UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Sobre a consistência de IST

Uma dissertação apresentada por

Sandra Cristina de Oliveira Pinheiro

Para obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada

Orientador: Professor Doutor Imme van den Berg

Esta dissertação não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri

Mestrado em Matemática Aplicada

Biénio 2001/2003

ERRATA

Página	Linha	Onde se lê	Deve ler-se
43	-10	binária	n-ária
45	-15	filtro	ultrafiltro
46	-7	binária	n-ária
48	-7	${}^*\{x \in {}^*V : \langle x, y_1\rangle \in {}^*R \wedge$ $\wedge \ldots \wedge \langle x, y_n\rangle \in {}^*R\}$	${}^*\{x \in V : \langle x, y_1\rangle \in R \wedge$ $\wedge \ldots \wedge \langle x, y_n\rangle \in R\}$
52	-10	$x\, e\, y$	$x \in y$

Sobre a consistência de IST

Prefácio

Este trabalho foi baseado em dois artigos de Edward Nelson, nomeadamente em parte do artigo intitulado "Internal Set Theory: a new approach to nonstandard analysis" e na totalidade do artigo intitulado "The syntax of nonstandard analysis". Pretendeu-se fazer uma apresentação dos resultados aí demonstrados evidenciando mais pormenores, particularmente onde os artigos se mostram sucintos.

Apesar de, ao longo do trabalho, serem apresentados alguns conceitos e resultados necessários ao seu desenvolvimento pressupõem-se alguns conhecimentos, nomeadamente de teoria axiomática de conjuntos (ZFC) e de lógica matemática.

O objectivo deste trabalho é a demonstração, sintáctica e semântica, da consistência relativa de IST. Assim, e no capítulo um, começamos por apresentar a axiomática de IST e algumas consequências dos seus axiomas, como por exemplo a existência de números naturais não-standard. No capítulo dois apresentamos a demonstração sintáctica da consistência relativa de IST. Esta surge como uma consequência dum algoritmo, o chamado algoritmo de redução, que codifica um processo de encontrar uma afirmação interna equivalente (no sentido lógico e sob certas condições) a uma afirmação externa. No capítulo três é apresentada a demonstração semântica da consistência relativa de IST. Esta demonstração envolve o princípio da reflexão e a construção, a da construção, a partir dum ultralimite adequado dum universo parcial, de um modelo para o sistema de axiomas de IST.

No capítulo quatro, começamos por fazer um breve enquadramento histórico da análise não-standard, segue-se uma breve análise dos benefícios da utilização dos seus métodos, e por fim desenvolvemos uma interpretação intuitiva dos seus elementos fundamentais.

Resumo

Enriquecendo a teoria dos conjunto ZFC com o símbolo de predicado *st* e os axiomas de transferência, idealização e standardização, obtemos IST, a teoria dos conjuntos internos. Ás fórmulas sem o novo símbolo de predicado chamamos internas em oposição ás que o contêm, que chamamos externas.

Após a apresentação de IST e de algumas consequências dos seus axiomas, descrevemos neste trabalho um algoritmo, chamado algoritmo de redução, que permite encontrar uma fórmula interna equivalente a cada fórmula externa. O algoritmo de redução fornece uma demonstração sintáctica da consistência relativa de IST. Veremos ainda outra demonstração desta consistência, agora semântica, através da construção de um modelo para o seu sistema de axiomas.

Continuamos com um breve enquadramento histórico da análise não-standard, seguido de uma análise dos benefícios da sua utilização e, por fim, desenvolvemos uma possível interpretação intuitiva dos elementos fundamentais de IST.

Abstract

The axiom system IST is obtained from set theory ZFC adding predicate *st*, and three new axioms, the axioms of transfer, idealization and standardization. A formula without the new symbol is called internal, and formulae who contain the symbol *st* are called external.

After the presentation of the axiomatics IST and some consequentions of these axioms, we describe an algorithm, called reduction algorithm, that allows us to find an internal formula equivalent to each external formula. The reduction algorithm yields a sintactical proof of the relative consistence of IST. We consider another proof of this consistence, now semantical, through a construction of a model for his system of axioms.

We continue with a short history of nonstandard analysis, followed by a short analysis of the benefits of its utilization, and, at last, we will develop a possible intuitive interpretation of fundamental elements of IST.

Agradecimentos

A realização deste trabalho contou, directa ou indirectamente, com a colaboração de várias pessoas com quem partilhei reflexões, preocupações e ansiedades. Para todas elas um muito obrigada!

Cabe-me, no entanto, reconhecer especialmente a colaboração:

- do Professor Imme van den Berg, por ter aceite orientar este trabalho, pela forma minuciosa com que o fez, pela disponibilidade, entusiasmo e amizade demonstrados;

- da Professora Teresa Almada, responsável por grande parte da minha formação matemática e pessoal que serviu de base à realização deste trabalho;

- do Professor Manuel Loureiro, pelos momentos de reflexão que tanto contribuiram para este trabalho;

- do Rodrigo, pelo carinho, incentivo e positivismo que sempre me encorajou nos momentos mais difíceis;

- do Afonso, pela paciência e compreensão demonstrados em todos os momentos em que ficou privado da minha companhia.

Índice

Capítulo 1

Axiomática de IST

1.1 Introdução

A linguagem da teoria dos conjuntos internos (IST) é a linguagem da teoria de conjuntos ZFC com mais um símbolo de predicado unário, o símbolo "standard" (abreviadamente "*st*"). Este novo predicado não tem conteúdo semântico, ou seja, não tem significado. Chamamos conjuntos internos, ou simplesmente conjuntos, às variáveis desta nova linguagem. O novo símbolo de predicado vai permitir dividir os conjuntos em dois tipos: *conjuntos standard* e *conjuntos não-standard*. As fórmulas da nova linguagem que não envolvem o novo símbolo chamam-se *fórmulas internas*, e as que envolvem chamam-se *fórmulas externas*. Os axiomas de IST são os axiomas de ZFC mais três axiomas esquema que veremos mais à frente e que nos dão regras para manipular o novo predicado. Os axiomas de ZFC aparecem em IST formulados da mesma maneira. No entanto, há que ter algumas precauções quanto à formação de conjuntos: o axioma de separação garante que a classe $\{x \in A : \phi(x, a_1, ..., a_n)\}$ é um conjunto, no caso em que $\phi(x, a_1, ..., a_n)$ é uma fórmula interna e A é um conjunto qualquer. Não podemos usar predicados externos para definir subconjuntos. Não podemos, por exemplo, concluir que existe um subconjunto S de N tal que para todo n temos $n \in S \Leftrightarrow n \in N \wedge st(n)$. Chamamos à violação desta regra *formação ilegal de conjuntos.* Como veremos neste trabalho, IST é uma extensão conservativa de ZFC, e por isso todas as definições, construções e teoremas da matemática clássica permanecem válidos em IST. Em IST vamos ter novas demonstrações de teoremas clássicos que, como veremos mais adiante, são equivalentes às respectivas demonstrações clássicas. Haverá, no entanto, definições, construções e teoremas que, por envolverem o novo predicado ou os novos axiomas, não podem ser formulados ou demonstrados em ZFC. O que há de novo na teoria dos conjuntos internos é em adição não em alteração. Em IST, conjuntos como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos internos construídos ou definidos exactamente da mesma maneira que em ZFC. No entanto, como o predicado *st* permite fazer distinções entre os elementos que não era possível fazer na linguagem de ZFC, vão existir nestes conjuntos elementos não-standard.

Passemos agora à descrição de IST que, como já referimos, consiste na teoria de conjuntos ZFC enriquecida com o símbolo de predicado *st* e com três novos esquemas de axiomas. Mas antes vamos introduzir algumas abreviaturas bastante úteis:

$\forall^{st}x$	abrevia	$\forall x\ (st(x) \Rightarrow ...)$
$\exists^{st}x$	abrevia	$\exists x\ (st(x) \wedge ...)$
$\forall^{fin}x$	abrevia	$\forall x\ (x\,\text{finito} \Rightarrow ...)$
$\exists^{fin}x$	abrevia	$\exists x\ (x\,\text{finito} \wedge ...)$
$\forall^{st\,fin}x$	abrevia	$\forall^{st}x\ (x\,\text{finito} \Rightarrow ...)$
$\exists^{st\,fin}x$	abrevia	$\exists^{st}x\ (x\,\text{finito} \wedge ...)$
$\forall x \in y$	abrevia	$\forall x\ (x \in y \Rightarrow ...)$
$\exists x \in y$	abrevia	$\exists x\ (x \in y \wedge ...)$

onde x finito tem o significado usual, ou seja, é uma abreviatura para a fórmula que garante que não existe uma bijecção entre x e um seu subconjunto próprio ou que existe uma bijecção de x com $\{m \in N : m < n\}$ para algum n.

1.2 Princípios (T), (I) e (S)

O primeiro axioma esquema estabelece o elo de ligação entre o "universo" dos objectos standard e o universo todo, e afirma o seguinte:

Axioma 1 *Princípio de Transferência* (T)*:*
Seja $A(x, t_1, ..., t_k)$ uma fórmula interna com únicas variáveis livres $x, t_1, ..., t_k$ e parâmetros e constantes standard (se existirem). Então:

$$\forall^{st}t_1 ... \forall^{st}t_k \left(\forall^{st}x\ A(x, t_1, ..., t_k) \Rightarrow \forall x\ \ A(x, t_1, ..., t_k)\right).$$

Este axioma diz-nos que uma propriedade interna que é satisfeita por todos os objectos standard é satisfeita por todos os objectos (standard e não-standard). A aplicação deste princípio deve ser precedida pela verificação de que a afirmação é interna e de que todos os seus parâmetros têm valores standard, pois caso tal não se verifique podemos estar a fazer o que usualmente se designa *transferência ilegal*. Contrapondo, o princípio de transferência pode ser formulado da seguinte forma:

$$\forall^{st} t_1 ... \forall^{st} t_k \left(\exists x \; A(x, t_1, ..., t_k) \Rightarrow \exists^{st} x \;\; A(x, t_1, ..., t_k)\right)$$

o que nos permite dizer que se uma propriedade é válida para um objecto, então é válida para um objecto standard. Assim, supondo que existe um único x tal que $A(x)$ onde $A(x)$ é uma fórmula interna cuja única variável livre é x, então esse objecto x tem que ser standard. Como consequência do que foi dito temos que todo o objecto específico da matemática clássica é um conjunto standard. Assim, por exemplo, como o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é único concluímos que é um conjunto standard.

O segundo axioma esquema é o seguinte:

Axioma 2 *Princípio de Idealização* (I)*:*
Seja $B(x,y)$ uma fórmula interna com variáveis livres x e y e possivelmente outras variáveis livres. Então:

$$\forall^{st\,fin} y' \exists x \forall y \in y' \;\; B(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y \;\; B(x,y).$$

Este princípio afirma que uma fórmula interna é simultaneamente satisfeita para todos os conjuntos standard finitos se e só se for simultaneamente satisfeita para todos os conjuntos standard. Este é o axioma que realmente nos tráz algo de novo, diz-nos intuitivamente que se "podemos sempre continuar", então temos um elemento ideal.

O teorema seguinte é uma consequência de (I) e vai permitir-nos concluir que existe um número natural não-standard.

Teorema 3 *Seja X um conjunto. Então, todo o elemento de X é standard se e só se X é um conjunto standard finito.*

Demonstração:

Seja X um conjunto. Suponhamos que X é standard finito. Provar que $\forall x \in X \;\; st(x)$ é o mesmo que provar que $\exists^{st\,fin} A \;\; (X \subseteq A)$, pois

$\exists x \in X \sim st(x) \Leftrightarrow \exists x \in X \forall^{st} y\, (x \neq y)$ e aplicando idealização vem $\forall^{st fin} A \exists x \in X \forall y \in A\, (x \neq y)$ que é o mesmo que $\forall^{st fin} A \exists x \in X\, (x \notin A)$ ou seja $\forall^{st fin} A\, (X \not\subseteq A)$. Assim, como X é standard finito e $X \subseteq X$ concluímos que todo o elemento de X é standard.

Reciprocamente suponhamos que todo o elemento de X é standard. Então, por idealização, $\exists^{st fin} A \quad (X \subseteq A)$ logo X é um subconjunto de um cojunto finito e portanto é um conjunto finito. Por outro lado, como o conjunto das partes do conjunto standard finito A é um conjunto standard (por tranferência) finito e, como já foi provado, todo o elemento de um conjunto standard finito é standard concluimos que X é standard pois $X \in P(A)$ □

Do teorema anterior podemos concluir que todo o conjunto infinito tem um elemento não-standard, logo como $\mathbb{N}$ é infinito existe um número natural não-standard. Ora, sabemos por transferência que 0 é standard e que, para todo o natural n, se n é standard então $n+1$ é standard, o que por indução nos poderia levar a crer que todos os números naturais são standard. Mas como acabámos de provar que existe um número natural não-standard o que podemos concluir é que não existe um subconjunto de $\mathbb{N}$ cujos elementos são exactamente os naturais standard. O teorema anterior fornece ainda uma condição suficiente para que um conjunto seja finito: basta que todos os seus elementos sejam standard.

Outra consequência do princípio da idealização é o teorema seguinte:

Teorema 4 *Existe um conjunto finito F tal que para todo o x standard temos $x \in F$.*

Demonstração:

Como $\forall^{st fin} z \exists F \forall x \in z \;\; (x \in F \wedge F \; finito)$(basta para cada z considerar $F = z$), então por idealização temos que $\exists F \forall^{st} x\, (x \in F \wedge F \; finito)$, ou seja, existe F tal que todo o x standard pertence a F e F é finito. □

O conjunto cuja existência é garantida pelo teorema anterior não pode ser standard pois se fosse, por transferência, incluiriría todos os conjuntos o que é absurdo. Também não existe o menor conjunto finito que contém todos os elementos standard, pois a existir seria definido pela intersecção de todos os conjuntos F dados pelo teorema o que é uma formação ilegal de conjuntos (pois estaríamos a usar um predicado externo para definir os conjuntos a intersectar).

O próximo axioma esquema vem completar a possibilidade de formação de subconjuntos a partir de qualquer fórmula (se a fórmula for interna podíamos usar separação mas se fosse externa estaríamos a cometer uma formação ilegal).

Axioma 5 *Princípio de Standardização (S):*
Seja $C(z)$ uma fórmula interna ou externa com z variável livre e possivelmente outras variáveis livres. Então:

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\forall^{st}z \quad (z \in y \Leftrightarrow z \in x \ \wedge \ C(z)) \, .$$

Este princípio diz-nos que dada uma fórmula, para qualquer conjunto standard existe um conjunto standard cujos elementos standard são exactamente os elementos standard do primeiro conjunto que satisfazem a fórmula. Aplicando transferência ao axioma da extencionalidade podemos concluir que dois conjuntos standard são iguais se tiverem os mesmos elementos standard. Assim, o conjunto y dado pelo princípio da standardização é único e, por isso, vamos denotá-lo por

$$y = {}^{S}\{z \in x : C(z)\} \, .$$

Este conjunto deve ser lido como o subconjunto standard de x cujos elementos standard são aqueles que satisfazem C e não como o conjunto de todos os elementos standard de x que satisfazem C, pois este último constitui uma formação ilegal de conjuntos. Quando um conjunto standard é definido por standardização, o critério para ser membro é aplicado somente a elementos standard, não temos por isso um critério para decidir se um elemento não-standard z de x está em $y = {}^{S}\{z \in x : C(z)\}$ ou não. Podem existir neste conjunto y elementos não-standard que não satisfazem C e podem existir elementos não-standard que satisfazem C mas que não estão em y.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 6 *Seja a um natural não-standard, então*

$${}^{S}\{z \in \mathbb{N} : z < a\} = \mathbb{N}.$$

(embora existam números naturais que não satisfazem $z < a$). Como ambos os conjuntos são standard, para verificar a igualdade basta mostrar que os dois conjuntos têm os mesmos elementos standard. Isto é, temos que

mostrar que todo o número natural standard é menor que a. Seja z um número natural standard e consideremos o conjunto $\{w \in \mathbb{N} : w \leq z\}$. *Trata--se de um conjunto finito e standard, logo pelo teorema 3 todos os seus elementos são standard e por isso não contém a (pois este é natural não--standard), logo* $a \nleq z$ *e portanto* $z < a$. *No entanto, fixado a não standard podemos formar o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{N} : z < a\}.$$

Não se trata de uma formação de conjuntos ilegal pois a é um natural e a fórmula $z < a$ *é interna. O conjunto formado é um subconjunto próprio de* $\mathbb{N}$ *não-standard. É um subconjunto próprio de* $\mathbb{N}$ *pois* $a \in \mathbb{N}$ *e* $a \notin \{z \in \mathbb{N} : z < a\}$*).É não-standard pois se fosse standard o seu máximo seria standard, o que é absurdo já que o seu máximo é a.*

Exemplo 7 *Seja a um natural não-standard, então*

$$^S\{z \in \mathbb{N} : z \geq a\} = \emptyset.$$

(embora existam naturais z tais que $z \geq n$*). Não existem naturais standard maiores que a pois este é natural não-standard e vimos no exemplo 6 que todo o natural standard é menor que qualquer natural não-standard.*

A existência de funções standard é garantida pelo princípio da standardização como veremos no próximo teorema.

Teorema 8 *Seja* $A(x,y)$ *uma fórmula interna ou externa com variáveis livres* x *e* y *e possivelmente outras. Sejam* X *e* Y *conjuntos standard. Suponhamos que para todo* x *standard em* X *existe um* y *standard em* Y *tal que* $A(x,y)$. *Então, existe uma função standard* $\tilde{y} : X \to Y$ *tal que para cada* x *standard em* X *temos* $A(x, \tilde{y}(x))$. *Simbolicamente,*

$$\forall^{st} x \in X \exists^{st} y \in Y \;\; A(x,y) \Rightarrow \exists^{st} \tilde{y} : X \to Y \forall^{st} x \in X \;\; A(x, \tilde{y}(x)).$$

Demonstração:

Seja $A(x,y)$ uma fórmula interna ou externa com variáveis livres x e y e possivelmente outras. Sejam X e Y conjuntos standard. Supondo que para todo x standard em X existe um y standard em Y tal que $A(x,y)$ temos que $A(x,y)$ define uma função da classe dos elementos standard de X para a classe dos elementos standard de Y. Queremos mostrar que essa função se estende a uma função definida em todo o conjunto X com valores em Y. Consideremos a classe

$$F = \{(x,y) : x \in X \wedge st(x) \wedge y \in Y \wedge st(y) \wedge A(x,y)\}\,.$$

Temos, por standardização, que $\forall^{st} x \in X \ \exists^{st} y \in Y \ (x,y) \in {}^{S}F$, e por transferência que $\forall x \in X \ \exists y \in Y \ (x,y) \in {}^{S}F$. Aplicando o axioma da escolha, podemos afirmar que $\forall x \in X \ \exists^1 y \in Y \ (x,y) \in {}^{S}F$. Considerando $\tilde{y} = {}^{S}F$ temos $(x,\tilde{y}(x)) \in \tilde{y} \Leftrightarrow (x,\tilde{y}(x)) \in {}^{S}F \Leftrightarrow A(x,\tilde{y}(x))$. $\square$

Capítulo 2

Consistência relativa (sintáctica)

2.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é a demonstração sintáctica da consistência relativa de IST. Esta demonstração surge como uma consequência do algoritmo de redução. Após a descrição deste algoritmo faremos algumas aplicações e veremos como se podem converter demonstrações de teoremas relativos a extensões de teorias, em demonstrações desses mesmos teoremas nessas teorias.

2.2 Algoritmo de redução

O algoritmo de redução, cuja descrição faremos neste capítulo, permite reduzir qualquer fórmula externa de IST a uma fórmula interna com as mesmas variáveis livres, para valores standard dos parâmetros e sob certa condição adicional (que veremos mais à frente). Assim, podemos obter reformulações internas tanto de teoremas externos como de definições de objectos standard que foram feitas por meio do princípio de standardização envolvendo noções externas. O algoritmo de redução codifica o processo de encontrar a afirmação interna equivalente à inicial. Para a aplicação do algoritmo de redução são necessárias regras para lidar com quantificadores que nos permitem reescrever uma fórmula obtendo outra logicamente equivalente com as mesmas variáveis livres mas com os quantificadores todos ao início, ou seja, na *forma normal prenexada.*

Apresentamos de seguida um resumo dessas regras: Suponhamos que A

e B são fórmulas, que x e y não são livres em B e que z não é livre em A. As regras básicas são:

(1) $\sim \forall x\ A(x) \Leftrightarrow \exists x \sim A(x)$

(1d) $\forall x \sim A(x) \Leftrightarrow \sim \exists x\, A(x)$

(2) $\forall x\ A(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x\ (A(x) \wedge B)$

(3) $\forall x\ A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x\ (A(x) \vee B)$

(4) $\forall x \forall y\ A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\ A(x,y)$.

As fórmulas duais de (2), (3) e (4) são:

(2d) $\exists x\ A(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x\ (A(x) \wedge B)$

(3d) $\exists x\ A(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x\ (A(x) \vee B)$

(4d) $\exists x \exists y\ A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\ A(x,y)$.

Estas regras implicam outras, por exemplo:

(5) $[\forall x\ A(x) \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\exists x\ (A(x) \Rightarrow B)]$

(6) $[A \Rightarrow \forall z\ B(z)] \Leftrightarrow [\forall z\ (A \Rightarrow B(z))]$.

E, dualmente:

(5d) $[\exists x\ A(x) \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\forall x\ (A(x) \Rightarrow B)]$

(6d) $[\ A \Rightarrow \exists z\ B(z)] \Leftrightarrow [\exists z\ (A \Rightarrow B(z))]$.

Podem também ser deduzidas das regras básicas as seguintes:

(7) $[\forall x\ A(x) \Rightarrow \forall z\ B(z)]$
$\Leftrightarrow [\exists x \forall z\ (A(x) \Rightarrow B(z))]$
$\Leftrightarrow [\forall z \exists x\ (A(x) \Rightarrow B(z))]$

(8) $[\forall x\ A(x) \Leftrightarrow \forall z\ B(z)]$
$\Leftrightarrow [(\forall x\ A(x) \Rightarrow \forall z\ B(z)) \wedge (\forall w\ B(w) \Rightarrow \forall u\ A(u))]$
$\Leftrightarrow \exists x \exists w \forall z \forall u\ [(A(x) \Rightarrow B(z)) \wedge (B(w) \Rightarrow A(u))]$
$\Leftrightarrow \forall z \forall u \exists x \exists w\ [(A(x) \Rightarrow B(z)) \wedge (B(w) \Rightarrow A(u))]$.

Desta lista de fórmulas apresentamos, a título de exemplo, as deduções da (5) e da (6):

$$
\begin{aligned}
&[\exists x \ (A(x) \Rightarrow B)] \\
&\Leftrightarrow [\exists x \ (\sim A(x) \vee B)] \\
&\Leftrightarrow [(\exists x \ \sim A(x)) \vee B)] && \text{por (3d)} \\
&\Leftrightarrow [(\sim \forall x \ A(x)) \vee B)] && \text{por (1)} \\
&\Leftrightarrow [\forall x \ A(x) \Rightarrow B]
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
&[A \Rightarrow \forall z \ B(z)] \\
&\Leftrightarrow [\forall z \ B(z) \vee \sim A] \\
&\Leftrightarrow [\forall z(B(z) \vee \sim A)] && \text{por (3)} \\
&\Leftrightarrow [\forall z(\sim A \vee B(z))] \\
&\Leftrightarrow [\forall z \ (A \Rightarrow B(z))] .
\end{aligned}
$$

Mostra-se, utilizando as regras básicas que enunciámos, que todas elas se mantêm válidas para os dois novos quantificadores de IST ($\forall^{st}$ e $\exists^{st}$ abreviados). Para isso basta utilizar o facto de que escrever $\forall^{st} x$ significa $[\forall x \ (st(x) \Rightarrow ...)]$ e escrever $\exists^{st} x$ significa $[\exists x \ (st(x) \wedge ...)]$.

Vejamos um exemplo para cada quantificador:

Temos $\forall^{st} x \ A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall^{st} x \ (A(x) \vee B)$ pois

$$
\begin{aligned}
&\forall^{st} x \ A(x) \vee B \\
&\Leftrightarrow [\forall x \, (st(x) \Rightarrow A(x)) \vee B] \\
&\Leftrightarrow [\forall x \, ((st(x) \Rightarrow A(x)) \vee B)] && \text{por (3)} \\
&\Leftrightarrow [\forall x((\sim st(x) \vee A(x)) \vee B)] \\
&\Leftrightarrow [\forall x(\sim st(x) \vee (A(x) \vee B))] \\
&\Leftrightarrow [\forall x(st(x) \Rightarrow (A(x) \vee B))] \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} x \ (A(x) \vee B)
\end{aligned}
$$

e temos $\exists^{st} x \exists^{st} y \ A(x,y) \Leftrightarrow \exists^{st} y \exists^{st} x \ A(x,y)$ pois

$$
\begin{aligned}
&\exists^{st} x \exists^{st} y \ A(x,y) \\
&\Leftrightarrow [\exists x(st(x) \wedge \exists^{st} y A(x,y))] \\
&\Leftrightarrow [\exists x(st(x) \wedge \exists y(st(y) \wedge A(x,y)))] \\
&\Leftrightarrow [\exists x \exists y(st(y) \wedge A(x,y) \wedge st(x))] \\
&\Leftrightarrow [\exists y(\exists x(st(x) \wedge A(x,y)) \wedge st(y))]
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow [\exists y(st(y) \wedge \exists^{st} x A(x,y))]$$
$$\Leftrightarrow \exists^{st} y \exists^{st} x \ A(x,y).$$

São ainda necessárias, para a aplicação do algoritmo de redução, outras regras que resultam de axiomas, princípios e teoremas de IST. Os princípios de idealização, standardização e transferência fornecem-nos regras para lidar com os novos quantificadores:

1. Troca de quantificadores externos de natureza diferente

$$(S') \qquad \forall^{st} x \exists^{st} y \ A(x,y) \Leftrightarrow \exists^{st} \tilde{y} \forall^{st} x \ A(x, \tilde{y}(x)).$$

O teorema 8 (consequência de (T) e de (S)) garante-nos a implicação directa desde que x e y variem num conjunto standard; a implicação recíproca é garantida pelo facto de $\tilde{y}$ ser uma função standard. Denotamos esta equivalência por (S') já que, tal como o princípio de standardização nos dá conjuntos, esta equivalência dá-nos funções. Dualmente temos:

$$(S'd) \qquad \exists^{st} x \forall^{st} y \ A(x,y) \Leftrightarrow \forall^{st} \tilde{y} \exists^{st} x \ A(x, \tilde{y}(x)).$$

Note-se que tanto (S') como $(S'd)$ apenas são válidas se x e y variam num conjunto standard. Esta é a condição adicional de que falámos que, na prática, não é tão restritiva como aparenta já que em situações concretas os objectos em jogo são usualmente elementos de um conjunto (standard) dado.

2. Troca de quantificadores externos e internos

É o princípio de idealização que nos dá uma regra que permite trocar quantificadores externos e internos.

$$\begin{array}{ll} (I) & \forall^{st fin} y' \exists x \forall y \in y' \ B(x,y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y \ B(x,y) \\ (Id) & \exists^{st fin} y' \forall x \exists y \in y' \ B(x,y) \Leftrightarrow \forall x \exists^{st} y \ B(x,y) \end{array}$$

onde $B(x,y)$ é uma fórmula interna com variáveis livres x e y e possivelmente outras variáveis livres.

3. Substituição de quantificadores externos por internos

Podemos substituir quantificadores externos por internos usando o princípio de transferência.

$$(T') \qquad \forall^{st} x\ A(x) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall x\ A(x) \qquad\qquad (T'd) \qquad \exists^{st} x\ A(x) \underset{st}{\Leftrightarrow} \exists x\ A(x)$$

onde $A(x)$ é uma fórmula interna com x livre e possivelmente outras variáveis livres desde que tomem valores standard, e $\underset{st}{\Leftrightarrow}$ significa que as fórmulas são equivalentes para todos os valores standard.

4. Troca de quantificadores externos da mesma natureza

$$\begin{array}{lccc} (9) & \forall x \forall^{st} y\ A(x,y) & \Leftrightarrow & \forall^{st} y \forall x\ A(x,y) \\ (9d) & \exists x \exists^{st} y\ A(x,y) & \Leftrightarrow & \exists^{st} y \exists x\ A(x,y). \end{array}$$

Resulta das regras dos quantificadores (4) e (4d) que permitem comutar quaisquer dois quantificadores internos desde que sejam da mesma espécie. A propriedade permanece válida para quantificadores restritos e não-restritos.

Passemos agora à descrição do *algoritmo de redução* aplicado a uma fórmula externa:

Passo 1: Substituir todos os símbolos de predicados externos do discurso habitual da análise não-standard (tais como "infinitésimal" ou "$\simeq$") pelas suas definições, até que o único predicado externo seja "standard".

Passo 2: Reescrever a fórmula obtida de modo a que "standard" apareça apenas nos quantificadores externos, isto é, substituir stx por $\exists^{st} y\,(y = x)$.

Passo 3: Usando as regras para lidar com quantificadores ((1)-(9)) reescrever a fórmula na forma $Q_1 x_1 ... Q_n x_n\ A(x_1 ... x_n)$ onde $A(x_1 ... x_n)$ é interna e cada Q_i é $\forall, \exists, \forall^{st}$ ou $\exists^{st}$. Dizemos que a fórmula é de ordem quantificacional j no caso de termos j quantificadores internos seguidos à direita por pelo menos um quantificador externo.

Passo 4: O objectivo neste passo é reduzir sucessivamente a ordem quantificacional da fórmula até zero de modo a obter uma fórmula com todos os quantificadores externos seguidos à direita pelos internos.

Se a ordem quantificacional da fórmula é $j > 0$ e Q_i é o quantificador interno mais à direita que é seguido por um quantificador externo, então à direita de Q_i só existem quantificadores externos e uma fórmula interna.

Se $Q_i = \forall$ e é seguido por uma sequência de $\forall^{st}$ usamos a regra (9) para puxá-los para a esquerda reduzindo assim a ordem.

Se $Q_i = \forall$ e é seguido por uma sequência de $\forall^{st}$ e $\exists^{st}$, usamos as regras (9), (S') e (S'd) de modo a puxar os quantificadores externos universais para a esquerda e Q_i ficar seguido por uma sequência de quantificadores existenciais externos que por (Id) podem ser movidos para a esquerda de $\forall$ reduzindo assim a ordem.

Se $Q_i = \exists$ o procedimento é análogo usando as duais das regras consideradas no caso $\forall$. Repetem-se estes procedimentos até reduzir a ordem a zero.

Passo 5: Usar (T') e (T'd) para substituir na fórmula obtida no passo anterior todos os quantificadores externos pelos respectivos quantificadores internos.

Obtemos assim uma fórmula interna com as mesmas variáveis livres que a original e que lhe é equivalente para os valores standard das variáveis livres. Apresentamos de seguida, a título de exemplo, as reduções de algumas fórmulas que ocorrem com mais frequência. Sejam A e B fórmulas internas.

I. A redução da fórmula $\forall x \exists^{st} y \forall^{st} z\ A(x,y,z)$ é

$$\forall \tilde{z} \exists^{fin} y' \forall x \exists y \in y'\ A(x,y,\tilde{z}(y))$$

pois

$$\begin{array}{ll}
\forall x \exists^{st} y \forall^{st} z\ A(x,y,z) & \\
\Leftrightarrow \forall x \forall^{st} \tilde{z} \exists^{st} y\ A(x,y,\tilde{z}(y)) & \text{por (S'd)} \\
\Leftrightarrow \forall^{st} \tilde{z} \forall x \exists^{st} y\ A(x,y,\tilde{z}(y)) & \text{por (9)} \\
\Leftrightarrow \forall^{st} \tilde{z} \exists^{st fin} y' \forall x \exists y \in y'\ A(x,y,\tilde{z}(y)) & \text{por (Id)} \\
\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall \tilde{z} \exists^{fin} y' \forall x \exists y \in y'\ A(x,y,\tilde{z}(y)) & \text{por (T') (T'd)}
\end{array}$$

II. A redução da fórmula $\forall x \exists y \forall^{st} z\ A(x,y,z)$ é

$$\forall x \forall^{fin} z' \exists y \forall z \in z'\ A(x,y,z)$$

pois

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists y \forall^{st} z\ A(x,y,z) \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall^{stfin} z' \exists y \forall z \in z'\ A(x,y,z) && \text{por (I)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{stfin} z' \forall x \exists y \forall z \in z'\ A(x,y,z) && \text{por (9)} \\
&\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall^{fin} z' \forall x \exists y \forall z \in z'\ A(x,y,z) && \text{por (T')} \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall^{fin} z' \exists y \forall z \in z'\ A(x,y,z) && \text{por (9)}
\end{aligned}$$

III. A redução da fórmula $\forall x(\forall^{st} y\ A(x,y) \Rightarrow \forall^{st} z\ B(x,z))$ é

$$\forall z \exists^{fin} y' \forall x (\forall y \in y'\ A(x,y) \Rightarrow B(x,z))$$

pois

$$\begin{aligned}
&\forall x(\forall^{st} y\ A(x,y) \Rightarrow \forall^{st} z\ B(x,z)) \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall^{st} z\ (\forall^{st} y A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (6)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \forall^{st} z \exists^{st} y\ (A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (5)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} z \forall x \exists^{st} y\ (A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (9)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} z \exists^{stfin} y' \forall x \exists y \in y'\ (A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (Id)} \\
&\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall z \exists^{fin} y' \forall x \exists y \in y'\ (A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (T) (T')} \\
&\Leftrightarrow \forall z \exists^{fin} y' \forall x (\forall y \in y'\ A(x,y) \Rightarrow B(x,z)) && \text{por (5)}
\end{aligned}$$

IV. A redução da fórmula $\forall t(\forall^{st} x\, A(t,x) \Leftrightarrow \forall^{st} y\ B(t,y))$ é

$$\forall y \forall z \exists^{fin} x' \exists^{fin} w' \forall t [(\forall x \in x'\ A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (\forall w \in w'\ B(t,w) \Rightarrow A(t,z))]$$

pois

$$\begin{aligned}
&\forall t(\forall^{st} x\, A(t,x) \Leftrightarrow \forall^{st} y\ B(t,y)) \\
&\Leftrightarrow \forall t \forall^{st} y \forall^{st} z \exists^{st} x \exists^{st} w \\
&[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))] && \text{por (8)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} y \forall^{st} z \forall t \exists^{st} x \exists^{st} w \\
&[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))] && \text{por (9)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} y \forall^{st} z \exists^{stfin} x' \forall t \exists x \in x' \exists^{st} w \\
&[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))] && \text{por (Id)} \\
&\Leftrightarrow \forall^{st} y \forall^{st} z \exists^{stfin} x' \forall t \exists^{st} w \exists x \in x' \\
&[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))] && \text{por (9d)}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \forall^{st}y\forall^{st}z\exists^{stfin}x'\exists^{stfin}w'\forall t\exists w \in w'\exists x \in x'$
$[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))]$ por (Id)

$\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall y\forall z\exists^{fin}x'\exists^{fin}w'\forall t\exists w \in w'\exists x \in x'$
$[(A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (B(t,w) \Rightarrow A(t,z))]$ por (T) (T'd)

$\Leftrightarrow \forall y\forall z\exists^{fin}x'\exists^{fin}w'\forall t[(\exists x \in x'(A(t,x) \Rightarrow$
$B(t,y))) \wedge (\exists w \in w'(B(t,w) \Rightarrow A(t,z)))]$ por (2d)

$\Leftrightarrow \forall y\forall z\exists^{fin}x'\exists^{fin}w'\forall t[(\forall x \in x'\ A(t,x) \Rightarrow$
$B(t,y)) \wedge (\forall w \in w'\ B(t,w) \Rightarrow A(t,z))]$ por (5)

V. A redução da fórmula $\forall x(\forall^{st}y\ A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall^{st}w\ B(x,z,w))$ é

$$\forall y\forall z\exists^{fin}x'\exists^{fin}w'\forall t[(\forall x \in x'\ A(t,x) \Rightarrow B(t,y)) \wedge (\forall w \in w'\ B(t,w) \Rightarrow A(t,z))]$$

pois

$\forall x(\forall^{st}y\ A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall^{st}w\ B(x,z,w))$

$\Leftrightarrow \forall x(\forall^{st}y\ \ A(x,y) \Rightarrow$
$\forall^{stfin}w'\exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (I)

$\Leftrightarrow \forall x\forall^{stfin}w'$
$(\forall^{st}y\ \ A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (6)

$\Leftrightarrow \forall x\forall^{stfin}w'\exists^{st}y$
$(A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (5)

$\Leftrightarrow \forall^{stfin}w'\forall x\exists^{st}y$
$(A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (9)

$\Leftrightarrow \forall^{stfin}w'\exists^{stfin}y'\forall x\exists y \in y'$
$(A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (Id)

$\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall^{fin}w'\exists^{fin}y'\forall x\exists y \in y'$
$(A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por (T') (T'd)

$\Leftrightarrow \forall^{fin}w'\exists^{fin}y'\forall x$
$(\forall y \in y'\ A(x,y) \Rightarrow \exists z\forall w \in w'\ B(x,z,w))$ por(5)

2.3 Redução de fórmulas

Seja T uma teoria de primeira ordem com conectivos proposicionais $\Rightarrow$ e $\sim$, quantificador universal $\forall$, letras de predicados A_j^n e constantes individuais a_i. Os outros conectivos proposicionais e o quantificador existencial são introduzidos como abreviaturas, e as noções de fórmula e sentença são definidas de forma usual. Os axiomas lógicos e as regras de inferência serão abordados mais adiante.

O algoritmo de redução aumenta o número de quantificadores nas fórmulas já que introduz funções, conjuntos finitos e composições destes dois, como por exemplo funções definidas em conjuntos e conjuntos finitos de funções. Assim, representando por $P_{fin}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X e por X^Y o conjunto de todas as funções de Y para X, se para cada conjunto M considerarmos $\hat{M}$ o menor conjunto tal que:

(i) $M \in \hat{M}$

(ii) Sempre que $X, Y \in \hat{M}$ então $P_{fin}(X) \in \hat{M}$ e $X^Y \in \hat{M}$,

temos que, se todas as variáveis de uma fórmula externa variarem em M, então todas as variáveis da sua redução variam em $\hat{M}$. Ora, numa teoria arbitrária, não temos a garantia de ter todos estes objectos, então vamos precisar de trabalhar numa extensão $\hat{T}$ de T. Consideremos uma extensão $\tilde{T}$ de T que inclui as constantes M, $\tilde{A}_j^n$, $\tilde{a}_i$ e os axiomas que fazem com que $\tilde{T}$ seja a teoria de um modelo de T. Vamos trabalhar num modelo pois precisamos de uma linguagem mais rica. Consideremos ainda uma nova teoria T^* (extensão de $\tilde{T}$) que resulta de $\tilde{T}$ adicionando uma nova letra de predicado unário "standard" e os seguintes axiomas, onde ϕ é uma fórmula interna:

(i) M é standard

(ii) $\tilde{A}_j^n$ é standard

(iii) $\tilde{a}_i$ é standard

(T) $\forall^{st} t \ (\forall^{st} x \ \phi(x,t) \Rightarrow \forall x \, \phi(x,t))$
onde $\phi(x,t)$ não tem variáveis livres

(I) $\exists x \ \forall^{st} y \ \phi(x,y) \Leftrightarrow \forall^{st fin} y' \ \exists x \ \forall y \in y' \ \phi(x,y)$

(S_0') $\forall^{st} x \ \exists^{st} y \ \phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st} \tilde{y} \ \forall^{st} x \, \phi(x, \tilde{y}(x))$.

Chamamos (S_0') ao último axioma pois ϕ está restrita a ser interna, mostraremos mais à frente que (S') $\forall^{st} x \ \exists^{st} y \ \Phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st} \tilde{y} \ \forall^{st} x \, \Phi(x, \tilde{y}(x))$, onde Φ é interna ou externa, é uma consequência. Temos assim, a partir de uma teoria de primeira ordem T, uma primeira extensão $\hat{T}$ onde temos as reduções das fórmulas de T; uma segunda extensão $\tilde{T}$ que é a teoria de um modelo de T; e, por fim, uma extensão T^* de $\tilde{T}$ que resultou da adição do predicado "standard" e de novos axiomas. Usaremos letras latinas minúsculas para denotar n-tuplos de variáveis, incluindo a possibilidade de $n = 0$ (constantes). Usaremos letras gregas maiúsculas para fórmulas de T^* e letras gregas minúsculas para fórmulas de $\tilde{T}$, ou seja para fórmulas internas de T^*.

Seja Φ uma fórmula de T^*. Chamaremos *redução parcial* de Φ, e denotaremos por Φ', à fórmula que se obtém no final do 4ºpasso do algoritmo de redução e que tem a seguinte forma $\forall^{st}u \ \exists^{st}v \ \phi(u,v)$.

Sendo $\forall^{st}u_1 \ \exists^{st}v_1 \ \phi_1(u_1,v_1)$ e $\forall^{st}u_2 \ \exists^{st}v_2 \ \phi_2(u_2,v_2)$ as reduções parciais de Φ_1 e Φ_2 respectivamente, apresentamos de seguida a redução parcial de algumas fórmulas importantes:

$$
\begin{array}{lcl}
(\sim \Phi)' & \text{é} & \forall^{st}\widetilde{v}\exists^{st}u \ \sim \phi(u,\widetilde{v}(u)) \\
(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)' & \text{é} & \forall^{st}u_2\forall^{st}\widetilde{v}_1\exists^{st}u_1\exists^{st}v_2(\phi_1(u_1,\widetilde{v}_1(u_1)) \Rightarrow \phi_2(u_2,v_2)) \\
(\forall x \ \Phi)' & \text{é} & \forall^{st}u\exists^{st fin}v'\forall x\exists v \in v' \ \phi(u,v) \\
(\forall^{st}x \ \Phi)' & \text{é} & \forall^{st}x\forall^{st}u\exists^{st}v \ \phi(u,v).
\end{array}
$$

Como Φ' tem as mesmas variáveis livres que Φ, temos que Φ' é uma sentença se e só se Φ é uma sentença. Como Φ' é a fórmula que se obtém de Φ aplicando o algoritmo de redução até ao final do 4ºpasso, temos que $\Phi \Leftrightarrow \Phi'$, já que a aplicação do algoritmo apenas envolve regras clássicas para lidar com quantificadores e as regras (I) e (S_0).

Seja Φ uma fórmula de T^*. Chamaremos *redução* de Φ, e denotaremos por Φ^0, à fórmula que se obtém no final da aplicação do algoritmo de redução e que tem a seguinte forma $\forall u \ \exists v \ \phi(u,v)$. Note-se que a redução de Φ, que é uma fórmula interna, é obtida da sua redução parcial apenas por aplicação de transferência e por isso temos $\Phi \underset{st}{\Leftrightarrow} \Phi^0$.

2.4 Redução de demonstrações

Nesta secção temos como objectivo apresentar um algoritmo puramente sintáctico que converta demonstrações de teoremas de T^* em demonstrações dos mesmos teoremas de $\tilde{T}$. A conversão de uma demonstração de um teorema de T^* numa demonstração em $\tilde{T}$ será feita através da redução de cada afirmação da demonstração.

A formulação usual da noção de teoria de primeira ordem envolve duas regras de inferência: Modus Ponens e Generalização. A utilização da generalização levantaría problemas já que esta regra é usada para fórmulas com variáveis livres e fórmulas de T^* com variáveis livres não podem ser reduzidas a fórmulas de $\tilde{T}$ ((T) não pode ser aplicado). Para contornar esta dificuldade vamos usar uma formulação da noção de teoria de primeira ordem onde a única regra de inferência é Modus Ponens (Mendelson, 1987). Nesta formulação os axiomas próprios são qualquer colecção de afirmações e os axiomas lógicos são os fechos das fórmulas da seguinte forma:

Sejam Φ, Ψ, $\Lambda \in T^*$,

(i) $\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)$

(ii) $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Lambda)) \Rightarrow ((\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Lambda)$

(iii) $(\sim \Psi \Rightarrow \sim \Phi) \Rightarrow ((\sim \Psi \Rightarrow \Phi) \Rightarrow \Psi)$

(iv) $\forall x \ \Phi(x) \Rightarrow \Phi(t)$ onde t é uma constante ou variável

(v) $\forall y \ (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\forall y \ \Phi \Rightarrow \forall y \ \Psi)$.

Como tomamos para axiomas lógicos os fechos dos axiomas lógicos da formulação usual, a aplicação de Generalização deixa de ser necessária pois deixamos de ter afirmações com variáveis livres. Podemos assim concluir que os teoremas de uma teoria de primeira ordem são os mesmos quer consideremos uma ou outra formulação.

Seja $\Phi_1, ..., \Phi_n$ uma demonstração em T^*. Então, cada Φ_i ou é um axioma de T^* ou segue por Modus Ponens de afirmações anteriores. Assim, para converter $\Phi_1, ..., \Phi_n$ numa demonstração em $\tilde{T}$ vamos reduzir cada Φ_i (ver secção anterior). Precisamos então de demonstrar que Modus Ponens se mantém válida em T^* e que a redução de cada axioma de T^* é um teorema de $\tilde{T}$.

O teorema seguinte é usado na redução de Modus Ponens de T^* para $\tilde{T}$:

Teorema 9 *Sejam Φ_1 e Φ_2 afirmações de T^*. Então*

$$(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)^0 \Rightarrow \left(\Phi_1^0 \Rightarrow \Phi_2^0\right)$$

é um teorema de T^*.

Demonstração:

A redução parcial de $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ é $\forall^{st} u_2 \forall^{st} \widetilde{v}_1 \exists^{st} u_1 \exists^{st} v_2 \ (\phi_1(u_1, \widetilde{v}_1(u_1)) \Rightarrow \phi_2(u_2, v_2))$, logo $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)^0$ é $\forall u_2 \forall \widetilde{v}_1 \exists u_1 \exists v_2 \ (\phi_1(u_1, \widetilde{v}_1(u_1)) \Rightarrow \phi_2(u_2, v_2))$ que, aplicando as regras (6d), (5), (5d) e novamente (6), é equivalente a $\exists \widetilde{v}_1 \forall u_1 \ \phi_1(u_1, \widetilde{v}_1(u_1)) \Rightarrow \forall u_2 \exists v_2 \ \phi_2(u_2, v_2)$. Queremos provar que $\Phi_1^0 \Rightarrow \Phi_2^0$, ou seja que, $\forall u_1 \exists v_1 \, \phi_1(u_1, v_1) \Rightarrow \forall u_2 \exists v_2 \ \phi_2(u_2, v_2)$. Como sabemos que $\exists\widetilde{v}_1\forall u_1\ \phi_1(u_1,\widetilde{v}_1(u_1)) \Rightarrow \forall u_2\exists v_2\ \phi_2(u_2,v_2)$, basta provar que $\forall u_1\exists v_1\ \phi_1(u_1,v_1) \Rightarrow \exists\widetilde{v}_1\forall u_1\ \phi_1(u_1,\widetilde{v}_1(u_1))$ que é o axioma da escolha que faz parte de $\tilde{T}$. Portanto $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)^0$ é um teorema de $\tilde{T}$. □

No teorema seguinte vamos provar que as reduções dos axiomas próprios (dos seus fechos nos casos de (I) e de $(S_0'))$ são teoremas de $\tilde{T}$. Como veremos na demonstração do teorema, as reduções destes axiomas são teoremas triviais de $\tilde{T}$. Este é um facto que não surpreende pois estes axiomas constituem regras para formar reduções.

Teorema 10 *Seja ϕ uma fórmula interna sem variáveis livres. Então, as reduções dos axiomas:*

(i) M *é standard*

(ii) $\tilde{A}_j^n$ *é standard*

(iii) $\tilde{a}_i$ *é standard*

(T) $\forall^{st}t\ (\forall^{st}x\ \phi(x,t) \Rightarrow \forall x\,\phi(x,t))$

onde $\phi(x,t)$ *não tem variáveis livres*

(I) $\forall w(\exists x\ \forall^{st}y\ \phi(x,y) \Leftrightarrow \forall^{stfin}y'\ \exists x\ \forall y \in y'\ \phi(x,y))$

(S_0') $\forall^{st}x\ \exists^{st}y\ \phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st}\widetilde{y}\ \forall^{st}x\,\phi(x,\widetilde{y}(x))$

são teoremas de $\tilde{T}$.

Demonstração:

(i) Aplicando o 1ºpasso do algoritmo obtemos $\exists^{st}x\ (x = M)$ que, por transferência, é equivalente a $\exists x\ (x = M)$. Assim, a redução de M é standard é $\exists x\ (x = M)$ que é um teorema de $\tilde{T}$.

(ii) A redução de $\tilde{A}_j^n$ é standard é $\exists x\ \ (x = \tilde{A}_j^n)$ que é um teorema de $\tilde{T}$

(iii) A redução de $\tilde{a}_i$ é standard é $\exists x\,(x = \tilde{a}_i)$ que é um teorema de $\tilde{T}$.

(T) Analisemos agora a redução de (T):

Como

$$\begin{aligned}
&\forall^{st}t\ (\forall^{st}x\ \phi(x,t) \Rightarrow \forall y\ \ \phi(y,t)) \\
&\Leftrightarrow \forall^{st}t\exists^{st}x\,(\phi(x,t) \Rightarrow \forall y\ \ \phi(y,t)) && \text{por (5)} \\
&\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall t\exists x\,(\phi(x,t) \Rightarrow \forall y\ \ \phi(y,t)) && \text{por (T'd) (T')}
\end{aligned}$$

Então a redução de (T) é $\forall t\exists x\,(\phi(x,t) \Rightarrow \forall y\ \ \phi(y,t))$ que é equivalente a $\forall t\,(\forall x\,\phi(x,t) \Rightarrow \forall y\,\phi(y,t))$ que é um teorema de $\tilde{T}$.

(I) Para analisarmos a redução de (I) vamos considerar as suas duas implicações:

$$(I_1) \qquad \forall w(\exists x \forall^{st} y\ \phi(x,y,w) \Rightarrow \forall^{st fin} b' \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w))$$

$$(I_2) \qquad \forall w(\forall^{st fin} y' \exists x \forall y \in y'\ \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall^{st} b\ \phi(a,b,w))$$

e provar que as suas reduções são os seguintes teoremas triviais de $\tilde{T}$:

$$\forall^{fin} b' \forall w(\exists x \forall y \in b' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w))$$

$$\forall^{fin} b' \forall w(\exists x \forall y \in b'\ \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w)).$$

Ora,

$$\forall w(\exists x \forall^{st} y \phi(x,y,w) \Rightarrow \forall^{st fin} b' \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))$$

$$\Leftrightarrow \forall w \forall^{st fin} b'(\exists x \forall^{st} y\ \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (6)}$$

$$\Leftrightarrow \forall w \forall^{st fin} b'(\forall^{st fin} y' \exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (I)}$$

$$\Leftrightarrow \forall w \forall^{st fin} b' \exists^{st fin} y'(\exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (5)}$$

$$\Leftrightarrow \forall^{st fin} b' \forall w \exists^{st fin} y'(\exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (9)}$$

$$\Leftrightarrow \forall^{st fin} b' \exists^{st fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y'' (\exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (Id)}$$

$$\underset{st}{\Leftrightarrow} \forall^{fin} b' \exists^{fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y'' (\exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \phi(a,b,w)) \qquad \text{por (T')}$$

Assim, $(I_1)^0$ é

$$\forall^{fin} b' \exists^{fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y''(\exists x \forall y \in y' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a\ \ \forall b \in b'\ \ \phi(a,b,w))$$

que, considerando $y'' = \{b'\}$ e $y' = b'$, se torna no seguinte teorema trivial de $\tilde{T}$:

$$\forall^{fin} b' \forall w(\exists x \forall y \in b' \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b'\ \ \phi(a,b,w)).$$

Quanto a (I_2) temos,

$$\forall w(\forall^{st fin} y' \exists x \forall y \in y'\ \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall^{st} b\ \phi(a,b,w))$$

$\Leftrightarrow \forall w(\forall^{st\,fin} y' \exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow$
$\forall^{st\,fin} b' \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))$ por (I)

$\Leftrightarrow [\forall w \, \forall^{st\,fin} b' (\forall^{st\,fin} y' \exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow$
$\exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))]$ por (6)

$\Leftrightarrow [\forall w \, \forall^{st\,fin} b' \exists^{st\,fin} y' (\exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w)$
$\Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))]$ por (5)

$\Leftrightarrow [\forall^{st\,fin} b' \forall w \exists^{st\,fin} y' (\exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w)$
$\Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))$ por (9)

$\Leftrightarrow [\forall^{st\,fin} b' \exists^{st\,fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y''$
$(\exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))]$ por (Id)

$\underset{st}{\Leftrightarrow} [\forall^{fin} b' \exists^{fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y''$
$(\exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))]$ por (T'd) (T)

Assim, $(I_2)^0$ é

$$\forall^{fin} b' \exists^{fin} y'' \forall w \exists^{fin} y' \in y'' (\exists x \forall y \in y' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w))$$

que, considerando $y'' = \{b'\}$ e $y' = b'$, se torna no seguinte teorema trivial de $\tilde{T}$:

$$\forall^{fin} b' \forall w (\exists x \forall y \in b' \, \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists a \forall b \in b' \phi(a,b,w)).$$

(S_0') Por fim vamos ver que a redução de (S_0') é

$$\forall \widetilde{a} \forall \widetilde{y} \forall w \; (\phi(\widetilde{a}(\widetilde{y}), \widetilde{y}(\widetilde{a}(\widetilde{y})), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{y}), \widetilde{y}(\widetilde{a}(\widetilde{y})), w))$$

um teorema trivial de $\tilde{T}$. De facto

$\forall w \, (\forall^{st} x \exists^{st} y \; \phi(x,y,w) \Rightarrow \exists^{st} \widetilde{b} \forall^{st} a \; \phi(a, \widetilde{b}(a), w))$

$\Leftrightarrow [\forall w \, (\forall^{st} x \exists^{st} y \; \phi(x,y,w) \Rightarrow$
$\forall^{st} \widetilde{a} \exists^{st} \widetilde{b} \; \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por $(S'd)$

$\Leftrightarrow [\forall w \forall^{st} \widetilde{a} (\forall^{st} x \exists^{st} y \, \phi(x,y,w) \Rightarrow$
$\exists^{st} \widetilde{b} \; \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (6)

$\Leftrightarrow [\forall w \forall^{st} \widetilde{a}(\exists^{st} \widetilde{y} \forall^{st} x\ \phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow$
$\exists^{st} \widetilde{b}\ \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (S')

$\Leftrightarrow [\forall w \forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y}(\forall^{st} x\, \phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow$
$\exists^{st} \widetilde{b}\, \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (5d)

$\Leftrightarrow [\forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y} \forall w(\forall^{st} x\, \phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow$
$\exists^{st} \widetilde{b}\ \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (9)

$\Leftrightarrow [\forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y} \forall w \exists^{st} x \exists^{st} \widetilde{b}$
$(\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (5) (6d)

$\Leftrightarrow [\forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y} \exists^{st fin} x' \forall w \exists x \in x' \exists^{st} \widetilde{b}$
$(\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (I)

$\Leftrightarrow [\forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y} \exists^{st fin} x' \forall w \exists^{st} \widetilde{b} \exists x \in x'$
$(\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (9d)

$\Leftrightarrow [\forall^{st} \widetilde{a} \forall^{st} \widetilde{y} \exists^{st fin} x' \exists^{st fin} \widetilde{b}' \forall w \exists \widetilde{b} \in \widetilde{b}' \exists x \in x'$
$(\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (Id)

$\underset{st}{\Leftrightarrow} [\forall \widetilde{a} \forall \widetilde{y} \exists^{fin} x' \exists^{fin} \widetilde{b}' \forall w \exists \widetilde{b} \in \widetilde{b}' \exists x \in x'$
$(\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w))]$ por (T'd) (T')

Assim, $(S_0')^0$ é

$$\forall \widetilde{a} \forall \widetilde{y} \exists^{fin} x' \exists^{fin} \widetilde{b}' \forall w \exists \widetilde{b} \in \widetilde{b}' \exists x \in x' (\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{b}), \widetilde{b}(\widetilde{a}(\widetilde{b})), w)).$$

Se considerarmos $\widetilde{b}' = \{\widetilde{y}\}$ e $\widetilde{b} = \widetilde{y}$ temos
$\forall \widetilde{a} \forall \widetilde{y} \exists^{fin} x' \forall w \exists x \in x'\ (\phi(x, \widetilde{y}(x), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{y}), \widetilde{y}(\widetilde{a}(\widetilde{y})), w))$.

E, finalmente, considerando $x' = \{\widetilde{a}(\widetilde{y})\}$ e $x = \widetilde{a}(\widetilde{y})$ obtemos o seguinte teorema trivial de $\tilde{T}$:
$\forall \widetilde{a} \forall \widetilde{y} \forall w\ (\phi(\widetilde{a}(\widetilde{y}), \widetilde{y}(\widetilde{a}(\widetilde{y})), w) \Rightarrow \phi(\widetilde{a}(\widetilde{y}), \widetilde{y}(\widetilde{a}(\widetilde{y})), w))$. □

O próximo teorema garante que as reduções dos axiomas lógicos (i), (ii), (iii) e (iv) são teoremas de $\tilde{T}$.

Teorema 11 *Sejam Φ, Ψ e Λ fórmulas de T^*. Então as reduções dos axiomas:*

(i) $\forall w\,(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi))$
(ii) $\forall w\,((\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Lambda)) \Rightarrow ((\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Lambda))$
(iii) $\forall w\,((\sim \Psi \Rightarrow \sim \Phi) \Rightarrow ((\sim \Psi \Rightarrow \Phi) \Rightarrow \Psi))$
(iv) $\forall w\,(\forall x \;\; \Phi\,(x) \Rightarrow \Phi\,(t))$ *onde* t *é constante ou variável*
são teoremas de $\tilde{T}$.

Demonstração:

Sejam Φ, Ψ e Λ fórmulas de A^*. Consideremos as reduções parciais das fórmulas Φ, Ψ e Λ, respectivamente: $\forall^{st}a\exists^{st}b \;\; \phi(a,b)$, $\forall^{st}c\exists^{st}d \;\; \psi(c,d)$ e $\forall^{st}e\exists^{st}f \;\; \lambda(e,f)$

(i) Verifiquemos que a redução de $\forall w\;(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi))$ é o fecho de uma tautologia da forma $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$. Comecemos por aplicar as regras clássicas para lidar com quantificadores com o objectivo de encontrar uma fórmula equivalente a

$$\forall w(\forall^{st}a\exists^{st}b \;\; \phi(a,b,w) \Rightarrow (\forall^{st}c\exists^{st}d \;\; \psi(c,d,w) \Rightarrow \forall^{st}x\exists^{st}y \;\; \phi(x,y,w))$$

com todos os quantificadores à direita. Ora,

$$\begin{array}{ll}
[\forall w\forall^{st}x(\forall^{st}a\exists^{st}b \;\; \phi(a,b,w) \Rightarrow & \\
(\forall^{st}c\exists^{st}d \;\; \psi(c,d,w) \Rightarrow \exists^{st}y \;\; \phi(x,y,w))] & \text{por (6)} \\
\Leftrightarrow [\forall w\forall^{st}x(\exists^{st}\widetilde{b}\forall^{st}a\, \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow & \\
(\exists^{st}\widetilde{d}\forall^{st}c\; \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \exists^{st}y \;\; \phi(x,y,w))] & \text{por (S')} \\
\Leftrightarrow [\forall w\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}(\forall^{st}a\, \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow & \\
\forall^{st}\widetilde{d}(\forall^{st}c\; \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \exists^{st}y \;\; \phi(x,y,w))] & \text{por (5d)} \\
\Leftrightarrow [\forall w\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}\forall^{st}\widetilde{d}\,(\forall^{st}a\, \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow & \\
(\forall^{st}c\; \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \exists^{st}y \;\; \phi(x,y,w))] & \text{por (6)} \\
\Leftrightarrow [\forall w\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}\forall^{st}\widetilde{d}\exists^{st}a(\, \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow & \\
\exists^{st}c\exists^{st}y \;\; (\; \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w))] & \text{por (5) (6d)} \\
\Leftrightarrow [\forall w\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}\forall^{st}\widetilde{d}\exists^{st}a\exists^{st}c\exists^{st}y & \\
(\phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow (\psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w))] & \text{por (6d)} \\
\Leftrightarrow [\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}\forall^{st}\widetilde{d}\forall w\exists^{st}a\exists^{st}c\exists^{st}y & \\
(\phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow (\psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w))] & \text{por (9)}
\end{array}$$

Aplicando (Id) obtemos a seguinte fórmula equivalente

$$\Leftrightarrow [\forall^{st}x\forall^{st}\widetilde{b}\forall^{st}\widetilde{d}\exists^{stfin}a'\exists^{stfin}c'\exists^{stfin}y'\forall w\exists a \in a'\exists c \in c'$$

$$\exists y \in y'(\ \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow (\ \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w))]$$

que, por transferência, é equivalente para os valores standard a

$$\forall x \forall \widetilde{b} \forall \widetilde{d} \exists^{fin} a' \exists^{fin} c' \exists^{fin} y' \forall w \exists a \in a' \exists c \in c' \exists y \in y'$$
$$(\ \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow (\ \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w)).$$

Assim, $(\forall w\ (\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi)))^0$ é

$$\forall x \forall \widetilde{b} \forall \widetilde{d} \exists^{fin} a' \exists^{fin} c' \exists^{fin} y' \forall w \exists a \in a' \exists c \in c' \exists y \in y'$$
$$(\ \phi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow (\ \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w)).$$

Se considerarmos $a' = \{x\}$ e $a = x$ temos

$$\forall x \forall \widetilde{b} \forall \widetilde{d} \exists^{fin} c' \exists^{fin} y' \forall w \exists c \in c' \exists y \in y'$$
$$(\ \phi(x,\widetilde{b}(x),w) \Rightarrow (\ \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,y,w)).$$

E fazendo $y' = \left\{\widetilde{b}(x)\right\}$ e $y = \widetilde{b}(x)$ temos $\forall x \forall \widetilde{b} \forall \widetilde{d} \exists^{fin} c' \forall w \exists c \in c'$

$$(\ \phi(x,\widetilde{b}(x),w) \Rightarrow (\ \psi(c,\widetilde{d}(c),w) \Rightarrow \phi(x,\widetilde{b}(x),w))$$

que é o fecho de uma fórmula da forma $\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \phi)$ que é uma tautologia em $\tilde{T}$.

(ii) A redução da fórmula $\forall w\ ((\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Lambda)) \Rightarrow ((\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Lambda))$ é o fecho de uma tautologia em $\tilde{T}$ da forma $((\phi_1 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \lambda)) \Rightarrow ((\phi_2 \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \lambda)$.

De facto $\forall w\ ((\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Lambda)) \Rightarrow ((\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi \Rightarrow \Lambda))$

é equivalente a

$$\forall w\ ((\forall^{st} a \exists^{st} b\ \ \phi(a,b) \Rightarrow (\forall^{st} c \exists^{st} d\ \ \psi(c,d) \Rightarrow$$
$$\forall^{st} e \exists^{st} f\ \ \lambda(e,f)) \Rightarrow ((\forall^{st} g \exists^{st} h\ \ \phi(g,h) \Rightarrow \forall^{st} i \exists^{st} j\ \ \psi(i,j)) \Rightarrow$$
$$\forall^{st} k \exists^{st} l\ \ \phi(k,l) \Rightarrow \forall^{st} m \exists^{st} n\ \ \lambda(m,n))).$$

Cuja redução, omitindo os argumentos das funções, é

$$\forall m \forall \widetilde{l} \forall \widetilde{g} \forall \widetilde{j} \forall \widetilde{a} \forall \widetilde{c} \forall \widetilde{f} \exists^{fin} e' \exists^{fin} \widetilde{d}' \exists^{fin} \widetilde{b}' \exists^{fin} i' \exists^{fin} \widetilde{h}' \exists^{fin} k' \exists^{fin} n'$$
$$\forall w \exists e \in e' \exists \widetilde{d} \in \widetilde{d}' \exists \widetilde{b} \in \widetilde{b}' \exists i \in i' \exists \widetilde{h} \in \widetilde{h}' \exists k \in k' \exists n \in n'$$
$$((\phi(\widetilde{a},\widetilde{b},w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c},\widetilde{d},w) \Rightarrow \lambda(e,\widetilde{f},w)) \Rightarrow$$
$$((\phi(\widetilde{g},\widetilde{h},w) \Rightarrow (\psi(i,\widetilde{j},w)) \Rightarrow (\phi(k,\widetilde{l},w) \Rightarrow \lambda(m,n,w)))).$$

Considerando $e' = \{m\}$, $e = m$, $n' = \left\{\widetilde{f}\right\}$, $n = \widetilde{f}$, $i' = \{\widetilde{c}\}$, $i = \widetilde{c}$, $\widetilde{d}' = \left\{\widetilde{j}\right\}$ e $\widetilde{d} = \widetilde{j}$ temos,

$$\forall m \forall \widetilde{l} \forall \widetilde{g} \forall \widetilde{j} \forall \widetilde{a} \forall \widetilde{c} \forall \widetilde{f} \exists^{fin} \widetilde{b}' \exists^{fin} \widetilde{h}' \exists^{fin} k' \forall w \exists \widetilde{b} \in \widetilde{b}' \exists \widetilde{h} \in \widetilde{h}'$$
$$\exists k \in k'((\phi(\widetilde{a}, \widetilde{b}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)) \Rightarrow$$
$$((\phi(\widetilde{g}, \widetilde{h}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w)) \Rightarrow (\phi(k, \widetilde{l}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)))).$$

Fazendo $\widetilde{b}' = \left\{\widetilde{l}\right\}$, $\widetilde{b} = \widetilde{l}$, $\widetilde{h}' = \left\{\widetilde{l}\right\}$ e $\widetilde{h} = \widetilde{l}$, temos

$$\forall m \forall \widetilde{l} \forall \widetilde{g} \forall \widetilde{j} \forall \widetilde{a} \forall \widetilde{c} \forall \widetilde{f} \exists^{fin} k' \forall w \exists k \in k'$$
$$((\phi(\widetilde{a}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)) \Rightarrow$$
$$((\phi(\widetilde{g}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w)) \Rightarrow (\phi(k, \widetilde{l}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)))).$$

Consideremos $k' = \{\widetilde{a}, \widetilde{g}\}$. Então $k = \widetilde{a}$ ou $k = \widetilde{g}$

Se $k = \widetilde{a}$ temos

$$\forall m \forall \widetilde{l} \forall \widetilde{g} \forall \widetilde{j} \forall \widetilde{a} \forall \widetilde{c} \forall \widetilde{f} \forall w \, ((\phi(\widetilde{a}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w) \Rightarrow$$
$$\lambda(m, \widetilde{f}, w)) \Rightarrow ((\phi(\widetilde{g}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow (\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w)) \Rightarrow$$
$$(\phi(\widetilde{a}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w))))$$

ou seja, obtemos o fecho de uma fórmula da forma

$$((\phi_1 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \lambda)) \Rightarrow ((\phi_2 \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi_1 \Rightarrow \lambda)$$

que é uma tautologia em $\tilde{T}$.

Se $k = \widetilde{g}$ temos

$$\forall m \forall \widetilde{l} \forall \widetilde{g} \forall \widetilde{j} \forall \widetilde{a} \forall \widetilde{c} \forall \widetilde{f} \forall w \, ((\phi(\widetilde{a}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow$$
$$(\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)) \Rightarrow ((\phi(\widetilde{g}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow$$
$$(\psi(\widetilde{c}, \widetilde{j}, w)) \Rightarrow (\phi(\widetilde{g}, \widetilde{l}, w) \Rightarrow \lambda(m, \widetilde{f}, w)))).$$

ou seja, obtemos o fecho de uma fórmula da forma

$$((\phi_1 \Rightarrow (\psi \Rightarrow \lambda)) \Rightarrow ((\phi_2 \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \lambda)$$

que é uma tautologia em $\tilde{T}$.

Portanto a redução de (ii) é um teorema de $\tilde{T}$.

(iii) Como sabemos, se $\forall^{st} u \exists^{st} v \;\; \phi(u, v)$ é a redução parcial de Φ, então a redução parcial de $\sim \Phi$ é $\forall^{st} \widetilde{v} \exists^{st} u \;\sim \phi(u, \widetilde{v}(u))$.

Assim, (iii) é equivalente a

$$\forall w((\forall^{st}\widetilde{b}\exists^{st}a \sim \psi(a,\widetilde{b}(a),w) \Rightarrow \forall^{st}\widetilde{d}\exists^{st}c$$
$$\sim \phi(c,\widetilde{d}(c),w)) \Rightarrow ((\forall^{st}\widetilde{f}\exists^{st}e \sim \psi(e,\widetilde{f}(e),w) \Rightarrow$$
$$\forall^{st}g\exists^{st}h \ \ \phi(g,h,w)) \Rightarrow \forall^{st}i\exists^{st}j \ \ \psi(i,j,w))).$$

Cuja redução, omitindo os argumentos das funções, é

$$\forall\widetilde{j}\forall\widetilde{e}\forall\widetilde{h}\forall\widetilde{a}\forall\widetilde{c}\exists^{fin}\widetilde{d}'\exists^{fin}\widetilde{b}'\exists^{fin}g'\exists^{fin}\widetilde{f}'\exists^{fin}i'\forall w$$
$$\exists\widetilde{d} \in \widetilde{d}'\exists\widetilde{b} \in \widetilde{b}'\exists\widetilde{g} \in g'\exists\widetilde{f} \in \widetilde{f}'\exists\widetilde{i} \in i'$$
$$((\sim \psi(\widetilde{a},\widetilde{b},w) \Rightarrow\sim \phi(\widetilde{c},\widetilde{d},w)) \Rightarrow$$
$$((\sim \psi(\widetilde{e},\widetilde{f},w) \Rightarrow \phi(\widetilde{g},\widetilde{h},w)) \Rightarrow \ \psi(\widetilde{i},\widetilde{j},w))).$$

Fazendo mudanças de variáveis convenientes, com o objectivo de reduzir o número de quantificadores, obtemos o fecho de uma tautologia de $\tilde{T}$ da forma

$$((\sim \psi_1 \Rightarrow\sim \phi) \Rightarrow ((\sim \psi_2 \Rightarrow \phi) \Rightarrow \psi_1)) \vee$$
$$((\sim \psi_1 \Rightarrow\sim \phi) \Rightarrow ((\sim \psi_2 \Rightarrow \phi) \Rightarrow \psi_2)).$$

Portanto a redução de (iii) é um teorema de $\tilde{T}$.

(iv) A redução de $\forall w\,(\forall x \ \ \Phi\,(x) \Rightarrow \Phi\,(t))$ é o fecho de uma fórmula do tipo $\forall x \ \ \phi(x) \Rightarrow \phi(t)$. De facto, considerando a redução parcial de Φ, podemos escrever:

$$\forall w\forall t(\forall x\forall^{st}a\exists^{st}b \ \ \phi(a,b,w) \Rightarrow \forall^{st}c\exists^{st}d \ \ \phi(c,d,t,w))$$

se t for uma variável, e

$$\forall w(\forall x\forall^{st}a\exists^{st}b \ \ \phi(a,b,w) \Rightarrow \forall^{st}c\exists^{st}d \ \ \phi(c,d,t,w))$$

se t for uma constante individual.

Vamos trabalhar para o caso em que t é uma variável (se for constante basta omitir o quantificador). Efectuando a rotina usual obtemos a seguinte fórmula, equivalente (para os valores standard) à anterior, com os quantificadores todos internos e à direita,

$$\forall c\forall^{fin}\widetilde{b}'\exists^{fin}a'\exists^{fin}d'\forall w\forall t\exists a \in a'\exists d \in d'(\forall x\exists b \in \widetilde{b}'(a)\ \phi(a,b,w) \Rightarrow \phi(c,d,t,w)).$$

Fazendo $a' = \{c\}$ e $a = c$ vem

$$\forall c\forall^{fin}\widetilde{b}'\exists^{fin}d'\forall w\forall t\exists d \in d'(\forall x\exists b \in \widetilde{b}'(c) \ \ \phi(c,b,w) \Rightarrow \phi(c,d,t,w))$$

que por (6d) é equivalente a

$\forall c \forall^{fin} \widetilde{b'} \exists^{fin} d' \forall w \forall t (\forall x \exists b \in \widetilde{b'}(c) \ \ \phi(c,b,w) \Rightarrow \exists d \in d' \ \ \phi(c,d,t,w))$.

Fazendo agora $d' = \{\widetilde{b'}(c)\}$ temos
$\forall c \forall^{fin} \widetilde{b'} \forall w \forall t (\forall x \exists b \in \widetilde{b'}(c) \ \ \phi(c,b,w) \Rightarrow \exists b \in \widetilde{b'}(c) \ \ \phi(c,b,t,w))$

que é o fecho de um teorema de $\tilde{T}$ do tipo
$\forall x \ \ \phi(x) \Rightarrow \phi(t)$ onde t é uma constante ou uma variável. □

Da lista de axiomas de T^* falta provar que a redução de (v) é um teorema de $\tilde{T}$. Antes porém vamos apresentar algumas definições e um resultado preliminar necessários.

Definição 12 *Um conjunto não vazio J é um conjunto dirigido se nele estiver fixada uma relação binária $\succcurlyeq$ com as seguintes propriedades:*
$i \succcurlyeq i$, para cada $i \in I$
Se $i \succcurlyeq j$ e $j \succcurlyeq k$, então $i \succcurlyeq k$ para cada $i, j, k \in I$
Para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $k \succcurlyeq i$ e $k \succcurlyeq j$.

Definição 13 *Uma família de elementos de um conjunto X indexada por um conjunto dirigido I é uma sucessão generalizada.*

Definição 14 *Sejam $(x_i)_{i \in I}$ uma sucessão generalizada de elementos de um espaço topológico X e $s \in X$. Dizemos que s é um sublimite de $(x_i)_{i \in I}$ se para todo o aberto A que contém s e para todo $i \in I$, existir $i_0 \succcurlyeq i$ tal que $x_{i_0} \in A$.*

Lema 15 *Seja τ uma afirmação interna. Se $\exists^{fin} \widetilde{v'} \forall^{fin} u' \exists x \forall u \in u' \exists v \in \widetilde{v'}(u) \ \ \tau(u,v,x)$ então $\exists \widetilde{v} \forall^{fin} u' \exists x \forall u \in u' \ \ \tau(u, \widetilde{v}(u), x)$.*

Demonstração:
Seja τ uma afirmação interna e suponhamos que $\exists^{fin} \widetilde{v'} \forall^{fin} u' \exists x \forall u \in u' \exists v \in \widetilde{v'}(u) \ \ \tau(u,v,x)$. Para mostrar que existe $\widetilde{v}$ tal que $\forall^{fin} u' \exists x \forall u \in u' \ \ \tau(u, \widetilde{v}(u), x)$ vamos construir uma sucessão generalizada de elementos num espaço topológico compacto e $\widetilde{v}$ será um seu sublimite. Como, para

cada u temos um conjunto finito $\widetilde{v'}(u)$, podemos considerar o produto cartesiano, Ω, dos conjuntos finitos $\widetilde{v'}(u)$. Como u varia num conjunto X de $\hat{M}$, então Ω é o conjunto das funções definidas nas partes finitas de X. Considerando a topologia discreta em cada conjunto finito $\widetilde{v'}(u)$, temos que $\widetilde{v'}(u)$ é um espaço topológico compacto. Assim, considerando a topologia produto, temos que Ω é um espaço compacto. Por outro lado como $\forall^{fin}u'\exists x\forall u \in u'\exists v \in \widetilde{v'}(u)\ \tau(u,v,x)$ então, pelo axioma da escolha, temos $\forall^{fin}u'\exists x\exists\widetilde{v}_{u'} \in \Omega\forall u \in u'\ \tau(u,\widetilde{v}_{u'}(u),x)$ ou seja $\forall^{fin}u'\exists\widetilde{v}_{u'} \in \Omega\,\exists x\forall u \in u'\ \tau(u,\widetilde{v}_{u'}(u),x)$. Como o conjunto das partes de um cojunto com a relação de inclusão é um conjunto dirigido, a aplicação $u' \mapsto \widetilde{v}_{u'}$ é uma sucessão generalizada de elementos de Ω. Ora, Ω é um espaço compacto logo a sucessão $\widetilde{v}_{u'}$ admite um sublimite, digamos $\tilde{v}$. Vamos provar que $\forall^{fin}u'\exists x\forall u \in u'\ \tau(u,\widetilde{v}(u),x)$. Seja u' um conjunto finito. Como $\tilde{v}$ é um sublimite da sucessão $\widetilde{v}_{u'}$ e Ω é produto de espaços topológicos discretos, então $\{\tilde{v}\}$ é um aberto de Ω, logo existe um conjunto finito w' que contém u' e tal que $\widetilde{v}_{w'} = \tilde{v}$. Portanto $\exists x\forall u \in u'\ \tau(u,\widetilde{v}(u),x)$. □

Teorema 16 *Sejam Φ e Ψ fórmulas de T^*. Então a redução do axioma:*

(v) $\forall w\ (\forall y\ (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\forall y\ \ \Phi \Rightarrow \forall y\ \Psi))$

é um teorema de $\tilde{T}$.

Demonstração:

Sejam Φ e Ψ fórmulas de T^*. Comecemos por verificar que a redução de uma fórmula do tipo $\forall t(\Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t))$ é um teorema de $\tilde{T}$:

Sendo $\forall^{st}u\exists^{st}v\ \ \gamma(u,v,t)$ a redução parcial de Γ temos

$$\forall t(\forall^{st}a\exists^{st}b\ \ \gamma(a,b,t) \Rightarrow \forall^{st}c\exists^{st}d\ \ \gamma(c,d,t))$$

$$\Leftrightarrow [\forall t\forall^{st}c(\forall^{st}a\exists^{st}b\ \ \gamma(a,b,t) \Rightarrow \exists^{st}d\ \ \gamma(c,d,t))] \qquad \text{por (6)}$$

$$\Leftrightarrow [\forall t\forall^{st}c(\exists^{st}\widetilde{b}\forall^{st}a\ \ \gamma(a,\widetilde{b}(a),t) \Rightarrow \exists^{st}d\ \ \gamma(c,d,t))] \qquad \text{por (S')}$$

$$\Leftrightarrow [\forall t\forall^{st}c\forall^{st}\widetilde{b}(\forall^{st}a\ \ \gamma(a,\widetilde{b}(a),t) \Rightarrow \exists^{st}d\ \ \gamma(c,d,t))] \qquad \text{por (5d)}$$

$$\Leftrightarrow [\forall t\forall^{st}c\forall^{st}\widetilde{b}\exists^{st}a\exists^{st}d\ (\gamma(a,\widetilde{b}(a),t) \Rightarrow \gamma(c,d,t))] \qquad \text{por (5) (6d)}$$

$$\Leftrightarrow [\forall^{st}c\forall^{st}\widetilde{b}\forall t\exists^{st}a\exists^{st}d\ (\gamma(a,\widetilde{b}(a),t) \Rightarrow \gamma(c,d,t))] \qquad \text{por (9)}$$

$\Leftrightarrow [\forall^{st} c \forall^{st} \widetilde{b} \exists^{stfin} a' \exists^{stfin} d' \forall t \exists a \in a'$
$\exists d \in d'(\ \gamma(a, \widetilde{b}(a), t) \Rightarrow \gamma(c, d, t))]$ por (Id)

$\underset{st}{\Leftrightarrow} [\forall c \forall \widetilde{b} \exists^{fin} a' \exists^{fin} d' \forall t \exists a \in a' \exists d \in d'$
$(\gamma(a, \widetilde{b}(a), t) \Rightarrow \gamma(c, d, t))]$ por (T') (T´d)

Fazendo $a' = \{c\}$, $a = c$, $d' = \{\widetilde{b}(c)\}$ e $d = \widetilde{b}(c)$ temos
$\forall c \forall \widetilde{b} \forall t (\gamma(c, \widetilde{b}(c), t) \Rightarrow \gamma(c, \widetilde{b}(c), t))$ que é um teorema de $\tilde{T}$.

Provámos assim que a redução da fórmula $\forall t(\Gamma(t) \Rightarrow \Gamma(t))$ é um teorema de $\tilde{T}$, logo a redução de $\forall w \forall x((\Phi(x,w) \Rightarrow \Psi(x,w)) \Rightarrow (\Phi(x,w) \Rightarrow \Psi(x,w)))$ é um teorema de $\tilde{T}$. Mas o nosso objectivo era provar que a redução da fórmula
$\forall w\, (\forall y\, (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\forall y \ \ \Phi \Rightarrow \forall y \ \Psi))$ é um teorema de $\tilde{T}$.

Vamos então provar que, em $\tilde{T}$, a redução de
$\forall w \forall x((\Phi(x,w) \Rightarrow \Psi(x,w)) \Rightarrow (\Phi(x,w) \Rightarrow \Psi(x,w)))$
implica a redução de
$\forall w\, (\forall y\, (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\forall y \ \ \Phi \Rightarrow \forall y \ \Psi))$.

Tendo em conta a estratégia usual de mudança de variáveis, podemos escrever a fórmula anterior como
$\forall w (\forall y\, (\Phi(y,w) \Rightarrow \Psi(y,w)) \Rightarrow (\forall z \ \ \Phi(z,w) \Rightarrow \forall x \ \Psi(x,w)))$.
Para simplificar a notação vamos considerar os pares ordenados $\langle w, x\rangle$ e $\langle y, z\rangle$, e provar que, em $\tilde{T}$, a redução de uma fórmula do tipo $\forall x\, \Sigma(x,x)$ implica a redução de uma fórmula do tipo $\forall x \exists y\, \Sigma(x,y)$, o que é equivalente a provar que, em $\tilde{T}$, a redução de $\exists x \forall y \ \ \Delta(x,y)$ implica a redução de $\exists x\, \Delta(x,x)$, onde $\Delta = \sim \Sigma$.
Considerando $\forall^{st} u \exists^{st} v \ \ \delta(u,v,x,y)$ a redução parcial de $\Delta(x,y)$, temos que

$\exists x \forall y \ \ \Delta(x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall^{st} u \exists^{st} v \ \ \delta(u,v,x,y)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall^{st} u \forall y \exists^{st} v \ \ \delta(u,v,x,y)$ por (9)

$\Leftrightarrow \exists x \forall^{st} u \exists^{stfin} v' \forall y \exists v \in v' \ \ \delta(u,v,x,y)$ por (Id)

$\Leftrightarrow \exists x \exists^{stfin} \widetilde{v'} \forall^{st} u \forall y \exists v \in \widetilde{v'}(u) \ \ \delta(u,v,x,y)$ por (S')

$\Leftrightarrow \exists^{stfin} \widetilde{v'} \exists x \forall^{st} u \forall y \exists v \in \widetilde{v'}(u) \ \ \delta(u,v,x,y)$ por (9d)

$\Leftrightarrow \exists^{stfin} \widetilde{v'} \forall^{stfin} u' \exists x \forall u \in u' \forall y \exists v \in \widetilde{v'}(u) \ \ \delta(u,v,x,y)$ por (I)

$$\underset{st}{\Leftrightarrow} \exists^{fin}\widetilde{v}'\forall^{fin}u'\exists x\forall u \in u'\forall y\exists v \in \widetilde{v}'(u) \ \ \delta(u,v,x,y) \qquad \text{por (T') (T'd)}$$

Analisemos agora na redução de $\exists x\, \Delta(x,x)$. Temos que

$\exists x\, \Delta(x,x)$

$$\Leftrightarrow \exists x\, \forall^{st}u\exists^{st}v \ \ \delta(u,v,x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, \exists^{st}\widetilde{v}\, \forall^{st}u \ \ \delta(u,\widetilde{v}(u),x) \qquad \text{por (S')}$$

$$\Leftrightarrow \exists^{st}\widetilde{v}\exists x\ \forall^{st}u \ \ \delta(u,\widetilde{v}(u),x) \qquad \text{por (9d)}$$

$$\Leftrightarrow \exists^{st}\widetilde{v}\forall^{st fin}u'\ \exists x\forall u \in u' \ \ \delta(u,\widetilde{v}(u),x) \qquad \text{por (I)}$$

$$\underset{st}{\Leftrightarrow} \exists\widetilde{v}\forall^{fin}u'\ \exists x\forall u \in u' \ \ \delta(u,\widetilde{v}(u),x) \qquad \text{por (T'd) (T')}$$

Como a redução de $\exists x\forall y\, \Delta(x,y)$ implica $\exists^{fin}\widetilde{v}'\forall^{fin}u'\exists x\forall u \in u'\exists v \in \widetilde{v}'(u)\ \ \delta(u,v,x,x)$, se escrevermos $\tau(u,v,x)$ para $\delta(u,v,x,x)$, tudo o que temos que provar é que $\exists^{fin}\widetilde{v}'\forall^{fin}u'\exists x\forall u \in u'\exists v \in \widetilde{v}'(u)\ \ \tau(u,v,x)$ implica $\exists\widetilde{v}\forall^{fin}u'\,\exists x\forall u \in u'\ \ \tau(u,\widetilde{v}(u),x)$ o que é verdade pelo lema anterior.

Portanto $\forall w\ (\forall y\ \ (\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow (\forall y\ \ \Phi \Rightarrow \forall y\ \ \Psi))$ é um teorema de $\tilde{T}$. □

Uma vez provado que o Modus Ponens se mantém válido em T^* e que as reduções dos axiomas próprios e lógicos são teoremas de $\tilde{T}$, a descrição do algoritmo puramente sintáctico que converte demonstrações de teoremas de T^* em demonstrações dos mesmos teoremas de $\tilde{T}$ é a seguinte:

Sejam $\Phi_1, ..., \Phi_n$ uma demonstração em T^*. Então, cada Φ_i é uma afirmação de T^* que é ou um axioma de T^* ou segue por Modus Ponens de Φ_j e Φ_k com $j,k < i$. Suponhamos, por indução em i que, para cada $j < i$ a afirmação Φ_j^0 é um teorema de $\tilde{T}$. Queremos mostrar que Φ_i^0 é um teorema de $\tilde{T}$.Se Φ_i é um axioma de T^* então Φ_i^0 é um teorema de $\tilde{T}$. Se Φ_i segue por Modus Ponens a partir de Φ_j e Φ_k com $j,k < i$, ou seja, se Φ_k é $\Phi_j \Rightarrow \Phi_i$, como por hipótese de indução, $(\Phi_j \Rightarrow \Phi_i)^0$ é um teorema de $\tilde{T}$, temos pelo teorema 1 e por Modus Ponens em $\tilde{T}$ que a afirmação $\Phi_j^0 \Rightarrow \Phi_i^0$ é um teorema de $\tilde{T}$. Como, por hipótese de indução Φ_j^0 é um teorema de $\tilde{T}$, concluímos por Modus Ponens em $\tilde{T}$ que Φ_i^0 é um teorema de $\tilde{T}$. Assim, a demonstração inteira reduz-se a uma demonstração em $\tilde{T}$.

2.5 Consequências do algoritmo de redução

Comecemos por analisar duas importantes consequências do algoritmo de redução: o princípio de transferência generalizado e o princípio da unicidade. O princípio de transferência generalizado vai permitir-nos afirmar que uma fórmula do tipo $\forall^{st}x\exists y\forall^{st}z\ A(x,y,z)$ é equivalente, para valores standard, a uma fórmula do tipo $\forall x\exists y\forall^{st}z\ A(x,y,z)$. Para o enunciarmos necessitamos de um conceito: uma fórmula diz-se universalmente semi-interna se, quando escrita na forma do final do 3ºpasso do algoritmo de redução, os seus únicos quantificadores externos são $\forall^{st}$. Analogamente para existencialmente semi--interna.

Teorema 17 *Princípio de Transferência Generalizado: Seja $A(x,t_1,...,t_k)$ uma fórmula universalmente semi-interna com únicas variáveis livres $t_1,\ldots,t_k$ e x. Então*

$$\forall^{st}x\ A(x,t_1,...,t_k) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall x\ A(x,t_1,...,t_k).$$

Demonstração:

Seja $A(x,t_1,...,t_k)$ uma fórmula universalmente semi-interna. Então no final do 3ºpasso da sua redução temos uma fórmula que lhe é equivalente e cujos únicos quantificadores externos são $\forall^{st}$, digamos $A'(x,t_1,...,t_k)$. Assim $\forall^{st}x\ A(x,t_1,...,t_k) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall^{st}x\ A'(x,t_1,...,t_k)$.

Aplicando (4) a $\forall^{st}x\ A'(x,t_1,...,t_k)$ as vezes necessárias até que $\forall^{st}x$ fique á direita de todos os $\forall^{st}$ que aparecem em $A'(x,t_1,...,t_k)$, obtemos uma fórmula equivalente à primeira com $\forall^{st}x$ seguido à direita por uma fórmula interna digamos $A''(x,t_1,...,t_k)$. Aplicando (T') a $\forall^{st}x\ A''(x,t_1,...,t_k)$ temos $\forall x\ A''(x,t_1,...,t_k)$. Depois, voltando a aplicar (4) as vezes necessárias de modo a trazer $\forall x$ para a esquerda temos $\forall^{st}x\ A'(x,t_1,...,t_k) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall x\ A'(x,t_1,...,t_k)$ e portanto $\forall^{st}x\ A(x,t_1,...,t_k) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall x\ A'(x,t_1,...,t_k) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall x\ A(x,t_1,...,t_k)$. □

O resultado deste princípio também se aplica a uma fórmula $A(x)$ existencialmente semi-interna, ou seja:

$$\exists^{st}x\, A(x) \underset{st}{\Leftrightarrow} \exists x\ A(x).$$

Como vimos no capítulo 1 uma das consequências do princípio de transferência era que dada uma fórmula interna $A(x)$ com uma única variável livre x, se existe um único x tal que $A(x)$, então x é standard. O próximo princípio garante que este resultado é válido para fórmulas externas.

Teorema 18 *Princípio da Unicidade: Seja $A(x)$ uma fórmula interna ou externa com parâmetros e constantes standard (se existirem) e com única variável livre x que varia num conjunto standard. Se existe um único x tal que $A(x)$, então existe um standard x tal que $A(x)$*

Demonstração:

Seja $A(x)$ uma fórmula interna ou externa com parâmetros e constantes standard (se existirem) e com única variável livre x que varia num conjunto standard. Aplicando o algoritmo de redução a $A(x)$ até ao 4ºpasso inclusivé e, se necessário, aplicando (S') obtemos $A(x) \underset{st}{\Leftrightarrow} \forall^{st}u\exists^{st}v\ B(x,u,v)$ onde $B(x,u,v)$ é uma fórmula interna e $\forall^{st}u$ e $\exists^{st}v$ são, eventualmente, contracções de quantificadores da mesma espécie.

Ora, por (S'), $\forall^{st}u\exists^{st}v\ B(x,u,v) \underset{st}{\Leftrightarrow} \exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u\ \ B(x,u,\tilde{v}(u))$. Supondo que existe um único x tal que $A(x)$ temos $\forall y\,(\forall^{st}u\exists^{st}v\ B(x,u,v) \Rightarrow y=x)$ que, aplicando os primeiros passos do algoritmo de redução, é equivalente a $\forall^{st}\tilde{v}\exists^{stfin}u'\forall y(\forall u \in u'\,B(x,u,\tilde{v}(u)) \Rightarrow y=x)$. Ora, sabemos que $\exists^{st}\tilde{v}$ tal que $\forall^{st}u\ \ B(x,u,\tilde{v}(u))$, logo $\exists^{stfin}u'$ tal que $\forall y(\forall u \in u'\,B(x,u,\tilde{v}(u)) \Rightarrow y=x)$. Como u' é um conjunto standard e finito, pelo teorema 1, temos que todo o seu elemento é standard. E como $\forall^{st}u\ \ B(x,u,\tilde{v}(u))$, então $\forall u \in u'\,B(x,u,\tilde{v}(u))$ logo $\exists y$ tal que $\forall u \in u'\,B(y,u,\tilde{v}(u))$. Ora, a fórmula $\forall u \in u'\,B(y,u,\tilde{v}(u))$ é interna e u e $\tilde{v}$ são standard, logo aplicando transferência temos $\exists^{st}y\ \forall u \in u'\,B(y,u,\tilde{v}(u))$, logo $\exists^{st}y\,(y=x)$ e portanto x é standard.

□

Este teorema permanece válido para o caso de $A(x)$ ter outras variáveis livres, mas apenas para os seus valores standard.

A próxima consequência do algoritmo de redução tem a ver com o facto de em T^* termos adoptado uma versão restrita do princípio de standardização, ou seja,

trabalhámos com	(S_0')	$\forall^{st}x\exists^{st}y\ \phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st}\widetilde{y}\forall^{st}x\ \phi(x,\widetilde{y}(x))$
em vez de	(S')	$\forall^{st}x\exists^{st}y\ \Phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st}\widetilde{y}\forall^{st}x\ \Phi(x,\widetilde{y}(x))$.

O teorema garante que (S') é uma consequência de (S_0') e, por isso, é um teorema de T^*.

Teorema 19 *Princípio de Standardização não-restringido: Seja Φ uma fórmula de T^*. Então,*

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\ \Phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st}\widetilde{y}\forall^{st}x\ \Phi(x,\widetilde{y}(x))$$

é um teorema de T^*.

Demonstração:
Seja Φ uma fórmula de T^*.
Consideremos a sua redução parcial $\forall^{st}u\exists^{st}v \ \phi(u,v)$.
Queremos provar que:

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\forall^{st}u\exists^{st}v \ \phi(u,v,x,y) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{y}\forall^{st}x\forall^{st}u\exists^{st}v \ \phi(u,v,x,\tilde{y}(x))$$

aplicando (S_0') ao antecedente e ao consequente da implicação, temos

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,y) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{y}\forall^{st}x\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,\tilde{y}(x))$$

e, aplicando novamente (S_0'), é equivalente a

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,y) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{y}\exists^{st}\tilde{\tilde{v}}\forall^{st}x\forall^{st}u \ \phi(u,\tilde{\tilde{v}}(x)(u),x,\tilde{y}(x))$$

Para simplificar a notação vamos escrever z pelo par $(y,\tilde{v})$ e $\phi'(u,x,z)$ por $\phi(u,\tilde{v}(u),x,y)$.

Obtemos assim a seguinte fórmula equivalente:

$$\forall^{st}x\exists^{st}z\forall^{st}u \ \phi'(u,x,z) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{z}\forall^{st}x\forall^{st}u \ \phi'(u,x,\tilde{z}(x)).$$

Assim, para provar o teorema tudo o que temos que fazer é provar a implicação anterior. Ora,

$$\begin{aligned}
&\forall^{st}x\exists^{st}z\forall^{st}u \ \phi'(u,x,z) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{z}\forall^{st}x\forall^{st}u \ \phi'(u,x,\tilde{z}(x))\\
&\quad\Leftrightarrow [\forall^{st}x_0\forall^{st}\tilde{u}_0\exists^{st}z_0 \ \phi'(\tilde{u}_0(z_0),x_0,z_0) \Rightarrow\\
&\qquad \forall^{st}\tilde{x}\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z} \ \phi'(\tilde{u}(z),\tilde{x}(z),\tilde{z}(\tilde{x}(z)))] && \text{por } (S_0')\\
&\quad\Leftrightarrow [\exists^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}x_0\forall^{st}\tilde{u}_0\\
&\qquad \phi'(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)),x_0,\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) \Rightarrow\\
&\qquad \forall^{st}\tilde{x}\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z} \ \phi'(\tilde{u}(z),\tilde{x}(z),\tilde{z}(\tilde{x}(z)))] && \text{por } (S_0')\\
&\quad\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}\tilde{x}\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z}\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0\\
&\qquad (\phi'(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)),x_0,\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) \Rightarrow\\
&\qquad \phi'(\tilde{u}(z),\tilde{x}(z),\tilde{z}(\tilde{x}(z)))] && \text{por (5)(6)(5d)(6d)}
\end{aligned}$$

Que é uma consequência de:

$$\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}\tilde{x}\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z}\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0$$
$$(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z) \wedge x_0 = \tilde{x}(z) \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(\tilde{x}(z))\,).$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}\tilde{x}\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z}\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0\\
&\quad (\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z) \wedge x_0 = \tilde{x}(z) \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(\tilde{x}(z))\,)\\
&\quad\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}\tilde{u}\forall^{st}\tilde{x}\exists^{st}\tilde{z}\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z)\\
&\qquad \wedge x_0 = \tilde{x}(z) \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(\tilde{x}(z)))] && \text{por (9)}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}\tilde{z}\forall^{st}x\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0$
$(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z) \wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(x))]$ por $(S'd)$

$\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\exists^{st}\tilde{z}\forall^{st}u\forall^{st}x\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = u$
$\wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(x))]$ por $(S'd)$

$\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\exists^{st}\tilde{z}\forall^{st}x\forall^{st}u\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = u$
$\wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = \tilde{z}(x))]$ por (9)

$\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}x\exists^{st}z\forall^{st}u\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = u$
$\wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = z)]$ por $(S'd)$

$\Leftrightarrow [\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}x\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}z\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0$
$(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z) \wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = z)]$ por $(S'd)$

Que, por transferência é equivalente, para valores standard a
$\forall^{st}\tilde{z}_0\forall^{st}x\forall^{st}\tilde{u}\exists^{st}z\exists^{st}x_0\exists^{st}\tilde{u}_0$
$(\tilde{u}_0(\tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0)) = \tilde{u}(z) \wedge x_0 = x \wedge \tilde{z}_0(x_0,\tilde{u}_0) = z)$.
Fazendo $z = \tilde{z}_0(x,\tilde{u})$, $x_0 = x$ e $\tilde{u}_0 = \tilde{u}$, temos
$\forall z\forall x\forall\tilde{u}\,(\tilde{u}(z) = \tilde{u}(z) \wedge x = x \wedge z = z)$ que é trivialmente verdade.
Portanto $\forall^{st}x\exists^{st}y\ \Phi(x,y) \Rightarrow \exists^{st}\tilde{y}\forall^{st}x\ \Phi(x,\tilde{y}(x))$ é um teorema de T^*.
□

Outra consequência do algoritmo de redução é uma generalização de (S') e garante-nos que dados dois conjuntos standard, A e B, e uma fórmula interna ou externa $\Phi(x,y)$, existe uma função $\tilde{y} : A \longrightarrow B$ possivelmente não-standard tal que $\forall^{st}x \in A\ \tilde{y}(x) \in C_x$ onde $C_x = \{y \in B : \Phi(x,y)\}$ e sabendo que $\forall^{st}x \in A\ C_x \neq \emptyset$. A função $\tilde{y}$ escolhe um elemento em cada classe C_x com x standard.

Teorema 20 *Princípio da Saturação: Seja $\Phi(x,y)$ uma fórmula de T^*. Então,*

$$\forall^{st}x\exists y\ \Phi(x,y) \Rightarrow \exists\tilde{y}\forall^{st}x\ \Phi(x,\tilde{y}(x))$$

é um teorema de T^*.

Demonstração:
Seja $\Phi(x,y)$ uma fórmula de T^*.
Considerando a sua redução parcial $\forall^{st}u\exists^{st}v\ \phi(u,v,x,y)$, o que queremos mostrar é

$\forall^{st}x\exists y\forall^{st}u\exists^{st}v\ \ \phi(u,v,x,y)\Rightarrow\exists\tilde{y}\forall^{st}x\forall^{st}u\exists^{st}v\ \ \phi(u,v,x,\tilde{y}(x))$

que, aplicando (S'), é equivalente a

$\forall^{st}x\exists y\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u\ \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,y)\Rightarrow\exists\tilde{y}\forall^{st}x\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}u\ \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,\tilde{y}(x))$.

Aplicando (9d) no antecedente e (S') no consequente, temos

$\forall^{st}x\exists^{st}\tilde{v}\exists y\forall^{st}u\ \ \phi(u,\tilde{v}(u),x,y)\Rightarrow\exists\tilde{y}\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}x\forall^{st}u\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$.

Aplicando (I) ao antecedente e (9d) ao consequente,temos

$\forall^{st}x\exists^{st}\tilde{v}\forall^{stfin}u'\exists y\forall u\in u'\ \phi(u,\tilde{v}(u),x,y)\Rightarrow\exists^{st}\tilde{v}\exists\tilde{y}\forall^{st}x\forall^{st}u\,\phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$.

Aplicando (S') ao antecendente e (I) ao consequente, temos

$\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}x\forall^{stfin}u'\exists y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)\Rightarrow$
$\quad\exists^{st}\tilde{v}\forall^{stfin}x'\forall^{stfin}u'\exists\tilde{y}\forall x\in x'\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$.

Assim, provar que

$\forall^{st}x\exists y\forall^{st}u\exists^{st}v\ \ \phi(u,v,x,y)\Rightarrow\exists\tilde{y}\forall^{st}x\forall^{st}u\exists^{st}v\ \phi(u,v,x,\tilde{y}(x))$

é o mesmo que provar

$\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}x\forall^{stfin}u'\exists y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)\Rightarrow$
$\quad\exists^{st}\tilde{v}\forall^{stfin}x'\forall^{stfin}u'\exists\tilde{y}\forall x\in x'\forall u\in u'\,\phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$.

Suponhamos então que

$\quad\exists^{st}\tilde{v}\forall^{st}x\forall^{stfin}u'\exists y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)$.

Então existe uma função standard $\tilde{v}$ tal que

$\quad\forall^{st}x\forall^{stfin}u'\exists y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)$.

Seja u' um conjunto standard finito. Queremos mostrar que

$\quad\forall^{stfin}x'\exists\tilde{y}\forall x\in x'\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$.

Ora, como u' é um conjunto standard finito temos por hipótese que

$\quad\forall^{st}x\exists y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)$

que, aplicando transferência, implica

$\quad\forall^{st}x\exists^{st}y\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,y)$

e por (S') é equivalente a

$\quad\exists^{st}\tilde{y}\forall^{st}x\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$

e por aplicação de (T'd), vem equivalente para os valores standard a

$\quad\exists\tilde{y}\forall x\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$

concluindo-se, por (Id), o que pretendíamos

$\quad\forall^{stfin}x'\exists\tilde{y}\forall x\in x'\forall u\in u'\ \ \phi(u,\tilde{v}(u,x),x,\tilde{y}(x))$. $\square$

Para finalizar este capítulo apresentamos uma importante consequência do algoritmo de redução e que constitui um dos objectivos deste trabalho: a demonstração sintáctica da consistência relativa de IST. Antes porém, vamos apresentar uma descrição do universo dos conjuntos, a noção de relativização de uma fórmula a um conjunto e por fim a demonstração da equivalência de uma fórmula e da sua relativização a um subuniverso de conjuntos.

A descrição do universo dos conjuntos que vamos apresentar é a do denominado Universo de Von Neumann. Trata-se de uma Hierarquia Cumulativa de Conjuntos que pressupõe uma noção de etapa e uma noção de relação de precedência entre etapas. O universo de Von Neumann considera para etapas os ordinais e para a relação de precedência entre etapas a relação de ordem usual entre ordinais. Os conjuntos desta hierarquia são os membros de V_α, para cada ordinal α.

A Hierarquia de Von Neuman é a seguinte:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \text{ se } \alpha \text{ é um ordinal} \\ V_\beta &= \cup\{V_\alpha : \alpha \text{ é um ordinal}\} \text{ se } \beta \text{ é um ordinal limite e } \beta \neq 0. \end{aligned}$$

Definição 21 *Sejam A uma afirmação de ZFC e V um conjunto. A relativização de A a V é a fórmula A^V, com variáveis livres em V, obtida de A substituindo cada ocorrência de $\forall x$ e $\exists x$ pelo respectivo quantificador limitado a V ($\forall x\,(x \in V \Rightarrow ...)$ e $\exists x\,(x \in V \wedge ...)$).*

A ideia é que A^V afirme o mesmo que A, mas referindo-se apenas aos conjuntos de V. A construção da relativização de uma sentença A de ZFC a um conjunto V é feita a partir da análise da construção lógica de A e usando as seguintes regras:

(i) Se A é atómica, então $A^V = A$.
(ii) Se A é da forma $A_1 \wedge A_2$, então $A^V = A_1^V \wedge A_2^V$.
(iii) Se A é da forma $\sim A_1$, então $A^V = \sim (A_1^V)$.
(iv) Se A é da forma $\exists x(A_1)$, então $A^V = (\exists x \in V(A_1^V))$.

O próximo teorema, habitualmente chamado de princípio da reflexão (Levy, 1979), afirma que toda a afirmação de ZFC é equivalente à sua relativização a V_α para algum ordinal α.

Teorema 22 *Princípio da Reflexão: Seja A uma sentença de ZFC. Então, existe um ordinal α tal que $A \Leftrightarrow A^{V_\alpha}$.*

Demonstração:

Seja A é uma sentença verdadeira de ZFC. Usando as regras para lidar com quantificadores podemos obter uma fórmula equivalente a A com todos os quantificadores à esquerda seguidos por uma fórmula não quantificada. Considerando, se necessário, quantificadores vazios podemos ainda obter uma fórmula equivalente a A da forma $\forall x_1 \exists y_1 ... \forall x_k \exists y_k \; B(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$ onde B não está quantificada.

Seja X um conjunto.

Consideremos a relativização, ao conjunto X, da fórmula

$\forall x_1 \exists y_1 ... \forall x_k \exists y_k \; B(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$, ou seja,

$\forall x_1 \in X \exists y_1 \in X ... \forall x_k \in X \exists y_k \in X \; B(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$.

Aplicando o axioma da escolha, temos que existe uma função $\tilde{y}_1$ tal que

$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X \exists y_2 \in X ... \forall x_k \in X \exists y_k \in X \; B(x_1, \tilde{y}_1(x_1), ..., x_k, y_k)$.

Aplicando novamente o axioma da escolha, existe uma função $\tilde{y}_2$ tal que

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X \forall x_3 \in X \exists y_3 \in X ... \forall x_k \in X \exists y_k \in X$$
$$B(x_1, \tilde{y}_1(x_1), x_2, \tilde{y}_2(x_1, x_2), x_3, y_3, ..., x_k, y_k).$$

Repetindo este processo temos que existem funções $\tilde{y}_j$, com $1 \leqslant j \leqslant k$ tais que

$\forall x_1 \in X ... \forall x_k \in X \;\; B(x_1, \tilde{y}_1(x_1), ..., x_k, \tilde{y}_k(x_1, ..., x_k))$.

Denotemos por β o menor ordinal tal que tanto X como os domínios D_j das funções $\tilde{y}_j$ são elementos de V_β.

Queremos mostrar que existe um ordinal α tal que $\forall x_1 \in V_\alpha ... \forall x_k \in V_\alpha \;\; B(x_1, \tilde{y}_1(x_1), ..., x_k, \tilde{y}_k(x_1, ..., x_k))$, para isso comecemos por considerar o conjunto vazio, ou seja, $X = \emptyset$. Aplicando o raciocínio precedente de modo recursivo, temos que existe um ordinal β_1 tal que $\emptyset \in V_{\beta_1}$ e $D_j \in V_{\beta_1}$. Analogamente, mas agora para o conjunto V_{β_1} temos que existe um ordinal β_2 tal que $V_{\beta_1} \in V_{\beta_2}$ e $D_j \in V_{\beta_2}$. Por indução, para o conjunto V_{β_m} com $m \in \mathbb{N}$ temos um ordinal β_{m+1} tal que $V_{\beta_m} \in V_{\beta_{m+1}}$ e $D_j \in V_{\beta_{m+1}}$. Temos assim uma sequência de ordinais $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, \beta_{m+1}, ...$ estritamente crescente. Sendo α o limite desta sequência, temos para cada j, $D_j \in V_\alpha$, logo $x_j \in V_\alpha$ e por isso para cada j existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in V_{\beta_m}$ concluindo-se que $\forall x_1 \in V_\alpha ... \forall x_k \in V_\alpha \;\; B(x_1, \tilde{y}_1(x_1), ..., x_k, \tilde{y}_k(x_1, ..., x_k))$. Ora, como para cada j, se $x_j \in V_{\beta_m}$ então $y_j \in V_{\beta_{m+1}}$, temos $y_j \in V_\alpha$ e portanto $\forall x_1 \in V_\alpha \exists y_1 \in V_\alpha ... \forall x_k \in V_\alpha \exists y_k \in V_\alpha \;\; B(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$ que é a relativização a V_α da fórmula $\forall x_1 \exists y_1 ... \forall x_k \exists y_k \; B(x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$.

Provámos assim que se A é verdadeira então A^{V_α} também o é. Reciprocamente, supondo A^{V_α} temos que A é válida em V_α e portanto A é verdadeira em ZFC.

Considerando agora o caso em que A não é verdadeira em ZFC, temos que $\sim A$ é verdadeira em ZFC, e como $(\sim A)^* \Leftrightarrow \sim A^*$ concluímos a equivalência pretendida. □

Corolário 23 *Sejam $A_1, ..., A_n$ um número finito de sentenças de ZFC. Então existe um ordinal α tal que*

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Leftrightarrow (A_1^{V_\alpha} \wedge ... \wedge A_n^{V_\alpha})$$

Demonstração:

Sejam $A_1, ..., A_n$ um número finito de sentenças de ZFC. Então $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ é uma sentença de ZFC, logo pelo princípio da reflexão temos que existe um ordinal α tal que $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Leftrightarrow (A_1 \wedge ... \wedge A_n)^{V_\alpha}$.

Por outro lado, aplicando a regra *(ii)* o número de vezes necessário a $A_1 \wedge ... \wedge A_n$, temos que $(A_1 \wedge ... \wedge A_n)^{V_\alpha} = (A_1^{V_\alpha} \wedge ... \wedge A_n^{V_\alpha})$. Portanto $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Leftrightarrow (A_1^{V_\alpha} \wedge ... \wedge A_n^{V_\alpha})$. □

Vimos que, dada uma teoria de primeira ordem T, o algoritmo de redução permite reduzir uma demonstração em T^* a uma demonstração em $\tilde{T}$, então tudo o que pode ser demonstrado em T^* também pode ser demonstrado em $\tilde{T}$ e por isso T^* é uma extensão conservativa de $\tilde{T}$. Vamos agora supor que a teoria de primeira ordem com a qual começámos foi ZFC e que a primeira extensão considerada ($\tilde{T}$) foi ZFC com a constante V e o seguinte axioma adicional:

$$\exists\alpha(V = V_\alpha)$$

isto é, existe um ordinal α tal que V é igual ao universo parcial V_α.

Chamando a esta extensão ZFC[V], o próximo teorema garante que ZFC[V] é uma extensão conservativa de ZFC.

Teorema 24 *ZFC[V] é uma extensão conservativa de ZFC.*

Demonstração:

Seja A um teorema de ZFC[V] que não contém a constante V.

Sejam $\phi_1, ..., \phi_n$ as afirmações de ZFC que ocorrem na demonstração do teorema A em ZFC[V]. Pelo princípio da reflexão (corolário 23) temos que existe um ordinal α tal que $\phi_1^{V_\alpha}, ..., \phi_n^{V_\alpha}$ são válidas. Assim, reecrevendo a demonstração de A em ZFC[V] substituindo cada ocorrência de V por V_α temos uma demonstração de A em ZFC. $\square$

Partindo da extensão conservativa ZFC[V] de ZFC e adicionando o predicado unário "standard" e os axiomas (T), (I) e (S_0') obtemos a extensão (ZFC[V])* que é uma extensão conservativa de ZFC[V] pelo algoritmo de redução.

Assim, porque (ZFC[V])* contém IST, fica concluída a demonstração sintáctica de que IST é uma extensão conservativa de ZFC.

Capítulo 3

Consistência relativa (semântica)

3.1 Introdução

O objectivo neste capítulo é a demonstração semântica da consistência relativa de IST. Precisamos, por isso, de construir um modelo para IST. O método que usaremos para a construção de tal modelo baseia-se na construção de ultrapotências. No entanto, veremos que só numa estrutura mais complexa (ultralimites adequados) é que vamos conseguir ter o modelo pretendido.

3.2 Ultrapotências; Transferência

A construção de ultrapotências constitui um método de construção de modelos. Veremos, nesta secção, que o princípio de transferência é válido para ultrapotências. Para construir uma ultrapotência precisamos de ter um ultrafiltro, cuja existência provaremos nesta secção.

Definição 25 *Sejam I um conjunto e $F \subseteq P(I)$. Dizemos que F é um filtro (próprio) sobre I se:*

i) $\emptyset \notin F$
ii) $I \in F$
iii) $X, Y \in F \Rightarrow X \cap Y \in F$
iv) $X \in F, X \subseteq Z \subseteq I \Rightarrow Z \in F.$

Exemplo 26 *Seja I um conjunto, temos: i) $F = \{I\}$ é o filtro trivial; ii) Se $Y \subseteq I$, então $F = \{X \subseteq I : Y \subseteq X\}$ é o filtro principal gerado por Y. iii) Se $E \subseteq P(I)$, então $F = \cap\{F' : E \subseteq F'$ e F' é filtro sobre $I\}$ é o filtro gerado por E.*

Definição 27 *Dado U um filtro sobre I, dizemos que U é um ultrafiltro sobre I no caso de termos $X \in U$ sse $I \setminus X \notin U$, para todo o subconjunto X de I.*

O teorema seguinte garante, à custa do axioma da escolha, a existência de ultrafiltros e tem como consequência imediata a possibilidade de estender um filtro a um ultrafiltro.

Teorema 28 *Seja $E \subseteq P(I)$, então existe um ultrafiltro U sobre I tal que $E \subseteq U$.*

Demonstração:
Seja $E \subseteq P(I)$. Consideremos a classe de todos os filtros que incluem E e denotemo-la por Σ. Temos que $\Sigma \neq \emptyset$ pois, sendo F o filtro gerado por E temos $F \in \Sigma$. Por outro lado, sendo C uma cadeia não vazia de filtros que incluem E, temos que $\cup C$ é ainda um filtro sobre I que inclui E. Assim, pelo Lema de Zorn, a classe Σ tem elemento maximal digamos U. Vamos provar que U é um ultrafiltro sobre I provando em primeiro lugar que U é filtro maximal sobre I. Seja U' um filtro tal que $U \subseteq U'$. Como $E \subseteq U$, então $E \subseteq U'$, logo $U' \in \Sigma$. Ora, U é elemento máximal de Σ logo, como $U \subseteq U'$, concluímos que $U = U'$ e portanto U é filtro maximal sobre I. Seja $X \in P(I)$. Queremos mostrar que $X \in U$ sse $I \setminus X \notin U$. Ora, se $X \in U$ e $I \setminus X \in U$ então $X \cap I \setminus X = \emptyset \in U$ o que contraria o facto de U ser um filtro. Portanto $X \in U$ e $I \setminus X \in U$ não acontece. Suponhamos então que $I \setminus X \notin U$. Seja $E' = U \cup \{X\}$ e consideremos F' o filtro gerado por E. Seja $F = \cap\{A : E' \subseteq A \text{ e } A \text{ é filtro sobre } I\}$. Temos $U \subseteq F$. Mas U é filtro maximal sobre I, logo $F = U$ e portanto $U = \cap\{A : E' \subseteq A \text{ e } A \text{ é filtro sobre } I\}$ de onde se conclui que $E' \subseteq U$ e portanto $X \in U$. □

Corolário 29 *Qualquer filtro sobre I pode ser estendido a um ultrafiltro sobre I.*

Passemos agora às ultrapotências. Como veremos, uma ultrapotência é um conjunto quociente para a relação de equivalência definida do seguinte modo: dados V um conjunto e U um ultrafiltro sobre um conjunto I, duas funções f e g de V^I dizem-se equivalentes módulo U se $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$. Vamos denotar por $\bar{f}$ a classe de equivalência que contém f. Observe-se que, por construção, um ultrafiltro tem elementos "muito grandes", e por isso intuitivamente podemos dizer que duas funções são equivalentes módulo U se forem "quase sempre" iguais.

Definição 30 *Dados um ultrafiltro U sobre I e V um conjunto. Chamamos ultrapotência, e denotamos por $^*V$, ao conjunto, V^I/U, de todas as classes de equivalência módulo U de funções de I para V.*

O conjunto V pode ser identificado pela ultrapotência $^*V$, bastando para isso considerar a aplicação constante $\varphi : V \to V^I$ e a aplicação $\psi : V \to {}^*V$ definida por $\psi(v) = \overline{\varphi(v)}$ que são ambas injectivas. Por outro lado, se n é um número natural, podemos identificar $(V^n)^I$ com $(V^I)^n$ fazendo corresponder a cada função $f^n : I \longrightarrow V^n$ definida por $i \longmapsto (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$ o n-tuplo de funções de I em V $(f_1, f_2, ..., f_n)$ onde cada f_j está definido por $i \longmapsto x_i^j$. Assim, generalizando a relação de equivalência módulo U da seguinte forma: f^n e g^n são equivalentes módulo U sse $(f_1, ...f_n)$ e $(g_1, ...g_n)$ são equivalentes módulo U (entendendo-se por esta última equivalência módulo U a equivalência módulo U de f_1 com g_1, f_2 com g_2,... ,f_n com g_n) obtemos uma identificação de $^*(V^n)$ com $(^*V)^n$.

Como uma relação binária em V é um subconjunto de V^n, os conectivos lógicos entre relações tais como a negação e a implicação podem ser expressos por meio de operações booleanas. Os quantificadores existenciais podem ser expressos por meio de operadores de projecção e os quantificadores universais por combinações destes com a complementação. Veremos, pelos teoremas que se seguem, que qualquer afirmação em V é verdade se e só se a correspondente afirmação em $^*V$ é verdade. Este resultado constitui o princípio de transferência para ultrapotências. Antes porém necessitamos de alguns conceitos, nomeadamente do conceito de extensão de um conjunto, de operador de projecção e de secção de um conjunto:

Definição 31 *Dados um ultrafiltro U sobre I, V um conjunto e $E \subseteq V$ chamamos extensão de E ao conjunto $^*E$ de todas as classes de equivalência módulo U das funções f tais que $\{i \in I : f(i) \in E\} \in U$. Simbolicamente:*

$$^*E = \left\{ \tilde{f} : \{i \in I : f(i) \in E\} \in U \right\}.$$

Trata-se de uma definição consistente já que depende apenas das classes de equivalência e não dos seus representantes, ou seja, dadas duas funções f e g equivalentes módulo U, tem-se

$$\{i \in I : f(i) \in E\} \in U \quad sse \quad \{i \in I : g(i) \in E\} \in U.$$

Definição 32 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e V um conjunto. Uma projecção é uma aplicação $\pi_j : P(V^n) \longrightarrow P(V^{n-1})$ definida por:*

$$\pi_j(E) = \{(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in V^{n-1} : \text{para algum } x_j \text{ em } V \text{ temos } (x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n) \in E\}.$$

Analogamente definimos uma projecção $\pi_j : P(^*V^n) \longrightarrow P(^*V^{n-1})$.

Definição 33 *Seja $n \in \mathbb{N}$.Dados $E \subseteq V^n$ e $x \in V$, chamamos secção x índice j de E, e denotamos por $E_{x,j}$, ao conjunto*

$$\left\{(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \in V^{n-1} : (x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n) \in E\right\}.$$

Analogamente para um subconjunto de $^*V^n$ e um ponto de $^*V$.

O teorema seguinte vai permitir-nos estabelecer uma relação entre subconjuntos de um conjunto e de uma sua ultrapotência.

Teorema 34 *Seja $^*V$ uma ultrapotência de V. Então, a aplicação de $P(V)$ para $P(^*V)$ definida por $E \longmapsto {}^*E$ é um isomorfismo sobrejectivo da álgebra Booleana $P(V)$ numa subálgebra Booleana de $P(^*V)$.*

Demonstração:

Seja $^*V$ uma ultrapotência de V. Consideremos $\varphi : P(V) \longrightarrow P(^*V)$ definida por $E \longmapsto {}^*E$. Queremos mostrar que φ é um isomorfismo sobrejectivo da álgebra Booleana $P(V)$ numa subálgebra Booleana de $P(^*V)$, para o que basta provar que φ preserva os símbolos $\emptyset$, V, $\cap$ e ^{c}. Ora, $\varphi(\emptyset) = {}^*\emptyset = \emptyset$ e $\varphi(V) = {}^*V$. Por outro lado, dados $E, F \subseteq V$ temos $E \cap F \subseteq V$, logo $\varphi(E \cap F) = {}^*(E \cap F)$. Mas

$$\begin{aligned} {}^*(E\cap F) &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E \cap F\} \in U\} \\ &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E\} \cap \{i \in I : f(i) \in F\} \in U\}. \end{aligned}$$

Pois U é um filtro. Assim,

$$\begin{aligned} {}^*(E\cap F) &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E\} \in U\} \cap \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in F\} \in U\} \\ &= {}^*E \cap {}^*F. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi(E \cap F) = {}^* E \cap {}^*F = \varphi(E) \cap \varphi(F)$.

Falta provar que $\varphi(E^c) = (\varphi(E))^c$:

Ora, $\varphi(E^c) =$

$$\begin{aligned} &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E^c\} \in U\} \\ &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E\} \notin U\} \qquad \text{pois } U \text{ é um filtro} \\ &= \{\, \bar{f} : \{i \in I : f(i) \in E\} \in U\}^c \\ &= ({}^*E)^c \\ &= (\varphi(E))^c. \end{aligned}$$

□

O próximo teorema diz-nos que a extensão da imagem de um conjunto por uma projecção é a imagem pela projecção da extensão desse conjunto.

Teorema 35 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, V um conjunto e $^*V$ uma ultrapotência de V. Se $E \subseteq V^n$, então $^*\pi_j(E) = \pi_j(^*E)$.*

Demonstração:

Sejam $^*V$ uma ultrapotência de V e $E \subseteq V^n$. Denotemos por f^n a aplicação de I em V^n definida por $f^n(i) = (x_i^1, ..., x_i^n)$ (f^n é um elemento de $(V^n)^I$). Temos,

$$\begin{aligned} {}^*\pi_j(E) &= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \{i \in I : f^{n-1}(i) \in \pi_j(E)\} \in U \right\} \\ &= \overline{f^{n-1}} : \{i \in I : \\ &\quad \text{para algum } x_i^j \text{ em } V \text{ temos } (x_i^1, ..., x_i^{j-1}, x_i^j, x_i^{j+1}, ..., x_i^n) \in E\} \in U\} \end{aligned}$$

$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \text{para algum } x_i^j \text{ em } V \text{ temos } \left\{ i \in I : (x_i^1, ..., x_i^n) \in E \right\} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \text{para algum } x_i^j \text{ em } V \text{ temos } \{ i \in I : f^n(i) \in E \} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \text{para algum } \overline{x_i^j} \text{ em } {}^*V \text{ temos } \overline{f^n} \in {}^*E \right\}$
$= \pi_j\,({}^*E).$ □

No próximo teorema veremos que a extensão de uma secção de um conjunto é a secção da extensão desse conjunto.

Teorema 36 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, V um conjunto e ${}^*V$ uma ultrapotência de V, dados $E \subseteq V^n$ e $x \in V$, temos ${}^*(E_{x,j}) = ({}^*E)_{x,j}$.*

Demonstração:
Sejam ${}^*V$ uma ultrapotência de V, $E \subseteq V^n$ e $x \in V$. Denotando por f^n a aplicação de I em V^n definida por $f^n(i) = (x_i^1, ..., x_i^n)$. Temos:

${}^*(E_{x,j}) = \left\{ \overline{f^{n-1}} : \left\{ i \in I : f^{n-1}(i) \in E_{x,j} \right\} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \left\{ i \in I : (x_i^1, ..., x_i^{j-1}, x_i^{j+1}, ..., x_i^n) \in E_{x,j} \right\} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \left\{ i \in I : (x_i^1, ..., x_i^{j-1}, x, x_i^{j+1}, ..., x_i^n) \in E \right\} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \{ i \in I : f^n(i) \in E \} \in U \right\}$
$= \left\{ \overline{f^{n-1}} : \overline{f^n} \in {}^*E \right\}$
$= ({}^*E)_{x,j}.$ □

Temos, assim, o princípio de transferência para ultrapotências:

Teorema 37 *Princípio de Transferência para ultrapotências: Seja ${}^*V$ uma ultrapotência de V. Se σ é uma fórmula de V e ${}^*\sigma$ é a fórmula de ${}^*V$ que resulta de σ efectuando as extensões necessárias. Então: $V \models \sigma$ se e só se ${}^*V \models {}^*\sigma$.*

Demonstração:
Sejam ${}^*V$ uma ultrapotência de V e σ uma fórmula de V.

Como uma relação binária em V é um subconjunto de V^n e tanto V como V^n podem ser identificados por ${}^*V$ e ${}^*(V^n)$, os conectivos lógicos podem ser expressos por operações booleanas em V e estas são preservadas em ${}^*V$ (teorema 34). Os quantificadores podem ser expressos por operadores de projecção e estes são preservados em ${}^*V$ (teorema 35). Podemos concluir que, sendo ${}^*\sigma$ a fórmula de ${}^*V$ que resulta de σ, ${}^*\sigma$ é verdade em ${}^*V$ se e só se σ for verdade em V. □

3.3 Ultrapotências adequadas; Idealização restringida

Vimos, na secção anterior, que o princípio de transferência é válido para ultrapotências. Nesta secção vamos obter uma nova estrutura onde provaremos uma versão restringida do princípio de idealização.

Dada uma ultrapotência $^*V$ de V consideremos a aplicação t que a cada elemento ζ de $^*V$ faz corresponder a família de todos os subconjuntos E de V tais que $\zeta \in {}^*E$. Pelo teorema 34 temos que $t(\zeta)$ é um ultrafiltro de V logo a aplicação t tem domínio $^*V$ e conjunto de chegada o conjunto dos ultrafiltros de V que vamos representar por $\hat{V}$.

Definição 38 *Uma ultrapotência $^*V$ de um conjunto V é uma ultrapotência adequada de V se a aplicação $t : {}^*V \to \hat{V}$ é sobrejectiva.*

O próximo teorema garante a existência de ultrapotências adequadas.

Teorema 39 *Todo o conjunto admite uma ultrapotência adequada.*

Demonstração:

Seja V um conjunto. Queremos mostrar que existe uma ultrapotência adequada de V. Comecemos por construir um ultrafiltro. Consideremos, então, o conjunto $I = P_{fin}(P(V))$ e, para cada $E \subseteq V$, o conjunto $\tilde{E} = \{i \in I : E \in i\}$. Consideremos $\Sigma = \left\{\tilde{E} : E \subseteq V\right\}$. Como $\Sigma \subseteq P(I)$, pelo teorema 28 existe um ultrafiltro U sobre I tal que $\Sigma \subseteq U$, ou seja, um ultrafiltro U que contém todos os conjuntos da forma $\tilde{E}$. Consideremos agora a ultrapotência $^*V = V^I/U$. Para que $^*V$ seja uma ultrapotência adequada é preciso que a aplicação $t : {}^*V \to \hat{V}$ definida por $t(\zeta)$ como sendo a família de todos os subconjuntos E de V tais que $\zeta \in {}^*E$ seja sobrejectiva. Para que tal aconteça basta mostrar que todo o ultrafiltro de V é da forma $t(\zeta)$ com $\zeta \in {}^*V$. Seja $\bar{V}$ um ultrafiltro sobre V. Para cada $i \in I$ seja A_i a intersecção de todos os elementos de i que são elementos de $\bar{V}$. Como $\bar{V}$ é um ultrafiltro temos que $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$. Chamando f à função de I em V que a cada $i \in I$ escolhe um elemento em A_i, consideremos ζ a classe de equivalência módulo U de f. Queremos mostrar que $t(\zeta) = \bar{V}$. Seja $E \in \bar{V}$. Provar que $E \in t(\zeta)$ é provar que $E \subseteq V$ e que $\zeta \in {}^*E$. Como $\bar{V}$ é um ultrafiltro sobre V temos $E \subseteq V$. Falta provar que $\zeta \in {}^*E$ ou seja que $\{i \in I : f(i) \in E\} \in U$.

Como $\tilde{E} \in U$, se provarmos que $\tilde{E} \subseteq \{i \in I : f(i) \in E\}$ podemos concluir que $\{i \in I : f(i) \in E\} \in U$ pois U é um filtro. Seja $i \in \tilde{E}$, então $i \in I$ e $E \in i$. Como $E \in \bar{V}$ e $E \in i$, então $A_i \subseteq E$ e $f(i) \in E$. Portanto $\bar{V} \subseteq t(\zeta)$. Temos $\bar{V}$ e $t(\zeta)$ ultrafiltros e $\bar{V} \subseteq t(\zeta)$ portanto $\bar{V} = t(\zeta)$. Concluímos assim que t é sobrejectiva e portanto $^*V = V^I/U$ onde $I = P_{fin}(P(V))$ e U um ultrafiltro que contém todos os conjuntos da forma $\tilde{E} = \{i \in I : E \in i\}$, para todo $E \subseteq V$ é uma ultrapotência adequada de V. □

O teorema seguinte é o princípio de idealização restringido para ultrapotências adequadas. É restringido pois não existem variáveis livres a variar em $^*V$.

Para obter o princípio de idealização não restringido temos que lidar com a noção de ultralimite adequado, que veremos na próxima secção.

Teorema 40 *Princípio de Idealização restringido: Seja $^*V$ uma ultrapotência adequada de V e seja $R \subseteq V^2$ tal que para todos os subconjuntos finitos F de V existe $x \in {}^*V$ com $\langle x,y\rangle \in {}^*R$ para todo $y \in F$. Então existe $\zeta \in {}^*V$ com $\langle \zeta,y\rangle \in {}^*R$ para todo $y \in V$.*

Demonstração:

Seja $^*V$ uma ultrapotência adequada de V. Seja $R \subseteq V^2$ tal que para todos os subconjuntos finitos F de V existe $x \in {}^*V$ com $\langle x,y\rangle \in {}^*V$ para todo $y \in F$. Então, dado $F = \{y_1, ..., y_n\} \subseteq V$ temos que existe $x \in {}^*V$ com $\langle x,y_1\rangle \in {}^*R$, $\langle x,y_2\rangle \in {}^*R$, ...,$\langle x,y_n\rangle \in {}^*R$. Assim, o conjunto

$\{x \in {}^*V : \langle x,y_1\rangle \in {}^*R \wedge ... \wedge \langle x,y_n\rangle \in {}^*R\}$ é não vazio.

Mas,

$$\{x \in {}^*V : \langle x,y_1\rangle \in {}^*R \wedge ... \wedge \langle x,y_n\rangle \in {}^*R\} =$$
$$= {}^*\{x \in {}^*V : \langle x,y_1\rangle \in {}^*R \wedge ... \wedge \langle x,y_n\rangle \in {}^*R\},$$

logo para cada $y \in V$, $\{x \in V : \langle x,y\rangle \in R\}$ é não vazio. Considerando $X = \{\{x \in V : \langle x,y\rangle \in R\} : y \in V\}$ temos que existe um ultrafiltro $\ddot{V}$ sobre V tal que $X \subseteq \ddot{V}$ (teorema 28). Sendo $^*V$ uma ultrapotência adequada sabemos que todo o ultrafiltro de V é imagem de uma classe de funções, logo, existe $\zeta \in {}^*V$ tal que $t(\zeta) = \ddot{V}$. Ora, como $X \subseteq \ddot{V}$, então $\zeta \in {}^*X$ e portanto $\langle \zeta,y\rangle \in {}^*R$ para cada $y \in V$. □

3.4 Ultralimites adequados; Idealização

Como foi referido na secção anterior, se trabalharmos com ultrapotências adequadas conseguimos ter uma versão restringida do princípio de idealização. Veremos, nesta secção, a validade do princípio de idealização sem restrições numa nova estrutura: ultralimites adequados.

Definição 41 *Dado V um conjunto, dizemos que $^*V$ é um ultralimite de V se $^*V$ for o limite directo de uma sequência de ultrapotências $^1V, {}^2V, {}^3V, \ldots$ tais que ^1V é uma ultrapotência de V e ^{j+1}V é uma ultrapotência de ^jV para cada $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

No caso de cada uma das ultrapotências ser uma ultrapotência adequada, dizemos que $^*V$ é um ultralimite adequado.

Observamos que, ao identificar ^nV como um subconjunto de ^{n+1}V através da injecção natural, temos que o ultralimite $^*V$ é a união das ultrapotências $^nV, n \in \mathbb{N}$. O teorema seguinte garante a existência de ultralimites adequados.

Teorema 42 *Todo o conjunto V admite um ultralimite adequado.*

Demonstração:
Seja V um conjunto. Pelo teorema 39 sabemos que existe uma ultrapotência adequada ^1V de V. Aplicando novamente o teorema 39, mas agora ao conjunto ^1V, podemos considerar a ultrapotência adequada ^2V de V. Desta forma, conseguimos obter uma sequência de ultrapotências adequadas $^1V, {}^2V, {}^3V, \ldots$ tais que ^1V é uma ultrapotência adequada de V e ^{j+1}V é uma ultrapotência adequada de ^jV para cada $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Considerando o limite directo desta sequência temos um ultralimite adequado de V. $\square$

Dado $E \subseteq V$ vamos denotar por $^*E$ a união das extensões de E em cada ultrapotência da sequência que origina um ultralimite de V. E da mesma forma que fizémos para ultrapotências, vamos identificar o ultralimite de um produto cartesiano com o produto cartesiano dos ultralimites e formular os teoremas que garantem o princípio de transferência para ultralimites. Como as demonstrações destes teoremas se reduzem à respectiva demonstração para o caso das ultrapotências, vamos apenas, e a título de exemplo, apresentar apenas uma delas:

Teorema 43 *Seja* $^*V$ *um ultralimite de* V*. Então, a aplicação de* $P(V)$ *para* $P(^*V)$ *definida por* $E \longmapsto {}^*E$ *é um isomorfismo sobrejectivo da álgebra Booleana* $P(V)$ *numa subálgebra Booleana de* $P(^*V)$.

Teorema 44 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$*,* V *um conjunto e* $^*V$ *um ultralimite de* V*. Se* $E \subseteq V^n$*, então* $^*\pi_j(E) = \pi_j(^*E)$.

Demonstração:

Sejam $^*V$ um ultralimite de Ve $E \subseteq V^n$. Como $^*V$ é a união de ^mV com $m \in \mathbb{N}$, aplicando o teorema 35 a cada ultrapotência ^mV,$m \in \mathbb{N}$ temos $^m\pi_j(E) = \pi_j(^mE)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, logo $^*\pi_j(E) = \pi_j(^*E)$. □

Teorema 45 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$*,* V *um conjunto e* $^*V$ *um ultralimite de* V*, dados* $E \subseteq V^n$ *e* $x \in V$*, temos* $^*(E_{x,j}) = (^*E)_{x,j}$.

Agora estamos nas condições de enunciar e provar o princípio de idealização.

Teorema 46 *Princípio de Idealização para ultralimites adequados: Sejam* $k \in \mathbb{N}$*,* V *um conjunto,* $^*V$ *um ultralimite adequado de* V *e* $R \subseteq V^{2+k}$*. Sejam* $t_1, ..., t_k \in {}^*V$*. Se para cada subconjunto finito* F *de* V *existe* $x \in^* V$ *tal que* $\langle x, y, t_1, ..., t_k\rangle \in {}^*R$ *para todo* $y \in F$*, então existe* $\zeta \in {}^*V$ *tal que* $\langle \zeta, y, t_1, ..., t_k\rangle \in {}^*R$ *para todo* $y \in V$.

Demonstração:

Sejam $^*V$ um ultralimite adequado de V e $R \subseteq V^{2+k}$. Sejam $t_1, ..., t_k \in {}^*V$. Suponhamos que para cada subconjunto finito F de V existe $x \in^* V$ tal que $\langle x, y, t_1, ..., t_k\rangle \in {}^*R$ para todo $y \in F$. Como $t_1, ..., t_k \in {}^*V$ e $^*V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^nV$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_1, ..., t_k \in {}^nV$. Consideremos $S \subseteq {}^nV \times^n V$ definido por

$$S = \{\langle x, y\rangle \in^n V \times^n V : \text{Se } y \in V, \text{ então } \langle x, y, t_1, ..., t_k\rangle \in {}^nR\}$$

Seja $G = \{y_1, ..., y_m\}$ um subconjunto finito de V. Então, por hipótese, existe $x \in^* V$ tal que $\langle x, y, t_1, ..., t_k\rangle \in {}^*R$ para todo $y \in G$, ou seja, existe $x \in^* V$ tal que $\langle x, y_1\rangle \in {}^*S \wedge .... \wedge \langle x, y_m\rangle \in {}^*S$. Ora, pelos teoremas 43 e 45 temos que

$$\{x \in {}^*V : \langle x, y_1 \rangle \in {}^*S \wedge .... \wedge \langle x, y_m \rangle \in {}^*S\} =$$
$$= {}^*\{x \in {}^nV : \langle x, y_1 \rangle \in S \wedge .... \wedge \langle x, y_m \rangle \in S\},$$

logo existe $x \in {}^nV$ e consequentemente em ${}^{n+1}V$ tal que $\langle x, y_1 \rangle \in S \wedge$ .... $\wedge \langle x, y_m \rangle \in S$. Temos que ${}^{n+1}V$ é uma ultrapotência adequada de ${}^nV$, $S \subseteq {}^nV \times {}^nV$ e para todos os subconjuntos finitos G de V existe $x \in {}^{n+1}V$ tal que $\langle x, y \rangle \in {}^*S$ para todos $y \in G$. Então estamos nas condições do princípio de idealização restringido para ultrapotências adequadas e por isso podemos concluir que existe $\zeta \in {}^{n+1}V$ tal que $\langle \zeta, y \rangle \in {}^*S$ para todo $y \in V$, isto é, que existe $\zeta \in {}^*V$ tal que $\langle \zeta, y, t_1, ..., t_k \rangle \in {}^*R$ para todo $y \in V$. □

3.5 Aplicação a IST

O objectivo estabelecido para este capítulo foi a demonstração semântica da consistência relativa de IST. Esta demonstração envolve o princípio da reflexão e a construção de um ultralimite adequado (certa união de ultrapotências) de um universo parcial V_α.

Na descrição do universo dos conjuntos de Von Neumann considera-se para colecção inicial o conjunto vazio e considera-se que para cada ordinal existe uma colecção cujos membros são os conjuntos formados em etapas anteriores, desta forma nunca vamos deixar de construir conjuntos. A colecção de todos os conjuntos seria um conjunto se existisse uma etapa α tal que todos os conjuntos fossem elementos de V_α. Ora, tal etapa não existe pois na etapa seguinte são formados mais conjuntos. Portanto o universo não é um conjunto e, por isso, não podemos garantir que existe um ultralimite adequado do universo. Para contornar esta questão, e como por definição todo o conjunto é elemento de V_α para algum ordinal α, vamos trabalhar num ultralimite adequado de V_α com α apropriado.

Nas secções 3.2 e 3.4 provámos os princípios de transferência e de idealização para ultralimites adequados, obtivémos assim ${}^*(T)$ e ${}^*(I)$. Logo falta-nos verificar que (S) é válido para ultralimites adequados:

Teorema 47 *Seja V um conjunto e ${}^*V$ um ultralimite adequado de V e seja $C \subseteq V$. Então, para todo $x \in {}^*V$ existe um conjunto $y \in {}^*V$ cujos elementos são os elementos de x que pertencem a C.*

Demonstração:

Sejam ${}^*V$ um ultralimite adequado de V e $C \subseteq V$. Fixado um conjunto $x \in {}^*V$ temos que existe um ordinal α tal que $x \in V_\alpha$. Como qualquer subconjunto de um elemento de V_α também é um elemento de V_α, então a classe, y, cujos elementos são os elementos de x que pertencem a C também é um elemento de V_α, e portanto $y \in {}^*V$. $\square$

Com o teorema seguinte terminamos este capítulo do nosso trabalho já que permite concluir (de forma semântica) a consistência relativa de IST.

Teorema 48 *Todo o teorema interno de IST é um teorema de ZFC.*

Demonstração:

Seja A um teorema interno de IST. Sejam $A_1, ..., A_n$ as afirmações de ZFC que ocorrem na demonstração do teorema A em IST. Como também A é uma afirmação de ZFC, pelo corolário 23 existe um ordinal α tal que $(A \wedge A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Leftrightarrow (A \wedge A_1 \wedge ... \wedge A_n)^{V_\alpha}$.

Seja ${}^*V_\alpha$ um ultralimite adequado de V_α e consideremos a injecção natural $J : V_\alpha \longrightarrow^* V_\alpha$ e o conjunto $E(\alpha) = \{\langle x, y\rangle \in V_\alpha \times V_\alpha : x \in y\}$.Vamos provar que ${}^*V_\alpha$ com a interpretação: $\langle x, y\rangle \in {}^*E(\alpha)$ para $x \in y$ e $x \in j(V_\alpha)$ para x standard; é um modelo para $A_1, ..., A_n, (I), (S), (T)$. Para cada fórmula B de IST, denotemos por ${}^*B$ a fórmula de ZFC que se obtém de B substituindo cada ocorrência de x e y e de x standard pelas suas interpretações. Pelos princípios de transferência e de idealização para ultralimites adequados temos ${}^*(T)$ e ${}^*(I)$. Pelo teorema 47 temos também ${}^*(S)$, e aplicando o princípio da transferência (teorema 37) a cada afirmação $A_1, ..., A_n$ de ZFC temos ainda ${}^*A_1, ..., {}^*A_n$. Portanto ${}^*V_\alpha$ é um modelo para $A_1, ..., A_n, (I), (S), (T)$. Assim, como a demonstração de A em IST é feita a partir das afirmações $A_1, ..., A_n, (I), (S), (T)$ (eventualmente não todos), temos uma demonstração de ${}^*A$ a partir de ${}^*A_1, ..., {}^*A_n, {}^*(I), {}^*(S)$ e de ${}^*(T)$. Por outro lado como ${}^*A$ implica A^{V_α} e $A \Leftrightarrow A^{V_\alpha}$ temos uma demonstração de A em ZFC. $\square$

Capítulo 4

Considerações finais

Neste último capítulo e, em jeito de considerações finais, vamos fazer um enquadramento histórico da análise não-standard, analisar os seus benefícios (e obstáculos) e por fim apresentar uma forma de olhar para os seus elementos fundamentais intuitivamente.

Nos anos 60 Abraham Robinson demonstrou que os modelos não-standard dos números naturais e dos números reais podem ser usados para interpretar as noções básicas da análise no espírito da matemática dos séculos 17 e 18, isto é, da análise que inclui quantidades infinitésimais e infinitamente grandes.

A análise não-standard é um ramo da matemática desenvolvido, a partir das ideias de Robinson, em duas versões diferentes. Uma versão modelo teórica onde se trabalha com extensões de conjuntos, e uma versão axiomática (desenvolvida neste trabalho) onde se trabalha o universo dos conjuntos de forma a que este contenha tanto os objectos convencionais como objectos de natureza diferente. Na versão modelo teórica, desenvolvida por Robinson, a distinção standard/não-standard é definível em termos clássicos. Standard são os elementos da estrutura dada e não-standard são os novos elementos da estrutura ampliada. A diferença entre as duas versões é, essencialmente, o facto de que na versão axiomática não há lugar a ampliações das estruturas clássicas, estas são definidas do modo habitual mas entre os seus elementos podem fazer-se distinções que até aí não eram possíveis.

Analisemos agora os benefícios da aplicação da análise não-standard. É um facto que, em muitos casos, a versão não standard de definições e resultados é mais clara do que a versão clássica o que faz com que o seu conteúdo intuitivo seja mais evidente. Comparemos, a título de exemplo, as definições clássica e não-standard de continuidade uniforme em $\mathbb{R}$ de uma função real de variável real standard.

$$\begin{array}{rrcl}(i) & \forall\delta & > & 0\exists\varepsilon > 0\forall x, y \in \mathbb{R}(|x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \delta \\ (ii) & \forall x, y & \in & \mathbb{R}(x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y)),\end{array}$$

onde $a \approx b$ significa que a e b estão infinitamente próximos, ou seja, que $a-b$ é um infinitésimal, isto é, que $\forall^{st} r \in \mathbb{R}(|a-b| < r)$. Por um lado é a definição não-standard que deixa evidente a ideia de continuidade (objectos próximos, imagens próximas). Por outro lado, comparando as duas definições, facilmente se constata que trabalhar com resultados que envolvam este conceito será mais simples com a definição não-standard do que com a definição clássica. Repare-se que na definição clássica temos a sucessão de quantificadores $\forall\exists\forall$, enquanto que na definição não-standard temos apenas $\forall$. A redução do número de quantificadores de três para um levou à redução da complexidade da fórmula. De facto, a experiência mostra que a tradução de um resultado para a forma não-standard reduz, em muitos casos, a complexidade da fórmula.

Os conhecimentos matemáticos necessários à manipulação de certos resultados na forma não-standard são inferiores aos necessários quando trabalhados classicamente. Em (Diener & Diener,1995) podemos ver de vários temas tratados de forma não-standard, e analisar a redução de pré-requisitos comparativamente aos classicamente necessários para o tratamento dos mesmos temas. Um exemplo deste facto encontra-se na teoria dos processos estocásticos em tempo contínuo que, classicamente, necessita de conhecimentos de matemática a nível pós-graduado (teoria da medida, processos estocásticos em tempo discreto). Ao dar novos fundamentos (finitos) à teoria das probabilidades, a análise não-standard proporcionou o estudo de processos estocásticos a todos aqueles que dominam análise ao nível dos três primeiros anos de licenciatura. (Nelson, 1987) (Van den Berg, 2000).

É também possível, e a exemplo do que já foi feito em Nice, Paris, Wisconsin (USA) e Lisboa, iniciar o estudo da análise matemática, numa licenciatura, com análise não-standard (nos dois últimos casos, os cursos foram baseados em (Keisler,1986)). De facto, e de acordo com o que já foi dito, como a análise não-standard reduz os pré-requisitos necessários ao tratamento de muitos temas, optar por iniciar o estudo da análise de forma não-standard deixa mais tempo para outros temas que, provavelmente não seriam abordados.

Apesar de todos estes "benefícios" muitos hesitam em usar os métodos fornecidos pela análise não-standard nos seus trabalhos.

Uma das razões poderá ser o facto de pensarem que a sua utilização envolve um conhecimento profundo de lógica e de fundamentos. De facto a análise não-standard desenvolvida por Robinson requer conhecimentos profundos de lógica, nomeadamente de teoria de modelos, mas IST veio reduzir em muito a lógica necessária à utilização dos métodos não-standard. Para trabalhar com IST é preciso apenas saber o que é uma fórmula bem formada e saber ler e utilizar um axioma. Talvez sejam estes os obstáculos de IST! É, de facto, possível trabalhar classicamente em Matemática sem saber explicitamente aplicar um axioma. Por exemplo, é usual um matemático clássico provar que dois conjuntos são iguais sem ter a consciência de que está a usar o axioma da extencionalidade. Podemos dizer que aqueles que conhecem bem a teoria dos conjuntos ZFC podem compará-la com a teoria não-standard IST e assim ficar a conhecer os fundamentos da análise não-standard. Aqueles que conhecem mal ZFC podem trabalhar de forma não-standard utilizando os seus pricípios lógicos *quase* como regras.

Outra razão que poderá levar muitos matemáticos a não utilizar a análise não-standard é o pensarem que esta põe em causa os métodos que sempre utilizaram e que por isso ao optarem por esta deverão abandoná-los. Mas, muito pelo contrário, a análise não-standard integra-se perfeitamente no meio de trabalho da matemática clássica fornecendo novas possibilidades que, juntamente com os métodos habituais, podem dar uma nova força ao trabalho de qualquer matemático.

Passemos ao conteúdo principal deste capítulo, onde vamos desenvolver uma intuição para os elementos fundamentais de IST, "standard", idealização, transferência e standardização. Antes porém, uma breve reconsideração. A análise não-standard é caracterizada pelo uso de apenas uma nova palavra, "standard". Um conjunto é standard ou é não-standard. O uso desta palavra não altera em nada os conjuntos usuais tais como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, nem outros conjuntos que possamos construir a partir destes, tais como o conjunto dos números pares ou o conjunto das funções reais contínuas. "Ser um número inteiro positivo" ou "ser um número real" continua a ter o seu significado usual.

Todo o objecto individualmente definido (classicamente) é standard. Assim, standard será tudo aquilo que é construível, concreto, observável. Se reflectirmos um pouco podemos concluir que, em qualquer etapa do discurso matemático, não haverá mais do que um número finito de objectos individualmente definidos. Assim, é-nos intuitivamente fácil de aceitar a existência de uma teoria que contém objectos não-standard. Basta pensar num conjunto infinito e no facto de não podermos definir individualmente cada um dos seus elementos, para concluirmos que este poderá ter elementos não-standard. Como podemos ler em (Diener & Reeb, 1989),

"Les entiers naifs ne remplissent pas $\mathbb{N}$".

Aceitamos a existência de números naturais não-standard (naturais "não-ingénuos"), pois $\mathbb{N}$ é infinto.

A forma como desenvolvemos uma intuição sobre a noção "standard" não é nova. Também em teoria de conjuntos as noções de conjunto e de relação de pertença não são definidas, e é usual recorrer a exemplos como o conjunto dos alunos de uma turma, para ajudar a desenvolver uma intuição sobre estas noções.

São os axiomas de idealização, transferência e standardização que nos dizem como vamos manipular o predicado standard. Faremos uma distinção, quanto à natureza, entre os novos axiomas de IST. Pensamos que o axioma de idealização é de natureza matemática, enquanto que os axiomas de transferência e standardização são formalizações de procedimentos da ciência, em particulas, estatísticos. Comecemos, então, por formar uma ideia intuitiva sobre o axioma de idealização. Observámos que um conjunto infinito deverá ter elementos não-standard. Não é possível construir tais elementos mas é impossível contrariar a sua existência (se o fizéssemos estaríamos a afirmar que ZFC não é consistente!). Então podemos postular a sua existência, é o que faz o axioma de idealização. Ao postular este princípio estamos, em certas condições, a criar objectos ideais e por isso estamos no domínio puramente matemático. Pensemos agora nos princípios de transferência e de standardização, sobre os quais podemos ter uma intuição mais concreta. Em certo sentido, o conhecimento que temos do universo é determinado pelo conhecimento daquilo que observamos. Mas, apesar de não observarmos tudo, tiramos conclusões, esta é a ideia do princípio de transferência. Sendo A uma fórmula interna temos,

$$\forall^{st} t_1 ... \forall^{st} t_k \left(\forall^{st} x \ A(x, t_1, ..., t_k) \Rightarrow \forall x \ A(x, t_1, ..., t_k)\right),$$

ou, por uma questão de simplicidade e para que possamos desenvolver uma intuição,

$$\forall^{st} x \ A(x) \Rightarrow \forall x \ A(x).$$

Podemos fazer uma comparação entre este princípio e a inferência estatística. Observa-se uma amostra, neste caso verificamos a validade da afirmação para os valores x "standard", e tiram-se conclusões para a população, neste caso conclui-se a validade para todos os valores x. Vejamos um exemplo, pretende-se fazer um estudo sobre os hábitos de leitura dos protugueses (propriedade A). Primeiro escolhe-se uma amostra que, como sabemos, terá que ser feito de modo a que esta seja representativa de toda a população portuguesa. Isto corresponde, no nosso caso, "à escolha" de valores x standard. Depois faz-se um inquérito a todos os indivíduos da amostra o que corresponde, no nosso caso, a verificar a validade da afirmação para os valores x standard. Por fim tiram-se conclusões para toda a população, ou seja, para os indivíduos escolhidos e não escolhidos.

Também podemos fazer uma analogia entre o princípio da standardização e um procedimento estatístico. Podemos dizer que o princípio da standardização garante que toda a hipótese pode ser testada dentro de cada população. Toda a hipótese, mesmo que seja vaga, que seja apenas uma tentativa. Ora, dada uma fórmula interna ou externa C, o princípio da standardização afirma que

$$\forall^{st} X \exists^{st} Y \forall^{st} z \quad (z \in Y \Leftrightarrow z \in X \ \wedge \ C(z)).$$

Assim, sendo C a hipótese, X a população e z cada indivíduo "observável", este princípio garante que é possível precisar o conjunto cujos indivíduos "observáveis" são os que satisfazem a hipótese C. Analisemos um exemplo. Num armazém de fruta um funcionário escolhe, de entre as peças de fruta de cada caixa (de cada conjunto X), aquelas que são "perfeitas" para serem vendidas, ficando as restantes para fazer sumos. Repare-se que a propriedade (C) "a peça de fruta ser perfeita" é vaga, até podemos dizer, subjectiva, pois hipoteticamente pode acontecer que a mesma peça de fruta seja considerada perfeita por um funcionário, e ser seleccionada para sumos por outro funcionário. Apesar disso a escolha é feita e no final temos o conjunto (Y) das peças de fruta "perfeitas" (z) de entre as peças de uma caixa. Ou seja, de cada caixa de fruta é possível construir o conjunto das peças que são "perfeitas".

Com a demonstração de que IST é uma extensão conservativa de ZFC ficamos a saber que, por um lado todos os teoremas clássicos continuam válidos e que não é necessário redemonstrá-los, por outro lado os novos resultados que são demonstrados com a ajuda dos novos axiomas de IST e que podem ser expressos em termos clássicos são, automaticamente, válidos.

Apresentada uma motivação para IST, cabe ao leitor aceitar ou não esta teoria. Não pode, no entanto, aceitar ZFC e contrariá-la pois trata-se de uma teoria relativamente consistente, conforme foi descrito, de duas formas diferentes, nos primeiros capítulos deste trabalho.

Bibliografia / Referências

Chang, C.C., Keisler, H.J.(1973). *Model theory.*
North-Holland Publishing Company.

Diener, F., Diener M.(1995). *Nonstandard analysis in pratice.* Springer.

Diener, F., Reeb G.(1989) *Analise non standard.*
Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts.

Keisler,H.J.(1986) *Elementary calculus.*Prindle, Weber & Schmidt

Levy, A.(1979) *Basic set theory.*
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Nelson, E.(1977). *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, Bulletin of American Mathematical Society,83,1165-1198.

Nelson, E.(1987). *Radically elementary probability theory.*
Princeton University Press.

Nelson, E.(1988). *The sintax of nonstandard analysis*,
Annals of Pure and Applied Logic, 38, 123-134.

Nelson, E. *The sintax of IST (Chapter 2).* Consultado em 07/2002:
www.mathprincetonedu/~nelson/books.html.

Machado, A.(1991). *Introdução à análise funcional.* Escolar Editora.

Mendelson, E.(1987). *Introduction to mathematical logic.*
The Wadsworth & Brooks/Cole mathematics series.

Oliveira, A.J.F.(1980). *Teoria de conjuntos intuitiva e axiomática (ZFC).* Livraria Escolar Editora.

Oliveira, A.J.F., Van den Berg, I.(A publicar). *Matemática não-standard, uma introdução com aplicações.*

Salanskis, J.M.(1999). *Le construtivisme non standard.* Press Universitaires du Septentrion.

Van den Berg, I.(2000). *Principles of Infinitesimal Stochastic and Financial Analysis.* World Scientific.