia. Nesta perspectiva, a gestão e a informação estão intimamente ligadas, pois só dessa forma se poderá reduzir o grau de incerteza no processo decisório, sendo a informação encarada como tudo aquilo que possa diminuir o grau de incerteza e contribuir para a estabilização organizacional e funcional de uma organização. A informação é o recurso que proporciona o conhecimento necessário sobre aquilo que é preciso decidir. A economicidade da informação justifica-se pelo simples facto de que a informação, como qualquer outro bem com valor, não existe espontaneamente no mercado (Oliveira, 1996), a sua produção acarreta custos e a afectação de variados factores, dado que é um bem escasso com uma procura cada vez maior. Neste sentido, a necessidade de definir o valor económico da informação torna-se cada vez mais pertinente.

De entre as inúmeras actividades, onde a informação assume vital relevância, realça-se neste trabalho de investigação a importância assumida no mercado bolsista de acções e a sua posse e correcta utilização determinam muitas vezes a diferença entre a ruína e a fortuna. Torna-se cada vez mais urgente disponibilizar ao investidor informação fidedigna, que permita que a tomada de uma decisão seja feita num contexto de minimização da incerteza e conseqüente aumento de ganhos e de utilidade.

O mercado bolsista funciona como um espelho da situação a nível social, económico, político e financeiro, evidenciando também o estado actual da economia global. O mercado bolsista de acções português, objecto de estudo neste trabalho de investigação, é caracterizado pela sua pequena dimensão e fraca liquidez, factores que

facilitam a existência de especulação e ineficiência. No sentido de realizar bons investimentos os agentes económicos nos seus actos de compra e venda devem ter em consideração não só os indicadores de rendibilidade, como também elementos que descrevam fielmente o risco implícito e a incerteza numa determinada aplicação.

O conhecimento da rendibilidade, do risco, da incerteza das acções e do mercado como fonte de informação para o investidor torna-se imperativo na tentativa de explicação dos fenómenos bolsistas, sua articulação com factores inerentes às próprias empresas e factores macroeconómicos. O mercado bolsista de acções é caracterizado por elevados níveis de incerteza e volatilidade, onde apesar de se verificar uma subida de rendibilidade a longo prazo, o certo é que nada garante, que numa determinada situação pontual esta ocorra, além disso, quaisquer estratégias de curto prazo incorporam um risco tão elevado e perdas consideráveis, que a maior parte das vezes são consideradas totalmente inviáveis. Harry Markowitz foi pioneiro na quantificação da rendibilidade e do risco de carteiras, quando apresentou num artigo a Teoria do Portfolio em 1952 e mais tarde num livro (1959). No contexto da optimização de carteiras, Harry Markowitz (Markowitz, 1952, 1959, 1989) e James Tobin (Tobin, 1958) introduzem o critério de selecção de carteiras de títulos com base nas médias e variâncias das taxas de rendibilidade dos activos (modelo da média-variância). A escolha passa pela maximização da rendibilidade esperada sujeita a um nível máximo de risco, ou à minimização do risco sujeita a um nível mínimo de rendibilidade. William Sharpe introduz um novo modelo em 1964: o modelo diagonal de Sharpe, que após alguns melhoramentos originou o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), modelos que se baseiam na existência de uma relação linear entre as taxas de rendibilidade dos títulos e as taxas de rendibilidade do mercado.

Estudos recentes sobre a metodologia de gestão de carteiras demonstraram a existência de limitações nos modelos mais utilizados, nomeadamente a média-variância, o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), limitações estas que estão associadas aos pressupostos base dos próprios modelos e à necessidade de criar critérios alternativos. Estes modelos são aplicações acessíveis e eficazes para o estudo da rendibilidade e do risco de aplicações financeiras quando estas seguem distribuições normais e simétricas, mas perdem tais qualidades quando o objecto de análise são distribuições assimétricas (ou “não-normais”), revelando-se necessária uma nova abordagem, principalmente na forma como é medida a incerteza dado que a variância torna-se insuficiente como medida para o risco.

A linguagem matemática utilizada na teoria da informação munuiu-se da entropia para avaliar a incerteza e a desordem existente na informação respeitante a uma determinada mensagem, baseada no valor do logaritmo do número de prováveis mensagens equivalentes. O contributo, que a entropia trouxe como medida da informação e a sua aplicação a inúmeros casos, explica a recente abundância de métodos econométricos (e outras áreas) baseados na entropia (Ebrahimi et al, 1999). Este tipo de aplicação revelou-se útil para a teoria financeira, nomeadamente na teoria de carteiras, uma vez que existem paralelismos funcionais entre a natureza e os mercados bolsistas, criando-se assim condições para a adopção de medidas da física pela teoria financeira. Neste contexto, a entropia, ou informação esperada, é adoptada da mesma forma que o havia sido pela teoria da informação. É admitida uma maior eficácia da entropia como medida da incerteza relativamente à variância, uma vez que a entropia como medida de incerteza é independente do tipo de distribuição de probabilidade empírica e pode ser directamente estimada a partir da variância quando a distribuição é conhecida, podendo ser utilizada em distribuições para as quais a variância deixa de ser um bom estimador do risco e da incerteza. No mesmo sentido é também apresentada a informação mútua, como medida da informação que um processo contém sobre outro processo, o que do ponto de vista do investidor se pode revelar benéfico para avaliar a maior ou menor dependência entre vários acontecimentos, e a forma como conhecendo um evento se poderá aumentar a informação sobre outro evento.

Este trabalho estuda a “adopção” do critério entropia pela teoria financeira, como medida de dispersão global e incerteza e avalia a sua aplicação prática no mercado bolsista de acções português. É ainda realçado o facto de a entropia poder ser encarada como o valor ordinal da informação na perspectiva do investidor, que perante um cenário de maior incerteza dará mais valor à obtenção de informação que o auxilie no processo de tomada de decisão, reforçando a consideração de que a informação é um factor decisivo no funcionamento dos mercados e nos modelos de decisão de investimento.

## 1.2 – Problema em estudo

O mercado bolsista de acções português apresenta características peculiares que o diferenciam largamente dos grandes mercados bolsistas. A sua pequena dimensão, “tenra idade” e fraca liquidez conduzem a situações que muito o afastam da eficiência exigida pelos modelos tradicionais de gestão de carteiras desenvolvidos no Estados Unidos da América. Estes modelos poderão ser eficazes em mercados de grande dimensão e com elevados níveis de liquidez, mas apresentam lacunas quando confrontados com a realidade portuguesa.

O problema em estudo neste trabalho de investigação é a falta de adequabilidade dos modelos tradicionais utilizados na gestão de carteiras à realidade que caracteriza o mercado bolsista de acções português, principalmente na forma como é avaliada a incerteza neste mercado, no qual a informação oportuna e fidedigna é cada vez mais um recurso de suprema importância, revelando-se como um factor crítico de sucesso se bem utilizada. Os modelos tradicionais de gestão de carteiras não conseguem caracterizar convenientemente o mercado e activos que o compõem uma vez que os seus pressupostos base nem sempre se verificam na realidade, enviesando as informações extraídas por tais modelos. A generalidade deste modelos, como o modelo da média-variância, modelo diagonal de Sharpe, modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), modelo APT (Arbitrage Pricing Model), têm como pressuposto base a distribuição normal das taxas de rendibilidade das aplicações financeiras, limitando-se a estudar o primeiro e segundo momentos (média e variância), sem a devida verificação se essa é a distribuição mais adequada à realidade, desvirtuando qualquer possibilidade de realizar previsões e medir o risco e incerteza reais que assolam tal mercado. Denota-se uma insuficiência no que se refere à forma como é medida a incerteza patente numa distribuição de probabilidade não normal utilizando apenas os modelos tradicionais de gestão de carteiras. É realçada a necessidade de uma medida de incerteza eficaz como fonte de informação para o investidor. Dada a importância de conhecimento do risco e incerteza, de acordo com a verdadeira distribuição de rendimentos, torna-se imperativa a tentativa de encontrar novas medidas que assumam tão importante papel como complementarização das já existentes.

Neste contexto a posse e a correcta utilização de informação que caracterize fielmente o mercado e activos financeiros pode ser sinónimo de realização de bons

investimentos. Uma vez que a informação não nasce espontaneamente no mercado, tem de ser produzida, assumindo um valor económico de acordo com a maior ou menor procura por parte dos agentes que intervêm nos mercados financeiros. Determinar o valor ordinal da informação pode contribuir para orientar o investidor na procura de fontes de informação que lhe possibilitem um processo de tomada de decisão o mais racional possível.

O problema pode ser colocado através da seguinte questão: Qual a melhor forma de medir a dispersão global e a incerteza existentes no mercado bolsista de acções português de modo a proporcionar ao investidor a informação mais fidedigna, no que concerne à realização de investimentos futuros e compreensão da situação actual?

O risco associado a uma carteira de acções pode ser calculado através da variância (Markowitz, 1952) e (Tobin, 1958), verificando-se que, à medida que se aumenta o número de acções diferentes que constituem a carteira, menor será o risco da mesma. Contudo o benefício marginal desta diversificação, tende a decrescer, existindo assim um limite para o efeito diversificação. Para além da variância, existe um conceito oriundo da física, a entropia, que mede o grau de desordem e incerteza. Este conceito é objecto de estudo neste trabalho, cujos resultados são comparados com os da variância no seio dos modelos tradicionais de gestão de carteiras, de modo a avaliar a sua eficácia como medida de dispersão global, incerteza e valor ordinal da informação.

### **1.3. – Objectivos do trabalho**

Este trabalho de investigação analisa o conceito de entropia no seio da física e da teoria da informação e a sua aplicação à teoria financeira, mais precisamente, no estudo da incerteza na teoria de carteiras.

O trabalho de investigação visa atingir quatro objectivos. O primeiro objectivo avalia a adequabilidade dos modelos tradicionais de gestão de carteiras ao mercado bolsista português. Os modelos tradicionais de gestão de carteiras têm como pressuposto base a distribuição normal das taxas de rendibilidade dos activos. A avaliação da adequabilidade destes modelos pode ser feita através da análise da distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos e do índice BVL 30. Deste modo a aplicação da entropia à teoria de carteiras poderá ser justificada

pelo facto de as taxas de rendibilidade das acções não seguirem uma distribuição normal. Este facto retira veracidade aos modelos tradicionais de gestão de carteiras que apenas se baseiam nos dois primeiros momentos para caracterizar uma distribuição de probabilidade. A não observância do pressuposto da normalidade da distribuição conduz à insuficiência e até à informação não fidedigna prestada ao investidor caso o estudo da distribuição concreta se resuma aos dois primeiros momentos: média e variância. Deste modo existe a possibilidade de induzir o investidor em erro, que por não ter um conhecimento concreto de determinada situação pode tomar decisões que o afastam dos seus objectivos.

O segundo objectivo avalia a eficácia dos modelos da entropia e da informação mútua como medidas de incerteza no mercado bolsista de acções português. Estes modelos podem ser encarados como fontes de informação para o investidor, que consegue saber através deles a verdadeira dispersão e incerteza associadas a uma determinado título ou carteira. Pretende-se verificar se a incerteza patente num determinado título ou carteira é fielmente retratada pela variância e/ou desvio-padrão e analisar o comportamento da entropia no seio da teoria de carteiras.

O terceiro objectivo determina as principais vantagens e desvantagens da utilização dos modelos da entropia e informação mútua relativamente aos modelos mais utilizados na gestão de carteiras. Através da comparação dos resultados obtidos pelos modelos tradicionais de gestão de carteiras, nomeadamente o modelo da média-variância, o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), pretende-se avaliar as vantagens e limitações que os modelos da entropia e da informação mútua apresentam, principalmente no que concerne à disponibilização da informação mais credível possível ao investidor que precisa de ferramentas concretas para basear um processo de tomada de decisão racional e realizar um bom investimento. Deste modo é possível avaliar a aplicabilidade das medidas da teoria da informação (entropia e informação mútua) ao mercado bolsista e em que medida elas contribuem para explicar melhor certos fenómenos.

O último objectivo mostra que a entropia pode ser encarada como medida do valor ordinal da informação do ponto de vista do investidor. Perante um determinado cenário de incerteza o investidor precisa de obter informação para poder tomar uma decisão e não um mero palpite. A necessidade de encontrar um valor ordinal para a informação deve-se ao facto de, muitas vezes, o investidor precisar de uma orientação na procura de informação para aquela situação em concreto e naquele preciso momento.

## 1.4 – Procedimentos

O primeiro capítulo evidencia a importância da informação no processo de tomada de decisão, focando com mais ênfase esta importância no mercado bolsista de acções que é caracterizado pela incerteza e pela turbulência. As limitações apresentadas pelos modelos tradicionais de gestão de carteiras e as características próprias do mercado bolsista português criam a necessidade de encontrar novas medidas, surgindo a entropia como medida de dispersão global e incerteza. Este capítulo também descreve o problema em estudo e os objectivos a atingir neste trabalho de investigação.

O segundo capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre o valor da informação, a importância da informação nos mercados bolsistas de acções, os modelos mais utilizados na gestão de carteiras sendo evidenciadas algumas das suas lacunas, os principais paralelismos entre a física e a economia financeira, o conceito de entropia e sua origem e a aplicação do conceito entropia a vários ramos da ciência, sendo de realçar a aplicação à teoria da informação e à teoria financeira.

O terceiro capítulo desenvolve os aspectos teóricos envolvidos neste trabalho. Este capítulo tem três secções. A primeira secção apresenta toda a fundamentação teórica utilizada neste trabalho de investigação com vista à prossecução dos objectivos a atingir. São apresentadas considerações gerais sobre alguns pressupostos da hipótese de eficiência do mercado de acções e descrita a aplicação da entropia à teoria financeira, mais concretamente à gestão de carteiras. A segunda secção apresenta os modelos aplicados para análise dos dados. A terceira secção apresenta o critério de validação das metodologias aplicadas neste trabalho de investigação.

O quarto capítulo caracteriza o mercado bolsista de acções português no período em estudo, evidenciando a necessidade de informação objectiva, verídica e actual para a realização de bons investimentos. De seguida são descritos os dados necessários para a realização deste trabalho, as suas fontes e outras informações de carácter geral.

O quinto capítulo apresenta os resultados das metodologias aplicadas, que permitem avaliar a adequabilidade dos principais modelos de gestão de carteiras aos dados utilizados, avaliar a eficácia da entropia como medida de dispersão e incerteza no mercado bolsista de acções português, determinar as principais vantagens e limitações da entropia e da informação mútua, como medidas de incerteza face ao modelo da média-variância, ao modelo diagonal de Sharpe e ao modelo CAPM (Capital Asset

Pricing Model) e mostrar que a entropia pode ser encarada como valor ordinal da informação na perspectiva do investidor.

O sexto capítulo expõe conclusões, limitações e sugestões extraídas deste trabalho de investigação.

Este trabalho termina com a apresentação da bibliografia utilizada, anexos e um pequeno glossário com algumas definições dos termos mais utilizados ao longo deste trabalho.

## **2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Este capítulo analisa e apresenta a problemática do valor e a importância da informação no processo de tomada de decisão, mais concretamente, no âmbito da gestão de carteiras. A primeira secção apresenta alguns estudos efectuados no sentido de apurar o valor da informação, realçando a sua importância nos mercados financeiros. É evidenciado o seu papel na teoria das carteiras, onde a teoria da eficiência do mercado passa pelo pressuposto de que os títulos reflectem verdadeiramente toda a informação disponível, em que nenhum agente tem mais ou melhor informação que outro, impossibilitando quaisquer manipulações e ganhos extraordinários no mercado de acções.

A segunda secção identifica alguns critérios de avaliação e selecção de carteiras de títulos negociáveis, sendo dado especial ênfase aos modelos da média-variância de Harry Markowitz, ao modelo diagonal de Sharpe e ao modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model). Após a apresentação dos principais modelos utilizados na selecção e gestão de carteiras, os seus pressupostos são alvo de análise crítica, nomeadamente o pressuposto das taxas de rendibilidade das acções seguirem uma distribuição de probabilidade normal onde são independentes e identicamente distribuídas.

A terceira secção apresenta a entropia e a informação mútua, no sentido de colmatar as limitações daqueles modelos. São descritas algumas similaridades entre a física e a economia financeira que justificam a cada vez maior aproximação entre as ciências, no sentido de ultrapassar limitações e lacunas existentes em teorias. De seguida a entropia é apresentada no seio da teoria da informação e da teoria financeira, de forma a proceder a uma correcta “adopção” deste conceito como medida de incerteza no mercado bolsista de acções. A última secção apresenta uma síntese do capítulo.

### **2.1 – O valor da informação**

Na actual Sociedade de Informação, assiste-se a uma crescente importância da informação como elemento vital para o estabelecimento de vantagens competitivas, sucesso e até sobrevivência das organizações. A informação é cada vez mais um factor

de performance (Cole, 1985), e decidir sobre informação é a mais potente forma de exercício de poder (Zorrinho, 1995). Neste contexto, a importância da informação para as organizações é inquestionável e universalmente aceite, uma vez que constitui um dos recursos cuja gestão e aproveitamento mais influencia o sucesso das organizações, um factor estruturante e um instrumento de gestão (Zorrinho, 1994) e uma arma estratégica indispensável para a obtenção de vantagens competitivas (Porter, 1985). Michael Porter (Porter, 1985), entende informação como sinónimo de vantagem competitiva, uma vez que tem o poder de afectar a estrutura da organização e permite o surgimento de novas oportunidades de negócio. Esta adquire importância estratégica cujo valor intrínseco constitui factor de diferenciação (Serrano, 1997). De acordo com Almiro de Oliveira (Oliveira, 1996) é devido ao fim dos mercados regionais e nacionais, à crescente complexidade, à instabilidade dos mercados, ao aumento do grau de contingência e de turbulência que a importância da informação cresce progressivamente e a um ritmo alucinante no actual mundo empresarial.

O bom desempenho da gestão depende, em larga medida, da qualidade da informação disponível, contudo a qualidade da informação de apoio à decisão é condição necessária, mas não suficiente, para garantir a qualidade da decisão num determinado momento (Zorrinho, 1994). A avaliação desta qualidade é bastante subjectiva, uma vez que uma mesma informação pode ter diferente valor consoante o nível de gestão a que se refere. Certos autores consideram que o valor da informação pode ser medido como de qualquer outro bem económico: “A informação é, sem sombras de dúvidas, o bem económico por excelência, dos nossos tempos” (Oliveira, 1994). A economicidade da informação justifica-se pelo simples facto de que a informação, como qualquer outro bem com valor, não existe espontaneamente no mercado (Oliveira, 1996), a sua produção acarreta custos e a afectação de variados factores, dado que é um bem escasso com uma procura cada vez maior. Almiro de Oliveira (Oliveira, 1999), cita o trabalho de Porat, que em 1977 evidencia a estreita relação entre o valor da informação e o desenvolvimento da economia, demonstrando que nos países com maior grau de desenvolvimento o Sector Quaternário é responsável por mais de 50% do rendimento total. Neste sentido, a necessidade de valorizar a qualidade da informação, torna-se cada vez mais pertinente. Almiro de Oliveira (Oliveira, 1994) propõe o estudo do valor do custo da produção da informação; do valor eficácia da decisão; do valor investimento em sistemas e tecnologias de informação; e, do valor da empresa e a informação.

Segundo Clement (Clement, 1993) e Tavares (Tavares et al, 1996) o valor da informação pode ser medido com o auxílio de uma função de probabilidade condicional, argumento baseado na existência de uma relação de causalidade entre informação e decisão, que pode ser representada por uma função probabilidade, ou seja, a informação não é condição necessária e suficiente da eficácia decisional, é apenas condição necessária (Oliveira, 1999), (Clement, 1993) e (Hughes, 1995). Neste contexto, convém estabelecer a diferença entre informação perfeita e informação imperfeita. Informação perfeita existe quando a informação existente corresponde exactamente ao resultado de um determinado acontecimento. Por exemplo, ter-se-á informação perfeita quando ao consultar um especialista no mercado de acções sobre o comportamento de uma determinada acção, a informação proferida corresponder sempre ao comportamento real da acção:

$$P(\text{Especialista. dizer "acção } x \text{ vai subir" } | \text{acção } x \text{ subir efectivamente}) = 1$$

Como a informação é proferida antes do acontecimento ocorrer, pode-se falar em valor esperado da informação.

Laffont, exemplifica a forma como deve ser avaliada e descrita a estrutura da informação. Supondo um determinado espaço de probabilidades  $(\Omega, Z)$ , a informação à priori é representada por uma probabilidade sobre esse espaço, para a qual a função densidade é definida por  $\pi(\cdot)$  (Laffont, 1990). Assumindo que  $\Omega$  possui três elementos, onde W1, W2, W3 representam sua respectiva qualidade boa, média ou má, então o “vendedor” do produto conhece a qualidade subjacente, sendo a distribuição de probabilidade:

$$\begin{cases} P(W1) = 1 \\ P(W2) = 0 \\ P(W3) = 0 \end{cases} \quad \text{Se o produto apresentar boa qualidade}$$

$$\begin{cases} P(W1) = 0 \\ P(W2) = 1 \\ P(W3) = 0 \end{cases} \quad \text{Se o produto apresentar qualidade média}$$

$$\begin{cases} P(W1) = 0 \\ P(W2) = 0 \\ P(W3) = 1 \end{cases} \quad \text{Se o produto apresentar má qualidade}$$

O comprador baseado na sua experiência, tem uma distribuição de probabilidade definida por:

$$\begin{aligned} P(W1) &= \pi1 \\ P(W2) &= \pi2 \\ P(W3) &= \pi3 \end{aligned} \quad \text{com } \pi1 + \pi2 + \pi3 = 1$$

A estrutura da informação pode ser avaliada. Se esta se apresentar sem ruído numa partição de  $\Omega$ , o agente sabe exactamente onde cada elemento da partição se encontra após receber o sinal, podendo o especialista distinguir perfeitamente todas as situações, ou não conhecer certos sinais mais próprios de umas que de outras, originando estruturas um pouco diferentes, mas onde se assume que o especialista nunca se engana. Neste contexto o que importa avaliar é a fiabilidade de cada especialista, ou seja, analisar se a estrutura da informação está ou não perfeitamente adequada à realidade. A forma de avaliação passa pela assunção da função utilidade do investidor/comprador e do seu comportamento face a uma determinada situação quando tem informação à priori. Deste modo pode afirmar-se que uma estrutura de informação será melhor que outra se proporcionar ao agente decisor um maior nível de utilidade e satisfação (Laffont, 1990). Se a estrutura da informação apresentar ruído, a probabilidade de um dado elemento numa partição corresponder a uma determinado sinal está dependente de uma probabilidade condicional do género  $P(y/W)$ , onde  $y$  pertence ao conjunto de sinais  $Y$ , e define a probabilidade de o sinal ser enviado por cada estado de  $\Omega$ . Pressupõe-se aqui a possibilidade de o especialista se enganar esporadicamente, o que do ponto de vista do investidor não é tão bom como a situação anterior mas é francamente melhor do que não ter acesso a qualquer tipo de informação.

A procura de informação resultará assim da utilidade que proporciona, condicionada pelos respectivos custos de obtenção. Estes custos estão intimamente associados aos níveis de entropia existentes no mercado em causa, uma vez que maiores

níveis de entropia (desorganização, incerteza) implicam um maior esforço e morosidade na obtenção de “boa informação”, o que implica que o seu valor tende a aumentar, significando um maior custo para o investidor. Por outro lado, maiores níveis de entropia fazem com que o nível de utilidade proporcionada pela informação aumente consideravelmente, levando o investidor a sentir-se menos lesado pelo elevado valor pago pela obtenção de uma determinada informação.

O valor da informação tende a aumentar se for do conhecimento de um grupo restrito, diminuindo gradualmente tal valor à medida que se torna pública, pois o seu poder para provocar grandes ganhos de utilidade decresce da mesma forma. Segundo Laffont (Laffont, 1990), o próprio equilíbrio de mercado, constitui por si só uma fonte privilegiada de informação, que rege o comportamento dos investidores de acordo com a sua postura relativamente ao risco, uma vez que fornece uma panorâmica geral da situação económica e política da região em causa.

O valor esperado da informação depende, naturalmente, do tipo de decisão e problema em causa. Por isso, pessoas diferentes, em diferentes contextos, terão diferentes valores para a mesma informação. A análise do valor da informação pode ser um requisito fundamental no processo de tomada de decisão, aplicado também para decisões sem fins lucrativos, avaliação e selecção de especialistas.

Esta teoria é bastante criticada por alguns autores que consideram tais algoritmos e soluções não compatíveis com a realidade (Oliveira, 1999) argumentando que esta exige uma formalização analítica da anatomia da decisão e conseqüente racionalização do processo decisório, que na realidade nem sempre se rege por princípios de racionalidade.

De entre as inúmeras actividades onde a informação assume papel relevante é de salientar a sua importância nos mercados financeiros, mais concretamente nos mercados bolsistas de acções, cujos níveis de incerteza promovem uma cada vez maior necessidade de informação oportuna e fidedigna.

O Código do Mercado de Valores Mobiliários no seu preâmbulo enuncia a importância da informação da seguinte forma:

*“...Uma outra linha de grande força do diploma é a que respeita à informação. Da suficiência, oportunidade, qualidade e acessibilidade da informação dependem, com efeito, não apenas a defesa obrigatória dos legítimos interesses dos investidores, mas também, e de modo geral, a própria regularidade e transparência do*

*funcionamento do mercado, a consistência e estabilidade dos preços que nele se formam.....*

*...É evidente que a lei não pode nem deve pretender que o mercado funcione como “tutor” do investidor, seja qual for o seu nível de cultura e conhecimento em matéria de valores mobiliários, a fim de evitar que ele tome erradas decisões de investimento, mas pode e deve assegurar-lhe a informação necessária para habilitar um investidor de conhecimentos e diligência médios a tomar por si próprio uma decisão correcta.”*

O Código, no número 1 do artigo 97º, desenvolve ainda alguns conceitos sobre como se deve caracterizar a informação:

*“...A informação, obrigatória ou facultativa, fornecida ao público, sob qualquer forma, pelas entidades emitentes, entidades responsáveis por ofertas públicas de subscrição ou transacção...deve conformar-se com princípios rigorosos de licitude, veracidade, objectividade, oportunidade e clareza.”*

No artigo 154º e no número 2 do artigo 164º do Código referido são definidos os seguintes conceitos:

***Informação Suficiente:** quando não omitir informação essencial para o investidor ou potencial investidor;*

***Informação Verídica:** quando coincidir com a realidade dos factos, situações, circunstâncias, valores ou perspectivas que se destina a reflectir, não induzindo em erro o investidor ou potencial investidor;*

***Informação Objectiva:** quando contiver juízos de valor suficientemente apoiados em factos comprovados ou em relações necessárias ou comprovadamente existentes entre esses factos;*

***Informação Actual:** quando, tendo-se verificado acontecimentos significativos após a data da sua elaboração, ela seja alterada ou complementada pela respectiva divulgação.*

Verifica-se assim que nos mercados financeiros, a informação apresenta-se cada vez mais como um recurso de extrema importância, na medida que é factor fundamental

na determinação dos níveis de rendimento de um activo financeiro e factor de desenvolvimento do próprio mercado.

A avaliação da informação nos mercados financeiros tem sido alvo de numerosos estudos e teses, sendo a mais conhecida a teoria da eficiência do mercado, desenvolvida a partir de vários testes demonstrativos de que a recolha e a análise da informação utilizada no estudo da rendibilidade dos activos nem sempre conduzia a ganhos adicionais no respectivo mercado (Elton et al, 1995). Em 1965 Fama demonstra que num mercado eficiente o preço dos títulos segue um “random walk”, o que delimita as possibilidades dos investidores traçarem uma estratégia de compra e venda que lhes proporcione ganhos adicionais sistemáticos (Fama, 1965), uma vez que toda a informação é incorporada no preço dos títulos, logo nenhum investidor poderá esperar ganhos espectaculares ou situações de monopólio resultantes da pesquisa e/ou negociação de informação (Lacerda, 1994).

Ao se observar a realidade dos mercados financeiros, mais especificamente dos mercados de acções, denota-se a existência de anomalias no comportamento dos títulos que evidenciam ineficiências de mercado ou desajustamento do modelo de equilíbrio utilizado. Como a eficiência de mercado por si só não é testável, são criados testes de eficiência do mercado (Fama, 1976), que se dividem em três categorias: (i) testes de forma fraca (de que forma os rendimentos passados prevêm os rendimentos futuros?); (ii) testes de forma semi-forte (com que rapidez os títulos reflectem a informação publicada?); (iii) testes de forma forte (existe alguma informação privada na posse dos investidores que não seja reflectida nos preços de mercado?).

A realidade evidencia dificuldades no processo de obtenção de informação e grandes disparidades a nível da qualidade da informação (Lacerda, 1994 e Laffont, 1990). O pressuposto de que nenhum participante do mercado tem acesso a informação que não seja conhecida por todos, cai por terra, perante a assunção de que existe informação assimétrica. A informação assimétrica foi abordada pela primeira vez por Akerlof, em 1970, no artigo *The Market for Lemons: Quality, Uncertainty and Market Mechanism* (Varian, 1990), onde o autor afirma que há informação assimétrica quando os potenciais compradores não podem verificar a qualidade do produto que lhes é oferecido, ou seja, há selecção adversa, e por isso oferecem um preço médio ponderado (inferior ao preço de mercado do produto de superior qualidade), afastando do mercado os vendedores de produtos de qualidade.

A selecção adversa no mercado de acções traduz-se em diminuições de rendibilidade e aumentos do nível de risco. Na tentativa de corrigir tais ineficiências, os vendedores de “boas acções” fazem circular no mercado uma sinalização ou garantia da sua qualidade. Para além de tudo isto, a não transparência do mercado, através da insuficiência de informação conduz a situações de moral hazard, em que os detentores da informação beneficiam de vantagens comparativas.

De acordo com Mafalda Marques e Mário Freire (Marques et al, 1998) uma das formas de melhorar a qualidade da informação deverá passar, não só por uma maior responsabilização dos vários intervenientes, mas também pela verdadeira interiorização e reflexão em torno dos princípios de suficiência, veracidade, objectividade e actualidade. Só desta forma o mercado poderá ser eficiente, constituindo um “*fair game*” para os seus intervenientes.

O acesso à informação mais correcta e fidedigna pode constituir a base para a realização de bons investimentos. O conhecimento não só da rendibilidade, como também do risco e da incerteza que caracterizam um título, carteira ou mercado são essenciais para o investidor que toma decisões e não meros palpites. Os modelos tradicionais de gestão e selecção de carteiras têm pressupostos que nem sempre se verificam na realidade, podendo enviesar e induzir em erro o investidor. No actual contexto de turbulência a que se assiste nos mercados financeiros é cada vez mais importante analisar estes modelos bem como as suas limitações e potencialidades.

## **2.2 – Modelos tradicionais de gestão de carteiras**

Esta secção apresenta alguns modelos de avaliação e selecção de investimentos. Assume-se que o investidor apenas está interessado no nível de rendimentos de que pode usufruir, em que caso exista certeza quanto aos rendimentos provenientes da aplicação da riqueza inicial, a riqueza final não será uma variável aleatória. Contudo, na realidade a incerteza está bem patente neste tipo de mercados, o que faz com que o resultado da aplicação de uma determinada riqueza inicial seja uma variável aleatória que segue uma dada distribuição de probabilidade.

### 2.2.1 – Critério do valor esperado

O critério do valor esperado para distribuições discretas avalia o valor do investimento através da média ponderada dos acontecimentos aleatórios:

$$E(\chi) = \sum_{i=1}^n p_i(\chi) R_i \quad (2.1)$$

Onde:

$E(\cdot)$  – Valor esperado;

$\chi$  - Variável aleatória;

$p$  - Probabilidade dos acontecimentos; e,

$R_i$  - Taxa de rendibilidade do título ou acção  $i$ .

Para distribuições contínuas, no intervalo  $[a, b]$ , o valor do investimento é dado pela seguinte expressão:

$$E(\chi) = \int_a^b R_i f(\chi, R_i) dR_i \quad (2.2)$$

Onde:

$E(\cdot)$  – Valor esperado;

$\chi$  - Variável aleatória;

$R_i$  - Taxa de rendibilidade do título ou acção  $i$ ,

$a$  – Limite inferior do intervalo; e,

$b$  – Limite superior do intervalo.

Este critério poderá ser útil para avaliar investimentos com riscos idênticos e independentes. Para investimentos isolados ou quando existe dependência entre os riscos dos diferentes activos, este critério não é um bom indicador (Eeckhoudt et al, 1995), uma vez que não entra em linha de conta com o risco subjacente a cada alternativa, descurando assim uma parte importantíssima a analisar num investimento.

### ***2.2.2 – O risco no investimento em acções***

A assunção do risco e da incerteza no processo de tomada de decisão reveste-se da maior importância, dada a sua capacidade de influenciar o investidor a enveredar ou não por um determinado negócio/investimento.

Muitas vezes existe uma tendência natural para considerar risco e incerteza sinónimos, o que não sendo verdade, é conveniente estabelecer as diferenças que existem entre ambos.

Tanto o risco como a incerteza estão associados a um conhecimento imperfeito, existindo uma diferença conceptual entre eles. Quando se está perante uma situação de risco, não se sabe com certeza qual o resultado de uma qualquer decisão tomada, contudo é conhecida com exactidão a distribuição de probabilidade do problema, ou seja, sabe-se qual a probabilidade de ocorrência de cada um dos possíveis eventos resultantes dessa decisão.

Numa situação de incerteza, não se tem qualquer conhecimento objectivo da distribuição de probabilidades associadas relativamente aos possíveis resultados futuros. Como exemplo deste tipo de situação poderá evidenciar-se o investimento em acções, uma vez que o investidor está perante uma situação onde as experiências não podem ser repetidas com as mesmas condições, impossibilitando assim a determinação exacta da distribuição de probabilidades que este segue. Apesar do investimento em acções ser caracterizado pela incerteza, onde não existe informação objectiva a respeito da probabilidade de sucesso no dito investimento, o investidor terá certamente alguma expectativa sobre a distribuição de probabilidade dos rendimentos esperados, deste modo pode-se estabelecer uma distribuição subjectiva de probabilidades, que será tanto mais precisa, quanto maior for o conhecimento que o investidor tenha das condições do mercado e das empresas emissoras das acções (Tosta de Sá, 1987).

Relativamente a esta matéria existem claras divergências na escola estatística. A escola clássica afirma que o uso das probabilidades subjectivas não tem qualquer resultado considerado válido, apoiando a utilização da teoria de jogos com o intuito de resolver problemas que envolvam situações de incerteza. A escola bayesiana considera impossível ignorar as probabilidades subjectivas, argumentando tal defesa através do simples facto de que qualquer informação que se tenha sobre o assunto, quando utilizada possibilita maiores acertos que os resultados obtidos de uma decisão sobre um

assunto sobre o qual nada se sabe. De forma a estimar as probabilidades subjectivas, os seguidores deste escola tratam-nas como se fossem probabilidades objectivas, actuando de modo semelhante ao de uma situação de risco. Neste trabalho de investigação, as técnicas utilizadas basear-se-ão na escola bayesiana, em que o rendimento obtido com o investimento em acções é considerado uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidades deverá espelhar da forma mais fiel possível a distribuição real.

Convém explicitar que risco financeiro é diferente de “simples” risco, uma vez que o primeiro diz respeito ao investimento financeiro (que se realiza para obter um rendimento financeiro) e o segundo está subjacente ao jogo. William Sharpe faz a distinção entre os dois conceitos através do pressuposto de que uma pessoa pode ser considerada jogador se assumir um risco mais do que proporcional à rentabilidade esperada (exemplo: roleta), onde a rentabilidade média esperada é negativa. Por seu turno, no mercado de capitais também se assume risco, mas neste caso a rentabilidade média dos investidores é positiva (Sharpe, 1985). Desta forma, existe para cada investidor uma combinação de activos financeiros com diferentes graus de rentabilidade e risco. A quantificação do risco está assim associada à provável distribuição de probabilidades dos rendimentos futuros. Quanto mais dispersa for essa distribuição, maior é o risco e vice-versa. A medida adequada ao risco deverá quantificar a dispersão da distribuição.

É conveniente, ainda, aclarar dois conceitos, no que diz respeito à variância quando é usada para descrever o risco em funções que admitem derivadas de ordem superior à segunda: maior risco num investimento implica maior variância, mas maior variância não implica forçosamente maior risco. Para que maior variância implique maior risco é necessário que a distribuição de probabilidade seja perfeitamente descrita pelos dois primeiros momentos (média e variância), o que não constitui regra para todas as distribuições.

### 2.2.3 - Utilidade esperada

A análise de carteiras é caracterizada pela informação referente aos títulos que compõem a carteira, pelo critério de avaliação subjacente e por todos os procedimentos matemáticos através dos quais se transformam informações em conclusões.

Os primeiros investigadores que tentaram formular e representar matematicamente o comportamento do investidor face ao risco, assumiram que o principal objectivo daquele seria a maximização do rendimento esperado, de tal forma que era comum afirmar-se que “ (...) *frente a diversas alternativas de investimento, com diferentes graus de rendimento e risco, o investidor escolherá sempre aquela que lhe proporcione maior rendimento esperado*”.

Esta teoria revelou falta de credibilidade, dado que desprezava totalmente o factor risco e a forma com o investidor o encara. A utilidade esperada foi proposta como substituição do critério do valor esperado, em 1947 por John von Newmann e Oskar Morgenstein no artigo intitulado “ Teoria de Jogos e Comportamento Económico” (Tosta de Sá, 1987), segundo o qual cada indivíduo tem como principal objectivo a maximização utilidade, onde é possível encontrar a taxa de substituição entre dinheiro e utilidade para cada um destes indivíduos.

O princípio básico da aplicação de uma função utilidade é: “se o investidor se mostrar indiferente entre duas alternativas diferentes, então a utilidade esperada entre as ditas alternativas é semelhante”. A função de utilidade permite afectar valores numéricos à utilidade de forma que o investidor maximize a sua utilidade esperada, o que implica o uso do teorema da utilidade esperada, também conhecido por princípio de Bernoulli's . Este princípio é uma dedução lógica de três axiomas, que constituem a base para a dedução de princípios no caso de perspectivas de risco com consequências unidimensionais (Anderson et al, 1977).

Em ambiente de certeza, onde é possível antecipar o futuro, basta investir toda a riqueza no activo com maior taxa de rendimento esperado, maximizando-se desta forma a utilidade do investidor. Contudo, a incerteza é uma das principais características dos mercados financeiros, mais propriamente dos mercados de acções, por isso a maximização da utilidade pressupõe a assunção não só do rendimento esperado, mas também do risco a ele inerente. Deste modo a utilidade esperada será função de:

$$E(U) = f [E(r_i), V] \quad (2.3)$$

Onde:

$E(.)$  – Valor esperado;

$U$  – Utilidade;

$E(r_i)$  - Rendimento esperado; e,

$V$  – Medida de risco.

O objectivo será descobrir a combinação de activos cujo rendimento esperado e risco maximizem a utilidade do investidor. Esta maximização dependerá essencialmente do comportamento e atitude do investidor face ao risco. Na figura 2.1 são identificadas as respectivas curvas de utilidade dos diferentes tipos de investidores. Um investidor averso ao risco só aceita incorrer num maior nível de risco caso lhe seja garantido um incremento no rendimento esperado, onde os acréscimos marginais de rendimento esperado exigidos crescem mais do que proporcionalmente face ao crescimento do risco. Além disso, a partir de um certo nível de risco, não há acréscimo de rendimento esperado que leve o investidor a optar por esse investimento. A sua curva de utilidade é côncava, demonstrando que existe uma clara preferência pela certeza relativamente ao risco.

Relativamente ao investidor amante do risco, verifica-se a situação contrária, ou seja, este investidor aceita correr mais riscos sem ter em troca um aumento do rendimento esperado, logo os acréscimos marginais de rendimento esperado exigidos crescem menos que proporcionalmente que o risco. Este investidor apresenta uma curva convexa, onde se denota que o risco é realmente preferida à certeza.

O investidor neutral ao risco maximiza a sua utilidade tendo em conta apenas o rendimento esperado, não sendo minimamente influenciado pelo risco, daí que a sua função utilidade seja uma função linear.

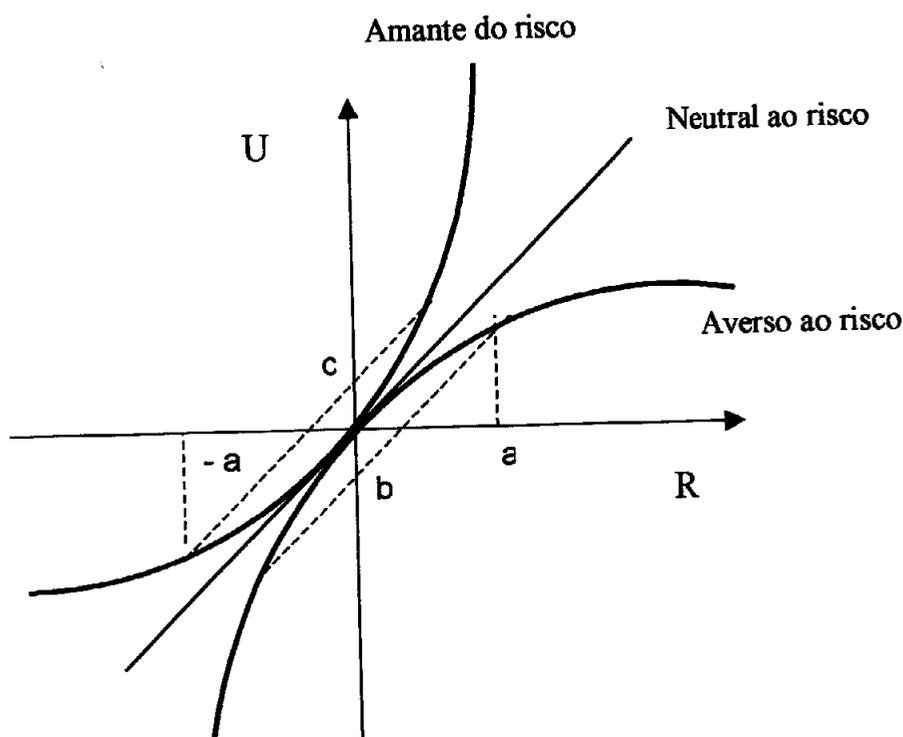


Figura 2.1 – Curvas de utilidade e atitude face ao risco

A utilidade esperada assume grande importância na análise e selecção de carteiras, uma vez que considera que o indivíduo age com base num critério de maximização da sua utilidade, escolhendo uma carteira situada na fronteira de eficiência, que é fruto da combinação entre o valor esperado e a variância (ou desvio-padrão).

Como já foi focado, a função utilidade tem por objecto a representação das preferências do investidor, sendo a sua formulação determinada pelas suas atitudes e comportamentos face a determinadas situações. Se o investidor é averso ao risco, a sua curva de utilidade é côncava, onde a partir de um determinado ponto crítico aumenta a uma taxa decrescente.

Muitos autores discordam da validade da utilidade esperada, com base no argumento de que esta não reflecte a essência do comportamento racional, mostrando que em determinadas situações a acção humana difere do objectivo ditado pela maximização da utilidade (Markowitz, 1959). É ainda demonstrado que em determinados eventos a razão humana e a utilidade parecem ser contraditórias.

Outros autores defendem a aplicação da utilidade esperada, com o argumento de que as diferenças que poderão existir entre a acção humana e este critério são

irrelevantes para a formalização do problema do comportamento face ao risco, permitindo a passagem de um nível objectivo para um nível mais subjectivo (Eeckhoudt et al, 1995).

### ***2.2.4 - Modelo da média-variância***

O modelo de avaliação e selecção de carteiras baseado na média variância foi desenvolvido por Markowitz, que reconheceu o papel do valor esperado na avaliação dos investimentos e acrescentou a esse modelo uma notação de risco descrita pela noção de variância ou desvio-padrão.

Este modelo assume como principais pressupostos (Markowitz, 1959):

- O investidor possui apenas activos líquidos, (um activo é considerado líquido se o preço pelo qual for vendido numa determinada situação é igual ao preço pelo qual é comprado na mesma altura, podendo ser vendido ou comprado livremente a este preço);
- O investidor pretende a maximização da sua utilidade que é função do capital investido, num determinado período de tempo; e,
- A distribuição de probabilidade dos rendimentos é normal e mantém-se constante.

Neste modelo de selecção de carteiras, o investidor escolhe fracções  $X_1, X_2, \dots, X_n$  que investe em  $n$  acções sujeita às seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (2.4)$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.5)$$

$X_i$  - Fracção do título ou acção  $i$ .

Os rendimentos auferidos pelo investidor, num determinado período de tempo é determinado pelos rendimentos individuais dos títulos, sendo o rendimento global da carteira dado pela seguinte expressão:

$$R_f = \sum_{i=1}^n X_i r_i \quad (2.6)$$

Onde:

$R_f$  – Rendimento global;

$X_i$  - Fracção do título ou acção i; e,

$r_i$  – Taxa de rendibilidade da acção i.

O valor esperado do rendimento da carteira será dado pela média dos rendimentos individuais relativos à fracção correspondente a cada acção.

$$E(\chi) = \sum_{i=1}^n p_i(\chi) X_i \cdot r_i \quad (2.7)$$

Onde:

$E(\cdot)$  – Valor esperado;

$\chi$  - Variável aleatória;

$r_i$  – Taxa de rendibilidade da acção i;

$p$  - Probabilidade dos acontecimentos; e,

$X_i$  - Fracção do título ou acção i.

Para além do valor esperado, Markowitz (Markowitz, 1959), reconheceu a importância da variância como medida do risco, dado que a mera assunção do valor esperado levaria o investidor a desprezar situações vantajosas em termos de combinação média-variância. O risco é dado pela expressão:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (2.8)$$

Onde:

$V$  – Variância do rendimento da carteira;

$X_i$  - Fracção do título ou acção i;

$X_j$  - Fracção do título ou acção j; e,

$\sigma_{ij}$  - Covariância entre os rendimentos das acções i e j.

De acordo com Harry Markowitz (Markowitz, 1959), a diversificação é um dos principais motores para a minimização do risco, contudo existe um limite para esta diversificação, dado que a partir de um certo ponto verifica-se uma diminuição gradual do valor esperado. Apesar de tudo isto, não basta diversificar para minimizar o risco, é necessário que os activos (títulos) estejam negativamente correlacionados, pois caso contrário o risco de uma carteira não será mais que a mera soma dos riscos individuais de cada título. Para reduzir o risco torna-se, assim, fulcral evitar títulos que estejam positivamente correlacionados entre si. Como é natural, é a incerteza relativamente ao futuro que justifica a existência da diversificação, pois se fosse possível realizar previsões com certeza, a tendência seria investir o máximo na acção ou título que apresentasse maior taxa de rendibilidade futura (Sharpe, 1970).

O critério de escolha depende da natureza do investidor. Para alguns investidores certos aspectos podem assumir uma grau de importância muito superior ao assumido por outro investidor, contudo, na generalidade pode-se dizer que os investidores têm dois grandes objectivos: (i) obtenção de rendimentos cujos valores sejam o mais elevados possível; (ii) que o rendimento seja alvo de estabilidade, isto é, que não seja objecto de incerteza. Como é natural existem pessoas para as quais a incerteza e o risco são muito mais aliciantes que a certeza, contudo neste estudo o considerar-se-á que o investidor racional será aquele que prefere a certeza à incerteza, ou seja, é averso ao risco.

Por exemplo, se uma determinada carteira A tiver um valor esperado do rendimento superior ao de uma dada carteira B e incerteza menor, então a carteira A é preferível à carteira B. Neste sentido a carteira B pode ser eliminada da análise, uma vez que é considerada ineficiente. Após eliminação de todas as carteiras consideradas ineficientes, obtém-se um conjunto de carteiras, que pelas suas características não é possível estabelecer uma ordenação entre elas sem ter em conta o perfil do investidor e a sua atitude em relação ao risco.

Tendo em conta a figura 2.2, depreende-se que o investidor escolherá sempre uma carteira situada na Fronteira de Eficiência (FGH). O ponto F representa a alternativa em que toda a riqueza é aplicada em activos sem risco com um determinado valor esperado de rendimento e risco nulo (por exemplo: depósitos bancários). No ponto H encontra-se o indivíduo que constitui a sua carteira apenas com activos com risco, detectando-se uma certa apetência pelo risco por parte deste investidor.

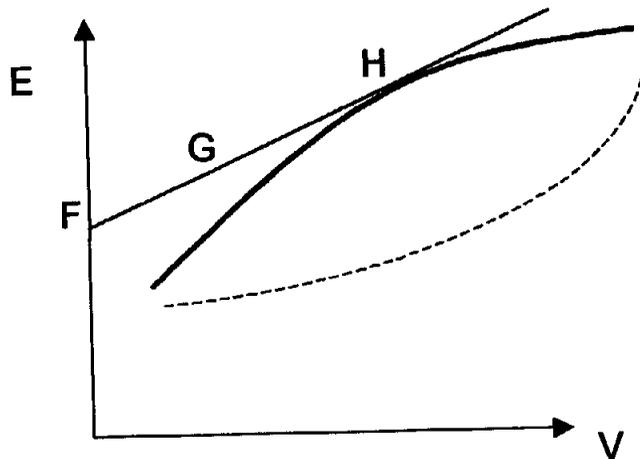


Figura 2.2 - Fronteira de eficiência

Para que uma carteira seja eficiente não poderá existir nenhuma outra com um valor esperado de rendimento superior e igual variância ou igual valor esperado e menor variância.

A aptidão do investidor face ao risco pode ser determinada matematicamente através da introdução de uma variável ( $K$ ) positiva. Ao se definir a função objectivo por:  $E - K.V$  obtém-se, no fundo, uma função utilidade (Markowitz, 1959), a utilidade do valor esperado menos o risco (medido pela variância).

Este coeficiente  $K$  mede a atitude do investidor face ao risco. Um  $K$  com um valor elevado significa uma elevada aversão ao risco, enquanto que um  $K$  com um valor reduzido indica um investidor com baixa aversão ao risco. Voltando à figura 2.2, valores baixos de  $K$  correspondem a valores óptimos próximos de  $H$ , à medida que se aumenta o valor de  $K$ , a solução óptima tende a aproximar-se de  $G$  e de  $F$ .

No seu todo o modelo da média-variância pode ser descrito da seguinte forma:

$$\text{Max } E[U(x)] = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i X_i - K \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} = \bar{V} \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^0 X_i \leq M \quad (2.11)$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.12)$$

Onde:

$E(.)$  – Valor esperado;

$U(.)$  – Utilidade esperada;

$\chi$  - Variável aleatória;

$\bar{r}_i$  – Taxa de rendibilidade média da acção ou título  $i$ ;

$x$  - Fracção do título ou acção;

$\sigma_{ij}$  - Covariância entre os rendimentos das acções  $i$  e  $j$ ,

$p_i^0$  - Cotação (preço) da acção;

$\bar{V}$  - Valor pré-definido da variância;

$K$  – Coeficiente de aversão ao risco; e,

$M$  – Valor de investimento máximo a afectar.

A representação da função utilidade só é consistente com a utilização de uma função quadrática, ao se pressupor que o investidor rege as suas escolhas de acordo com o valor esperado e a variância. Se se considerar que a função utilidade pode assumir a forma:

$$U = a + b r - c r^2 \quad (2.13)$$

Onde:

$U$  – Utilidade;

$r$  – Taxa de rendibilidade;

$a$  – Constante;

$b$  – Constante positiva; e,

$c$  – Constante positiva.

A sua forma geométrica indica uma parábola de concavidade voltada para baixo, revelando a partir do valor máximo da função, um decréscimo da utilidade a uma taxa crescente. Como tal não é verdade, no caso de a utilidade depender de um determinado nível de riqueza, é pressuposto que a partir de um certo valor a utilidade cresce a uma taxa decrescente.

A função utilidade descrita em (2.13) pode ser apresentada em ordem ao valor esperado e à variância, resultando em:

$$E U_p = a + b E_p - c E_p^2 - c \sigma_p^2 \quad (2.14)$$

Em que:

$E(.)$  – Valor esperado;

$E_p$  – Valor esperado da carteira;

$U_p$  – Utilidade da carteira;

$\sigma_p^2$  - Variância da carteira;

$a$  – Constante;

$b$  – Constante positiva; e,

$c$  – Constante positiva.

A função utilidade quadrática implica curvas de indiferença convexas, para investidores aversos ao risco, curvas estas que muitas vezes não conseguem representar de forma satisfatória as preferências dos investidores. Em certas situações, admite-se que os investidores apenas tenham em conta o valor esperado e a variância, sendo este modelo uma representação bastante boa dos mesmos, contudo, caso os investidores tenham em conta outros elementos no processo de tomada de decisão, uma grande fatia da realidade pode ser omitida com a simples aplicação do modelo acima apresentado.

Segundo Sharpe (Sharpe, 1970), a maioria dos investidores prefere carteiras bem diversificadas, representadas pelo valor esperado e variância, de tal modo que a utilização de uma função quadrática para representar a função utilidade é admitida para a maioria dos investidores.

A moderna teoria de selecção de carteiras de que Markowitz foi pioneiro em 1952 através do modelo da média-variância, não foi alvo da implementação e sucesso esperado, o que se ficou a dever, de entre vários motivos: (i) à dificuldade de estimação e cálculos necessários para “correr” o modelo, principalmente no que concerne à matriz de variâncias e covariâncias; (ii) ao tempo e aos custos muito elevados que a resolução deste tipo de modelo implicava; (iii) à dificuldade em “convencer” os gestores de carteiras a ter em conta as covariâncias, para além dos normais valor esperado e desvio padrão (Elton et al, 1999).

As duas primeiras dificuldades estão actualmente, completamente superadas graças ao avanço tecnológico que permite o cálculo e o tratamento de uma grande quantidade de dados num diminuto espaço de tempo. Contudo, apesar da sua operacionalidade, o modelo da média-variância apresenta algumas limitações que põem em causa a sua utilização em termos gerais (Feldstein, 1969).

Segundo Tobin (Tobin, 1958), as preferências dos investidores na constituição de carteiras poderiam ser simplesmente representadas pelo valor esperado e desvio-padrão. Tal simplificação justificava-se pelo facto de a função utilidade do investidor ser uma função quadrática e seguir uma distribuição de probabilidade caracterizada por estes dois parâmetros (média e variância).

A curva de indiferença do investidor averso ao risco teria de obedecer a duas condições:

- 1) Condição de 1ª ordem:  $\frac{\partial E}{\partial V} > 0$ , isto é, o investidor é indiferente entre duas carteiras com variâncias diferentes, se e só se a carteira com maior variância ( $v$ ) apresentar maior valor esperado ( $E$ );
- 2) Condição de 2ª ordem:  $\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} > 0$ , ou seja, a taxa à qual o indivíduo se sente compensado aumenta à medida que a variância aumenta.

A propriedade da convexidade assume um importante papel neste modelo, sendo fundamental para a explicação da diversificação por parte do investidor.

De acordo com Feldstein (Feldstein, 1969) e Borch (Borch, 1968) esta teoria não está totalmente correcta. A propriedade da convexidade está correcta para o caso em que a função de utilidade do investidor é uma função quadrática, mas ao se assumir outro tipo de função, tal propriedade só é assegurada se a função seguir uma distribuição de probabilidade subjectiva em que todos os membros são caracterizados por dois parâmetros (valor esperado e variância). A utilização da função quadrática para representar a função de utilidade é bastante criticada por muitos autores, nomeadamente (Arrow, 1963), (Hicks, 1962), (Pratt, 1958) (Feldstein, 1969) e (Serrão, 1988) onde um dos motivos para tal crítica se deve ao facto de a função quadrática apresentar aversão absoluta ao risco crescente, quando vários estudos indicam precisamente o contrário, ou seja, a aversão absoluta ao risco decresce à medida que o investidor “enriquece”. Tal

facto torna a função quadrática ineficaz como forma de representação da utilidade, contudo a sua exclusão torna impossível assumir a propriedade da convexidade (ser estritamente convexa em todo o domínio) para o investidor averso ao risco, ou seja, para o investidor racional.

A diversificação é a base da explicação da curva de indiferença da preferência do investidor. Contudo nem todas as carteiras podem ser representadas simplesmente por  $E - V$  (média - variância), mesmo que a distribuição de probabilidade seja caracterizada por dois parâmetros.

A utilização da média-variância é posta em causa quando a função utilidade segue uma distribuição que não seja caracterizada por dois parâmetros, isto é, quando a distribuição evidenciada é uma distribuição de probabilidade uniforme, lognormal, beta, gama. Se a distribuição não for normal, poderá ser insuficientemente caracterizada se se atender apenas aos primeiro e segundo momentos (média e variância) (Reis, 1999). Além disso, apenas a distribuição normal tem a propriedade adicional de que a distribuição da carteira tem a mesma forma que os activos que a constituem.

A utilização de uma função de utilidade quadrática com distribuição de probabilidade normal são condições necessárias para a credibilidade de resultados da aplicação do modelo da média-variância, até porque a variância só é um bom critério de avaliação do risco, quando os indivíduos são caracterizados por funções quadráticas, cujas derivadas de terceira e de maior ordem são nulas. Caso a função admita derivadas além da segunda, a variância deixa de ser um bom indicador quando utilizada isoladamente, sendo necessária a utilização de outras medidas estatísticas (Borch, 1968). Contudo a função quadrática é bastante restritiva e a distribuição normal dos rendimentos dos activos, pode não ser a mais apropriada e aproximada da realidade.

### ***2.2.5 - Modelo diagonal de Sharpe***

No sentido de superar algumas das limitações do modelo da média-variância de Markowitz, William Sharpe (Sharpe, 1970) introduziu um novo conceito de modelo relativamente à selecção de carteiras.

William Sharpe (Sharpe, 1970) desenvolveu o denominado modelo de um único índice, que deu origem ao modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), que admite

como pressupostos básicos que o rendimento associado a cada uma das acções está linearmente associado com o nível de um índice geral, que caracteriza o mercado como um todo. Ao se relacionarem os rendimentos de cada acção com um índice geral, implicitamente os rendimentos das acções são relacionados entre si.

A simplificação introduzida por Sharpe permite a redução substancial do número de cálculos envolvidos na determinação das carteiras eficientes, tornando o processo exequível em bases práticas. Por exemplo, se se estudar um mercado de acções composto por 100 títulos, a aplicação da teoria de Markowitz obrigaria ao cálculo de 100 rendimentos esperados, 100 desvio-padrão e 4950 covariâncias.

No caso de se utilizar a metodologia de Sharpe, seria necessário calcular 100 rendimentos esperados e 100 desvios-padrão para os 100 títulos, e um rendimento esperado e um desvio-padrão para o índice geral representativo do mercado.

Sharpe assumiu que o rendimento esperado de cada título poderia ser escrito em termos de uma regressão linear:

$$R_i = \alpha + \beta R I_i + \varepsilon_i$$

(2.15)

Onde:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$\alpha$  - Coeficiente alfa, é a intersecção da linha característica da acção com o eixo vertical, representando o excesso do rendimento da acção sobre o rendimento do activo sem risco;

$\beta$  - Coeficiente beta, é a inclinação da recta de regressão e representa as variações do rendimento esperado da acção que são originadas pelas variações ocorridas no índice geral do mercado. Caso a inclinação da recta seja  $45^\circ$ , logo  $\beta=1$ , implica que se o índice de mercado sofrer um incremento de 10%, o rendimento esperado da acção variaria no mesmo sentido e valor. Quanto mais inclinada for esta recta, mais sensível será o rendimento da acção face às oscilações do mercado, quantificadas pelo índice geral;

$\varepsilon$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão, com  $E(\varepsilon_i)=0$ , variância  $\sigma^2_i$  e  $Cov(\varepsilon_i, R I_i)=0$ ; e,

$R I_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado

A recta de regressão deverá ser não enviesada, no sentido de que  $E(R_i) = E(\alpha + \beta RI_i)$  e que o resíduo  $\varepsilon_i$  não está correlacionado com a variável explicativa ( $RI_i$ ). Estes pressupostos pretendem demonstrar que os rendimentos esperados das acções estão relacionados entre si através de um factor comum, o índice geral do mercado.

O rendimento aleatório de uma carteira com  $n$  activos pode calcular-se da seguinte forma:

$$R_p = \sum_{i=1}^n X_i r_i = \sum_i X_i (\alpha_i + \varepsilon_i) + RI_i \sum_i X_i \beta_i \quad (2.16)$$

Onde:

$R_p$  - Taxa de rendibilidade da carteira  $p$ ;

$r_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$X_i$  - Fracção do título ao acção  $i$ ;

$\alpha$  - Coeficiente alfa;

$\beta$  - Coeficiente beta;

$\varepsilon$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão; e,

$RI_i$  - Índice Geral do Mercado

A variância de cada título pode ser encontrada através da seguinte fórmula:

$$\text{Var}(r_i) = \sigma^2 = \sum_i X_i^2 \varepsilon_i \quad (2.17)$$

Dado que  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  para todo o  $i$  e  $j$ .

A covariância entre os títulos ou acções, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(r_i, r_j) &= \text{Cov}(\alpha_i + \beta_i RI_i + \varepsilon_i, \alpha_j + \beta_j RI_i + \varepsilon_j) = \text{Cov}(\beta_i RI_i + \varepsilon_i, \beta_j RI_i + \varepsilon_j) = \\ &\begin{cases} \beta_i \beta_j \text{Var } RI_i \\ \beta_i^2 \text{Var } RI_i + \text{Var } \varepsilon_i \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Onde:

$\text{Cov}(\cdot)$  - Covariância;

$r_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$r_j$  - Taxa de rendibilidade da acção  $j$ ;

$\alpha$  - Coeficiente alfa;

$\beta$  - Coeficiente beta;

$\epsilon$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado; e.

Var (.) - Variância.

Face ao progresso da informática, actualmente o cálculo da matriz de variâncias e covariâncias não levanta quaisquer problemas em termos de tempo e de custos. Para além dos aspectos didácticos, relacionados com o esforço de linearização, este modelo poderá ter um interesse meramente histórico, uma vez que ao desprezar as covariâncias através das hipóteses redutoras, elimina importantes elementos de cálculo da variância de uma carteira (Elton et al, 1999).

Segundo Sharpe (Sharpe, 1970), o risco corresponde à obtenção de rendimentos efectivos esperados de cada acção, pode ser separado em dois elementos distintos: (i) o risco sistemático (ou risco não diversificável), que é a parcela do rendimento das acções que pode ser atribuído às variações do mercado como um todo; (ii) o risco específico (ou risco diversificável), que diz respeito à parcela do risco da acção que deriva das características únicas de cada acção, sendo função da estrutura de capital da empresa emissora, da qualidade da sua administração, de características peculiares do mercado onde a empresa actua e de outros factores que não a própria performance do mercado de acções (figura 2.3).

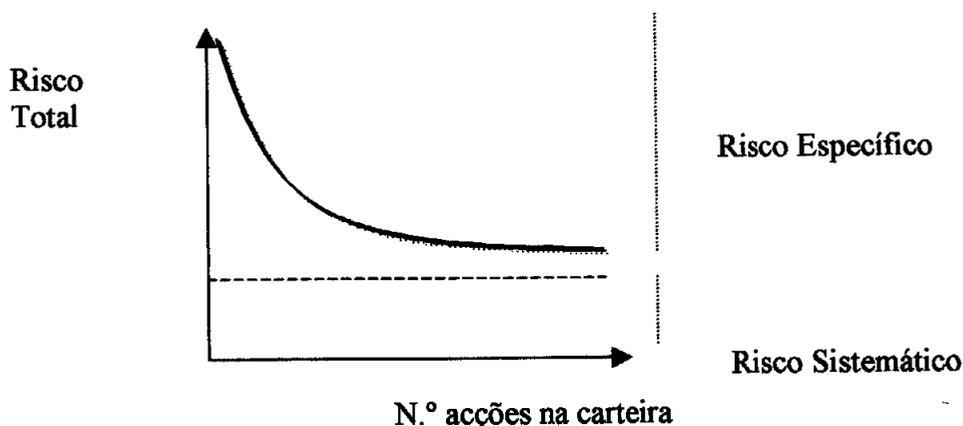


Figura 2.3 – Risco específico e risco sistemático

De acordo com a figura 2.4 cada ponto assinalado no gráfico indica o rendimento da acção e o correspondente rendimento de mercado. O conhecimento dos

pontos permite o traçar de uma linha de regressão, através do método dos mínimos quadrados, chamada de Security Market Line (SML).

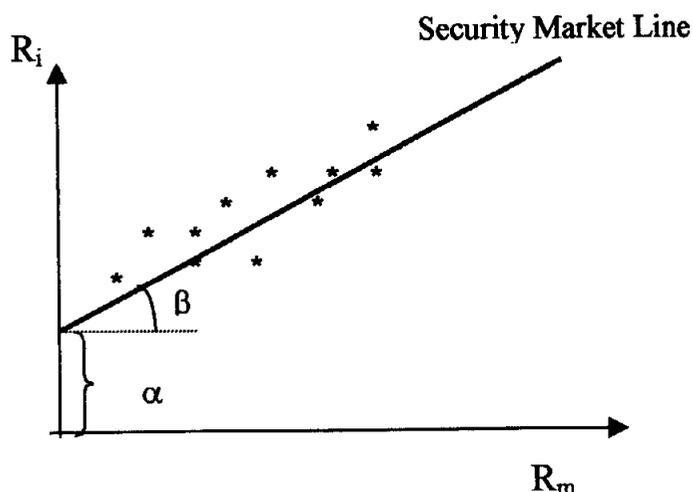


Figura 2.4 – “Security Market Line”

Esta recta tem por equação:

$$R_i - R_F = \alpha + \beta (R_{I_i} - R_F) + \varepsilon_i \quad (2.19)$$

Onde:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo sem risco;

$\alpha$  - Coeficiente alfa;

$\beta$  - Coeficiente beta;

$R_{I_i}$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado; e,

$\varepsilon$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão.

O risco de uma acção pode ser medido da seguinte forma:

$$\text{Var}(R_i - R_F) = \text{Var}[\alpha_i + \beta (R_{I_i} - R_F) + \varepsilon_i] \quad (2.20)$$

O primeiro membro da equação pode ser simplificado:

$$\text{Var}(R_i - R_F) = \text{Var} R_i + \text{Var} R_F - 2 \text{Cov}(R_F, R_i) = \text{Var} R_i \quad (2.21)$$

No segundo termo, como  $\alpha$  é constante, então  $\text{Var}(\alpha) = 0$ , logo:

$$\begin{aligned} \text{Var} [\alpha + \beta (RI_i - R_F) + \varepsilon_i] &= \text{Var} [\beta (RI_i - R_F)] + \text{Var} \varepsilon_i = \\ &= \beta^2 \text{Var} RI_i + \text{Var} \varepsilon_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Deste modo, a variância do rendimento da acção pode ser encontrado por:

$$\text{Var} R_i = \beta^2 \cdot \text{Var} RI_i + \text{Var} \varepsilon_i \quad (2.23)$$

Onde:

$\text{Var} (.)$  - Variância

$\text{Cov} (.)$  - Covariância;

$R_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo sem risco;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado; e,

$\alpha$  - Coeficiente alfa;

$\beta$  - Coeficiente beta; e,

$\varepsilon$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão.

O risco de uma carteira pode reduzir-se ao risco sistemático através da diversificação, que permite anular, ou pelo menos, minimizar o risco específico

O risco total de um título pode deduzir-se do seguinte modo:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_e^2 \quad (2.24)$$

Onde:

$\sigma_i^2$  - Risco do título  $i$ ;

$\beta_i^2$  - Coeficiente beta;

$\sigma_m^2$  - Risco inerente ao mercado; e,

$\sigma_e^2$  - Risco específico.

$$\text{Onde } \beta_i \text{ equivale ao quociente } \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m} \quad (2.25)$$

$\sigma_m^2$  - Risco inerente ao mercado;

$\sigma_{im}$  - Covariância entre o rendimento da acção i e o rendimento global do mercado.

A proporção do risco total da acção atribuído ao risco de mercado (ou coeficiente de determinação) pode ser calculado através:

$$R^2 = \frac{\beta_i^2 \cdot \sigma_m^2}{\sigma_i^2} \quad (2.26)$$

Em que:

$\sigma_i^2$  - Risco do título i;

$\beta_i$  - Coeficiente beta referente ao título i;

$\sigma_m^2$  - Risco inerente ao mercado; e,

$R^2$  - Coeficiente de determinação.

Como  $\sigma_m^2$  assume o mesmo valor para qualquer título, o que irá caracterizar o risco total de um valor é o beta e o respectivo risco específico. Quanto mais elevado for beta maior será o risco total, por isso este coeficiente é considerado uma boa medida de risco (Sharpe, 1970). Neste tipo de análise é importante ter em consideração que a acção está incluída numa carteira diversificada e que o rendimento estimado por beta deve ser entendido como o contributo dessa acção para o rendimento global da carteira na qual se irá inserir. O beta apenas capta o risco sistemático da acção, mas o rendimento da mesma tem igualmente uma componente de risco específico que pode aumentar ou reduzir o rendimento estimado por beta (Mota et al, 1996), o que será mais explicitado na apresentação do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model).

O beta do mercado accionista, ou seja da carteira mercado assume sempre o valor 1 (um), isto porque:

$$\beta = \frac{\text{Cov}(RI_i, RI_i)}{\sigma_m^2} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_m^2} = 1 \quad (2.27)$$

Onde:

$\beta$  - Coeficiente beta;

$\sigma_m^2$  - Risco inerente ao mercado; e,

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado.

### **2.2.6 – O modelo de equilíbrio de mercado – CAPM (Capital Asset Pricing Model)**

Este modelo teve origem nos anos 60 e situa-se na mesma linha do modelo diagonal, visando evitar as complicações de cálculos inerentes à programação quadrática exigidos pelo modelo de Markowitz. A simplificação do modelo é obtida à custa da aceitação de determinadas premissas, que por vezes podem não se verificar.

O modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) foi proposto por Sharpe em 1964 no artigo “Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk” e Lintner em 1965 no artigo “Security prices, risk and maximal gain from diversification”, assentando nos seguintes pressupostos:

- 1 todos os investidores têm aversão ao risco;
- 2 existe um activo sem risco, com taxa de juro fixa  $R_F$ ;
- 3 todos os participantes no mercado estão em equilíbrio individual, ou seja, cada investidor escolhe uma carteira óptima em termos de rendimento esperado e risco, que maximiza a sua utilidade de acordo com as regras do modelo de Markowitz;
- 4 os investidores têm expectativas homogéneas acerca dos rendimentos futuros;
- 5 o mercado de capitais está em equilíbrio;
- 6 não há imperfeições no mercado, os investimentos são infinitamente divisíveis, a informação é gratuita, não há impostos nem custos de transação sobre os activos, não há alteração de taxas de juro nem inflação; e,
- 7 as taxas de rendibilidade seguem distribuição normal.

O coeficiente beta, que quantifica o risco sistemático e conseqüentemente no âmbito de uma carteira diversificada o seu contributo para o risco da mesma carteira, é aplicado às combinações  $R_F$  e M. Genericamente, pode-se investir X em M e  $(1 - X)$  em  $R_F$ . O rendimento da aplicação será:

$$R_p = RI_i \cdot X + R_F \cdot (1 - X) \quad (2.28)$$

Onde:

$R_p$  - Taxa de rendibilidade da carteira;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo com risco; e,

$X$  - Fração do investimento aplicada em activos com risco.

Por sua vez, o beta da aplicação ( $\beta_p$ ), será igual a:

$$\beta_p = 1 \cdot X + 0 \cdot (1 - X) \quad (2.29)$$

Substituindo na equação (2.28)  $X$  por  $\beta_p$ , ter-se-á:

$$R_p = RI_i \cdot \beta_p + R_F \cdot (1 - \beta_p) \quad (2.30)$$

Onde:

$R_p$  - Taxa de rendibilidade da carteira;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$R_F$  - taxa de rendibilidade fixa do activo com risco; e,

$\beta_p$  - Coeficiente beta.

Reordenando a equação, obtém-se :

$$R_p = R_F + \beta_p (RI_i - R_F) \quad (2.31)$$

Sendo:

$R_p$  - Taxa de rendibilidade da carteira;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo com risco; e,

$\beta_p$  - Coeficiente beta.

Esta expressão conhecida pelo modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), permite a desejada quantificação da relação rendimento / risco para qualquer carteira ou

acção. Para isso é necessário que se calcule o beta, bastando apenas conhecer as taxas do rendimento sem risco e do mercado accionista (o rendimento do mercado accionista pode ser medido através de um índice representativo do mesmo).

Este modelo contempla uma relação linear entre rendimento e risco, podendo ser subdividido em duas parcelas, que explicitam sua forma de funcionamento como é evidenciado na figura 2.5:

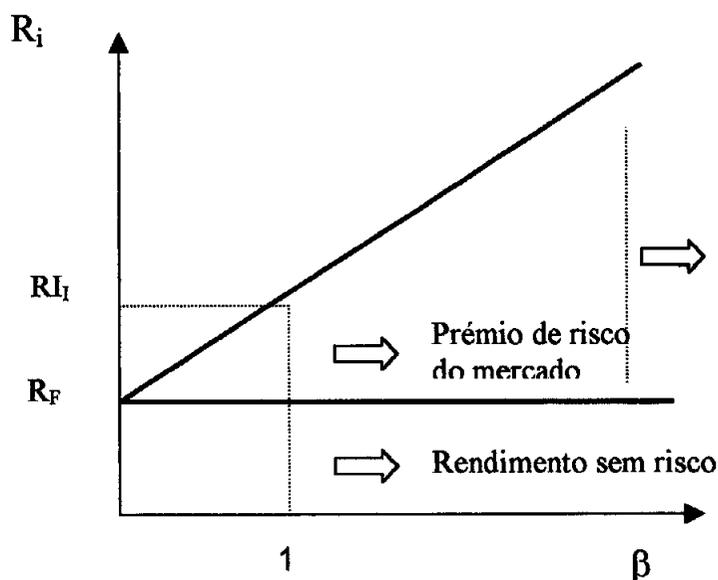


Figura 2.5 – Recta do mercado de capitais

Admitindo as hipóteses 3), 5) e 6), relativas às condições de equilíbrio do mercado, todos os investidores têm carteiras com risco específico nulo, ou seja, correspondentes à recta SML que pode ser designada como recta de equilíbrio do mercado de capitais.

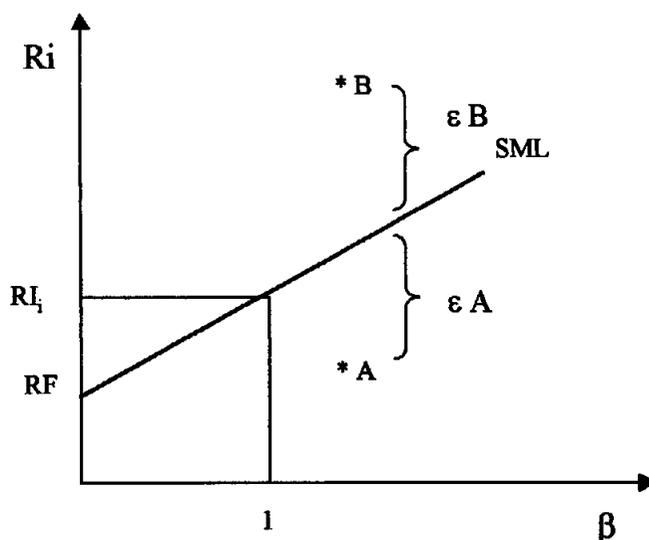


Figura 2.6 – Recta de equilíbrio do mercado de capitais

Se se considerar o título A (figura 2.6), verifica-se que  $\epsilon_A \neq 0$  e que este título tem um rendimento inferior àquele que deveria corresponder o seu risco. Como consequência, os investidores irão desfazer-se desse título, o que levará a uma queda da cotação. Após ajustamentos sucessivos, a cotação ficará ajustada ao juro ou dividendo do título de modo a fazer subir o seu rendimento, até alcançar a recta SML. O inverso se passa com o título B, que após ajustamentos sucessivos tenderá a baixar o seu rendimento até tocar na recta SML (Barata, 1993).

Ao calcular os betas dos títulos do mercado, obtém-se uma medida de risco: ou títulos com  $\beta < 1$  dizem-se defensíveis (Bear) e os títulos com  $\beta > 1$  dizem-se agressivos ou voláteis por terem um beta superior ao do mercado (Bull), (Sharpe, 1985).

Este modelo, tal como os anteriormente apresentados, revela limitações decorrentes dos respectivos pressupostos que permitem um grau de simplificação atractivo. Existe uma grande controvérsia, nomeadamente no que diz respeito aos testes empíricos realizados a este modelo, em que de acordo com muitos autores (Roll, 1977), este modelo ainda não é a solução final uma vez que a sua aproximação da realidade é ainda bastante precária. Também Fama e MacBeth em 1973 testaram a equação de equilíbrio de mercado em relação à Bolsa de Nova Iorque, concluindo, à semelhança de Black, Jensen e Scholes (1972), que a teoria do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) não se adequava à realidade (Barata, 1993) (Elton et al, 1999).

Além disso são ainda observados alguns problemas a diversos níveis (Mota et al, 1996): (i) dificuldade de selecção do investimento sem risco e a assunção de que não existe taxa de inflação deita por terra a possibilidade de se ter uma taxa real; (ii) o rendimento do mercado accionista é apurado através de um índice de acções, que quase sempre é uma aproximação limitada do real; (iii) o modelo é susceptível de teste face a valores de rendimentos verificados, quando a sua utilização se pretende para rendimentos futuros.

Outra grande limitação deste modelo consiste no pressuposto de que só é possível a sua aplicação para a distribuição normal de probabilidade, o que por si só constitui um entrave à obtenção de resultados aproximados da realidade, uma vez que esta distribuição pode não ser aquela que melhor caracteriza o mercado. Além disso, para mercados de pequena dimensão, como é o caso de Portugal, a situação agrava-se, uma vez que torna-se ainda mais difícil proceder a aproximações à curva de Gauss, o que pode invalidar a sua utilização.

Apesar destas limitações, o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) incorpora fundamentos que são essenciais à boa gestão dos investimentos financeiros, nomeadamente o princípio da diversificação e o conceito de carteira eficiente, sendo por isso aconselhado por muitos autores.

### **2.2.7 – O modelo APT – Arbitrage Pricing Theory**

O modelo APT (Arbitrage Pricing Model) resulta da tentativa de superação de uma das principais críticas ao modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) por Stephen Ross, em que é considerado que o beta, como única medida de risco, não consegue captar adequadamente as expectativas de rendimento incorporadas no preço das acções. Segundo muitos autores, a relação entre risco e rendimento é bastante mais complexa, devendo ser explicada através da criação de um modelo multi-index (Elton et al, 1999), em detrimento de um modelo mono-index, como é o caso do CAPM (Mota et al, 1996). Nesta perspectiva, o rendimento de uma acção deveria ser definido por:

$$R_i = R_F + \beta_1 (RI_1 - R_F) + \beta_2 (RI_2 - R_F) + \dots + \beta_n (RI_n - R_F) + \varepsilon_i \quad (2.32)$$

Sendo:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado, inflação, ...;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo com risco;

$\beta_i$  - Coeficiente beta; e,

$\varepsilon_i$  - Variável aleatória que representa o resíduo da regressão.

Os diferentes  $\beta_i$  representam as várias variáveis explicativas do rendimento das acções, cuja identificação poderá levantar algumas dúvidas. Recorrendo à análise factorial, Stephen Ross identificou quatro variáveis económicas que influenciam directamente o rendimento das acções: (i) inflação; (ii) produção industrial; (iii) prémios de risco; (iv) inclinação da estrutura das taxas de juro (Sharpe, 1985). À semelhança do CAPM, este modelo assume linearidade entre os factores risco e rendimento. A

principal diferença reside na avaliação que é feita relativamente ao risco sistemático, que é resultado não de um factor, mas de quatro.

O valor esperado da carteira depende directamente do valor esperado dos factores, ou seja, depende da taxa do activo sem risco e da sensibilidade da diferença entre o valor do rendimento esperado do factor e o rendimento do activo sem risco, diferença esta que se vai denominar de Lambda ( $\lambda$ ) ( $R_{mi} - R_F = \lambda_i$ ) (Sharpe, 1985). A presença do activo sem risco é fundamental neste modelo. Com uma carteira bastante diversificada é possível encontrar títulos com uma sensibilidade quase nula relativamente a determinados factores, o que poderá contribuir fortemente para uma minimização total do risco. O seu valor esperado, que será virtualmente “sem risco”, é a base para medida de valor esperado de outros investimentos (Sharpe, 1985).

Desta forma, o modelo APT (Arbitrage Pricing Model) pode ser expresso por:

$$R_i = R_F + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \dots + \beta_n \lambda_n \quad (2.33)$$

Onde:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$R_F$  - Taxa de rendibilidade fixa do activo com risco;

$\beta_i$  - Coeficiente beta; e,

$\lambda_i$  - Prémio de risco relativo ao factor  $i$ .

A equação (2.33) é muitas vezes denominada de *pricing equation*, pois tal como a equação obtida pelo modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), representa uma relação linear entre o valor esperado de uma acção (ou título) e os diversos factores cujos atributos assumem relevância no cálculo do rendimento de uma determinada carteira (Sharpe, 1985).

As propriedades estatísticas da matriz de correlações tem sido objecto de estudo, não só na área económica mas também pela física, apesar de estarem implícitos diferentes objectivos. Na investigação económica, o principal objectivo é determinar o número de factores presentes nos mercados financeiros do presente modelo. A existência de valores dominantes na referida matriz tem sido interpretada como sinal de que um pequeno número de factores económicos seguem a dinâmica estocástica das

acções nos mercados financeiros. Análises empíricas sugerem que apenas um pequeno número de factores assume suficiente relevância para ser introduzido no modelo, existindo um factor proeminente sobre todos os outros (Mantegna, 2000).

Ao se assumir que o investidor tem um determinado comportamento face ao risco, o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) poderá orientar melhor o investidor, dado que tem em conta prémios de risco positivos ou negativos de acordo com o mercado. O modelo APT (Arbitrage Pricing Model) não é mais do que uma extensão do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), onde o equilíbrio de mercado depende de um maior número de factores, cuja modelização da utilidade do investidor poderá ser problemática na medida em que estes factores podem não evidenciar a atitude do investidor face ao risco (Sharpe, 1985).

Os testes empíricos realizados ao modelo APT (Arbitrage Pricing Model) não permitem grandes conclusões, dado que funciona com alguns grupos de acções, mas não com outros, o que parece indicar uma evidente dificuldade no isolamento dos factores explicativos, constatando-se que estes não são constantes ao longo do tempo.

Dadas as limitações evidenciadas dos modelos de gestão e selecção de carteiras, existe a necessidade de explicar os fenómenos bolsistas de outra forma, que mais se adequa à realidade. A física tem desenvolvido alguns estudos neste sentido, na tentativa de melhor caracterizar este mercado complexo e dinâmico.

### **2.3 – Modelos de entropia e informação mútua**

Esta secção apresenta algumas similaridades existentes entre a física e a economia financeira, que permitem uma maior interacção entre as ciências no sentido de encontrar uma melhor explicação dos fenómenos económico-financeiros. Neste contexto é apresentada a entropia e o seu desenvolvimento no seio da teoria da informação e da teoria financeira.

### ***2.3.1 – Enquadramento geral***

Assiste-se cada vez mais a uma aproximação entre as diversas áreas da ciência com o objectivo de conseguir uma explicação mais realista dos fenómenos. Desta aproximação é de realçar a que se tem verificado de forma crescente entre a física e a teoria financeira, através do cada vez maior número de físicos que se dedicam a investigar e analisar esta área, estabelecendo paralelismos entre a natureza e o mundo económico e financeiro. Esta cooperação visa superar algumas limitações existentes na teoria económica, devido à complexidade e dinâmica subjacentes que são incompatíveis com os modelos estáticos que são vulgarmente utilizados (Zhang, 1998).

Os mercados bolsistas de acções são caracterizados pela infinidade de dados que podem disponibilizar, onde a complexidade assume níveis bastante elevados, de tal forma que tem constituído um ponto de atracção para os físicos, cujas bases matemáticas, informáticas e capacidade de modelação se revelam preciosas para a compreensão destes mercados. É advogada a aplicação de fractais, como forma de previsão de “crashes” através da análise de dados históricos.

Marcel Ausloos (Ausloos, 1998) apresenta alguns paralelismos entre a natureza e os mercados bolsistas, através dos pressupostos básicos da teoria da evolução das espécies de Darwin e Lamarck. Segundo Darwin existe uma selecção natural em que só sobrevivem os mais fortes, em que o desenvolvimento é parte intrínseca da evolução, mas não é infinito, dadas as limitações de recursos que existem, pois caso contrário seriam prováveis reacções drásticas a nível global, constituindo verdadeiras catástrofes. Segundo Lamarck, o mais forte é sempre superado por outro que sobrevive e tem maior capacidade de adaptação, estabelecendo-se assim um ciclo contínuo com períodos mais ou menos longos de estabilidade. O mesmo se passa na vida económica relativamente às grandes e pequenas empresas envolvidas no sistema político-económico global. A evolução da humanidade assume um papel fundamental como resultado da evolução ecológica e económica a nível mundial.

É desta forma que surge uma nova área da ciência – a econofísica que pretende acima de tudo explicar a razão de ser de determinados fenómenos económico-financeiros, por meio de uma análise e modelação típicas do mundo da física. Um item que tem assumido uma grande relevância e tem sido alvo da aplicação de fractais e outros modelos da física estatística é a descoberta de que os mercados bolsistas não são

eficientes, o que desde logo põe em causa o pressuposto da distribuição normal (Gauss) e da independência das taxas de rendibilidade dos títulos (Ausloos, 1998).

A aplicação de algoritmos matemáticos e físicos aplicados ao mundo das finanças remonta ao ano 1900, onde Louis Bachelier, na sua tese de doutoramento, testa a hipótese de que os preços das acções flutuam de forma perfeitamente aleatória (“Random Walk”) (Bouchaud et al, 1999). Este modelo assume um tão elevado grau de simplicidade que não consegue descrever as principais características das flutuações dos preços, nomeadamente os “crashes”. Isto porque Bachelier assumiu que estas flutuações seguiam uma distribuição normal constante ao longo dos tempos, invalidando o estudo concreto de “crashes”, pois segundo aquela distribuição, a probabilidade de um acontecimento extremo é quase nula. Denota-se então uma procura crescente de modelos mais adequados à previsão de acontecimentos extremos e medição do risco.

Como já foi salientado, os mercados bolsistas são dotados de uma elevadíssimo grau de complexidade, pelo simples facto de serem sistemas abertos, onde inúmeros subsistemas actuam e interactuam de forma não linear e dinâmica, cuja análise constitui um atractivo para os físicos que utilizam métodos de análise e modelação diferentes dos métodos utilizados pelos economistas e económicos.

É possível estabelecer uma estreita ligação entre a ocorrência de “crashes” financeiros e pontos críticos da física estatística, onde a resposta de um sistema físico face a uma perturbação externa torna-se infinita, dado todos os subsistemas responderem cooperativamente (Bouchaud et al, 1999).

Exemplos clássicos incluem o gás líquido no ponto crítico e o ponto Curie de magnetismo (temperatura à qual os materiais magnéticos se tornam paramagnéticos). Similarmente, durante os “crashes”, uma grande proporção de investidores decidem simultaneamente vender as suas acções, contribuindo ainda mais para a queda. Segundo muitos cientistas este período é denominado de “log-periodic corrections”. Este tipo de equação é vulgarmente utilizada na física para descrever fracturas nos materiais, em que o seu significado se resume ao facto de que as oscilações num sistema ocorrem com intervalos de tempo cada vez menores, até se acumularem num único período chamado de período crítico (Dacorogna, 1999). A aplicação desta teoria ao mercado de acções visa a previsão de “crashes” (Bouchaud et al, 1999).

Um outro exemplo, é a similaridade que existe entre turbulência e os mercados bolsistas. A um nível qualitativo pode-se injectar energia na turbulência a uma grande escala, observando-se que a reacção é apresentada em transferências de energia em

escalas sucessivamente menores. Nestes mercados, a informação também pode ser “injectada” no sistema que é o mercado, numa escala bastante grande, sendo a reacção a essa informação transmitida em escalas muito menores (ao nível dos investidores individuais, por exemplo) (Mantegna et al, 2000).

De acordo com a moção de Brownian, (Bouchaud et al, 1999) (Ausloos, 1998), um grande número de partículas interactua com um número reduzido de moléculas, que podem ser discriminadas em termos de equações deterministas. Langevin mostrou que a influência das moléculas pode ser substituída por uma força aleatória que flutua com o tempo e amplitude relativa da temperatura. Da mesma forma, este princípio pode ser aplicado para modelar o comportamento individual de cada agente no mercado bolsista, sendo posta em causa a “sagrada” racionalidade exigida nos modelos económico-financeiros e que constitui a base de investigação desta área. Por este motivo, são muitos os economistas que estão, de certa forma, relutantes a aceitar uma teoria que contraria tais princípios (Bouchaud et al, 1999).

De entre os vários pontos de interesse dos mercados financeiros, as taxas de juro e os mercados de derivados são também alvos de estudo da física. Como exemplo pode referir-se o modelo de Black-Scholes de avaliação de acções, desenvolvido numa parceria entre a física e a economia (Bouchaud et al, 1999), pressupondo a utilização da distribuição de probabilidades normal, o que constitui uma limitação do modelo (James, 1999).

Existem ainda outras áreas de aplicação mútua entre a física e as finanças/economia, mais precisamente através da simulação de Monte Carlo, da teoria da matriz aleatória que tem sido utilizada pela física em matérias como a física nuclear, mas que também é utilizada para otimizar carteiras de investimentos financeiros.

M. Dacorogna (Dacorogna , 1999) cita no seu trabalho o artigo pioneiro escrito em 1963 por Majorana onde eram descritas as principais analogias entre as leis da física e as ciências sociais, a partir de então o trabalho dedicado a esta área intensificou-se bastante, resultando numa investigação pertinente sobre determinados assuntos da vida económica e financeira.

Luís Amaral analisou o comportamento de cerca de 40 milhões de rendimentos de acções da Bolsa de Nova Iorque, comparando as flutuações existentes com a curva de Gauss. Os resultados confirmaram que os activos financeiros têm um risco muito mais elevado do que aquele que é fornecido pela dita curva, concluindo que a variância

não é a melhor medida para o risco (Dacorogna, 1999). Aos mesmos resultados chegou Casper de Vries em Itália.

Rosario Montegna demonstrou que a relação entre os índices de mercado de diversos países é estável durante largos períodos de tempo, indicando um forte correlação entre eles (Dacorogna, 1999).

Eugene Stanley em 1996 explicou como a física estatística poderia auxiliar a teoria financeira, concluindo que os mercados bolsistas não podem ser caracterizados pelo “random walk” (Dacorogna, 1999).

Doyne Farmer, após vários anos de investigação sobre Trading Systems e mercados bolsistas, desenvolveu um modelo para este mercado inspirado nos modelos evolucionários da ecologia, onde o preço dos activos é determinado pela oferta e pela procura, analisando de seguida a evolução das diferentes estratégias resultantes destas regras. Este modelo demonstra que a volatilidade das cotações, tal como numa explosão, assume grandes oscilações que caracterizam o mercado.

Wolfrang Breymann em 1996 distendeu o modelo de informação em cascata para o estudo de mercados dinâmicos, reproduzindo assim a volatilidade do mercado de acções através de períodos de tempo. Este autor assume que os acontecimentos podem ocorrer em diferentes dimensões, representadas pelo comportamento dos investidores, uma vez que os modelos melhor sucedidos são aqueles que têm em conta a atitude do investidor face ao risco (Dacorogna, 1999) e (James, 1999).

Robert Fernholz sugeriu a aplicação da entropia como medida de diversificação nos mercados bolsistas de acções, demonstrando que esta diversificação não é um processo espontâneo, motivado em grande parte pela distribuição de dividendos (Fernholz, 1999).

Philippatos e Wilson (Philippatos et al, 1972) estudaram a entropia como medida de incerteza na selecção de carteiras em comparação com o modelo da média-variância. Neste trabalho, a média-entropia é comparada com os métodos tradicionais de selecção de carteiras, a partir de uma amostra aleatória das cotações mensais de 50 títulos durante 14 anos.

O conceito de entropia é aqui analisado assim como a sua aplicação aos mercados de acções como medida de incerteza.

### 2.3.2 - Conceito de entropia e sua origem

O conceito de entropia surge em 1865, introduzido por Clausius, como caracterização da Segunda Lei da Termodinâmica: “*A energia do universo é constante e a sua entropia está a aumentar continuamente.*”

Segundo a Primeira Lei da Termodinâmica, não há destruição da energia global, há sim, de acordo com a Segunda Lei, uma diminuição do nível da sua qualidade, logo uma diminuição daquela que é disponível ou utilizável. Segundo Peixoto (Peixoto, 1984), há uma dissipação e degradação de energia o que é equivalente a um aumento de entropia.

Uma forma de conceber a entropia é em termos do número de microestados (configurações possíveis de um sistema), numa determinada situação (Georgescu-Roegen, 1971). A desordem surge porque não se consegue saber qual o microestado em que o sistema se encontra no instante da observação, por isso, a entropia é um índice de desordem molecular (Peixoto, 1984).

Como propriedade da matéria que mede o grau de desorganização interna a nível molecular, a entropia tende a aumentar continuamente, até atingir um valor máximo num sistema isolado.

Em termos quantitativos a entropia pode ser representada da seguinte forma:

$$\Delta H = \frac{\Delta Q}{T} \Leftrightarrow T = \frac{\Delta E}{\Delta H} \quad (2.34)$$

Onde:

$\Delta H$  = Variação da entropia;

$\Delta Q$  = Calor fornecido a um sistema;

T = Temperatura do sistema;

$\Delta E$  = Variação da energia.

Neste sentido, a temperatura absoluta é expressa pela quantidade de energia que se deve fornecer a um sistema para que a sua entropia aumente uma unidade, logo, o aumento de entropia de um sistema acompanha o aumento de energia a ele fornecido.

No “Zero Absoluto”, ou seja, no estado em que existe disposição perfeita, não há incerteza quanto às posições das moléculas, logo a entropia é nula - Terceira Lei da Termodinâmica (Peixoto, 1984).

Uma das propriedades da entropia é a aditividade, dado que a entropia de um sistema composto é igual à soma das entropias dos seus subsistemas (Georgescu-Roegen, 1971). Outra propriedade importante, prende-se ao facto de que numa sucessão de estados dum sistema, a entropia aumenta continuamente:

$$1 \rightarrow 2$$

$$H1 < H2$$

Os processos geradores de entropia são por natureza irreversíveis, dado que apenas há uma ordem natural de aumento da entropia na sucessão de estados de um sistema. Se não se verificar um aumento da entropia, mas sim uma invariância, teoricamente, pode-se considerar o processo reversível. Como exemplo deste tipo de processo pode apontar-se um processo quase estático.

- a)  $\Delta H > 0$  Processo irreversível
- b)  $\Delta H = 0$  Processo reversível
- c)  $\Delta H < 0$  Processo impossível

Se se detectar uma diminuição da entropia de um estado para outro, significa que apenas se está a considerar uma operação parcial de um determinado processo e não o processo global, nem o sistema global e sua vizinhança.

Segundo Peixoto (Peixoto, 1984), as transformações físicas ou químicas evoluem de forma natural de estados de maior organização para outros de menor organização, a não ser que se contrarie o “processo natural” com dispêndio de energia.

É o que acontece nas organizações ao actuarem como sistemas fechados, verificando-se um aumento da entropia para níveis máximos, só abrandado, ou até recuando com a injeção de recursos, sendo de salientar a informação como o principal recurso (energia vital) para combater a entropia numa qualquer organização que não seja um sistema isolado. Por este motivo se prende a cada vez maior importância dos sistemas de informação nas organizações, exigindo maiores preocupações com o

sistema de informação orgânico, genético e funcional como forma de possibilitar a minimização da entropia.

“ Todo o sistema entregue a si mesmo evolui para um estado de maior probabilidade” (Peixoto, 1984).

As configurações de maior desordem são também as de maior probabilidade, uma vez que em qualquer sistema a entropia tem tendência a aumentar até atingir um valor máximo (Georgescu-Roegen, 1971). Neste sentido o conceito de probabilidade é perfeitamente aceite, podendo a entropia ser definida em termos de probabilidade, pois o aumento de entropia que ocorre durante um processo irreversível pode associar-se à transição de um estado menos provável para um estado de maior probabilidade.

Esta definição implica que quanto menos provável for uma dada distribuição de moléculas ou de átomos num sistema, menor será a entropia desse mesmo sistema. Quanto maior for a desorganização maior será a entropia.

À luz da Segunda Lei da Termodinâmica, ao se considerarem os processos físicos, químicos e biológicos, verifica-se que a energia livre, dos processos naturais tende a diminuir e a entropia a aumentar. O Universo tende assim para um estado de cada vez maior desorganização.

Como já foi referido, a entropia é uma medida de desordem microscópica de um sistema. Segundo Feynman (Peixoto, 1984), a desordem, a incerteza, ou a entropia do estado de um sistema avaliam-se pelo número de arranjos internos com que as suas moléculas se distribuem, mantendo o sistema o mesmo aspecto macroscópico.

### **1º caso: Conjunto microcanónico**

Se se considerar  $\Omega = \Omega (E, V, N)$  o número de arranjos internos (valor extremamente elevado), onde a energia ( $E$ ), o volume ( $V$ ) e o n.º de moléculas ( $N$ ) são constantes estar-se-á perante um Conjunto Microcanónico em que a medida da desordem do sistema é calculada através da utilização de logaritmos (Reis, 1996):



Figura 2.7 - Conjunto microcanónico

$$H = K \text{ Log } \Omega \quad (2.35)$$

H – Entropia

K – Constante de Boltzman =  $1,372 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

Propriedades adjacentes:

1. É aditiva:  $\Omega_t = \Omega_a * \Omega_b$ , logo

$$(K \text{ Log } \Omega_a + K \text{ Log } \Omega_b) = K \text{ Log } \Omega_t = K \text{ Log } (\Omega_a \Omega_b) \quad (2.36)$$

2. Aumenta continuamente até atingir o equilíbrio termodinâmico, isto é a máxima entropia.

### 2º caso: Conjunto canónico

Neste caso está-se perante um sistema com energia variável, cuja temperatura é mantida constante por contacto com um grande sistema (S) (Reis, 1996).

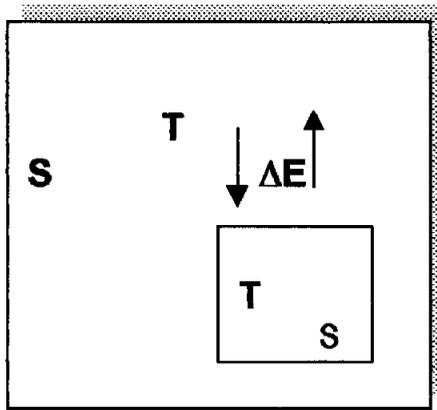


Figura 2.8 - Conjunto canónico

Neste caso deve-se recorrer ao cálculo das probabilidades dada a incerteza referente à energia. A probabilidade de encontrar um sistema mais pequeno com uma determinada energia  $E_r$ , será dada por :

$$Pr = \frac{\Omega_r}{\sum_r \Omega_r} \quad (2.37)$$

Onde:

$\Omega_r$  - Número de microestados do sistema pequeno correspondentes ao estado em que se tem energia  $E_r$ .

Aplicando na fórmula da entropia (2.35), obtém-se:

$$H(E_r) = K \text{Log } \Omega = K \text{Log} \left( \sum_r \Omega_r \cdot P_r \right); \text{ como } \sum_r \Omega_r \text{ é constante:}$$

$$H(E_r) = K \text{Log } P_r + C \quad (2.38)$$

Se o pequeno sistema percorrer um conjunto de  $N$  valores de  $\varepsilon_i$  a sua entropia média será:

$$\bar{H} = -K \left( \sum_{i=1}^N p_i \text{Log } p_i \right) \quad (2.39)$$

Esta equação relaciona a entropia de um sistema global, com a probabilidade de encontrar um sistema nele inserido com energia  $E_r$ .

### 3º caso: Grande conjunto canónico

Neste caso está-se perante um sistema onde a temperatura (T) é constante, mas que pode trocar partículas (N) com um grande sistema, sendo a energia também variável (Reis, 1996).

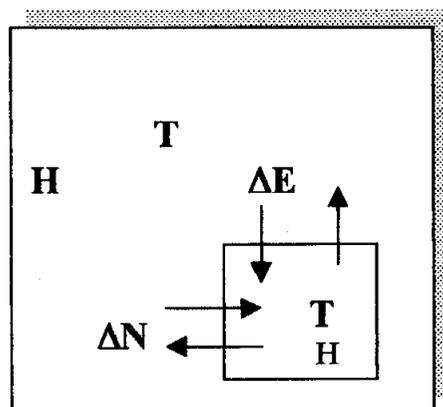


Figura 2.9 - Grande conjunto canónico

A entropia do sistema global será dada pela expressão:

$$H = H + H = K \text{ Log } \Omega \quad (2.40)$$

Onde:

H – Entropia do grande sistema

H – Entropia do pequeno sistema

A probabilidade de encontrar um sistema no estado  $(E_r; N_r)$ , será calculada da seguinte forma:

$$P_{ij} = \frac{\Omega_{ij}(E_i, N_j)}{\sum_r \Omega_{ij}} \quad (2.41)$$

Onde:

$\Omega_{ij}$  - Número de configurações possíveis com energia  $E_i$  e partículas  $N_j$ .

$$\text{Logo: } H = k \text{ Log } P_{ij} + k \text{ Log } \left( \sum_r \Omega_{ij} \right) \quad (2.42)$$

É possível estabelecer algumas similaridades entre o grande conjunto canónico e a gestão de carteiras. Se se assumir que a Bolsa de Valores é o grande sistema, que inclui em si um pequeno sistema, que será a carteira de acções seleccionada por um

determinado investidor, denotam-se com facilidade trocas de “partículas” (ou seja, acções) entre os dois sistemas variando o estado do sistema mais pequeno consoante o estado em que se encontra o sistema maior. Numa tentativa de melhor descrever o mercado bolsista de acções, poderá pressupor-se que estes dois sistemas fazem parte de um outro (muito maior) que será Portugal cuja envolvente económica, política e social tem capacidade para influenciar os sistemas em si inseridos.

No actual contexto mundial, onde a globalização é palavra de ordem, seria imprudente não considerar que os sistemas atrás enunciadas fariam parte de um sistema muito maior e complexo, o mundo.

### ***2.3.3 - Entropia e teoria da informação***

Informação é um conceito extremamente ambíguo, sendo normal a ocorrência de discussões sobre o seu verdadeiro significado e forma de tratamento. Informação pode ser mensagem, escolha, selecção, incerteza..., de acordo com o contexto em que é analisada, chegando a ser confundida com conhecimento.

Neste trabalho de investigação a informação é encarada como tudo aquilo que permite a redução da incerteza, num contexto mais específico que é a selecção e gestão de carteiras considera-se que o investidor está bem informado se conhecer da melhor forma possível o mercado bolsista e os títulos que o compõem, como forma de definição concreta do rendimento esperado e especialmente da incerteza inerente a um determinado investimento.

De acordo com Koso Mayumi (Mayumi, 1997), as similaridades entre entropia e informação são evidentes, pois na realidade não se pode criar, transmitir ou receber informação sem despende energia, e tal como a energia, a informação está sujeita a deterioração, isto é, a aumentos de entropia, principalmente aquando da sua transmissão, o que está na origem de, muitas vezes, a mensagem recebida pelo receptor não corresponder àquela que foi enviada pelo emissor, originando possíveis confusões.

De entre as várias perspectivas para o estudo da informação, a matemática protagonizada por von Neumann, Wiener e Shannon originou o aparecimento da teoria da informação e teoria da decisão ou teoria matemática da decisão, onde se verifica uma

formalização analítica da anatomia da decisão e consequente racionalização do processo decisório (Oliveira, 1999).

A teoria da informação surgiu em 1948 a partir dos clássicos artigos de Claude E. Shannon, sobre os resultados básicos da capacidade de memória das fontes e canais da comunicação, introduzindo pela primeira vez a modelação da comunicação por sistemas (Shannon, 1948). Actualmente a teoria da informação pode ser vista como um ramo da teoria da probabilidade, que tem dois grandes objectivos (Gray, 1990): o desenvolvimento dos limites técnicos fundamentais na prossecução de uma melhor performance referente à comunicação entre a fonte de uma dada informação, sobre um canal de comunicações através de projectos codificados às classes implicadas; e o desenvolvimento de projectos de código que proporcionem um nível de performance cada vez melhor, comparativamente à performance óptima dada pela teoria.

Shannon (Shannon, 1948) introduz a entropia como medida de informação, medida esta adoptada da termodinâmica por Hartley em 1928 como medida da informação num determinado sinal aleatório. Este autor (Shannon, 1948) define entropia de um processo como o total de informação nele contido. De acordo com Alderson (Alderson, 1995), no contexto da teoria da informação a entropia é entendida como medida do total do valor da informação contida numa mensagem, baseada no logaritmo do valor de possíveis mensagens equivalentes.

Shannon não faz distinção entre a forma de cálculo do número de mensagens transmitidas e a capacidade do canal de comunicação, contudo certos autores, como Georgescu-Roegen (Georgescu-Roegen, 1971) e Kozo Mayumi (Mayumi, 1997) consideram essencial que se estabeleça a diferença entre elas. Como forma de argumento, os autores consideram que se um canal de comunicação tiver capacidade para transmitir  $n$  sinais, correspondendo a  $M$  mensagens, pode-se afirmar que  $M$  pode ser codificada de  $n^N$  sequências ou combinações diferentes com a mesma duração, sendo  $N$  o número de sinais de cada mensagem em si. De acordo com Hartley, a informação será medida pelo logaritmo do número de sequências de símbolos:

Capacidade de transmissão

$$\begin{aligned} \text{do canal de comunicação} &= \text{Log}_2 n^N = & (2.43) \\ &= N \text{Log}_2 n \quad (\text{bits}) \end{aligned}$$

Como a entropia surge como medida de incerteza, dispersão e desorganização, a informação aparece associada a uma probabilidade, de tal forma que quanto menor for a probabilidade de um determinado acontecimento maior tenderá a ser a sua entropia.

$$H = - \sum p_i \log_2 p_i \quad (\text{em bits})$$

Quanto menor for  $p_i$ , maior será (em valor absoluto)  $\log_2 p_i$ ,

logo maior será a tendência para aumentar  $H$ .

Na análise de vários acontecimentos em simultâneo, a entropia tenderá a atingir o ponto máximo quando todos os resultados possíveis forem equiprováveis, significando que o nível de informação disponível é diminuto (demonstrado mais adiante). Neste contexto a informação adquire um valor muito elevado, pois se uma determinada situação assume elevados níveis de entropia, a necessidade de informação, como forma de a minimizar ou seja como negentropia, é bastante elevada, aumentando conseqüentemente o seu valor. À medida que a entropia diminui a injeção de informação deixa de ser tão importante, diminuindo pois o seu valor e a sua procura. Por este motivo, muitos autores consideram a entropia como uma medida de informação, pois o valor dado por aquela medida indica o verdadeiro valor da informação para solucionar a situação em causa.

Em termos de teoria da utilidade, verifica-se que neste contexto, tal como a utilidade da maioria dos bens, a informação obedece à teoria da utilidade marginal decrescente. É também visível que o seu valor está condicionado pelas leis da oferta e da procura. Se a entropia aumenta a procura de informação tende a aumentar como forma de superar tais níveis de incerteza, contudo, elevados valores de entropia dão a entender que existe pouca informação disponível, isto é, a oferta é diminuta, logo o valor da informação assume valores bastante elevados. À medida que a entropia diminui de valor, a procura de informação diminui também, o que faz com que o seu valor tenda a baixar.

Outra medida importante introduzida por Shannon (Shannon, 1948) foi a “mutual information”, que é a medida de informação contida num processo, sobre um outro processo. Enquanto a entropia é suficiente para estudar a reprodução de um único processo através de um ambiente com ruído, quando existe mais do que um processo aleatório a “mutual information” surge como solução (Gray, 1990). Por exemplo, se se

tiver um processo que represente a fonte da informação, outro represente o output e um último que será o ruído que provoca corrosões na fonte de código, a “mutual information” ou informação mútua, será o método mais apropriado para medir a informação global, adjacente a estes processos. Neste caso as observações são feitas num processo que permita tomar decisões sobre outro processo, através de um encadeamento lógico.

Em 1968, Kullback desenvolve a denominação da entropia como discriminação. Esta forma de medida da informação é mais conhecida como entropia relativa ou entropia transversal, sendo melhor interpretada como medida de similaridade entre distribuições de probabilidade do que como medida de informação entre variáveis aleatórias (Kullback, 1968). Muitos resultados obtidos pela “mutual information” e pela entropia, podem ser vistos como casos especiais de resultados da entropia relativa.

Janzura e Koski (Janzura et al, 1996), analisam o princípio da entropia mínima na estimação do erro para variáveis discretas aleatórias utilizando para tal testes de hipóteses para a entropia mínima baseados na teoria Bayseana. Neste sentido, Fabian (Fabian, 1997) demonstra que o quadrado médio de uma dada função de variáveis qualitativas pode ser interpretada como a informação associada a uma variável contínua aleatória.

Relativamente à teoria de decisão, a entropia da informação é vista como um índice de poder (Kuroda, 1993), que mede a distribuição do poder entre os decisores, constituindo um elemento distintivo do nível hierárquico a que pertencem.

Numa vertente mais sociológica, Kuroda (Kuroda, 1993), verificou que o valor da entropia numa árvore de decisão está intimamente ligado a um índice de poder patente na organização em causa. A entropia surge, assim, como um índice de poder, através da análise de processo de tomada de decisão onde determinados agentes detêm poder para influenciar todo o processo de tomada de decisão de acordo com a sua posição hierárquica, tal como é demonstrado na figura seguinte (figura 2.10).



Figura 2.10 - Níveis de gestão de Anthony versus níveis de informação disponíveis e entropia subjacentes.

Uma árvore de decisão com múltiplos agentes pode ser considerada como um sistema cumulativo da informação sequencial, onde cada agente toma a sua decisão de acordo com as alternativas preferidas pelos níveis anteriores. É com base neste pressuposto que Kuroda concluiu no seu estudo que a entropia tende a ter valores mais elevados no início da árvore de decisão, dada a panóplia de alternativas que existem (Kuroda, 1993), constituindo por si só, elemento de desordem e incerteza na organização (Chang et al, 1998).

À medida que se avança na árvore de decisão, a entropia tende a diminuir atingindo o valor mínimo possível, ou seja, quando é tomada a última decisão passa a ser perfeitamente conhecido todo o estado, logo a entropia desaparece e o seu valor é nulo. Esta teoria é explicada pelo simples facto de que o decisor ao tomar uma decisão sobre uma das alternativas expressas na árvore de decisão, está ao mesmo tempo a fornecer-lhe “negentropia”, i.e., está a fornecer-lhe informação (Slevin, 1997).

Em 1998 Chang, Wu e Heh desenvolvem esta teoria com o objectivo de calcular a variação da entropia numa árvore de decisão. No seu trabalho, citam Shannon (1948) e Quilan (1986) a fim de realçar a importância da selecção do atributo mais adequado na construção de uma árvore de decisão. Baseados na teoria da informação, procederam a uma cuidada selecção do atributo através da análise da informação “escondida” por detrás dos dados, ou seja, a entropia, com o auxílio do método de aprendizagem ID3. Utgoff em 1995 (Chang et al, 1998) propõe um algoritmo de aprendizagem incremental baseado no ID3: o ID5R, que possibilita a representação de árvores de decisão

dinâmicas, recalcula os ganhos referentes a todos os nós classificando os caminhos que contribuam para uma modificação ou não.

Supondo um determinado conjunto de dados  $N$ , com  $h$  classes  $C\lambda = 1, \dots, h$  a probabilidade de cada classe ser distinguida é:

$$Ph = \frac{\text{freq}(C\lambda, N)}{N} \quad (2.44)$$

De acordo com a teoria de informação, a informação contida em  $C\lambda$  será dada por:  $-\text{Log}_2 \left[ \frac{\text{freq}(C\lambda, N)}{N} \right]$ , sendo a informação esperada ou entropia do grupo  $S$  será dada pela expressão:

$$H(N) = - \sum_{\lambda=1}^K \frac{\text{freq}(C\lambda, N)}{N} \cdot \log_2 \left[ \frac{\text{freq}(C\lambda, N)}{N} \right] \quad (2.45)$$

Quando  $N$  é classificado por um atributo específico  $A$ , a informação esperada do grupo  $S$  será:

$$H_A(N) = \sum_{i=1}^m \frac{N_i}{N} \cdot H(N_i) \quad (2.46)$$

É neste sentido, que se pode calcular o ganho de informação referente a esta classificação, através da diferença entre a entropia inicial do grupo  $S$  e a obtida após introdução do atributo  $A$ :

$$GI(A) = H(N) - H_A(N) \quad (2.47)$$

$GI(A)$  = Ganho de informação com o atributo  $A$

Este algoritmo (mais conhecido por algoritmo ID3), selecciona os atributos que promovem maiores ganhos de informação (Chang et al, 1998), através da equação (2.46). O conjunto é dividido em subconjuntos, sucessivamente até encontrar uma solução óptima e possível, onde a entropia é mínima. Por exemplo se se assumir que  $A_N$  é o atributo que proporciona uma maximização da informação e  $A_C$  é um atributo concorrente, e se  $H_0$  for a entropia do conjunto inicial,  $H_N$  e  $H_C$  a entropia referente às árvores de decisão classificadas por  $A_N$  e por  $A_C$  respectivamente, pode-se chegar à seguinte conclusão:

$$GI(A_N) \geq GI(A_C) \Leftrightarrow H_0 - H_N \geq H_0 - H_C \Leftrightarrow H_N \leq H_C \quad (2.48)$$

Ou seja, o ganho em informação é inversamente proporcional à entropia.

Considerando que numa árvore de decisão o conjunto de dados N tem duas possibilidades de resultado:  $N^+$  e  $N^-$ , a entropia do respectivo nó de decisão pode ser calculada da seguinte forma:

$$H(p, n) = -\frac{p}{p+n} \log_2 \frac{p}{p+n} - \frac{n}{p+n} \log_2 \frac{n}{p+n} \quad (2.49)$$

Onde:

p – Número de possibilidades de resultados positivos;

n- - Número de possibilidades de resultados negativos;

$\frac{p}{p+n}$  - Probabilidade de ocorrência de  $N^+$ ; e,

$\frac{n}{p+n}$  - Probabilidade de ocorrência de  $N^-$ .

A injeção de informação provoca variações ao nível da entropia relativamente ao processo de aprendizagem inerente a uma árvore de decisão.

### ***2.3.4 - Entropia e teoria financeira***

A afectação eficiente dos recursos é definida em termos do total de informação fornecida, transmitida e recebida. A partir do momento que a selecção de carteiras e a afectação de recursos ocorrem em ambientes cada vez mais competitivos e voláteis, como são as Bolsas de Valores, a adopção da entropia como medida de dispersão global e incerteza na construção e análise de carteiras torna-se ferramenta de crescente importância.

A entropia é cada vez mais utilizada na teoria financeira como medida de incerteza e avaliação de títulos, carteiras e mercado, dado que ultrapassa as principais limitações inerentes aos modelos vulgarmente utilizados que pressupõem a utilização da distribuição normal de probabilidade.

A entropia é uma medida de dispersão utilizada no processo dinâmico da estatística e da teoria da informação, sendo a sua adopção, cada vez mais frequente por parte da teoria financeira (Philippatos et al, 1972). Por exemplo, Finkelstein e Friedberg em 1967 (Finkelstein et al, 1967), assim como Horowitz e Horowitz em 1968 (Horowitz et al, 1968) utilizam a entropia como medida da concentração industrial e competitividade do mercado (Philippatos et al, 1972).

Fama (Fama, 1965) e Philippatos (Philippatos, 1973) munem-se de medidas específicas da teoria da informação para testar a eficiência da Bolsa de Nova Iorque (N.Y.S.E.).

Para além destes estudos existem também trabalhos direccionados para a economia e processo económico, onde a entropia é parte integrante da análise realizada (Georgescu-Roegen, 1971). Segundo este autor o processo económico é um processo entrópico, pois não cria nem consome matéria ou energia, apenas transforma baixa entropia em alta entropia. O processo físico de transformação do meio ambiente não é mais que um processo entrópico. O processo económico diferencia-se do mero processo físico por dois motivos: (i) o processo entrópico sobre o ambiente é automático, ou seja, ocorre naturalmente, enquanto que o processo económico depende da actividade humana sujeita a determinadas regras que variam no espaço e no tempo; (ii) o verdadeiro output do processo económico não é o produto físico em si, mas sim o aproveitamento da vida, o que não está patente no simples processo entrópico ou físico.

Georgescu-Roegen (Georgescu-Roegen, 1971) afirma ainda que é a termodinâmica que explica o porquê de os bens úteis terem valor económico (o que não deve ser confundido com preço). Como a vida biológica se alimenta de baixa entropia, torna-se possível estabelecer uma conexão entre baixa entropia e valor económico, dado que o principal objectivo da actividade económica é a preservação da espécie humana através da satisfação das necessidades básicas do Homem. Baixa entropia é condição necessária para que um bem tenha valor económico, contudo esta condição não é suficiente. A relação entre valor económico e baixa entropia é semelhante à relação que existe entre preço e valor, ou seja, nada pode ter preço se não tiver valor. Um dos primeiros autores a argumentar que o dinheiro constitui a equivalência da baixa entropia foi o físico alemão G. Helm em 1887, sendo esta ideia desenvolvida por L. Winiarski em 1900 (Georgescu-Roegen, 1971).

No fundo o processo económico não é mais que a transformação contínua e irreversível de baixa entropia em alta entropia, o que se revela cada vez mais em elevados níveis de poluição.

Arnold Zellner (Zellner, 1996) cita no seu trabalho a investigação realizada por Good e Savage, cuja minimização da entropia relativa é aplicada à definição da função utilidade do investidor averso ao risco conduzindo à maximização da utilidade do indivíduo, pois um maior grau de informação disponível possibilita um melhor processo de tomada de decisão, que com certeza maximiza o seu bem-estar, a sua utilidade.

Robert Fernholz, (Fernholz, 1999) analisa a entropia como medida de diversificação nos mercados financeiros. Segundo o autor a diversificação existente na aplicação do capital é uma das principais características do mercado de acções, o que é demonstrado por Harry Markowitz e por William Sharpe na teoria das carteiras. Fernholz considera que a diversificação não é um fenómeno espontâneo nos mercados de acções, sendo necessário um mecanismo que o provoque (Fernholz, 1999). Deste modo é introduzida a entropia como medida de diversificação do mercado, cujos pressupostos seguem aqueles designados no modelo de equilíbrio de mercado CAPM de William Sharpe. É demonstrado que sob estes pressupostos, o capital tem de ser canalizado das grandes empresas para as pequenas empresas, de modo a que exista um nível de diversificação aceitável, apesar de existirem diferentes taxas de rendibilidade para as diferentes acções que compõem o mercado. A entropia surge como uma medida da uniformidade de uma distribuição, onde a partir de um determinado valor pré-fixo, um mercado é caracterizado por um elevado nível de diversificação.

Philippatos e Wilson (Philippatos et al, 1972) estudam a entropia como medida de incerteza na selecção e avaliação de carteiras em comparação com o modelo da média-variância e com o modelo diagonal de Sharpe. Neste trabalho, a média-entropia é comparada com os métodos tradicionais de selecção e gestão de carteiras, a partir de uma amostra aleatória das cotações mensais de 50 títulos durante 14 anos. Os resultados obtidos com o modelo da média-entropia são mais consistentes que os resultados da média-variância e do modelo diagonal de Sharpe. Os autores defendem ainda a necessidade de mais investigação nesta área de estudo com vista à simplificação do algoritmo média-entropia, de forma a que a sua utilização possa ser generalizada e implementada nas respectivas disciplinas e para que a aplicação da entropia a variáveis qualitativas se desenvolva.

Segundo Philippatos e Wilson (Philippatos et al, 1972), a entropia apresenta diversas vantagens na selecção de carteiras, relativamente à média-variância. Das principais vantagens são de enumerar o facto de : (i) a entropia ser independente da distribuição de probabilidade seguida pelos dados empíricos, evitando-se erros decorrentes da tentativa de adequação da distribuição empírica a uma determinada distribuição de probabilidade teórica, logo é uma boa medida para medir a incerteza e assim avaliar um determinado título ou mercado; (ii) a entropia poder ser calculada para dados qualitativos e quantitativos. O comportamento dos investidores são envolvidos por elementos quantitativos e julgamentos qualitativos, muitas vezes com uma correlação difícil de calcular entre o total de informação obtida e os actos praticados; (iii) os testes estatísticos utilizados na teoria da informação podem ser utilizados livremente em qualquer distribuição desde que sejam extensões do teste de independência qui-quadrado ( $\chi^2$ ), o que é validado pelo facto de a entropia ser aditiva e teoria da informação ser exacta não utilizando aproximações. A análise é equivalente à partição da soma de quadrados na análise da variância, a transmissão de informação é feita de forma a ordenar quadros contingenciais, a análise da informação é também designada como a frequência dos dados em categorias discretas, onde não são introduzidos pressupostos de linearidade na transmissão multivariada de informação; (iv) o total de informação transmitida é aproximadamente igual ao logaritmo do número de classes discriminadas e pode ser utilizado como medida da aptidão do investidor fazer distinção entre as várias acções e carteiras a constituir. A entropia depende do número de estados potenciais numa distribuição, enquanto que a variância depende da ponderação específica de cada estado; (v) o valor da informação está relacionado com a distribuição de probabilidade a que diz respeito.

As principais desvantagens apontadas à utilização da entropia como medida de incerteza são (Philippatos et al, 1972): (i) a entropia ainda não está suficientemente integrada no estudo das disciplinas de economia, o que constitui um entrave à exploração das suas potencialidades; (ii) existe sempre um grau de enviesamento estatístico nas medidas da informação, o que tem a ver com os graus de liberdade implícitos na amostra.

Segundo White (White, 1974) a aplicação da entropia à teoria financeira não é tão linear como Philippatos e Wilson afirmam em 1972. Para este autor, a aplicação da entropia a variáveis qualitativas é inviável, uma vez que o cálculo da entropia é baseado

em probabilidades cujo valor tem de ser sustentado em variáveis mensuráveis, sob pena de se perder rigor e chegar-se a conclusões erróneas.

## **2.4 – Síntese do capítulo**

Este capítulo realiza uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos científicos nas áreas de conhecimento que foram necessárias consultar para a elaboração deste trabalho de investigação.

Inicialmente é analisado o valor da informação e o seu papel fundamental no processo de tomada de decisão mais especificamente sobre investimentos financeiros, procedendo-se à apresentação de alguns modelos e estudos que procuram a quantificação daquele valor, para melhor orientar o investidor aquando da tomada de uma decisão.

São também apresentados os principais modelos tradicionais de gestão, avaliação e selecção de carteiras, sendo descrita a importância da assunção do risco no investimento em acções no seio da teoria da utilidade esperada. São analisados os principais modelos utilizados na gestão e selecção de carteiras, mais concretamente o modelo da média-variância, o modelo diagonal de Sharpe, o modelo de equilíbrio de mercado (CAPM) e o modelo APT (Arbitrage Pricing Theory), sendo tecidas algumas críticas aos seus pressupostos que afastam da realidade os resultados por eles obtidos. São realçadas algumas limitações destes modelos, que se prendem essencialmente ao facto de a sua aplicação só ser verdadeiramente adequada quando as taxas de rendibilidade dos títulos seguem uma distribuição de probabilidade normal, o que muitas vezes está bem longe da realidade, enviesando assim quaisquer resultados que sejam obtidos, principalmente na forma como é medida a incerteza. A assunção de que a variância pode ser fielmente entendida como o risco, independentemente do tipo de distribuição de probabilidade é muito limitativa, principalmente se a distribuição de probabilidade empírica não ficar suficientemente caracterizada pelos dois primeiros momentos.

No sentido de colmatar algumas das limitações apresentadas pelos modelos tradicionais de gestão de carteiras, são apresentados os modelos de entropia e informação mútua. A aplicação destes modelos oriundos da física à teoria financeira

poderá ser explicada pelas similaridades que a economia financeira e a física têm apresentado, sendo enumerados estudos e investigações que contam com a parceria destas ciências. A entropia é uma medida oriunda da física que mede a desordem inerente a um sistema. Este conceito surge no seio da física como caracterização da Segunda Lei da Termodinâmica, sendo entendida como desordem. Mais tarde foi adoptado por várias áreas da ciência, nomeadamente pela teoria da informação e pela teoria financeira.

A forma como a entropia é adoptada pela teoria da informação, assumindo-se como a incerteza patente numa determinada distribuição de probabilidade é também utilizada no seio da teoria financeira, que encara a entropia como medida de dispersão global e de incerteza, revelando-se eficaz como medida de avaliação de activos financeiros e de mercados.

### **3 - METODOLOGIA**

Este capítulo começa por apresentar toda a fundamentação teórica onde é apoiado o trabalho de investigação realizado. A primeira secção apresenta algumas considerações gerais sobre os principais pressupostos dos modelos tradicionais de gestão e selecção de carteiras descritos e analisados no capítulo anterior. São alvo de crítica alguns dos pressupostos da eficiência de mercado (base teórica dos modelos) nomeadamente o pressuposto das taxas de rendibilidade seguirem uma distribuição de probabilidade normal e serem independentes e identicamente distribuídas. Com o objectivo de colmatar as lacunas apresentadas daqueles modelos, principalmente no que toca à forma como é medida a incerteza, é introduzida e analisada na segunda subsecção a entropia como medida de incerteza, dispersão global e caracterização do mercado de acções. A segunda secção apresenta os modelos aplicados neste trabalho de investigação. A terceira secção apresenta a validação dos modelos evidenciados na secção anterior. A última secção apresenta a síntese do capítulo.

#### **3.1 – Fundamentação teórica**

Esta secção apresenta toda a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento do presente trabalho de investigação.

##### ***3.1.1 – A hipótese de eficiência do mercado de acções***

O pressuposto da existência de um mercado eficiente, onde as taxas de rendibilidade das acções seguem uma distribuição normal, independentes e identicamente distribuídas é alvo de crítica por parte de muitos autores (Soares, 1997), (Godinho, 1999) e (Gama, 2000), denotando-se cada vez mais a necessidade de modelos mais aproximados da realidade, que tenham em conta a dinâmica e a complexidade dos mercados de acções.

A hipótese de eficiência do mercado assenta no pressuposto base de que toda a informação está disponível de igual modo para todos os investidores, onde nenhum deles tem acesso a mais informação que os restantes, estando por isso condenadas quaisquer estratégias de ganhos superiores ao normal ou especulação. Para além disso, esta teoria defende também que as cotações dos títulos reflectem toda a informação pública e privada existente, não existindo assimetrias de informação. Como a eficiência de mercado por si só não é testável, são criados testes de eficiência do mercado (Fama, 1976), que se dividem em três categorias: (i) testes de forma fraca (de que forma os rendimentos passados prevêm os rendimentos futuros?); (ii) testes de forma semi-forte (com que rapidez os títulos reflectem a informação publicada?); (iii) testes de forma forte (existe alguma informação privada na posse dos investidores que não seja reflectida nos preços de mercado?).

Os testes de eficiência de forma fraca têm por base modelos de “random walk” de distribuições de probabilidade e de independência, assumindo que o comportamento histórico do preço é o factor determinante das futuras taxas de rendibilidade. Ao verificar-se tal pressuposto, então a melhor previsão do preço futuro de um título será o próprio preço do título (Fama, 1976), o que segundo muitos autores, levanta algumas dúvidas quanto à eficácia das técnicas de análise utilizadas.

Os testes de eficiência de forma semi-forte centram-se na análise de como os preços incorporam, para além da informação histórica, a informação que é tornada pública (distribuição de dividendos, fusões e aquisições, alterações contabilísticas), pretendendo avaliar as taxas de variação de rendimento em torno de um determinado acontecimento.

Os testes de eficiência de forma forte pretendem conhecer a existência de participantes no mercado que partilhem a selecção de investimentos de modo a que as suas decisões proporcionem maiores níveis de rendibilidade que aqueles auferidos pela maioria dos investidores. Se o mercado é eficiente, os preços dos títulos reflectem toda a informação e esta situação é excluída. Caso exista assimetria de informação, então o mercado é ineficiente

### 3.1.1.1 – Distribuições de probabilidade alternativas

A distribuição seguida pelas cotações das acções é tema de investigação e discussão desde 1950, quando os matemáticos começaram a interessar-se pela modelação dos mercados financeiros.

A proposta original de Bachelier de que as cotações seguem uma distribuição normal foi várias vezes contestada e, frequentemente, substituída por outras distribuições de probabilidade de acordo com a análise e estudos efectuados às verdadeiras distribuições seguidas pelas taxas de rendibilidade das acções. O modelo de Bachelier não constituiu mais do que uma tentativa de aproximação ao real, o que suscitou o estudo e a pesquisa nesta área.

A crítica à distribuição normal surge ao se verificar que a volatilidade das taxas de rendibilidade das acções é geralmente muito superior à que seria de esperar se estas seguissem a distribuição normal, uma vez que estudos realizados àquelas taxas mostram que as respectivas distribuições exibem “caudas” muito mais espessas (“fat tails”) do que seria admitido na distribuição normal.

Fama (Fama, 1965), Mandelbrot (Mandelbrot, 1963) e Osborne (Osborne, 1964) demonstraram que as taxas de rendibilidade diárias, semanais e mensais das acções apresentavam um coeficiente de curtose superior ao previsto pela curva da normal, assim como valores de moda muito superiores aos daquela distribuição.

Vasco Soares (Soares, 1997) cita o trabalho de Badrinath e Chatterjee onde foi analisada a distribuição das taxas de rendibilidade diárias das acções continuamente listadas no N.Y.S.E., durante um período de 24 anos (1963-1986), do qual foram excluídas as empresas com mais de dez observações não registadas. Estudaram assim um total de 559 empresas, sendo estas classificadas por indústria, atendendo-se também à sua respectiva dimensão. Estes autores tiveram como resultados, para todas as empresas e grupos estudados, uma distribuição leptocúrtica, com uma moda que apresentava valores excessivos, refutando a hipótese deste comportamento ser devido a factores de dimensão ou de indústria.

Em 1992 Tucker chegou a idênticos resultados após analisar a distribuição seguida pelas taxas de rendibilidade de 200 acções e 3 índices (Standar & Poors 500, CRSP “value weighted” e o CRSP “equal weighted”) no período 1976-1985, concluindo que as distribuições apresentavam o típico aspecto leptocúrtico (Tucker, 1992).

Outros autores analisaram outros índices, a nível mundial, mais propriamente o TSE (Tokyo Stock Exchange), NYSE (New York Stock Exchange), KSE (Korea Stock Exchange), SES (Stock Exchange of Singapore), chegando à conclusão que a distribuição normal não é a aproximação mais adequada para as referidas taxas e índices, promovendo cada vez mais, a necessidade de encontrar novas distribuições cujo ajustamento fosse superior.

Esta situação faz com que sejam apresentados vários modelos alternativos, por diversos autores, verificando-se uma tendência para considerar a possibilidade de o logaritmo da taxa de rendimento da acção seguir uma distribuição normal de acordo com Brownian, ou seja, a taxa de rendimento seguir uma distribuição lognormal.

De entre os vários modelos apresentados, o mais revolucionário foi o modelo proposto por Mandelbrot, segundo o qual as cotações seguem uma distribuição simétrica de Pareto. Esta distribuição caracteriza-se por ser um processo estocástico que obedece ao teorema do limite central. A forma desta distribuição é estável, assumindo variáveis aleatórias independentes e estáveis.

Ao introduzir a hipótese de que as taxas de rendibilidade das acções seguem uma distribuição simétrica de Pareto são encontrados alguns problemas, nomeadamente no que diz respeito ao facto de esta distribuição ter variância infinita e indefinida, naturalmente qualquer amostra das taxas de rendibilidade de acções apresenta variância finita, pois estas taxas não variam infinitamente, contudo, teoricamente, a variância tende para infinito nesta distribuição, o que inviabiliza a medida do risco através deste parâmetro, dado que o seu valor é desprovido de significado (Fama et al, 1968).

Vasco Soares (Soares, 1997) enuncia no seu trabalho a investigação realizada por McCulloch, que em 1978 demonstrou que os processos que seguem uma distribuição probabilidade de Pareto não são consistentes com os processos de equilíbrio em mercados competitivos, isto é, as cotações dos títulos não reflectem um valor fundamental baseado na informação disponível, mas sim um processo dinâmico contínuo de velocidade e direcção imprevisíveis.

A distribuição simétrica de Pareto foi e é severamente criticada por muitos autores, com o argumento da violação do princípio de que o expoente característico desta distribuição se mantém constante perante agregação temporal, verificando-se que aquele expoente sofre um incremento gradual relativo à forma como são agregados os dados (quando se passa de taxas diárias para taxas semanais ou mensais), o que se traduz numa clara violação da suposta estabilidade desta distribuição. Além disso, tem-

se constatado que as verdadeiras “caudas” das distribuição das taxas de rendibilidade das acções são significativamente diferentes das “caudas” da distribuição simétrica de Pareto (Soares, 1997).

A distribuição t de Student foi também defendida por alguns autores, como sendo aquela que mais se aproximava da realidade, sendo testada por Baltberg e Gonedes às taxas de rendibilidade das 30 acções que constituíam o índice Dow Jones no período entre 1957 e 1962, concluindo que apresentava uma maior grau de ajustamento que a distribuição normal ou a distribuição simétrica de Pareto.

A família de distribuições EPD (Exponential Power Distribution) foi proposta por Hsu (Hsu, 1982), uma vez que é caracterizada por uma curtose e moda superiores aos da distribuição normal, salientando o bom ajustamento desta família de distribuições à distribuição empírica dos logaritmos das taxas de rendibilidade diárias das acções.

Nesta linha de estudo, Kon (Kon, 1984) propõe um modelo probabilístico “Compound Normal Model”, que resulta da mistura de várias funções de densidade normais, demonstrando que os seus resultados apresentam maior ajustamento que a distribuição normal, t de Student ou Pareto.

Um modelo análogo foi proposto por Merton (Merton, 1976) “Mixed Diffusion Jump Model”, onde são misturadas um número infinito de funções densidade normal, segundo um processo de probabilidade de Poisson, sendo este modelo considerado superior aos anteriormente apresentados quanto ao ajustamento à realidade.

Roman Liesenfeld e Robert Jung (Liesenfeld et al, 1997), procederam à comparação do modelo de volatilidade estocástica baseado na distribuição normal, com os modelos de outras distribuições, mais concretamente a distribuição t de Student e a GED (Generalized Error Distribution), aplicando-a ao processo de simulação da máxima verosimilhança. Os resultados obtidos com a análise das seis maiores acções existentes no mercado accionista alemão revelaram que a volatilidade estocástica não era compatível com a distribuição normal por dois motivos: (i) o típico aspecto leptocúrtico da distribuição empírica e (ii) os níveis de autocorrelação encontrados; concluindo que a distribuição GED era aquela que apresentava maior ajustamento aos dados em estudo (Liesenfeld et al, 1997).

Michael Stuzer (Stuzer, 1998) demonstra que quando as taxas de rendibilidade das acções não são normalmente distribuídas, a performance do índice é proporcional à metade do Índice de Sharpe, verificando-se que a fronteira de eficiência é dada pela

média e variância da distribuição. Segundo o autor, caso aquelas taxas não sejam normalmente distribuídas, a performance assume uma diferente formulação. A tangência da carteira deixa de ser o ótimo e o modelo CAPM deixa de poder ser utilizado com rigor. Neste sentido o autor mune-se do comportamento do investidor face ao risco para explicar a sua tese, segundo a qual se um investidor averso ao risco prefere, não apenas um maior valor esperado, mas também um menor desvio-padrão (no caso de as taxas serem normalmente distribuídas), no caso de as taxas de rentabilidade seguirem uma distribuição não normal, o investidor terá preferência por maiores valores de assimetria positiva (Stuzer, 1998).

Vasco Soares analisou a eficiência do mercado de acções portuguesas no período entre 1977-1994 tendo para tal testado (entre outras) a existência de volatilidade e estacionariedade da série das taxas de rentabilidade. Os objectivos da aplicação destes testes prenderam-se com a verificação se a distribuição empírica das taxas de rentabilidade médias do índice BTA naquele período, demonstravam o típico aspecto leptocúrtico verificado nos grandes mercados internacionais em estudos similares (Soares, 1997). A metodologia usada pelo autor compreendeu a ilustração gráfica da distribuição empírica, assim como o cálculo das estatísticas relevantes (média, moda, variância, curtose e assimetria), testando de seguida a hipótese de a série em questão ser estacionária. Caso a estacionariedade se verificasse, o autor considerou importante analisar se a referida distribuição poderia ser identificada com as distribuições normais teóricas geradas em computador, com amostras análogas à série em análise (cerca de 200 observações).

Os testes à estacionariedade proporcionaram a rejeição da hipótese de “unit root”, gerando a aceitação da estacionariedade para um nível de confiança de 99%.

Os resultados obtidos por Vasco Soares, relativos à análise das taxas de rentabilidade médias diárias por mês relativas ao índice BTA, para o período entre Março de 1977 e Abril de 1994. Demonstraram o não ajustamento da distribuição empírica à distribuição normal.

Face a tais resultados, Vasco Soares concluiu que as taxas de rentabilidade médias diárias por mês relativas ao índice BTA, para o período entre Março de 1977 e Abril de 1994 não apresentam um comportamento “random walk”, o que poderá ser indícios de dependência linear ou não-linear entre as referidas taxas.

Num contexto semelhante Paulo Gama (Gama, 2000) demonstra que não existe eficiência fraca no mercado accionista português no período entre 1989 e 1996. A

evidência empírica da não eficiência põe em causa a aplicação e eficiência do modelos tradicionais de selecção e gestão de carteiras, como é o caso do modelo da média-variância e do CAPM.

### **3.1.1.2 - Distribuição independente e idêntica das taxas de rendibilidade das acções**

O não ajustamento da distribuição normal, dada a evidente curva leptocúrtica e elevada moda, leva a supor que possivelmente as taxas de rendibilidade das acções não são independente e identicamente distribuídas.

Em 1953, Kendall afirmava que os preços das acções se comportavam como se fossem gerados por um processo aleatório similar ao produzido por uma roleta (Kendall, 1953). Desta forma os rendimentos das acções comportar-se-iam de um modo totalmente independente do passado, obedecendo a uma frequência relativamente estável no tempo. A hipótese das taxas de rendibilidade seguirem um percurso “random walk”, implica que sejam entre si independentes e identicamente distribuídas. O facto das taxas de rendibilidade não serem independentes pode significar a existência da possibilidade de gerar estratégias de investimento que produzam lucros sistematicamente, superiores aos normais valores esperados, o que poderá significar a rejeição da hipótese de eficiência do mercado.

De entre os vários testes para averiguar a hipótese de dependência das taxas de rendibilidade das acções, são de realçar: (i) o teste à eficácia das “Filter Rules” para gerar rendimentos superiores à estratégia “Buy and Hold” (política de investimento baseada em aleatoriamente seleccionar alguns títulos e mantê-los em carteira durante o mesmo período de tempo que a estratégia alternativa a testar); (ii) realização de “Run Tests”; e (iii) análise de correlação linear das taxas de rendibilidade das acções.

Em 1965, Fama testou a hipótese das taxas de rendibilidade seguirem num determinado período de tempo, um processo correlacionado, através dos “Run Tests”. Os resultados mostraram que estas correlações eram pouco significativas, considerando que o “random walk” era a melhor distribuição a seguir (Fama, 1965). Como os “Run Tests” apresentavam certas limitações no que se refere á sua aplicação, foi privilegiada a análise das autocorrelações, que Fama aplicou às taxas de rendibilidade diárias e semanais das 30 acções que compunham o índice Dow Jones entre 1958 e 1962, tendo

obtido resultados que evidenciavam uma insignificante correlação, a mesma conclusão a que haviam chegado outros autores, nomeadamente Kendall (Kendall, 1953) e Alexander (Alexander, 1961).

A evidência empírica gerada nas décadas de 50, 60 e 70 parece demonstrar que as taxas de rendibilidade das acções seguem, efectivamente uma distribuição normal de probabilidade, de forma independente e identicamente distribuídas.

Testes mais recentes vieram demonstrar a existência de correlação de curto e longo prazo nas taxas de rendibilidade das acções, de tal forma que alguns autores põem em causa que a sua distribuição seja independente e idêntica. O teste BDS, proposto nos anos 80, com o objectivo de averiguar a existência ou não de comportamento não linear das taxas de rendibilidade das acções, e posteriores estudos realizados sobre a possibilidade ou não de dependência não linear das mesmas taxas em diversos mercados accionistas mundiais, tem contribuído para confirmar a existência deste tipo de dependência.

Vasco Soares (Soares, 1997) realizou testes à existência de autocorrelação entre as taxas de rendibilidade médias diárias por mês relativas ao índice BTA, para o período entre Março de 1977 e Abril de 1994, cujos resultados evidenciaram a existência de autocorrelação positiva nas taxas diárias do índice em períodos de curto prazo, assim como a existência de dependência linear nas séries em estudo.

A fim de testar a existência de dependência não-linear o autor utilizou o teste BDS, que segue uma distribuição normal reduzida ( $N(0;1)$ ), pelo que caso a estatística apresente um valor superior a 2,04 (valor crítico para um nível de confiança de 95%), faz com que a hipótese de independência das taxas seja rejeitada. Os resultados obtidos por Vasco Soares em 1997, indicam a existência de dependência não-linear para pequenas distâncias (0,5 e 1) a partir da 5ª dimensão de inserção, denotando convergência na estrutura existente à medida que a dimensão aumenta, o que poderá ser sintoma da existência de um atractor (Soares, 1997). A existência de dependência não-linear poder ser resultado de processos determinísticos caóticos, da não estacionariedade da série (o que não se verifica nos resultados obtidos pelo autor), ou de processos estocásticos com variância condicionalmente heterocedástica.

A distribuição normal de probabilidade tem sido bastante criticada, dada a sua fraca aproximação à realidade dos mercados accionistas que é caracterizada pela existência de efeitos sazonais nas taxas de rendibilidade das acções (de realçar o “January Effect” que consiste numa elevação das taxas de rendibilidade das acções de

forma mais significativa no mês de Janeiro; o “Monday Effect” que consiste no facto das taxas de rendibilidade médias das acções serem consistentemente baixas à segunda-feira de forma estatisticamente significativa), pela possibilidade de estabelecer estratégias que permitam ganhos adicionais sistemáticos através do aproveitamento destas sazonalidades e pela possibilidade de ocorrência de “crashes” superior à probabilidade fornecida pela curva da normal.

A eficiência do mercado de acções pode, deste modo, ser contestada pelo facto de a grande maioria dos investidores não assumir um comportamento considerado “racional”, o que gera um processo típico de “feedback” provocando um comportamento não linear nas taxas de rendibilidade das acções (Soares, 1997). Na tentativa de explicar este fenómeno foram apresentadas várias hipóteses, a salientar: “Bolhas Especulativas (Irrational Bubbles), “Dependência de Longo Prazo (Long Term Memory) e “Chaos” (comportamento gerado por um sistema não linear e aparentemente aleatório).

Pedro Godinho (Godinho, 1999) prova que as taxas de rentabilidade do índice BVL do mercado accionista português no período entre 1988 e 1998 não seguem uma distribuição de probabilidade normal e não são independentes e identicamente distribuídas, concluindo que os resultados obtidos com os modelos tradicionais de gestão e selecção de carteiras não são eficientes quando aplicados ao mercado em causa.

### **3.1.1.3 - Evidência empírica da existência de caos nos mercados accionistas**

A tentativa de encontrar modelos previsionais deriva da imprevisibilidade verificada nas cotações das acções. Esta característica é o ponto de partida para a consideração de que é possível a definição das cotações através de um processo estocástico dinâmico. Existe uma tendência para confundir séries temporais imprevisíveis com processos estocásticos, o que não é correcto. A teoria do caos demonstrou que as séries temporais imprevisíveis podem surgir de sistemas não lineares determinísticos, cujos resultados, no foro da física e da biologia, aplicados à economia revelaram que a evolução temporal das cotações das acções nos mercados financeiros podem, para algumas variáveis, seguir aqueles sistemas (Mantegna et al, 2000).

Existe cada vez mais uma aceitação, no meio científico e académico, de que nos principais mercados bolsistas a nível internacional as taxas de rendibilidade das acções

evidenciam uma dependência não-linear, banindo a crença na teoria do percurso aleatório “random walk”.

A teoria do caos surge no seio da matemática, cujo âmbito de estudo é a análise do comportamento dos sistemas dinâmicos não-lineares. Estes sistemas caracterizam-se pelo facto de terem diferentes tipos de comportamentos consoante o valor dos parâmetros que regem o sistema.

Os sistemas dinâmicos caóticos são sistemas onde existe um feedback não-linear caracterizado pela sensível dependência às condições iniciais, pela existência de níveis críticos nos valores dos parâmetros de controle do sistema a partir dos quais o comportamento qualitativo daquele se altera e pelos atractores gerados que têm uma dimensão fractal.

O carácter não-linear e não periódico (caótico) do sistema com determinados valores do parâmetro de controlo, pequenos erros na observação inicial são ampliados pelo processo não linear, pelo que passados  $n$  períodos, o comportamento da série quando existe esse tipo de erro, será totalmente diferente do verificado na verdadeira série. Por esta razão, os sistemas caóticos não são bons modelos de previsão no longo prazo, mesmo quando as equações e parâmetros do sistema são conhecidos com rigor.

A natureza fractal destes sistemas deriva do processo repetitivo de “Estica” (“Stretch”) e “Dobra” (“Fold”), gerando um comportamento “Self Similar”. Segundo Peters (Peters, 1991) a existência de caos e de um atrator caótico nos mercados accionistas deve-se ao “Stretching” causado pela irracionalidade dos agentes e ao uso por parte dos investidores da análise técnica; e ao “Folding” derivado do mecanismo de correcção nas cotações devido à influência, em certos períodos, dos “Smart money investors”, investidores racionais que valorizam as acções pelo seu valor intrínseco ou fundamental, a partir de um determinado nível das cotações.

A detecção de existência de caos nos sistemas económicos passa pelo estudo da existência no sistema de “Low Dimension” (Dobrar), o “random walk” é caracterizado por ter dimensão infinita e pela detecção da existência de “sensível dependência das condições iniciais” (Esticar). A hipótese de existência de caos nos mercados bolsistas deriva do facto de, em princípio, existir dependência não-linear nas taxas de rendibilidade das acções, assim como dependência de longo prazo nas mesmas (sensível dependência às condições iniciais) (Soares, 1997).

Vários autores estudaram o comportamento destas taxas e índices de diversas bolsas internacionais, verificando que a maioria apresentava características peculiares dos sistemas caóticos, identificados por elevados níveis de dimensão de correlação.

Chatterjee e Yilmaz (Chatterjee et al, 1992) criticam a teoria do caos na medida em que consideram que as condições necessárias para a existência de caos não são condições suficientes, não permitindo tirar conclusões rigorosas. Além disso a pequena dimensão das amostras usadas nos estudos económicos provoca alguns problemas de aferição das propriedades dos sistemas caóticos, pois a sua demonstração exige o estudo de amostras de grandes dimensões (cerca de 100 000 observações).

Verifica-se que não é possível afirmar, com certeza, que os mercados financeiros, mais concretamente os mercados bolsistas de acções seguem um processo caótico, por isso muitos autores como, Rosario Mantegna (Mantegna, 2000), defendem a adopção de processos estocásticos, com o argumento de que a evolução temporal das cotações depende da informação disponível, informação esta que pode ser representada por equações não lineares deterministas.

#### **3.1.1.4 – Aplicação da entropia à análise da eficiência do mercado de acções**

David Nawrocky (Nawrocky, 1976) questiona a aplicação real da hipótese de eficiência do mercado de acções. Segundo este autor, o pressuposto de que o mercado está em equilíbrio, sendo por isso um mercado estacionário não é de forma alguma característica do mercado de acções. Este caracteriza-se sim, como foi focado por muitos autores, por ser dinâmico e complexo (Nawrocky, 1976). De modo a provar a sua teoria, de que o mercado de acções é um mercado dinâmico e ineficiente, ou quanto muito quase-estacionário, o autor teste a existência de dependência entre as taxas de rentabilidade das acções através dos testes de forma fraca e dependência destas face a acontecimentos macro e micro económicos, sociais e políticos (Nawrocky, 1976). Nos testes de forma fraca, David Nawrocky (Nawrocky, 1976) utilizou os testes de independência qui-quadrado ( $\chi^2$ ) e a entropia condicional.

A entropia condicional, como medida adoptada da teoria da informação, é introduzida com o objectivo de medir o nível de informação existente no mercado com capacidade para gerar ineficiência. A situação de ineficiência é identificada sempre que certos investidores que tenham acesso a informação, que outros não, tenham capacidade

de obter ganhos extraordinários muito acima do normal “admitido”. Neste caso, existe portanto uma percepção de que a informação referente a um determinado estado tenderá a influenciar o comportamento de outro estado, ou seja, a entropia do segundo estado, relativamente ao conhecimento do primeiro estado, é muito pequena, evidenciando ineficiência de mercado. Se as taxas de rendibilidade forem perfeitamente independentes, o nível de informação adicional é nulo, logo a entropia condicional atinge o valor máximo, ou seja, o mercado é eficiente.

A entropia condicional é encarada como medida de independência entre dois estados.  $H(T_1 | T_2)$  medirá a incerteza do estado 2 face ao conhecimento do estado 1.

$$H(T_1 | T_2) = - \sum p(T_1, T_2) \text{Log } p(T_1 | T_2) \quad (3.1)$$

Onde:

H – Entropia;

$T_1$  - Estado 1;

$T_2$  - Estado 2;

p – probabilidade;

$p(.|.)$  – probabilidade condicional; e,

Log – Logaritmo.

A entropia condicional alcançará o valor máximo se dois estados forem independentes entre si,  $H(T_1 | T_2) = H(T_2)$ . Neste contexto verifica-se a existência e independência estatística. Se a entropia condicional assumir um valor nulo, constata-se a total dependência entre os dois estados. Como a entropia é aditiva, pode-se calcular a entropia condicional a um alargado número de títulos, da seguinte forma:

$$H(T_1 | T_2) = - \sum_{j=1}^P p\left(\sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N T_{jit}, T_{ji, t-1}\right) \text{Log } p\left(\sum_{i=1}^M \sum_{t=1}^N T_{jit} | T_{ji, t-1}\right) \quad (3.2)$$

Onde:

H – Entropia;

$T_1$  - Estado 1;

$T_2$  - Estado 2;  
p – probabilidade;  
p(.|.) – probabilidade condicional;  
M – Número de observações por título;  
N – Número de títulos na amostra;  
P – Número de células no quadro de contingência; e,  
Log – Logaritmo.

A entropia, como medida da teoria da informação, só poderá ser aplicada com sucesso como teste de independência se forem satisfeitas as seguintes condições: (i) a amostra ou universo em estudo pode ser perfeitamente dividida em subconjuntos; e (ii) a amostra ou universo em estudo pode ser perfeitamente descrita por uma distribuição de probabilidade com  $0 \leq p \leq 1$  e  $\sum p_i = 1$ .

De acordo com David Nawrocky (Nawrocky, 1976) a aplicação da entropia apresenta várias vantagens, sendo de realçar:

- a informação é aditiva, logo a entropia também o é;
- a análise da informação é exacta, não envolvendo aproximações;
- a análise da informação é equivalente à partição da soma de quadrados na análise da variância;
- a entropia é independente da média para a maioria das distribuições de probabilidade; e,
- os testes estatísticos aplicados na teoria da informação podem ser encarados como extensões dos testes de independência qui-quadrado ( $\chi^2$ ).

Nos testes de forma fraca, o autor analisou 1740 observações divididas em 29 grupos (cerca de 60 dias cada), concluindo que existe dependência no mercado de acções de Nova Iorque, sendo por isso um mercado não estacionário. Nos testes efectuados, verificou que a entropia condicional apresentava resultados consistentes com os testes de independência qui-quadrado ( $\chi^2$ ).

Nos testes de forma semi-forte, o autor voltou a utilizar a entropia condicional, analisando a reacção do mercado de acções face a períodos de recessão, guerra, desvalorização cambial e alterações nas taxas de juro. Verificou que nos períodos de maior recessão política e económica a entropia condicional assumia valores reduzidos,

indicando a existência de uma clara dependência no mercado de acções, que lhe retirava o equilíbrio e eficiência. Por fim, David Nawrocky concluiu que são as expectativas dos investidores a principal causa da ineficiência nos mercados de acções. Expectativas homogéneas, fruto do conhecimento da mesma informação ao mesmo tempo conduzem ao equilíbrio de mercado, mas expectativas heterogéneas, consequências da existência de informação assimétrica, dependência entre as taxas de rendibilidade das acções e destas para com a situação política, económica e social, conduzem à ineficiência do mercado (Nawrocky, 1976).

Boleslav Gulko (Gulko, 1998) desenvolve um trabalho similar ao desenvolvido por David Nawrocky em 1976, simplesmente, o objectivo é encontrar o equilíbrio de mercado. Neste sentido, o autor constrói um modelo onde a entropia é maximizada sujeita a determinadas restrições. É defendida a “Entropy Pricing Theory” como principal característica da eficiência do mercado. A “Entropy Pricing Theory” baseia-se no pressuposto de que os preços ou cotações dos títulos reflectem as expectativas dos investidores que actuam no mercado, portanto, se no mercado existirem 50% de investidores com a expectativa de que as cotações vão subir e 50% com a expectativa de que as cotações vão descer, o nível de informação adicional é nulo, logo o nível de entropia é máximo, ou seja o mercado está em perfeito equilíbrio, atingindo-se a eficiência.

Os pressupostos desta teoria baseiam-se no facto de no mercado existir um grande número de pequenos investidores racionais e neutrais face ao risco, sem poder para controlar ou dominar o mercado. A entropia máxima caracteriza as expectativas colectivas no mercado (numa perspectiva das preferências pelo risco agregadas), e não as expectativas subjectivas a nível individual. O modelo de maximização da entropia das expectativas no mercado  $p(R_i)$  está sujeito ao nível de informação relevante disponível no mercado, informação esta que pode incluir a definição do espaço de probabilidade, o preço actual e passado dos títulos, a variância do activo com risco ( $S_t$ ) e outros momentos estatísticos que possam descrever melhor a distribuição em causa. Se se assumir que no mercado existem apenas dois activos: activo sem risco ( $R_F$ ) e activo com risco ( $R_i$ ), sendo a variância deste conhecida, pode aplicar-se o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
\text{Max } H &= - \int_{\Omega} P \text{Log}(P) dR_i \\
\text{s.a.} \quad & \int_{\Omega} P dR_i = 1 \\
& \int_{\Omega} P R_i dR_i = \frac{R_i}{R_F} \\
& \int_{\Omega} P R_i^2 dR_i = \sigma^2 + \left(\frac{R_i}{R_F}\right)^2 \\
& P(R_i) > 0 \text{ em } \Omega
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Onde:

$P$  - Função de densidade;

$R_i$  - Activo com risco;

$R_F$  - Activo sem risco

$\sigma^2$  - Variância; e,

$\Omega$  - Espaço amostral.

A primeira restrição do modelo atrás apresentado diz respeito à função de distribuição. A segunda restrição define a atitude de neutralidade face ao risco por parte do investidor e a terceira restrição diz respeito à variância.

Boleslav Gulko (Gulko, 1998) aplica o modelo (3.3) ao mercado de derivados, contrapondo-o com o modelo de Black-Scholes e criticando este último por ter como pressuposto a utilização da distribuição normal (ou da log-normal) que não se aplica à realidade. O autor defende a utilização da função de distribuição Gamma, argumentando que a sua função densidade é muito mais flexível que a normal, tendo a possibilidade de melhor representar o mercado de derivados.

Peter Buchen e Michael Kelly (Buchen et al, 1996), após analisarem o mercado bolsista de derivados concluíram que a pouca informação existente neste mercado põe em causa a correcta selecção da função de distribuição de probabilidade subjacente à realidade, dado que, teoricamente existe um número infinito de funções de distribuição que é possível adaptar com mais ou menos perícia. Os autores consideram que a única forma de seleccionar a função de distribuição correcta será seguir o Princípio da Máxima Entropia (PME). Este método requer a interpolação ou extrapolação das cotações, usando apenas a informação por elas fornecida, o que gera uma função de

probabilidade para variáveis discretas (ou uma função densidade para o caso contínuo), mesmo que exista apenas um título no mercado.

Este método foi inicialmente formulado por Gibbs após observação de que na termodinâmica a entropia num sistema fechado, aumenta continuamente até atingir um valor máximo de desorganização e incerteza. Em 1948 Shannon apresenta a entropia como medida de “não-informação” ou informação perdida, demonstrando que um sistema fechado, ao qual não é injectada informação, tende para um estado de entropia máximo. Deste modo, o Princípio da Máxima Entropia pretende a maximização da entropia numa função de distribuição. Esta função de distribuição será aquela que menos restringe a incerteza, a “missing information”, logo será uma função de distribuição mais livre e ampla.

Os autores propõem ainda a minimização da entropia relativa, considerada como a distância que existe entre duas funções de distribuição, como forma de seleccionar a função de distribuição mais adequada a determinados dados.

### ***3.1.2 - Adequabilidade da entropia à teoria financeira***

O entendimento da definição do risco e incerteza em aplicações financeiras é bastante importante para que a actuação do investidor no mercado de capitais seja bem sucedida. Nos títulos de rendimento variável (como é o caso das acções e todos os títulos cujo rendimento futuro é incerto), o risco é frequentemente definido como a probabilidade da variação das taxas de rendibilidade. William Sharpe afirma ainda que não é possível valorizar um investimento sem explicitar a probabilidade dos vários rendimentos possíveis (Sharpe, 1985).

O risco inerente a uma carteira é geralmente medido pela variância ou desvio-padrão das taxas de rendibilidade das acções ou outros títulos que a compõem. Ao assumir que o mercado está em equilíbrio, existe uma clara relação entre valor esperado e risco para carteiras eficientes, relação esta que perde clareza quando se constata que o mercado apresenta ineficiências a vários níveis. Torna-se assim essencial encontrar novas formas de medir o risco, que proporcionem ao investidor um melhor nível de informação sobre o mercado, as carteiras e as acções onde poderá pretender realizar investimento com sucesso.

O conhecimento da média e do desvio-padrão de uma distribuição de probabilidades subjectivas não permite, em geral, atribuir uma probabilidade específica a cada resultado pois é possível existirem duas distribuições de probabilidade diferentes com a mesma média e o mesmo desvio-padrão. Apesar da sua simplicidade e operacionalidade, a variância apresenta sérias limitações como medida do risco, uma vez que certas distribuições são insuficientemente analisadas se o seu estudo se resumir aos primeiro e segundo momentos (média e variância), pois ignora completamente características concretas da distribuição subjacente, como a assimetria e a curtose.

Harry Markowitz (Markowitz, 1959), refere que é frequente usar o desvio-padrão ou variância em variados campos, mas tal não prova que seja uma boa medida para avaliar carteiras de títulos. A razão para o seu uso em estatística difere da que justifica o seu emprego na avaliação de títulos (Câmara, 1989). O uso do desvio-padrão na estatística está frequentemente ligado à curva normal. A justificação da sua utilização na avaliação de carteiras de títulos está ligada a questões de simplificação e ao facto de se considerar que o investidor é averso ao risco, sendo para ele mais de duas vezes pior a perda de  $2X$  euros do que a perda de  $X$  euros, enquanto que o ganho de  $2Y$  euros não é duas vezes melhor que o ganho de  $Y$  euros.

É ainda importante referir que o risco individual de um título incluído numa carteira não é de relevância crucial. O aspecto fundamental do risco de uma acção incluída numa carteira é o da sua contribuição para o risco total da carteira, que pode ser menor que a soma aritmética de todos os títulos nela incluídos, por efeito de uma correcta diversificação. Se se admitir que o investidor fará sempre uma diversificação correcta, assume-se que o risco específico poderá vir a ser totalmente anulado, logo o risco de mercado será o principal alvo de atenção, uma vez que a diversificação nada pode fazer para minimizá-lo.

Jean-Jacques Laffont (Laffont, 1990) critica severamente a utilização da variância como medida de risco, argumentando que a mera comparação entre variâncias não é suficiente para averiguar se uma situação tem um risco mais elevado que outra. Como alternativa sugere a utilização de variáveis estocásticas, cuja comparação do risco é feita para funções de distribuição que apresentem a mesma média ou valor esperado.

De acordo com o autor, se se considerar uma família de variáveis estocásticas  $r$  num determinado intervalo fechado  $[0, 1]$ , sendo  $F(x, r)$  a função distribuição de  $X$  em

$[0, 1]$ , intuitivamente pode afirmar-se que  $F(x, r_2)$  tem maior risco que  $F(x, r_1)$  se e só se:

- a) Ambas as distribuições apresentarem médias (ou valor esperado) iguais;
- b)  $F(x, r_2)$  é obtida através de sucessivos deslocamentos sobre  $F(x, r_1)$ ; e,
- c)  $\int_0^y [F(x, r_2) - F(x, r_1)] dx \geq 0 \quad \forall y \in [0, 1]$

Pode-se então afirmar que, de acordo com a teoria da carteira, se  $\tilde{x}_{r_2}$  tem maior risco que  $\tilde{x}_{r_1}$ , e ambos têm a mesma média, então:

$$EU\left(\tilde{x}_{r_2}\right) \leq EU\left(\tilde{x}_{r_1}\right) \quad (3.4)$$

Onde:

$E(\cdot)$  – Valor esperado;

$U(\cdot)$  – Utilidade; e,

$\tilde{x}_{r_i}$  - Variável estocástica.

Ou seja, admitindo que o investidor é averso ao risco, a sua função utilidade é côncava, logo escolherá a possibilidade que lhe oferecer menor nível de risco.

Com o objectivo de demonstrar que a utilização da variância como única medida de risco pode ser, por vezes, insuficiente, é apresentado o seguinte exemplo, onde existem duas carteiras de acções:  $r_1$  e  $r_2$  com as respectivas probabilidades de rendimento:

$$r_1 = 1 \quad P = 0,80$$

$$r_1 = 100 \quad P = 0,20$$

$$r_2 = 10 \quad P = 0,99$$

$$r_2 = 1090 \quad P = 0,01$$

Relativamente aos dados apresentados, verifica-se que o respectivo valor esperado e variância são:

$$E(r_1) = 20,8$$

$$E(r_2) = 20,8$$

$$\text{Var}(r_1) = 1\,568,16$$

$$\text{Var}(r_2) = 11\,547,36$$

Pressupondo que a função de utilidade do investidor é uma função quadrática, de acordo com a teoria da carteira desenvolvida por Harry Markowitz, qualquer investidor escolheria a carteira  $r_1$ , uma vez que apresenta um valor esperado igual ao da carteira  $r_2$  e uma variância inferior. Contudo, se a função utilidade do investidor for representada por uma função logarítmica, utilização que se justifica pelo facto de ser uma função côncava em  $R^+$ , cujo crescimento ocorre a taxas decrescentes a partir de um determinado ponto (tal como acontece na função utilidade do investidor averso ao risco), obtêm-se os seguintes resultados:

$$E(U) = \log r_i$$

$$E U(r_1) = 0,4$$

$$E U(r_2) = 1,02037$$

Resultados estes que indicam claramente que a variância não é suficiente para descrever o verdadeiro risco e incerteza inerente às carteiras. Excepto para casos particulares, que sejam perfeitamente descritos pela curva normal e com função de utilidade quadrática, a variância deixa de ser um estimador do risco perfeito, isto é, deixa de ser uma boa fonte de informação para o investidor que pretende adquirir títulos e recorre a parâmetros concretos para conhecer a verdadeira situação do mercado.

Jean-Jacques Laffont (Laffont, 1990) propõe assim, a dominância estocástica como medida de risco, pressupondo que o investidor é averso ao risco, cuja função utilidade é côncava.

No mesmo contexto, Michael Stuzer (Stuzer, 1995) critica severamente toda a ênfase gerada à volta do modelo da média-variância, argumentando que o seu valor só é evidente quando se assume que a função utilidade do investidor é uma função quadrática, o que poderá constituir uma séria limitação à análise correcta da verdadeira função utilidade do investidor em estudo. Com vista à superação de tal limitação, Stuzer (Stuzer, 1995) aplica modelos da teoria da informação, de realçar a minimização do critério de informação de Kullback-Leibler, ou entropia relativa, assumindo que o investidor apresenta aversão absoluta ao risco constante (CARA).

Também com vista a superar algumas limitações inerentes ao modelo da média-variância de Harry Markowitz, cujo risco é medido pela variância, William Sharpe (Sharpe, 1970) propõe o cálculo dos betas como medida de risco, argumentando que os mesmos apresentam capacidade para medir a volatilidade de um título face à performance do mercado. O autor afirma ainda que uma carteira eficiente pressupõe o efeito diversificação, sendo, por isso, necessário ter em conta somente o risco sistemático, não passível de diminuição uma vez que é o risco inerente ao próprio mercado. Deste modo, o risco específico deixa de ser importante num contexto de plena diversificação de carteiras.

Os pressupostos introduzidos no modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), pelo seu elevado grau restritivo, conferem bastante simplicidade ao modelo, contudo afastam-no literalmente da realidade. O pressuposto de que todos os investidores têm aversão ao risco e fazem as suas escolhas numa base racional, nem sempre se verifica em termos de psicologia humana. As preferências individuais podem diferir significativamente de pessoa para pessoa, de tal maneira que cada investidor poderá apresentar um beta específico, diferente do assumido para o mercado em geral.

Para que com base nesta evidência, o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) possa ser aplicado torna-se obrigatório assumir que o mercado está em equilíbrio, ou seja, os investidores têm expectativas homogêneas a cerca dos rendimentos futuros das acções, sendo o total da procura igual ao total da oferta, o que nem sempre se verifica na realidade.

A inclusão de custos de transação aproxima o modelo da realidade, contudo foi excluída pela maioria dos investigadores na selecção de carteiras, dada a dificuldade que imputa ao modelo, de tal forma, que a simplicidade vem deste modo sobrepor-se à verdade, de um modo que torna pouco credíveis quaisquer resultados obtidos.

O pressuposto de que não existem imperfeições de mercado, nomeadamente de que a informação é gratuita, estando todos os investidores em “pé de igualdade”, no que concerne à sua obtenção, está bem longe de ser verdade. Na realidade o investidor depara-se com a existência de informação assimétrica e ineficiência de mercado. A hipótese de que as taxas de rendibilidade das acções seguem uma distribuição normal tem sido alvo de crítica por parte da comunidade académica e científica através da análise da distribuição empírica seguida por aquelas taxas, como foi explicitado na secção anterior, de tal forma que este pressuposto pode ser posto em causa,

principalmente se se tiver em conta o mercado bolsista português, que dada a sua pequena dimensão e fraca liquidez apresenta sinais evidentes de não eficiência.

Verifica-se que os pressupostos base do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), cujo risco é medido pelo beta, apresentam grandes desvios face à realidade, o que poderá constituir uma errada fonte de informação ao investidor que a eles recorre para tomar uma decisão.

De acordo com Pete Clarkson, José Guedes e Rex Thompson (Clarkson et al, 1996), a volatilidade inerente às acções não é correctamente medida pelos betas, verificando os autores que, após analisar uma amostra significativa de acções emitidas por determinadas empresas, aquelas sobre as quais existia menos informação disponível no mercado apresentavam menores betas que outras cuja divulgação de informação era francamente superior. A causa de tais desvirtuamentos, dever-se-ia, segundo os autores, ao facto de a distribuição de probabilidade utilizada (distribuição normal), não ser a mais adequada, enviesando desta forma as análises realizadas e induzindo o investidor em erro.

Neste contexto, os autores sugerem a utilização de um novo modelo (parecido com o modelo CAPM - Capital Asset Pricing Model), cujos betas são calculados com base nas taxas de rendibilidade médias obtidas por títulos com pouca informação e nas taxas de rendibilidade médias dos títulos com muita informação. O modelo apresenta a seguinte estrutura:

$$\bar{R}_i = \bar{R}_L + \beta \left( \bar{R}_H - \bar{R}_t \right) \quad (3.5)$$

Onde:

$\bar{R}_i$  - Taxas de rendibilidade médias ajustada para títulos com pouca informação;

$\beta$  - Coeficiente beta, que mede o risco dos títulos com pouca informação face aos títulos com muita informação;

$\bar{R}_L$  - Taxa média de rendibilidade dos títulos com pouca informação, medida sobre vários períodos de tempo;

$\bar{R}_H$  - Taxa média de rendibilidade dos títulos com muita informação, medida sobre todos os dados avaliáveis; e,

$\bar{R}_t$  - Taxa média de rendibilidade dos títulos com muita informação, medida nos mesmos períodos utilizados para calcular  $\bar{R}_L$ .

Apesar de não ser especificado pelos autores, poderá ser utilizada a entropia como forma de medir o nível de informação fornecido por cada acção (e respectiva empresa emissora), tendo em conta que elevados níveis de entropia pressupõem da mesma forma uma elevada desorganização e incerteza, ou seja, pouca informação (e vice-versa), podendo estabelecer um “ranking” com os valores obtidos. Para tal bastará analisar toda a trajectória histórica da acção ou título em causa, a sua distribuição de probabilidades e toda a informação disponível ao investidor sobre o mesmo.

### 3.1.2.1 - Propriedades da entropia

Considere-se um conjunto de acontecimentos possíveis cujas probabilidades de ocorrência são dadas por  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , a entropia surge como uma medida de incerteza, assumindo as seguintes propriedades (Shannon, 1948) e (Shannon et al, 1964):

- 1 – A entropia (H) é contínua em  $p_i$ ;
- 2 – Se  $p_i = 1/n$ , então a entropia (H) é uma função monotonamente crescente em  $n$ , pois quanto maior for o número de acontecimentos possíveis, maior é a incerteza e a possibilidade de escolha; e,
- 3 – A entropia de um conjunto é igual à soma da entropia dos vários subconjuntos que o compõem, ou seja, a entropia é aditiva.

Se H (entropia) satisfaz as condições atrás enunciadas, então:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \text{Log } p_i \quad (3.6)$$

Onde:

H – Entropia;

$p_i$  – Probabilidade de ocorrência do acontecimento  $i$ ; e,

Log – Logaritmo.

**Nota:** A escolha da base do logaritmo é irrelevante, convém é distinguir o resultado obtido consoante a base utilizada, assim:

Log<sub>2</sub> – entropia medida em bits;

Log<sub>10</sub> – entropia medida em dits;

Log<sub>e</sub> = Ln – entropia medida em nats.

A utilização do logaritmo é explicada por Shannon e Weaver (Shannon et al, 1964). Note-se que, desde que  $p_i \leq 1$ , o logaritmo de uma fracção é negativo, logo a entropia assume valor positivo. Se o sistema gerar apenas um acontecimento, não há incerteza e  $H = 0$ . No mesmo sentido, à medida que o número de acontecimentos igualmente possíveis duplica, a entropia aumenta uma unidade. A entropia assume o valor máximo quando todos os acontecimentos possíveis tiverem a mesma probabilidade de ocorrência. Por fim a utilização do logaritmo faz com que seja dada uma maior ponderação a eventos de pequena probabilidade, sendo dada maior atenção à probabilidade de ocorrência de “crashes” ou outros eventos extremos.

Se existirem dois acontecimentos independentes, num determinado universo, cujas probabilidades de ocorrência são respectivamente  $p$  e  $q$ , onde  $p = 1 - q$ , a entropia pode ser definida por  $H = -(p \log_2 p + q \log_2 q)$ , assumindo o gráfico a respectiva forma (figura 3.1):

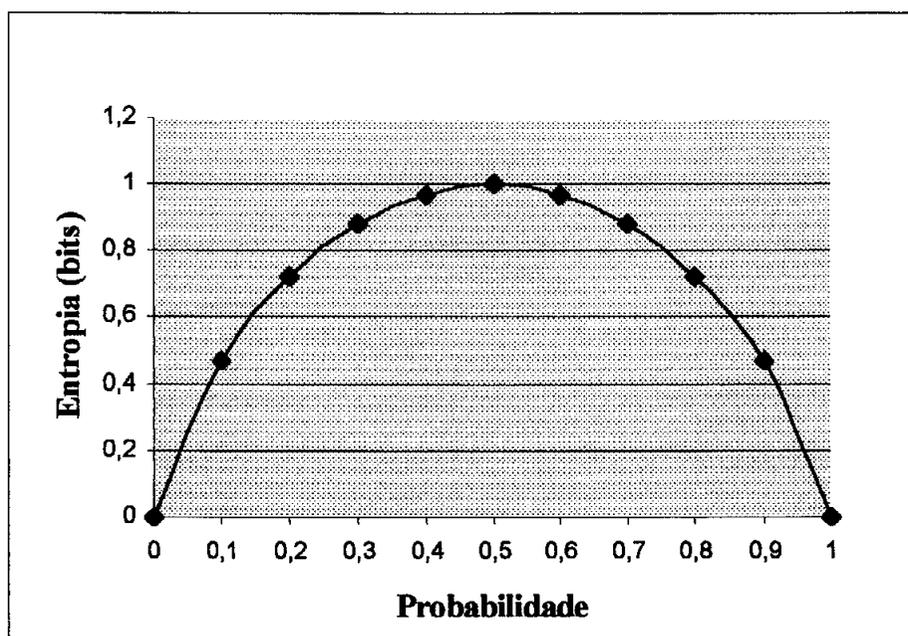


Figura 3.1 – Entropia dos acontecimentos X e Y

Fonte: SHANNON, C. E. (1948); *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Systems Tech., 27: 379-423, 623-656.

O valor assumido pela equação da entropia é alvo de interpretação, na medida em que:

- $H = 0$ , se e só se todas as  $p_i = 0$  excepto uma que é igual á unidade. Verifica-se que existe uma situação de certeza quanto à possibilidade de ocorrência de determinado acontecimento, sendo o nível de entropia mínimo e o nível de informação máximo;
- Para um dado valor  $n$ , a entropia assume um valor máximo se todos os  $p_i$  assumirem igual valor, implicando um aumento de incerteza quanto à ocorrência de determinado acontecimento;
- Supondo a existência de dois acontecimentos  $X$  e  $Y$ , em que o primeiro apresenta  $m$  possibilidades de ocorrência e o segundo  $n$  possibilidades. Seja  $p(i,j)$  a probabilidade conjunta de ocorrência do primeiro e do segundo acontecimento. A entropia do acontecimento conjunto é dada por:

$$H(X, Y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log } p(i, j) \quad (3.7)$$

Enquanto que:

$$H(X) = - \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log} \sum_j p(i, j) \quad (3.8)$$

$$H(Y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log} \sum_i p(i, j) \quad (3.9)$$

$$\text{Verificando-se que } H(X, Y) \leq H(X) + H(Y) \quad (3.10)$$

Assumindo a igualdade apenas no caso de os acontecimentos  $X$  e  $Y$  serem independentes.

Assumindo que existem dois acontecimentos  $X$  e  $Y$ , não necessariamente independentes para cada valor particular de  $i$  que  $X$  pode assumir, existe uma probabilidade condicional  $p(i/j)$  onde  $Y$  assume valor  $j$ , sendo a equação dada por:

$$p(j|i) = \frac{p(i, j)}{\sum_j p(i, j)} \quad (3.11)$$

A entropia condicional de Y dado X é definida por:

$$H(Y|X) = - \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log } p(j|i) \quad (3.12)$$

Esta medida quantifica a incerteza de Y quando X é conhecido. Substituindo o valor de  $p(j|i)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= - \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log } p(i, j) + \sum_{i,j} p(i, j) \text{Log } \sum_j p(i, j) = \\ &= H(X, Y) - H(X) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ou seja:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3.14)$$

A incerteza resultante da conjunção dos acontecimentos X e Y será igual à incerteza de X mais a incerteza de Y quando X é conhecido.

$$\begin{aligned} H(X) + H(Y) &\geq H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \\ \text{Logo} \quad H(Y) &\geq H(Y|X) \end{aligned} \quad (3.15)$$

O que se justifica pelo facto de a entropia não aumentar pelo conhecimento de uma variável, pelo contrário, o conhecimento de X tende a diminuir a incerteza que existe relativamente ao Y. No caso de X e Y serem independentes, verifica-se uma igualdade entre os valores de entropia.

Se  $H(Y|X) = 0$ , então a incerteza é nula, isto é para cada resultado de X a experiência de Y fica totalmente determinada. Se  $H(Y|X) = H(Y)$ , então o nível de incerteza é máximo, demonstrando que as estatísticas X e Y são independentes, logo qualquer informação acerca de X, não diminui a incerteza acerca de Y.

As distribuições discretas podem referir-se a variáveis quantitativas e a atributos (não quantitativas), enquanto que as distribuições contínuas apenas dizem respeito a variáveis quantitativas. Esta diferença torna-se mais importante quando se altera a unidade de medida das variáveis. Tal transformação não provoca quaisquer variações na entropia referente a distribuições discretas, contudo para distribuições contínuas, a entropia irá sofrer variações.

Outra característica importante da entropia para distribuições discretas é a sua total independência face aos valores da variável em causa. Deste modo quaisquer alterações em X que não alterem a distribuição de probabilidade não provocarão transformações no valor da entropia.

Como foi visto anteriormente, a entropia de um conjunto de probabilidades discretas é definida por:

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \text{Log } p_i$$

De forma homóloga, a entropia de uma distribuição contínua é definida pela função de densidade de  $p(x)$  (Shannon, 1948):

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \text{Log } p(x) dx \quad (3.16)$$

Onde:

$p(x)$  – Probabilidade de ocorrência do acontecimento  $x$ .

Para  $n$  dimensões de distribuição  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  obtém-se:

$$H = - \int \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{Log } p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (3.17)$$

A entropia das distribuições contínuas assume quase todas as propriedades da entropia das distribuições discretas, sendo de realçar:

- Se  $x$  é limitado a um certo volume  $v$  no espaço, então  $H(x)$  assume o valor máximo (igual a  $\text{Log } v$ ) quando  $p(x)$  é uma constante ( $1/v$ ) em todo o volume;

- Assumindo a existência de duas variáveis contínuas  $X$  e  $Y$ , então:

$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ , verificando-se igualdade apenas no caso de  $X$  e  $Y$  serem independentes, isto é, quando  $p(X, Y) = p(X) * p(Y)$

- $$H(X) + H(Y) \geq H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) \quad (3.18)$$
  
Logo  $H(Y) \geq H(Y|X)$

- A entropia de uma distribuição normal, cujo desvio-padrão é  $\sigma$ , é dada por:

$$H(X) = \ln\left[\sqrt{(2\pi)\sigma}\right] + \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

Nas distribuições discretas a entropia mede o valor absoluto da aleatoriedade existente nas variáveis. No caso contínuo, a entropia mede a aleatoriedade relativa face a um sistema. Deste modo, a entropia de uma distribuição contínua pode assumir valores negativos, caso a escala escolhida, por exemplo, para uma distribuição uniforme seja de entropia nula, qualquer distribuição que apresente um maior nível de concentração terá entropia negativa (Verdugo et al, 1978).

Quaisquer alterações ao nível da unidade de medida provocarão aumentos ou diminuições da entropia referente às distribuições contínuas, cuja constante multiplicativa é incorporada na arbitrariedade do logaritmo. Além disso a entropia das distribuições contínuas é sensível a quaisquer outras alterações que possam ocorrer na variável, por isso se adequa mais para o estudo das taxas de rendibilidade do títulos.

Se se trabalhar com duas distribuições de probabilidade, cujos valores estão numa determinada dimensão, uma mudança em ambas as unidades de medida não provocará quaisquer alterações na diferença relativa de entropia entre elas. Tal propriedade permite a aplicação da entropia à teoria de carteiras, onde as taxas de rendibilidade dos títulos têm valores na mesma unidade de medida. Neste contexto, a extensão da entropia medida de forma discreta para o caso contínuo promove alguma complicação a nível de cálculos mas não altera os resultados (Philippatos et al, 1972).

### 3.1.2.2 – Entropia e informação

A entropia de um sistema constitui um índice da ignorância sobre a microestrutura desse mesmo sistema (Georgescu-Roegen, 1971). Existe uma relação muito peculiar entre informação e entropia, uma vez que a criação, transmissão e obtenção de informação implicam por si só gastos de energia, ou seja, aumentos de entropia, que num sistema fechado tenderá para o máximo. Contudo a informação constitui uma das mais potentes formas de negentropia, de tal forma que se o valor da informação por si só não superar o dispêndio de energia, os aumentos de entropia serão

mais significativos, a informação torna-se portanto cada vez mais valiosa. Confirma-se assim que entropia e informação são entidades equivalentes (Mayumi, 1997).

De acordo com o Princípio da Negentropia da Informação, a informação poderá ser responsável por decréscimos de entropia de um estado para outro (Georgescu-Roegen, 1971).

Como foi focado na secção anterior, o conhecimento de um determinado acontecimento pode contribuir para a diminuição da entropia conjunta de vários acontecimentos, significando que há uma “injecção” de informação no sistema.

$$0 \leq H(Y|X) \leq H(Y) \quad (3.20)$$

Nestas condições a realização da experiência X só pode diminuir o grau de incerteza ou risco de Y. No caso de existir tal diminuição de entropia, poderá considerar-se que por si só tal diminuição constitui um ganho de informação representado pela informação mútua, tal como é demonstrado na seguinte figura (figura 3.2):

$$I(Y; X) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.21)$$

Onde:

I(.) – Informação mútua; e,

H(.) – Entropia.

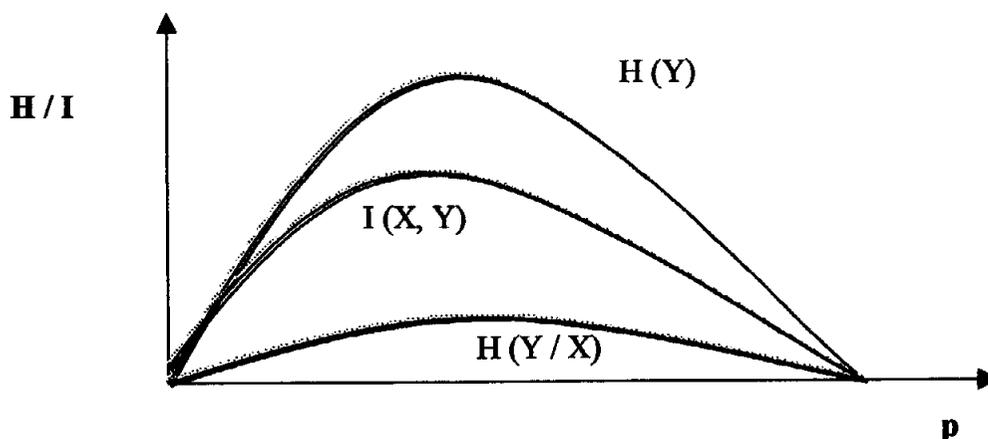


Figura 3.2 – Informação mútua versus entropia

Deste modo, poderá afirmar-se que existe uma relação entre ganho de informação e nível de entropia, como está descrito no quadro abaixo apresentado (quadro 3.2).

Se $I(Y; X) = 0$	Se $I(Y; X) = H(Y)$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>H(Y) = H(Y X)</math>;</li> <li>• Nível de ruído máximo; e,</li> <li>• X e Y são estatisticamente independentes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>H(Y X) = 0</math>;</li> <li>• Nível de ruído nulo; e,</li> <li>• Y fica totalmente determinado por X.</li> </ul>

Quadro 3.1 – Comparação entre informação mútua e entropia.

Na análise de vários acontecimentos em simultâneo, a entropia tenderá a atingir o ponto máximo quando todos os resultados possíveis forem equiprováveis, significando que o nível de informação disponível é mínimo. Neste contexto a informação adquire um valor muito elevado, pois se uma determinada situação assume elevados níveis de entropia, a necessidade de informação, como forma de a minimizar ou seja como negentropia, é bastante elevada, aumentando consequentemente o seu valor.

Como já foi abordado neste trabalho de investigação, a informação será encarada como tudo aquilo que permite a redução da incerteza, num contexto mais específico que é a gestão de carteiras considerar-se-á que o investidor estará bem informado se conhecer da melhor forma possível o mercado bolsista e os títulos que o compõem, como forma de definição concreta do rendimento esperado e especialmente da incerteza inerente a um determinado investimento.

### 3.1.2.3 – Entropia e teoria de carteiras

A aplicação da entropia como medida de dispersão e incerteza na teoria de carteiras de activos financeiros prende-se com as vantagens que esta apresenta face ao tradicional método utilizado – a variância ou desvio-padrão no contexto da distribuição normal de probabilidade.

Como a entropia não está dependente de nenhuma distribuição de probabilidade em particular são evitados os erros provenientes do ajustamento dos dados a uma distribuição de probabilidade que poderá não ser a mais indicada. Caso a distribuição de probabilidade seja perfeitamente conhecida, a entropia poderá ser calculada a partir da variância (Philippatos et al, 1972) e (Philippatos et al, 1974).

Considerando um investimento em duas acções, cujas taxas de rendibilidade são dadas por  $R_{1i}$  e  $R_{2j}$  com probabilidade  $p_i$ ,  $i= 1, 2, \dots, n$  e  $p_j$ ,  $j= 1, 2, \dots, m$ , a entropia conjunta será dada por:

$$H(R_1, R_2) = - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M p(R_{1i}, R_{2j}) \text{Log } p(R_{1i}, R_{2j}) \quad (3.22)$$

Onde:

M – Número de observações para o título 2;

K - Número de observações para o título 1;

$H(R_1, R_2)$  - Entropia da taxa de rendibilidade 1 no estado  $i$  e da taxa de rendibilidade 2 no estado  $j$ ; e,

$p(R_{1i}, R_{2j})$  - Probabilidade de ocorrência da taxa de rendibilidade 1 no estado  $i$  e da taxa de rendibilidade 2 no estado  $j$ .

Como é natural, se as taxas de rendibilidade das duas acções forem totalmente independentes (obedecendo ao pressuposto de que são IID – independentes e identicamente distribuídas), a entropia global não será mais que a soma das entropias individuais:

$$H(R_1, R_2) = H(R_1) + H(R_2) \quad (3.23)$$

Contudo, a realidade e vários estudos efectuados apontam para a existência de uma relação entre as taxas de rendibilidade das acções, tornando necessária a introdução de probabilidades condicionais. Deste modo a entropia condicional entre aquelas duas taxas de rendibilidade será dada por:

$$H(R_2 | R_1) = - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^M p(R_{1i}, R_{2j}) \text{Log } p(R_{2j} | R_{1i}) \quad (3.24)$$

Onde:

$H(R_2 | R_1)$  - Entropia condicional da taxa de rendibilidade 2 no estado  $j$  dado o conhecimento da taxa de rendibilidade 1 no estado  $i$ ; e,

$p(R_{2j} | R_{1i})$  - Probabilidade de ocorrência da taxa de rendibilidade 2 no estado  $j$ , dado o conhecimento ou ocorrência da taxa de rendibilidade 1 no estado  $i$ .

Desta forma, se as taxas de rendibilidade das acções não forem independentes, a entropia global será dada por:

$$\begin{aligned} H(R_1, R_2) &= H(R_1) + H(R_2 | R_1) \\ &= H(R_2) + H(R_1 | R_2) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como já foi focado nas propriedades da entropia, a soma das entropias individuais é superior ou igual à entropia conjunta dos dados (verificando-se a igualdade nos casos em que os acontecimentos são independentes), o que se justifica pelo facto de a entropia não aumentar pelo conhecimento de uma variável, pelo contrário, o conhecimento de  $R_1$  tende a diminuir a incerteza que existe relativamente a  $R_2$ . Tal principio está de acordo com a principal premissa da teoria da carteira, segundo a qual a diversificação tenderá sempre a diminuir o risco, neste caso a incerteza.

Assim se  $H(R_2 | R_1) = 0$ , a incerteza é nula, isto é para cada resultado de  $R_1$ ,  $R_2$  fica totalmente determinado. Se  $H(R_2 | R_1) = H(R_2)$ , então o nível de incerteza é máximo, demonstrando que as taxas de rendibilidade são independentes.

A entropia de uma carteira de acções  $H_p$  é igual à soma ponderada das entropias condicionais das  $n$  taxas de rendibilidade relativas àqueles títulos (Philippatos et al, 1972):

$$\begin{aligned} H_p = X_n H(R_1, \dots, R_n) &= X_1 H(R_1) + X_2 H(R_2 | R_1) + X_3 H(R_3 | R_2, R_1) + \dots \\ &+ X_n H(R_n | R_1, \dots, R_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

George Philippatos e Charles Wilson (Philippatos et al, 1972) propõem a utilização do modelo média-entropia em detrimento da média-variância, cuja única diferença entre eles reside no facto de que na média-entropia a incerteza é medida pela entropia. A entropia na construção da fronteira eficiente surge como medida de dispersão e a avaliação e não de selecção, limitando-se a medir a entropia das carteiras seleccionadas pelo modelo da média-variância, isto porque a aplicação da entropia

como medida de selecção é de difícil aplicação devido à dificuldade inerente à determinação das probabilidades conjuntas e condicionais, tornando-se uma tarefa muito difícil quando o número de títulos que constituem a carteira é muito grande.

Neste contexto os autores criaram um outro modelo, baseado no modelo diagonal de Sharpe, onde é calculada a entropia condicional para um determinado índice de mercado:

$$H(\text{Carteira} | RI_i) = \sum_{i=1}^N X_i H(r_i | RI_i) \quad (3.27)$$

Onde:

$N$  - Número de títulos que constituem a carteira;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$r_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ;

$X_i$  - Fracção da acção  $i$ ; e,

$H(|.)$  - Entropia condicional.

Neste modelo é medida a entropia existente na carteira dado o comportamento de um determinado índice. Maiores níveis de entropia denunciam uma maior independência entre a carteira seleccionada e o índice em estudo, denotando-se a pouca informação que o índice pode proporcionar àquela carteira. A construção deste modelo peca por não ter em conta situações em que é preferível ter um maior nível de independência do índice, quando o mercado está em baixa por exemplo. Neste sentido, a simples minimização do modelo é insuficiente, pois haverão casos em que a maximização é, com certeza, preferida.

De acordo com Philippatos e Wilson (Philippatos et al, 1972), Garner e McGill (Garner et al, 1956) existe uma equivalência formal entre certas medidas da teoria de informação e os métodos estatísticos utilizados na análise de regressão. Por exemplo, se se considerar a relação linear entre as taxas de rendibilidade de um título e as taxas de rendibilidade do mercados (representadas pelas taxas de rendibilidade de um índice), sendo  $r_i$  a variável dependente e  $R_i$  a variável independente, então o valor de  $H(r_i)$  corresponde ao valor da variância da variável dependente na regressão. Similarmente, a entropia condicional  $H(r_i | R_i)$  assume o valor correspondente ao erro residual de  $r_i$ , quando os efeitos de  $R_i$  são considerados constantes. No mesmo sentido, a informação mútua dada por  $H(r_i) - H(r_i | R_i)$  corresponde à soma de quadrados da regressão, pois

evidencia a dependência existente entre as variáveis. Finalmente  $[H(r_i) - H(r_i | R_i)] / H(r_i)$  é entendido de forma análoga ao coeficiente de determinação  $R^2$ , na análise de regressão, ou seja, à percentagem de variação de  $r_i$  explicada pela variação de  $R_i$ . Como é natural, tais correspondências só se verificam de forma significativa quando todas as premissas da regressão linear se verificam, nomeadamente a normalidade das distribuições de probabilidade dos resíduos, a linearidade, a homocedasticidade e a ausência de autocorrelação. Caso contrário, é natural que as medidas não assumam uma correspondência perfeitamente proporcional.

Em termos de teoria da utilidade, verifica-se que neste contexto, tal como para a maioria dos bens, a informação obedece à teoria da utilidade marginal decrescente. É também visível que o seu valor está condicionado pelas leis da oferta e da procura. Se a entropia aumenta a procura de informação tende a aumentar como forma de superar tais níveis de incerteza, contudo, elevados valores de entropia dão a entender que existe pouca informação disponível, isto é, a oferta é diminuta, logo o valor da informação assume valores bastante elevados. À medida que a entropia diminui de valor, a procura de informação diminui também, o que faz com que o seu valor tenda a baixar.

Quando a entropia diminui, a dispersão e a incerteza tenderão a diminuir, logo a utilidade do investidor aumenta visto que este possui um maior nível de informação que lhe permite um processo de tomada de decisão com melhores “bases” e portanto mais racional, denotando-se uma relação paralela entre entropia-utilidade semelhante à relação risco-utilidade.

### 3.2 – Modelos

Esta secção apresenta os modelos aplicados neste trabalho de investigação.

Os pressupostos seguidos para a devida aplicação dos modelos são: (i) o investidor é racional, isto é, utiliza da melhor forma possível a informação disponível; (ii) não existe excesso de informação, isto é, o investidor tem capacidade suficiente para gerir a informação da melhor maneira; (iii) não existem custos de transacção; (iv) não existe a possibilidade de realizar “short-selling”; e (v) as frequências relativas são uma boa aproximação das probabilidades.

### 3.2.1 – Modelos estatísticos

Os modelos utilizados com vista à análise estatística das taxas de rendibilidade de todos os títulos e do índice BVL 30 são apresentados na presente secção.

A taxa de rendibilidade para cada um dos títulos é calculada pela expressão:

$$R_i = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (3.28)$$

Onde:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade do título ou acção;

$P_{t-1}$  - Cotação do título ou acção no momento  $t - 1$ ;

$P_t$  - Cotação do título ou acção no momento  $t$ ; e,

$D_t$  - Dividendos pagos no momento  $t$ .

A escolha da forma de cálculo da taxa de rendibilidade (rácio), prende-se com a ideia de que a forma logarítmica, muito utilizada na teoria financeira na tentativa de aproximar a distribuição empírica da distribuição normal, pode constituir um “pobre disfarce” de uma situação bem real, ou seja, a assunção de que as taxas de rendibilidade raramente seguem a distribuição normal de probabilidade.

Após elaborada a série de rendimento dos títulos, calculam-se as respectivas médias, variâncias, coeficientes de curtose e de assimetria com o objectivo de conhecer a distribuição de probabilidade seguida pelas séries das taxas de rendibilidade dos títulos e do índice em estudo. Apesar de se tratar de variáveis aleatórias contínuas, a função densidade probabilidade não é conhecida, por isso a média e a variância são calculadas da seguinte forma:

$$E[r] = \frac{\sum_{i=1}^N r_i F_i}{N} \quad (3.29)$$

Onde:

$E[r]$  - Valor esperado ou média das taxas de rendibilidade da acção;

$F_i$  - Frequência absoluta;

N – Número total de observações; e,  
 $r_i$  – Taxa de rendibilidade da  $i$ -ésima observação.

$$\text{Var}(\bar{r}) = \frac{\sum_{i=1}^N \left( r_i - \bar{r} \right)^2 F_i}{N} \quad (3.30)$$

Onde:

Var ( $\bar{r}$ ) – Variância das taxas de rendibilidade da acção;

$\bar{r}$  - Valor esperado ou média das taxas de rendibilidade da acção;

$F_i$  – Frequência absoluta;

N – Número total de observações; e,

$r_i$  – Taxa de rendibilidade da  $i$ -ésima observação.

Os coeficientes de assimetria e curtose permitem verificar se uma dada distribuição se afasta ou não significativamente da distribuição normal, sendo calculados a partir do terceiro e quarto momentos centrados na média, designados por M3 e M4 e definidos por (Godinho, 1999):

$$M3 = \frac{\sum_{i=1}^N \left( r_i - \bar{r} \right)^3 F_i}{N} \quad (3.31)$$

$$M4 = \frac{\sum_{i=1}^N \left( r_i - \bar{r} \right)^4 F_i}{N} \quad (3.32)$$

Onde:

N – Número total de observações;

$F_i$  – Frequência absoluta;

$r_i$  – Taxa de rendibilidade da  $i$ -ésima observação; e

$\bar{r}$  - Média das taxas de rendibilidade.

A partir de M3 e M4 o coeficientes de assimetria ( $sk$ ) e o coeficiente de curtose ( $kr$ ) são calculados da seguinte forma:

$$sk = \frac{M3}{\sigma^3} \quad (3.33)$$

$$kr = \frac{M4}{\sigma^4} \quad (3.34)$$

Onde  $\sigma$  representa o desvio-padrão das taxas de rendibilidade. Para uma distribuição simétrica, como é o caso da normal, tem-se  $sk = 0$ . Se  $sk < 0$  a assimetria é negativa e se  $sk > 0$  a assimetria é positiva. A distribuição normal apresenta um coeficiente de curtose  $kr = 3$ . Se  $kr < 3$  a distribuição denomina-se platicúrtica e se  $kr > 3$ , como habitualmente acontece nas taxas de rendibilidade dos activos financeiros, esta denomina-se leptocúrtica (Godinho, 1999).

A fim de testar a estacionariedade das séries é utilizado o teste de Dickey Fuller onde é testada a hipótese de as taxas de rendibilidade das acções seguirem uma “unit root” (Murteira et al, 1993), através do modelo:

$$\Delta R_{i,t} = \alpha + \rho R_{i,t-1} + \sum_{j=1}^K \varphi_{ji} \Delta R_{i,t-j} + \varepsilon_t \quad (3.35)$$

Em que

$$\Delta R_{i,t} = R_{i,t} - R_{i,t-1}$$

$\varphi$  - Valor dos lags;

K - Número de lags;

$R_{i,t}$  - Taxa de rendibilidade do título i no momento t; e,

$R_{i,t-1}$  - Taxa de rendibilidade do título i no momento t-1.

Onde são testadas as hipóteses:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_1: \rho < 0$$

A aceitação da hipótese nula demonstra a presença de uma “unit root” na série em estudo, implicando a sua não estacionariedade.

Para testar a conformidade da distribuição empírica da série das taxas de rendibilidade das acções seguirem uma distribuição normal procede-se à realização do teste não paramétrico de Kolmogrov-Smirnov.

Este teste consiste na comparação entre a distribuição empírica e a distribuição normal, evidenciando a possibilidade de estas serem semelhantes através do grau de significância (Reis, 1997). O teste de Kolmogrov-Smirnov (estatística D), consiste em testar as seguintes hipóteses alternativas:

$$H_0 : F(x) = G(x) \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

$$H_1 : F(x) \neq G(x) \text{ para } -\infty < x < +\infty$$

Kolmogrov-Smirnov propõe teste estatístico:

$$D_{obs_{N,M}} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \left| F_N(x) - G_M(x) \right| \quad (3.36)$$

Onde  $F_N(x)$  e  $G_M(x)$  são respectivamente as distribuições empírica e teórica e  $D_{obs}$  é a maior diferença observada entre aquelas distribuições. O nível de significância é dado por:

$$P \left\{ D_{N,M} \geq D_{obs_{N,M}} \mid H_0 \right\} \quad (3.37)$$

### 3.2.2 – Entropia versus desvio-padrão

Alguns trabalhos académicos identificam a entropia associada a cada distribuição de probabilidade. A par destes estudos, Cressie em 1993 procedeu à comparação entre entropia e variância para várias distribuições, como elementos de ordenação de distribuições, referindo a existência de uma relação, por vezes ténue, entre aquelas medidas e concluindo que não é possível estabelecer uma relação universal entre tais grandezas (Ebrahimi et al, 1999).

A entropia, como medida de dispersão existente numa função de densidade  $f(x)$ , mede a incerteza referente àquela função. A variância mede a probabilidade das distâncias dos valores relativamente à média. Apesar de, tanto a variância como a

entropia, serem medidas de dispersão e incerteza, a inexistência de uma verdadeira relação de ordenação entre distribuições realça as “subtis” diferenças que entre elas existem.

Ambas se referem a medidas de dispersão, mas de forma diferente, pois enquanto que a variância mede o grau de dispersão que existe em torno da média, e entropia mede a redundância existente na densidade, independentemente da localização da concentração.

Em termos de propriedades matemáticas, a entropia (como já foi realçado anteriormente) é não negativa para distribuições discretas, mantendo-se constante mesmo que sejam provocadas transformações em  $X$ , que não alterem a sua distribuição. O mesmo não acontece para as distribuições contínuas, onde alterações no valor da variável poderão provocar aumentos ou diminuições no valor da entropia, excepto se as variações na variável ocorrerem dentro de um mesmo intervalo de probabilidade sem exceder os limites máximos e mínimos desse intervalo. A variância, qualquer que seja a variação ocorrida na variável, tem tendência a modificar-se também.

Na maior parte das vezes a entropia e a variância assumem um comportamento semelhante, apesar de tudo, a entropia no seu cálculo utiliza muito mais informação acerca da distribuição em causa, sendo por isso considerados mais fidedignos os seus valores (Ebrahimi et al, 1999).

Como é natural, as similaridades encontradas entre as duas medidas só acontecem se se estabelecerem inicialmente restrições quanto ao comportamento das variáveis e respectivas distribuições, ou seja, deverão manter-se constantes para que a variância não se altere e assim possa ser comparada com a entropia, que não sofre quaisquer modificações quando ocorrem transformações na variável dentro de um mesmo intervalo do histograma.

Neste trabalho de investigação são analisadas a entropia e desvio-padrão de todos os títulos pertencentes à amostra onde se observa a forma como se relacionam tais grandezas.

A entropia originada por uma distribuição normal é calculada através da expressão:

$$H = \text{Ln} \left[ \sqrt{(2\pi)\sigma} \right] + \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

Onde:

H – Entropia;

$\sigma$  - Desvio-padrão;

Ln – Logaritmo neperiano; e

$\pi$  - 3.141592654

A entropia referente a cada título é calculada através da fórmula

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \text{Log}_2 p_i, \text{ de acordo com o pressuposto de que a frequência relativa de cada}$$

intervalo de valores constitui uma boa aproximação à respectiva probabilidade. Para facilidade de cálculo, e dado não ser conhecida a verdadeira distribuição de probabilidade e função de densidade seguida pelos dados, o modo de cálculo da entropia segue a forma de cálculo discreta com base no histograma da distribuição empírica, considerando-se que as frequências relativas são uma boa aproximação das probabilidades. Tal pressuposto pode ser assumido dado o tamanho da amostra (cerca de 989 observações para cada título).

Com o objectivo de melhor clarificar as diferenças entre entropia e desvio-padrão (ou variância) é realizado um estudo semelhante, não aplicado aos títulos de per si, mas sim aplicado a carteiras seleccionadas aleatoriamente, de forma a verificar se a entropia tem em conta um dos principais motes da teoria de carteiras – a diversificação.

Na análise da variância realizada por Elton e Gruber (Elton et al, 1995), é demonstrado que a diversificação é um dos principais meios utilizados para minimizar o risco específico. Para exemplificar tal tese os autores demonstram que quando o número de títulos que compõem uma carteira, tende para infinito a variância da carteira tende para zero, anulando-se completamente no caso em que covariâncias são nulas, isto é, se o risco específico for nulo. Neste trabalho, Elton e Gruber (Elton et al, 1995) seleccionam aleatoriamente títulos para constituir carteiras, com o pressuposto de que a proporção é igual para todos os títulos, ou seja,  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1/N$ . É provado que quanto maior for N, menor será a variância da carteira, através da seguinte expressão:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \sigma_{ij} \quad \text{para } i \neq j \quad (3.39)$$

Através de um processo de simplificação da fórmula obtém-se a seguinte expressão:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \bar{\sigma}_i^2 + \frac{N-1}{N} \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.40)$$

Onde:

$\sigma_p^2$  - Variância da carteira;

$\sigma_{ij}$  - Covariância entre o título i e o título j;

$\sigma_i^2$  - Variância do título i;

$\bar{\sigma}_i^2$  - Média da variância de i;

$\bar{\sigma}_{ij}$  - Média da covariância entre i e j; e,

N – Número de títulos existentes na carteira.

Como se observa facilmente, quando o número de títulos em carteira (N) tende para infinito, a variância da carteira tende a assumir apenas o valor da média das covariâncias, ou seja, o risco específico é anulado, existindo apenas o risco sistemático.

Após a selecção aleatória das carteiras, é calculada a sua respectiva variância. Em seguida é calculada a respectiva entropia e realizada a comparação entre as duas medidas de dispersão.

A entropia das carteiras é calculada através da aplicação da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} H_p &= - X_n \sum_i^M \sum_j^M \dots \sum_1^M p(R_{1i}, R_{2j}, \dots, R_{ni}) \text{Log}_2 [p(R_{1i}, R_{2j}, \dots, R_{ni})] = \\ &= - X_1 \sum_i^M p(R_{1i}) \text{Log}_2 [p(R_{1i})] - X_2 \sum_i^M \sum_j^M p(R_{1j}, R_{2i}) \text{Log}_2 [p(R_{2i} | R_{1j})] \quad (3.41) \\ &\quad - X_3 \sum_k^M \sum_j^M \sum_i^M p(R_{1k}, R_{2j}, R_{3i}) \text{Log}_2 [p(R_{3i} | R_{1k}, R_{2j})] - \dots \end{aligned}$$

Onde:

$H_p$  - Entropia da carteira de títulos;

$R_{1i}$  - Taxa de rendibilidade do título 1 no estado i;

M – Número de estados possíveis;

$X_i$  – Proporção do título i na carteira;

p – Probabilidade; e,  
 Log<sub>2</sub> – Logaritmo de base dois.

Por forma a completar a análise realizada, a par da entropia é também calculada a informação mútua existente em cada carteira, ou seja, a dependência existente entre os títulos. Quanto maior for o grau de dependência, maior será a percentagem de variação explicada pela variação de outro título, o que por si só constitui um ganho de informação, uma vez que permite a diminuição da entropia em termos relativos.

$$\begin{aligned} I(Y; X) &= H(Y) - H(Y|X) = \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Onde:

$I(Y, X)$  - Informação mútua existente entre o título Y e o título X;

$H()$  - Entropia;

$H(. | .)$  - Entropia condicional; e,

$H(. , .)$  - Entropia conjunta.

A generalização desta expressão para um carteira com n títulos: V, Y, ..., Z, com proporções  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , será dada por:

$$I(X_1 V; X_2 Y; \dots; X_n Z) = X_1 H(V) + X_2 H(Y) + \dots + X_n H(Z) - H(X_1 V; X_2 Y; \dots; X_n Z) \quad (3.43)$$

Onde:

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1$$

É assim possível calcular a informação mútua existente em cada carteira através das entropias anteriormente calculadas e assim analisar se o ganho de informação é ou não crescente com a inclusão de títulos na carteira.

A existência de informação mútua é um indício de possibilidade de ineficiência de mercado, uma vez que indica que existe correlação entre os títulos, anulando-se a possibilidade de estes seguirem um “random walk”. Tal situação dá azo a ganhos extraordinários por parte de investidores que tenham acesso a mais informação, o que desde logo deita por terra o pressuposto de eficiência do mercado.

### 3.2.3 – Modelo da média-variância versus média entropia

De acordo com Harry Markowitz (Markowitz, 1959), a diversificação é um dos principais motores para a minimização do risco. Apesar de tudo, não basta diversificar para minimizar o risco, é necessário que os activos (títulos) estejam negativamente correlacionados, pois caso contrário o risco de uma carteira não será mais que a mera soma dos riscos individuais de cada título. Para reduzir o risco torna-se, assim, fulcral evitar títulos que estejam positivamente correlacionados entre si. Como é natural, é a incerteza relativamente ao futuro que justifica a existência da diversificação, pois se fosse possível realizar previsões com certeza, a tendência seria investir o máximo na acção ou título que apresentasse maior taxa de rendibilidade futuro (Sharpe, 1970).

Neste sentido, pretende-se demonstrar que à luz da teoria da informação, a diversificação é realmente vantajosa, uma vez que pode proporcionar ao investidor uma redução da incerteza, dada a probabilidade crescente de se obterem menores níveis de incerteza.

O critério de escolha depende da natureza do investidor. O grau de aversão do investidor face ao risco pode ser determinada matematicamente através da introdução de uma variável (K) positiva. Este coeficiente K mede a atitude do investidor face ao risco. Um K com um valor elevado significa uma elevada aversão ao risco, enquanto que um K com um valor reduzido indica um investidor com baixa aversão ao risco.

O modelo da média-variância pode ser descrito da seguinte forma:

$$\text{Max } E[U(\alpha)] = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot X_i - K \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (3.44)$$

s.a.

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (3.45)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i = 1 \quad (3.46)$$

$$X_i \geq 0 \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (3.47)$$

Onde:

$E(.)$  – Valor esperado;

$U(.)$  – Utilidade esperada;

$V$  – Variância da carteira;

$\bar{V}$  - valor pré-definido da variância;

$\bar{r}_i$  - Taxa de rendibilidade média do título ou acção i;

$X$  - Fracção do título ou acção;

$\chi$  - Variável aleatória;

$\sigma_{ij}$  - Variância e covariância entre os rendimentos das acções i e j; e,

$K$  – Coeficiente de aversão ao risco.

Este modelo formaliza bem a ideia de que o investimento depende simultaneamente do valor esperado e do risco.

De modo a testar se o resultado obtido pelo modelo da média variância é o que mais se adequa à realidade, é calculada a entropia de cada uma das carteiras seleccionadas pelo modelo da média-variância que compõem a fronteira eficiente, sendo contrapostas as fronteiras de eficiência obtidas pela média variância e pela média-entropia (entropia esta que é calculada a partir da selecção realizada pela média-variância).

A entropia de cada carteira obtida pelo modelo de selecção da média-variância é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 H_p &= - X_n \sum_i^M \sum_j^M \dots \sum_1^M p(R_{1i}, R_{2j}, \dots, R_{ni}) \text{Log}_2 [p(R_{1i}, R_{2j}, \dots, R_{ni})] = \\
 &= - X_1 \sum_i^M p(R_{1i}) \text{Log}_2 [p(R_{1i})] - X_2 \sum_i^M \sum_j^M p(R_{1j}, R_{2i}) \text{Log}_2 [p(R_{2i} | R_{1j})] \quad (3.48) \\
 &\quad - X_3 \sum_k^M \sum_j^M \sum_i^M p(R_{1k}, R_{2j}, R_{3i}) \text{Log}_2 [p(R_{3i} | R_{1k}, R_{2j})] - \dots
 \end{aligned}$$

Onde:

$H_p$  - Entropia da carteira de títulos;

$R_{1i}$  - Taxa de rendibilidade do título 1 no estado i;

M – Número de estados possíveis;  
 $X_i$  – Proporção do título  $i$  na carteira;  
 $p$  – Probabilidade; e,  
 $\text{Log}_2$  – Logaritmo de base dois.

Caso não seja conhecida a verdadeira distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos, o cálculo das probabilidades condicionais torna-se fonte de incerteza. De modo a superar tal dificuldade, é calculada a taxa de rendibilidade da carteira em concreto, de acordo com os títulos nela presentes e respectivas proporções, a partir das quais se calcula a entropia global da carteira através da expressão:

$$H_p = - \sum_{p=1}^n p_p \text{Log}_2 p_p \quad (3.49)$$

Onde:

$H_p$  - Entropia da carteira; e,

$p_p$  - Probabilidade da carteira assumir um determinado valor.

### ***3.2.4 – Modelo diagonal de Sharpe e modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) versus entropia e informação mútua***

A presente secção apresenta a metodologia utilizada para a comparação entre os resultados obtidos com o modelo diagonal de Sharpe e o CAPM (Capital Asset Pricing Model) com os resultados obtidos com a entropia e a informação mútua, de modo a verificar se a relação existente entre cada um dos títulos e o índice BVL 30 é fielmente retratada pelos modelos assentes na regressão linear simples. Para tal é calculada a entropia condicional entre as taxas de rendibilidade apresentadas por cada título e as taxas de rendibilidade apresentadas pelo respectivo índice.

De modo a calcular a entropia conjunta entre o título e o índice são elaborados diagramas de dispersão com o objectivo de encontrar os valores das respectivas probabilidades conjuntas.

A entropia condicional é encarada como medida de independência entre o título e o índice, medindo a incerteza do título face ao conhecimento do índice.

$$\begin{aligned} H(r_i, RI_i) &= H(RI_i) + H(r_i | RI_i) \Leftrightarrow \\ H(r_i | RI_i) &= H(r_i, RI_i) - H(RI_i) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Onde:

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$r_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ; e,

$H(\cdot)$  - Entropia.

A entropia conjunta é calculada da seguinte forma:

$$H(r_i, RI_i) = - \sum_{i=1}^M p(r_i, RI_i) \cdot \log_2 p(r_i, RI_i) \quad (3.51)$$

Onde:

$p(\cdot, \cdot)$  - Probabilidade conjunta;

$RI_i$  - Taxa de rendibilidade do índice do mercado;

$r_i$  - Taxa de rendibilidade da acção  $i$ ; e,

$H(\cdot)$  - Entropia.

Quanto maior o nível de entropia condicional menor é a dependência entre o título e o índice BVL 30, logo menor é a informação mútua que daí se poderá extrair. De modo a completar o estudo, é também calculada a informação mútua existente entre cada título e o índice BVL 30.

$$I(r_i, RI_i) = H(r_i) - H(r_i | RI_i) \quad (3.52)$$

Onde:

$I(r_i, RI_i)$  - Informação mútua existente entre o título e o índice BVL 30.

A entropia condicional  $H(r_i | RI_i)$  pode obter como valor máximo  $H(r_i)$ , significando que existe total independência entre o título em causa e o índice BVL 30, ou seja, o conhecimento do índice não contribui para o conhecimento do título. Se

$H(r_i | RI_i) = 0$  existe total dependência entre o título  $i$  e o índice, demonstrando que o conhecimento do índice é suficiente para conhecer o comportamento do título em causa.

Para completar o estudo são calculados os betas de cada um dos títulos através do modelo diagonal de Sharpe:

$$r_i = \alpha + \beta RI_i + \varepsilon_i \quad (3.53)$$

Trata-se de um modelo de regressão linear, onde é descrito o relacionamento em termos matemáticos que se estabelece entre as variáveis. O beta, interpretado como a variação provocada na variável dependente dada a variação de uma unidade na variável independente, é encarado como risco sistemático e grau de dependência existente entre o título e o índice BVL 30. Deste modo o comportamento do beta deveria acompanhar de forma proporcional a informação mútua, se a distribuição de probabilidade seguida pelas séries for normal e se a relação entre essas séries for perfeitamente representada por uma recta, obedecendo a todos os pressupostos base: linearidade, homocedasticidade, ausência de autocorrelação e distribuição normal dos resíduos.

Como é natural, a forma de selecção por parte do investidor perante a informação mútua não é diferente da seguida pela interpretação do beta como o risco sistemático. Se o mercado estiver em alta o investidor tenderá a escolher títulos, para constituir carteiras, com betas de valor superior a 1 para obter uma valorização superior à do mercado e com maior informação mútua. Se o mercado estiver em baixa, serão mais atractivos os títulos mais independentes do mercado, ou seja, aqueles que apresentem menores betas, e consequentemente menor informação mútua.

Pretendendo-se completar o estudo em causa, é analisada a equivalência entre as medidas da teoria de informação utilizadas e a análise de regressão (ao nível das Somas de Quadrados), tal como é sugerido por Philippatos e Wilson (Philippatos et al, 1972), Garner e McGill (Garner et al, 1956). Esta equivalência é evidenciada no seguinte quadro (quadro 3.3):

<b>Análise de regressão</b>	<b>Teoria da informação</b>	<b>Similaridades</b>
<u>Soma de Quadrados da Regressão</u> $SQR = \beta^2 \sum (x_i - \bar{X})^2$	<b>Informação Mútua</b> $I(r_i, RI_i) = H(r_i) - H(r_i   RI_i)$	Ambas as medidas reflectem a variação da variável dependente que é explicada pela variável independente.
<u>Soma de Quadrados do Erro</u> $SQE = \sum (y_i - \bar{y})^2 - \beta^2 \sum (x_i - \bar{X})^2$	<b>Entropia Condicional</b> $H(r_i   RI_i) = H(r_i, RI_i) - H(RI_i)$	A variação da variável dependente que não é explicada pela variável independente, é evidenciada pelo SQE e pela entropia condicional.
<u>Soma de Quadrados Totais</u> $SQT = \sum (y_i - \bar{y})^2$	<b>Entropia Total de ri</b> $H(r_i)$	As medidas reflectem a dispersão total existente na variável dependente.

Quadro 3.2 – Equivalência entre a análise de regressão e medidas da teoria da informação.

Esta equivalência só dá azo a resultados semelhantes quando as séries em estudo obedecem a todos os pressupostos necessários para a utilização da regressão linear simples, pois só desta forma a recta de regressão consegue captar verdadeiramente a relação existente entre as variáveis. Doutro modo, é natural que as medidas exibam “conflitos” entre si, pois enquanto que as medidas da análise de regressão medem as variações na variável dependente que possam ser ou não explicadas pela recta de regressão (que representa a relação entre as variáveis), as medidas da teoria da informação concentram-se na maior ou menor independência entre as variáveis, encarando a relação entre elas como um todo, e não apenas como uma recta.

O quociente entre a entropia condicional de um título e a sua respectiva entropia individual não é mais do que a percentagem de variação do título não explicada pelo mercado, isto é, pelo índice BVL 30. Assim sendo, tal quociente deverá relacionar-se de forma perfeitamente negativa com o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) referente à regressão linear em causa, uma vez que o seu valor exemplifica a percentagem de variação em  $r_i$  explicada por  $RI_i$  (taxa de rendibilidade do índice). Tal correspondência pode ser demonstrada matematicamente:

Se  $H(r_i | RI_i) \Rightarrow$  Incerteza ou independência do título relativamente ao mercado (índice);

Então  $\frac{H(r_i | RI_i)}{H(r_i)} \Rightarrow$  Percentagem de variação no título não explicada (ou independente) do mercado (índice).

Como já foi referido nesta secção, a entropia condicional pode ter como valor máximo  $H(r_i)$ , constatando-se que título e índice são perfeitamente independentes. Se existir total independência, então o ajustamento da recta de regressão será nulo, ou seja  $R^2 = 0$ .

$$H(r_i | RI_i) = H(r_i) \Leftrightarrow \frac{H(r_i | RI_i)}{H(r_i)} = 1 \quad (3.54)$$

Na situação oposta, obtém-se:

$$H(r_i | RI_i) = 0 \Leftrightarrow \frac{H(r_i | RI_i)}{H(r_i)} = 0, \text{ logo } R^2 = 1 \quad (3.55)$$

Se se subtrair o valor do quociente entre entropia condicional e entropia total à unidade, obtém-se o seguinte rácio:

$$\frac{H(r_i) - H(r_i | RI_i)}{H(r_i)} = \frac{I(r_i, RI_i)}{H(r_i)} \quad (3.56)$$

A expressão anterior (3.56) é análoga ao coeficiente de determinação  $R^2$ , variando de forma perfeitamente proporcional se as séries em estudo seguirem uma distribuição normal e respeitarem os pressupostos necessários para serem representadas eficientemente por uma recta de regressão.

Dado que toda a análise da relação entre título e mercado (representado pelo índice BVL 30) é realizada com base no modelo diagonal de Sharpe, são igualmente

calculados os betas e todas as restantes medidas para a regressão linear resultante do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model):

$$r_i - RF = \alpha + \beta (RI_i - RF) + \varepsilon_i \quad (3.57)$$

Onde:

RF – Taxa de rendibilidade do activo sem risco.

### 3.3 – Validação dos modelos aplicados

Este trabalho de investigação utiliza modelos estatísticos para testar a adequabilidade de determinados modelos clássicos de selecção de carteiras ao mercado bolsista de acções português, modelos matemáticos para obter carteiras óptimas e para calcular a entropia.

Como é natural os modelos matemáticos utilizados necessitam de ser validados, uma vez que as soluções obtidas só são aceitáveis quando existe um grau de ajustamento entre os resultados obtidos e a realidade.

A média-variância é um modelo clássico, adoptado por inúmeros investigadores no estudo da gestão de carteiras, cujos resultados serão mais ou menos verosímeis consoante a verificação dos seus pressupostos base na realidade. O modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) são aceites na comunidade científica quando se verificam os seus pressupostos base. Neste trabalho de investigação, estes modelos serão utilizados, mesmo que algum dos seus pressupostos não se verifique na realidade (nomeadamente o pressuposto de que as taxas de rendibilidade dos títulos e índice seguem uma distribuição normal), como forma de contrapor estes resultados aos da entropia, que surge como medida indiferente ao tipo de distribuição de probabilidade patente nos dados empíricos.

A aplicação da entropia como modelo de medida da incerteza e da dispersão é validada pela construção, de acordo com a conceptualização do conceito.

A validação pela construção é o critério mais popular de validação de modelos matemáticos. Este critério envolve a conceptualização do problema com base na experiência e determina que a modelação, a teoria e a especificação dos dados sejam satisfeitos com o recurso a processos científicos. A validação do modelo é feita através

da análise da adequabilidade do conceito entropia à teoria da informação e teoria financeira, mais concretamente à teoria de carteiras, de modo a que os resultados obtidos possam ser considerados o mais verosímeis possível de acordo com os pressupostos estabelecidos. Paralelamente, a metodologia utilizada é semelhante à já explorada por outros investigadores com obtenção de resultados eficazes, como é o caso de George Philippatos (Philippatos et al, 1972), David Nawrocky (Nawrocky, 1976) e Boleslav Gulko (Gulko, 1998).

### **3.4 – Síntese do capítulo**

Este capítulo começa por apresentar a fundamentação teórica necessária ao desenvolvimento deste trabalho de investigação. A fundamentação teórica inicia-se com algumas considerações gerais sobre a hipótese de eficiência do mercado de acções, baseada na evidência de que a distribuição normal de probabilidade não é a que melhor representa o comportamento das taxas de rendibilidade das acções em Portugal (e não só), assim como o facto de que diversos investigadores concluírem que estas taxas não são independentes e identicamente distribuídas. São então apresentadas diversas aplicações da entropia à análise de eficiência dos mercados accionistas.

A subsecção seguinte mostra a adequabilidade da entropia à teoria financeira como medida de incerteza e dispersão global, em detrimento da variância que perde significado como medida de risco se a distribuição de probabilidade não for normal e a mesma for calculada com este pressuposto. É também realçado o papel da entropia e da informação mútua como medidas de informação para o investidor, que perante um determinado cenário precisa saber “o terreno que pisa” para realizar bons investimentos e poder tomar decisões (ao invés de meros palpites).

Na segunda secção são apresentados os modelos aplicados neste trabalho, onde inicialmente são apresentados os modelos estatísticos para testar a normalidade e estacionariedade da distribuição seguida pelas taxas de rendibilidade das acções assim como do índice BVL 30. De seguida é apresentada a metodologia para a comparação entre os valores de entropia e desvio-padrão obtidos para cada um dos títulos e para carteiras seleccionadas aleatoriamente de modo a verificar qual a relação existente entre estas duas grandezas. Posteriormente é evidenciado o modelo da média-variância e modelo da entropia para futura comparação de resultados obtidos. Por último, são

## **4 – DADOS E INFORMAÇÃO**

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. A primeira secção realça a importância da informação para o investidor no mercado de acções, sendo descritas as fontes de informação das quais se pode socorrer o investidor que pretenda investir na Bolsa de Valores de Lisboa. A segunda secção apresenta os títulos que compõem a amostra em estudo, assim como a observação da sua evolução no período em causa. A última secção apresenta uma síntese do capítulo.

### **4.1 – O mercado bolsista de acções português**

As bolsas de valores funcionam como um espelho da economia nacional (e cada vez mais a nível mundial), reflectindo o desenvolvimento gerado e acima de tudo as expectativas e confiança dos investidores na economia.

A existência e disponibilidade de informação adequada é elemento fulcral para o sucesso no investimento em Bolsa. Brealey (Brealey, 1998) afirma ainda que a única base sensível para uma política de investimentos consiste em partir do pressuposto de que é necessária mais informação para conseguir consistentemente lucros superiores.

Apesar de tudo, a existência de informação, por si só, não é suficiente. É indispensável ter capacidade para exprimir rapidamente uma decisão. À medida que os meios de comunicação disponibilizam mais informação em “tempo real”, mais se confunde o momento da recolha da informação com o da decisão. A forma de tratar, procurar e utilizar informação reveste-se também de elevada importância.

Em Portugal a informação referente à evolução da Bolsa de Valores, assim como as cotações dos títulos nela cotados são geralmente publicadas em jornais. São ainda de destacar informações mais detalhadas contendo os volumes transaccionados, número de subidas, número de descidas e mantidas, máximos, mínimos, assim como alguns comentários mais ou menos técnicos sobre tais comportamentos.

São ainda publicados mensalmente pela Bolsa de Valores de Lisboa dados estatísticos assim como indicadores bolsísticos, sendo contudo, normal verificar-se algum desacerto e atraso dos dados, o que pode induzir o investidor em erro. Para além da publicação deste tipo de informação, as empresas cotadas são obrigadas a publicar

semestralmente o seu relatório de contas, os quais são publicados em vários jornais, muitas vezes sob a forma de publicidade. O investidor atento deve ainda ter em atenção a informação económica em geral, dado que o comportamento da bolsa de valores está muito dependente de certos acontecimentos económicos, políticos e sociais.

Apesar de toda esta informação disponível é nas sociedades de corretagem que o investidor tem acesso a informação mais completa e detalhada, acompanhada de recomendações e análises concretas sobre os títulos transaccionáveis. Estas opiniões e conselhos das sociedades corretoras não dotadas de infabilidade podem como é natural induzir o investidor em erro pois não passam de extrapolações para o futuro. Tais previsões, baseadas não só no estudo do comportamento e evolução das empresas mas também em modelos matemáticos que quantificam a rendibilidade e o risco inerentes ao investimento, podem informar mal o investidor se não forem devidamente utilizadas.

A forma de quantificação da rendibilidade e do risco tem sido alvo de alguma polémica na comunidade científica, principalmente no que se refere ao risco, vulgarmente calculado através da variância, com o pressuposto de que a distribuição é normal.

O mercado bolsista de acções português é caracterizado pela sua pequena dimensão e fraca liquidez, o que conduz a um tipo de comportamento muito peculiar não comparável aos grandes mercados mundiais, como por exemplo a Bolsa de Nova Iorque (N.Y.S.E.) ou de Tóquio (T.S.E.).

Neste contexto, muitos modelos matemáticos desenvolvidos e aplicados nos grandes mercados bolsistas mundiais, podem não ser os mais adequados à pequena “praça” que é a Bolsa de Valores de Lisboa.

A assunção do risco e incerteza e o seu perfeito conhecimento é de importância vital para o investidor, que precisa saber “o terreno que pisa” para decidir a melhor posição a tomar. Deste modo a determinação do risco e da incerteza deve ser alvo de especial atenção, de modo a que tais medidas informem da melhor maneira possível o investidor.

A decisão sobre as medidas a utilizar depende do mercado em análise de modo a verificar se os pressupostos dos modelos matemáticos a ele se adequam. A não adequabilidade de determinados pressupostos pode invalidar totalmente a correcta aplicação de um determinado modelo.

## 4.2 – Recolha e tratamento dos dados

Os objectivos deste estudo visam a determinação das taxas de rendibilidade dos títulos que compõem a amostra em estudo, através da análise das séries fornecidas pela Bolsa de Valores de Lisboa referente ao período de 02/01/1996 a 30/12/1999. Estas taxas de rendibilidade serão os dados utilizados para analisar o comportamento da entropia como medida de incerteza.

### 4.2.1 – Títulos da amostra

Este trabalho de investigação debruça-se sobre o estudo do mercado bolsista de acções português (Bolsa de Valores de Lisboa), tendo sido retirados para análise as cotações de fecho diárias de 26 títulos continuamente cotados no período entre 02/01/1996 a 30/12/1999 e o índice BVL 30 para o mesmo período. Tais cotações, correspondentes a 989 observações por cada título e índice BVL 30 e são alvo de tratamento com vista à sua utilização no trabalho de investigação. Neste sentido, são também recolhidos os valores dos dividendos distribuídos pelas empresas referentes aos títulos em causa de forma a encontrar as taxas de rendibilidade respectivas. A expressão utilizada para este propósito é:

$$R_i = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (4.1)$$

Onde:

$R_i$  - Taxa de rendibilidade do título ou acção;

$P_{t-1}$  - Cotação do título ou acção no momento  $t-1$ ;

$P_t$  - Cotação do título ou acção no momento  $t$ ; e,

$D_t$  - Dividendos pagos no momento  $t$ .

A escolha da amostra prende-se com um conjunto de circunstâncias e limitações inerentes ao próprio mercado bolsista português, nomeadamente a sua pequena dimensão e fraca liquidez. O período de tempo analisado (apenas 4 anos) deve-se ao facto de à medida que se alarga o horizonte temporal da amostra o número de títulos

continuamente cotados decresce substancialmente. Deste modo tentou-se encontrar um meio termo entre número de anos e títulos estudados, podendo chamar-se a esta amostra uma “amostra de conveniência”.

As taxas de rendibilidade obtidas para cada título serão alvo de estudo através dos modelos descritos na secção 3.2. Este estudo será suportado por vários programas informáticos, nomeadamente pelo Excel, SPSS, GAMS e Microfit 4.

Para além do índice BVL 30, os títulos que constituem a amostra são descritos no quadro seguinte (quadro 4.1):

<i>Sector</i>	<i>Títulos em estudo</i>
<i>Sector das Indústrias Alimentares e Bebidas</i>	Centralcer, Unicer
<i>Sector da Pasta de Papel e Cartão</i>	Caima, Portucel , Soporcel
<i>Sector do Fabrico de Produtos Químicos</i>	CIN
<i>Sector do Fabrico de Outros Minerais Não Metálicos</i>	Barbosa & Almeida; Fábrica de Porcelanas Vista Alegre
<i>Sector do Fabrico de Veículos Automóveis</i>	Salvador Caetano
<i>Sector da Construção</i>	Mota & Companhia; Soares da Costa
<i>Sector dos Correios e Telecomunicações</i>	Portugal Telecom
<i>Sector da Intermediação Financeira</i>	Banif, BCP, BTA
<i>Sector dos Seguros e Fundos de Pensões</i>	Império, Mundial Confiança, Tranquilidade
<i>Sector dos Serviços Prestados a Empresas</i>	Corticeira Amorim, Engil, Jerónimo Martins, Inapa, Modelo & Continente, Semapa, Somague, Sonae Investimentos

Quadro 4.1 – Títulos da amostra.

No cálculo das taxas de rendibilidade dos referidos títulos são tidos em conta os “Stock’s Split” realizados e tratados da forma considerada adequada segundo a maioria dos investigadores, ou seja as cotações seguintes ao “Stock Split” são multiplicadas pelo valor pelo qual as acções haviam sido divididas. O título Barbosa & Almeida foi alvo de um “Stock Split” em 6/02/1996 sendo cada uma das suas acções dividida em duas. A 26/11/1997 as acções Jerónimo Martins foram divididas por 2,5. Ainda nesse ano, a

04/12/1997 as acções da Inapa também foram alvo de uma divisão, neste caso por cada acção detida o accionista recebia duas acções. O título Modelo & Continente foi alvo de um “Split” em 5/06/1998 em que cada acção passou a ser dividida em duas. Em 18/11/1999 foi a vez do BCP proceder a um “Stock Split” das suas acções, dividindo-as em 5 assim como a Portugal Telecom que tomou a mesma medida em 25/11/1999.

Pela observação do mercado considera-se que a taxa de rendibilidade anual do activo sem risco será de 3,5%, taxa esta obtida tendo em conta as taxas oferecidas pelos depósitos a prazo, certificados de aforro e bilhetes do tesouro. A escolha deste valor de carácter generalista para representar a taxa de rendibilidade do activo sem risco e não o de um activo sem risco em concreto (por exemplo: certificados de aforro, bilhetes do tesouro, depósitos a prazo) deve-se ao facto de o investidor não investir toda a sua riqueza num único activo sem risco, podendo realizar combinações que mais se adequem às suas necessidades. Além disso, vários investigadores portugueses utilizaram analogamente o valor de 3,5 % para representar a taxa de rendibilidade anual do activo sem risco referente a períodos de tempo semelhantes ao abordado neste trabalho de investigação.

#### ***4.2.2 – Evolução da Bolsa de Valores de Lisboa***

O ano de 1996 caracterizou-se por uma subida de cotações apoiada no crescimento da economia nacional, como é visível na figura 4.1, bem como na descida das taxas de juro como forma de adesão à moeda única facilitando assim o endividamento das empresas e dos particulares e a influência positiva de outras bolsas, nomeadamente a bolsa de Nova Iorque, as bolsas do sudeste asiático e as mais importantes bolsas europeias.

A onda de fusões e aquisições que se fez sentir incentivou os investidores na compra de títulos ao aumentar a sua confiança no mercado.

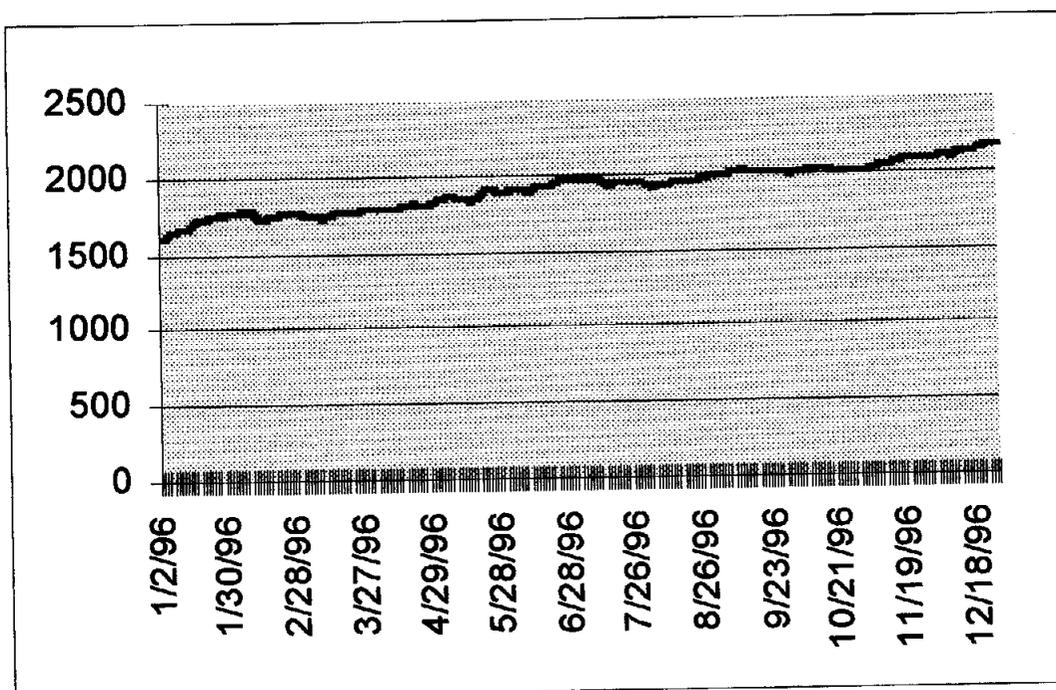


Figura 4.1– Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1996 e 31/12/1996

Fonte: Bolsa de Valores de Lisboa

Em 1997 verificou-se um crescimento da economia portuguesa a um ritmo maior do que a média da União Europeia, o que levou a um aumento das vendas e lucros das empresas, assim como dos preços das acções. As taxas de juro continuavam em baixa assim como a inflação (cerca de 2,2% no final de 1997). A contínua queda das taxas de juro promovia a diminuição dos encargos financeiros de empresas e particulares, estimulando a economia nacional e o investimento em bolsa. Um outro factor de crescimento foi a confiança depositada em Portugal por parte dos outros países fundadores do euro. O mercado financeiro português passou a ser alvo de aposta e atenção de outros países europeus, o que por si só constitui um estímulo ao desenvolvimento.

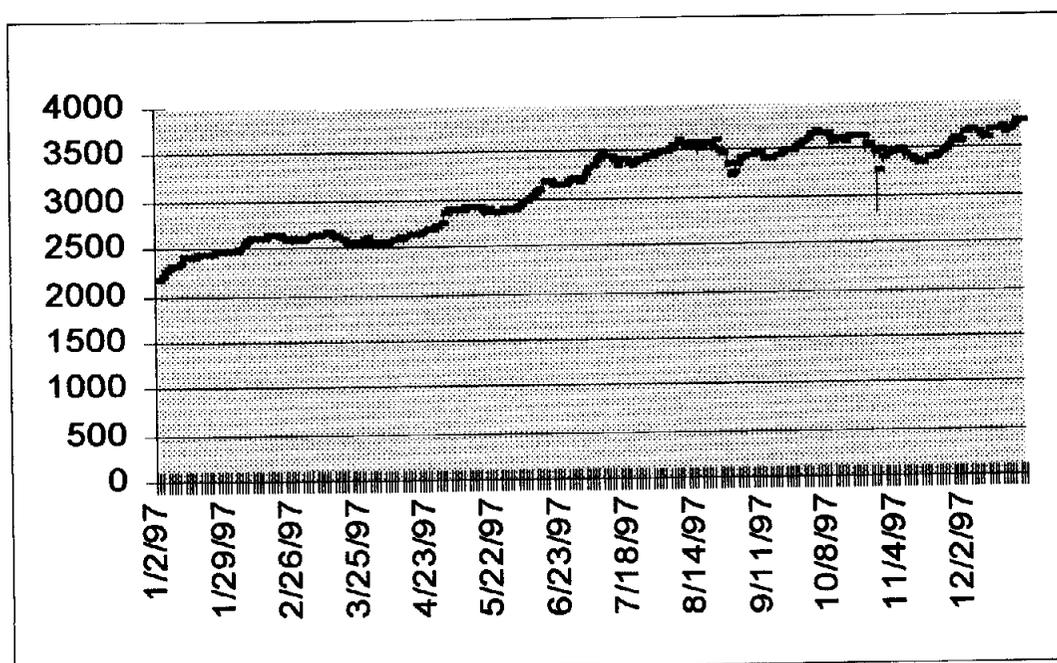


Figura 4.2 – Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1997 e 31/12/1997

Fonte: Bolsa de Valores de Lisboa

A “promoção” anunciada em Maio de 1997 sobre a Bolsa de Valores de Lisboa caracterizando-a como “emergente” e “desenvolvida” de acordo com o critério de uma importante instituição financeira norte-americana, a Morgan Stanley, forneceu uma confiança cada vez maior aos investidores nacionais e estrangeiros, o que contribuiu ainda mais para o seu desenvolvimento e crescimento, como se verifica pela análise da figura 4.2.

O ano de 1998 foi o ano da volatilidade na Bolsa de Valores de Lisboa, que começou o ano com uma subida assombrosa. Na sequência do clima positivo que rodeava o mercado accionista desde 1997 ditado por condições económicas favoráveis (crescimento económico em alta, inflação baixa, queda das taxas de juro, diminuição do desemprego e expectativa de adesão ao euro) verificou-se uma subida dos lucros das empresas. A 22 de Abril de 1998 atingia-se um máximo histórico, cerca de 64% de ganhos acumulados desde o início do ano. Logo de seguida o mercado desceu um pouco, voltando a subir em Julho, como se constata na seguinte figura (figura 4.3) onde é descrita a evolução do índice BVL 30 durante o ano de 1998.

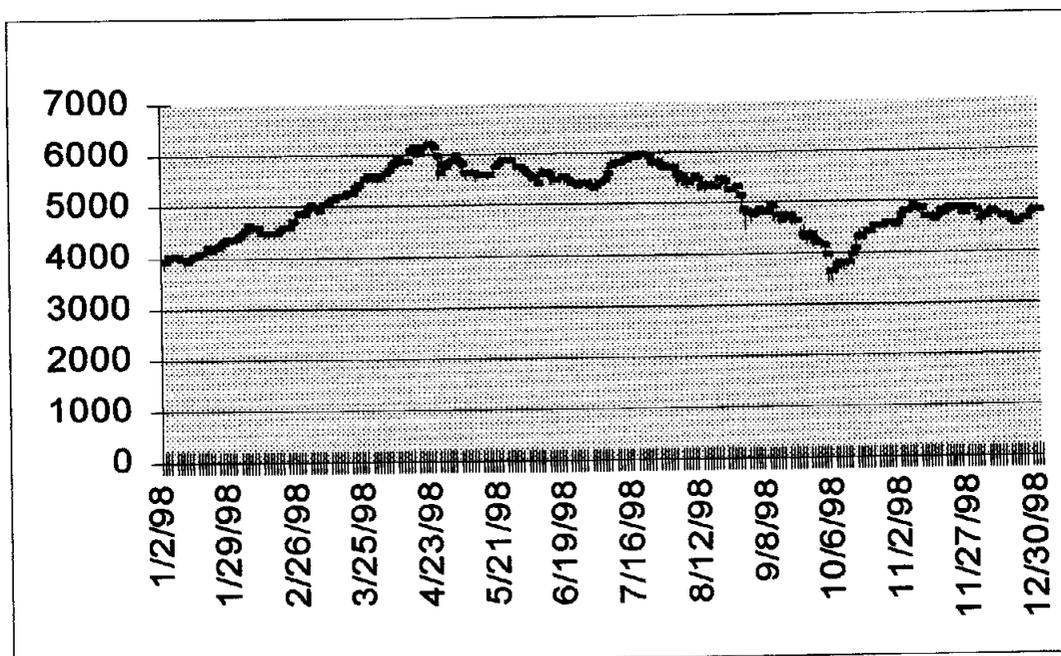


Figura 4.3 – Evolução do índice BVL 30 no período entre 2/01/1998 e 30/12/1998

Fonte: Bolsa de Valores de Lisboa

A verdadeira descida começou depois. O aumento da instabilidade internacional, a desvalorização do rublo em Agosto e o turbilhão que varreu as bolsas mundiais levaram à “queda livre” das cotações na Bolsa de Valores de Lisboa. No dia 1 de Outubro de 1998 o mercado “bateu no fundo”, tendo sido registadas perdas abruptas e a ruína para muitos investidores. Tal situação teve origem também nos conhecidos movimentos de imitação social, onde a grande maioria dos investidores tende a assumir o mesmo comportamento. Neste caso, o movimento gerado foi o de venda, o que levou a que a oferta excedesse largamente a procura de títulos e por isso a sua cotação descesse bruscamente. A “Teoria da Imitação Social” de Callen e Shapiro (Matos, 1993) afirma que é o sentimento dos investidores e o diagnóstico racional sobre os fundamentos da economia que determinam o estado do mercado.

A partir desta data verificou-se um crescimento lento, mas consistente da Bolsa de Valores de Lisboa.

O ano de 1999 foi marcado pela adesão ao Euro, tendo a sua introdução decorrido sem problemas técnicos de maior. A nova moeda foi acolhida com entusiasmo e optimismo pelos mercados, o que proporcionou um crescimento das bolsas no início do ano. Neste cenário de optimismo, a desvalorização do real brasileiro na segunda quinzena de Janeiro, instalou o pânico, pois provocou nefastos efeitos

negativos nas empresas nacionais com investimentos no Brasil. Em resposta a tal situação, as cotações na praça lisboeta caem de forma continuada até meados de Maio. Em Maio a Bolsa de Valores de Lisboa volta a dar sinais de vida registando uma subida de 3,4%, sendo de destacar como factores uma fase de privatização da Brisa e o fim da parceria entre o BCP e o Banco Santander Hispano, que animou o sector bancário.

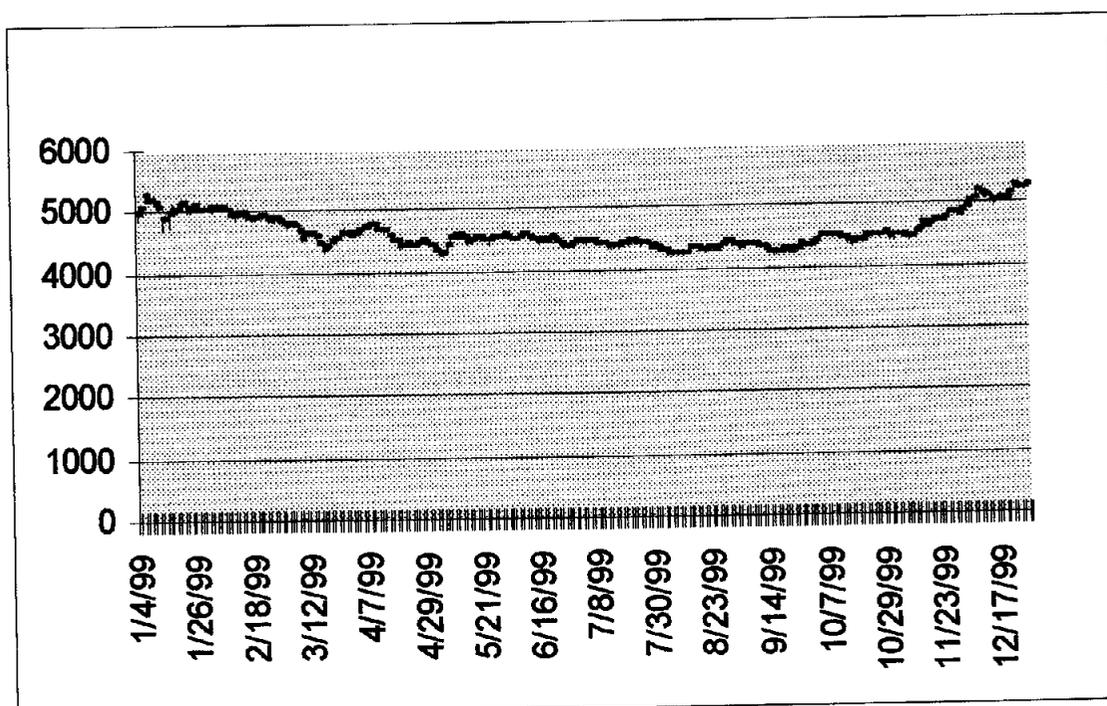


Figura 4.4 - Evolução do índice BVL 30 no período entre 4/01/1999 e 30/12/1999

Fonte: Bolsa de Valores de Lisboa

Os mercados accionistas atravessavam uma fase de grande instabilidade, devido ao receio de que os bancos centrais subissem as taxas de juro, subidas estas tidas como inevitáveis. Apesar de tudo a reacção à subida das taxas de juro não foi muito negativa, ou não tanto como se previa, tendo tal subida sido considerada necessária por muitos investidores como forma de combater o avanço das tensões inflacionistas.

Os três primeiros trimestres de 1999 ficaram marcados pela fuga do investimento para outros países do euro, deprimindo assim a Bolsa de Valores de Lisboa. Em Outubro registou-se uma subida de 4% na praça de Lisboa, continuando tal tendência a manifestar-se até ao fim do ano, como se verifica pela análise da figura 4.4.

### 4.3 – Síntese do capítulo

Este capítulo é dedicado à caracterização e análise da evolução do mercado bolsista de acções português no período entre 02/01/1996 a 30/12/1999. A primeira secção deste capítulo ressalta a importância da informação para o investidor no mercado de acções, sendo descritas as fontes de informação das quais se pode socorrer o investidor que pretenda investir na Bolsa de Valores de Lisboa, para fundamentar as suas decisões. É realçada a importância de o investidor ter acesso à informação mais credível possível, que reflecta a realidade e que não o induza em erro. É neste contexto que se evidencia o facto de que muitos modelos matemáticos desenvolvidos e aplicados nos grandes mercados bolsistas mundiais podem não ser os mais adequados à pequena “praça” que é a Bolsa de Valores de Lisboa, principalmente na forma como é medida a incerteza, cuja assunção e perfeito conhecimento é de importância vital para o investidor para decidir a melhor posição a tomar.

A segunda secção começa por apresentar os títulos que compõem a amostra de conveniência neste trabalho de investigação e o tratamento a que foram sujeitos. A justificação dada para a escolha da amostra em estudo prende-se com um conjunto de circunstâncias e limitações inerentes ao mercado bolsista português, mais concretamente a sua pequena dimensão e fraca liquidez, factos que invalidam a possibilidade de estudar vastas séries contínuas (à semelhança dos estudos aplicados às grandes praças mundiais). Por fim é realizada uma análise temporal do comportamento da Bolsa de Valores de Lisboa entre 2/01/1996 a 30/12/1999, onde são caracterizados e comentados os momentos mais importantes de tal evolução. Do período temporal analisado é de salientar a subida das cotações na Bolsa de Valores de Lisboa desde o início de 1996 até Abril de 1998. A partir de Julho deste ano são registadas as algumas descidas significativas nas cotações, tendo em Outubro acontecido o que todos temiam: “o mercado bateu no fundo”. Esta descida abrupta foi motivada pelo aumento da instabilidade internacional, pela queda de outras bolsas e pelo medo dos investidores. A partir desta data tem-se verificado um crescimento lento mas continuado, excepto no primeiro trimestre de 1999 devido aos aumentos registados na taxa de juro e à fuga de investimentos para outros países da moeda única. A partir de então são de registar tímidas subidas ao nível das cotações cuja tendência se manifesta até ao fim de 1999.

## 5 – RESULTADOS

O presente capítulo inicia-se com uma análise estatística dos títulos que compõem a amostra em estudo organizados por sectores, assim como do índice BVL 30, sendo de realçar a análise das medidas que proporcionam informação acerca da distribuição de probabilidade seguida pelos resultados empíricos.

A segunda secção apresenta os valores da entropia para cada um dos títulos e compara-os com os valores do desvio-padrão, de modo a saber se a dispersão em torno da média se assemelha aos resultados obtidos por uma medida que é independente da distribuição em causa e que mede a dispersão global e a incerteza. São também apresentados os resultados obtidos relativos à comparação entre desvio-padrão e entropia para carteiras seleccionadas aleatoriamente, cuja proporção de cada título na carteira é igual para todos os títulos. É mostrado que o valor da entropia pode ser encarado como o valor ordinal da informação da perspectiva do investidor, no sentido de que, de acordo com a teoria da informação, quanto maior o estado de incerteza, maior a necessidade de informação e, por isso, maior o valor que o investidor atribui à obtenção de informação.

A terceira secção avalia a forma como se comporta a entropia para carteiras óptimas seleccionadas através do modelo da média variância, de modo a verificar se um dos principais pressupostos da teoria de carteiras, a diversificação, é ou não tida em conta pela entropia e avaliar as vantagens que a introdução da entropia pode oferecer em contraposição ao modelo da média-variância. Tal como na segunda secção, os valores da entropia encontrados nesta secção mostram que à medida que a incerteza diminui, o valor que o investidor atribui à informação também diminui.

A quarta secção realiza uma comparação dos resultados obtidos com o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) com a entropia e a informação mútua existentes entre cada um dos títulos e o índice BVL 30, de forma a saber se o índice é ou não uma boa fonte de informação para os títulos em estudo e se os modelos reflectem fielmente essa relação. Deste modo são identificadas vantagens e limitações da entropia e da informação mútua relativamente aos modelos atrás enunciados.

A última secção apresenta uma síntese do capítulo.

## 5.1 - Análise estatística dos títulos e do índice BVL 30

Esta secção apresenta a análise estatística realizada às taxas de rendibilidade dos títulos que compõem a amostra e do índice BVL 30. Com o objectivo de facilitar a leitura e compreensão desta secção os títulos alvo de análise estão organizados por sector.

O quadro 5.1 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector das Indústrias Alimentares e das Bebidas no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Centralcer</i>	<i>Unicer</i>
<i>Número de observações</i>	989	989
<i>Média (%)</i>	0,2443	0,0695
<i>Variância</i>	8,14	2,08
<i>Coefficiente de curtose</i>	14,22189	12,643632
<i>Coefficiente de assimetria</i>	1,204076	1,025691
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-33,7873	-32,5105
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	5,050 0,000	3,563 0,000

Quadro 5.1 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Centralcer e Unicer

Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística das taxas de rendibilidade diárias dos títulos Centralcer e Unicer, patente no quadro anterior (quadro 5.1) permite tirar algumas conclusões sobre a distribuição de probabilidade seguida pelos dados empíricos. O coeficiente de curtose assume valores bastante elevados, respectivamente 14,22189 e 12,643632, estatisticamente diferentes do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal (3), revelando a existência de curvas leptocúrticas. O coeficiente de assimetria apresenta os valores de 1,204076 e 1,025691 denotando-se uma assimetria positiva nas

distribuições em causa. Os valores de assimetria encontrados poderão ter como causa o facto de ambos os títulos terem registado a partir de 1999 frequentes valorizações, fruto do cada vez maior volume de vendas de cervejas, refrigerantes e águas minerais e também dos rumores acerca de uma possível venda da Centralcer a uma outra empresa. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para ambos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.2 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector da Pasta de Papel e Cartão no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Caima</i>	<i>Portucel</i>	<i>Soporcel</i>
<i>Número de observações</i>	989	989	989
<i>Média (%)</i>	0,01828	0,068	0,0246
<i>Variância</i>	4,953	3,49	7,08
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,41670	9,3594002	106,90672
<i>Coefficiente de assimetria</i>	1,141616	0,682108	-5,65114
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-32,8237	-28,0538	-30,9195
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	3,490 0,000	2,615 0,000	3,980 0,000

Quadro n.º 5.2 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Caima, Portucel e Soporcel

Fonte: Cálculos do autor

De acordo com a análise estatística realizada às taxas de rendibilidade diárias dos títulos Caima, Portucel e Soporcel patente no quadro 5.2 verifica-se que o coeficiente de curtose assume valores acima do estabelecido para a distribuição normal, sendo de realçar a curtose referente à Soporcel que assume um valor bastante elevado denotando-se uma curva bastante leptocúrtica. O coeficiente de assimetria apresenta valores positivos para os títulos Caima e Portucel, verificando-se uma acentuada

assimetria negativa para o título da Soporcel. A assimetria negativa e elevado valor de curtose para o título Soporcel deixam antever a existência de uma curva muito leptocúrtica, exibindo acentuado “peakness” e caudas espessas (principalmente na zona negativa da curva). Tal facto poderá dever-se às quebras pronunciadas de que foram alvo as cotações deste título devido à evolução desfavorável dos preços da pasta de papel, levando à fraca liquidez que explica a aglomeração elevada em torno de determinado valor. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para todos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.3 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector do Fabrico de Produtos Químicos no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>CIN</i>
<i>Número de observações</i>	989
<i>Média (%)</i>	0,0643
<i>Variância</i>	4,61
<i>Coefficiente de curtose</i>	43,884235
<i>Coefficiente de assimetria</i>	-2,30575
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-33,0865
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal)</i>	4,461
<i>Sig.</i>	0,000

Quadro 5.3 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título da CIN

Fonte: Cálculos do autor

Pela análise do quadro 5.3 verifica-se que o coeficiente de curtose assume um valor estatisticamente muito distante do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal, verificando-se a existência de uma curva leptocúrtica. O coeficiente de assimetria apresenta um valor negativo, denotando-se uma assimetria negativa

apresentada pelos resultados empíricos. Os valores de curtose e assimetria negativa poderão dever-se ao facto de este título apresentar fraca liquidez no período em estudo, por isso muitas observações aglomeram-se em torno de um determinado valor. Em 1999 a subida do preço do petróleo e seus derivados, assim como do titânio levaram a uma descida acentuada dos lucros da empresa e por arrastamento, da cotação das suas acções, explicando a assimetria negativa evidenciada. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para o título em estudo. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.4 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector do Fabrico de Outros Minerais não Metálicos no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Barbosa &amp; Almeida</i>	<i>Fábrica Porcelanas Vista Alegre</i>
<i>Número de observações</i>	989	989
<i>Média (%)</i>	0,061648	0,08117
<i>Variância</i>	4,009	10,657
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,969225	156,06914
<i>Coefficiente de assimetria</i>	0,646641848	-7,2897199
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste á estacionariedade)</i>	-34,8018	-32,475
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal)</i>	4,819	7,847
<i>Sig.</i>	0,000	0,000

Quadro 5.4 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Barbosa & Almeida e Vista Alegre

Fonte: Cálculos do autor

A observação do quadro 5.4 permite verificar que o coeficiente de curtose assume valores elevados principalmente para o título Fábrica de Porcelanas da Vista Alegre cujo valor é 156,06914, denotando-se a existência de curvas leptocúrticas para

o título da Vista Alegre , mas ligeiramente positivo para o título da Barbosa & Almeida, demonstrando a existência de assimetria para ambos os títulos. O elevado valor de curtose apresentado pelo título Fábrica de Porcelanas Vista Alegre poderá dever-se ao facto de este título apresentar fraca liquidez no período em estudo, por isso muitas observações aglomeram-se em torno de determinado valor. A assimetria negativa poderá ter como principal causa o facto de a partir de 1998 este título ter sofrido sucessivas desvalorizações, fruto dos investimentos realizados no Brasil, cujos retornos ficaram muito aquém das expectativas e também devido à desvalorização do real brasileiro (principalmente a partir de 1999). De salientar ainda que a falta de liquidez do título penalizou o investimento, contribuindo para a existência de uma curva assimétrica negativa. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para ambos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.5 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector do Fabrico de Veículos Automóveis no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Salvador Caetano</i>
<i>Número de observações</i>	989
<i>Média (%)</i>	0,0993
<i>Variância</i>	6,55
<i>Coefficiente de curtose</i>	5,7599388
<i>Coefficiente de assimetria</i>	0,316512
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-38,2271
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal)</i>	4,373
<i>Sig.</i>	0,000

Quadro 5.5 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título Salvador Caetano

Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística das taxas de rendibilidade diárias do título Salvador Caetano permite verificar que o coeficiente de curtose assume um valor estatisticamente diferente do valor correspondente assumido por uma distribuição normal (3), verificando-se a existência de uma curva leptocúrtica. O coeficiente de assimetria apresenta um valor positivo, denotando-se uma ligeira assimetria positiva apresentada pelos resultados empíricos. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para o título em causa. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.6 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector da Construção no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Mota &amp; Companhia</i>	<i>Soares da Costa</i>
<i>Número de observações</i>	989	989
<i>Média (%)</i>	-0,02571	-0,052
<i>Variância</i>	4,096	8,53
<i>Coefficiente de curtose</i>	29,85006	55,21946
<i>Coefficiente de assimetria</i>	-1,0966972	-2,66444
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-35,6245	-31,6405
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	7,711 0,000	3,663 0,000

Quadro 5.6 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Mota & Companhia e Soares da Costa

Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística das taxas de rendibilidade diárias dos títulos Mota & Companhia e Soares da Costa patente no quadro 5.6 demonstra que o coeficiente de curtose assume valores estatisticamente muito distantes do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal, verificando-se a existência de curvas

leptocúrticas. A leptocurtose apresentada poderá ser explicada pela fraca liquidez de ambos os títulos. O coeficiente de assimetria apresenta valores negativos para ambos os títulos, denotando-se uma assimetria negativa apresentada pelos resultados empíricos. Os valores de assimetria encontrados poderão ser explicados pelas quebras acentuadas registadas nas cotações das acções destes títulos, devido ao abrandamento que se verificou no sector da construção (de obras públicas), após a construção da Expo 98 e da Ponte Vasco da Gama. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.7 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector dos Correios e Telecomunicações no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Portugal Telecom</i>
<i>Número de observações</i>	989
<i>Média (%)</i>	0,1616141
<i>Variância</i>	3,38828
<i>Coeficiente de curtose</i>	6,6352796
<i>Coeficiente de assimetria</i>	-0,1303125
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-30,2779
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal)</i>	2,604
<i>Sig.</i>	0,000

Quadro 5.7 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao título Portugal Telecom

Fonte: Cálculos do autor

Como se constata no quadro 5.7, o coeficiente de curtose das taxas de rendibilidade diárias do título Portugal Telecom assume um valor estatisticamente diferente do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal,

verificando-se a existência de uma curva leptocúrtica. O coeficiente de assimetria apresenta um valor ligeiramente negativo, denotando-se uma pequena assimetria negativa apresentada pelos resultados empíricos. Este título apresenta uma maior aproximação à distribuição normal que os restantes títulos, o que poderá dever-se ao facto de ser um dos títulos mais transaccionados, exibindo níveis de liquidez bastante elevados. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para o título em causa. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.8 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector da Intermediação Financeira, no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Banif</i>	<i>BCP</i>	<i>BTA</i>
<i>Número de observações</i>	989	989	989
<i>Média (%)</i>	0,0373	0,123676	0,1162
<i>Variância</i>	4,55	2,91401	4,953
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,715054	12,34477	9,41670
<i>Coefficiente de assimetria</i>	0,48296	-0,140073	1,141616
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-34,1807	-30,6429	-34,3832
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	4,305 0,000	3,472 0,000	4,973 0,000

Quadro 5.8 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Banif, BCP e BTA

Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística das taxas de rendibilidade diárias dos títulos Banif, BCP e BTA, descrita no quadro 5.8, permite verificar que o coeficiente de curtose assume valores estatisticamente distantes do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal verificando-se a existência de curvas leptocúrticas. O coeficiente de

assimetria apresenta valores positivos para o Banif e BTA, enquanto que o BCP apresenta uma assimetria ligeiramente negativa. Esta ligeira assimetria negativa poderá ter como principal causa a quebra acentuada na cotação das acções deste título em 1998, quando da queda do mercado, contudo, a partir dessa data a cotação das acções do BCP voltaram a valorizar-se (ainda que de forma lenta). O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para todos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.9 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector dos Seguros e Fundos de Pensões no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Império</i>	<i>Mundial Confiança</i>	<i>Tranquilidade</i>
<i>Número de observações</i>	989	989	989
<i>Média (%)</i>	0,0589	0,2695	0,1086
<i>Variância</i>	5,13	5,86	3,354
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,792834	27,98305	10,7287081
<i>Coefficiente de assimetria</i>	0,266433	2,496471	0,9758859
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-29,9633	-26,7270	-28,6170
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	3,657 0,000	3,327 0,000	4,214 0,000

Quadro 5.9 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Império, Mundial Confiança e Tranquilidade

Fonte: Cálculos do autor

De acordo com a análise estatística descrita no quadro 5.9 para as taxas de rendibilidade diárias dos títulos Império, Mundial Confiança e Tranquilidade, constata-se que o coeficiente de curtose assume valores estatisticamente diferentes do valor correspondente ao assumido por uma distribuição normal para os três títulos em análise, denotando-se a existência de uma curva mais leptocúrtica para a Mundial Confiança. O

coeficiente de assimetria apresenta valores positivos para todos os títulos, sendo essa assimetria bastante ligeira no que concerne aos títulos Império e Tranquilidade. A pronunciada leptocurtose e assimetria positiva apresentados pelo título Mundial Confiança poderão ser fruto dos benefícios que a empresa obtém do facto de controlar os bancos do grupo Champalimaud, dando-lhe grande notoriedade e acesso privilegiado a uma rede de balcões e a um apreciável número de clientes. Em 1999 as cotações das acções deste título dispararam após o anúncio da oferta do BCP. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para todos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

Os quadros 5.10 e 5.11 mostram os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos que constituem a amostra para o Sector dos Serviços Prestados a Empresas no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>Corticeira Amorim</i>	<i>Engil</i>	<i>Jerónimo Martins</i>	<i>Inapa</i>	<i>Modelo &amp; Continente</i>
<i>Número de observações</i>	989	989	989	989	989
<i>Média (%)</i>	0,0443	0,0677	0,0889487	0,07563	0,091387
<i>Variância</i>	4,38	4,6	7,134	3,74783	4,73707
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,913623	104,0045	108,59321	16,13453	33,02342
<i>Coefficiente de assimetria</i>	0,6584	5,810302	-6,33406	0,61997	-2,220936
<i>Estatística de Dickey-Fuller</i>	-28,8226	-29,9615	-30,3928	-35,7476	-29,7998
<i>Kolmogorov- Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	3,517 0,000	4,125 0,000	4,244 0,000	4,755 0,000	3,679 0,000

Quadro 5.10 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos

Corticeira Amorim, Engil Jerónimo Martins, Inapa e Modelo & Continente

Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística das taxas de rendibilidade dos títulos Corticeira Amorim, Engil, Jerónimo Martins, Inapa e Modelo & Continente descrita no quadro 5.10 permite verificar que o coeficiente de curtose assume valores muito elevados para todos os títulos apresentados, demonstrando a existência de curvas leptocúrticas referentes aos resultados empíricos. O coeficiente de assimetria apresenta valores positivos para os títulos Corticeira Amorim, Engil e Inapa e negativos para os títulos Jerónimo Martins e Modelo & Continente, denotando-se a inexistência de simetria em qualquer um deles.

O título Engil apresenta uma curva muito leptocúrtica e uma assimetria muito positiva, que poderão ser fruto das frequentes valorizações apontadas pelas acções do título e uma forte desvalorização em 1998, promovendo a aglomeração em torno de um determinado valor. Os títulos Jerónimo Martins e Modelo & Continente apresentam ambos elevados níveis de assimetria negativa que terão como principal causa as quebras abruptas sofridas por ambos os títulos devido à grande aposta que ambos fizeram no Brasil e da Jerónimo Martins na Polónia. A queda do real brasileiro e do zloty polaco levaram à queda dos lucros destas empresas. A acentuada leptocurtose apresentada por ambos os títulos deve-se ao facto de no período em estudo ambos os títulos terem registado desvalorizações frequentes e acentuadas, levando a uma grande aglomeração em torno de uma taxa de rendibilidade negativa, principalmente o título Jerónimo Martins. Outro factor apontado, por muitos investigadores, para a existência de curvas leptocúrticas é o facto de taxas de rendibilidade não serem independentes e identicamente distribuídas. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para todos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

<i>Estatística</i>	<i>Semapa</i>	<i>Somague</i>	<i>Sonae Investimentos</i>
<i>Número de observações</i>	989	989	989
<i>Média (%)</i>	0,10673	0,037	0,1083
<i>Variância</i>	2,96	7,08	6,62
<i>Coefficiente de curtose</i>	9,3605429	10,562639	23,18789
<i>Coefficiente de assimetria</i>	-0,5294976	0,646117	-1,10393
<i>Estatística de Dickey-Fuller</i>	-30,8206	-31,5236	-29,9316
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal) Sig.</i>	2,793 0,000	3,636 0,000	3,577 0,000

Quadro 5.11 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas aos títulos Semapa, Somague e Sonae Investimentos

Fonte: Cálculos do autor

O quadro 5.11 descreve a análise estatística realizada às taxas de rendibilidade diárias dos títulos Semapa, Somague e Sonae Investimentos. Verifica-se que o coeficiente de curtose assume valores elevados para todos os títulos apresentados, em especial para o título Sonae Investimentos, demonstrando a existência de curvas leptocúrticas referentes aos resultados empíricos. O coeficiente de assimetria apresenta valores ligeiramente positivos para o título Somague e negativos para os títulos Semapa e Sonae Investimentos, verificando-se que a assimetria existente em qualquer um dos títulos não é muito acentuada. A leptocurtose e a assimetria negativa exibidas pela curva dos título Sonae Investimentos poderão dever-se ao facto de a partir de 1996 o congelamento da atribuição de novas licenças para a abertura de novas grandes superfícies comerciais ter condicionado o crescimento do sector, assim como a aposta no Brasil não ter proporcionado o que se esperava, em grande parte por causa da subida do real brasileiro. Tais factos promoveram uma aglomeração acentuada das observações. Outro motivo apontado para a existência de uma curva leptocúrtica poderá ser o facto de taxas de rendibilidade não serem independentes e identicamente

distribuídas O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade para todos os títulos. O valor assumido pela estatística de Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

O quadro 5.12 mostra os resultados obtidos pela análise estatística da distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade dos índice BVL 30 no período entre 2/01/1996 e 30/12/1999.

<i>Estatística</i>	<i>BVL 30</i>
<i>Número de observações</i>	989
<i>Média (%)</i>	0,127
<i>Variância</i>	1,39
<i>Coefficiente de curtose</i>	10,964574
<i>Coefficiente de assimetria</i>	-0,59877
<i>Estatística de Dickey-Fuller (Teste à estacionariedade)</i>	-25,5521
<i>Kolmogorov-Smirnov (distribuição normal)</i>	5,325
<i>Sig.</i>	0,000

Quadro 5.12 – Análise estatística das taxas de rendibilidade diárias relativas ao índice BVL 30  
Fonte: Cálculos do autor

A análise estatística realizada às taxas de rendibilidade diárias do índice BVL 30 denotam um afastamento da distribuição de probabilidade normal. O coeficiente de curtose assume um valor estatisticamente diferente do assumido pela distribuição normal, sendo de concluir que a curva apresentada é leptocúrtica. O coeficiente de assimetria apresenta um valor ligeiramente negativo, denotando-se uma pequena assimetria negativa apresentada pelos resultados empíricos, que poderá ter como principal causa o facto de a partir de Julho de 1998 o mercado ter registado quebras sucessivas e acentuadas cuja recuperação em 1999 se afigurou muito “tímida” e lenta. O valor assumido pela estatística de Dickey-Fuller como teste à estacionariedade revela a existência de estacionariedade o índice. O valor assumido pela estatística de

Kolmogorov-Smirnov leva a que seja rejeitada a hipótese de a distribuição empírica seja conformada por uma distribuição normal, aos níveis de significância de 1% e 5%.

Pela análise estatística atrás realizada verifica-se que nenhum dos títulos apresenta as características fundamentais inerentes à distribuição normal, estando muitos deles bastante afastados dessa distribuição. Tal conclusão retira-se facilmente através da observação não só dos coeficientes de curtose e assimetria demonstrados pelos resultados empíricos, mas essencialmente pelos resultados obtidos com o teste de Kolmogorov-Smirnov, segundo o qual nenhum dos títulos tem probabilidade de ser perfeitamente representados pela distribuição normal. A mesma conclusão é retirada relativamente ao índice BVL 30, cujas taxas de rendibilidade no período em estudo denotam a existência de uma curva leptocúrtica e uma ligeira assimetria negativa, revelando o teste de Kolmogorov-Smirnov a inexistência de possibilidade de tais resultados serem representados fielmente pela distribuição normal de probabilidade.

O pressuposto dos modelos tradicionais de gestão de carteiras abordados neste trabalho de investigação, de que as taxas de rendibilidade seguem uma distribuição de probabilidade normal, não se verifica, o que pode invalidar os seus resultados ou pelo menos, não garantir a sua total credibilidade. Verifica-se que existe uma lacuna ao nível da informação prestada ao investidor por parte destes modelos, o que poderá induzir em erro e até ludibriar o investidor quanto às suas opções de investimento. Torna-se importante analisar se a variância ou desvio-padrão consegue captar a verdadeira incerteza referente aos dados empíricos. Uma comparação do comportamento entre o desvio-padrão e a entropia como medidas de dispersão e incerteza poderá elucidar acerca das possíveis limitações que poderão advir se apenas se tiverem em conta os dois primeiros momentos de uma distribuição: média e variância.

## **5.2 - Comparação entre a entropia e o desvio-padrão**

A secção anterior demonstra que as distribuições empíricas referentes aos dados em análise não podem ser perfeitamente representados pela distribuição normal de probabilidade. Deste modo, a forma como é vulgarmente medida a dispersão e a incerteza, através da variância calculada com o pressuposto da normalidade, pode não ser suficiente para caracterizar a distribuição empírica, uma vez que a variância não é

mais do que a dispersão em relação à média. Caso a distribuição de probabilidade não seja normal a sua caracterização não é completa com a mera assunção dos dois primeiros momentos (média e variância). Não sendo nenhuma das distribuições analisadas simétricas e/ou mesocúrticas, é natural que a dispersão seja insuficientemente medida se a sua forma de cálculo se resumir à variância. A introdução de uma nova medida de dispersão, independente da distribuição empírica, que se adequa às características peculiares dos dados analisados é um dos objectivos deste trabalho de investigação, pretendendo-se determinar se a entropia como medida de incerteza e dispersão pode constituir uma boa medida de dispersão no mercado bolsista de acções acima de tudo, uma boa fonte de informação para o investidor que precisa conhecer o “terreno que pisa” para poder tomar a melhor decisão.

Para cada um dos 26 títulos que compõem a amostra em estudo foi calculada a entropia, que representando a incerteza e a dispersão existente na distribuição empírica deveria assumir um comportamento semelhante ao logaritmo do desvio-padrão (ou variância) caso a distribuição seguida fosse normal.

Pela análise do quadro 5.13 e da figura 5.1 verifica-se que o desvio-padrão (em %) e a entropia (em bits) não assumem o mesmo comportamento para todos os títulos, verificando-se em muitos casos, movimentos contrários. Tal comportamento deve-se sem dúvida ao facto de a distribuição empírica se afastar muito da distribuição normal, verificando-se em certos títulos um coeficiente de curtose e de assimetria bastante elevado. Deste modo a mera assunção da média e da variância como parâmetros caracterizadores da distribuição é insuficiente. Se a distribuição empírica não é normal, então não basta conhecer a média e a variância para a sua caracterização. Torna-se necessário ter em conta outros parâmetros que possibilitem a noção verdadeira e concreta da distribuição em causa.

<i>Título</i>	<i>Desvio-padrão (%)</i>	<i>Entropia (bits)</i>	<i>Ln (Desvio-padrão)</i>	<i>Entropia (dist. normal) (bits)</i>
<b>Vista Alegre</b>	3,2645397	2,58028204	1,183118773	2,900535378
<b>Soares Costa</b>	2,9205169	3,171895788	1,071760621	2,820207452
<b>Centralcer</b>	2,8525665	3,130166736	1,048219115	2,803225845
<b>Jer. Martins</b>	2,67101759	2,918987	0,98245952	2,755790324
<b>Somague</b>	2,6617643	3,193168743	0,978989174	2,753286998
<b>Soporcel</b>	2,6610754	3,001623871	0,978730327	2,75310028
<b>BTA</b>	2,615799	2,895779193	0,961569596	2,740721429
<b>Sonae Inv.</b>	2,5731692	3,121304276	0,945138291	2,728868748
<b>Salv. Caetano</b>	2,5597	2,832231723	0,939890064	2,725082953
<b>Mundial Conf.</b>	2,42023	3,029137323	0,883862577	2,684667664
<b>Império</b>	2,2653956	2,980807878	0,817749402	2,636977088
<b>Caima</b>	2,2255334	2,99054905	0,799996617	2,624171161
<b>Modelo Cont.</b>	2,176481104	2,767113	0,7777094	2,608094333
<b>CIN</b>	2,1472687	2,718160174	0,764196662	2,598346953
<b>Engil</b>	2,1457149	2,721655262	0,763472784	2,597824785
<b>Banif</b>	2,1319235	2,818774541	0,757024624	2,593173421
<b>Cort. Amorim</b>	2,0936938	2,866084564	0,738929874	2,580120818
<b>Mota C.<sup>a</sup></b>	2,0239	2,217828328	0,705026343	2,55566459
<b>Barb. &amp; Alm.</b>	2,00227621	2,712339	0,694284638	2,547916088
<b>Inapa</b>	1,9359311	2,59584	0,660588399	2,523609389
<b>Portucel</b>	1,86756	2,784854109	0,624632766	2,497672882
<b>PT</b>	1,840728116	2,80683108	0,610161209	2,48723386
<b>Tranquilidade</b>	1,8314708	2,636380785	0,60511936	2,483596935
<b>Semapa</b>	1,720349	2,66710245	0,542527177	2,438446219
<b>BCP</b>	1,707047158	2,591043	0,53476507	2,432847042
<b>Unicer</b>	1,4437669	2,374187502	0,367255601	2,312014502

Quadro 5.13 – Valores de entropia e desvio-padrão para todos os títulos

Fonte: Cálculos do autor

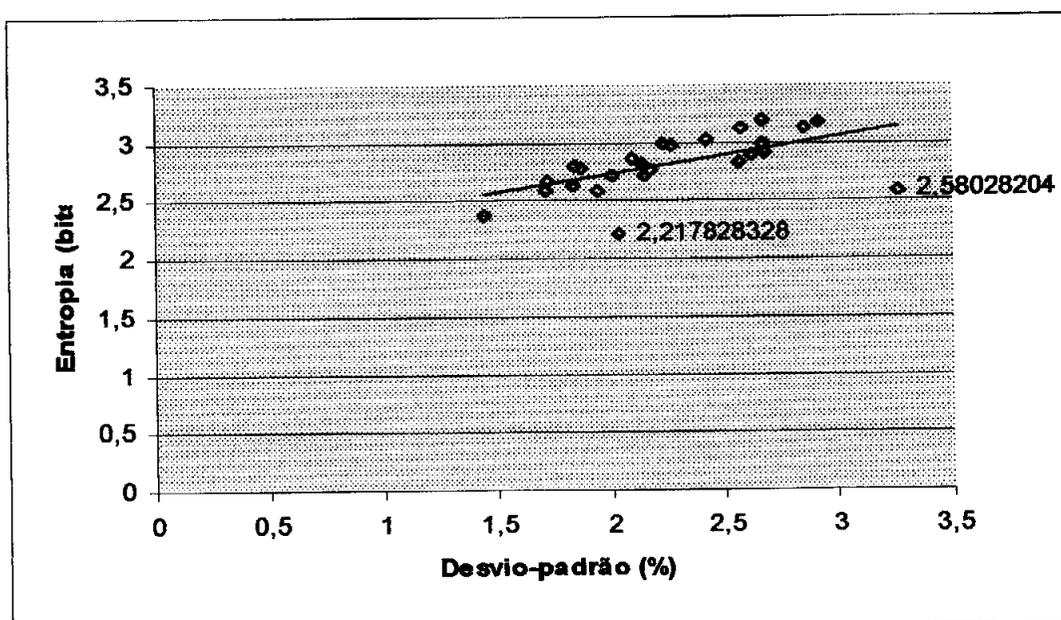


Figura n.º 5.1 – Entropia versus desvio-padrão

Fonte: Cálculos do autor

Pela análise da figura anterior denota-se a existência de uma correlação ténue mas positiva entre desvio-padrão e entropia, deixando antever que a relação não é perfeita, existindo algo mais que o desvio-padrão como factor explicativo da dispersão global e incerteza existentes nas distribuições empíricas. É observada, na figura 5.1, a presença de “outliers”, isto é, títulos que se afastam mais do “comportamento geral” exemplificado pela recta de regressão. Os títulos Mota & Companhia e Vista Alegre são os que mais se afastam da recta de regressão. Tal afastamento dever-se-á ao facto de estes serem dos títulos que registaram menor liquidez no período de tempo em estudo. O facto de a sua liquidez ser bastante fraca leva a que a sua distribuição não possa ser fielmente representada pela curva de Gauss, o que aumenta a distância entre desvio-padrão e entropia. Tal facto é demonstrado pelos valores da estatística de Kolmogorov-Smirnov, que para estes dois títulos apresentam valores muito elevados, respectivamente 7,711 e 7,847 (conforme análise estatística realizada na secção anterior).

Para melhor compreender as diferenças existentes foi calculada a entropia de cada título para o caso em que a distribuição empírica fosse normal. Verifica-se pela análise do quadro anterior (quadro 5.13), que se a distribuição de probabilidade empírica fosse perfeitamente normal, a entropia calculada a partir do desvio-padrão deveria apresentar o mesmo comportamento que a entropia calculada pela fórmula geral. Tal evidência demonstra por si só que os títulos não seguem essa distribuição,

como foi demonstrado no início deste capítulo. Além disso, é de realçar que a entropia calculada com o pressuposto de que as distribuições são normais é menor para quase todos os títulos que a entropia calculada sem este pressuposto. Este facto reforça a ideia partilhada por muitos investigadores que o mercado bolsista de acções incorpora uma incerteza superior àquela que é dada pela variância com o pressuposto da normalidade. A entropia é mais sensível às características peculiares da distribuição de probabilidade empírica, o que pode ser factor do afastamento dos valores da entropia calculada sem ter por base a distribuição normal e a entropia baseada nesta distribuição. Para além da curtose e da assimetria existem outras características (por exemplo a maior ou menor concentração ao nível das caudas) que poderão afastar uma dada distribuição empírica da curva de Gauss.

Se as distribuições fossem perfeitamente normais, a relação entre a entropia e o logaritmo do desvio-padrão seria perfeita, o que não sucede, tal como é visto na seguinte figura (figura 5.2).

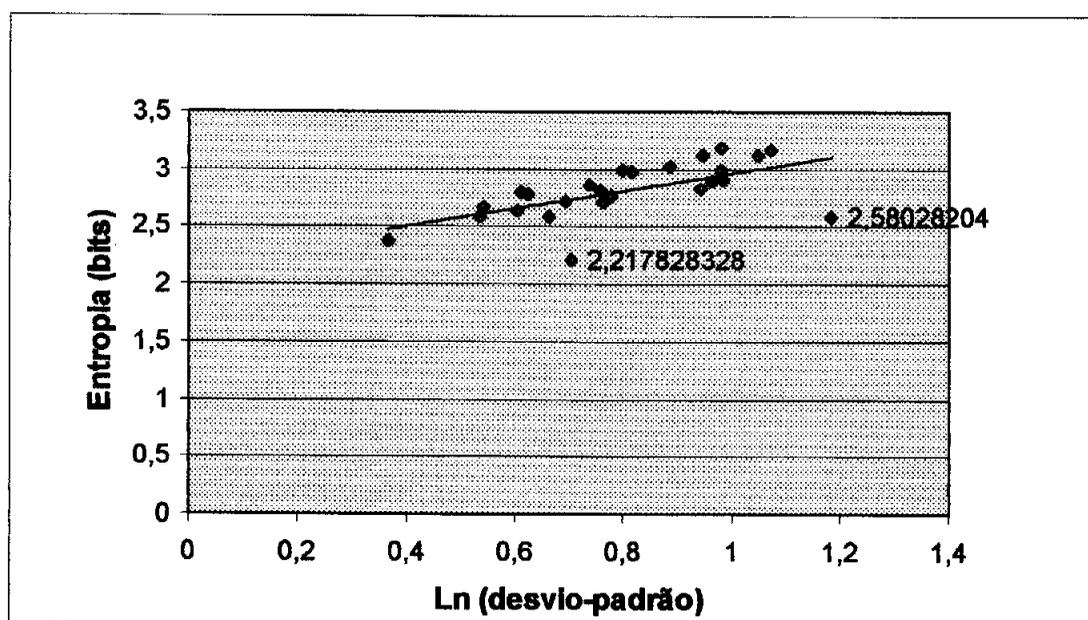


Figura 5.2 – Entropia *versus* logaritmo do desvio-padrão

Fonte: Cálculos do autor

A presença de “outliers” faz-se novamente notar, agora na figura 5.2. As observações que mais se afastam da recta de regressão são os títulos Mota & Companhia e Vista Alegre, pelas razões atrás explicadas, aquando da análise da figura 5.1. Mais uma vez se realça que as características peculiares do mercado bolsista de acções português não são compatíveis com alguns pressupostos base dos modelos tradicionais de gestão de carteiras, nomeadamente o pressuposto da normalidade.

Para além do estudo comparativo entre o comportamento do desvio-padrão e da entropia para cada um dos títulos isoladamente, é importante executar tal comparação no seio de carteiras mais ou menos diversificadas, uma vez que na gestão de carteiras não faz muito sentido estudar os títulos de per si, mas sim o seu contributo numa carteira de activos financeiros. Pretende-se verificar se a entropia é ou não sensível à diversificação (um dos principais motes da teoria de carteiras) e para isso realiza-se uma análise semelhante à realizada por Elton e Gruber (Elton e Gruber, 1995). Estes autores demonstraram que a diversificação é factor de minimização do risco (identificado pelo desvio-padrão). O estudo compreende a selecção aleatória de títulos para constituir carteiras com uma única premissa: a proporção de cada título na carteira é idêntica para todos os títulos. Os pressupostos aqui são idênticos, sendo também calculada a entropia, de modo a confirmar se a entropia é realmente sensível ao efeito de diversificação. É também calculada a informação mútua existente em cada carteira. No quadro 5.14 é resumida a informação relevante para este estudo.

<i>Carteira</i>	<i>N.º títulos</i>	<i>Desvio-padrão</i>	<i>Entropia (bits)</i>	<i>Informação Mútua</i>
A	1	0,0222553	2,99054905	0
B	2	0,0165734	2,6465816	0,19584795
C	3	0,0175533	2,42767316	0,40377709
D	4	0,0147185	2,36422585	0,47303637
E	5	0,0136143	2,3237985	0,58009111
F	6	0,0140012	2,38281955	0,49779404
G	7	0,0115135	2,09407317	0,67965136
H	8	0,011361	2,03465912	0,67939794
I	9	0,0125825	2,16113041	0,65247438
J	10	0,0118049	2,05863396	0,77692434
K	11	0,0108585	2,01217243	0,77292399
L	12	0,0115822	2,14672464	0,64029908
M	13	0,0111265	2,07985625	0,72812344
N	14	0,0101289	1,9470861	0,8590069
O	15	0,0108015	2,05530251	0,77801151
P	16	0,0100664	1,95652605	0,84967062
Q	17	0,0098334	1,95485594	0,8249806
R	18	0,0103622	2,00671183	0,81644891
S	19	0,0103877	1,99666787	0,8184333
T	20	0,0093484	1,86985293	0,86731209
U	21	0,0099276	1,96155279	0,81952222
V	22	0,0100826	1,92220253	0,89861104
W	23	0,0098885	1,93483289	0,87845503
X	24	0,0100192	1,94216286	0,88178592
Y	25	0,0098246	1,90616621	0,90116492
Z	26	0,009738	1,91137818	0,81168489

Quadro 5.14 – Entropia, informação mútua e desvio-padrão de carteiras

Fonte: Cálculos do autor.

Pela análise do quadro anterior denota-se uma diminuição do desvio-padrão e também da entropia à medida que aumenta o número de títulos na carteira, o que comprova que a diversificação é realmente um factor de diminuição do risco e da incerteza e que a entropia é sensível a este factor. Tal situação é explicada pelo simples facto de o número de estados possíveis da carteira diminuir progressivamente à medida que o número de títulos nela incluídos aumenta, logo a incerteza que o investidor tem acerca da carteira tende a diminuir à medida que nela é introduzido mais um título. Tal diminuição da incerteza não se deve somente à introdução do título, mas essencialmente ao facto de este contribuir para a redução do número de acontecimentos prováveis.

São ainda observados alguns movimentos estatísticos considerados irregulares e irrelevantes (aumento da entropia e do desvio-padrão quando o número de títulos aumenta uma unidade), contudo não deverão ser tidos em conta uma vez que tal facto dever-se-á à pequena dimensão da amostra e devido ao facto de a selecção ser perfeitamente aleatória.

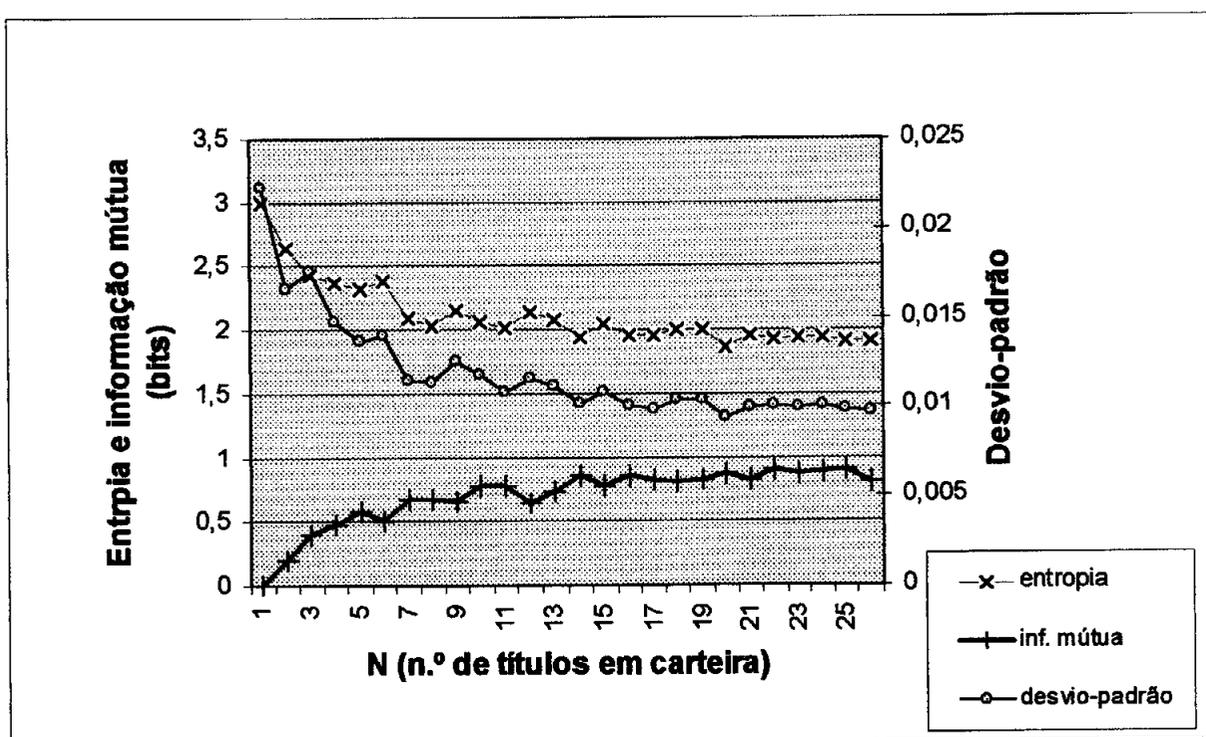


Figura 5.3 – Relação da entropia, informação mútua e desvio-padrão com o número de títulos

Fonte: Cálculos do autor

Como se verifica na figura 5.3, a entropia tende a diminuir com a inclusão de mais um título na carteira, comprovando-se assim que a diversificação como factor de

diminuição da incerteza não é indiferente à entropia. De forma a complementar tal estudo, calculou-se a informação mútua existente em cada carteira, verificando-se que à medida que o número de títulos aumenta o investidor possui mais informação, pois com o comportamento de certos títulos pode compreender e prever de forma mais concreta o valor da sua carteira. É a correlação existente entre os títulos que torna possível a existência de informação mútua, uma vez que se estes fossem independentes entre si, a informação mútua seria nula.

Pela observação do quadro 5.14 e também da figura 5.3 constata-se que à medida que o número de títulos que compõem a carteira aumenta, o investidor tem mais informação sobre a sua carteira. A soma das entropias individuais dos títulos que constituem a carteira é maior que a entropia das carteiras de títulos, de tal modo que a informação mútua surge como uma função crescente com o número de títulos na carteira. Neste contexto o valor dado à obtenção de mais informação é cada vez menor, tal como é demonstrado pelo valor da entropia, que para além da incerteza pode ainda ser encarada como valor ordinal da informação.

A hipótese de que a entropia pode ser vista como valor ordinal económico da informação baseia-se no facto de que quanto maior o estado de incerteza em que se encontra o investidor, maior será a sua necessidade de informação. Pela lei da oferta e da procura, sabe-se que quanto maior a procura de um determinado bem ou serviço, maior será o seu valor económico, o que é motivado pelo desequilíbrio entre o que se procura e o que há para oferecer. Deste modo, se o estado de incerteza é muito elevado, a procura de informação aumenta substancialmente, logo o valor da informação, do ponto de vista do investidor, também sofrerá um incremento. Para o investidor este aumento é natural, pois se se encontra num ambiente de maior volatilidade e incerteza, está disposto a “pagar” mais pela obtenção de informação que permita basear a sua decisão de forma mais racional. Neste contexto, o investidor que apenas conhece o comportamento das taxas de rendibilidade das acções é orientado na procura de informação credível, oportuna e fidedigna para solucionar a situação em que se encontra. Convém salientar que a obtenção de informação não é garantia de um processo de tomada de decisão correcto. Como já foi referido neste trabalho, a informação não é condição necessária e suficiente para tomar boas decisões, é apenas condição necessária. A forma como é tratada e utilizada a informação obtida é que distingue a boa da má decisão.

### 5.3 – Modelo da média-variância *versus* média-entropia

Esta secção realiza uma análise comparativa entre os resultados obtidos pelo método de selecção de carteiras da média-variância e os valores alcançados de entropia por aquelas carteiras seleccionadas.

A selecção de carteiras óptimas foi realizada com base no modelo da média-variância, cuja função de objectivo evidencia uma função utilidade, sujeita a restrições de não negatividade e de que a soma das proporções dos títulos nas carteiras seria igual a 100%. Para calcular os valores óptimos foi utilizado o programa de optimização GAMS.

Foram utilizados vários coeficientes de aversão ao risco ( $K$ ) cujos valores variam entre 0 e 1, considerando-se que um  $K = 0$  identifica um investidor neutro ao risco e à medida que o valor de  $K$  aumenta, o coeficiente de aversão ao risco aumentará também. Não foram considerados  $K$ 's negativos, uma vez que tal significaria que o investidor seria amante do risco, o que não caracteriza o típico investidor na bolsa de valores. Para valores de  $K$  entre 0.2 e 1 não se verificou qualquer alteração dos títulos que constituem a carteira, apenas e só na respectiva proporção de cada título, por isso não foram consideradas possíveis carteiras para estes tais valores de  $K$ , uma vez que a fronteira de eficiência as representará eficazmente. Convém realçar o facto de que para valores de  $K$  iguais ou superiores a 0.05 o activo sem risco foi alvo de selecção por parte do modelo, aumentando o seu peso na carteira à medida que o coeficiente de aversão ao risco também aumenta. Esta situação deve-se ao facto de à medida que o coeficiente de aversão ao risco aumenta o investidor tenta evitar cada vez mais o risco, logo é natural que a partir de determinados valores de  $K$  a preferência pelo activo sem risco seja justificada. Foram encontradas as seguintes carteiras óptimas (quadro 5.15):

<b>Coefficiente de aversão ao risco (K)</b>	<b>Constituição da carteira óptima</b>	<b>Rendibilidade média diária e variância diária da carteira</b>
K = 0 Carteira 1	Mundial Confiança = 100%	Rendibilidade média = 0,27% Variância = 5,58159
K = 0,005 Carteira 2	Centralcer = 20,729% Mundial Confiança = 79,721%	Rendibilidade média = 0,26472% Variância = 4,279832
K = 0,008 Carteira 3	Centralcer = 28,030% Mundial Confiança = 71,970%	Rendibilidade média = 0,26271% Variância = 3,952351987
K = 0,01 Carteira 4	Centralcer = 30,613% Mundial Confiança = 69,387%	Rendibilidade média = 0,26204% Variância = 3,876779972
K = 0,05 Carteira 5	BTA = 0,966% Centralcer = 23,309% Vista Alegre = 3,150% Mundial Conf. = 36,977% Salv. Caetano = 7,305% Tranquilidade = 13,336% Unicer = 4,261% Activo s/ risco = 10,696%	Rendibilidade média = 0,1866322% Variância = 1,726323986
K = 0,1 Carteira 6	BTA = 0,483% Centralcer = 11,654% Vista Alegre = 1,575% Mundial Conf. = 18,489% Salv. Caetano = 3,652% Tranquilidade = 6,668% Unicer = 2,130% Activo s/ risco = 55,348%	Rendibilidade média = 0,100316% Variância = 0,431579886
K = 0,2 Carteira 7	BTA = 0,241% Centralcer = 5,827% Vista Alegre = 0,788% Mundial Conf. = 9,244% Salv. Caetano = 1,826% Tranquilidade = 3,334% Unicer = 1,065% Activo s/ risco = 77,674%	Rendibilidade média = 0,0571584% Variância = 0,0,107896
K = 1 Carteira 8	BTA = 0,048% Centralcer = 1,165% Vista Alegre = 0,158% Mundial Conf. = 1,849% Salv. Caetano = 0,365% Tranquilidade = 0,667% Unicer = 0,213% Activo s/ risco = 95,535%	Rendibilidade média = 0,022632% Variância = 0,004316

Quadro 5.15 – Carteiras óptimas seleccionadas pelo modelo da média-variância

Fonte: Cálculos do autor

De acordo com a selecção realizada pode determinar-se a fronteira de eficiência, que demarca as soluções não-dominadas, como se pode ver na seguinte figura (figura 5.4):

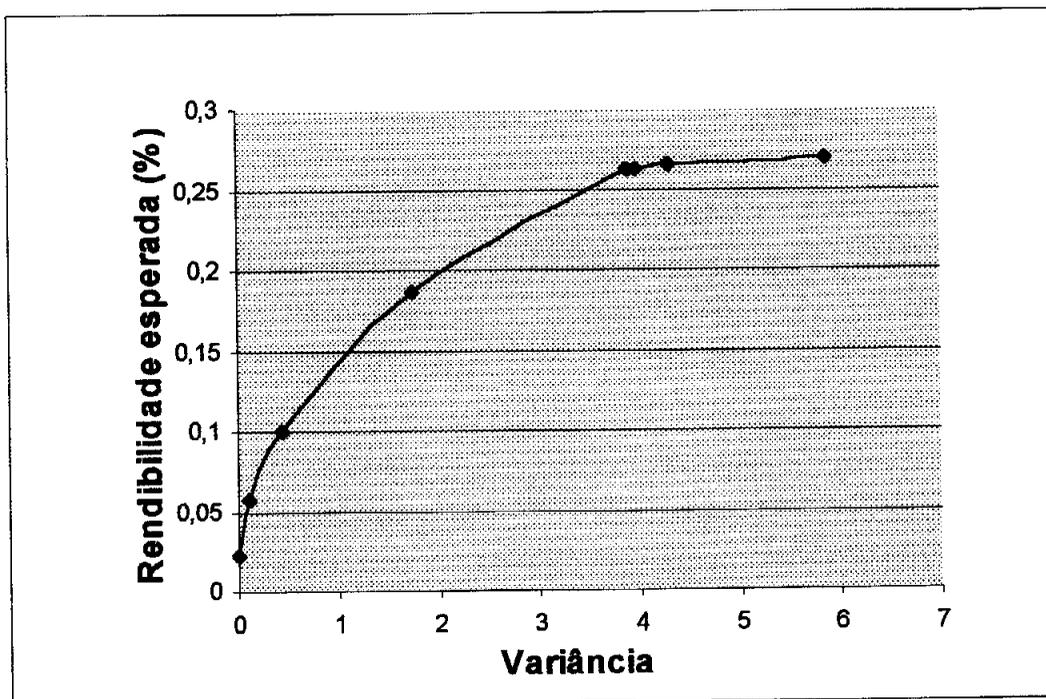


Figura 5.4 – Fronteira de eficiência para as carteiras seleccionadas

Fonte: Cálculos do autor

Numa tentativa de comparação entre as medidas de dispersão (variância e entropia) é então calculada a entropia efectiva de cada uma das carteiras seleccionadas anteriormente, como se constata no seguinte quadro (quadro 5.16):

K	Média (%)	Variância	Entropia (bits)	Entropia da dist. normal (bits)
0	0,27	5,851561	3,029137323	2,68430097
0,005	0,26472	4,279832	2,846934271	2,571484126
0,008	0,262712416	3,952351987	2,853290602	2,542773441
0,01	0,2620406	3,876779972	2,848262945	2,535810299
0,05	0,185	1,726323986	2,334296824	2,244021397
0,1	0,100316	0,431579886	1,563933379	1,744020469
0,2	0,0571584	0,107896	1,099636389	1,244023907
1	0,022632	0,004316	0,922615182	0,08307323

Quadro 5.16 – Valores da média, variância e entropia para as carteiras seleccionadas

Fonte: Cálculos do autor

Pela análise do quadro anterior verifica-se um acompanhamento da entropia relativamente à variância, isto é, à medida que a variância diminui devido ao efeito diversificação, a entropia tende também a diminuir, apesar de forma não tão significativa, revelando-se sensível ao efeito diversificação. Tal tendência verifica-se em todas as carteiras excepto na terceira onde a variância diminui e a entropia aumenta. Para analisar melhor tal diferença é conveniente analisar os curvas de frequências de ambas as carteiras.

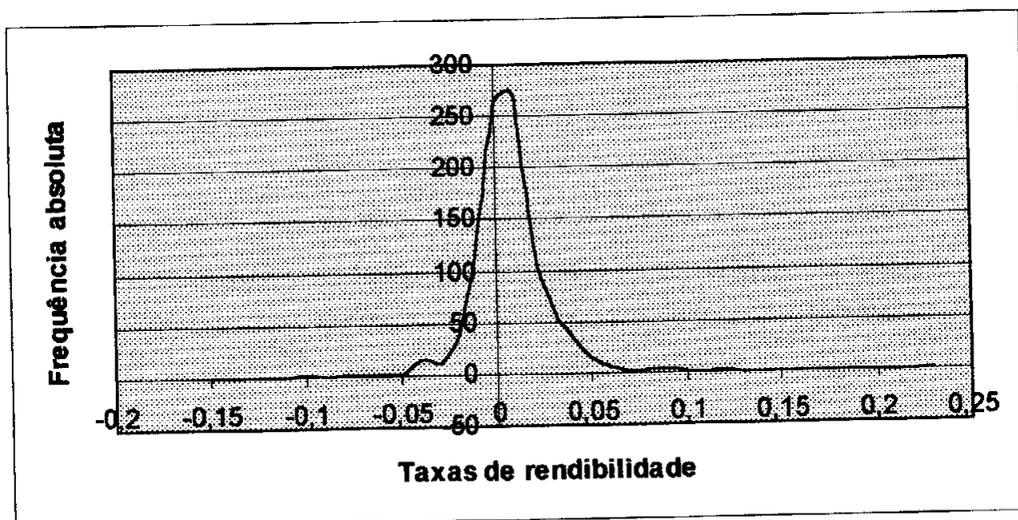


Figura 5.5 – Curva de frequências da carteira 2

Fonte: Cálculos do autor

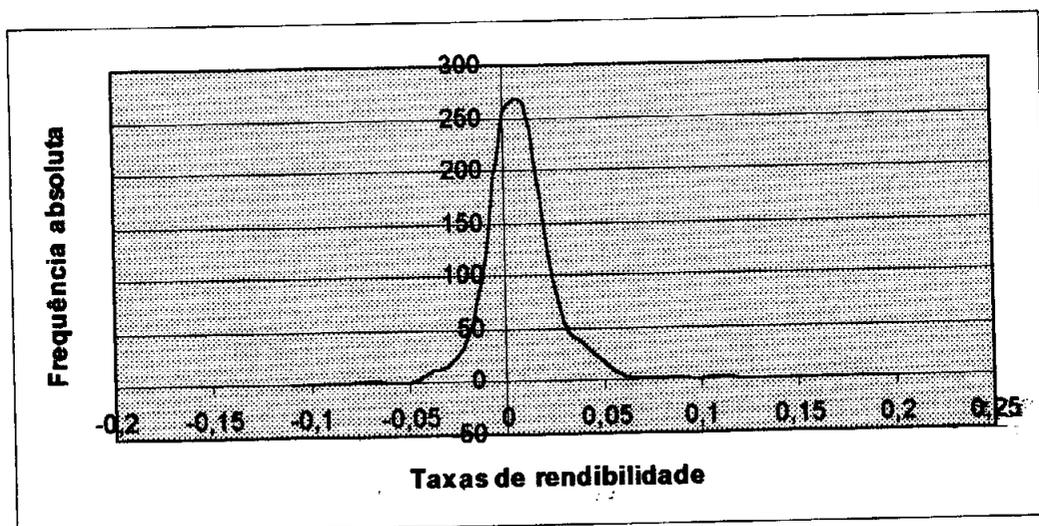


Figura 5.6 – Curva de frequências da carteira 3

Fonte: Cálculos do autor

Pela análise dos gráficos anteriores constata-se que o segundo gráfico, referente à carteira 3 (figura 5.6) apresenta uma base ligeiramente maior, aumentando a probabilidade de ocorrência de acontecimentos extremos, logo, aumentando a incerteza e o risco do investidor. A variância limita-se a medir a dispersão apenas em torno da média, por isso não valoriza suficientemente as caudas dada a sua pequena probabilidade de ocorrência, contudo são estas caudas que podem significar a ocorrência de um “crash” ou de uma sobrevalorização para a carteira em causa. Verifica-se assim que em casos de dúvida a entropia fornece mais informação ao investidor, indicando-lhe a verdadeira dispersão global existente, que constitui a incerteza por ele assumida. Acontecimentos cuja probabilidade de ocorrência é muito pequena são mais evidenciados pela entropia, uma vez que o valor absoluto do logaritmo tende a aumentar quanto menor é a probabilidade em causa.

De forma a verificar a fronteira descrita pela relação média – entropia, encontrou-se o seguinte traçado (figura 5.7):

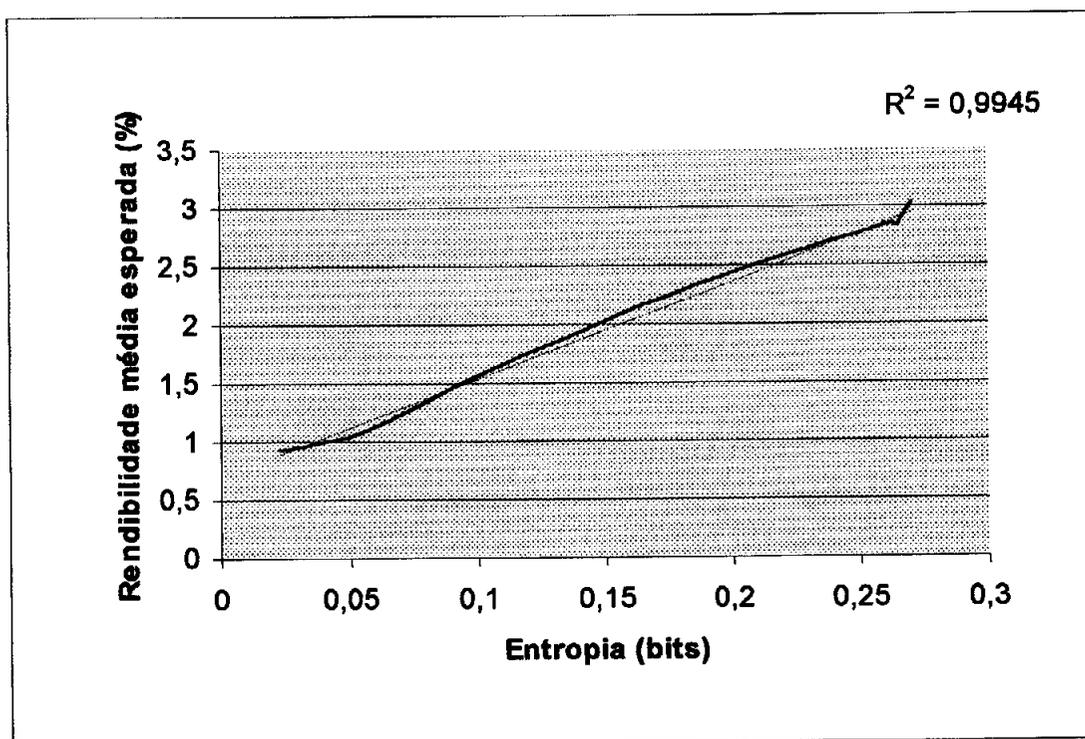


Figura 5.7 – Relação média-entropia

Fonte: Cálculos do autor

Pela análise da figura 5.7 verifica-se a existência de uma relação quase linear entre rendibilidade média esperada e entropia, ao contrário da tradicional curva oferecida pela média-variância. Tal facto deve-se sem dúvida ao enviezamento

provocado pela variância que se limita a medir a dispersão relativamente à média, sem ter em conta se a distribuição empírica é ou não simétrica e mesocúrtica. De modo a melhor comparar a diferença entre as duas fronteiras encontradas torna-se essencial observar o gráfico seguinte (figura 5.8).

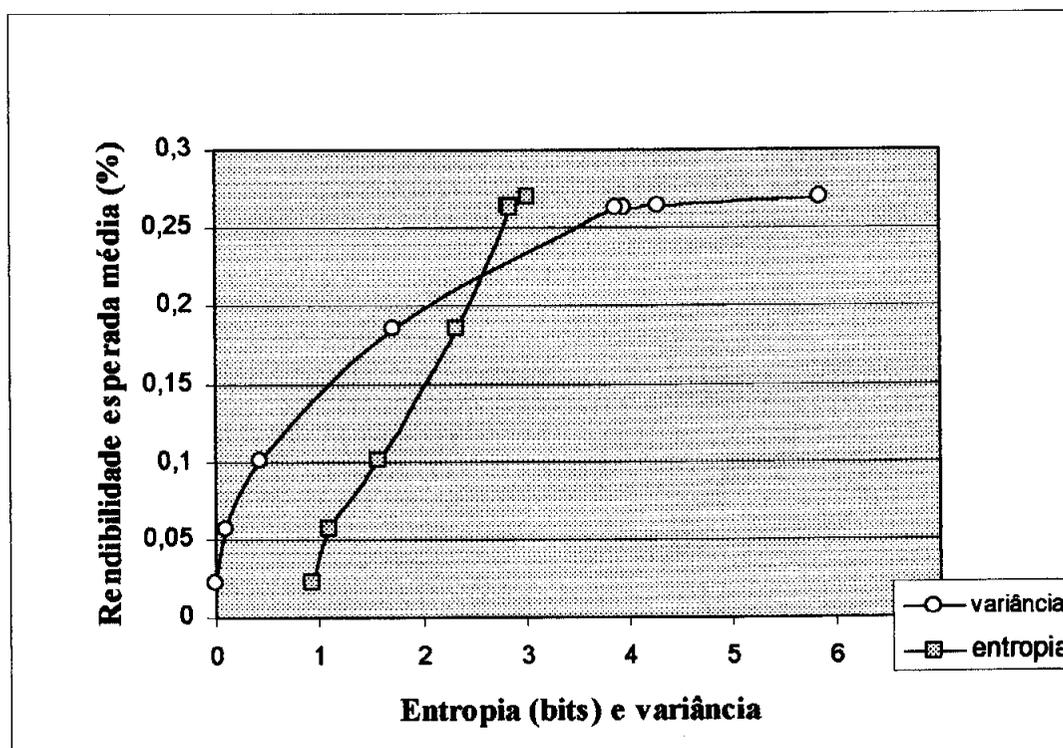


Figura 5.8 – Fronteira eficiente da média-variância *versus* média-entropia

Fonte: Cálculos do autor

A curva da média-entropia acompanha o efeito de diversificação, e em certa medida a curva da média-variância, contudo não segue aquele formato, tendendo para um comportamento linear.

Em termos de interpretação da entropia como valor ordinal da informação, verifica-se que as carteiras que incorporam maior risco e incerteza são aquelas que apresentam maiores valores de entropia. A entropia pode ser entendida como a incerteza e a dispersão, mas paralelamente poder-se-á considerar o seu valor como o valor ordinal que o investidor atribui à informação. Como é natural, quanto maior o nível de incerteza maior o valor da informação para o investidor, uma vez que o seu estado é de grande desorganização. À medida que a incerteza diminui o investidor não dá tanto valor à obtenção de mais informação, logo o seu valor tenderá a diminuir (do ponto de vista do investidor em concreto).

## 5.4 – Modelo diagonal de Sharpe e CAPM *versus* entropia e informação mútua

Esta secção realiza um estudo comparativo entre o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) com a entropia e a informação mútua. Pretende-se definir qual o contributo informacional que o índice BVL 30 contribui para cada um dos títulos que constituem a amostra em estudo, e se esse contributo é fielmente retratado pelos modelos tradicionais: modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model).

A aplicação da expressão  $H = - \sum p_i \text{Log}_2 p_i$  às taxas de rendibilidade do índice BVL 30 permitiu encontrar o nível de entropia a ele associado, cujo valor é de 2,14833948 bits.

Para encontrar a probabilidade conjunta entre o índice e cada um dos títulos foram elaborados diagramas de dispersão para cada um dos títulos, onde o título em causa é relacionado com o índice BVL 30. Através de diagramas de dispersão é possível determinar as probabilidades conjuntas, o que permite calcular a entropia conjunta entre índice e título. Como  $H(RI_i, r_i) = H(RI) + H(r_i | RI)$ , sendo  $RI_i$  a taxa de rendibilidade do índice e  $r_i$  a taxa de rendibilidade do título, é fácil determinar o valor da entropia condicional através da subtracção entre entropia conjunta e entropia do índice BVL 30. De modo a exemplificar o tipo de diagramas de dispersão utilizados, é aqui mostrado o diagrama de dispersão entre o índice BVL 30 e o título Mundial Confiança (figura 5.9).

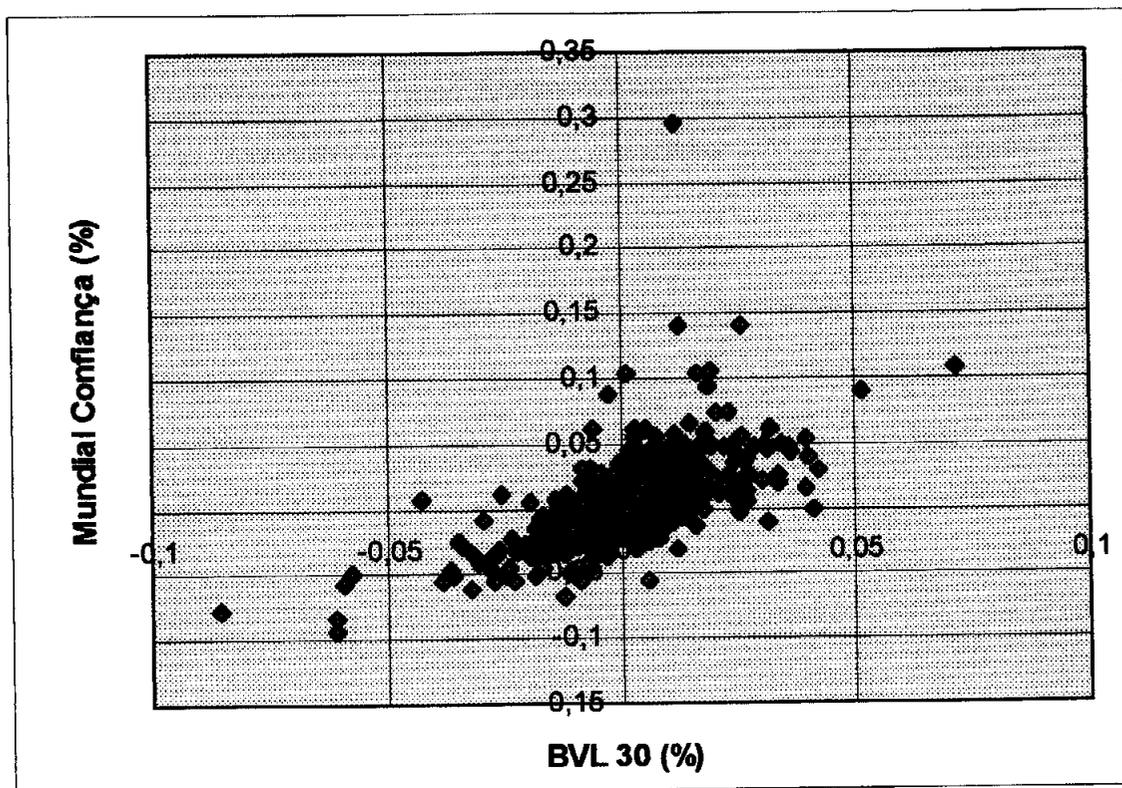


Figura n.º 5.9 – Diagrama de dispersão entre o índice BVL 30 e o título Mundial Confiança.  
 Fonte: Cálculos do autor.

Os valores referentes à análise de regressão representados no seguinte quadro (quadro 5.17) foram calculados através do modelo diagonal de Sharpe, onde se pretende analisar a relação linear existente entre as taxas de rendibilidade do índice BVL 30 (variável independente) e as taxas de rendibilidade do título (variável dependente). O valor do beta mede a variação esperada da taxa de rendibilidade do título  $i$  quando a taxa de rendibilidade do mercado, medida por um índice, varia 1% (Câmara, 1989). O beta poderá constituir uma fonte de informação acerca do comportamento existente entre título e índice. Em conjugação com a variância do mercado (representado pelo índice BVL 30), obtém-se uma medida do risco sistemático, que corresponderá à Soma de Quadrados da Regressão dividida pelo número de observações. O risco sistemático não é mais do que a variação que ocorre no título explicada pela regressão, mais concretamente pelo índice (vide fórmulas 2.23 e 2.24).

A entropia condicional do título dado o conhecimento do índice BVL 30 não é mais do que a incerteza que resta sobre o título dado o conhecimento do comportamento do índice BVL 30, logo quanto maior for o seu valor menos o índice poderá contribuir para o conhecimento do título em causa. A entropia condicional pode ser vista não só como a incerteza que se tem acerca do comportamento do título  $i$  após o conhecimento do comportamento do mercado (identificado pelo índice BVL 30), como também como grau de independência entre o título e o índice. É assim natural que apresente um

comportamento semelhante ao risco específico do título em causa. Uma vez que o risco específico é igual à Soma de Quadrados do Erro dividida pelo número de observações, logo será esta medida a utilizada para comparação com a entropia condicional e verificação das suas similaridades como medidas de risco/incerteza específicos.

Todas as regressões estimadas entre cada um dos títulos (variável dependente) e índice BVL 30 (variável independente) são alvo de teste quanto à linearidade, homocedasticidade, autocorrelação e distribuição normal do erro (vide anexos). Constata-se pelos resultados obtidos naqueles testes que pode-se aceitar a linearidade da relação entre as variáveis para a generalidade dos títulos (apresentando alguns dos títulos um certo afastamento quanto à linearidade, por exemplo: Barbosa & Almeida, Corticeira Amorim, Caima, Centralcer, Império, Portucel, Portugal Telecom, Salvador Caetano, Semapa, e Unicer), assim como a homocedasticidade e a ausência de autocorrelação. Contudo, nenhum dos resíduos das respectivas regressões segue e distribuição normal de probabilidade, chegando alguns a exibir elevados valores da estatística de Kolmogorov-Smirnov, indicando um grande afastamento perante aquela distribuição. São de realçar nesta situação os títulos Barbosa & Almeida, BTA, Inapa, Jerónimo Martins, Mota & Companhia, Salvador Caetano e Vista Alegre (vide anexos).

No caso de a relação entre título e índice poder ser representada por uma regressão linear simples, quanto maior for o beta maior é a relação existente entre as variáveis, podendo o beta ser considerado como o nível de informação que existe entre o título e o índice BVL 30.

Através da análise do seguinte quadro (quadro 5.17), verifica-se que existe alguma similaridade entre a análise de regressão que constitui o modelo diagonal de Sharpe, e as medidas da teoria de informação evidenciadas.

Títulos	Beta	SQR	I (RI, r)	SQE	H (r   RI)	SQT	H (r)
Inapa	-0,005	2,99E-06	0,1053	0,3703	2,4906	0,3703	2,5958
Modelo C.	0,0529	0,0003821	0,1356	0,468	2,6315	0,4684	2,7671
B&A	0,0607	0,0005038	0,0526	0,396	2,6597	0,3965	2,7123
Salv. Caet.	0,2401	0,007917	0,0822	0,6394	2,75	0,6473	2,8322
Vista Aleg.	0,2465	0,008347	0,1313	1,0446	2,4489	1,0529	2,5803
Mota C.*	0,4074	0,022789	0,0403	0,3819	2,1776	0,4047	2,2178
CIN	0,4166	0,023832	0,0004	0,4317	2,7178	0,4555	2,7182
Soporcel	0,435	0,025991	0,1624	0,6736	2,8392	0,6996	3,0016
Unicer	0,4769	0,031239	0,1817	0,1747	2,1925	0,2059	2,3742
Franq.	0,5151	0,036441	0,1811	0,295	2,4553	0,3314	2,6364
Engil	0,5574	0,04267	0,1455	0,4122	2,5762	0,4549	2,7217
Caima	0,5801	0,04624	0,0498	0,4431	2,9407	0,4894	2,9905
Banif	0,5881	0,047477	0,1227	0,4	2,6961	0,4475	2,8188
Soares C.	0,6285	0,054248	0,1928	0,7885	2,979	0,8427	3,1719
Centralcer	0,6454	0,057202	0,0261	0,7467	3,1041	0,8039	3,1302
BTA	0,7761	0,082716	0,1554	0,5933	2,7404	0,676	2,8958
Portucel	0,7899	0,085675	0,3645	0,2589	2,4204	0,3446	2,7849
Cort. * A	0,807	0,08944	0,1928	0,3437	2,6733	0,4331	2,8661
Semapa	0,8452	0,098104	0,3099	0,1943	2,3572	0,2924	2,6671
Somague	0,904	0,112224	0,2037	0,5878	2,9895	0,7	3,1932
Império	0,9866	0,133681	0,3387	0,3734	2,6421	0,507	2,9808
BCP	1,009	0,138204	0,3882	0,1497	2,2028	0,2879	2,591
Soane Inv.	1,1527	0,184	0,3742	0,4717	2,7471	0,6557	3,1213
Jer. Mar.	1,153	0,182563	0,4139	0,5223	2,5051	0,7049	2,919
PT	1,1598	0,184735	0,5887	0,15	2,2182	0,3348	2,8068
Mundial C.	1,2735	0,222737	0,4949	0,356	2,5342	0,5787	3,0291

Quadro 5.17 – Medidas da análise de regressão (modelo diagonal de Sharpe) *versus* medidas da teoria de informação

Fonte: Cálculos do autor

Caso se verifiquem todas as premissas necessárias para que a regressão linear tenha verdadeiro significado, então é natural que a informação mútua e a Soma de Quadrados da Regressão variem de forma proporcional relativamente aos betas. Pela observação da figura 5.10, verifica-se que a relação entre os betas e a informação mútua apesar de positiva não é perfeita, constatando-se a presença de “outliers”.

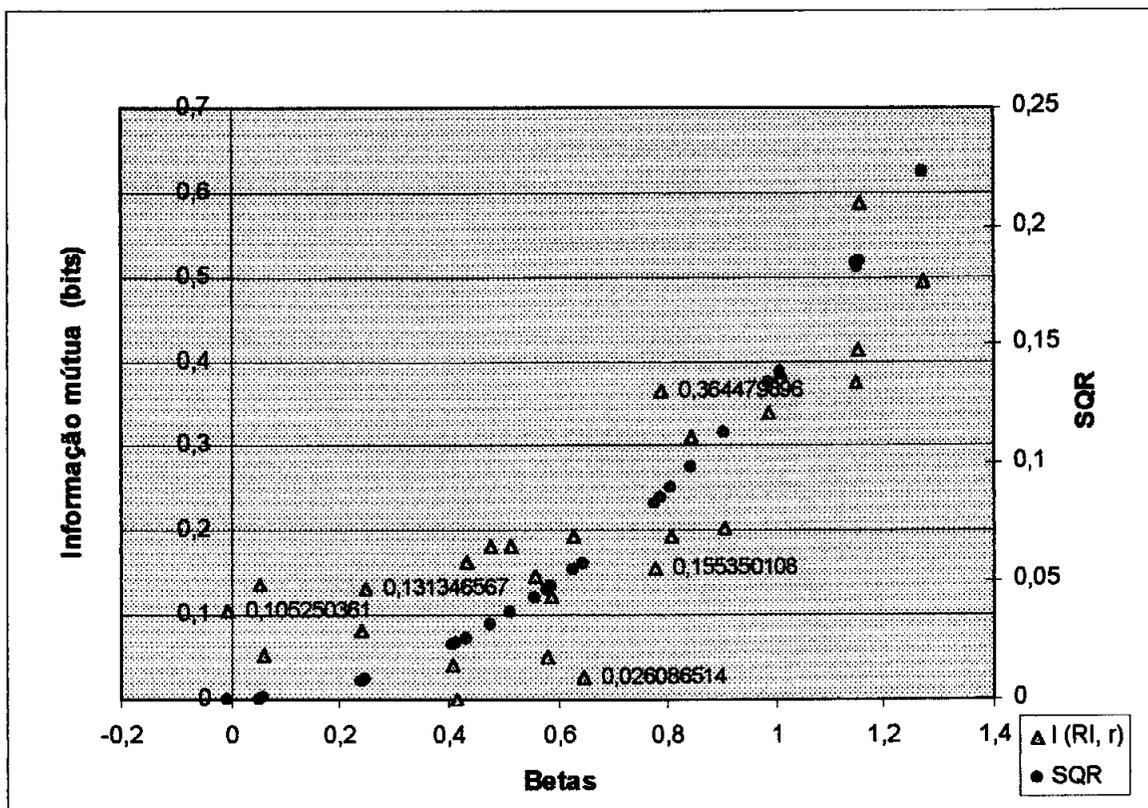


Figura 5.10 – Análise da informação mútua e SQR versus betas.

Fonte: Cálculos do autor

De acordo com a figura atrás apresentada (figura 5.10) são identificados alguns valores de informação mútua que mais se afastam dos valores oferecidos pela SQR (Soma de Quadrados da Regressão). São de destacar os títulos Centralcer (inf. mútua = 0,026086514 bits), Vista Alegre (inf. mútua = 0,1313 bits), Inapa (inf. mútua = 0,10525036 bits), BTA (inf. mútua = 0,15535018 bits) e Portucel (inf. mútua = 0,36447) como aqueles que mais se afastam do comportamento ditado pela regressão linear. Tal afastamento, dever-se-á, sem dúvida, ao facto de, tal como já abordado, estes títulos não apresentarem uma relação perfeitamente linear com o índice BVL 30 e simultaneamente evidenciarem uma distribuição dos resíduos muito afastada da distribuição normal, o que provoca alguns enviesamentos ao nível das medidas da análise de regressão.

Verifica-se que a informação mútua promove melhor informação ao investidor que a SQR (Soma de Quadrados da Regressão) acerca da forma como o título varia de acordo com o comportamento do mercado (índice BVL 30), uma vez que não está dependente da distribuição de probabilidade seguida pelos resíduos nem se apoia na linearidade da relação em causa.

Com vista a verificar se existem realmente similaridades entre a análise de regressão linear e as medidas da teoria de informação, são evidenciados os seus comportamentos nas seguintes figuras (figura 5.11 e figura 5.12).

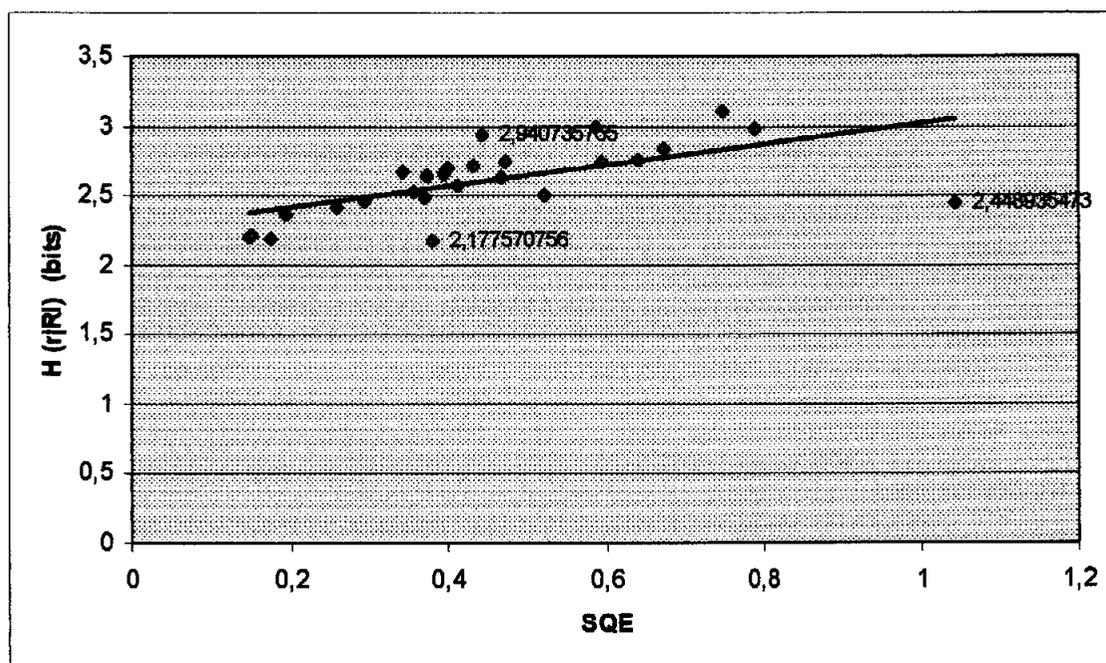


Figura 5.11 – Soma de quadrados do erro versus entropia condicional.

Fonte: Cálculos do autor

A relação existente entre a entropia condicional e a soma de quadrados do erro não é muito forte, revelando a presença de alguns outliers dignos de análise. São de realçar os títulos Vista Alegre (entropia condicional = 2,4489354 bits) e Mota & Companhia (entropia condicional = 2,17776 bits), cujo envezamento deve-se ao facto de serem dos títulos cujos resíduos mais se afastam da distribuição normal de probabilidade. Os títulos Caima (entropia condicional = 2,9407357) e Centralcer (entropia condicional = 3,1041 bits) apresentam também um elevado distanciamento da relação em causa o que poderá dever-se ao facto de não seguindo os seus resíduos a distribuição normal (cujas estatísticas de Kolmogorov-Smirnov não apresentam valores muito elevados), estes títulos não apresentam uma relação perfeitamente linear com o índice BVL 30, tal como demonstrado nos testes à linearidade efectuados (vide anexos). Mais uma vez, são títulos que apresentaram no período em análise fraca liquidez e, que por isso, não acompanharam o mercado de forma linear. A evolução do mercado, representada pela evolução do índice BVL 30 é apoiada, principalmente, por títulos que apresentam um grau de liquidez elevado, sendo estes os motores do crescimento (ou quebra) do mercado bolsista de acções português.

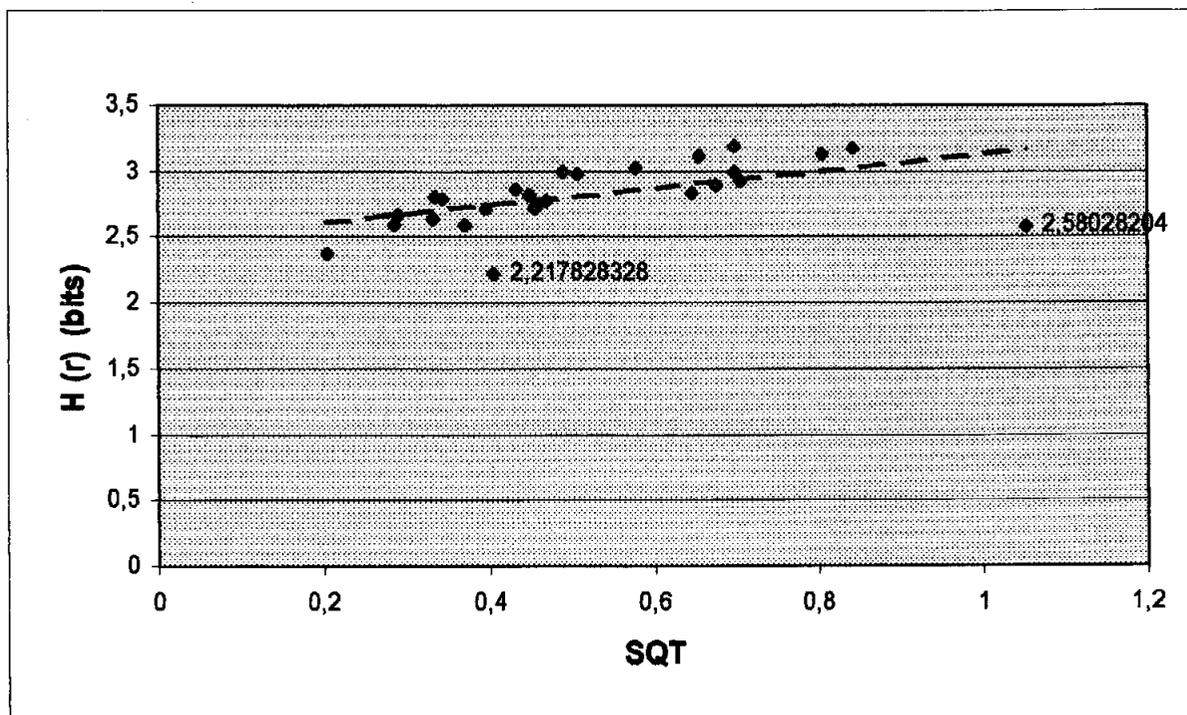


Figura 5.12 – Soma de quadrados totais versus entropia total

Fonte: Cálculos do autor

A partir da análise da figura 5.12 verifica-se novamente a presença de “outliers”, correspondentes aos títulos Mota & companhia e Vista alegre, títulos cujos resíduos apresentam um comportamento que se afasta bastante da distribuição normal de probabilidade.

A análise das figuras 5.11 e 5.12 realça a fraca conexão que existe entre a soma de quadrados do erro (SQE) e a entropia condicional e a soma de quadrados totais e a entropia total. A fraca relação que existe entre estas medidas evidencia a não normalidade das distribuições de probabilidade dos activos que constituem a amostra em estudo e dos resíduos referentes a cada regressão. A observância simultânea de todos os pressupostos da regressão linear simples proporcionaria um comportamento idêntico entre as medidas utilizadas na análise de regressão e as medidas da teoria de informação aqui enunciadas. Deste modo, a regressão linear simples (modelo diagonal de Sharpe) não traduz de forma fiel a relação que existe entre cada um dos títulos e índice BVL 30, sendo por isso, necessário recorrer a outras medidas independentes do tipo de distribuição de probabilidade empírica, que proporcionem uma informação mais correcta ao investidor.

Os títulos BCP, Vista Alegre, Inapa, Jerónimo Martins, Mota & Companhia, Portugal Telecom, Semapa, Mundial Confiança e Unicer, apresentam menores níveis de entropia condicional dado o conhecimento do índice BVL 30 que os demais. Tal facto deve-se a estes títulos terem contribuído directamente para o cálculo do referido índice durante o período em causa (maioritariamente) e também porque são títulos que apresentam níveis e entropia individual mais baixos. Ao contrário do que seria de esperar, os títulos da Corticeira Amorim, Império, Sonae Investimentos, Modelo & Continente e Soporcel apresentam elevados níveis de entropia condicional o que é explicado pela elevada volatilidade sentida nestes títulos, que apresentaram valores de entropia individual muito elevados. Como já foi referido na 1.ª secção deste capítulo, o Sector de Pasta de Papel e Cartão sofreu desvalorizações consideráveis devido à evolução desfavorável dos preços da pasta de papel, conduzindo à fraca liquidez de alguns títulos, nomeadamente o título Soporcel. Algumas empresas do Sector dos Serviços Prestados a Empresas, como a Sonae Investimentos, Modelo & Continente e Corticeira Amorim assistiram a fortes valorizações dos seus títulos até meados de 1998, mas os investimentos realizados por estas no Brasil revelaram-se problemáticos, agravando-se a situação com a queda do Real brasileiro, o que conduziu a quebras muito acentuadas nas cotações das suas acções.

Torna-se importante analisar a variação percentual que é explicada pelo mercado (índice BVL 30) e a variação percentual que é independente do mercado.

De modo a complementar o estudo efectuado são calculadas as percentagens de variação no título explicada e não explicada pelo mercado (índice BVL 30), sendo analisada a relação existente entre o coeficiente de determinação  $R^2$  de cada uma das regressões lineares entre os títulos e índice BVL 30 com a entropia condicional relativa e a informação mútua relativa (quadro 5.18).

Titulos	R <sup>2</sup>	H(r RI)/H(r)	I(r, RI)/H(r)
Inapa	8,08E-06	0,95945422	0,04054578
Modelo C.	0,001	0,9509902	0,0490098
B&A	0,001272	0,9805891	0,0194109
Vista Aleg.	0,007927	0,94909604	0,05090396
Salv. Caet.	0,01223	0,97097744	0,02902256
Soporcel	0,03715	0,94589953	0,05410047
CIN	0,052315	0,99986328	0,00013672
Mota C.ª	0,056308	0,9818482	0,0181518
Soares C.	0,064374	0,93920076	0,06079924
Centralcer	0,071152	0,99166609	0,00833391
Engil	0,093803	0,94654581	0,05345419
Caima	0,094492	0,98334309	0,01665691
Banif	0,106524	0,95647233	0,04352767
Tranq.	0,109959	0,93130207	0,06869793
BTA	0,122355	0,94635292	0,05364708
Unicer	0,151684	0,92348123	0,07651877
Somague	0,160321	0,93620336	0,06379664
Cort.ª Am.	0,206514	0,93273194	0,06726806
Portucel	0,248628	0,86912065	0,13087935
Jer. Mar.	0,259001	0,85820628	0,14179372
Império	0,263649	0,88638013	0,11361987
Soane Inv.	0,278928	0,8801227	0,1198773
Semapa	0,335484	0,88381562	0,11618438
Mundial C.	0,384878	0,83661128	0,16338872
BCP	0,480036	0,85017798	0,14982202
PT	0,551841	0,79027694	0,20972306

Quadro 5.18 – Coeficiente de determinação R<sup>2</sup> (modelo diagonal de Sharpe) *versus* medidas da teoria de informação.

Fonte: Cálculos do autor.

Como é sabido, o coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) quantifica a percentagem de variação total do título explicada pela variação do mercado, medindo o grau de ajustamento em relação à recta de regressão. Assim sendo, seria de esperar que apresentasse valores similares aos da informação mútua relativa e inversos aos apresentados pela entropia condicional relativa, caso as relações em causa pudessem ser perfeitamente representadas pela regressão linear simples. Através da análise do quadro 5.18 verifica-se que a percentagem de variação do título explicada pelo mercado assume, em grande parte das situações, maiores valores quando medida pelo coeficiente de determinação (R<sup>2</sup>) que quando medida pela informação mútua relativa. Uma vez que

a informação mútua relativa não tem como base a linearidade da relação entre as variáveis, nem a distribuição normal dos resíduos é natural que contribua para uma melhor compreensão acerca da dependência do título face ao mercado.

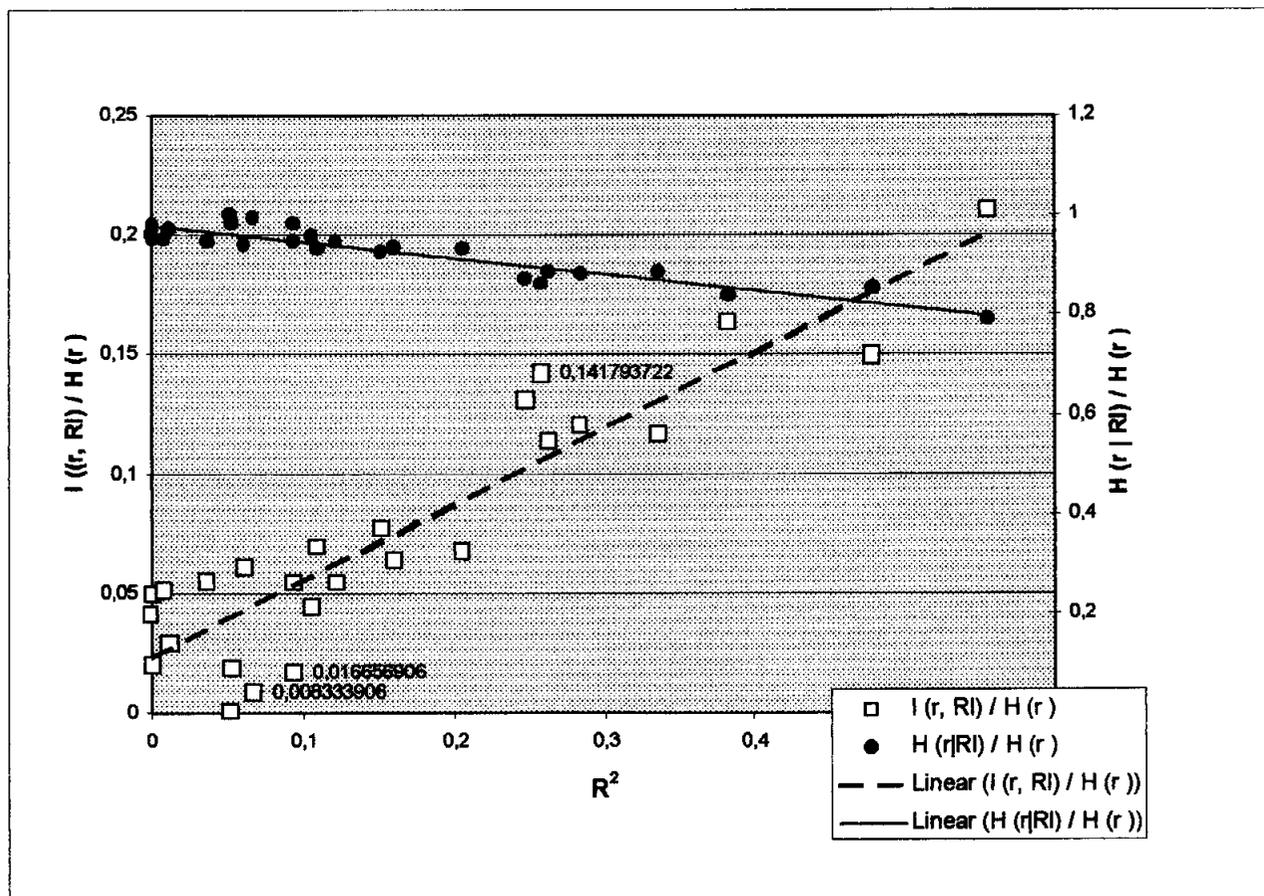


Figura 5.13 –  $R^2$  versus entropia condicional relativa e informação mútua relativa.

Fonte: Cálculos do autor.

De acordo com o gráfico anterior (figura 5.13) denota-se a existência de uma relação positiva entre o coeficiente de determinação e a informação mútua relativa e uma relação negativa entre o coeficiente de determinação e a entropia condicional relativa, contudo nenhuma destas relações é perfeita, como seria de esperar. Tal facto é explicado pela simples razão de que o coeficiente de determinação  $R^2$  mede a percentagem de variação explicada, isto é, mede a dispersão em torno da recta de regressão, com o pressuposto de que os erros são normalmente distribuídos e que é respeitado o pressuposto da linearidade, enquanto que a entropia condicional relativa mede a percentagem de variação do título não explicada pelo índice em termos globais (e não apenas relativamente a uma recta), independentemente da distribuição em causa.

Tal como nos gráficos anteriores, constata-se também nesta figura a presença de observações que se afastam do comportamento geral. São de destacar os títulos Caima (inf. mútua relativa = 0,016656906), Centralcer (inf. mútua relativa = 0,008333906) e Jerónimo Martins (inf. mútua relativa = 0,141793722). As causas para os títulos Caima e Centralcer se afastarem do comportamento “dito” normal, estando os valores de informação mútua relativa muito aquém do esperado poderão ser a fraca liquidez e o reduzido peso que estes títulos têm para o cálculo do índice BVL 30, reflectindo a não linearidade da relação com o índice e a distribuição de probabilidade dos resíduos muito afastada da normal (vide anexos). Quanto ao título Jerónimo Martins, a percentagem de informação mútua relativa existente entre o título e o índice BVL 30 é superior ao que seria de esperar de acordo com a recta linear (a tracejado) evidenciada na figura 5.13, mas inferior ao valor do coeficiente de determinação. Este afastamento demonstra que este título apresenta um grau de dependência ao mercado inferior ao que é retratado pelo coeficiente de determinação. A evidência de que os resíduos provenientes da regressão linear não seguem uma distribuição normal poderá ser um dos factores responsáveis pelo facto de o coeficiente de determinação não captar fielmente a relação entre o título e o mercado.

De acordo com os resultados obtidos no quadro 5.18 verifica-se que o título Soares da Costa é aquele que apresenta maior similaridade entre coeficiente de determinação e informação mútua relativa. Tal facto poderá advir de ser um dos títulos cuja relação com o índice BVL 30 apresenta simultaneamente maior linearidade e um valor da estatística de Kolmogorov-Smirnov não muito elevado (vide anexos). Por outro lado o título Portugal Telecom é um dos que apresenta maior diferença de valores entre o coeficiente de determinação e a informação mútua relativa (cerca de 0,35). Esta diferença pode ser fruto da fraca linearidade da relação com o índice BVL 30 e também porque o erro (ou resíduo) não se encontra normalmente distribuído (vide anexos).

Mais uma vez a não observância de todos os pressupostos requeridos para a aplicação do modelo diagonal de Sharpe e consequentemente da recta de regressão linear leva a concluir que as medidas da teoria da informação (entropia, informação mútua e suas variantes) poderão proporcionar ao investidor informação adicional e mais fidedigna sobre a forma como os títulos reagem face a variações do mercado.

A aplicação do modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) aos títulos que constituem a amostra deste estudo e ao índice BVL 30, não promove grandes alterações nos resultados encontrados face ao modelo diagonal de Sharpe, isto porque a diferença

entre os dois modelos reside na introdução da taxa do activo sem risco no segundo modelo. A taxa de rendibilidade do activo sem risco utilizada neste modelo é constante ao longo de todo o período em análise (cerca de 4 anos), o que por si só constitui uma limitação ao modelo, afastando-o da realidade. A utilização das taxas efectivas de rendibilidade, por exemplo, das Obrigações do Tesouro a 90 dias, seria o mais aconselhado, contudo tal estudo não é realizado neste trabalho de investigação. O facto da taxa do activo sem risco ser constante e subtraída, não só à taxa de rendibilidade do título, mas também à taxa de rendibilidade do índice (recta de regressão correspondente ao modelo CAPM), não provoca qualquer alteração nos valores da entropia conjunta, entropia condicional e informação mútua. O cálculo da entropia tem como base as probabilidades conjuntas, que com tal subtracção não se alteram entre si, apenas se deslocam ao longo dos eixos, mantendo constante o seu valor. A unidade dos valores implícitos continua igual para ambas as variáveis (dependente e independente), não provocando quaisquer alterações na entropia conjunta que apresentam. Os quadros seguintes (quadro 5.19 e quadro 5.20) demonstram que em termos de medidas da análise de variância e medidas da teoria de informação, não se registam alterações dignas de salientar face aos resultados do modelo diagonal de Sharpe.

<i>Títulos</i>	<i>Beta</i>	<i>SQR</i>	<i>I (r, RI)</i>	<i>SQE</i>	<i>H (r RI)</i>	<i>SQT</i>	<i>H (r)</i>
<i>Inapa</i>	-0,0047	4E-06	0,1053	0,3803	2,4906	0,3803	2,59584
<i>Modelo</i>	0,0529	0,00038	0,1356	0,468	2,6315	0,4684	2,76711
<i>B&amp;A</i>	0,0607	0,0005	0,0526	0,396	2,6597	0,3965	2,71234
<i>Salv. C.</i>	0,2471	0,00771	0,0822	0,6337	2,75	0,6414	2,83223
<i>Vista Ale.</i>	0,2515	0,00833	0,1313	1,0432	2,4489	1,0516	2,58028
<i>Mota C.ª</i>	0,399	0,02188	0,0403	0,3823	2,1776	0,4042	2,21783
<i>CIN</i>	0,4172	0,02384	0,0004	0,4306	2,7178	0,4544	2,71816
<i>Soporcel</i>	0,4317	0,02579	0,1624	0,6736	2,8392	0,6994	3,00162
<i>Unicer</i>	0,4768	0,03117	0,1817	0,1736	2,1925	0,2048	2,37419
<i>Tranq.</i>	0,5183	0,03631	0,1811	0,2942	2,4553	0,3305	2,63638
<i>Engil</i>	0,5572	0,04269	0,1455	0,4121	2,5762	0,4548	2,72166
<i>Caixa</i>	0,5759	0,04592	0,0498	0,4433	2,9407	0,4892	2,99055
<i>Banif</i>	0,5866	0,04765	0,1227	0,4014	2,6961	0,4491	2,81877
<i>Soares C.</i>	0,6186	0,05257	0,1928	0,7901	2,979	0,8426	3,1719
<i>Central.</i>	0,6584	0,05465	0,0261	0,7489	3,1041	0,8036	3,13017
<i>BTA</i>	0,7778	0,08274	0,1554	0,5925	2,7404	0,6753	2,89578
<i>Portucel</i>	0,7862	0,08527	0,3645	0,2587	2,4204	0,344	2,78485
<i>Corr.Amo.</i>	0,8021	0,08901	0,1928	0,3427	2,6733	0,4317	2,86608
<i>Semapa</i>	0,8457	0,0982	0,3099	0,1941	2,3572	0,2923	2,6671
<i>Somague</i>	0,9002	0,11213	0,2037	0,5857	2,9895	0,6978	3,19317
<i>Império</i>	0,9805	0,13289	0,3387	0,3712	2,6421	0,5041	2,98081
<i>BCP</i>	1,0033	0,13831	0,3882	0,1499	2,2028	0,2882	2,59104
<i>Jer. Mar.</i>	1,1539	0,18257	0,4139	0,5233	2,5051	0,7059	2,91899
<i>Soane Inv.</i>	1,1564	0,18443	0,3742	0,4636	2,7471	0,648	3,1213
<i>PT</i>	1,1598	0,18736	0,5887	0,15	2,2182	0,3374	2,80683
<i>Mundial C.</i>	1,2836	0,22165	0,4949	0,3564	2,5342	0,5781	3,02914

Quadro 5.19 – Medidas da análise de regressão do CAPM *versus* medidas da teoria de informação

Fonte: Cálculos do autor

Através da comparação dos valores obtidos neste quadro com os valores obtidos no quadro 5.17, verifica-se que não existem diferenças significativas, o que é fruto de a taxa de activo sem risco ser constante ao longo do período em análise e é incorporada no modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) através da sua subtracção ao valor da taxa de rendibilidade do título e à taxa de rendibilidade do mercado (representado pelo Índice BVL 30).

<i>Títulos</i>	$R^2$	$I(r,RI) / H(R)$	$H(r RI) / H(r)$
<i>Inapa</i>	1,1E-05	0,0405458	0,95945422
<i>Modelo</i>	0,00082	0,0490098	0,9509902
<i>B&amp;A</i>	0,00127	0,0194109	0,9805891
<i>Vista Ale.</i>	0,00792	0,050904	0,94909604
<i>Salv. C.</i>	0,01202	0,0290226	0,97097744
<i>Soporcel</i>	0,03688	0,0541005	0,94589953
<i>CIN</i>	0,05246	0,0001367	0,99986328
<i>Mota C.ª</i>	0,05414	0,0181518	0,9818482
<i>Soares C.</i>	0,06238	0,0607992	0,93920076
<i>Central.</i>	0,068	0,0083339	0,99166609
<i>Caima</i>	0,09386	0,0166569	0,98334309
<i>Engil</i>	0,09388	0,0534542	0,94654581
<i>Banif</i>	0,10611	0,0435277	0,95647233
<i>Tranq.</i>	0,10986	0,0686979	0,93130207
<i>BTA</i>	0,12253	0,0536471	0,94635292
<i>Unicer</i>	0,1522	0,0765188	0,92348123
<i>Somague</i>	0,16069	0,0637966	0,93620336
<i>Cort. Amo.</i>	0,20617	0,0672681	0,93273194
<i>Portucel</i>	0,2479	0,1308794	0,86912065
<i>Jer. Mar.</i>	0,25864	0,1417937	0,85820628
<i>Império</i>	0,26362	0,1136199	0,88638013
<i>Soane Inv.</i>	0,28461	0,1198773	0,8801227
<i>Semapa</i>	0,33598	0,1161844	0,88381562
<i>Mundial C.</i>	0,38344	0,1633887	0,83661128
<i>BCP</i>	0,47994	0,149822	0,85017798
<i>PT</i>	0,55533	0,2097231	0,79027694

Quadro 5.20 – Coeficiente de determinação  $R^2$  (modelo CAPM) versus medidas da teoria de informação.

Fonte: Cálculos dos autor.

Os valores evidenciados pelos quadros anteriores não registam alterações significativas face aos obtidos com o modelo diagonal de Sharpe, concluindo-se, deste modo, que a regressão linear não reproduz totalmente a relação que existe entre o comportamento dos títulos e o mercado (representado pelo índice BVL 30). É realçada a necessidade de utilização de novas medidas complementares que proporcionem ao investidor uma noção mais próxima da realidade. É advogada a adopção da entropia e da informação mútua (nas suas variantes: total, condicional, condicional relativa e

relativa) como forma de superar as limitações dos tradicionais modelos de gestão de carteiras.

Mais uma vez, a entropia pode ser encarada como valor ordinal da informação. Na análise da relação que se estabelece entre o título e o mercado, quanto maior a independência dos títulos relativamente ao mercado, menos o mercado pode ser objecto de referência para o investidor acerca da variação do seu título ou carteira de títulos. A entropia condicional aumentará de valor, assim como a entropia condicional relativa. Neste contexto, o investidor precisa de recorrer a outras fontes de informação de carácter mais específico para poder perceber a forma como varia a sua carteira (ou título) e tentar utilizar possíveis subidas ou descidas de cotação a seu favor. Quando a entropia condicional entre título e índice aumenta o valor dado à informação sobre as empresas emissoras das acções em causa e sobre o modo como o título ou carteira se relaciona com outros títulos ou carteiras (na tentativa de encontrar maiores ou menores dependências) aumenta, aumentando também a utilidade que a correcta utilização da informação pode proporcionar.

## **5.5 – Síntese do capítulo**

O presente capítulo apresenta os resultados obtidos com a aplicação de um conceito oriundo da física – a entropia, ao mercado bolsista de acções português no período entre 2/01/1996 a 30/12/1999.

A primeira secção realiza a análise estatística de todos os títulos que compõem a amostra assim como do índice BVL 30, sendo calculadas a média, variância, coeficiente de curtose e coeficiente de assimetria. Para além destas medidas foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov, de modo a testar se a distribuição empírica pode ser descrita pela distribuição normal de probabilidade. Para complementar a análise estatística foi testada a estacionariedade das séries através do teste de Dickey-Fuller, tendo-se verificado que todas as séries são estacionárias. Todas as séries analisadas não seguem uma distribuição normal, o que se denota não só pelo teste de Kolmogorov-Smirnov, que anula a probabilidade de a distribuição empírica poder ser representada pela distribuição normal de probabilidade, mas também pelos valores de curtose e assimetria encontrados, que muito se afastam dos considerados aceitáveis pela distribuição normal.

Constata-se que a maioria das distribuições empíricas apresenta um coeficiente de curtose muito elevado, o que equivale a dizer que se está em presença de curvas leptocúrticas.

A segunda secção inicia-se com uma comparação entre o valor do desvio-padrão e de entropia para cada um dos títulos que constituem a amostra, verificando-se que, ao contrário do que seria de esperar, tais grandezas apresentam muitas vezes comportamentos contrários, o que pode ser explicado pelo facto de as distribuições empíricas não seguirem a distribuição normal de probabilidade. Com vista a complementar o estudo, é realizada uma análise comparativa entre o desvio-padrão e a entropia para carteiras seleccionadas aleatoriamente seguindo a metodologia adoptada por Elton e Gruber em 1995 (Elton et al, 1995) que constituem carteiras aleatoriamente, com o único pressuposto de que os títulos têm igual proporção na carteira. Verifica-se que a entropia acompanha o efeito de diversificação, o que é explicado pelo facto de esta permitir a redução o número de estados possíveis, minimizando assim a incerteza. A par com a entropia é também calculada a informação mútua, que regista um incremento à medida que aumenta o número de títulos em carteira. Neste contexto, verifica-se que a entropia como medida de incerteza pode ser encarada como o valor ordinal que o investidor dá à informação, quanto maior o estado de incerteza mais importância assume a informação e consequentemente, mais valor terá do ponto de vista do investidor que dela necessita para solucionar a situação em que se encontra, se utilizada correcta e oportunamente.

A terceira secção apresenta as carteiras seleccionadas através do modelo da média-variância, sendo de seguida calculada a entropia de cada uma das carteiras seleccionadas. Desta aplicação é de salientar o facto de a entropia, como medida de dispersão global, independente da distribuição empírica, ser sensível ao efeito diversificação (diminui a incerteza à medida que se diversifica a carteira) e acima de tudo, ter em conta situações que a variância ignora, como é a possibilidade de ocorrência de “crashes”.

A última secção realiza um estudo comparativo entre o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) com algumas medidas da teoria de informação, principalmente a entropia condicional e a informação mútua. A entropia condicional do título dado o conhecimento do índice BVL 30 não é mais do que a incerteza que resta sobre o título dado o conhecimento do comportamento do índice BVL 30, logo quanto maior for o seu valor, menos o índice poderá contribuir

para o conhecimento do título em causa. No caso de a relação entre título e índice poder ser representada por uma regressão linear simples, quanto maior for o beta maior é a relação existente entre as variáveis, podendo o beta ser considerado como o nível de informação que existe entre o título e o índice BVL 30. Neste sentido a SQR (Soma de Quadrados da Regressão) e informação mútua deveriam variar de forma perfeitamente proporcional, o que não se verifica para todos os títulos, o que pode ser explicado pelo facto de alguns pressupostos base da regressão linear simples não se verificarem, nomeadamente a distribuição normal dos resíduos e a perfeita linearidade de todas as regressões (vide anexos)

De forma a complementar o estudo são calculadas as principais medidas da análise de regressão entre cada um dos títulos e o índice BVL 30 e comparadas com a entropia condicional, informação mútua, entropia total, entropia condicional relativa e informação mútua relativa. A relação existente entre as medidas correspondentes é ténue, revelando a fraca adequabilidade da regressão linear simples como forma de explicação da relação entre o título e o índice BVL 30. Por fim é realizado o mesmo estudo com o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), não se registando alterações significativas face aos resultados atrás obtidos, devido ao facto de a taxa de rendibilidade do activo sem risco ter sido considerada constante ao longo de todo o período em estudo.

## **6 – CONCLUSÕES, LIMITAÇÕES E SUGESTÕES**

Este capítulo apresenta as conclusões extraídas deste trabalho de investigação. São também discutidas as limitações encontradas na elaboração deste estudo e possíveis sugestões para futuros trabalhos de investigação.

### **6.1 – Conclusões**

Os mercados bolsistas de acções caracterizam-se pela elevada incerteza que incorporam. Neste contexto, a informação surge como factor crítico de sucesso para a realização de bons investimentos e tomada das decisões correctas. Do ponto de vista do investidor é importante que esta informação seja o mais credível possível e que descreva fielmente a realidade, constituindo uma base sólida para o processo de tomada de decisão. A necessidade de proporcionar ao investidor informação concreta sobre o mercado bolsista de acções português, principalmente sobre a dispersão global e incerteza adjacentes, constitui a base deste trabalho de investigação.

Os mercados financeiros, mais concretamente os mercados bolsistas de acções, são sistemas complexos, pelo simples facto de serem sistemas abertos onde inúmeros subsistemas actuam e interactuam de forma não-linear e dinâmica, cuja análise constitui um atractivo para a física, que munida de métodos de análise e modelos complexos, consegue captar a realidade de forma mais eficiente que os métodos tradicionais usados na economia e nas finanças. A entropia, como medida de incerteza e dispersão, oriunda da física e adoptada pela teoria da informação apresenta características matemáticas e interpretativas, tal como se demonstra neste trabalho de investigação, que possibilitam e credibilizam a sua aplicabilidade à teoria de carteiras.

O problema em estudo neste trabalho de investigação é a falta de adequabilidade dos modelos tradicionais utilizados na gestão de carteiras à realidade que caracteriza o mercado bolsista de acções português, principalmente na forma como é avaliada a incerteza neste mercado, no qual a informação oportuna e fidedigna é cada vez mais um recurso de suprema importância, revelando-se como um factor crítico de sucesso se bem utilizada. As limitações apresentadas pelos tradicionais modelos de selecção e gestão de carteiras, de realçar o modelo da média-variância de Harry Markowitz, o modelo

diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model), cujos pressupostos, de acordo com vários investigadores, não se adequam ao mercado bolsista de acções português, justificam a aplicação de novos modelos que dêem resposta a tal problema. O principal pressuposto aqui criticado é o facto de todos os modelos tradicionais da teoria de carteiras terem como base a distribuição normal das taxas de rendibilidade dos títulos. Este trabalho de investigação centra-se na análise da entropia como medida de incerteza e dispersão global, aplicada à teoria de carteiras.

Este trabalho de investigação visa atingir quatro objectivos. O primeiro objectivo avalia a adequabilidade dos modelos tradicionais de gestão de carteiras ao mercado bolsista português através da análise da distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos e do índice BVL 30. O segundo objectivo avalia a eficácia da entropia como medida de dispersão e de incerteza face ao desvio-padrão e à variância quando a distribuição empírica não pode ser realmente representada pela curva de Gauss. O terceiro objectivo determina as principais vantagens e desvantagens da utilização dos modelos da entropia e informação mútua relativamente aos modelos tradicionais mais utilizados na gestão e selecção de carteiras (média-variância, modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM), principalmente no que concerne à disponibilização da informação mais credível e completa ao investidor. O último objectivo mostra que a entropia pode ser encarada como medida ordinal do valor da informação.

No sentido de dar resposta ao problema colocado e atingir os objectivos propostos são utilizados alguns modelos estatísticos, o modelo da média-variância, o modelo diagonal de Sharpe, o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) e modelos de entropia e informação mútua. As análises comparativas entre os resultados dos modelos tradicionais de gestão de carteiras e os modelos de entropia e informação mútua são a principal fonte de estudo deste trabalho de investigação.

Os modelos enunciados são aplicados aos dados e informação recolhidos, tendo sido seleccionados 26 títulos continuamente cotados no período entre 2/01/1996 a 30/12/1999 na Bolsa de Valores de Lisboa. As cotações diárias destes títulos são o principal objecto de estudo, não só a nível estatístico mas também económico-financeiro.

A análise estatística realizada às séries das taxas de rendimento dos títulos, que compõem a amostra e do índice BVL 30, revelou que nenhuma das séries pode ser fielmente representada pela distribuição normal de probabilidade. Esta análise

debruçou-se, essencialmente sobre o coeficiente de curtose, sobre o coeficiente de assimetria e sobre o teste de Kolmogrov-Smirnov, evidenciando todos os conceitos e teste que as séries em estudo não poderiam ser fielmente representadas pela distribuição normal de probabilidade. Deste modo um dos principais pressupostos dos modelos tradicionais de gestão de carteiras não se verifica na realidade, o que põe em causa a sua aplicabilidade e os resultados por eles obtidos. A crítica à distribuição normal surge ao se verificar que a incerteza assumida por aquelas taxas é geralmente, muito superior à que seria de esperar se estas seguissem uma distribuição normal de probabilidade. A análise realizada mostra que as distribuições empíricas exibem “caudas espessas”, uma “peakdness” e assimetria, incompatíveis com a curva de Gauss, ficando por isso insuficientemente caracterizadas se se atender somente aos dois primeiros momentos (média e variância). Tais situações são explicadas, em grande parte, pelas características do próprio mercado bolsista de acções português, cuja pequena dimensão e fraca liquidez fomentam o aparecimento de elevados níveis de curtose e de assimetria, como é visível na análise estatística realizada às taxas de rendibilidade dos títulos e do índice BVL 30.

A comparação entre o comportamento da entropia e do desvio-padrão para cada um dos títulos que compõem a amostra demonstra que a entropia e a informação mútua se revelam mais eficazes como medida de dispersão e incerteza e de informação em situações onde se desconhece a verdadeira distribuição de probabilidade seguida pelos dados empíricos. O desvio-padrão apresenta limitações como medida de risco, não sendo suficiente (em conjunto com a média) para bem caracterizar uma situação em que os dados não seguem a distribuição normal, isto porque se limita a medir a dispersão em relação à média e se a distribuição de probabilidade não for simétrica e mesocúrtica, a distribuição e respectiva dispersão não são perfeitamente caracterizadas e conhecidas. É de salientar o facto de na análise comparativa entre a entropia e o desvio-padrão, os títulos que mais se afastaram do comportamento normal são exactamente aqueles que na análise estatística revelaram maior afastamento face à distribuição de probabilidade normal (Vista Alegre e Mota & Companhia). Tal afastamento dever-se-á ao facto de estes serem dos títulos que registaram menor liquidez no período de tempo em estudo. Tal facto é demonstrado pelos valores da estatística de Kolmogrov-Smirnov, que para estes dois títulos apresentam valores muito elevados. Por exemplo, é de realçar o título Portugal Telecom, que de acordo com a análise estatística é um dos que mais se aproxima da distribuição normal de probabilidade, estando a sua observação bem

descrita pela relação entropia – desvio-padrão. Esta comparação foi também aplicada ao estudo de carteiras seleccionadas aleatoriamente, verificando-se, que a diversificação (um dos aspectos relevantes da teoria de carteiras) é um factor de diminuição da incerteza, ou seja, constata-se que a entropia é sensível ao efeito diversificação. A par da entropia é também calculada a informação mútua de cada uma das carteiras, verificando-se que esta tende a aumentar à medida que se introduz mais um título na carteira. Conclui-se que a diversificação contribui para aumentar o nível de informação que o investidor possui. Similarmente, verifica-se que a entropia personifica igualmente o valor ordinal da informação do ponto de vista do investidor. Quanto maior o seu estado de incerteza, maior o valor que o investidor estará disposto a despende para obter informação, além disso, a procura de informação aumenta quando o nível de incerteza aumenta o que contribui conseqüentemente para um incremento no seu valor económico.

As análises comparativas realizadas entre os modelos tradicionais de gestão de carteiras, nomeadamente a média-variância, o modelo diagonal de Sharpe e o modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) e os modelos da entropia e informação mútua revelaram as principais vantagens e limitações das medidas da teoria de informação utilizadas. Como já foi referido o modelo da média-variância é um critério óptimo na selecção e gestão de carteiras quando o processo de decisão dos investidores pode ser retratado por funções de utilidade quadráticas e quando as taxas de rendibilidade dos investimentos seguem uma distribuição normal. Os fundamentos teóricos apresentados para sustentar este critério baseiam-se na aversão ao risco por parte do investidor e a assunção de dois únicos parâmetros: a média e a variância. Como as taxas de rendibilidade não seguem uma distribuição normal, nada garante que, para um dado investidor, mesmo que averso ao risco, o investimento seleccionado por este critério seja o seu preferido. Considere-se um investidor que identifica risco com a probabilidade de uma perda, ou seja, que a taxa de rendibilidade seja negativa. De acordo com os resultados obtidos na análise estatística as taxas de rendibilidade seguem uma distribuição assimétrica, logo o risco não é equivalente à variância. Os modelos diagonal de Sharpe e CAPM (Capital Asset Pricing Model) pressupõem que os investidores utilizem o modelo da média-variância para escolher as suas carteiras. Não se verificando a normalidade da distribuição das taxas de rendibilidade e todos os pressupostos necessários à utilização do método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros de uma recta de regressão, os modelos não são eficientes e podem induzir

em erro o investidor por não ter em conta toda a informação referente à distribuição empírica seguida pelas taxas de rendibilidade.

Neste contexto as principais vantagens da entropia como medida de incerteza no mercado bolsista de acções português são o facto de a entropia ser independente do tipo de distribuição em causa, medindo a verdadeira dispersão global existente ao contrário da variância que se limita a medir a dispersão em relação à média ignorando outros momentos e características da distribuição empírica. Deste modo a entropia fornece uma informação correcta sobre a verdadeira dispersão existente em cada uma das carteiras seleccionadas. A entropia surge como uma nova forma de medir a incerteza para qualquer tipo de distribuição de probabilidade, constituindo por si só fonte de informação privilegiada para o investidor. Além disso, a entropia é calculada através de um logaritmo, logo os acontecimentos com menor probabilidade de ocorrência (menor  $p_i$ ) são mais valorizados que no cálculo da variância, o que constitui uma vantagem para a entropia, visto que é dada mais importância à possibilidade de ocorrência de “crashes”, deste modo a fronteira “média-entropia” é mais robusta do ponto de vista estatístico e promove informação mais fidedigna e completa ao investidor. Verificou-se também, pela análise dos resultados obtidos, que a entropia é sensível ao efeito diversificação, o que desde logo facilita a sua aceitação como medida de incerteza na teoria de carteiras. É de realçar a equivalência entre algumas medidas da teoria da informação (informação mútua, entropia condicional, entropia total, entropia condicional relativa e informação mútua relativa) e a análise de regressão, o que é muito vantajoso para situações em que os dados não respeitem todos os pressupostos necessários à aplicabilidade de uma recta de regressão linear simples (utilizada no modelo diagonal de Sharpe e no modelo CAPM), nomeadamente quando a distribuição de probabilidade empírica não é normal e quando algum(alguns) pressuposto(s) necessário(s) à aplicabilidade da regressão linear simples não se verifique. Nestes casos, a entropia (e suas variantes) provam que conseguem captar de forma mais realista a relação existente entre o comportamento do título e o comportamento do mercado (representado pelo índice BVL 30), fornecendo informação mais fidedigna ao investidor. Demonstra-se que a informação mútua entre o título e o índice BVL 30 pode corresponder à variação do título explicada pelo índice, enquanto que a entropia condicional reflecte a “incerteza específica” do título em causa, contribuindo para completar e melhorar a informação disponibilizada pelos modelos diagonal de Sharpe e

CAPM (Capital Asset Pricing Model) quando as séries utilizadas não obedecem a todos os pressupostos necessários para bem aplicar estes modelos.

Em termos de limitações da medida introduzida é de realçar a dificuldade de aplicação a modelos de optimização e selecção quando não é conhecida a verdadeira distribuição de probabilidade empírica, isto porque o cálculo de probabilidades conjuntas e condicionais para um elevado número de títulos pode assumir proporções drásticas. Neste sentido, torna-se necessário o desenvolvimento desta área de modo a poder utilizar a entropia em toda a sua plenitude. A introdução da entropia, da informação mutua e suas variantes na análise da maior ou menor dependência dos títulos face ao mercado contribui para perceber até que ponto o mercado pode servir como referência para conhecer o comportamento do título (ou títulos). Contudo as medidas da teoria da informação utilizadas não poderão substituir totalmente a regressão linear simples utilizada pelo modelo diagonal de Sharpe e pelo modelo CAPM, dada a impossibilidade de realizar previsões para o futuro apenas com base nestas medidas. Outra limitação decorre do facto de qualquer alteração na unidade de medida da variável apenas afectar a entropia referente a distribuições contínuas. Na distribuição discreta a entropia é perfeitamente independente do valor das variáveis, o que pode ser encarado como uma limitação do próprio conceito. Seja qual for o valor implicado, apenas a sua probabilidade de ocorrência é tida em conta. Contudo tal limitação, não se aplica ao cálculo da entropia para distribuições contínuas, como é visível nos resultados obtidos da aplicação do modelo da média-variância, onde as últimas cinco carteiras são constituídas pelos mesmos títulos, com diferentes proporções e portanto, diferentes valores de entropia. Este trabalho revelou que a entropia é sensível a alterações ao valor da variável, que promovam transformações ao nível do histograma. Uma outra limitação da entropia deve-se ao facto de ainda não estar suficientemente integrada na economia e nas finanças, não facilitando o seu desenvolvimento nestas áreas e a descoberta de todas as suas potencialidades. Dadas as limitações enunciadas, é importante referir que a mais-valia da entropia decorre do facto de medir concretamente a dispersão global de uma determinada distribuição empírica, seja qual for a distribuição de probabilidades subjacente. A entropia deverá ser entendida, neste trabalho de investigação, como medida de incerteza e não como medida de risco, dado não ser conhecida a verdadeira distribuição de probabilidade seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos em estudo.

Há que evidenciar o papel da entropia como valor ordinal da informação do ponto de vista do investidor. Maiores valores de entropia correspondem a maiores valores de incerteza. A existência de incerteza promove, por si só, a necessidade de obtenção de informação, e como é claro, quanto maior a incerteza, maior a necessidade de obtenção de informação. À medida que a entropia diminui, a injeção de informação deixa de ser tão importante, diminuindo o seu valor e também a sua procura. Por este motivo, muitos autores consideram a entropia como uma medida de informação. A entropia proporciona ao investidor o acesso a mais informação, que o auxilia na caracterização e avaliação de um título, de uma carteira ou até do mercado e também na procura e obtenção de mais informação para superar um determinado estado de incerteza em que se encontra. Deste modo, partindo do pressuposto que a entropia pode ser encarada como valor ordinal da informação (ou necessidade de informação), é natural que condicione a procura de informação por parte do investidor. Maiores níveis de entropia, indicadores de uma situação de grande incerteza poderão justificar a procura de informação a fontes que obrigam a um maior dispêndio de dinheiro, tempo, atenção...; enquanto que um baixo valor de entropia poderá não justificar gastos desmesurados na procura e obtenção de mais informação.

Como é natural, não se pretende afirmar que apenas o conhecimento de variáveis quantitativas permite ao investidor uma diminuição da incerteza. Para além do conhecimento da rendibilidade média, da verdadeira dispersão que o título (ou carteira) apresenta e da sua relação com ou títulos ou índices, o investidor deve ainda estar atento a toda a informação referente às empresas cotadas em bolsa, ao desenvolvimento da economia nacional e mundial, à ocorrência de determinados acontecimentos susceptíveis de influenciar o comportamento da bolsa (como por exemplo as taxas de juro, taxas de câmbio, estabilidade política...). Só assim será possível que a incerteza seja mínima e que o nível de informação patente permita a tomada de uma decisão o mais racional possível.

Este trabalho de investigação apresenta um contributo importante para a compreensão e análise do mercado bolsista de acções português, mais concretamente sobre a dispersão global e incerteza que o caracterizam constituindo uma exploração de um campo de estudo ainda novo em determinados aspectos. O conhecimento da verdadeira incerteza e dispersão pode auxiliar o investidor no processo de tomada de decisão quanto aos investimentos a efectuar. Dado que a entropia não é apresentada como medida de selecção, mas sim como fonte de informação sobre um determinado

estado, a sua utilização por parte do investidor no processo de decisão pode não ser idêntica em todas as situações. É precisamente como fonte de informação que a entropia demonstra as suas potencialidades, pois alerta de forma muito mais concreta que a variância para a possibilidade de ocorrência de eventos raros, contribuindo para uma melhor caracterização do comportamento de determinado título e da forma como este se relaciona com o mercado em geral (representado por um índice). Sugere-se o cálculo da entropia, da informação mútua e suas variantes como forma de verificar se os resultados obtidos por tradicionais modelos de gestão de carteiras reflectem a realidade e, deste modo, proceder às correcções necessárias nos elementos de apoio ao processo de tomada de decisão no sentido de realizar bons investimentos. De um modo geral, a minimização da incerteza poderá ser vantajosa, contudo o preço a pagar é a diminuição da taxa de rendibilidade esperada. A melhor combinação entre estas duas grandezas (rendibilidade e incerteza) depende do investidor em causa, dos objectivos por si fixados e da sua personalidade.

A entropia surge como fonte de informação privilegiada para o investidor, que tem ferramentas mais concretas que o auxiliam no momento de tomar uma decisão. Esta é condicionada pela forma como é utilizada a informação disponível e também pela atitude do investidor perante cenários de incerteza. A entropia permite ainda uma leitura diferente e complementar da informação económica e financeira, auxiliando investidores, operadores e outras instituições.

Por fim, há que salientar a interdisciplinaridade que a introdução da entropia na teoria de carteiras proporciona, motivando uma crescente aproximação entre a física, a teoria da informação e a economia financeira.

## **6.2 – Limitações e sugestões**

Esta secção apresenta algumas das limitações deste trabalho de investigação, assim como sugestões para trabalhos futuros, dentro do tema abordado. As conclusões deste estudo foram influenciadas por diversos pressupostos e omissões, que caso tivessem sido considerados de outra forma, poderiam ser obtidos diferentes resultados.

A primeira limitação diz respeito à qualidade e quantidade de informação recolhida. A amostra analisada neste trabalho, constituída por 26 títulos com 989

observações cada um, não é de forma alguma representativa do mercado bolsista de acções português, contudo, a fraca liquidez do mercado e a sua pequena dimensão são factores que obrigam à redução do tamanho da amostra, caso se pretenda estudar títulos continuamente cotados num determinado período de tempo. Além disso, é considerado que a taxa de rendibilidade do activo sem risco é constante ao longo dos quatro anos analisados, o que na realidade não se verifica. As taxas de juro apresentaram grandes oscilações no período em causa, oscilações essas que, com certeza, influenciaram o investidor na decisão de investimento. Tal adopção deve-se à facilidade de cálculo que tal pressuposto possibilita. No caso concreto das probabilidades conjuntas entre as taxas de rendimento do mercado (identificado pelas taxas de rendibilidade do índice BVL 30) e taxas de rendibilidade do título ou acção em causa, o pressuposto de que a taxa de rendibilidade do activo sem risco é constante, permitiu que não se verificassem quaisquer alterações nos valores da entropia conjunta entre tais variáveis. Neste contexto, considera-se interessante repetir o estudo realizado, mas tendo em conta taxas de rendibilidade do activo sem risco reais, nomeadamente Bilhetes do Tesouro, Certificados de Aforro ou Depósitos a Prazo.

A forma de cálculo das taxas de rendibilidade dos títulos e do índice BVL 30 pode oferecer alguma crítica, dado não ter sido utilizado o logaritmo do quociente entre cotação no dia  $t$  sobre cotação no dia  $t - 1$ . Este modelo é vulgarmente utilizado para aproximar a distribuição empírica da distribuição normal. Como o objecto de estudo deste trabalho de investigação se baseia na análise da verdadeira distribuição de probabilidade apresentada pelas taxas de rendibilidade, considera-se que tal modelo constitui um “véu” subtil, que “embeleza” aquela situação. Por isso as taxas de rendibilidade dos títulos e do índice foram calculadas através de um quociente entre a diferença da cotação da acção do período  $t$  e  $t - 1$  mais os dividendos distribuídos no momento  $t$ , e a cotação de  $t - 1$ .

A estrutura do modelo utilizado para calcular a entropia dos títulos e das carteiras também encerra algumas limitações. No modelo utilizado, é imposto o pressuposto de que as frequências relativas constituem uma boa aproximação às probabilidades, proporcionando que o cálculo da entropia, referente a um determinado histograma, siga a forma discreta. Tal limitação deve-se ao facto de não serem conhecidas com exactidão as verdadeiras distribuições de probabilidade das taxas de rendimento dos títulos e índice BVL 30. Em futuros trabalhos, seria interessante

desenvolver uma abordagem que permitisse a utilização da entropia não só como medida de dispersão, mas também como critério de selecção.

Seria ainda interessante analisar o conceito entropia, não como uma medida estática, tal como é aqui apresentada, mas de forma dinâmica, de modo a acompanhar o comportamento real e dinâmico dos mercados bolsistas de acções. A análise da entropia como medida dinâmica poderia ser baseada nos princípios dos modelos ARCH/GARCH (modelos de heterocedasticidade condicional autorregressiva), com base no conhecimento de funções densidade que melhor representem a distribuição seguida pelas taxas de rendibilidade dos títulos

## 7 - BIBLIOGRAFIA

- ALDERSON, B. (1995).** Are Laws of Entropy Affecting Your Network?, *Network Computing*, vol 6, 13, p 107.
- ALEXANDER, S. (1961).** Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks; *Industrial Management Review*, 2, p77-26.
- ANDERSON, J. R.; DILLON, J. L. e HARDAKER, J. B. (1977).** *Agricultural Decision Analysis*, The Iowa University Press, Iowa, U.S.A..
- ARROW, K. J. (1963).** Comment on J. Duesenberry : The Portfolio Approach to the Demand for Money and Other Assets; *Review of Economics and Statistics*, p. 34.
- AUSLOOS, M. (1998).** The Money Games Physicists Play, *Europhysics News*, March/April.
- BARATA, José M. (1993).** *Moeda e Mercados Financeiros*, Instituto Superior de Economia e Gestão.
- BARRETO, I. (1996).** *Manual de Finanças: a moderna teoria de A a Z*; Abril/Controljornal, Lisboa.
- BORCH, K. (1968).** A Note of Uncertainty and Indifference Curves; *Review of Economic Studies*.
- BOUCHAUD, J.; CIZEAU, P., LALOUX, L. e POTTERS, M. (1999).** Mutual Attractions: Physics and Finance; *Physiscs World*, Jan.
- BREALEY, R. e MYERS, S. (1998).** *Princípios de Finanças Empresariais*, McGraw-Hill, Lisboa.
- BUCHEN, P. W. e KELLY, M. (1996).** The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 1.
- CÂMARA, A. S. (1989);** *Como Gerir Uma Carteira de Acções*, Gestmédia, Lisboa.
- CHAN, L. C., KARCESKI, J. e LAKONISHOK, J. (1998).** The Risk and Return From Factors, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 2.
- CHANG, M; WU, T. e HEH, J. (1998).** The Estimation of Entropy Variation in Decision Tree, in *Intelligent Data Engineering and Learning – Perspectives on Financial Engineering and Data Mining*, Edited by Xu, L.; Chan, L.W.; Fu, A; Hong-Kong.

**CHATERJEE, S. e YILMAX, M. (1992).** Chaos, Fractals and Statistic; *Statistical Science*, 7, p49-121.

**CLARKSON, P.; GUEDES, J. e THOMPSON, R. (1996).** On the Diversification, Observability and Measurement of Estimation Risk, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 1.

**CLEMENT, R. T. (1993).** *Making Hard Decisions – An Introduction to Decision Analysis*, Duxbury Press, London;

**CÓDIGO DO MERCADO DE VALORES MOBILIÁRIOS: Regulamentos de CMVM e Legislação Complementar (1998);** anotadores: Paulo M. Sendim, Fátima Gomes; Universidade Católica Portuguesa, Livraria Escolar Editora, Lisboa.

**COLE, R. (1985).** Target Information for Competitive Performance; *Harvard Business Review*, May – June.

**COLES, J. L.; LOEWENSTEIN, U. e SUAY, J. (1995).** On Equilibrium Pricing under Parameter Uncertainty, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 30, 3.

**COWELL, F. (1980).** Generalized Entropy and the Measurement of Distributional Change; *European Economic Review*, 13.

**DACOROGNA, M. (1999).** Econophysics Find a Forum; *Physics World*, Sep.

**DICKSON, G. W., e WETHERBE, J. C. (1989).** *The Management of Information Systems*; International Student – McGraw-Hill.

**EBRAHIMI, N. e MAASOUMI, E. and SOOFI, E. S. (1999).** Ordering Univariate Distributions by Entropy and Variance, *Journal of Econometrics*, 90, 2, p317-336.

**EDERINGTON, L e LEE, H. (1996).** The Creation and Resolution of Market Uncertainty: The Impact of Information Releases on Implied-Volatility, *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 31, 4.

**EECKHOUDT, L. e GOLLIER, C. (1995).** *Risk - Evaluation, Management and Sharing*, Harvester Wheatsheaf.

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1995).** *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 2ª Ed. John Wiley & Sons, New York.

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1999).** Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection in Investments – Portfolio Theory and Asset Pricing; Edited by Edwin Elton and Martin Gruber; MIT Press, London.

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1999).** Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: Tracing Out the Efficient Frontier in Investments – Portfolio Theory and Asset Pricing; Edited by Edwin Elton and Martin Gruber; MIT Press, London.

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1999).** Are Betas Best in Investments? – Portfolio Theory and Asset Pricing; Edited by Edwin Elton and Martin Gruber; MIT Press, London..

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1999).** Portfolio Theory When Investments Relatives Are Log-Normally Distrbuted in Investments – Portfolio Theory and Asset Pricing; Edited by Edwin Elton and Martin Gruber; MIT Press, London.

**ELTON, E. J. e GRUBER, M. J. (1999).** Portfolio Analysis With a Nonnormal Multi-Index Return-Generating Process in Investments – Portfolio Theory and Asset Pricing; Edited by Edwin Elton and Martin Gruber; MIT Press, London.

**FABIAN, Z. (1997).** Information and Entropy of Continuous Radom Variables; IEEE Transactions on Information Theory, 43, 3, p1080.

**FAMA, E. M. (1965).** The Behavior of Stock Market Prices; Journal of Business, 38, p34-105.

**FAMA, E. M. (1966).** Portfolio Selection in a Stable-Paretian Market, Management Science, 404-419.

**FAMA, E. M. (1976).** Foundations of Finance, Portfolio Decisions and Security Prices; Basic Books, Inc. Publishers; New York, USA.

**FAMA, E. (1996).** Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 31, 4.

**FAMA, E. (1997).** Market Efficiency, Long-Term Returns, and Behavioral Finance; in <http://papers.ssrn.com>;

**FAMA, E. M. e ROLL R. (1968).** Some Properties of Symmetric Stable Distributions, Journal of the American Statistical Association, p817-846.

**FELDSTEIN, M. (1969).** Mean Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection, Review of Economic Studies, p5-12.

- FERNHOLZ, R. e SHAY, B. (1982).** Stochastic Portfolio Theory and Stock Market Equilibrium; *Journal of Finance*, 37, p615-624.
- FERNHOLZ, R. (1999).** On the Diversity of Equity Markets, *Journal of Mathematical Economics*, 31, 3, p393-417.
- FINKELSTEIN, M. D. e FRIEBERG, R. M. (1967).** The Application of an Entropy Theory of Concentration to the Clayton Act, *The Yale Law Journal*, p677-717;
- GAMA, P. M. (2000).** A Eficiência Fraca do Mercado Accionista em Portugal: Evidência do Teste de Rácios de Variância e da Investigação da Regularidade de Calendário – 1989 a 1996; in *Estudos de Gestão de Empresas*, Vol. II, Vida Económica;
- GARNER, W. R. e MCGILL, W. J. (1956).** The Relation Between Information and Variance Analysis, *Psychometrica*, p219-228.
- GEORGESCU-ROEGEN, N. (1971).** Entropy Law and the Economic Process, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- GODINHO, P. M. (1999).** A Distribuição e a Dependência Temporal de Taxas de Rentabilidade; Associação da Bolsa de Derivados do Porto;
- GRANDMONT, J. e HILDENBRAND, W. (1974).** Stochastic Process of Temporary Equilibria; *Journal of Mathematical Economics*, I, p247-278.
- GRAY, R. M. (1990).** Entropy and Information Theory, Springer, New York.
- GULKO, B. (1998).** The Entropy Pricing Theory – Market Beliefs, Valuation, Incomplete Markets, Asset Pricing; PhD dissertation, UMI – Dissertations Services.
- HANOCH, G. e LEVY, H. (1970).** Efficient Portfolio Selection whit Quadratic and Cubic Utility, *Journal of Business*, p181-189.
- HAZELL, P. B. R. e NORTON, R. D. (1986).** Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture, MacMillan Publishing Company, New York.
- HICKS, J. R. (1962).** Liquidity, *The Economic Journal*, 787.
- HOLM, J. (1993).** Maximum Entropy in Lorenz Curves; *Journal of Econometrics*, 59, p377-389.

- HOROWITZ, A. e HOROWITZ, H. (1968).** Entropy, Markov Processes and Competition in the Brewing Industry, *Journal of Industrial Economics*, p196-211.
- HUGHES, W. R. (1995).** Valuing Information in Decision Making Under Uncertainty, *Australian Journal of Management*, 20, p105.
- HSU, D. (1982).** A Bayesian Robust Detection of Shift in the Risk Structure of Stock Market Returns; *Journal of The American Statistical Association*, p29-39.
- JAMES, J. (1999).** Modelling the Money Markets; *Physics World*, Sep.
- JANZURA, M.; TIMO, K. (1996).** Minimum Entropy of Error Estimation for Discrete Random Variables; *IEEE Transactions on Information Theory*, 42, p1193.
- KENDALL, M. G. (1953).** The Analysis of Economic Time-Series, Part 1. Prices; *Journal of The Royal Statistical Society* 116, p11-25.
- KEYNES (1937).** Alternative Theories of the Rate of Interest, *Economic Journal*.
- KON, S. (1984).** Model of Stock Returns: a Comparison; *The Journal of Finance* 39, p147-165.
- KULLBACK, S. (1968).** *Information Theory and Statistics*, Dover, New York.
- KURODA, T. (1993).** A Power Index for Multistage and Multiagent Decision Systems, *Behavioral Science*, Vol 38, 4, p 225.
- LACERDA, P. (1994).** O Papel da Informação nos Mercados Financeiros; *Revista Portuguesa de Gestão II*, p89-93.
- LAFFONT, J. (1990).** *The Economics of Uncertainty and Information*, MIT Press Cambridge, Massachusetts.
- LEVY, H. e HANOCH, G. (1970).** Relative Effectiveness of Efficiency Criteria for Portfolio Selection, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, p63-76.
- LEVY H. e SARNAT, M. (1970).** Portfolio Selection and Investor's Utility: A Graphical Analysis, *Applied Economics*, 2, p113-119.
- LIESENFELD, R. e JUNG, R. (1997).** Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy-Tailed Distributions; in <http://papers.ssrn.com>;

- LINTNER (1965).** Security Prices, Risk and Maximal Gain From Diversification; *Journal of Finance*, p587 – 615.
- MAASOUMI, E. (1993).** A Compendium to Information Theory in Economics and Econometrics; *Econometric Review*; 12 (2), p137-181.
- MANDELBROT, B. (1963).** The Variation of Certain Speculative Prices; *Journal of Business*, 36, p394-416.
- MANTEGNA, R. e STANLEY, H. (2000).** An Introduction to Econophysics – Correlations and Complexity in Finance; Cambridge University Press.
- MARKOWITZ, H. M. (1952).** Portfolio Selection, *Journal of Finance*, p77-91.
- MARKOWITZ, H. M. (1959).** Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, John Wiley & Sons, New York.
- MARKOWITZ, H. M. (1989).** Mean-Variance Analysis in Portfolio and Capital Markets, Basil Black Well, Oxford.
- MARQUES, M. e FREIRE, M. (1998).** A Informação no Mercado de Capitais; *Cadernos do Mercado de Valores Mobiliários*, n.º 3, Lisboa.
- MATOS, F. B. (1993).** Ganhar em Bolsa – O mercado de acções; Ecla Editora, Lisboa.
- MAYUMI, K. (1997).** Information, Pseudo Measures and Entropy: An Elaboration on Nicholas Georgescu-Roegen's Critique, *Ecological Economics*, 22, 3, p249-259.
- MCGILL, W. J. (1954).** Multivariate Information Transmission, *Psychometrica*, p97-116.
- MERTON, R. (1972).** An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier; *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, p1851-1872.
- MERTON, R. (1976).** Option Price When Underlying Stock Returns are Discontinuous; *Journal of Financial Economics*, 3, p125-144.
- MOTA, A G. e TOMÉ, J. C. (1996).** Mercado de Títulos – Uma Abordagem Integrada, Texto Editora, Lisboa;
- MURTEIRA, B. J. F., MÜLER, D. E TURKMAN, K. F. (1993).** Análise de Sucessões Cronológicas; McGraw-Hill, Portugal.

- NAWROCKY, D. (1976).** Stock Market Equilibrium, Conditional Entropy and Adaptive Trading Rules; PhD Dissertation; UMI – Dissertations Services.
- OLIVEIRA, A. (1994).** O Valor da Informação; Revista APSI, n.º 2.
- OLIVEIRA, A. (1996).** O Valor Potencial dos Sistemas de Informação; Revista Estudos de Gestão, Vol. III, n.º 1.
- OLIVEIRA, A. (1999).** Anatomia e Metabolismo do Processo Decisório em Contexto Empresarial - algumas questões; Publicações Universidade de Évora; Évora.
- OSBORNE, M. (1964).** Brownian Motion in the Stock Prices; Paul Cootner Ed.; M.I.T..
- PEIXOTO, J. P. (1984).** Entropia e ainda Entropia, Universidade do Algarve.
- PETERS, E. (1991).** Chaos and Order in the Capital Markets; A Wiley Finance Ed.
- PETERS, T. (1988).** Thriving on Chaos: Handbook of a Management Revolution, McMillan, London.
- PINHEIRO, A. C. E GALEGO, M. A. (1995).** Econometria; Manuais da Universidade de Évora.
- PHILIPPATOS, G. C. e NAWROCKI, D. N. (1973).** The Information Inaccuracy of Stock Market Forecasts: Some New evidence of Dependence on the N.Y.S.E., The Journal of Financial and Quantitative Analysis.
- PHILIPPATOS, G. C. e WILSON, C. (1972).** Entropy, Market Risk and the Selection of Efficient Portfolios, Applied Economics, 4, p209-220.
- PHILIPPATOS, G. C. e WILSON, C. (1974).** Entropy, Market Risk and the Selection of Efficient Portfolios:Reply, Applied Economics, 6, p77-81;
- PORTER, M. e MILLAR, V. (1985).** How Information Gives You Competitive Advantage, Harvard Business Review, July – August.
- POUPANÇA ACCÇÕES – Boletim Semanal n.º 1 a n.º 139;** Edideco, Lisboa.
- PRATT, J. (1958).** Risk Aversion in the Small and in the Large; Econometrica, p.122.
- REIS, A. H. (1996).** Física Estatística; Universidade de Évora (documento não publicado).

**REIS, E.; MELO, P.; ANDRADE, R. e CALAPEZ, T. (1999).** Estatística Aplicada, Vol. 1; Edições Sílabo; Lisboa.

**REIS, E.; MELO, P.; ANDRADE, R. e CALAPEZ, T. (1997).** Estatística Aplicada, Vol. 2; Edições Sílabo; Lisboa.

**ROLL, R. (1977).** A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Journal of Financial Economics, p129-176.

**SAMPERI, D. (1998).** Inverse Problems, Model Selection and Entropy in Derivative Security Pricing; PhD Dissertation; UMI – Dissertations Services.

**SAMPERI, D. (1999).** Entropy and Statistical Model Selection for Asset Pricing and Risk Management; in <http://papers.ssrn.com>;

**SERRANO, A. (1997).** Sistemas de Informação Estratégicos, Publicações Universidade de Évora; Évora.

**SERRÃO, A. C. (1988).** Farm-Level Response to Agricultural Development Strategies in the Évora Dryland Region of Portugal, Ph.D. Thesis, unpublished thesis, Purdue University, U.S.A.

**SHANNON, C. E. (1948).** A Mathematical Theory of Communication, Bell Systems Tech., 27: p379-423, p623-656.

**SHANNON, C. E. and WEAVER, W. (1964).** The Mathematical Theory of Communication, The University of Illinois Press, Urbana.

**SHARPE, W. F. (1963).** A Simplified Model for Portfolio Analysis, Management Science, p277-293.

**SHARPE, W. (1964).** Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk; Journal of Finance, 19; p425-442.

**SHARPE, W. F. (1970).** Portfolio Theory and Capital Markets, McGraw-Hill.

**SHARPE, W. F. (1985).** Investments, Prentice-Hall International Editions; New Jersey.

**SLEVIN, D. P. (1997).** Time, Growth, Complexity, and Transitions: Entrepreneurial Challenges for the Future, Entrepreneurship: Theory & Practice, vol 22, 2, p53.

**SOARES, V. (1997).** a (IN) Eficiência dos Mercados Bolsistas de Acções – O estudo do caso português; Vida Económica, Porto.

**STUZER, M. (1995).** A Bayesian Approach to Diagnostics of Asset Pricing models; *Journal of Econometrics*, 68, p367-397.

**STUZER, M. (1998).** A Portfolio Index and its Implications in <http://papers.ssrn.com>;

**TAVARES, L. V.; OLIVEIRA, R. C.; THEMIDO, I. H e CORREIA, F. N. (1996).** *Investigação Operacional*; McGraw-Hill, Lisboa.

**THEIL, H. (1969).** On the Use of Information Theory Concepts in the Analysis of Financial Statements, *Management Science*, p459-480.

**THEIL, H. (1967).** *Economics and Information Theory*, Rand McNally, Chicago.

**TOBIN, J. (1958).** Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk, *Review of Economics Studies*, p65-86.

**TOFT, K. B. (1996).** On the Mean-Variance Tradeoff Option Replication with Transactions Costs, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, 2.

**TOSTA DE SÁ, G. (1987).** *Mercado de Acções e Bolsas de Valores*, Edições Correio da Manhã ,Lisboa.

**TUCKER, A. (1992).** A Reexamination of Finite and Infinite Variance Distributions as Model of Daily Stock Returns; *Journal of Business & economic Statistics*, 10, p 73-81.

**VARIAN, H. R. (1990).** *Intermediate Microeconomics – A Modern Approach*, 2ª ed., Norton, International Student Edition, London.

**VERDUGO LAZO, A e RATHIE, P. (1978).** On the Entropy of Continuous Probability Distributions; *IEEE Transactions on Information Theory*; p120-122.

**WHITE, D. J. (1969).** *Decision Theory*, Aldine Publishing Company, Chicago.

**WHITE, D. J. (1974).** Entropy, Market Risk, and the Selection of Efficient Portfolios: Comment, *Applied Economics*, 6, p73-75.

**WHITMORE, G. A (1970).** Third-Degrees Stochastic Dominance, *American Economic Review*, p457-459.

**ZELLNER, A. (1996).** Models, Prior Information and Bayesian Analysis; *Journal of Econometrics*, 75, p51-68.

**ZHANG, Y. (1998).** Envolving Models of Financial Markets; Europhysics News, March/April.

**ZHANG, Z. e YEUNG, R. W. (1998).** On Characterization of Entropy Function via Information, IEEE Transactions on Automatic Control, 44, 4, p1440.

**ZORRINHO, C. (1995).** Gestão da Informação – Condição para Vencer, IAPMEI.

**ZORRINHO, C. (1994).** Virtual Management – Pilotagem de Organizações através do Sistema de Informação, Revista Portuguesa de Gestão, 1994.

**8 – ANEXOS - ANÁLISE ESTATÍSTICA DA VARIÁVEL  $\varepsilon_i$  DAS  
REGRESSÕES LINEARES OBTIDAS NA SECÇÃO 5.4.**

## 8.1.– BVL 30 versus Banif

Teste à linearidade e variância constante:

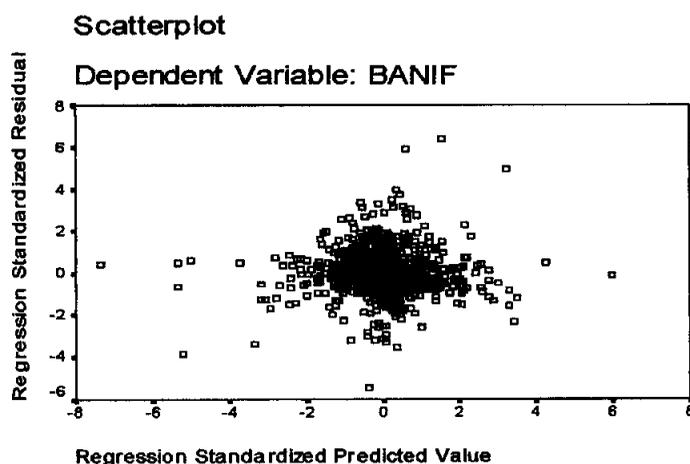


Figura 8.1 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Banif  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,326 <sup>a</sup>	,107	,106	2,016E-02	2,241

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: BANIF

Quadro 8.1 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Banif

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-1,8512E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,123
	Positive	,123
	Negative	-,088
Kolmogorov-Smirnov Z		3,877
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.2 – Teste à normalidade dos resíduos do título Banif

Fonte: Cálculos do autor

## 8.2 – BVL 30 versus Barbosa & Almeida

### Teste à linearidade e variância constante

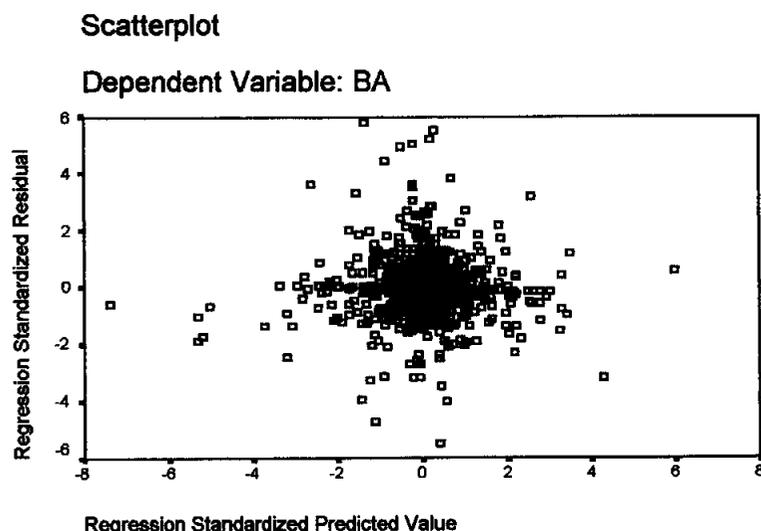


Figura 8.2 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Barbosa Almeida

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à autocorrelação:

#### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,036 <sup>a</sup>	,001	,000	2,002E-02	2,337

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: BA

Quadro 8.3 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Barbosa & Almeida

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à normalidade dos resíduos:

#### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

			Standardized Residual
N			989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean		6,2141E-10
	Std. Deviation		,9994938
Most Extreme Differences	Absolute		,154
	Positive		,154
	Negative		-,111
Kolmogorov-Smirnov Z			4,856
Asymp. Sig. (2-tailed)			,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.4 – Teste à normalidade dos resíduos do título Barbosa & Almeida

Fonte: Cálculos do autor

### 8.3 – BVL 30 versus BCP

#### Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

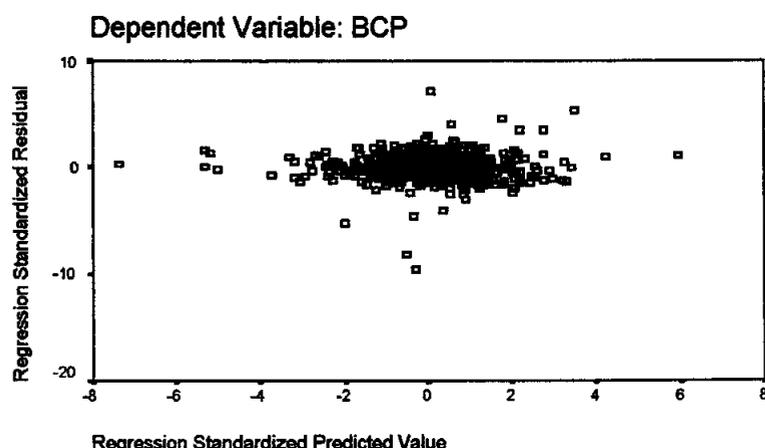


Figura 8.3 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título BCP

Fonte: Cálculos do autor.

#### Teste à autocorrelação:

##### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,693 <sup>a</sup>	,480	,480	1,232E-02	1,826

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: BCP

Quadro 8.5 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título BCP

Fonte: Cálculos do autor

#### Teste à normalidade dos resíduos:

##### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	4,9132E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,087
	Positive	,087
	Negative	-,079
Kolmogorov-Smirnov Z		2,738
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.6 – Teste à normalidade dos resíduos do título BCP

Fonte: Cálculos do autor

## 8.4 – BVL 30 versus BTA

### Teste à linearidade e variância constante

#### Scatterplot

Dependent Variable: BTA

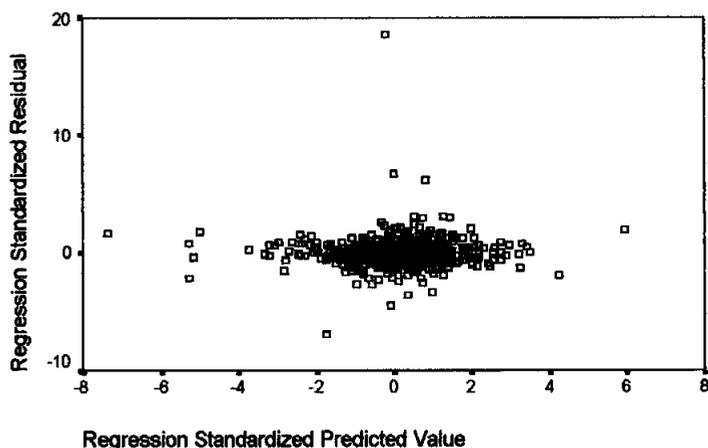


Figura 8.4 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título BTA

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à autocorrelação:

#### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,350 <sup>a</sup>	,122	,121	2,452E-02	2,225

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: BTA

Quadro 8.7 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título BTA

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à normalidade dos resíduos:

#### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	3,8903E-11
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,152
	Positive	,152
	Negative	-,131
Kolmogorov-Smirnov Z		4,768
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.8 – Teste à normalidade dos resíduos do título BTA

Fonte: Cálculos do autor

## 8.5 – BVL 30 versus Corticeira Amorim

Teste à linearidade e variância constante:

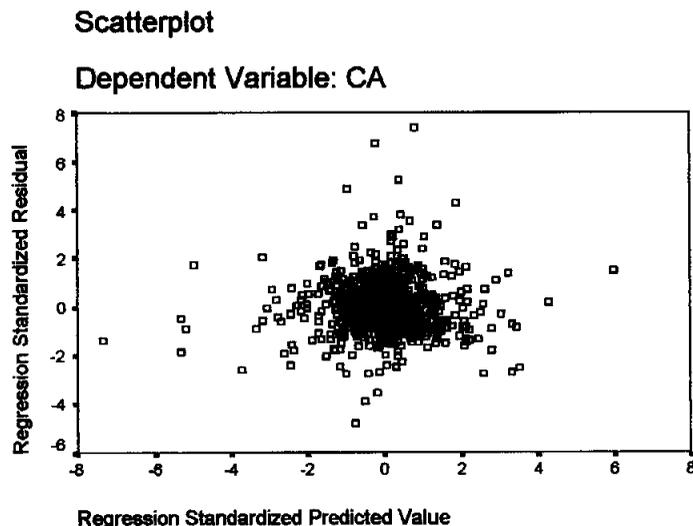


Figura 8.5 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Corticeira Amorim

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,454 <sup>a</sup>	,207	,206	1,866E-02	1,886

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: CA

Quadro 8.9 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Corticeira Amorim

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	8,0505E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,106
	Positive	,106
	Negative	-,063
Kolmogorov-Smirnov Z		3,323
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.10 – Teste à normalidade dos resíduos do título Corticeira Amorim

Fonte: Cálculos do autor

## 8.6 – BVL 30 versus Caima

### Teste à linearidade e variância constante:

#### Scatterplot

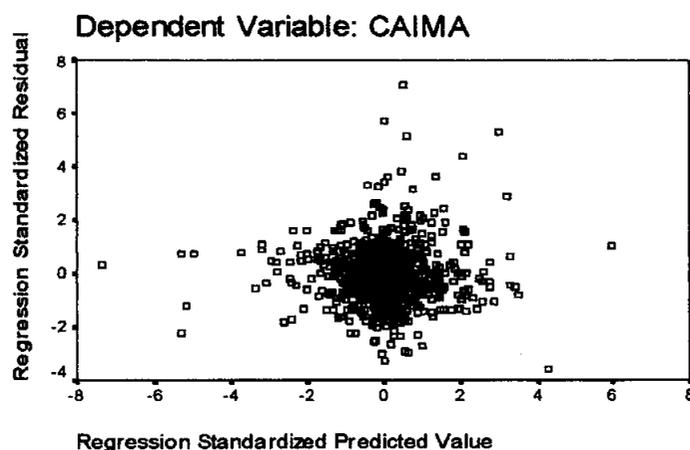


Figura 8.6 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Caima

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à autocorrelação:

#### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,307 <sup>a</sup>	,094	,094	2,119E-02	2,079

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: CAIMA

Quadro 8.11 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Caima

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à normalidade dos resíduos:

#### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-6,7018E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,079
	Positive	,079
	Negative	-,068
Kolmogorov-Smirnov Z		2,485
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.12 – Teste à normalidade dos resíduos do título Caima

Fonte: Cálculos do autor

## 8.7 – BVL 30 versus Centralcer

Teste à linearidade e variância constante:

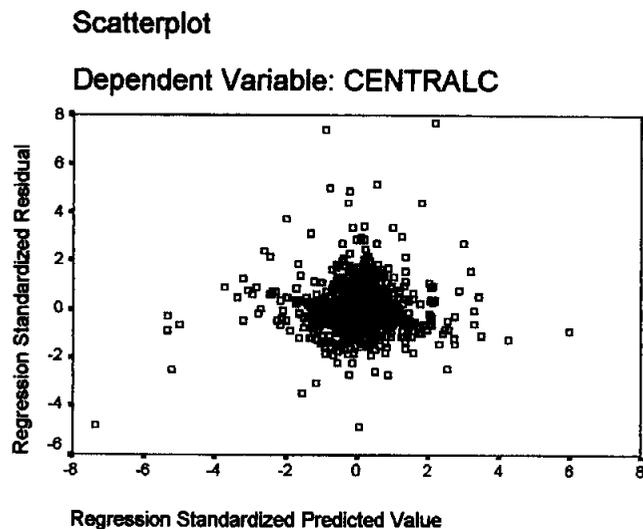


Figura 8.7 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Centralcer  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,267 <sup>a</sup>	,071	,070	2,751E-02	2,181

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: CENTRALC

Quadro 8.13 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Centralcer  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,1449E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,120
	Positive	,120
	Negative	-,075
Kolmogorov-Smirnov Z		3,778
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.14 – Teste à normalidade dos resíduos do título Centralcer  
Fonte: Cálculos do autor

## 8.8 – BVL 30 versus CIN

**Teste à linearidade e variância constante:**

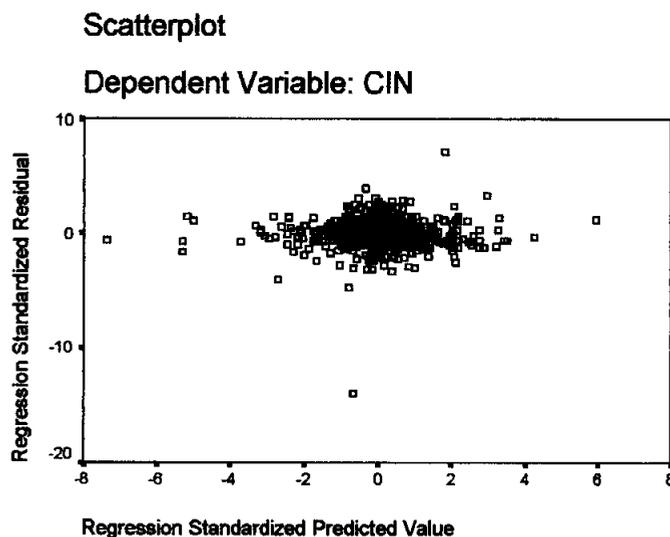


Figura 8.8 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título CIN  
 Fonte: Cálculos do autor

**Teste à autocorrelação:**

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,229 <sup>a</sup>	,052	,051	2,091E-02	2,145

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: CIN

Quadro 8.15 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título CIN

Fonte: Cálculos do autor

**Teste à normalidade dos resíduos:**

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-1,7442E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,125
	Positive	,122
	Negative	-,125
Kolmogorov-Smirnov Z		3,922
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.16 – Teste à normalidade dos resíduos do título CIN

Fonte: Cálculos do autor

## 8.9 – BVL 30 versus Engil

Teste à linearidade e variância constante:

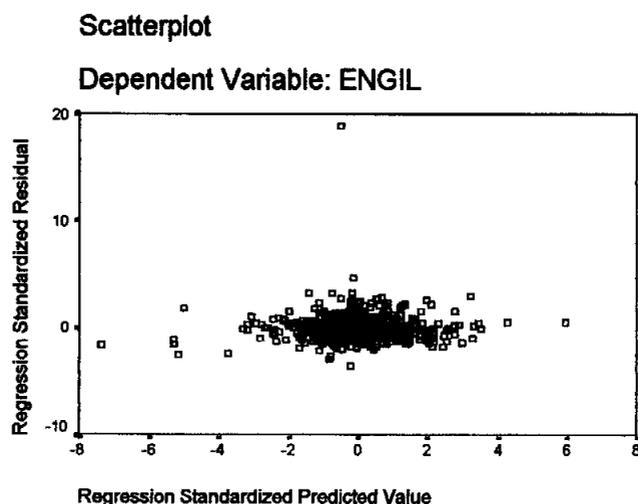


Figura 8.9 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Zresid$  (resíduos estandardizados) e  $X = Zpred$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Engil  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,306 <sup>a</sup>	,094	,093	2,044E-02	1,935

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: ENGIL

Quadro 8.17 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Engil  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,8753E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,126
	Positive	,126
	Negative	-,092
Kolmogorov-Smirnov Z		3,975
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.18 – Teste à normalidade dos resíduos do título Engil  
Fonte: Cálculos do autor

## 8.10 – BVL 30 versus Império

Teste à linearidade e variância constante:

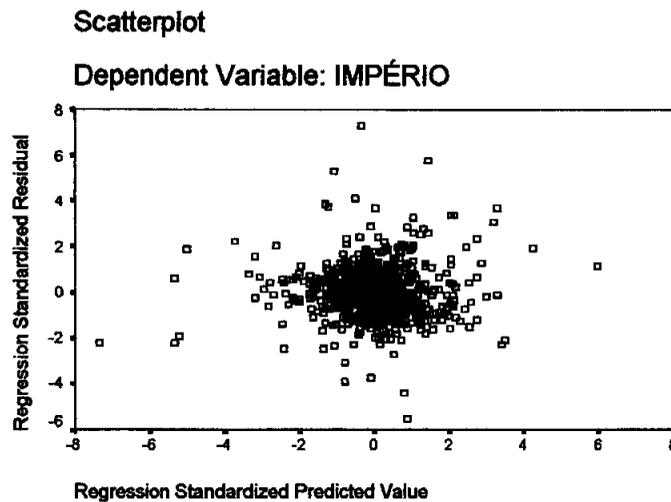


Figura 8.10 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Império

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,513 <sup>a</sup>	,264	,263	1,945E-02	1,896

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: IMPÉRIO

Quadro 8.19 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Império

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-5,9124E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,085
	Positive	,085
	Negative	-,061
Kolmogorov-Smirnov Z		2,672
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.20 – Teste à normalidade dos resíduos do título Império

Fonte: Cálculos do autor

## 8.11 – BVL 30 versus Inapa

Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

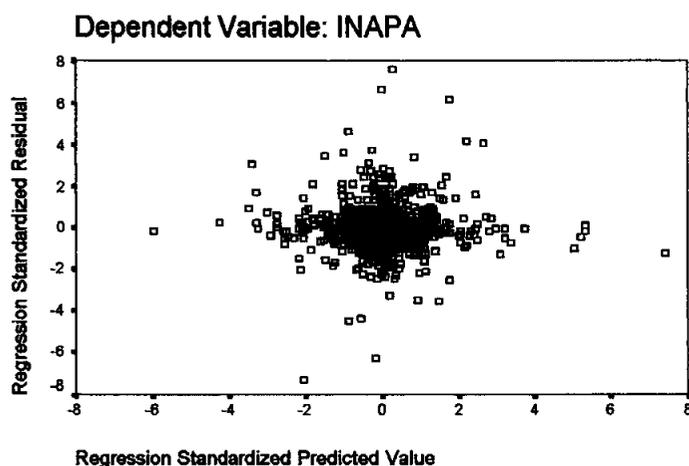


Figura 8.11 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Inapa  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,003 <sup>a</sup>	,000	-,001	1,937E-02	2,311

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: INAPA

Quadro 8.21 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Inapa

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,1244E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,151
	Positive	,151
	Negative	-,120
Kolmogorov-Smirnov Z		4,743
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.22 – Teste à normalidade dos resíduos do título Inapa

Fonte: Cálculos do autor

## 8.12 – BVL 30 versus Jerónimo Martins

Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

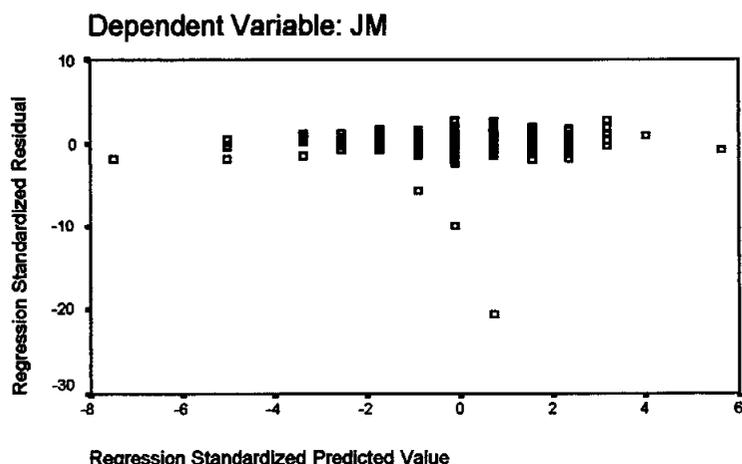


Figura 8.12 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Jerónimo Martins

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,488 <sup>a</sup>	,238	,238	2,332E-02	1,900

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: JM

Quadro 8.23 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Jerónimo Martins

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-9,6146E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,139
	Positive	,124
	Negative	-,139
Kolmogorov-Smirnov Z		4,358
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.24 – Teste à normalidade dos resíduos do título Jerónimo Martins

Fonte: Cálculos do autor

### 8.13 – BVL 30 versus Modelo & Continente

Teste à linearidade e variância constante:

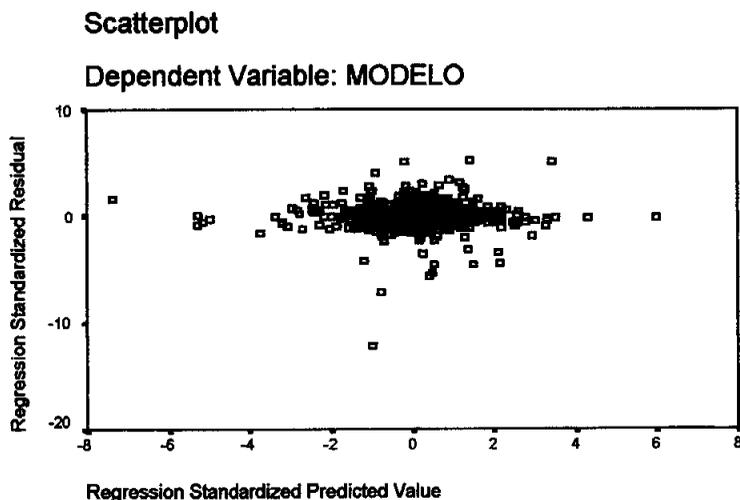


Figura 8.13 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Modelo & Continente

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,029 <sup>a</sup>	,001	,000	2,177E-02	1,899

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: MODELO

Quadro 8.25 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Modelo & Continente

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-8,1249E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,117
	Positive	,117
	Negative	-,115
Kolmogorov-Smirnov Z		3,674
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.26 – Teste à normalidade dos resíduos do título Modelo & Continente

Fonte: Cálculos do autor

## 8.14 – BVL 30 versus Mota & Companhia

Teste à linearidade e variância constante:

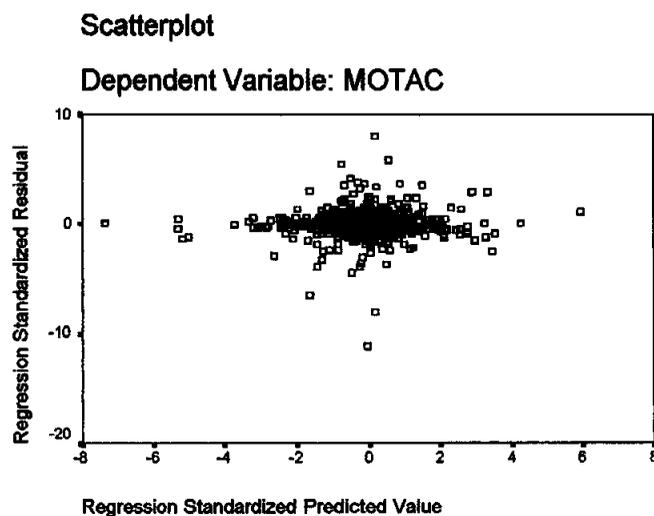


Figura 8.14 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Mota & Companhia

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,237 <sup>a</sup>	,056	,055	1,967E-02	2,285

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: MOTAC

Quadro 8.27 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Mota & Companhia

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	3,7283E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,198
	Positive	,198
	Negative	-,171
Kolmogorov-Smirnov Z		6,226
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.28 – Teste à normalidade dos resíduos do título Mota & Companhia

Fonte: Cálculos do autor

## 8.15 – BVL 30 versus Mundial Confiança

Teste à linearidade e variância constante:

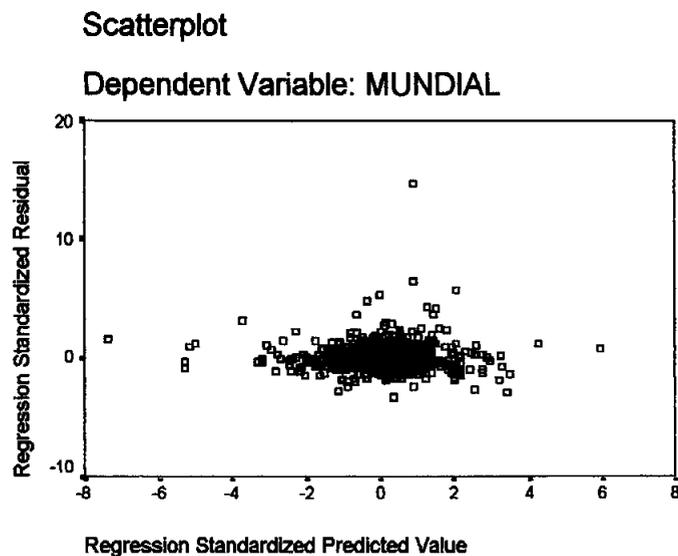


Figura 8.15 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Mundial e Confiança

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,620 <sup>a</sup>	,385	,384	1,899E-02	1,756

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: MUNDIAL

Quadro 8.29 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Mundial Confiança

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,8910E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,115
	Positive	,115
	Negative	-,097
Kolmogorov-Smirnov Z		3,602
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.30 – Teste à normalidade dos resíduos do título Mundial Confiança

Fonte: Cálculos do autor

## 8.16 – BVL 30 versus Portucel

Teste à linearidade e variância constante:

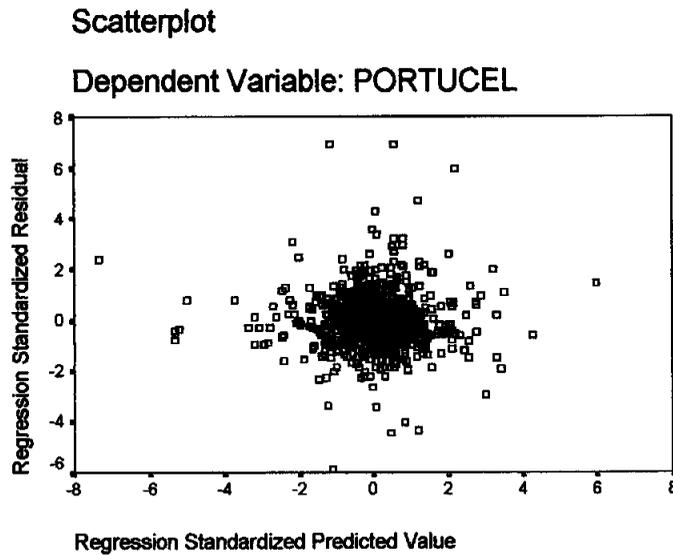


Figura 8.16 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Portucel

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,499 <sup>a</sup>	,249	,248	1,620E-02	1,728

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: PORTUCEL

Quadro 8.31 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Portucel

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,4001E-09
	Std. Deviation	,9994838
Most Extreme Differences	Absolute	,081
	Positive	,081
	Negative	-,079
Kolmogorov-Smirnov Z		2,563
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.32 – Teste à normalidade dos resíduos do título Portucel

Fonte: Cálculos do autor

## 8.17 – BVL 30 versus Portugal Telecom

Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

Dependent Variable: PT

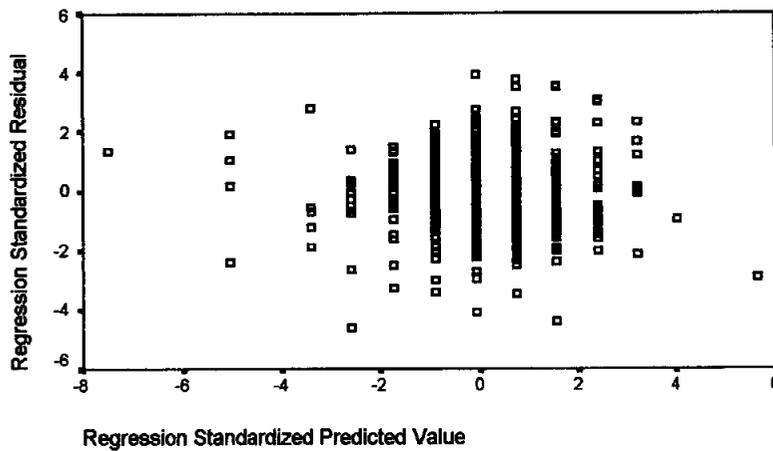


Figura 8.17 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Portugal Telecom

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,732 <sup>a</sup>	,536	,535	1,255E-02	1,725

a. Predictors: (Constant), BVL

b. Dependent Variable: PT

Quadro 8.33 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Portugal Telecom

Fonte: Cálculos do autor

Teste à linearidade dos resíduos:

### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-5,4476E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,062
	Positive	,062
	Negative	-,061
Kolmogorov-Smirnov Z		1,954
Asymp. Sig. (2-tailed)		,001

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.34 – Teste à normalidade dos resíduos do título Portugal Telecom

Fonte: Cálculos do autor

## 8.18 – BVL 30 versus Salvador Caetano

Teste à linearidade e variância constante:

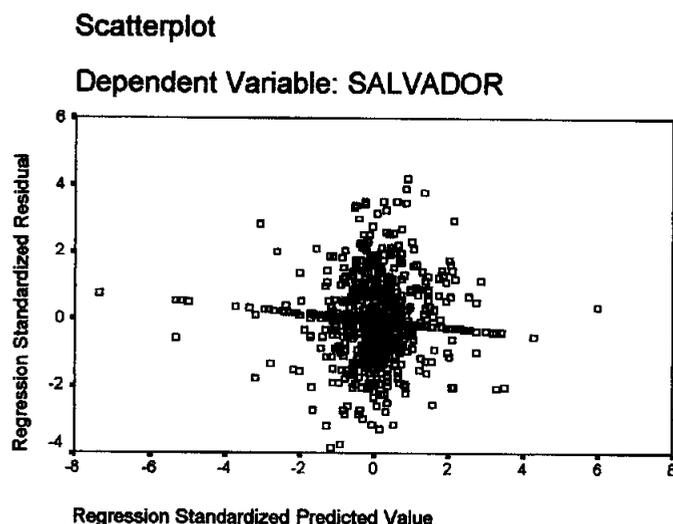


Figura 8.18 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Salvador Caetano

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,111 <sup>a</sup>	,012	,011	2,545E-02	2,397

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SALVADOR

Quadro 8.35 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Salvador Caetano

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	5,4676E-11
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,181
	Positive	,181
	Negative	-,161
Kolmogorov-Smirnov Z		5,697
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.36 – Teste à normalidade dos resíduos do título Salvador Caetano

Fonte: Cálculos do autor

## 8.19 – BVL 30 versus Semapa

Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

Dependent Variable: SEMAPA

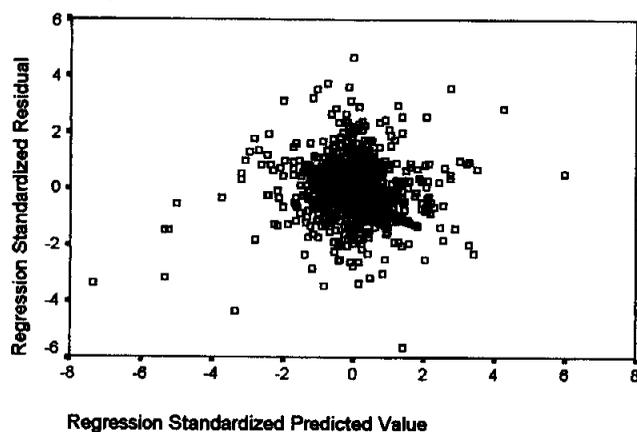


Figura 8.19 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Semapa

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,579 <sup>a</sup>	,335	,335	1,403E-02	1,965

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SEMAPA

Quadro 8.37 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Semapa

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-1,5192E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,054
	Positive	,054
	Negative	-,054
Kolmogorov-Smirnov Z		1,711
Asymp. Sig. (2-tailed)		,006

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.38 – Teste à normalidade dos resíduos do título Semapa

Fonte: Cálculos do autor

## 8.20 – BVL 30 versus Soares da Costa

**Teste à linearidade e variância constante:**

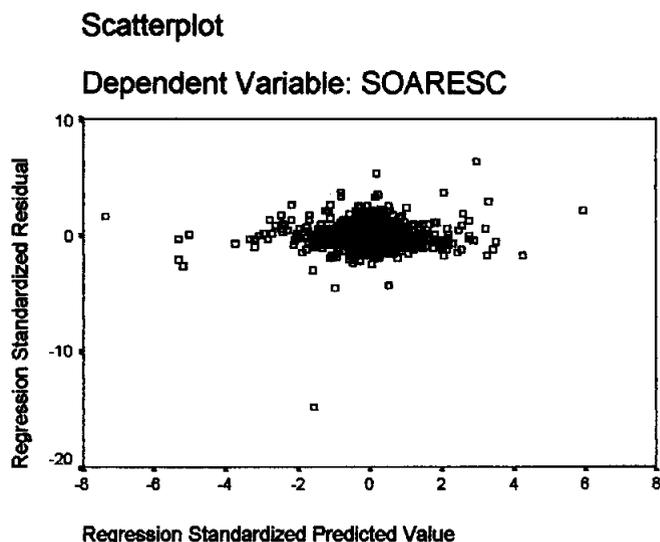


Figura 8.20 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Soares da Costa

Fonte: Cálculos do autor

**Teste à autocorrelação:**

### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,254 <sup>a</sup>	,064	,063	2,826E-02	2,038

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SOARESC

Quadro 8.39 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Soares da Costa

Fonte: Cálculos do autor

**Teste à normalidade dos resíduos:**

### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,0194E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,104
	Positive	,104
	Negative	-,098
Kolmogorov-Smirnov Z		3,281
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.40 – Teste à normalidade dos resíduos do título Soares da Costa

Fonte: Cálculos do autor

## 8.21 – BVL 30 versus Somague

Teste à linearidade e variância constante:

Scatterplot

Dependent Variable: SOMAGUE

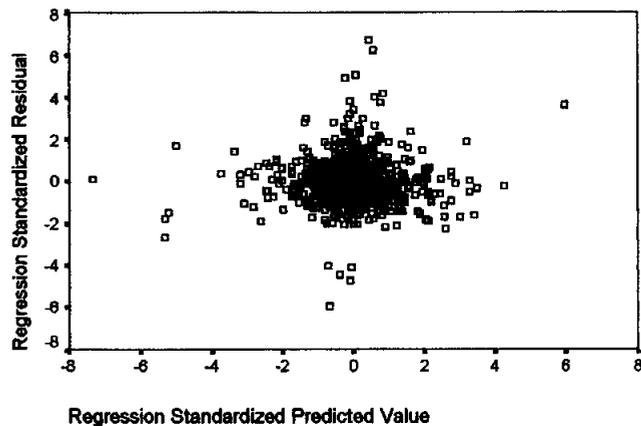


Figura 8.21 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Somague

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,400 <sup>a</sup>	,160	,159	2,440E-02	1,995

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SOMAGUE

Quadro 8.41 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Somague

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-4,8261E-12
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,112
	Positive	,112
	Negative	-,082
Kolmogorov-Smirnov Z		3,531
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.42 – Teste à normalidade dos resíduos do título Somague

Fonte: Cálculos do autor

## 8.22 – BVL 30 versus Sonae Investimentos

### Teste à linearidade e variância constante:

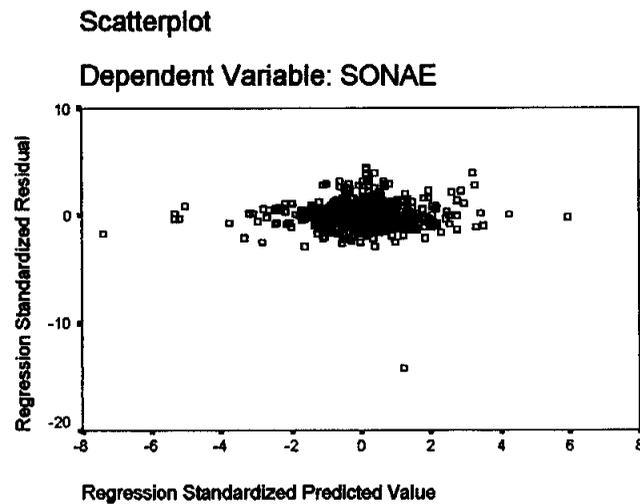


Figura 8.22 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Sonae Investimentos

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à autocorrelação:

#### Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,528 <sup>a</sup>	,279	,278	2,186E-02	1,906

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SONAE

Quadro 8.43 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Sonae Investimentos

Fonte: Cálculos do autor

### Teste à normalidade dos resíduos:

#### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		999
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-5,6748E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,096
	Positive	,096
	Negative	-,085
Kolmogorov-Smirnov Z		3,022
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.44 – Teste à normalidade dos resíduos do título Sonae Investimentos

Fonte: Cálculos do autor

## 8.23 – BVL 30 versus Soporcel

Teste à linearidade e variância constante:

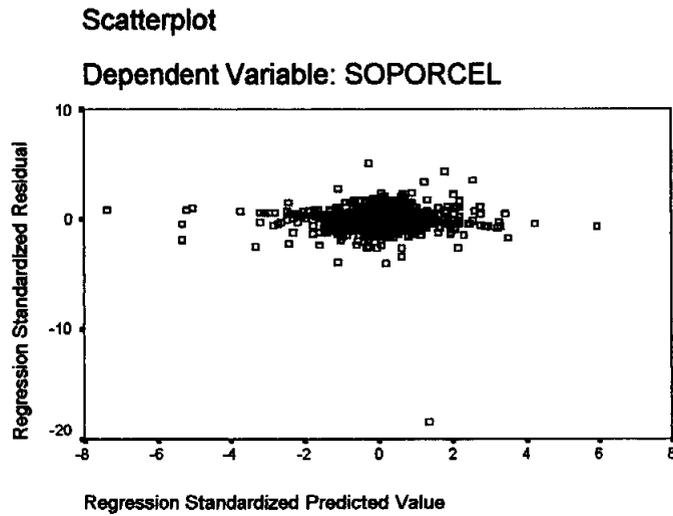


Figura 8.23 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Soporcel

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

### Model Summary<sup>a</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,193 <sup>a</sup>	,037	,036	2,613E-02	2,019

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: SOPORCEL

Quadro 8.45 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Soporcel

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

### One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-3,1331E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,121
	Positive	,103
	Negative	-,121
Kolmogorov-Smirnov Z		3,805
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.46 – Teste à normalidade dos resíduos do título Soporcel

Fonte: Cálculos do autor

## 8.24 – BVL 30 versus Tranquilidade

Teste à linearidade e variância constante:

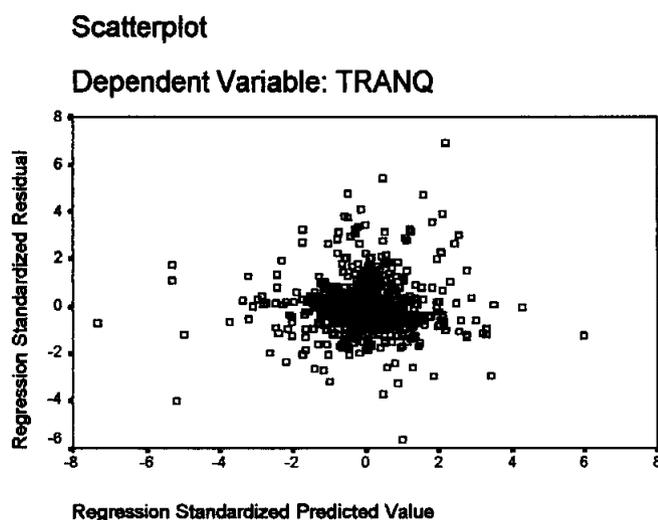


Figura 8.24 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Tranquilidade

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,332 <sup>a</sup>	,110	,109	1,729E-02	1,891

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: TRANQ

Quadro 8.47 – Teste de Durbin-Watson

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-2,0923E-11
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,130
	Positive	,130
	Negative	-,090
Kolmogorov-Smirnov Z		4,090
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.48 – Teste à normalidade dos resíduos do título Tranquilidade

Fonte: Cálculos do autor

## 8.25 – BVL 30 versus Unicer

Teste à linearidade e variância constante:

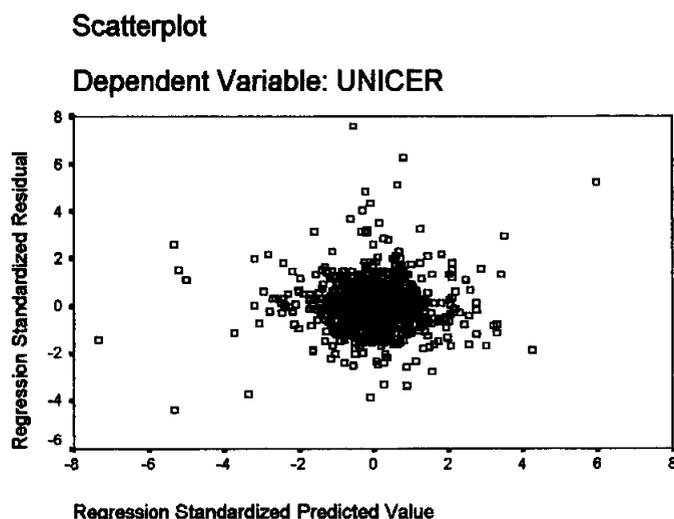


Figura 8.25 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Unicer  
Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,389 <sup>a</sup>	,152	,151	1,330E-02	2,062

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: UNICER

Quadro 8.49 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Unicer

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	-7,2309E-10
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,109
	Positive	,109
	Negative	-,073
Kolmogorov-Smirnov Z		3,419
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.50 – Teste à normalidade dos resíduos do título Unicer

Fonte: Cálculos do autor

## 8.26 – BVL 30 versus Vista Alegre

Teste à linearidade e variância constante:

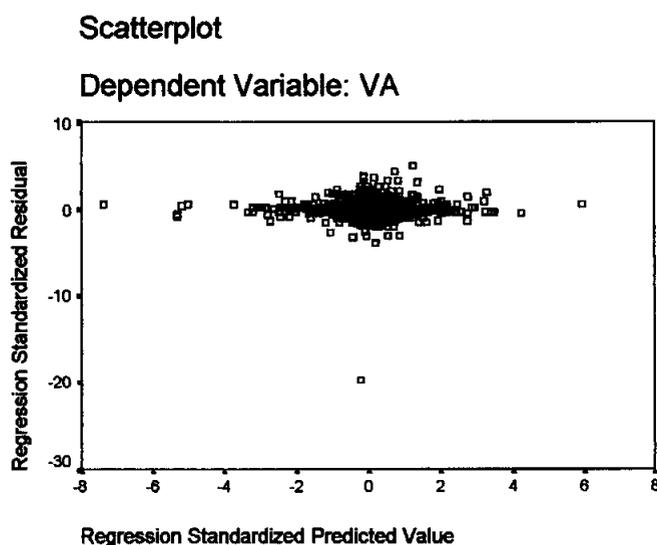


Figura 8.26 – Linearidade e homocedasticidade com  $Y = Z_{resid}$  (resíduos estandardizados) e  $X = Z_{pred}$  (valores da variável dependente na forma estandardizada) do título Vista Alegre

Fonte: Cálculos do autor

Teste à autocorrelação:

Model Summary<sup>b</sup>

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate	Durbin-Watson
1	,089 <sup>a</sup>	,008	,007	3,253E-02	2,070

a. Predictors: (Constant), BVL30

b. Dependent Variable: VA

Quadro 8.51 – Teste de Durbin-Watson dos resíduos do título Vista Alegre

Fonte: Cálculos do autor

Teste à normalidade dos resíduos:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Standardized Residual
N		989
Normal Parameters <sup>a,b</sup>	Mean	1,6714E-09
	Std. Deviation	,9994938
Most Extreme Differences	Absolute	,218
	Positive	,218
	Negative	-,207
Kolmogorov-Smirnov Z		6,843
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Quadro 8.52 – Teste à normalidade dos resíduos do título Vista Alegre

Fonte: Cálculos do autor

## 9 – GLOSSÁRIO

Este glossário apresenta as definições ou conceitos de alguns termos utilizados neste trabalho de investigação.

***Amante do risco (Risk lover)*** – Investidor que está disposto a assumir um risco maior, mesmo com uma perspectiva de um rendimento médio inferior.

***Averso ao risco (Risk aversion)*** – Característica de um investidor que para assumir mais risco exige maior rentabilidade.

***Capital Asset Pricing Model*** – Modelo de avaliação de activos financeiros em equilíbrio. É também utilizado para explicar a formação de preços e a rentabilidade nos mercados financeiros.

***Carteira (Portfolio)*** – Conjunto de aplicações que podem ser acções, obrigações, opções, futuros, activos mobiliários e outras aplicações.

***Carteira de mercado*** – É representada por um índice formado por todas as aplicações do mercado, ponderada de acordo com o preço relativo de cada aplicação na capitalização bolsista.

***Coefficiente Alfa*** – Intersecção da linha característica da acção com o eixo vertical, representando o excesso do rendimento da acção sobre o rendimento do activo sem risco.

***Coefficiente Beta*** – Inclinação da recta de regressão e representa as variações do rendimento esperado da acção que são originadas pelas variações ocorridas no índice geral do mercado. Medida do risco sistemático de uma aplicação.

**Entropia** – Conceito oriundo da física, introduzido por Clausius em 1865 como caracterização da Segunda Lei da Termodinâmica: “a energia do universo é constante e a sua entropia está a aumentar continuamente”. Mais tarde este conceito é adoptado pela teoria da informação, sendo encarado como medida de dispersão, incerteza e valor da informação.

**Entropia condicional** – Medida de dispersão e incerteza de uma variável dado o conhecimento (ou ocorrência) de outra variável (s). Pode também ser encarada como medida de independência entre variáveis ou acontecimentos. Quanto maior o valor da entropia condicional, maior é o nível de independência entre as variáveis (ou eventos) em causa.

**Desvio-padrão** – Medida de variabilidade. Valor positivo da raiz da variância.

**Distribuição normal** – Distribuição de probabilidade simétrica em forma de sino, que é completamente definida pela média e pelo desvio-padrão.

**Efficient market hypothesis (Hipóteses do mercado eficiente)** – Os preços dos títulos reflectem toda a informação disponível. Consequentemente, os investidores não devem esperar que seja normal obter rendibilidades acima da rendibilidade correspondente ao nível de risco assumido e as empresas não devem esperar receber mais que o valor justo pelos títulos que emitem. A teoria sustenta três níveis de eficiência: a) *fraca*, quando os preços reflectem toda a informação contida nos preços passados; b) *semi-forte*, quando os preços reflectem toda a informação publicamente disponível, c) *forte*, quando os preços reflectem toda a informação relevante, incluindo a *informação privilegiada*.

**Fronteira eficiente** – Conjunto de carteiras que optimizam o binómio rendimento/risco, onde não é possível encontrar qualquer outra que apresenta melhor rendimento para o mesmo nível de risco em relação a qualquer ponto da fronteira.

**Gestão de carteiras** – Processo de análise, escolha, controlo e avaliação à posteriori do conjunto de activos financeiros adequados aos objectivos e restrições de um determinado investidor ou grupo de investidores.

***Incerteza*** – Conhecimento imperfeito do resultado futuro de uma determinada decisão, onde é totalmente desconhecida a distribuição de probabilidade associada aos possíveis resultados futuros. Pode também ser encarada como a dispersão existente numa determinada distribuição de probabilidade.

***Informação*** - Objecto formatado, criado artificialmente pelo Homem, tendo por objectivo representar um tipo de acontecimento identificável no mundo real. É tudo aquilo que permite a redução da incerteza e contribui para o aumento do conhecimento, se correctamente utilizada.

***Informação mútua*** – Medida da teoria da informação que mede a informação contida num processo (evento) sobre um outro processo (evento).

***Mercado bolsista de acções*** - Mercado onde os títulos de empresas admitidos à cotação podem ser transaccionados através da intermediação exclusiva de entidades especializadas.

***Mercado de capitais*** – Mercado financeiro no qual se transaccionam títulos de médio/longo prazo (como as acções e obrigações).

***Mercado eficiente*** – Mercado no qual toda a informação se reflecte instantaneamente sobre os preços das aplicações transaccionadas.

***Mercado financeiro*** – Mercado onde o objecto de transacção é o dinheiro.

***Moderna teoria de carteiras (Modern portfolio theory)*** – Teoria relativa à análise e gestão de carteiras de aplicações financeiras com base nas combinações de risco/rendibilidade e princípios de diversificação eficiente.

***Neutral ao risco (Risk neutral)*** – Investidor que considera apenas a rendibilidade esperada de uma aplicação como relevante, desprezando o risco que lhe está associado.

**Princípio da diversificação** – Princípio fundamental na gestão de carteiras segundo o qual é possível atenuar e mesmo eliminar, o risco não-sistemático e a incerteza de uma carteira de activos. A diversificação não reduz o risco sistemático, que é inerente ao próprio mercado.

**Random Walk** – Designação estatística que se aplica ao movimento dos preços de activos cotados em bolsa de valores, designadamente por as alterações nos preços serem aleatórias e imprevisíveis.

**Rendibilidade esperada** – Rendibilidade média de uma aplicação, ponderada pelas suas probabilidades de ocorrência.

**Risco** – Desconhecimento do resultado referente ao futuro, sendo conhecida com exactidão a distribuição de probabilidade associada aos possíveis resultados futuros e assim determinar a probabilidade de ocorrência de cada um deles.

**Risco específico** – Risco associado a todos os factores que não afectam o rendimento da totalidade das aplicações do mercado. Pode ser eliminado através da diversificação das aplicações.

**Risco sistemático** – Risco que integra a totalidade dos factores susceptíveis de alterarem a rendibilidade de todas as aplicações do mercado. Não pode ser reduzido através da diversificação das aplicações. É também designado como risco não diversificável ou de mercado.

**Teoria da gestão de carteiras** – Teoria explicativa das metodologias económicas utilizadas pelos investidores nas suas decisões de investimento em activos ou outras aplicações.

**Teoria da informação** – Ramo da teoria da probabilidade que tem como principais objectivos o desenvolvimento dos limites técnicos fundamentais na prossecução de uma melhor performance na comunicação entre a fonte de uma dada informação e o receptor e o desenvolvimento de projectos de código informacionais.

**Utilidade** – Medida do grau de satisfação ou bem-estar de um indivíduo ou consumidor.

**Variância** – Medida estatística da dispersão de uma variável aleatória em relação á sua média.

**Volatilidade** – Grau de variabilidade nos preços de um activo ou no movimento geral dos preços de um mercado.