UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática para o Ensino

INTEGRAÇÃO DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES NO CONTEXTO DE UTILIZAÇÃO DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA (GEOGEBRA)

Ana Patrícia Rebola Gafanhoto

ORIENTADORA: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2010

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Mestrado em Matemática para o Ensino

INTEGRAÇÃO DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES NO CONTEXTO DE UTILIZAÇÃO DE UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA (GEOGEBRA)

Ana Patrícia Rebola Gafanhoto

ORIENTADORA: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2010

Resumo

O presente estudo tem como objectivo investigar de que modo os alunos utilizam as representações múltiplas na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções num contexto de trabalho com o *Geogebra*, *software* com inúmeras potencialidades que permite ao utilizador trabalhar com todas as formas de representação das Funções. Mais concretamente, a presente investigação procura responder às seguintes questões: Quais são as representações a que os alunos mais recorrem? Que factores influenciam a escolha da representação? Como é que os alunos conciliam as diferentes representações?

Neste estudo, as representações assumem um papel relevante na aprendizagem da Matemática, em particular no estudo das Funções. As representações, nesta investigação, foram encaradas não como uma finalidade de ensino e aprendizagem em si, mas como elementos essenciais para a compreensão do conceito de Função, sendo um importante recurso para a resolução das tarefas por parte dos alunos. Os alunos devem ter a possibilidade de contactar com situações que lhes permitam o contacto e utilização de diversas formas de representação, bem como com a sua conciliação e inter-relação. No estudo das Funções destacam-se quatro tipos de representação: numérica, tabular, gráfica e algébrica. Estas representações devem ser trabalhadas isoladamente e em combinação umas com as outras, ou seja, é importante recorrer a múltiplas representações no ensino e aprendizagem das Funções, tal como ao longo de toda a educação matemática dos alunos.

Este estudo, pelas suas características, objectivos e pela natureza dos resultados finais que se pretendem obter, é um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas. Importa fazer aqui referência ao caso em estudo, uma turma do 9º ano de escolaridade. A recolha de dados efectuou-se durante o ano lectivo 2009/2010, tendo-se baseado na observação participante com registo livre dos acontecimentos e na análise de documentos produzidos essencialmente pelos alunos, como as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de *Geogebra* correspondentes à resolução de cada uma destas.

A análise dos dados realizou-se em quatro fases diferentes. A primeira fase ocorreu durante a recolha de dados; numa segunda fase foram definidas categorias para análise posterior dos dados recolhidos, de acordo com a revisão de literatura; na terceira fase realizou-se uma análise de todos os dados recolhidos relativamente a todos os grupos e analisaram-se segundo as categorias definidas; e por último efectuou-se uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças formulando, por fim, conclusões.

Os resultados desta investigação apontam para uma predominância, por parte dos alunos, do recurso à representação gráfica. No entanto, também predominou o trabalho com múltiplas representações, mostrando ser uma mais valia na resolução das tarefas. Destaca-se essencialmente a conciliação entre a representação algébrica e a representação gráfica.

Palavras-Chave: Representações matemáticas, Tecnologias no Ensino da Matemática, Geogebra, Funções.

Integration of function's different representation in the context of using a dynamic geometry environment

Abstract

The main point of this study is to investigate how students can push the potentialities of *Geogebra* to their maximum. *Geogebra* is a *software* that allows us to work with all types of representations in the same environment, when talking about the representation of tasks resolution that implies the utilization of Functions. More concretely, this investigation has the intention to answer some questions: Which are the representations used more frequently by the students? Which are the factors that influence the representation's choice? How students can reconcile the difference between those representations?

In this study, the representations are very relevant for learning of Mathematics, particularly when studying Functions. The representations, in this investigation, weren't faced with teaching nor learning objectives, but instead, they are essentials for the understanding of Function's concept being an important resource for tasks' resolution by students, who should have the possibility to contact with situations that allow them for the use of different types of representation, such as its conciliation and inter-relation. In Functions' study, there are four highlighted types of representation: numerical, in table, graphic and algebraic. These representations should be studied separately and in combination with each other, it's important to resort to multiply representations with Functions when teaching and learning them, as in the rest of mathematical education.

This study, for its characteristics, objectives and for the kind of final results that are wanted, is a qualitative study in the modality of instrumental cases, with descriptive and analytic characteristics. Here it's important to make reference to the case of study, one class in the 9th grade of schollarity. The data gathering has been done during the school year of 2009/2010, and it's based in local observation with free record of the events and in the analyze of documents produced essentially by the students, as written tasks resolutions and *Geogebra*'s files corresponding to the resolution of those tasks.

The analyze of data was realized in four different stages. The first one occurred during the data gathering; in the second stage were defined categories for later data analyze, in agreement with literature revision; in the third stage all gathered data about all the groups were analyzed according to the defined categories; and at last, it has been done a crossed analyze to find similarities and differences, formulating conclusions in the end.

The final results of this investigation aim for a predominant use of the graphic representation, by the students. However, multiply representations have been used many times, showing that these can also be an important way for tasks resolution. It is detached, essentially, the conciliation between algebraic representation and graphic representation.

Key-words: Mathematical representations, Technologies on teaching mathematics, *Geogebra*, Functions.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pelo incentivo e exigência, pela disponibilidade e confiança manifestadas.

À Escola onde desenvolvi este trabalho, por me ter permitido a sua realização.

À minha colega e amiga Maria João pela colaboração e disponibilidade demonstradas.

Aos alunos que participaram neste estudo, pela simpatia com que me receberam, e sobretudo pela sua colaboração e disponibilidade.

Aos meus pais, por terem estado sempre presentes e me terem apoiado incondicionalmente.

À Susana pelas muitas palavras de incentivo e motivação, paciência e amizade incondicionais, e pelo apoio e colaboração manifestados ao longo da realização deste trabalho.

À Inês pela ajuda e disponibilidade manifestadas.

Índice

Índice de quadros

Índice de figuras

Capítulo I

Introdução

Problema e questões do estudo

As representações assumem um papel importante em toda a aprendizagem da Matemática. Elas são encaradas no processo ensino-aprendizagem como elementos essenciais para a compreensão de conceitos e de relações matemáticas; para a comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (NCTM, 2007).

É importante que os alunos compreendam que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e que adquiram a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra, estabelecendo desta forma relações entre diferentes ideias matemáticas sobre um tema, em particular no estudo das Funções, domínio da Matemática onde existe uma grande riqueza de representações.

As novas tecnologias vieram criar novas oportunidades de enfatizar o uso de múltiplas representações no ensino da Matemática. O uso de tecnologias é referido no actual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). Ao longo de todos os ciclos os alunos devem usar o computador na representação de informação, para exploração de situações, dado que os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção deve-se centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados (Ponte *et al.*, 2007). Em particular, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de funções e de geometria dinâmica (ME, 2001), que permitem conciliar as diferentes representações das Funções.

Tendo em conta o exposto acima, considerei pertinente desenvolver um estudo, no 9º ano de escolaridade, baseado nas diferentes formas de representação de Funções com recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*. Este *software* reúne ferramentas de álgebra, geometria e cálculo. Foi desenvolvido principalmente para o ensino e aprendizagem da Matemática ao nível do Ensino Básico e Secundário, por Markus Hohenwarter, na universidade americana Florida Atlantic University. Este *software* para além de ter uma versão portuguesa e de dispor de uma vasta combinação de ferramentas, apresenta uma outra mais valia para que se faça uso deste no processo ensino-aprendizagem nas escolas, que é o facto de ser de uso livre, ficando assim disponível para professores e alunos.

Este estudo tem como objectivo estudar as formas de representação utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas que envolvem conhecimentos relativos a Funções, quando estes dispõem de uma ferramenta, o *Geogebra*, com potencialidades de representação. Defini como questões orientadoras do estudo:

a) Quais são as representações a que os alunos mais recorrem?
b) Que factores influenciam a escolha da representação?
c) Como é que os alunos conciliam as diferentes representações?

Pertinência do estudo

Ao longo dos tempos tem-se registado grandes mudanças na sociedade, destacando-se o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, o que tem produzido efeitos nas questões educativas, nomeadamente no currículo de Matemática do Ensino Básico.

A nível nacional, e no que diz respeito às representações matemáticas, tem-se verificado uma crescente valorização destas nas orientações curriculares, tendo-se vindo a reconhecer a sua importância na aprendizagem da Matemática, uma vez que

> "A Matemática (…) É a "linguagem da ciência", proporcionando meios pelos quais o mundo à nossa volta pode ser representado e compreendido. As representações matemáticas que os alunos (…) aprendem fornecem-lhes oportunidades de compreender o poder e a beleza da Matemática, apetrechando-os de modo a poderem usar as representações nas suas vidas pessoais, no seu local de trabalho e em estudos futuros." (NCTM, 2007, p. 427)

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 1990 estava definida como finalidade do ensino da Matemática a interpretação e utilização de representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, símbolos…) e tinha-se como objectivo, ao nível do estudo das Funções, que os alunos representassem e analisassem Funções utilizando tabelas, gráficos ou outros tipos de representações.

No *Currículo Nacional do Ensino Básico* é feita referência de forma generalizada ao uso de representações no ensino da Matemática e em particular à sua utilização no domínio da Álgebra e das Funções, incluindo "[a] aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos" (ME, 2001, p.66).

No entanto, apesar dos normativos curriculares que prescrevem o ensino da Matemática referirem a importância das representações, a tradição do ensino das Funções tem tido tendência a sobrevalorizar as representações algébricas, que possuem maior grau de formalização mas também de opacidade para os alunos, e a explorar pouco as mais valias das outras formas de representação.

Assim, no recente Programa de Matemática do Ensino Básico, de 2007, existe uma preocupação em revalorizar a importância do uso de representações múltiplas, sendo que um dos nove objectivos centrais do ensino da Matemática é precisamente (Ponte *et al.*, 2007, p.5):

> "3. Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas *representações*. Isto é, devem ser capazes de:
>
> - ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
> - traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
> - elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
> - usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais."

Neste documento é referido que os alunos devem conhecer e trabalhar com diferentes formas de representação, serem capazes de passar de uma forma para outra e escolher a representação mais adequada perante uma situação concreta. O percurso de aprendizagem deve ter início na criação de representações pessoais e progressivamente ir-se integrando as representações convencionais, dada a necessidade de uma linguagem partilhada.

Nas últimas décadas ocorreram novos desenvolvimentos culturais e sociais resultantes em grande parte da introdução das tecnologias da informação e comunicação na sociedade contemporânea.

O desenvolvimento da tecnologia e a requalificação das escolas a nível tecnológico são factores também a ter em conta nas metodologias adoptadas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Nomeadamente, os *softwares* de geometria dinâmica, quando potenciado o seu carácter dinâmico, permitem a realização de actividades de construção do conhecimento matemático, pois trata-se de instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas actividades de exploração, investigação e descoberta em Matemática (Gorgulho, 2005).

Dada a importância das representações e o recurso a instrumentos tecnológicos na área da educação matemática, tanto a nível da investigação internacional como nacional, e tendo em conta as orientações curriculares, é pertinente desenvolver um estudo que contribua de alguma forma para aumentar o conhecimento sobre o referido assunto e, ao mesmo tempo contribuir de forma inovadora para práticas pedagógicas no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática.

A presente investigação encontra-se estruturada em cinco capítulos. No presente capítulo são apresentadas algumas motivações pessoais que deram origem ao presente estudo, o objectivo e as questões orientadoras do estudo, bem como a sua pertinência. No segundo capítulo é feita a revisão da literatura que sustentou teoricamente esta investigação. O terceiro capítulo é dedicado à definição dos aspectos metodológicos essenciais que orientaram este estudo. No quarto capítulo é apresentado o estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didáctica e, no último capítulo, apresentam-se as conclusões da investigação.

Capítulo II

Revisão de Literatura

Neste capítulo apresenta-se a revisão de literatura que constitui o fundamento teórico desta investigação. A revisão de literatura foi estruturada em três partes: o computador e os AGD'S no ensino da Matemática; o ensino e aprendizagem de Funções; e as representações matemáticas.

As três principais temáticas desenvolvidas neste capítulo seguem todas a mesma estrutura. Relativamente a cada uma das temáticas começa-se por apresentar algumas concepções oriundas de trabalhos de investigação já realizados no âmbito de cada uma das temáticas, tanto a nível internacional como nacional. Como a evolução curricular é directamente influenciada pelos trabalhos de investigação realizados então segue o ponto anterior a apresentação da evolução curricular de cada uma das temáticas abordadas.

No primeiro ponto deste capítulo, *O computador e os AGD'S no ensino da Matemática*, serão, primeiramente, apresentadas algumas concepções sobre o uso do computador no ensino da Matemática e enfatizadas as concepções referentes ao recurso a AGD'S. De seguida apresentar-se-á uma análise das referências curriculares relativamente ao uso do computador no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e o uso de AGD'S.

Na segunda parte, *O ensino e aprendizagem de Funções*, será feita referência a investigações realizadas desenvolvendo-se os seguintes subtemas: evolução do conceito de função; processo ensino-aprendizagem das Funções; representações do conceito de função e tecnologias no ensino e aprendizagem de Funções, e posteriormente será efectuada uma abordagem curricular do tema, baseando-se em documentos de referência internacional e nacional.

Na última parte, *As representações matemáticas*, serão clarificados alguns conceitos relativos às representações matemáticas, onde serão apresentados e descritos diferentes tipos de representação, com base em algumas investigações já realizadas e em seguida procurar-se-á apresentar a evolução, a nível curricular, das representações matemáticas em documentos de orientação curricular de referência internacional e nacional.

O computador e os Ambientes de Geometria Dinâmica no ensino da Matemática

São várias as referências efectuadas à necessidade do uso das tecnologias no ensino da Matemática, desde as orientações metodológicas até às investigações efectuadas na área.

As tecnologias surgem como ferramentas essenciais ao ensino e aprendizagem da Matemática, isto é, que melhoram a aprendizagem da Matemática, que apoiam o ensino da Matemática, que influenciam a Matemática que é ensinada. Segundo Ponte (1995), o uso das TIC tem por efeito i) relativizar o cálculo e a manipulação simbólica; ii) reforçar a importância da linguagem gráfica e novas formas de representação; iii) facilitar uma ênfase por parte do professor nas capacidades de ordem superior, e iv) valorizar as possibilidades de realização, na sala de aula, de projectos e actividades de modelação, exploração e investigação. Desta forma, as novas tecnologias proporcionarão aos alunos muitas oportunidades, destacando-se: a exploração de problemas e conceitos matemáticos complexos, a execução de procedimentos rotineiros de forma mais rápida e precisa, deixando-os mais disponíveis para as tomadas de decisões, para a reflexão e raciocínio, e a análise de mais exemplos ou formas de representação, do que é possível manualmente, de modo a formularem e a explorarem conjecturas de forma mais fácil. Os alunos com dificuldades em procedimentos básicos poderão desenvolver e demonstrar outros conhecimentos matemáticos que, por sua vez, poderão conduzir à aprendizagem desses procedimentos (NCTM, 2007).

Tendo em conta as mais-valias apresentadas para o uso das tecnologias no ensino da Matemática, e para que assim seja, o professor deve fazer uso delas de forma criativa na realização das mais diversas actividades e de forma correcta. Pois, como qualquer outra ferramenta de ensino, podem ser usadas de forma adequada ou ineficaz. Os professores deverão usar a tecnologia para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos seus alunos, através da selecção ou da criação de tarefas matemáticas que tirem proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correcta e eficiente – construção de gráficos, visualização e cálculo (NCTM, 2007). No entanto, é preciso ter atenção se a sua utilização não é feita de forma desmesurada ou mesmo imprópria, ou seja, fazendo uso da tecnologia meramente instrumental, por exemplo, em cálculos imediatos e em substituição do cálculo mental. Para que isso não aconteça cabe ao professor fazer a selecção e a utilização de materiais de ensino, de ferramentas e técnicas didácticas adequados. Desta forma, o professor não se pode limitar a aprender a usar a calculadora, ou o computador ou um *software* educativo, tem de encontrar formas produtivas e viáveis de integrar as tecnologias no processo ensino-aprendizagem, no quadro dos currículos actuais e dentro dos condicionalismos existentes em cada escola. O professor tem de ser explorador capaz de perceber o que lhe pode interessar e de aprender, tirando partido das potencialidades tecnológicas (NCTM, 2007).

Investigação educacional sobre o computador e os Ambientes de Geometria Dinâmica no Ensino da Matemática

O desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico constitui uma das características mais marcantes da sociedade do século XX.

A investigação em Educação Matemática reconhece que a interactividade e dinamicidade que as tecnologias trouxeram, nomeadamente o computador, influenciaram as perspectivas sobre a forma como o ensino e aprendizagem de alguns conceitos podem ser vistos. As novas tecnologias são ferramentas que, não apenas simplificam os cálculos mas também a visualização de gráficos, de esquemas e de representações matemáticas, contribuíram para mudar a própria natureza dos problemas que são importantes na Matemática e os métodos que os matemáticos utilizam para os investigar (NCTM, 1991).

Amado e Carreira (2008), sublinham que as tecnologias surgiram para minimizar o trabalho mais rotineiro, mais monótono, mais repetitivo e até pouco interessante, permitindo, por sua vez, investir em conhecimentos e capacidades de nível superior, tais como saber interpretar um gráfico, fazer conjecturas, ser capaz de relacionar conceitos e utilizá-los, saber analisar criticamente os resultados obtidos, investigar, ser versátil em representações matemáticas diversas.

Segundo Canavarro (1994), o computador possui características muito próprias e especiais que fazem dele uma ferramenta poderosíssima para concretizar as actuais orientações gerais do ensino da Matemática. A destacar, por um lado, as possibilidades que oferece para a realização pelos alunos de determinadas actividades matemáticas (por exemplo, actividades investigativas ou exploratórias, actividades de modelação, aplicações realísticas da Matemática à realidade ou a outras ciências, resolução de determinados problemas, trabalho de projecto), e por outro lado, o ambiente de trabalho que suscita, incentivando o trabalho colaborativo entre alunos, aumentando as oportunidades de discussão e comunicação, contribuindo para o desenvolvimento do espírito crítico.

O uso das tecnologias em ambiente de sala de aula atribuiu ao aluno um papel mais activo na construção do seu saber e do saber partilhado na sala de aula, influenciando também as concepções dos alunos sobre a disciplina e sobre o papel que atribuem às ferramentas tecnológicas.

Numa aula com recurso às tecnologias existe um aumento da curiosidade e entusiasmo dos alunos, leva a que haja uma maior quantidade de exemplos e contra-exemplos, num menor espaço de tempo. Os alunos são encorajados a observar e a conjecturar, há a possibilidade de trabalharem com múltiplas representações, de desenvolverem atitudes positivas relativamente à aula de Matemática e uma redução da ansiedade e do medo de cometer erros. Os benefícios ou não dados pelas tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática dependem da forma como são utilizadas pelos professores.

Galbraith (2002) e Goos (2005) desenvolveram uma taxonomia para a utilização das tecnologias pelos professores de Matemática.

Num primeiro nível o uso da tecnologia não é feito por vontade e iniciativa do professor, mas é uma implementação que surge de uma imposição do sistema educativo, estando-se perante uma acção *dominadora* (*technology as master)* das tecnologias sobre as práticas do professor.

Num segundo nível de utilização, já não predomina a imposição ou exortação para a utilização das tecnologias, já existe por parte do professor atenção e interesse pelos avanços da tecnologia, procura conhecê-los e utilizá-los. Contudo não existe qualquer mudança nas actividades na sala de aula. Galbraith (2002) e Goo (2005) consideram que esta é uma utilização da tecnologia como uma *serva (technology as servant).*

Estas duas perspectivas não introduzem uma alteração profunda nas actividades na sala de aula nem permitem ao aluno um contacto directo com as ferramentas. Os alunos, são meros observadores dos recursos tecnológicos, embora possam considerar que a aula se tornou mais colorida, mais moderna, com uns adereços fora do tradicional. Ao nível das aprendizagens não há nada de novo – o papel do professor e do aluno no processo de ensino-aprendizagem não se alteram.

Para Galbraith (2002) e Goos (2005) a *parceria (technology as partner)* é uma outra forma de utilização das tecnologias, ocorrendo quando as tecnologias são usadas pontualmente na sala de aula pelo professor e pelos alunos, permitindo-lhes alcançar algum conhecimento que de outra forma seria muito difícil, ou mesmo impossível. Neste caso os professores desenvolvem uma relação de parceria com as tecnologias, como ferramenta para ajudar a resolver problemas e actividades e como meio de promover aprendizagens. É aqui que reside a grande questão – na natureza das tarefas e na forma como elas são apresentadas aos alunos. Estas devem permitir ao aluno ensaiar, investigar e tirar conclusões. Os professores devem estar conscientes de que não podem enxertar as tecnologias no seu ensino tradicional ou recorrer às tecnologias para resolver exercícios de treino que se resolvem com papel e lápis.

Por último, estes autores designam a forma de utilizar as tecnologias por *extensão de si próprio (tchnology as na extension of self),* aquela em que o professor integra as tecnologias na sua actividade de forma criativa e eficaz, a par da sua competência pedagógica e do seu conhecimento de Matemática. Neste caso, é muito importante, o facto de saber colocar as tecnologias ao serviço da aprendizagem dos seus alunos e promover a sua capacidade de as utilizarem de forma oportuna, inteligente e crítica.

Nestes dois últimos patamares há uma interacção professor-tecnologia e alunos-tecnologia.

Ao longo dos tempos têm sido desenvolvidos trabalhos de investigação que evidenciam a necessidade e os benefícios que a utilização de *software* traz para o ensino e aprendizagem da Matemática. O recurso a *softwares* contribui de forma significativa para: a compreensão dos conceitos, a exploração de diversas representações e de as relacionar, a investigação de propriedades e de relações matemáticas, os processos de natureza indutiva e experimental, a generalização e os processos argumentativos e a modelação, entre outros (NCTM, 2007).

No que se refere às questões relacionadas com a aprendizagem, pode-se de uma forma simplista considerar que os *softwares* educativos se situam entre um paradigma behaviorista e um paradigma construtivista. Esta classificação não deve ser encarada numa perspectiva fechada, mas antes como um contínuo onde um *software* pode apresentar características mais próximas de um pólo ou de outro. Assim sendo, os programas que usam o computador como uma ferramenta situam-se mais próximos de um paradigma construtivista. Neste contínuo pode considerar-se para além destes dois paradigmas outros paradigmas como o cognitivismo e o construtivismo social, dado que não se pode separar o *software* de quem o utiliza, o professor e o aluno, e do contexto social em que se faz.

É enorme a variedade de *softwares* disponíveis, sendo cada um deles caracterizado pelas suas potencialidades para trabalhar os conceitos matemáticos. Neste estudo destaca-se os *softwares* denominados por Ambientes de Geometria Dinêmica (AGD'S), uma vez que é o tipo de *software* que é a base do mesmo.

Pimenta (2007) define como AGD'S o ambiente de trabalho de um programa de geometria dinâmica, considerando como geometria dinâmica o estudo da geometria através do movimento de figuras geométricas. A possibilidade de movimentar figuras, ou seja, a dinâmica supera o que as imagens estáticas permitem visualizar, já que, quando se movem determinados elementos de uma construção, todos os outros se ajustam automaticamente, preservando todas as relações de dependência e as condições da construção inicial. Esta característica faz com que os alunos considerem a construção não como um desenho estático, mas como um conjunto de objectos ligados pelas suas relações geométricas, que podem ser visualizadas como permanecendo invariantes sob o arrastamento (Carvalho *et al.*, 2009).

Os *softwares* de geometria dinâmica favorecem essa interacção, ao colocar à disposição do professor e do aluno ferramentas que permitem criar rigorosamente qualquer construção com régua e compasso da geometria euclidiana, podendo ser utilizados como um processo de visualização no ensino da Matemática, em geral, e da Geometria, em particular. Este tipo de *software* proporciona a exploração e a descoberta. Os alunos podem construir, rever, modificar as suas construções geométricas e testar as suas ideias matemáticas e conjecturas e envolverem-se na sua própria aprendizagem (King & Schattschneider, 2003).

Segundo Coelho e Saraiva (2002), os AGD'S funcionam como "espelhos intelectuais" onde os alunos podem, devido ao *feedback* visual devolvido pela manipulação dos desenhos no ecrã do computador, experimentar as suas ideias através da manipulação das construções, verificar propriedades e relações e garantir a legitimidade de uma construção.

Segundo Laborde (2001), os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD'S) podem assumir quatro papéis diferentes quando são utilizados na sala de aula: a) facilitador da apresentação da tarefa; b) facilitador da resolução da tarefa matemática; c) modificador das tarefas dadas; e d) potenciador de tarefas que só podem existir devido ao próprio programa.

Dadas as características apresentadas anteriormente deste tipo de *software*, importa agora indicar sistematicamente as vantagens deste tipo de *software*, que são várias. Desde a sua fácil utilização à possibilidade de permitirem uma abordagem dos conceitos assente na descoberta e na exploração, desde o encorajamento à criatividade e ao processo de descoberta, onde os alunos visualizam, analisam, fazem conjecturas e até demonstram, até ao aprofundamento do conhecimento e do desenvolvimento do trabalho cooperativo e da resolução de problemas. Em suma, este tipo de *software* permite trabalhar e compreender a Matemática de uma forma que não é possível com as tradicionais ferramentas, como o papel e o lápis.

Os AGD'S, aparentemente, são de fácil integração nas práticas dos professores e articulam-se com relativa facilidade com as orientações programáticas dos vários níveis de escolaridade, porém num inquérito efectuado pelo grupo de Trabalho e Geometria (GTG) da Associação de Professores de Matemática (APM) no *ProfMat2001*, dos 228 professores que responderam, cerca de 75% já tinham frequentado acções de formação sobre este tipo de programas. Destes, só 34% utilizou algum tipo de *software* nas suas aulas de geometria no ano lectivo anterior (2000/01), o que revela a dificuldade que tem existido na introdução deste tipo de programas na sala de aula (Veloso & Candeias, 2003).

Para além dos *softwares* de geometria dinâmica já conhecidos, como o *Cabri-Géomètre* ou o *The Geometer's Sketchpad*, surgiu recentemente o *Geogebra*, que possibilita o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico e é de utilização livre. Este *software* apresenta todas as características de um AGD e ainda ferramentas do domínio algébrico. É o *software* a utilizar no presente estudo.

O computador e os Ambientes de Geometria Dinâmica nos currículos de Matemática

Nos anos 60 foram feitas as primeiras referências à utilização do computador, através do *Ensino Assistido por Computador*, onde o computador desempenhava as funções de um professor electrónico que transmita aos alunos conhecimentos matemáticos pré-definidos, proporcionando o desenvolvimento de destrezas básicas.

Os anos 80, em Portugal, foram anos de desenvolvimento de projectos com vista a uma reforma curricular, em que é feita uma valorização das capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação e, há um reconhecimento das potencialidades dos computadores enquanto ferramentas ao serviço do desenvolvimento destes novos objectivos. Entre 1985 e 1994, desenvolveu-se o projecto MINERVA que tinha como objectivos: a) a integração das tecnologias da informação, nomeadamente o computador, nos planos curriculares, (b) o uso das tecnologias de informação como meios auxiliares do ensino das outras disciplinas escolares, e (c) a formação de orientadores, formadores e professores (Ponte, 1994).

Em Abril de 1988, a APM promove um seminário sobre a renovação curricular em Matemática, onde um dos temas em discussão foi o "currículo de Matemática e as novas tecnologias".

Desenvolveu-se um outro projecto, em Portugal, designado Projecto MAT_{789}. Este foi um projecto de inovação curricular para os níveis escolares 7-9 cujo propósito foi o desenvolvimento de um programa de Matemática em duas turmas experimentais ao longo do triénio 1988-91 e em outras duas ao longo do triénio 1989-92. Este projecto tinha como objectivo conceber e experimentar um currículo de Matemática para os 7º, 8º e 9º anos de escolaridade que seria centrado na resolução de problemas, orientado para os processos e para os conceitos, e apoiado na utilização extensiva dos computadores e das calculadoras. A partir deste projecto, afirmou-se que ainda, deveria ser proporcionada aos alunos uma experiência real e variada da utilização do computador. Em caso algum se deveria procurar a utilização do computador como mera motivação para tarefas que do mesmo modo poderiam ser realizadas sem computador. No entanto, era encorajada a utilização do computador sempre que as actividades o justificassem (Abrantes *et al.*,1997).

Em 1991 foram publicados os programas dos 2º e 3º ciclos do ensino básico. No programa para o 3º Ciclo do Ensino Básico, de 1991, pode ler-se no âmbito dos objectivos gerais – capacidades/aptidões, que os alunos deverão: "utilizar adequadamente a calculadora, e sempre que possível meios informáticos tirando partido das suas potencialidades" (p.11).

Segundo Veloso (1998, p. 91), "não é admissível que, durante mais tempo, a educação matemática em Portugal esteja privada da utilização de computadores e do *software* que hoje existe dedicado ao ensino de tópicos importantes do currículo de Matemática", uma vez que estes "contribuem para tornar a aprendizagem dos programas fácil e intuitiva", para aumentar o tipo de aplicações educacionais e "para dar à sua utilização um carácter dinâmico próprio, que os torna instrumentos poderosos na resolução de problemas e nas actividades de exploração, investigação e descoberta em geometria e na Matemática em geral".

É no *Currículo Nacional do Ensino Básico*, de 2001, que se faz explicitamente referência ao uso das tecnologias na aprendizagem da Matemática, nomeadamente o computador:

> "Quanto ao computador, os alunos devem ter oportunidade de trabalhar com a folha de cálculo e com diversos programas educativos, nomeadamente de gráficos de Funções e de geometria dinâmica, assim como de utilizar as capacidades educativas da rede Internet. Entre os contextos possíveis incluem-se a resolução de problemas, as actividades de investigação e os projectos." (ME, 2001)

O Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007, apresenta uma evolução positiva em comparação com as orientações anteriores, uma vez que é sugerida a forma de com deve ser feito o uso dos recursos tecnológicos. Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. A calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental (Ponte *et al.*, 2007).

Neste novo programa é ainda feita referência à utilização de AGD'S ao contrário do que acontecia no programa anterior de 1991:

> "Os alunos devem recorrer a *software* de Geometria Dinâmica, sobretudo na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Os materiais manipuláveis (por exemplo, tangram, peças poligonais encaixáveis e sólidos de enchimento em acrílico) constituem recursos cuja utilização complementa a abordagem dinâmica ao estudo da Geometria. Tanto os recursos computacionais como os modelos geométricos concretos permitem desenvolver a intuição geométrica, a capacidade de visualização e uma relação mais afectiva com a Matemática" (Ponte *et al.*, 2007).

Contudo, já no *Currículo Nacional do Ensino Básico*, de 2001, era feita referência ao desenvolvimento da capacidade dos alunos utilizarem *softwares*: "aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* geométrico" (ME, 2001).

Para que a tecnologia se torne uma parte essencial das aulas, as ferramentas tecnológicas deverão ser seleccionadas e utilizadas de forma compatível com os objectivos do ensino.

O uso das novas tecnologias na escola é defendido não só porque permite aos alunos usarem as ferramentas correntes na sociedade em geral, mas também porque os torna capazes de se envolverem activamente na exploração das ideias matemáticas (Ribeiro & Ponte, 2000).

O ensino e aprendizagem de Funções

De início importa definir o conceito de Função e posteriormente fazer referência a investigações no âmbito do ensino e aprendizagem deste conceito.

O conceito de Função não é um conceito recente, para se encontrar as suas origens tem que se recuar cerca de 4000 anos, quando os povos primitivos estabeleciam uma correspondência entre um conjunto de pedras ou de entalhes num osso e os animais de um rebanho, visando o controlo do rebanho. Desta forma, poderia encarar-se a existência de uma relação de dependência entre as duas entidades (as pedras e os animais) como uma relação funcional.

Na antiguidade, os babilónios construíram tabelas de argila, onde faziam corresponder a cada valor da primeira coluna um número da segunda, o qual resultava da multiplicação do número da primeira por uma constante. Semelhante aos babilónios, também os egípcios construíram tabelas, na maioria das vezes em papiros, que segundo Boyer (1974) era onde apresentavam os resultados de investigações empíricas ou generalizações que resultavam da indução incompleta de casos mais simples para casos mais complexos.

O método de formação dos intervalos da teoria musical árabe reveste-se de um carácter algébrico, quando estes partiram do comprimento da corda do som fundamental e assim desenvolveram relações algébricas para calcularem os comprimentos correspondentes aos harmónicos do som fundamental, a música seria assim a representação de uma função sob forma explícita ou implícita.

Na cultura grega poder-se-á fazer referência ao contributo de Ptolomeu, com a obra *Almagesto*, onde desenvolveu algumas ideias funcionais. Ptolomeu trabalhou na área da astronomia onde desenvolveu ferramentas matemáticas, entre elas destaca-se a trigonometria. No seu trabalho utilizou tabelas que envolviam a função da corda do *arco x*, ou *crd x*, mas sem ter feito referência à palavra função.

Na Idade Média, Nicole Oresme (1323 – 1382), segundo Boyer (1974), na sua obra *Tractatus de Ltitudinibus Formarum* desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes das formas, que pode ser considerada como a precursora da representação gráfica de função. O seu principal objectivo era representar a intensidade de uma característica de um determinado assunto por meio de segmentos. Permitindo, assim uma compreensão mais rápida e fácil da natureza das mudanças. Apesar de Oresme nunca ter utilizado o conceito de função, as suas representações não deixaram de ser um marco importante para o desenvolvimento do conceito de função e de variável dependente.

Galileu-Galilei (1564 – 1642) contribuiu bastante para a evolução do conceito de função. Segundo Mendes (1994), foi a partir dos seus trabalhos baseados na experimentação e observação em relação ao movimento e, consequentemente, à velocidade, à aceleração e à distância percorrida, os quais realizados de forma quantitativa, que este autor relaciona de forma funcional as causas e efeitos (as variáveis), contribuindo assim para o desenvolvimento da concepção de variável dependente. Ainda assim ele não utilizou formalmente a palavra função.

É no século XVII, baseados na nova álgebra de Viète, que René Descartes (1596 – 1650) e Pierre Fermat (1601 – 1665) desenvolveram os seus trabalhos separadamente onde apresentaram as bases teóricas da geometria analítica. Descartes, pela primeira vez estabeleceu que uma equação de duas variáveis, representada geometricamente por uma curva, mostrava a uma relação de dependência funcional entre quantidades variáveis, pois conhecendo-se uma delas é possível determinar o valor da outra. Admite-se que Descartes chegou a definir função como qualquer potência de x, tal como x^2, x^3,… (Costa 2004).

Até aqui pode considerar-se que historicamente está-se perante uma manifestação implícita do conceito de função. As principais razões para este não ter emergido antes estavam relacionadas com a falta de pré-requisitos algébricos, o advento dos números reais como um continuo e o desenvolvimento da notação simbólica, e alguma falta de motivação pois não fazia sentido definir uma noção abstracta de função sem que houvesse uma quantidade de exemplos para abstrair (Mendes, 1994). No entanto, surgiram os desenvolvimentos necessários para o aparecimento do conceito de função: a extensão do conceito de número abarcando os reais e até mesmo os complexos, a criação da álgebra simbólica, o estudo dos movimentos como um problema central da ciência, e o casamento entre a Álgebra e a Geometria. O século XVII testemunha assim o aparecimento de uma ciência moderna matematizada e a invenção da geometria analítica.

Na fusão entre a Álgebra e a Geometria os elementos chave foram a introdução de variáveis e a expressão da relação entre variáveis por meio de equações. Nesta fase faltava apenas a identificação das variáveis independente e dependente na equação.

É com Isaac Newton (1642 – 1727) que surge o conceito de variável independente. No entanto, é Leibniz (1646 – 1716) que utiliza pela primeira vez a palavra função, mas com significado puramente geométrico, ou seja, uma função era os segmentos de recta que se obtinham a partir de rectas correspondentes a pontos fixos ou a pontos de uma dada curva (Mendes 1994; Costa 2004).

Jean Bernoulli (1694 – 1698) numa carta dirigida a Leibniz, propõe-lhe a seguinte definição de função: "Chama-se aqui função de uma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza e de constantes" (Boyer, 1974, p.35)

Todavia, na sua definição, Bernoulli não indica o modo como construir uma função a partir da variável independente, isto é, não especificou o significado de "composta de qualquer maneira".

Leonard Euler (1707 – 1783), discípulo de Bernoulloi, foi um marco importante para o desenvolvimento do conceito de função. Na sua obra *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748, substitui "quantidades" por "expressões analíticas e apresenta também a notação *f(x)* para representar uma função de x, definindo a como: "Uma função de uma grandeza variável é uma expressão analítica composta, da maneira que se quiser, por essa grandeza variável e números ou quantidades constantes" (Boyer, 1974, p.36).

Euler fez ainda a distinção entre funções contínuas e descontínuas, sendo as primeiras formadas por uma única expressão analítica, enquanto que se a lei mudasse em qualquer intervalo do domínio a função passaria a ser descontínua ou mista.

Durante o século XVIII o conceito de função sofreu várias reformulações e reavaliações, sem no entanto haver a preocupação com a fundamentação levando há existência de várias contradições e absurdos. Por isso, foi necessário examinar as bases e dar uma fundamentação rigorosa, para que assim a ideia de função fosse definida de forma clara e concisa. Benhard Bolzano (1781 – 1848) e Augustin Cauchy (1789 – 1857) foram dois dos matemáticos envolvidos nesta reorganização do conceito de função, tendo Cauchy em 1821 dado a seguinte definição de função: quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar as demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de função dessa variável (Boyer, 1974).

Baseado nas ideias de Cauchy, Dirichlet (1805 – 1859) estabelece-as com mais rigor e destaca-se ao estabelecer o conceito de função com base numa correspondência arbitrária através da função de Dirichlet representada por:

$$D(x) = \begin{cases} c, & \text{se x racional} \\ d, & \text{se x irracional} \end{cases} \quad , \text{ com } c \neq d$$

Assim, Dirichlet define uma função do seguinte modo:

> “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x” (Boyer, 1974, p.405).

Esta definição já se encontra muito próxima da definição actual, ou seja, uma função é uma correspondência unívoca entre dois conjuntos, podendo essa correspondência ser arbitrária.

Cooney e Wilson (1993) referem que, com o desenvolvimento actual do conceito de conjunto, as discussões sobre funções deixaram de estar centradas em torno da função como correspondência para se centrarem em torno da função como um conjunto de pares ordenados. Esta perspectiva, inicialmente apresentada em 1939, é usualmente referida pela *aproximação de Bourbaki*, e define-se função do seguinte modo: “Para todo (x,y) e (u,v) $\in$ AxB, se quando x=u, se segue y=v, então AxB é chamada uma função”(Apostol, 1986, p.43).

Processo ensino-aprendizagem das Funções

Após análise da evolução do conceito de função, parece não ser fácil aos alunos a sua interiorização (Sfard, 1992; Sierpinska, 1992). É frequente que os alunos tomem contacto com o conceito de função através da aproximação de Bourbaki (pares ordenados) ou através de uma versão da definição de Dirichelet (correspondência). Vinner (1992) sugere que existe um conflito inevitável entre a estrutura do pensamento matemático e a aquisição do conceito. Este conflito faz com que muitas vezes os alunos invoquem as suas concepções de função e não a imagem mental do conceito de função (*concept image*), que no entender de Tall (1992), Vinner (1992) e Selden e Selden (1992) são moldadas pelas experiências do dia a dia dos alunos. Segundo Vinner (1992) a forma como o conceito é abordado nos vários currículos pressupõe que, no processo da sua formação, a definição pode assumir e modelar o conceito imagem, pelo que a forma como ela é ensinada é através do conceito função. No entanto, as representações visuais são a primeira coisa a ser invocada na nossa mente quando falamos de um dado conceito e as formas verbais podem aparecer só num estado posterior. Contudo, muitas vezes o conceito imagem é inteiramente modelado por alguns exemplos e não se adapta ao conceito definição, o que poderá trazer algumas dificuldades na compreensão dos conceitos.

De acordo com Sfard (1989), a maioria das noções matemáticas podem ser concebidas de duas formas distintas: como construtos estáticos (concepção estrutural) ou como processos (concepção operacional). Um conceito é entendido de uma forma operacional quando alguém vê uma determinada noção como um processo e não como um objecto. Num entendimento estrutural, uma noção é entendida como um objecto abstracto. Estas duas abordagens parecem incompatíveis, no entanto, Sfard, considera-as complementares. Segundo Sfard, no processo de formação dos conceitos, a concepção operacional é, muitas vezes, a primeira a desenvolvida.

As Funções podem ser encaradas como objectos ou entidades, ou seja, podem ser elementos de conjuntos sobre os quais se podem exercer acções e assim serem transformados. Segundo este ponto de vista, os objectos são referidos como entidades totais ou entidades conceptuais. O mecanismo cognitivo de formação de objectos é referido como encapsulação, entificcação ou reificação (reflexão abstracta) (Sfard, 1992). A reificação é a fase final da formação estrutural de um conceito matemático que, ao contrário de outras etapas em que o processo de interiorização e condensação é feito de uma forma cumulativa, representa um salto qualitativo (o AH!) em que se tem a possibilidade de ver uma coisa familiar (um processo) como algo inteiramente novo (um objecto). Assim, os objectos abstractos que surgem da reificação fornecem uma eficiência cognitiva, isto é uma grande quantidade de informação é armazenada numa única entidade, resultando num menor esforço cognitivo e numa maior eficácia na resolução de problemas.

A abordagem operacional é indispensável na procura de respostas às questões matemáticas, porém é a abordagem estrutural que transforma a informação recebida operacionalmente em unidades mais compactas que facilitam e diminuem o esforço cognitivo.

Esta forma de abordar os conceitos acrescenta dois princípios didácticos: a) os novos conceitos não devem ser introduzidos em termos estruturais, isto é, a abordagem operacional deverá preceder a estrutural, dado que esta última é mais abstracta; b) a concepção estrutural não deve ser requerida para além daquilo que os alunos possam fazer sem ela, dado que uma abordagem estrutural só é factor de motivação aquando da passagem para um estádio superior. No caso das Funções, a forma como elas aparecem no contexto de cálculo básico, os alunos podem utilizar apenas uma concepção operacional do conceito. A visão das Funções como objecto só é necessária quando os problemas a serem resolvidos envolvem a manipulação de várias Funções em simultâneo e, assim cada uma delas deve ser tratada como um todo, portanto de uma forma mais estrutural (Sfard, 1989, 1992).

Para Dubinsky e Harel (1992), as Funções também podem ser entendidas como "acção" ou "processo". É entendido por "acção" o acto mental que envolve a manipulação de objectos. Esta concepção de função é evidenciada quando um aluno substitui, numa expressão algébrica, as variáveis por determinados valores e calcula o valor da expressão.

O "processo" é uma dinâmica de transformações de quantidades de acordo com as quais, dada a mesma quantidade inicial, se produzirá sempre a mesma quantidade transformada. Assim, o aluno consegue pensar numa transformação como um todo, como uma actividade global, na qual se começa com objectos de uma determinada espécie, os quais são manipulados, e obtém-se como resultado final um outro objecto. Esta dinâmica de transformações permite aos alunos combinar vários processos e reverter a sua ordem Este tipo de visão leva a que muitos professores conduzam os alunos da "acção" para o "processo", dizendo que as Funções são máquinas que manipulam e transformam os números.

Schwinggendorf e Beineke (1992) nos seus estudos identificaram cinco categorias no conceito de função. Como pré-função são catalogadas todas as respostas que indiquem pouco ou nada do conceito de função, como por exemplo, dizer que é uma equação; como acção são catalogadas respostas que indiquem a substituição de uma variável por um número, e determinar o seu valor, sem no entanto se fazer referência a um processo de obtenção de outros valores. Como processo são consideradas as respostas onde se indica de uma forma coerente o que fazer na generalidade a um valor para obter outro. Outra categoria identificada foi a correspondência, que não é mais do que a referência à correspondência entre duas variáveis. E por fim é apresentada a categoria de dependência, que consiste na visão de função como uma dependência entre duas variáveis.

Os alunos constroem a sua Álgebra a partir da aritmética, ou seja, dão sentido aos símbolos às operações da álgebra em termos dos seus conhecimentos aritméticos. O reconhecimento de regularidades em Matemática, a investigação de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular permitem que a aprendizagem da Álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Em particular, o trabalho com padrões generalizáveis pode ajudar a desenvolver a ideia de relação funcional.

Para compreensão do conceito de Função numa fase inicial do seu estudo são fundamentais as seguintes componentes: a) a capacidade de classificar relações como Funções ou não e dando exemplos; b) dada uma Função a capacidade de identificar objectos, imagens e pares de objecto imagem, bem como a capacidade de, dada uma imagem, identificar o objecto que lhe corresponde e vice-versa; c) a capacidade de identificar Funções idênticas e de fazer a transferência entre as diferentes representações e d) a capacidade de identificar e dar exemplos de Funções que estejam sujeitas a representações diferentes, em diferentes partes do seu domínio.

Segundo Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990), as variáveis são os objectos das Funções, são os dados, quer concretos, quer abstractos. Assim, a noção de variável é considerada fundamental para compreender muitas relações funcionais, argumentando-se mesmo que conhecer o conceito de variável é um pré-requisito para uma completa compreensão das Funções. No entanto, nos últimos anos a investigação têm mostrado que os alunos apresentam dificuldades na interpretação do conceito de variável. O conceito de variável por si só é complicado, e muitas vezes os alunos têm tendência a reduzi-lo à ideia de letras que se usam no lugar de números desconhecidos apresentando assim várias facetas (como incógnita e como variável). Castro (2003) refere que alguns autores defendem que se trata de um único conceito (incógnita e variável) enquanto outros autores os diferenciam. A distinção recorre ao objecto estudado, ou seja, a “incógnita” surge no estudo das equações e a “variável” está associada ao conceito de função. As variáveis podem ser interpretadas de duas formas: uma mais estática onde a variável se destaca como uma ferramenta para generalizar ou descrever padrões, sendo normalmente associada a símbolos algébricos (Wagner & Kuchemann, citados por Zaslavsky & Stein, 1990) e outra mais dinâmica onde a sua essência capta a variabilidade e mudanças simultâneas de uma variável em comparação com outra, podendo ser representada de diferentes formas, como por exemplo um gráfico ou uma notação funcional (Javier citado por Zaslavsky & Stein, 1990).

Ao longo dos tempos houve momentos em que o estudo das Funções surgia integrado na Álgebra. No entanto, nem sempre foi assim. Inicialmente, Álgebra era sinónimo de estudo das equações, actualmente Álgebra é muito mais que isso, é o estudo de relações matemáticas abstractas, desde as equações, inequações ou Funções, ou ainda outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos (Ponte, 2005).

O ensino da Álgebra tem sido redutor desta, uma vez que se tem limitado ao ensino de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações e sistemas de equações. Nesta perspectiva são desvalorizados muitos aspectos importantes desta área da Matemática quer relativos à Antiguidade (onde se destaca a ideia de resolução de problemas), quer actuais (onde se dá atenção a relações e a diversas outras estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da Álgebra (estudo de Funções e da variação em geral) (Ponte, 2005).

Estas correntes influenciaram por sua vez a estrutura dos documentos curriculares do ensino da Matemática, como se poderá constatar mais à frente.

Tecnologias no ensino e aprendizagem de Funções

O conceito de Função, como já foi referido anteriormente, deve ser abordado de forma a englobar as diferentes representações, desta forma a utilização de ferramentas tecnológicas pode, em certa medida, permitir que sejam ultrapassados alguns problemas de representação e manipulação de Funções. A utilização de novas tecnologias permite que os alunos testem as suas ideias, e fornecem também instrumentos e situações que lhes permitam enunciar as suas ideias perante o professor ou colega.

Segundo Gomez (1997), o recurso às tecnologias para o ensino e aprendizagem das Funções permite uma melhor e mais fácil consolidação do conceito de Função em comparação com os métodos tradicionais.

No final da década de 80, começou a dar-se atenção à relevância das múltiplas representações no ensino da Álgebra com recurso às tecnologias (folhas de cálculo) efectuando-se assim uma abordagem *não-standard*. As tecnologias permitem a criação de múltiplas representações, ainda com a vantagem de não só exibir simplesmente as representações, mas também permitir acções sobre essas representações.

A utilização de tecnologia gráfica é a forma mais comum de estabelecer a ligação entre as diferentes formas de representação de Funções.

As Funções no currículo de Matemática

Tradicionalmente, os grandes temas do 3º ciclo e do ensino secundário eram a Álgebra e a Geometria. Com a implementação dos programas de 1991, é atribuído à Geometria ainda um maior ênfase enquanto que a Álgebra desaparece como grande tema, surgindo dois temas, Funções e Números e cálculos. Assim a Álgebra restringe-se ao cálculo algébrico e ao estudo das Funções, este último com grande destaque no 3º ciclo e não se dando a devida atenção ao estudo de padrões e regularidades, nem ao uso de simbolismo em situações contextualizadas nem à interpretação da variação em contextos reais (ME-DEB, 1991).

As perspectivas curriculares em Matemática têm vindo a evoluir no sentido de promover o trabalho com os números e com a geometria de forma continuada numa tentativa de promover uma melhor ligação entre estes domínios e a álgebra, de modo a que a sua aprendizagem surja de uma forma intuitiva e informal, procurando-se, assim evitar que esta surja como um conjunto de regras para memorizar. Estas alterações iniciaram-se com a criação do Currículo Nacional (ME-DEB, 2001) em que "Álgebra e Funções" surge como um grande tema curricular e onde se propõe que neste domínio, ao longo de todos os ciclos do ensino básico, seja desenvolvida a competência matemática que inclui:

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- A aptidão para construir e interpretar tabelas valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;
- A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas (ME, 2001).

Posteriormente, com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, (Ponte *et al*, 2007), a Álgebra surge como um dos quatro grandes temas. No entanto, no 1º ciclo do ensino básico não é um tema individualizado, porém existem objectivos de cunho algébrico nos outros temas, por exemplo, no trabalho com sequências, no estabelecimento de relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria. No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade directa como igualdade entre duas razões. Finalmente, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e Funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos.

Neste nível de escolaridade, uma Função é estudada essencialmente como uma relação entre variáveis, embora também seja apresentada como correspondência unívoca entre elementos de dois conjuntos. Pretende-se que os alunos compreendam o conceito de função e que sejam capaz de o usar em diversas situações, em particular, de proporcionalidade directa e inversa. Assumem particular destaque neste ciclo, como modelo de situações de proporcionalidade directa e inversa, as Funções do tipo $y = kx$ e $y = k / x$. O estudo das funções quadráticas restringe-se a casos particulares do tipo $y = ax2$ (com a inteiro e diferente de zero).

A alteração mais significativa em relação ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos (Ponte *et al.*, 2007).

Este último Programa de Matemática do Ensino Básico referido encontra-se de acordo com as directivas internacionais, nomeadamente do NCTM.

Actualmente verifica-se que há a necessidade de se iniciar o ensino de Álgebra ou de noções algébricas o mais cedo possível, ainda que o ênfase dado varie ao longo dos níveis de aprendizagem, tal como se pode observar no seguinte gráfico:

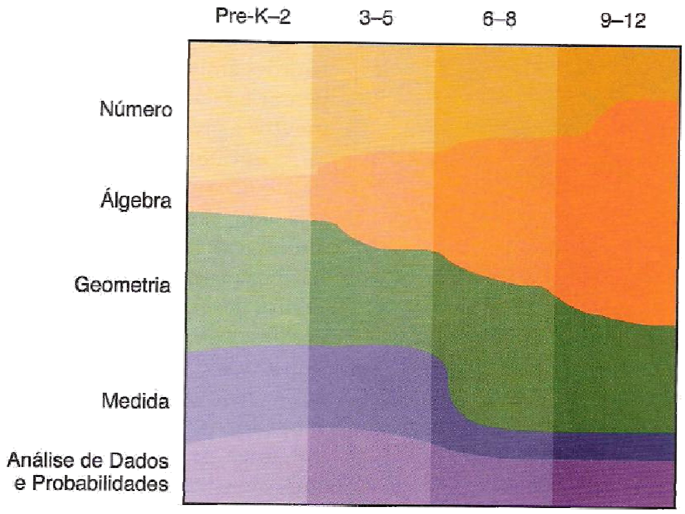


Gráfico 1: Modo como as Normas de Conteúdo poderão ser alvo de ênfase e graus de aprofundamento diferentes, ao longo dos diversos níveis de aprendizagem (NCTM, 2007)

Apesar de ser sugerido que o estudo da Álgebra se prolongue ao longo dos diversos anos de escolaridade, o estudo das Funções permanece referenciado nos últimos anos de escolaridade.

Em suma, verifica-se que as Funções sempre foram contempladas nas orientações programáticas do Ensino Básico, ora como grande tema ou como parte integrante do estudo da Álgebra.

As representações matemáticas

De acordo com os *Princípios e Normas para Matemática Escolar*, o termo *representação* pode ter diversos significados na Matemática escolar, entre eles:

> O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma em si mesma.(…) o termo é aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente, como aos que ocorrem internamente, nas mentes dos indivíduos quando fazem Matemática. (NCTM, 2007, p. 75)

Investigações educacionais no âmbito das representações

Conceito de representação

Segundo Pinto (2009), uma representação é uma forma de representar algo, que poderá estar em lugar desse, ser interpretada como, conectar-se, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar produzir, referir-se, assemelhar, servir como uma metáfora para, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado.

No âmbito da educação matemática, segundo o NCTM (2007), as representações são ferramentas privilegiadas para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas.

Em Matemática, usam-se várias representações para representar problemas, ideias, para comunicar e para pensar (Coulombe & Berenson, 2001). A forma como os alunos representam as ideias matemáticas está directamente relacionada com a forma como os alunos as compreendem e utilizam (Ponte & Serrazina, 2000).

Representações internas e externas

Podem-se distinguir dois sistemas de representação: sistemas internos de representação e sistemas externos de representação.

As representações internas estão relacionadas com as imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade, onde é utilizada a linguagem natural do indivíduo. Estas são por vezes encaradas como modelos mentais ou cognitivos referindo-se a esquemas, conceitos, concepções ou objectos mentais (Goldin & Shteingold, 2001).

Goldin e Shteingold (2001) apresentam diferentes tipos de sistemas internos de representação:

a) sistemas verbais/sintácticos, que dizem respeito à linguagem natural do sujeito;
b) sistemas *imagísticos* de representação, incluem as “imagens mentais”, factor importante para a compreensão da Matemática;
c) representações formais das notações, estão relacionadas com as situações em que os alunos manipulam mentalmente os números, realizam operações aritméticas

ou visualizam mentalmente os passos a seguir na resolução de uma equação algébrica;

d) estratégias e heurísticas, são representações internas construídas à medida que os alunos desenvolvem e organizam estratégias de resolução de problemas mentalmente. Este tipo de representações internas são frequentemente inconscientes, mas estruturadas, o que justifica as dificuldades sentidas pelos alunos ao explicarem os seus procedimentos de resolução do problema.

e) sistemas afectivos individuais de representação, que englobam as atitudes, as crenças e os valores de cada um pela Matemática.

Os sistemas apresentados não podem ser considerados isoladamente, mas relacionados entre si (Goldin, 2002).

As representações internas dos alunos são avaliadas pelos professores, através da realização de inferências com base nas representações externas apresentadas pelos alunos (Goldin & Shteingold, 2001).

As representações externas permitem a comunicação das ideias abstractas que caracterizam a Matemáticas e as propriedades das ideias que são representadas. Quando é utilizada uma forma de representação e essa não representa na totalidade a ideia matemática, é necessário recorrer a mais formas de representação (Hadmard, 1945, citado por Wong, 2004).

As representações externas são um produto da interpretação e compreensão dos alunos e permitem a existência de momentos de discussão acerca do seu significado (Goldin e Shteingold, 2001).

Goldin e Shteingold (2001) distinguem ainda sistemas de representação externos estáticos e dinâmicos. Os estáticos fornecem regras para a criação de fórmulas, equações, gráficos ou diagramas. Enquanto que, os dinâmicos dizem respeito a formas de representação dinâmicas, onde é permitido com facilidade a manipulação destas. Desta forma, estes sistemas de representação, aparecem associados ao uso das novas tecnologias.

Goldin e Shteingold (2001) referem a importância da interacção entre estes dois tipos de representação (internas e externas) no desenvolvimento do pensamento matemático, associando as dificuldades manifestadas pelos alunos ao fraco desenvolvimento desta interacção. O pensamento matemático implica que haja compreensão das relações existentes entre as várias representações de um mesmo conceito, e a identificação das semelhanças e diferenças estruturais entre os diversos sistemas de representação.

Modos de representação

Segundo o NCTM (2007) é necessário estimular os alunos para a representação das suas ideias, ainda que inicialmente estes o façam recorrendo a formas não convencionais, isto é, sob formas que para eles façam sentido. Todavia, é importante que os alunos aprendam formas de representação convencionais, para facilitar quer a aprendizagem da Matemática, quer a comunicação das suas ideias matemáticas. As representações podem ajudar os alunos a organizarem o seu raciocínio e, poderão ajudar a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão.

As *representações idiossincráticas* construídas pelos alunos, ao longo do seu processo de aprendizagem, nomeadamente aquando da resolução de problemas e de investigações, permitem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos e ajudam na resolução de problemas e, proporcionam formas significativas para registar e descrever métodos de resolução. A observação destas por parte do professor, pode constituir uma importante ferramenta para a compreensão do raciocínio dos alunos. Podendo-se ainda, estabelecer ligações entre estas representações e as representações convencionais.

Bruner considera a existência de três sistemas de representação - representação activa, representação icónica e representação simbólica – os quais devem ser introduzidos por esta ordem no ensino da Matemática. O autor define:

a) *representação activa*: como "(…) um conjunto de acções apropriadas para alcançar certo resultado" (Bruner, 1999, p.66), ou seja, a acção (tocar, manipular…) surge como uma forma de representação, é a aprendizagem de respostas e hábitos;

b) *representação icónica*: como " (…) um conjunto de imagens ou gráficos sumários que representam um conceito sem o definirem plenamente" (Bruner, 1999, p.66), isto é, há uma reprodução de imagens/objectos, mas sem transposição. A representação icónica depende da organização visual ou outra organização sensorial e do recurso a imagens de resumo (Bruner, 1999).

c) *representação simbólica*: como "(…) um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições" (Bruner, 1999, p.66). Neste sistema de representação surge a linguagem, como forma de representação da realidade.

Estes três sistemas de representação, segundo Bruner, estão relacionados com os estádios de desenvolvimento cognitivo, não implica, portanto, uma sequência de etapas, mas sim um domínio progressivo de cada uma das representações (Wong, 2004).

Segundo Wong (2004), Lesh, Post e Behr, em 1987, concluíram que um aluno que entende uma ideia matemática pode: reconhecer essa mesma ideia num qualquer sistema de representação, manipular facilmente essa ideia quando são dados os sistemas de representação e traduzir assertivamente essa ideia de um sistema para outro. O modelo criado por Lesh, Post e Behr incluía cinco modos de representação: modelos de manipulação (*manipulate models*), real scripts, comunicação oral (*spoken language*), símbolos escritos (*written symbols*) e imagens (*static pictures*). Este modelo apresenta a dificuldade de conter termos que não são usados em contexto de sala de aula, sendo um obstáculo para a sua compreensão por parte dos alunos (Wong, 2004).

Segundo Wong (2004), estes modos de representação são insuficientes para os níveis médio e secundário de escolaridade, tendo por isso criado um quadro constituído por seis sectores, em que cada um deles representa um modo de representação (MMTB – *multi-modal think-board*). O MMTB fornece uma imagem que esclarece as conexões possíveis de estabelecer entre os diferentes modos de representação de ideias matemáticas. Este quadro construiu-se a partir de propostas elaboradas por outros educadores e reagrupa essas propostas num formato prático para o ser utilizado pelos alunos.

A cada modo de representação está associado a um verbo que descreve a acção predominante associada a esse:

a) objecto real (verbo fazer): este modo de representação diz respeito ao uso de materiais manipuláveis, predominando na aprendizagem inicial de novos conceitos. Os alunos ao estabelecerem ligação entre as ideias matemáticas abstractas e as situações concretas, podem desenvolver modelos mentais que dão significado aos símbolos abstractos, reduzindo a fobia e ansiedade em relação à Matemática.
b) diagrama (verbo visualizar): inclui ilustrações, imagens, diagramas, gráficos, tabelas e figuras. Os diagramas variam em diferentes graus de abstracção, por exemplo, uma imagem de diferentes maçãs *versus* vários pontos, em que cada ponto representa uma maçã.

   Para alguns alunos os diagramas coloridos são uma ajuda para memorizarem resultados matemáticos.

No MMTB, o modo diagrama é normalmente um sumário em imagem do trabalho realizado com o objecto real.

c) Palavra (verbo comunicar): as palavras são um meio essencial para pensar em ideias matemáticas e comunicar essas ideias a outros. Como modo de representação, incluí termos matemáticos, expressões e frases. Os termos matemáticos precisam de ser ensinados explicitamente e os resultados matemáticos são muitas vezes recitados em palavras como um auxilio de memorização.

d) Número (verbo calcular): a maioria das pessoas associa a Matemática a números, pois este é o modo usado com maior frequência nas aulas de Matemática. Os números estão normalmente associados a operações de cálculo. No entanto, muitas vezes é preciso traduzir números em expressões não numéricas, por exemplo, substituindo alguns valores por a e b, e realizar operações com base nestes últimos. Muitos alunos não conseguem realizar com sucesso este processo, mostrando uma lacuna na compreensão dos processos algébricos.

e) Símbolo (verbo manipular): é também um modo de representação muito usado em Matemática. O número é uma forma de símbolo, no entanto é pedagogicamente apropriado distinguir o uso destes dois modelos, especialmente no ensino da álgebra. Os alunos consideram a manipulação de símbolos difícil e sem significado e menosprezam o poder dos símbolos no pensamento matemático.

f) História (verbo aplicar): faz a ligação entre as aplicações reais e os conceitos matemáticos, reforçando conceitos e enaltecendo as motivações para a aprendizagem. O modo história incluí problemas tradicionais de palavras, problemas relacionados com o quotidiano e reportados nos meios de comunicação, contas históricas de ideias matemáticas, e exemplos de outras disciplinas. Para além de resolver histórias dadas, os alunos podem exercitar a sua criatividade criando os seus problemas e desenvolvendo um sentido de posso dos seus problemas.

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra - representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Estes modos de representação serão explorados posteriormente, no ponto *Representações do conceito de função*.

No âmbito desta investigação serão adoptados os modos de representação enunciados por Friedland e Tabach (2001) e a representação tabular que será referenciada posteriormente.

Representações do conceito de função

Já foram referidos anteriormente vários factores que influenciam a compreensão do conceito de Função. Todavia, a compreensão do conceito de Função encontra-se ainda ligada à capacidade de as representar de diversas formas (em tabelas, gráficos, regras verbais, expressões algébricas) e em passar de uns tipos de representação para outros.

Segundo Coulombe e Berenson (2001) o estudo tradicional da Álgebra, prende-se ao estudo formal das Funções, isto é, as Funções surgem como uma representação simbólica, ou tabular, ou gráfica, não havendo interpretação, por parte dos alunos, dos símbolos algébricos e da utilização de outras representações. A interpretação e tradução das representações desenvolve o raciocínio algébrico dos alunos e ajuda na construção de imagens mentais, de padrões e Funções. Quando é dada a oportunidade, aos alunos, de interpretarem situações com as quais estão familiarizados, as representações têm um maior significado para os alunos; caso contrário, em que os alunos usam as representações matemáticas na forma convencional, sem interpretação, a matemática passa a ser uma manipulação de fórmulas para a construção de tabelas, gráficos...

NCTM (2007), sugere que no ensino básico os alunos usem diferentes tipos de representações em diferentes contextos, isto é, os alunos devem interpretar diferentes fenómenos, por exemplo, físicos e sociais, e que representem as relações relevantes. Uma outra ideia inerente a esta é que os alunos devem comunicar as suas interpretações aos outros. A comunicação é fundamental em toda a aprendizagem e inseparável das representações.

A linguagem oral e escrita utilizada pelos alunos são ferramentas de comunicação e ao mesmo tempo uma representação matemática.

A utilização fluente de múltiplas representações das relações matemáticas, é importante para o sucesso do desenvolvimento do pensamento algébrico (Coulombe, Berenson, 2001).

As diferentes representações do conceito de Função permitem diferentes *insights* que facilitam uma compreensão poderosa e completa deste conceito (Even, 1990). Os alunos devem estar aptos a compreender conceitos em diferentes representações e fazer a ligação entre elas. Pelo seu lado, Ponte (1992) afirma que "o ensino das Funções precisa de articular de forma equilibrada as três formas de representação mais importantes, nomeadamente as formas numérica, gráfica e algébrica". Faz ainda referência que em situações do quotidiano são os valores reais concretos que servem de suporte às expressões algébricas, e por isso o trabalho com entidades abstractas (no qual geralmente se centra o ensino) deve ser apoiado pela construção e análise de tabelas e cálculo de valores numéricos.

Friedland e Tabach (2001) fazem também referência à importância de se recorrer a distintas representações – verbais, numéricas, gráficas e algébrica – na aprendizagem da álgebra. O uso de diferentes representações tem o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra seja significativo e efectivo. Estes autores apresentam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação:

a) *representação verbal*, esta está normalmente associada à colocação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal, e ainda a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorrectas.
b) *representação numérica*, é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da álgebra, e normalmente precedem qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.
c) *representação gráfica* dá uma imagem clara do valor real de uma função ou de uma variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa, para os alunos que gostam de uma análise visual. Mas a representação gráfica é muito influenciada por factores externos (por exemplo, escalas), e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.
d) *representação algébrica* esta é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações. Contudo, esta forma de representação, que usa exclusivamente símbolos algébricos pode ocultar o significado matemático ou a

natureza do objecto e causar dificuldades de interpretação de resultados (Coulombe e Berenson, 2001).

A importância de trabalhar com várias representações resulta das vantagens e desvantagens apresentadas anteriormente para cada uma das formas de representação e a necessidade de corresponder a estilos individuais de raciocínio dos estudantes. Desta forma defende-se que se deve trabalhar num ambiente múltiplas representações, uma vez que as desvantagens de umas são colmatadas pela combinação com as outras. No entanto, a natureza da tarefa, a preferência pessoal, o estilo de pensamento do indivíduo que resolve o problema ou dificuldades em determinados tipos de representação são factores que poderão determinar o tipo de representação a utilizar (kaput, 1992 citado por Coulombe e Berenson, 2001).

Para Dreyfus (1994) o processo de utilizar múltiplas representações está associado ao de representar, sendo as funções exemplo. As funções são um conceito abstracto com que usualmente é trabalhado numa ou em várias representações, nomeadamente a representação algébrica e gráfica. O ensino e aprendizagem deste processo de associação de representações não é fácil, por ser uma estrutura muito complexa e por se lidar com uma grande quantidade de informação. Segundo Dreyfus (1991), os processos envolvidos na representação são: o processo de representação, a mudança de representações e a tradução entre elas e a modelação. O processo de representação envolve três componentes principais: as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização. As representações simbólicas envolvem relações entre signos e significado, permitem desenvolver o conhecimento implícito do indivíduo, o significado, que é explicitado através desses símbolos. No que se refere à representação mental de um dado objecto ou processo, ela pode ser associada aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. A representação mental torna-se assim fundamental para que a pessoa possa comunicar o seu pensamento acerca de um dado objecto ou processo. A visualização é o processo através do qual as representações mentais podem ser criadas, contribuindo para a intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos de matemática (Domingos, 1994). O processo de mudança de representações está associado ao de tradução entre elas, em que a tradução pode ser entendida como o passar da formulação de uma propriedade matemática ou de um problema para outro. Por último, o processo de modelação refere-se normalmente à procura de uma representação matemática para um objecto não matemático ou processo. No caso do pensamento matemático avançado Dreyfus (1991) considera que modelar significa construir uma estrutura matemática ou uma teoria que incorpora as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser descrito. O modelo pode assim ser usado para descrever o comportamento do objecto ou do processo a modelar.

Este autor identifica ainda quatro estados no processo de aprendizagens que envolvam relações entre representações: (1) usar uma representação simples; (2) usar mais do que uma representação em paralelo; (3) estabelecer ligações entre representações paralelas e (4) integrar representações e ligações flexíveis entre elas. À medida que se avança de um estado para outro estabelece-se uma concepção cada vez mais abstracta dos conceitos.

Para que capacidade de utilizar múltiplas representações venha a ser adquirida pelos alunos é necessário, que estes, utilizem múltiplas representações ao longo da educação matemática.

Nos níveis médios de escolaridade é frequente, os alunos, começarem por trabalhar com tabelas de dados numéricos para examinar um padrão de uma função linear, mas devem também aprender a representar esses dados na forma de gráficos ou equações quando quiserem caracterizar a relação linear generalizada (Coulombe, Berenson, 2001).

Segundo Brown e Mehilos (2010) as tabelas ajudam os alunos a passar do mundo concreto da aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, para o mundo abstracto da álgebra, onde as quantidades variam. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram, e em que o valor de expressões que varia como o resultado. A tabela actua como uma ponte entre a aritmética, onde os números são específicos, para a álgebra, onde as variáveis não são especificadas e expressam relações gerais. No estudo desenvolvido por Brown e Mehilos (2010) alguns alunos desenvolveram rapidamente a facilidade em manipular os símbolos e perceberam o seu potencial. Outros continuaram a mostrar preferência pelo uso de tabelas, sendo um suporte para usar enquanto procuram ficar confortáveis com as expressões algébricas. As tabelas faz com que se sintam mais confiantes no trabalho algébrico e encoraja-os a serem persistentes, são ferramentas poderosas para ajudar os alunos a darem significado a variáveis e a expressões algébricas. Esta forma de representação permite, aos alunos, verem os símbolos algébricos, como descrições gerais de números específicos, o que é de extrema importância para aqueles que precisam de desenvolver uma compreensão de símbolos abstractos.

Ainsworth, Bibly, e Wood (1998) citado por Coulombe e Berenson (2001) mencionaram três formas em como a representação múltipla pode promover a aprendizagem:

a) é provável que diferentes representações expressem diferentes aspectos mais claramente e que, também, a informação ganhe pela combinação de representações muito mais do que com uma simples representação;
b) as múltiplas representações constrangem-se umas às outras, para que o espaço de operadores permissivos se torne menor;
c) quando se pretende relacionar múltiplas representações, o aluno tem de estar perante tarefas que promovam a compreensão.

Não se pode esperar que a capacidade de trabalhar com múltiplas representações se desenvolva espontaneamente, depende primeiramente do problema apresentado e da natureza das questões colocadas. As questões colocadas devem sugerir, legitimar, recomendar, e algumas vezes requerer mais do que uma representação. Para automatizar os princípios da múltipla representação, é necessário haver reflexão por parte dos estudantes a qual deve ser promovida pela tarefa em si.

Representações no currículo

Em seguida serão apresentadas as referências internacionais e nacionais a nível das orientações curriculares.

Orientações internacionais

Um documento internacional de referência a nível das orientações curriculares para o ensino da Matemática, é os *Principles and Standards for School Mathematics*, publicado pelo National Council of Teachers of Mathematic [NCTM], em 2000 e editado em português pela Associação de Professores de Matemática [APM], em 2007.

Anteriormente já haviam sido publicados outros documentos de grande importância, destacando, em 1980, *An Agend for Action*, publicado pelo NCTM; em 1989, publicado também pelo NCTM surge *Curriculum and evoluation standards for school mathematics*, o qual foi traduzido pela APM em 1991, como *Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar*. Todavia, é neste último (*Princípios e Normas para Matemática escolar*) que as representações assumem destaque, existindo uma norma específica. Nas

Normas relativas às representações é tido como objectivos para os alunos desde o pré-escolar até ao 12º ano a aquisição das seguintes competências (NCTM, 2007, p. 160):

a) Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
b) Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
c) Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos

Ao longo dos vários anos de escolaridade, os alunos, devem ter a possibilidade de contactarem com diferentes tipos de representação para exprimirem ideias matemáticas e para construírem novos conhecimentos, desta forma poderão estar a aprofundar conhecimentos que já possuem. O recurso a diferentes tipos de representação permite-lhes criar associações entre diferentes ideias/conceitos. Inicialmente os alunos recorrerão a formas de representação não convencionais, tais como: a utilização dos dedos, desenhos, esquemas, gestos e símbolos; que traduzam as suas ideias/raciocínios. Estas formas de representação não são menos importantes que as convencionais, pois estas permitem ao aluno clarificar ideias matemáticas, estabelecer conexões e são a base da utilização futura de símbolos matemáticos. É ainda dado ênfase às representações por serem um processo que poderá contribuir também para a organização do raciocínio dos alunos e servir de apoio para a interiorização de conteúdos e/ou procedimentos. Para além de tudo isto, quando os alunos apreendem diferentes formas de representação da mesma ideia, consolidam a utilização de conceitos e procedimentos matemáticos, levando-os a identificarem as vantagens e/ou desvantagens de cada uma das formas de representação. A utilização de múltiplas representações permite aos alunos que posteriormente consigam passar de uma forma de representação para outra, escolhendo aquelas que mais se adequam à situação. As representações não deverão ser aprendidas como finalidades, em si mesmo, deverão, sim, ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da Matemática a problemas realistas, através da modelação (NCTM, 2007).

Segundo o NCTM (2007), um dos papéis do professor no processo de ensino-aprendizagem deverá ser o de analisar, questionar e interpretar as representações que os seus alunos utilizam, dado que, estas ilustram a resposta e o processo que utilizaram, são ainda um meio de avaliação objectiva da compreensão das ideias matemáticas envolvidas.

Ainda relativamente às representações, cabe ao professor proporcionar ambientes de aprendizagem com recurso a diversas representações e encorajar os alunos a comunicarem e partilharem as suas representações. Esta ideia é também defendida por Cavalcanti (2001), que considera que a partilha das representações entre pares, leva-os a considerar outras perspectivas e a compreender diferentes caminhos para solucionarem um mesmo problema.

Orientações nacionais

As orientações curriculares nacionais, que ao longo dos tempos têm vindo a ser publicadas, sofreram influências de documentos internacionais referentes ao ensino e aprendizagem da Matemática, inclusive os já referidos anteriormente, e de resultados de investigações efectuadas na área a nível nacional.

O Programa de Matemática do Ensino Básico que entrou em vigor desde 1990 apresentava como grandes finalidades do ensino da Matemática para o Ensino Básico: "desenvolver a capacidade de resolver problemas; desenvolver a capacidade de raciocínio e desenvolver a capacidade de comunicação" (ME/DEB, 1990, p.10). Nesta finalidade importa aqui destacar que se pretende proporcionar situações de ensino e aprendizagem para:

> - (…)
> - Interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, símbolos…)
> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas…) e vice-versa.
>
> (ME/ DEB, 1991, p. 10)

Verifica-se assim, que neste programa já são feitas algumas referências ao desenvolvimento da capacidade de os alunos efectuarem e analisarem diferentes tipos de representações. Neste programa, é ainda mais evidente a referência às representações, ao nível dos conhecimentos, no âmbito das Funções, sendo indicados os seguintes objectivos: que os alunos representem e analisem Funções utilizando tabelas, gráficos ou outro tipo de representações(ME/DEB, 1991).

Em 2001, foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, pelo Ministério da Educação – Departamento da Educação Básica, em que uma das grandes alterações relativamente ao Programa de Matemática é de se passar a falar de competências a alcançar no final de ciclo e não por ano de escolaridade, como até então.

Este documento promove ainda a articulação entre os três ciclos do ensino básico e entre as diferentes áreas curriculares, apresentando as competências essenciais de cada área curricular, para que estas em par e em articulação, no final do ensino básico tenham contribuído para o desenvolvimento das competências gerais necessárias à qualidade de vida pessoal e social de todos os cidadãos, apresentadas também aqui.

O *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais* refere que ser-se matematicamente competente implica o desenvolvimento atitudes, capacidades e competências, destacando-se aqui as que dizem respeito às representações: "a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação" (ME/DEB, 2001).

No *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte *et al.*, 2007) é de salientar as alterações que se verificaram neste programa em comparação com o anterior: este último encontra-se estruturado por ciclos e não por anos de escolaridade, tal como o *Currículo Nacional do Ensino Básico*; destaca-se ainda as alterações verificadas ao nível das Finalidades e Objectivos Gerais para o ensino da Matemática e a apresentação de três capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) as representações matemáticas são uma das dimensões da aprendizagem mais valorizada. Neste documento é apresentado como objectivo geral do ensino da Matemática:

> "Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas *representações*. Isto é, devem ser capazes de:
> - ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
> - traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
> - elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
> - usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais" (Ponte *et al.*, 2007, p.5).

Neste objectivo é evidenciada a necessidade dos alunos conhecerem e compreenderem os diversos tipos de representação, recorrendo a cada um deles em diferentes situações, optando sempre pelo mais adequado.

Ainda neste documento é referido a importância das representações matemáticas na aprendizagem dos alunos e do trabalho com múltiplas representações, sempre que possível. Sendo feita referência nesse documento que os alunos ao trabalharem com diversas representações para as ideias matemática adquirem a capacidade de passar de uma forma de representação para outra, que é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada. O trabalho com representações inicia-se com a utilização de representações icónicas em detrimento das representações simbólicas. É natural que numa fase inicial os alunos comecem por desenvolver as suas próprias formas de representação não convencionais, no entanto à medida que se vai desenvolvendo o trabalho com representações, cabe ao professor fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações convencionais (Ponte *et al.,* 2007).

Capítulo III

Metodologia

O presente capítulo tem como propósito a apresentação e justificação das metodologias utilizadas durante o decurso da presente investigação; a caracterização da escola, da turma onde se desenvolveu a investigação e dos grupos de alunos que constituíram os estudos de caso. Neste mesmo capítulo são ainda referenciadas as técnicas utilizadas na recolha dos dados.

Opções metodológicas

O presente estudo inscreve-se nas investigações de natureza qualitativa. Segundo Stake (2009), na investigação qualitativa o investigador privilegia a compreensão das complexas inter-relações entre tudo o que existe e tratam a singularidade dos casos e contextos individuais como importantes para a compreensão. Isto é, numa investigação qualitativa o investigador tem de prestar atenção a cada detalhe do ambiente que o rodeia, uma vez que tudo pode ser importante e contribuir para uma melhor compreensão dos casos. Neste tipo de investigação os investigadores são não intervencionistas, ou seja, durante o trabalho de campo, procuram não chamar a atenção para si próprios ou para o seu trabalho, procuram evitar situações específicas para testar as suas hipóteses.

Stake (2009) aponta ainda como característica das investigações qualitativas, os investigadores usarem a observação naturalista como meio principal de conhecimento. Quando não conseguem ver por si próprios, perguntam a outros intervenientes no estudo e ainda quando existem registos formais, debruçam-se sobre esses documentos. No entanto, a maioria favorece a captação pessoal da experiência para que a partir do seu envolvimento, possam interpretá-la, reconhecer os seus contextos, meditar sobre os seus múltiplos significados, efectuando um relato naturalista e experiencial. Desta forma os investigadores qualitativos procuram preservar as múltiplas realidades, as perspectivas diferentes e até contraditórias do que acontece; eles procuram registar com o maior rigor possível as suas observações preocupando-se em obter a sua validação através de procedimentos de triangulação e interpretam os significados.

Pelo que foi referido anteriormente, Stake (2009) define a investigação de natureza qualitativa como subjectiva. Porém, a subjectividade não é considerada como uma imperfeição a precisar de ser eliminada, mas como um elemento essencial da compreensão.

Este estudo é ainda caracterizado como um estudo de caso, pelas suas características, objectivos e pela natureza dos resultados finais que se prendem obter.

Segundo Ponte (2006), o estudo de caso é uma investigação que visa conhecer uma entidade bem definida (uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social) e tem como objectivo compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao investigador; não se usa esta modalidade quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população.

Stake (2009) considera o estudo de caso não interventivo e empático, ou seja, procura-se que o investigador não perturbe a actividade normal do caso, não teste, nem sequer entreviste, privilegiando sempre que pode a obtenção da informação que deseja através de uma observação discreta ou de uma análise dos registos.

O estudo de caso não é uma metodologia exclusiva da Educação é também usado por outras áreas como por exemplo: a Medicina, o Direito e a Economia. Em Educação Matemática, o estudo de caso, ao longo dos tempos tem sido usado para investigar questões relacionadas com aprendizagem dos alunos, com o conhecimento e as práticas profissionais de professores, os programas de formação inicial e contínua de professores, os projectos de inovação curricular, novos currículos, etc. (Ponte, 2006). Todavia, os estudos de caso podem ser usados para outros fins para além da investigação, por exemplo; para *ensino,* prática muito comum em Direito e Medicina e que já é igualmente usada na formação de professores, tanto inicial como contínua; e para apoiar a prática profissional como, por exemplo, na prática médica e no serviço social.

No estudo de caso a atenção centra-se nesse caso, que é um entre outros. Um caso, segundo Stake (2009), é uma coisa específica, uma coisa complexa e em funcionamento, é um sistema integrado. Uma criança, um professor, um programa inovador, todas as escolas de um determinado sítio, são exemplos de casos passíveis de estudo. A partir dos exemplos apresentados anteriormente pode-se verificar a existência de uma grande diversidade de casos passíveis de estudo, e esses mesmos casos podem ter diferentes papéis consoante o objectivo do estudo de que são alvo. Tendo em conta esta diversidade, Stake (2009) classifica os estudos de caso como: estudo de caso intrínseco, estudo de caso instrumental e estudos de caso colectivos.

No estudo de caso intrínseco, o caso é pré-seleccionado, existindo um interesse específico por esse caso, não apenas porque ao estudá-lo se aprende sobre outros casos ou sobre um problema em geral, mas também porque se precisa aprender sobre esse caso em particular, há um interesse intrínseco.

O estudo de caso instrumental distingue-se do anterior uma vez que o caso pode ser qualquer um, uma vez que não há um interesse específico no caso em si, havendo assim necessidade de selecção. Nestes estudos de caso há um problema de investigação, uma perplexidade, uma necessidade de compreensão global, sentindo-se que se pode alcançar um conhecimento mais profundo se se estudar um caso particular. Nesta situação o estudo caso tem intenção de compreender outra coisa, não o caso em si. Para facilitar a compreensão deste conceito apresento em seguida um exemplo: escolhe-se uma professora para se estudar, observando em termos gerais como ela ensina e prestando especial atenção à forma como ela classifica o trabalho dos alunos e se isso afecta ou não a sua forma de ensinar. Este exemplo é um estudo de caso instrumental, uma vez que visa alcançar algo mais do que compreender esta professora específica.

Partindo do exemplo anterior, poder-se-ia realizar o estudo recorrendo ao estudo de vários professores. Cada estudo baseado num desses professores é um estudo de caso instrumental, no entanto existe uma coordenação entre os estudos individuais, neste caso está-se perante uma investigação classificada como estudos de caso colectivos.

Para classificar a presente investigação como um dos tipos de estudo de caso definidos por Stake (2009), importa primeiramente apresentar o caso que foi alvo da investigação. O caso em estudo é uma turma (que posteriormente será caracterizada) onde observei a forma como os alunos rentabilizaram as potencialidades do *software Geogebra* ao nível da representação, na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções. Verifica-se então que neste estudo pretendi alcançar algo mais do que compreender a turma em específico, problemática em estudo, portanto pode-se classificar esta investigação como um estudo de caso instrumental.

Feita a classificação dos diferentes tipos de estudo de caso importa agora apresentar as características gerais desta metodologia de investigação. Segundo Ponte (2006) os estudos de caso: têm carácter descritivo, não experimental e são de natureza empírica. Neste tipo de estudos é efectuada uma descrição factual, literal, sistemática e o mais completa possível do objecto de estudo de forma a compreender a entidade (carácter descritivo); não se pode controlar os acontecimentos e não é possível ou desejável manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (não experimental); é um estudo realizado no contexto real da entidade (natureza empírica).

Ponte (2006) efectua ainda uma classificação dos estudos de caso consoante o propósito a que se destinam: exploratórios, descritivos ou analíticos. Os trabalhos de investigação de carácter *exploratórios,* têm como finalidade obter informação preliminar acerca do respectivo objecto de interesse. Se os trabalhos forem fundamentalmente *descritivos,* então esses têm como propósito descrever, isto é, dizer simplesmente "como é" o caso em estudo. Por fim os *analíticos,* procuram problematizar o seu objecto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente (Ponte, 2006). Em Educação Matemática há lugar para qualquer um destes tipos de estudo. No que diz respeito a este estudo, é um estudo de caso de natureza descritiva com características analíticas.

Em suma, a presente investigação é um estudo de natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas e analíticas.

Os investigadores, nos trabalhos desta natureza devem ainda ter em conta questões de ordem ética, essencialmente relacionadas com o consentimento informados dos participantes no estudo, bem como a manutenção do anonimato dos mesmos. Tendo em conta este aspecto, antes da realização deste estudo pedia autorização ao Director do Agrupamento de Escolas onde decorreu a investigação, sendo-lhe facultada a informação sobre a finalidade do mesmo, os seus objectivos e o tipo de dados a recolher e a forma como se processaria essa recolha. Foi ainda solicitada autorização aos pais e encarregados de educação dos alunos que participaram na investigação, facultando-lhes a mesma informação que foi dada à Direcção do Agrupamento de Escolas. Quanto ao anonimato das entidades intervenientes no estudo, escola e alunos, o mesmo foi sempre mantido durante todo o trabalho de investigação.

Contexto da investigação

A escola

A escola onde decorreu a investigação é a sede de um Agrupamento de Escolas. Fica situada numa freguesia rural de uma cidade do Norte Alentejano, que no início dos anos

2000 tinha cerca de 1200 habitantes. Os alunos que integram esta escola são provenientes de outras freguesias, também rurais. A escola apresenta uma população relativamente homogénea. Na sua maioria, os alunos são provenientes de agregados familiares com nível sócio económico médio-baixo ou baixo e com nível de escolaridade básico. Esta escola foi inaugurada em Dezembro de 1999 e integra turmas desde o Jardim de Infância até ao 3º Ciclo de Escolaridade. No ano lectivo 2009-2010, ano em que foi feita a recolha dos dados desta investigação, a escola tinha cerca de 287 alunos na totalidade, distribuídos da seguinte forma: 1 turma do Jardim de Infância (20 alunos); 3 turmas do 1º Ciclo (56 alunos); 4 turmas do 2º Ciclo (84 alunos) e 8 turmas do 3º Ciclo (127 alunos).

A escola apresenta um projecto educativo apoiado em projectos nacionais, como o Plano da Matemática, o Plano Tecnológico da Educação, o Plano Nacional de Leitura, o Programa de Educação para a Saúde, o projecto: “Mais sucesso” entre outras tantas actividades e projectos que a escola tem como objectivo desenvolver.

Em termos de infra-estruturas e de material didáctico pode-se considerar uma escola bem equipada; todas as salas dispõem de um projector de vídeo, as salas onde é leccionada a disciplina de Matemática têm todas um quadro interactivo, e existem computadores portáteis ao dispor dos professores e alunos.

A turma

A turma que constitui o caso em estudo foi seleccionada tendo em conta os seguintes critérios: facilidade de acesso ao caso, disponibilidade de informadores exteriores (professor titular da turma) e o contexto. Era uma turma de fácil acesso, por um lado pela sua localização geográfica e por outro lado pela facilidade de integração da investigadora, uma vez que já conhecia uma grande parte dos elementos da turma porque já tinha leccionado nesta escola. O professor titular foi uma mais valia na obtenção de informação necessária à interpretação das observações e na discussão das mesmas. Demonstrou ao longo de toda a intervenção didáctica uma grande disponibilidade e entusiasmo, uma vez que ia ao encontro dos seus objectivos e planificação. Um factor que contribuiu para o sucesso da investigação e foi facilitador foi o facto de a investigadora e o professor titular já terem trabalhado em equipa em outras actividades, em contexto escolar e terem sido colegas de mestrado.

A turma era uma das duas turmas de 9º ano de escolaridade da escola, constituída por catorze alunos, seis alunos do sexo masculino e oito alunos do sexo feminino. A idade destes alunos variava entre os catorze e os quinze anos, sendo a média das idades catorze anos. Nesta turma havia dois alunos a repetirem o 9º ano de escolaridade e um aluno com Necessidades Educativas Especiais. O aluno com Necessidades Educativas Especiais usufruía somente de condições especiais de avaliação.

No início do ano lectivo foram sinalizados sete alunos para aulas de Apoio Educativo à disciplina de Matemática, sendo estes os alunos que apresentavam nível negativo. Os restantes alunos apresentavam um aproveitamento bom ou razoável. No final do 2º Período um dos alunos foi excluído por faltas. No final do ano lectivo o aproveitamento geral da turma melhorou significativamente em Matemática, tendo passado a existir somente um aluno com nível negativo, seis alunos com nível razoável, quatro com nível bom e dois com nível muito bom. Na opinião do professor titular da turma era uma turma em que os alunos, em geral, eram empenhados e trabalhadores, no entanto alguns revelavam algumas dificuldades. O professor referiu ainda que o nível de desenvolvimento e aquisição de competências matemáticas e de conhecimentos matemáticos que se traduz pelos bons resultados de final de ano são o reflexo de um trabalho contínuo de três anos.

Para a realização da intervenção didáctica foi necessário organizar a turma em pequenos grupos, cinco grupos. Os pequenos grupos foram criados pelo professor titular, com a participação dos alunos. Destes cinco grupos, quatro eram compostos por três alunos e um por dois alunos. O professor teve em consideração os seguintes critérios na constituição dos grupos: o empenho, o interesse, o comportamento dos alunos e a afinidade entre os alunos. Em seguida apresento uma breve caracterização de cada um dos pequenos grupos:

Grupo 1: Este grupo era constituído por três alunos, duas alunas e um aluno. Os alunos deste grupo, no final do 1º Período, todos tinham nível de aproveitamento negativo e o aluno encontrava-se a repetir o 9º ano de escolaridade. No entanto, eram alunos que apresentavam um comportamento adequado à situação de sala de aula. As duas alunas eram responsáveis e empenhadas, revelavam ainda entusiasmo quando lhes eram colocadas situações novas.

Grupo 2: Era um grupo formado por três rapazes, tendo um deles sido excluído por faltas no final do 2º Período. Neste grupo, todos os elementos aplicavam de forma adequada os conhecimentos que possuíam a novas situações, eram interessados e empenhados. A nível de aproveitamento um dos alunos tinha nível de aproveitamento negativo, no entanto recuperou. Os restantes alunos tinham nível de aproveitamento bom.

Grupo 3: Este grupo tal como os anteriores tinha três elementos, sendo um deles o aluno com Necessidades Educativas Especiais. Este aluno revelava dificuldades na aplicação dos conhecimentos a novas situações, era pouco autónomo e revelava dificuldades de concentração, mas participa sempre nas tarefas da aula, era trabalhador, revelou nível de aproveitamento razoável ao longo do ano lectivo. As outras duas alunas apresentaram um nível de aproveitamento bom ao longo de todo o ano lectivo, aplicavam os conhecimentos que possuíam a novas situações sem grandes dificuldades, eram responsáveis, autónomas, participavam activamente nas tarefas da aula, eram responsáveis.

Grupo 4: Este grupo era o único grupo composto por dois alunos, um aluno do sexo feminino e outro masculino. A aluna aplicava de forma segura e adequada os conhecimentos que possuía a novas situações, tendo revelado uma progressão assinalável ao longo do ano lectivo, tendo passado do nível bom para muito bom. Era muito responsável, empenhada, autónoma e participava activamente nas tarefas da aula. O aluno no1º Período obteve um nível de aproveitamento negativo, no entanto recuperou até ao final do ano lectivo. É um aluno com algumas dificuldades em aplicar os conhecimentos que possuía a novas situações, era responsável e participava activamente nas tarefas da aula.

Grupo 5: Este grupo é constituído por três alunos do sexo feminino. Duas alunas apresentavam níveis de aproveitamento bom e muito bom, enquanto que a outra aluna iniciou o ano lectivo com nível negativo tendo recuperado ao longo do tempo e obtido no final um nível razoável. Todas as alunas são responsáveis e participam activamente nas tarefas propostas. As duas melhores alunas aplicam de forma segura e adequada os conhecimentos que possuem a novas situações, enquanto que a outra revela algumas dificuldades.

Em suma, todos os grupos apresentavam como características o empenho e a predisposição para aplicarem os seus conhecimentos a situações novas. Estas características eram fundamentais para uma participação entusiasta por parte dos alunos na intervenção didáctica.

Estes alunos já tinham tido contacto com o *software Geogebra*, durante as aulas de Matemática e também na área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado, que é também leccionada pelo professor de Matemática.

A intervenção didáctica

Em seguida apresentar-se-á os temas explorados na intervenção didáctica, de acordo com o actual Programa de Matemática do Ensino Básico. Para além dos temas, será também feita referência à metodologia utilizada na intervenção didáctica e uma análise das tarefas utilizadas para desenvolvimento dos temas e consequentemente dos objectivos e competências.

O tema

Neste estudo pretende-se aferir as mais valias da utilização, em ambiente de sala, de um *software*, o *Geogebra*, na forma como os alunos integram as diferentes formas de representação de uma função e como efectuam a tradução de informação de um tipo de representação para outro.

Com introdução, na sala de aula, do *software Geogebra*, é objectivo deste estudo compreender de que modo os alunos rentabilizam as potencialidades do *Geogebra* a nível da representação, na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções.

Foram trabalhadas as funções afim, linear, de proporcionalidade inversa e do tipo ax^2. Por estas serem as Funções referenciados no Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em Dezembro de 2007, optei por trabalhar todas elas e também porque esta opção permite diversificar as situações com que os alunos são confrontados, enriquecendo por isso a investigação.

Organização do trabalho

A intervenção didáctica consistiu na aplicação de seis tarefas, durante seis aulas de Matemática da turma, segundo a seguinte calendarização:

Quadro 1 – *Calendarização*

TAREFA	🕘	CALENDARIZAÇÃO
Qual o tarifário melhor? Eis a questão…	90’	12 /01/2010
As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$…	90’	15/01/2010
As folhas de papel que usamos	90’	22/01/2010
Matemática por um canudo	90’	29/01/2010
Estudo das funções $y=ax^2$	90’	5/02/2010
O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função	45’	2/06/2010

As aulas da intervenção didáctica decorreram na sala habitual da disciplina de Matemática, com recurso a computadores portáteis dos alunos e/ou da escola.

Os alunos realizaram as cinco primeiras tarefas de forma sequencial, em aulas intercaladas e a tarefa 6 foi aplicada posteriormente, com um intervalo de tempo entre esta e a última tarefa que havia sido aplicada maior do que aquele que aconteceu entre as outras tarefas.

Nas aulas da intervenção didáctica foi seguida sempre a mesma dinâmica de aula, com algumas excepções que posteriormente serão referidas e justificadas. Na estruturação de cada uma das aulas identificam-se três momentos distintos: num primeiro momento era feita uma apresentação da tarefa a realizar e distribuído um guião da mesma a cada aluno, com as perguntas e alguns procedimentos a realizar no *Goegebra* (Anexo 1, 2, 3, 4, 5 e 6); o segundo momento correspondia à realização da tarefa, pelos alunos, em grupos já definidos; e por último era realizada uma discussão, em grande grupo, dos resultados obtidos, no que diz respeito aos objectivos gerais e específicos e dos conteúdos abordados na tarefa realizada.

Na resolução das tarefas os alunos utilizaram sempre o *software Geogebra*, este momento não trouxe dificuldades de ordem maior, uma vez que os alunos já tinham tido anteriormente contacto com este mesmo *software* na resolução de tarefas propostas pelo professor titular da turma, abordado essencialmente conteúdos relacionados com Geometria.

O momento da discussão final foi de extrema importância e imprescindível, pois tal como é afirmado no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações.

A discussão final teve como objectivo evidenciar e obter dados relevantes e necessários para dar resposta às perguntas de investigação. A discussão foi orientada pelo professor titular, com a intervenção de todos os grupos, conforme a pertinência das suas respostas.

No final de cada uma das aulas verifiquei sempre se os alunos tinham guardado nos seus computadores os ficheiros do *Geogebra* correspondentes à resolução da tarefa e fazia também eu a recolha desses ficheiros, bem como dos registos escritos.

As tarefas

Como já foi referido anteriormente, foram propostas inicialmente cinco tarefas na intervenção didáctica e mais uma posteriormente. Estas seis tarefas dadas, as suas características, podem classificar-se quanto à sua natureza como tarefas de exploração e de modelação. Aquando da escolha das tarefas tive em atenção a natureza das tarefas, procurando alguma diversidade entre elas de modo a proporcionar aos alunos diferentes experiências de aprendizagem, e que permitissem a utilização das várias formas de representação de funções e a interacção entres elas.

O quadro seguinte mostra a classificação de cada uma das tarefas quanto à sua natureza:

Quadro 2 - *Tarefas classificadas consoante os grupos onde se enquadram: exploração e modelação.*

TAREFA	NATUREZA		REFERÊNCIA
	EXPLORAÇÃO	MODELAÇÃO	
Qual o tarifário melhor? Eis a questão… (Anexo 1)		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$… (Anexo 2)	X		Adaptado de exercícios de manuais
As folhas de papel que usamos (Anexo 3)		X	Criado pela investigadora
Matemática por um canudo (Anexo 4)		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
Estudo das funções $y=ax^2$ (Anexo 5)	X		Adaptado de exercícios de manuais
O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função (Anexo 6)		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

As tarefas distinguem-se também umas das outras pelos objectivos gerais e específicos que permitem trabalha, bem como pelas competências que possibilitam desenvolver nos alunos. Com a realização destas tarefas pretende-se desenvolver os seguintes objectivos gerais e específicos:

- **OBJECTIVOS GERAIS DE APRENDIZAGEM**

OG1 - ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer uma destas formas de representação;

OG2 - traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;

OG3 - elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;

OG4 - usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas.

- **OBJECTIVOS ESPECÍFICOS DE APRENDIZAGEM**

OE1 - Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa.

OE2 - Representar algebricamente e graficamente situações de proporcionalidade inversa.

OE3 - Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim.

OE4 - Representar algebricamente e graficamente funções do tipo $y = ax^2$.

OE5 - Analisar uma função a partir das suas representações.

OE6 - Relacionar as representações algébrica e gráfica das funções estudadas.

Quadro 3 - *Caracterização das tarefas a partir dos objectivos a desenvolver com cada uma delas.*

TAREFA		OBJECTIVOS	
		GERAIS	ESPECÍFICOS
1	Qual o tarifário melhor? Eis a questão…	OG1; OG2; OG4	OE1; OE2; OE5; OE6
2	As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$…	OG1; OG2; OG4	OE3; OE5; OE6
3	As folhas de papel que usamos	OG1; OG2; OG3; OG4	OE2; OE5; OE6
4	Matemática por um canudo	OG1; OG2; OG4	OE2; OE5; OE6
5	Estudo das funções $y=ax^2$	OG1; OG2; OG4	OE4; OE5; OE6
6	O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função	OG2; OG3; OG4	OE1; OE3; OE6

As tarefas seguiram todas a mesma estrutura à excepção da tarefa 6 – “O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função”, que será posteriormente apresentada. As tarefas eram divididas em duas partes: na primeira parte os alunos criavam as diferentes formas de representação (tabular, gráfica e algébrica) e na segunda parte eram colocadas questões aos alunos de interpretação das Funções em estudo, permitindo-lhes que eles utilizassem as representações que considerassem mais adequadas. Uma vez que já foi feita uma descrição dos procedimentos comuns e efectuada a caracterização das tarefas quanto à sua natureza e quanto aos objectivos a desenvolver, importa agora apresentar pormenorizadamente cada uma das tarefas, os seus objectivos e a reacção dos alunos.

As tarefas “Qual o tarifário melhor? Eis a questão…”, “Matemática por um canudo”, “As folhas de papel que usamos” e “O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função” têm como base situações não matemáticas, temas do conhecimento geral dos alunos e com os quais contactam na sua vida quotidiana ou que são próximos e do seu entendimento.

A tarefa “Qual o tarifário melhor? Eis a questão…” foi integrada na planificação da disciplina de Matemática como uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de função de proporcionalidade directa e afim.

Esta tarefa consistia na definição, representação e interpretação de diferentes tarifários telefónicos como função. Para seleccionar os tarifários telefónicos para a criação desta tarefa tive em conta os seguintes parâmetros: tarifários reais sem artificialismos, permitindo assim que os alunos utilizassem conhecimentos prévios e que o contexto não fosse um obstáculo e que esses tarifários fossem modelados por funções de proporcionalidade directa e afim, uma vez que era este o objectivo desta tarefa.

Durante a apresentação da tarefa tive a necessidade de dar a conhecer a folha de cálculo disponibilizada pelo *Geogebra.* Este momento foi necessário porque os alunos até ao momento só haviam trabalhado com versões anteriores do *Geogebra*, as quais não disponibilizavam esta opção. Todavia, este não foi um obstáculo, uma vez que o funcionamento desta folha de cálculo é igual à folha de cálculo *Excel,* sendo esta última já do conhecimento dos alunos.

A tarefa “As folhas de papel que usamos” foi assinalada, para esta turma, como uma tarefa de exploração do conceito de função de proporcionalidade inversa. Com esta tarefa pretendia que os alunos caracterizassem a função que a cada valor da largura da folha A4 associa uma altura de forma a manter constante a medida da área. Para isso estruturei a tarefa de modo a que primeiramente os alunos sugerissem diferentes medidas para o comprimento e largura de forma a manter o valor da área, que correspondia à área de uma folha A4. Posteriormente, os alunos procederam à definição desta problemática como uma função e construíram as diferentes representações dessa função e procederam à sua interpretação e análise.

O professor titular, na aula subsequente, baseou-se nos resultados desta tarefa para formalizar o conceito de função de proporcionalidade inversa.

A tarefa “Matemática por um canudo” foi aplicada no seguimento da tarefa descrita anteriormente, tendo sido aplicada como uma tarefa de consolidação e aprofundamento do conceito de proporcionalidade inversa. Nesta tarefa foi estudada a relação entre o tamanho de um cilindro oco e o tamanho de fita visualizada. Para a realização desta tarefa foi necessário proceder à recolha de dados, a qual foi realizada numa aula de Estudo Acompanhado. A experiência foi executada por uma das alunas com apoio do professor titular da disciplina de Matemática. Os dados recolhidos foram posteriormente facultados a todos os grupos de trabalho, tendo todos procedido à sua definição como função e posterior representação e interpretação.

A tarefa “O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função” foi a última da intervenção pedagógica, em que a aplicação da mesma teve como objectivo colocar os alunos perante uma tarefa mais aberta que as anteriores e com uma estrutura diferente.

Esta tarefa tinha como contexto um problema da realidade (crescimento do cabelo) o qual é modelado por uma função de proporcionalidade directa. O problema foi apresentado em linguagem corrente, seguido de perguntas de interpretação. Os alunos para responderem às perguntas apresentadas puderam recorrer a qualquer forma de representação ou múltiplas representações, por sua iniciativa, sem que houvesse qualquer influência pela estrutura da tarefa ou pelas questões colocadas.

As tarefas “As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$…” e “Estudo das funções $y=ax^2$” são situações matemáticas, tendo como objectivo estudar matematicamente as funções do tipo $y=mx+b$ e $y=ax^2$. A primeira destas tarefas foi uma tarefa de consolidação e aprofundamento dos conceitos, enquanto que a segunda tarefa foi uma tarefa de exploração. Tal como as anteriores tarefas numa primeira parte os alunos construíram as diferentes formas de representação das funções dadas e posteriormente tiveram de responder a perguntas de interpretação, recorrendo aos modos de representação que os alunos considerassem mais adequada.

Em cada uma das tarefas tive a preocupação de apresentar inicialmente a função a estudar numa forma de representação diferente. Esta estratégia foi propositada, para que os alunos pudessem então ganhar desembaraço a trabalhar com os diversos tipos de representação de Funções e ganhar a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra.

A selecção das tarefas foi cuidada tendo sempre como principal preocupação a obtenção do objectivo principal desta investigação: confrontar os alunos com diversas situações envolvendo a representação de Funções nos diferentes modos (numérica, tabular, gráfica e algébrica) e a interacção entre elas, com recurso ao *Geogebra*.

Recolha de dados

"Todos os investigadores têm um grande privilégio e uma grande obrigação: o privilégio é prestar atenção ao que consideram digno de atenção e a obrigação de tirar conclusões retiradas das escolhas mais significativas para colegas e clientes" (Stake, 2009, p.65).

Para se efectuar uma recolha de dados significativa, segundo Stake (2009) é por vezes necessário delinear um plano. Segundo este autor as partes essenciais que devem compor o plano de recolha de dados são as seguintes: "definição do caso, lista de perguntas de investigação, identificação dos ajudantes, fontes de dados, distribuição do tempo, despesas, relatório pretendido" (Stake, 2009, p.67).

Durante a presente investigação foi delineado um plano de recolha de dados constituído por todas as partes consideradas essenciais por Stake (2009) – à excepção das despesas, que neste estudo não eram significativas. Quanto às restantes partes do plano de recolha de dados, todas elas foram contempladas no início da investigação e reformuladas ao longo da mesma, essencialmente as perguntas de investigação e a distribuição do tempo.

O investigador deve desenvolver métodos e técnicas que permitam uma recolha de dados válidos e, que posteriormente o permitam compreender e retratar o caso. Existem técnicas comuns entre os investigadores de estudos de casos, realçando aqui as que utilizei ao longo desta investigação: observação participante e a análise documental.

A observação participante permite tomar directamente conhecimento da perspectiva dos intervenientes, no seu contexto real e assim compreender e analisar com bastante detalhe os processos, as dinâmicas e as perspectivas dos alunos durante o desenvolvimento das suas actividades (Lança, 2007). "Durante a observação, o investigador do estudo de caso qualitativo mantém um bom registo dos acontecimentos para providenciar uma descrição relativamente incontestável para análise posterior e para o relatório final" (Stake, 2009, p.78).

Nesta investigação, as observações decorreram durante a intervenção didáctica. Em cada uma das aulas da intervenção efectuei um registo livre dos acontecimentos, isto é, sem formulários de observação. Estes registos permitiram-me elaborar uma descrição pormenorizada do caso e encontrar momentos que revelaram a complexidade única do caso em estudo.

A outra técnica de recolha de dados já referida foi a análise de documentos. Ao longo desta investigação os documentos analisados foram essencialmente produções dos alunos, as resoluções escritas das tarefas e os ficheiros de *Geogebra* correspondentes à resolução de cada uma das tarefas. Das discussões finais de cada uma das tarefas, em grande grupo, foram criados registos áudio.

No final de cada uma das aulas da intervenção didáctica eram muitos os documentos obtidos, os quais contendo muita informação, alguma significativa outra menos e, existindo uma maior ou menor diversidade de informação contida entre os diferentes documentos. Fez então parte do plano de recolha de dados desta investigação, elaborar um "relatório" no final de cada uma das aulas, que apresentasse toda a informação pertinente para a descrição e compreensão do caso.

Os relatórios referidos anteriormente foram essenciais para guiar as observações e os documentos a recolher e na realização de reajustamentos durante o decorrer da intervenção.

Análise dos dados

A análise dos dados encontra-se ligada à recolha de dados, tendo-se, neste estudo, desenrolado em duas fases. Tratou-se de um processo essencialmente descritivo e interpretativo, baseando-se nas questões de investigação, na revisão de literatura realizada e nos dados recolhidos.

Numa primeira fase, à medida que se iam realizando as tarefas, analisei os dados obtidos nessas sessões a partir da observação desenvolvida na sala de aula, bem como as resoluções efectuadas pelos alunos, ou seja, realizava uma análise do relatório elaborado para cada uma das aulas da intervenção didáctica. As informações resultantes destas análises permitiram-me efectuar reajustamentos, consolidar ideias, avaliar expectativas, validar interpretações sobre a investigação que estava a realizar. Destaco aqui um facto que resultou destas análises, a prolongação da intervenção didáctica. Inicialmente tinha planeado cinco aulas o que correspondia a cinco tarefas, no entanto, após a primeira análise de dados, surgiu a necessidade realizar mais uma tarefa, a tarefa 6, para observar a reacção dos alunos a uma tarefa com estrutura diferente.

Na segunda fase da análise realizei uma análise mais aprofundada dos dados, tendo tido lugar após a recolha de todas as informações. A partir da revisão de literatura e da primeira análise defini categorias de análise. Essas categorias tinham a ver com as representações utilizadas pelos alunos e com a natureza/objectivo das perguntas das tarefas. Quanto às categorias de representação considerei: a) representação numérica, b) representação tabular, c) representação gráfica e d)representação algébrica. Relativamente ao objectivo das perguntas considerei cinco categorias: (A) identificar a imagem dado o objecto; (B) identificar o objecto dada a imagem; (C) Comparação de Funções e (D) Variação de uma função e (E) Influência da variação de parâmetros.

Seguidamente, efectuei uma análise de todos os dados recolhidos relativamente a todos os grupos e analisei-os segundo as categorias definidas. Posteriormente, tendo em conta as questões do estudo, efectuei uma análise cruzada de forma a encontrar semelhanças e diferenças formulando, por fim, conclusões.

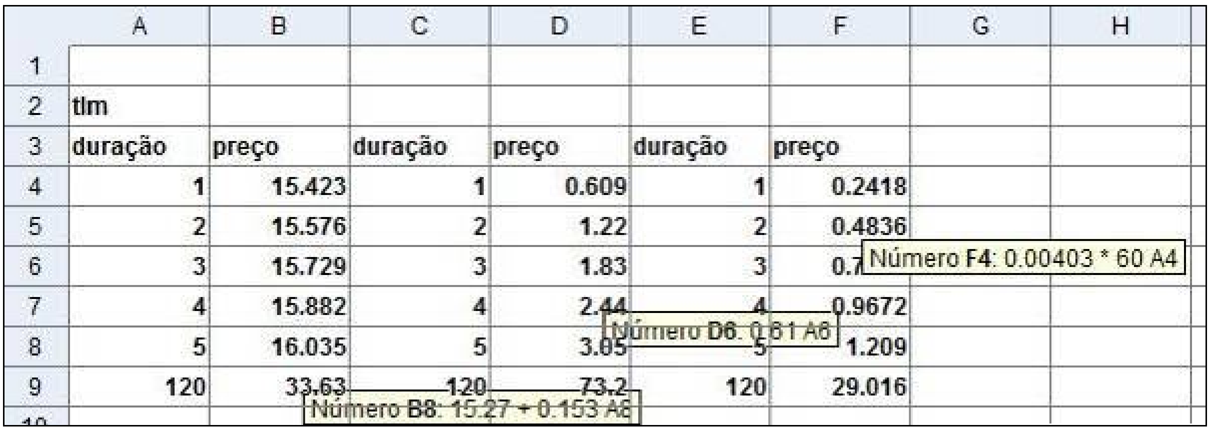
Capítulo IV

A turma e as representações com o Geogebra

No presente capítulo pretende-se apresentar o estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didáctica, dando especial atenção à reacção e ao desempenho perante cada uma das tarefas realizadas com recurso ao *Geogebra*. Optou-se por apresentar os resultados por tarefa para permitir uma descrição e análise mais aprofundada.

Tarefa 1 - Qual o tarifário melhor? Eis a questão

A tarefa 1 iniciava-se com preenchimento das tabelas referentes a cada um dos tarifários. Como instrumento auxiliar, todos os grupos, utilizaram a folha de cálculo do *Geogebra*, tal como era sugerido. Os grupos recorreram não só às potencialidades de cálculo oferecidas pelo *Geogebra,* como também utilizaram para esses cálculos as referências das células, como se pode constatar em seguida.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	tlm							
3	duração	preço	duração	preço	duração	preço		
4	1	15.423	1	0.609	1	0.2418		
5	2	15.576	2	1.22	2	0.4836		
6	3	15.729	3	1.83	3	0.7		
7	4	15.882	4	2.44	4	0.9672		
8	5	16.035	5	3.05	5	1.209		
9	120	33.63	120	73.2	120	29.016		

Número F4: 0.00403 * 60 A4
Número D6: 0.61 A6
Número B8: 15.27 + 0.153 A8

Figura 1 - **Procedimento utilizado pelo grupo 2, para preenchimento das tabelas.**

	A	B	C	D
1				
2	tlm 1			
3	Duração	preço		
4	0	15.27		
5	1	15.423		
6	2	15.576		
7	3	15.729		
8	4	15.882		
9	5	16.035		
10	120	33.63		
11	tlm 2			
12	duração	preço		
13	0	0		
14	1	0.609		
15	2	1.218		
16	3	1.827		
17	4	2.436		
18	5	3.045		
19	120	73.08		
20	tlm 3			
21	Duração	preço		
22	0	0		
23	1	0.2418		
24	2	0.4836		
25	3	0.7254		
26	4	0.9672		
27	5	1.209		
28	120	29.016		

Número **B5**: 15.27 + 0.153 A5

Número **B15**: 0.609 A15

Número **B23**: 0.00403 * 60 A23

Figura 2 - **Procedimento efectuado pelos grupos 1 e 5, para preenchimento das tabelas.**

	A	B	C	D
1				
2	tlm 1			
3	duraçao	preço		
4	1	15.42		
5	2	15.57		
6	3	15.72		
7	4	15.87		
8	5	16.02		
9	120	33.63		
10				
11	tlm 2			
12	duraçao	preço		
13	1	0.61		
14	2	1.22		
15	3	1.83		
16	4	2.44		
17	5	3.05		
18	120	73.08		
19				
20	tlm 3			
21	duraçao	preço		
22	1	0.24		
23	2	0.48		
24	3	0.73		
25	4	0.97		
26	5	1.21		
27	120	29.02		

Número **B4**: 15.27 + 0.15 A4

Número **B13**: 0.61 A13

Número **B22**: 0 A22 * 60

Figura 3 - **Procedimento efectuado pelos grupos 3 e 4.**

A partir dos resultados obtidos através da folha de cálculo do *Geogebra*, os alunos preencheram as tabelas e escreveram as expressões algébricas associadas a cada uma das tabelas.

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	15,423	15,576	15,729	15,882	16,035

$15,27 + 0,153 \times x$

Tabela 1

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,609	1.218	1.827	2.436	3.045

$0,609 \times x$

Tabela 2

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,2418	0,4836	0,7254	0,9672	1,209

$0,00403 \times 60 \times x$

Tabela 3

Figura 4 - **Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 1 e 2**

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	15,42	15,57	15,72	15,87	16,02

Tabela 1

$15,27 + 0,153 \times x$

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,61	1,22	1,83	2,44	3,05

Tabela 2

$0,609 \times x$

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,24	0,48	0,73	0,97	1,21

Tabela 3

$0,00403 \times 60 \times x$

Figura 5 - **Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 3.**

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	15,42	15,57	15,72	15,87	16,02

15,27 + 0,153 × x

Tabela 1

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,61	1,22	1,83	2,44	3,05

0,609 × x

Tabela 2

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,24	0,48	0,73	0,97	1,21

0,00403 × x × 60'

Tabela 3

Figura 6 - **Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 4.**

Telemóvel	Operadora	Tarifário	Preço			
			Mensalidade		Preço/min.	
1	Vodafone	Best Total Base	15,27 €	+	0,153	× x
2	TMN	+Perto			0,609 ~~cent~~ € /min	× x
3	Optimus	Total			0,00403 €/seg × 60	× x

Figura 7 - **Expressões algébricas apresentadas pelo grupo 5.**

No preenchimento das tabelas não se verificou diferenças entre os grupos, a menos do número de casas decimais apresentadas, o que é justificado pelos resultados obtidos por cada grupo na folha de cálculo do *Geogebra*. Os grupos que obtiveram resultados com três casas decimais preencheram a tabela com os valores com três casas decimais, o mesmo sucedeu com os grupos que trabalharam no *Geogebra* com duas casas decimais.

Todos os alunos utilizaram as referências das células para determinar o custo de cada chamada em função da duração da mesma. A utilização do mesmo procedimento por todos os grupos pode ser justificada pelo facto destes já terem trabalhado anteriormente com a folha de cálculo *Excel*, o que manifestou ser um factor facilitador e motivador da utilização da mesma metodologia na folha de cálculo do *Geogebra*. Este procedimento foi uma mais valia para a generalização e posterior determinação da expressão algébrica.

Os alunos mostraram assim compreensão do problema e por sua vez capacidade de o traduzir em linguagem matemática.

Na pergunta 4 pedia-se aos alunos que, num referencial cartesiano, fizessem o esboço dos gráficos que representam cada um dos tarifários. Todos os grupos responderam, no entanto apresentaram respostas diversificadas:

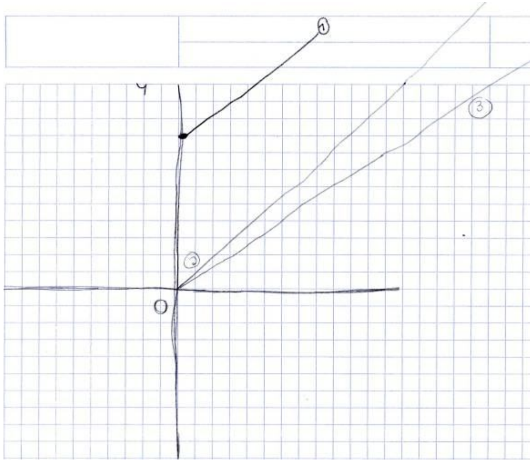


Figura 8 - **Resposta do grupo 1.**

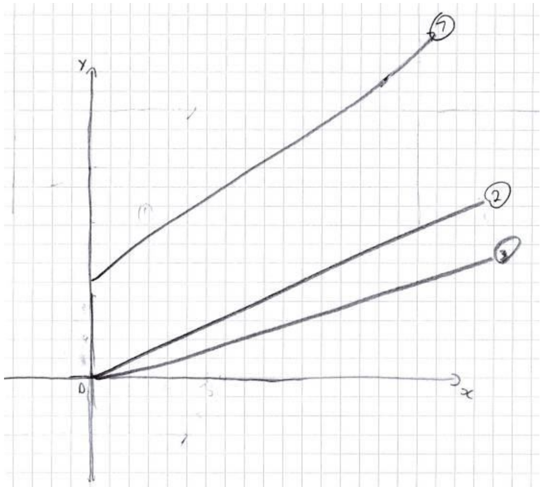


Figura 9 - Resposta do grupo 2.

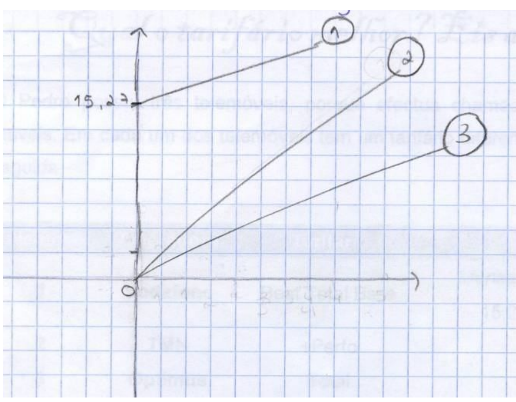


Figura 10 - **Resposta do grupo 3.**

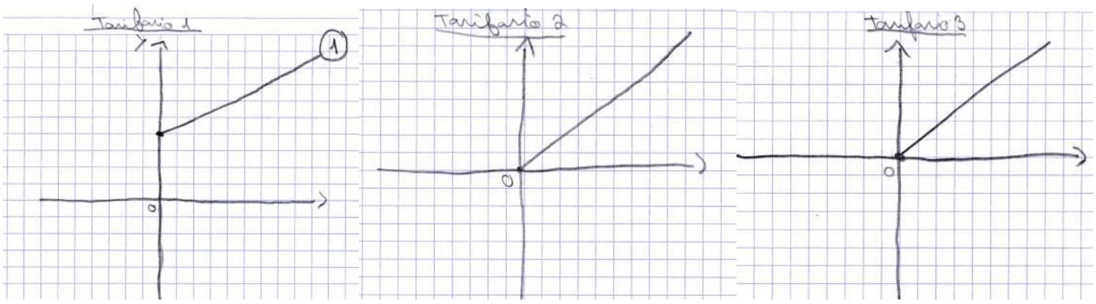


Figura 11 - **Resposta do grupo 4.**

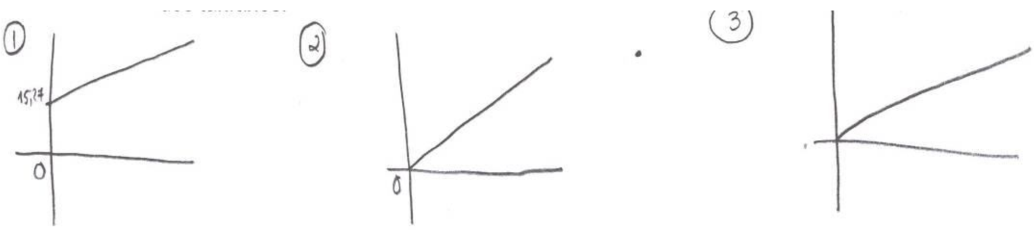


Figura 12 - **Resposta do grupo 5.**

Os grupos 1, 2 e 3 representaram os três gráficos no mesmo referencial, o que permite afirmar que houve por parte dos alunos reflexão acerca de como variava o valor a pagar com a utilização de cada um dos tarifários, comparativamente, enquanto que os grupos 4 e 5 optaram por representar em referenciais cartesianos diferentes, mostrando que estudaram isoladamente cada um dos tarifários.

O esboço criado pelo grupo 3 é aquele que mais se aproxima da representação gráfica dos três tarifários, uma vez que é notória a diferença de declives das rectas.

Nas perguntas 5 e 6 pedia-se que representassem no referencial os pontos referentes a cada um dos tarifários, definidos nas tabelas, e para representarem graficamente as funções definidas por esses três pontos. No enunciado eram apresentados procedimentos para a sua concretização. Na representação dos pontos todos os grupos seguiram o procedimento apresentado. Todavia, na representação gráfica das Funções foram apresentados procedimentos distintos.

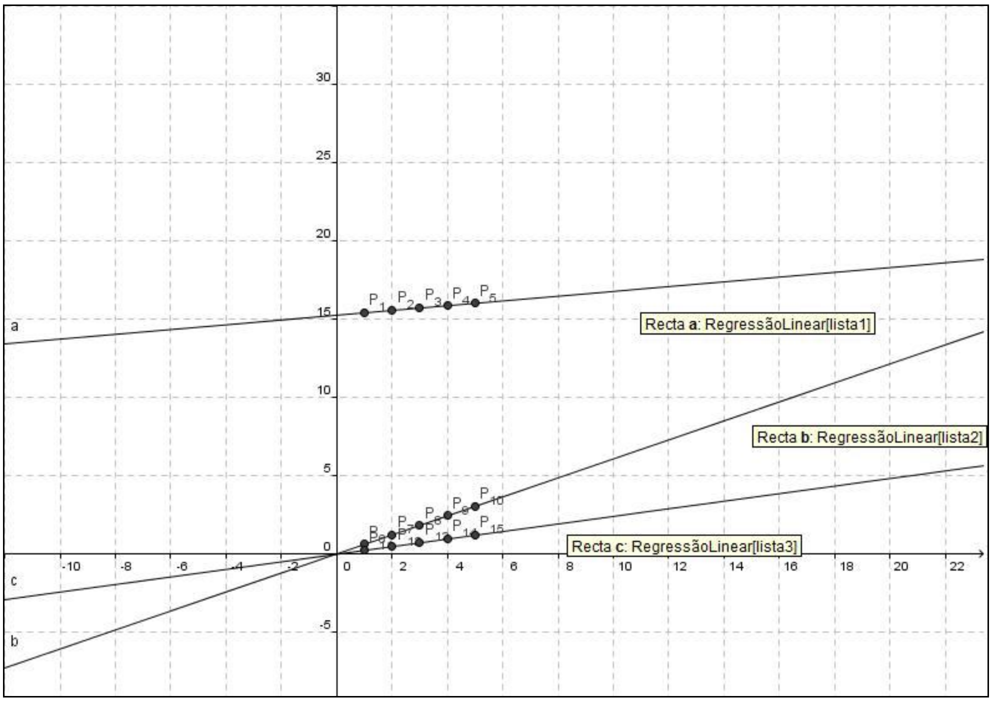


Figura 13 - **Resolução dos grupos 1 e 3.**

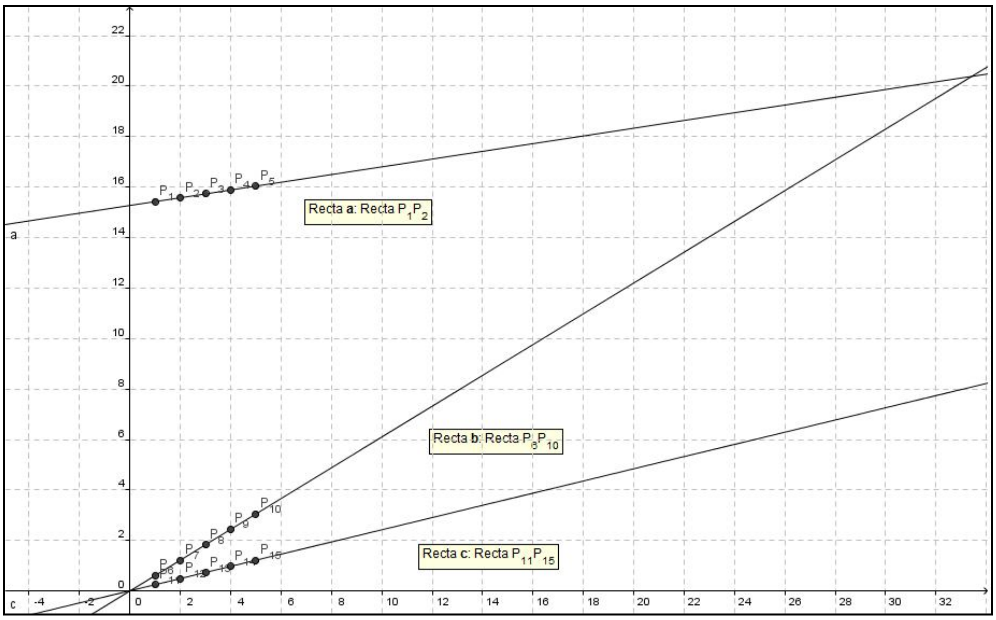


Figura 14 – **Resolução dos grupo 2 e 4**

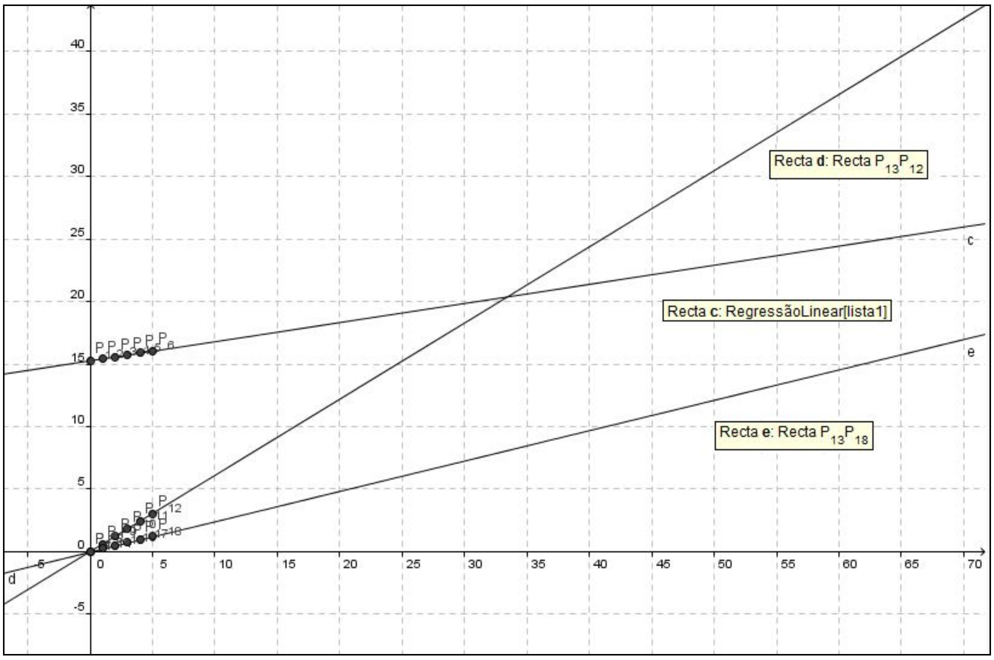


Figura 15 - **Resolução do grupo 5.**

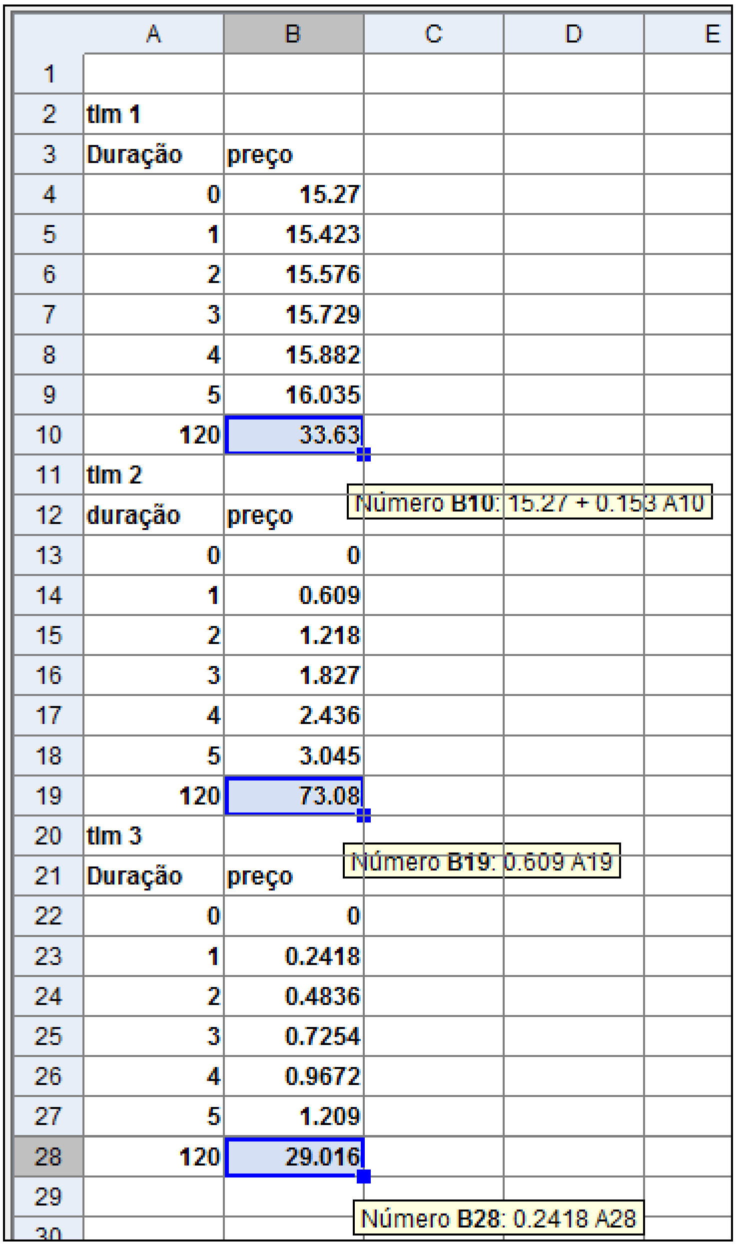
Dois grupos (1 e 3) seguiram o procedimento apresentado na tarefa, outros dois grupos (2 e 4), optaram por recorrer à ferramenta "recta definida por dois pontos" em detrimento do procedimento apresentado na tarefa e o grupo 5 usou os dois procedimentos descritos anteriormente.

Durante a discussão questionei os alunos do porquê de terem utilizado a ferramenta "recta definida por dois pontos" em detrimento do procedimento sugerido. A esta questão, os alunos, responderam que aquando da elaboração do esboço gráfico de cada um dos tarifários tiveram que reflectir e discutir entre os elementos do grupo sobre que tipo de gráfico representaria cada uma das situações, concluindo que todos os tarifários seriam representados através de rectas. Foi ainda mencionado que como já tinham dois e até mais pontos referentes a cada um dos tarifários e, para definir uma recta basta dois pontos então, escolheram quaisquer dois pontos de cada um dos tarifários e traçaram as respectivas rectas.

O recurso a este procedimento, por parte de alguns grupos, pode ser justificado pela familiaridade que os alunos já têm com o *Geogebra* e as ferramentas relacionadas com a Geometria.

A última pergunta (pergunta 7) era constituída por cinco alíneas e destinava-se há análise dos três tarifários.

Na alínea a), desta última pergunta, era pedido para determinar qual o melhor tarifário sabendo que o Pedro falou 120 minutos. Todos os grupos recorreram à folha de cálculo:



	A	B	C	D	E
1					
2	tlm 1				
3	Duração	preço			
4	0	15.27			
5	1	15.423			
6	2	15.576			
7	3	15.729			
8	4	15.882			
9	5	16.035			
10	120	33.63			
11	tlm 2				
12	duração	preço			
13	0	0			
14	1	0.609			
15	2	1.218			
16	3	1.827			
17	4	2.436			
18	5	3.045			
19	120	73.08			
20	tlm 3				
21	Duração	preço			
22	0	0			
23	1	0.2418			
24	2	0.4836			
25	3	0.7254			
26	4	0.9672			
27	5	1.209			
28	120	29.016			
29					

Número **B10**: 15.27 + 0.153 A10

Número **B19**: 0.609 A19

Número **B28**: 0.2418 A28

Figura 16 – **Procedimento utilizados por todos os grupos para determinar quanto pagaria o Pedro tendo este registado 120 minutos em chamadas.**

Posteriormente os alunos apresentaram as seguintes respostas:

O tarifário da
Optimus, porque é o mais barato, porque com 120 m, só se
paga 29,16€,
fizemos os calculo
na folha de calculo
do Geogebra.

Figura 17 - **Resposta apresentada pelo grupo 1.**

optimus porque fizemos na folha de calculo

Figura 18 - **Resposta apresentada pelo grupo 2.**

(1) - 33,27 (2) - 73,2 (3) - 29,02. da óptimus - (3) - Recolhemos à folha de cálculo
é mais barato o tarifário

Figura 19 - **Resposta apresentada pelo grupo 3.**

O Pedro deverá
escolher o tarifário da OPTINUS

Figura 20 - **Resposta apresentada pelo grupo 4.**

Ao inserirmos na
folha de cálculo do Geogebra pudemos verificar no 1º tarifário pagaria 33,63€, no 2º
tarifário pagaria 73,08€ e no 3º tarifário pagaria 29,016€. Logo deve optar pela Optimus.

Figura 21 - **Resposta apresentada pelo grupo 5.**

A partir das respostas apresentadas pelos grupos, verifiquei então que todos responderam correctamente à questão.

Durante a discussão uma das alunas do grupo 3 afirmou:

Bárbara: Foi mais fácil recorrer à folha de cálculo, porque já tínhamos a fórmula foi só substituir o valor.

Esta afirmação foi de seguida apoiada pelos restantes alunos.

Na pergunta 7b) pretendia-se que os alunos indicassem qual o tarifário mais vantajoso sabendo que o Pedro só quer gastar 25 euros.

Deverá escolher
a TMN, porque é o que está mais próximo
dos 25 na Geogebra.

Figura 22 - **Resposta apresentada pelo grupo 1.**

Deverá escolher o da TMN porque é mais barato

Figura 23 - **Resposta apresentada pelo grupo 2.**

É mais vantajoso a vodafone porque com essa mensalidade o Pedro fala durante mais tempo. (Recorremos ao gráfico).

Figura 24 - **Resposta apresentada pelo grupo 3.**

Vodafone

Figura 25 - **Resposta apresentada pelo grupo 4.**

Analisando os obtidos nas questões anterior, podemos concluir que o melhor tarifário a escolher, querendo gastar só 25€, é o TMN, porque a mensalidade é 0.

Figura 26 - **Resposta apresentada pelo grupo 5.**

Nenhum grupo apresentou a resposta correcta, contudo na discussão os alunos descreveram procedimentos que permitiam apresentar uma resposta correcta:

Jorge (grupo 2): Procurámos os 25 euros no eixo dos yy.

Marta (grupo 5): Traçava uma recta horizontal.

Mafalda (grupo 3): Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a recta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus.

Na alínea c) questionava-se se haveria algum momento em que o tarifário da Vodafone seria o mais vantajoso. As respostas apresentadas foram as seguintes:

Quando tiver ponto dos 30 € mensais.

Figura 27 - **Resposta apresentada pelo grupo 1.**

Sim.

Figura 28 - **Resposta apresentada pelo grupo 2.**

Para o tarifário da vodafone ser mais vantajoso terá que falar 166 minutos. (Recorremos ao gráfico)

Figura 29 - **Resposta apresentada pelo grupo 3.**

Através do referencial cartesiano podemos observar que a partir, aproximadamente, dos 170 min é mais vantajoso.

Figura 30 - **Resposta apresentada pelo grupo 5.**

O grupo 4 não respondeu.

Os grupos 3 e 5 determinaram o ponto de intersecção entre os gráficos do tarifário Vodafone e o da Optimus.

Objectos livres
Objectos dependentes
- A = (165.29, 39.97)
- a: y = 0.15x + 15.27
- b: y = 0.61x
- c: y = 0.24x
- lista1 = {(1, 15.42), (2, 15.57), (3, 15.72), (4, 15.87), (5, 16.02)}
- lista2 = {(1, 0.61), (2, 1.22), (3, 1.83), (4, 2.44), (5, 3.05)}
- lista3 = {(1, 0.24), (2, 0.48), (3, 0.73), (4, 0.97), (5, 1.21)}

Ponto A: Ponto de intersecção de a e c

Figura 31 - **Janela Algébrica do grupo 3.**

Objectos livres
Objectos dependentes
- A = (171.95946, 41.5798)
- a = 16.035
- b = 16.035
- c: y = 0.153x + 15.27
- d: y = 0.609x
- e: y = 0.2418x
- lista1 = {(0, 15.27), (1, 15.423), (2, 15.576), (3, 15.729), (4, 15.882), (5, 16.035)}
- lista2 = {(0, 0), (1, 0.609), (2, 1.218), (3, 1.827), (4, 2.436), (5, 3.045)}
- lista3 = {(0, 0), (1, 0.2418), (2, 0.4836), (3, 0.7254), (4, 0.9672), (5, 1.209)}

Ponto A: Ponto de intersecção de c e e

Figura 32 - **Janela Algébrica do grupo 5.**

No entanto, usando a mesma estratégia, verifica-se uma discrepância nas respostas. Esta diferença deve-se ao facto do grupo 3 ter efectuado os cálculos para criar as listas de pontos, relativa ao tarifário da Vodafone, usando os dados do enunciado arredondados às centésimas.

Na pergunta 7d), se o Pedro pagasse não mensalmente, mas por chamada, qual dos tarifários seria mais vantajoso, obtiveram-se as seguintes respostas:

Com o da TMN uc, porque no da Optimus
não poderia ser, pois é pago por segundos, e o da Vodafone tem
de pagar a
mensalidade
mais o
tempo da
chamada.

Figura 33 - **Resposta do grupo 1.**

Vodafone

Figura 34 - **Resposta do grupo 2.**

o mais vodafone seria o mais vantajoso porque se pagaria menos. por minuto.
(recorremos à tabela).

Figura 35 - **Resposta do grupo 3.**

	A	B	C	D	E
1					
2					
3	tlm 1				
4	duração	preço			
5	1	15.42	0.15		
6	2	15.57	0.3		
7	3	15.72	0.45		
8	4	15.87	0.6		
9	5	16.02	0.75		
10	120	33.27	18		
11					
12	tlm 2				
13	duração	preço			
14	1	0.61			
15	2	1.22			
16	3	1.83			
17	4	2.44			
18	5	3.05			
19	120	73.2			
20					
21	TLM 3				
22	duração	preço			
23	1	0.24			
24	2	0.48			
25	3	0.73			
26	4	0.97			
27	5	1.21			
28	120	29.02			

Número C5: B5 - 15.27

Figura 36 - **Estratégia usada pelo grupo 3.**

É o da Vodafone porque é onde as chamadas são mais baratas.

Figura 37 - **Resposta do grupo 4.**

olhando para a folha de cálculo concluimos que o tarifário mais vantajoso é o Optimus, pois é no qual que em cada minuto da chamada se paga menos.

Figura 38 - **Resposta do grupo 5.**

Os grupos 1 e 5 não apresentaram respostas correctas.

O grupo 3 foi o único que apresentou uma resposta completa, apresentando todos os cálculos que efectuaram até chegarem à resposta.

Para o grupo 4, tendo em conta a resposta apresentada, posso dizer que concluíram a partir da análise da informação apresentada no enunciado, uma vez que de entre os três tarifários o da Vodafone era o que tinha o custo da chamada por minuto mais baixo, tirando a mensalidade, logo qualquer que fosse a duração da chamada era com este que ficaria mais barato.

Na última pergunta desta tarefa, por qual dos telemóveis o Pedro deveria optar, foram redigidas as seguintes respostas:

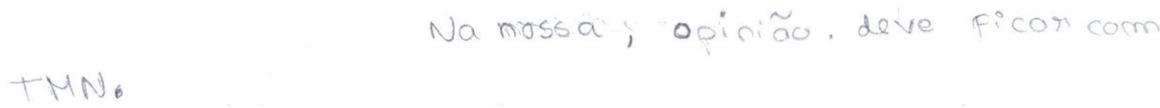

Na nossa, opinião. deve ficar com TMN.

Figura 39 **- Resposta do grupo 1.**

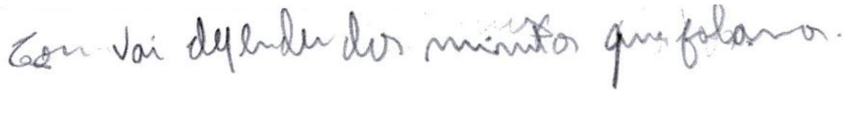

Com vai depender dos minutos que falam.

Figura 40 **- Resposta do grupo 2.**

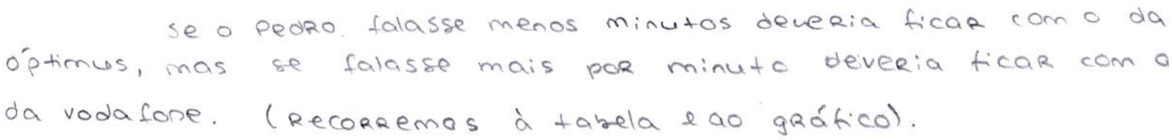

se o Pedro falasse menos minutos deveria ficar com o da óptimus, mas se falasse mais por minuto deveria ficar com o da vodafone. (Recorremos à tabela e ao gráfico).

Figura 41 **- Resposta do grupo 3.**

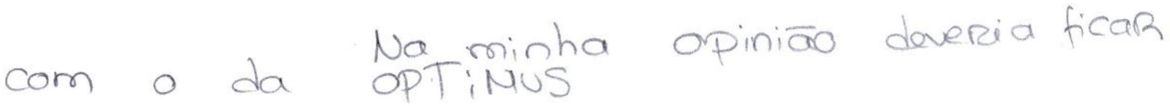

Na minha opinião deveria ficar com o da OPTINUS

Figura 42 **- Resposta do grupo 4.**

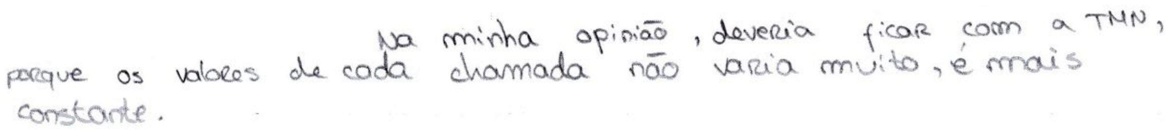

Na minha opinião, deveria ficar com a TMN, porque os valores de cada chamada não varia muito, é mais constante.

Figura 43 **- Resposta do grupo 5.**

O grupo 3, apresenta a melhor resposta, pois apresenta todas as justificações. O grupo 2, responde correctamente, no entanto, não apresenta soluções. Os restantes grupos apresentam soluções, mas sem justificação.

Durante a discussão, quando interrogados sobre a que representações recorreram, todos os grupos referiram que tinham usado a representação gráfica para realizarem uma análise comparativa dos gráficos, todavia o grupo 3 referiu que também tinha usado os dados das tabelas.

Os alunos para darem resposta às questões apresentadas na tarefa recorreram a múltiplas representações das Funções em estudo, resumindo-se no seguinte quadro:

Quadro 4 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões.*

PERGUNTA		GRUPOS				
		I	II	III	IV	V
2		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
	b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabelar
	c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular
	e)	Gráfica	Gráfica	Tabular/ Gráfica	Gráfica	Gráfica

Na discussão em grande grupo questionei os alunos sobre as vantagens/desvantagens da utilização do *Geogebra* na resolução da tarefa, podendo-se resumir nas seguintes conclusões:

- o *Geogebra* torna mais fácil e rápido o preenchimento de tabelas, porque basta saber como se determina o primeiro valor da tabela que depois basta copiar a expressão e automaticamente se fica a conhecer os restantes valores:

  Rui (grupo 4): O meu grupo usou a folha de cálculo porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão.

  Bárbara (grupo 3): Pois quando descobrimos como fazemos para o primeiro já sabemos as outras todas, ou seja, quando descobrimos a fórmula do primeiro já temos para os outros todos.

- quanto à representação de pontos no referencial cartesiano através do *Geogebra* referiram que, quando é a partir dos dados que constam na folha de cálculo, é uma forma mais rápida e mais rigorosa do que quando são representados no papel:

  Bárbara (grupo 3): É mais rápido porque não temos que estar a representar um a um e é mais rigoroso.

Nesta aula os alunos manifestaram-se um pouco receosos de errar, o que os impediu, principalmente durante a discussão, de exporem as suas opiniões. A discussão dos resultados e das estratégias de resolução foi muito difícil, dada a pouca participação por parte dos alunos, tendo contribuído para isso o facto de ser eu, que não era a professora deles, a guiar a discussão, verificando-se por parte dos alunos a necessidade de consentimento/aprovação da professora titular da turma, antes de me transmitirem as suas ideias.

O grupo 1 e 2 foram os menos participativos e os que manifestaram mais dificuldades. Os grupos 3 e 5, foram os mais participativos e empenhados durante a realização da tarefa e a discussão. O grupo 4 mostrou-se pouco motivado e empenhado.

Tarefa 2 - As informações dadas pelas funções y=mx+b

Para a realização da tarefa 2 foi dado aos alunos um ficheiro base, do *Geogebra*, para responderem às questões apresentadas. Desse ficheiro, fazia parte a representação gráfica e algébrica de uma função do tipo $y=mx+b$ e selectores, que permitiam a alteração dos parâmetros m e b.

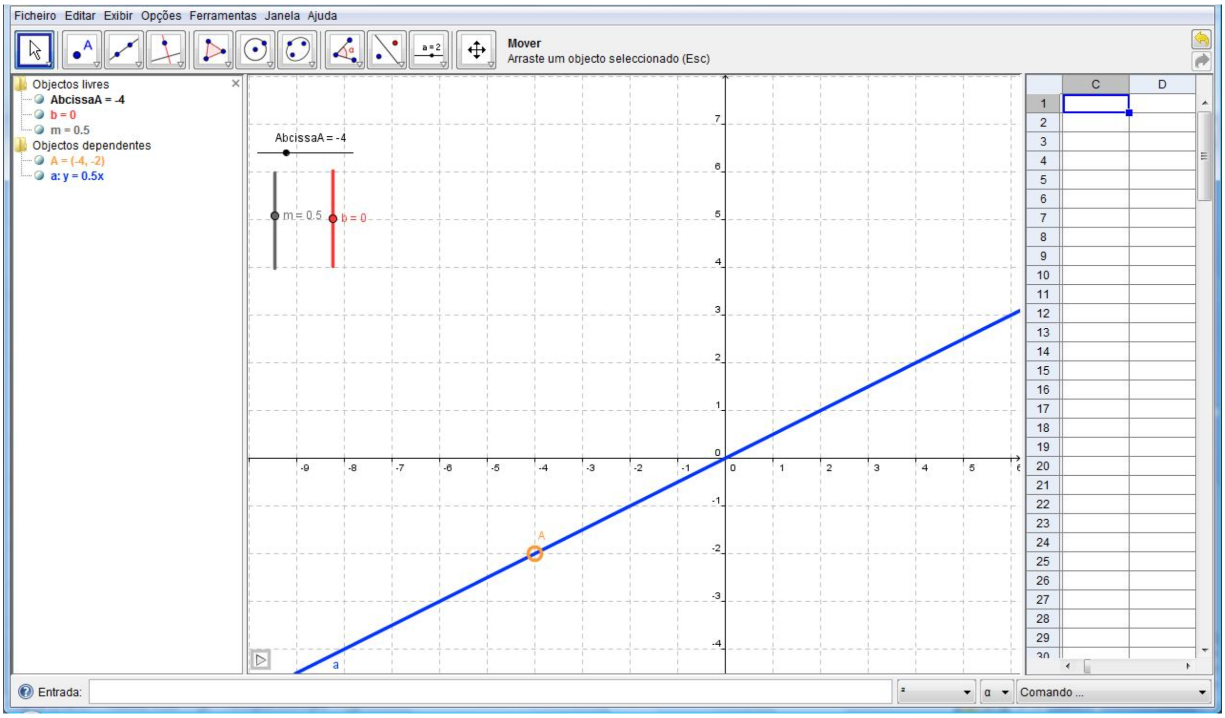


Figura 44 - **Janela do ficheiro disponibilizado para resolução da tarefa.**

Na pergunta 2a), onde era solicitado aos alunos que representassem graficamente a função $y=3x+2$, através da observação directa na sala de aula, constatei que todos os alunos usaram o procedimento apresentado no enunciado da tarefa, não se tendo verificado dúvidas.

Na pergunta 2b), os alunos tinham que preencher a tabela, relativa há função apresenta, recorrendo às ferramentas do *Geogebra*. Os grupos apresentaram as seguintes respostas:

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Figura 45 - **Tabela preenchida pelo grupo 1.**

Para completarmos a tabela utilizamos o selector da Abcissa A*, e para determinarmos o valor de $\frac{2}{3}$ recorremos a folha de cálculo, fazendo $= 3\times(-2/3)+2$.

* depois movimentavamos e verificavamos na zona Algébrica,

Figura 46 - **Resposta do grupo 1.**

2. b)

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Pra encontrarmos os valores procuramos na folha de calculo, na parte algébrica e na parte grafica.

Figura 47 - **Resposta apresentada pelo grupo 2.**

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	-0,1	2	5	8

Figura 48 – **Tabela preenchida pelo grupo 3.**

Nós para completar a tabela recorremos ao gráfico onde movemos a abcissa A para conhecermos os resultados considerando a função $y=3x+2$

E para calcular $-\frac{2}{3}$ do x recorremos à folha de calculo.

Figura 49 - **Resposta apresentada pelo grupo 3.**

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Figura 50 - **Tabela apresentada pelo grupo 4.**

b) Para completar a tabela procurámos os valores no selector para determinar a imagem de $-\frac{2}{3}$ utilizamos a expressão algébrica na folha de calculo.

Para saber os outros valores procuramos na tabela que estava na folha de calculo.

Figura 51 - **Resposta apresentada pelo grupo 4.**

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Figura 52 - **Tabela apresentada pelo grupo 5.**

(b) Recorrendo à "AbcissaA" podemos determinar os valores de y sabendo os valores de x.
Para podermos determinar os valores de x, tendo os valores de y, recorremos à folha de cálculo.
Mas para conseguirmos determinar o valor de y sendo x = -2/3 Recorremos à folha cálculo, calculando -2/3 e substituindo os valores na expressão algébrica → y = mx + b.

Figura 53 - **Resposta apresentada pelo grupo 5.**

-0.67	0		
-10	-28		
17	[illegible]		

Número H35: 3 G35 + 2

Figura 54 - **Procedimento utilizados pelos grupos 1, 2, 4 e 5 para determinar a imagem de $-\frac{2}{3}$.**

Para preenchimento das tabelas todos os grupos recorreram ao selector "AbcissaA" e à folha de cálculo para determinar a imagem de $-\frac{2}{3}$. Para consultarem os valores de *x* e *y*, houve grupos que consultaram na zona algébrica e outros na folha de cálculo.

O grupo 2 apresentou um valor incorrecto para x, quando y=2, pois assumiram x=2 e não y=2.

O grupo 3 apresentou um valor incorrecto para a imagem de $-\frac{2}{3}$, uma vez que recorreram aos dados registados na folha de cálculo, usando um valor aproximado de $-\frac{2}{3}$ (-0,6).

Na questão 2c) i) em que era pedido aos alunos para determinarem a imagem de dois objectos, recolheram-se as seguintes respostas:

i) A imagem de 10 é 32, e a imagem -6 é - 16. Verificamos esses valores na zona Algébrica.

Figura 55 - **Resposta do grupo 1.**

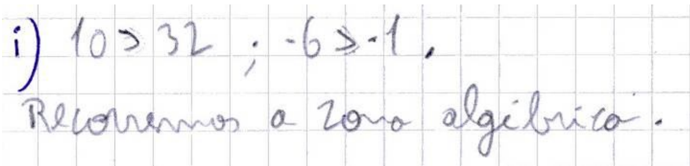

i) 10 → 32 ; -6 → -1,
Recorremos a zona algébrica.

Figura 56 - **Resposta do grupo 2.**

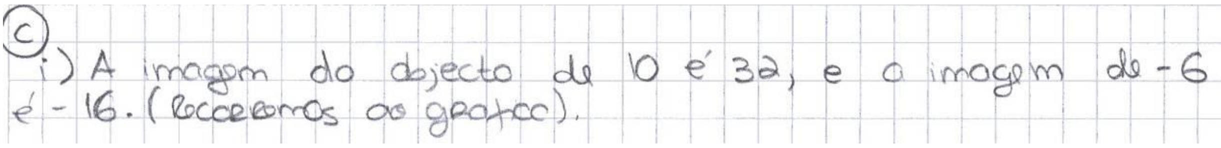

c) i) A imagem do objecto de 10 é 32, e a imagem de -6 é -16. (Recorremos ao gráfico).

Figura 57 - **Resposta do grupo 3.**

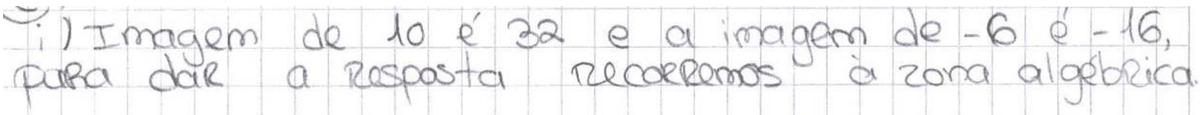

i) Imagem de 10 é 32 e a imagem de -6 é -16, para dar a resposta recorremos à zona algébrica

Figura 58 - **Resposta do grupo 4.**

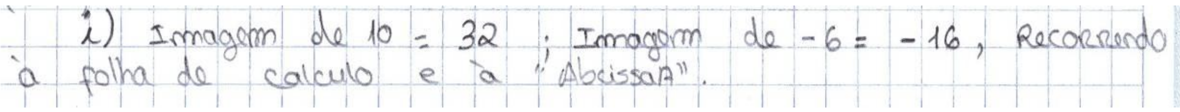

i) Imagem de 10 = 32 ; Imagem de -6 = -16, Recorrendo à folha de calculo e à "Abcissa".

Figura 59 - **Resposta do grupo 5.**

A partir da análise das respostas apresentadas pelos grupos, verifiquei que todos os grupos recorreram à zona gráfica (usando o selector "Abcissa") e uma outra representação disponibilizada pelo *Geogebra*, à excepção do grupo 3. O grupo 3 usou somente a representação gráfica para dar a resposta. Os grupos 1, 2 e 4, usaram a representação gráfica e a representação do ponto como um par ordenado (zona algébrica). O grupo 5, usou a representação gráfica e recorreu à folha de cálculo (representação tabular) para averiguar qual a imagem do objecto dado.

Na pergunta 2c)ii) foi pedido aos alunos que determinassem os objecto que tinham como imagem os valores dados. Os alunos apresentaram as seguintes respostas:

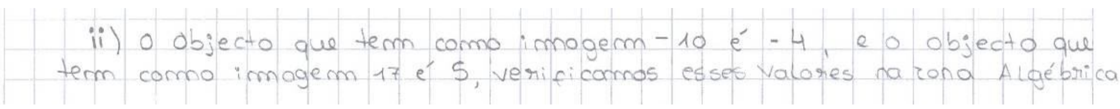

ii) o objecto que tem como imagem -10 é -4, e o objecto que tem como imagem 17 é 5, verificamos esses valores na zona Algébrica

Figura 60 - **Resposta do grupo 1.**

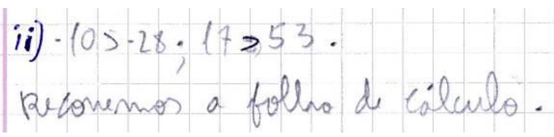

ii) -10 → -2,8 ; 17 → 5,3.
Recorremos a folha de cálculo.

Figura 61 - **Resposta do grupo 2.**

ii) O objecto que tem a imagem -10 é -4, e o objecto que tem como imagem 17 é 5. (Recorremos à zona gráfica e a folha de cálculo.

Figura 62 - **Resposta do grupo 3.**

ii) O objecto que tem como imagem -10 é 4 e 17 é 5

Figura 63 - **Resposta do grupo 4.**

ii) objecto de -10 = -4 ; objecto de 17 = 5 , Recorrendo à folha de cálculo.

Figura 64 - **Resposta do grupo 5.**

Para determinar o objecto sendo dado o valor da imagem os alunos recorreram à representação gráfica e tabular. A zona gráfica foi utilizada como auxiliar para representação do ponto através do selector “AbcissaA”, tendo sido consultado, posteriormente, o valor da abcissa na tabela criada automaticamente na folha de cálculo, aquando da deslocação do ponto A.

Ao recurso a este procedimento foram excepção os grupos 1 e 4, os quais usaram o procedimento a que haviam recorrido na pergunta anterior.

Os procedimentos descritos anteriormente fogem ao que era esperado os alunos utilizarem, uma vez que o selector “AbcissaA” é o valor do objecto que pretendiam encontrar. Poder-se-á afirmar que os alunos viram o selector, apenas como uma ferramenta para poderem deslocar o ponto A sobre o gráfico da função.

Na pergunta 2c) iii), existe mais do que um objecto com a mesma imagem, os grupos apresentaram as seguintes respostas:

iii) Não, porque nenhuma imagem se repete.

Figura 65 - **Resposta do grupo 1.**

iii) Sim. Porque cada imagem podem ter mais que um objecto.

Figura 66 - **Resposta do grupo 2.**

iii) Não, pois é uma recta e nenhuma imagem se repete.

Figura 67 - **Resposta do grupo 3**

iii) Não

Figura 68 - **Resposta do grupo 4.**

iii) Não, porque nenhuma imagem se repete pois quando mexemos no x o y muda também.

Figura 69 - **Resposta do grupo 5.**

A resposta apresentada pelo grupo 2 não está correcta.

Através das respostas apresentadas e também pela informação recolhida durante a discussão, verifica-se que os alunos recorreram à representação gráfica da função para elaborarem as suas respostas.

Na pergunta 2 c) iv), em que valores é que a função intersecta o eixo das abcissas e o das ordenadas, foram apresentas as seguintes respostas:

iv) os valores em que a função intersecta o eixo das obcissas e das ordenadas são: (2 ; −0,7)

Eixo das ordenadas: 2
Eixo das Abcissas: −0,7

Figura 70 - **Resposta do grupo 1.**

iv) Intersectam-se no −0,67 aproximadamente.
Recorremos à folha de cálculo e parte gráfica.

Figura 71 - **Resposta do grupo 2.**

iv)
B=(0,2)
intersecção entre o ponto B e o eixo de coordenada y.

C=(−0,57,0)
intersecção entre o ponto C e o eixo de coordenada x.

Figura 72 - **Resposta do grupo 3.**

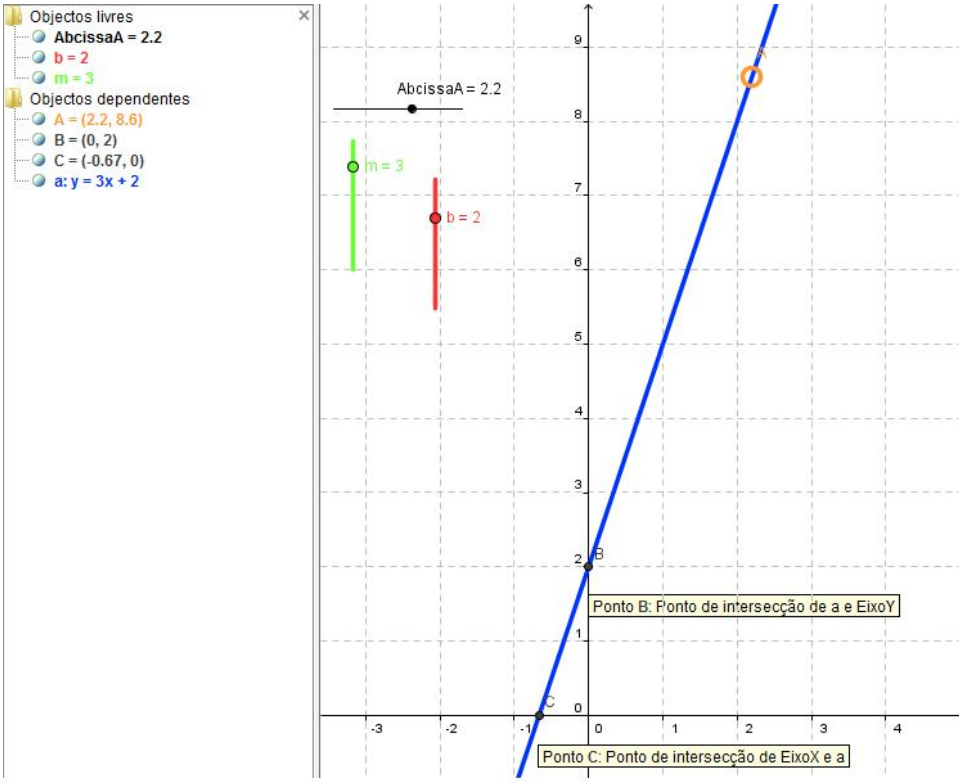


Figura 73 - **Procedimento utilizado pelo grupo 3.**

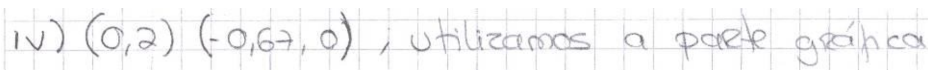


Figura 74 - **Resposta do grupo 4.**

Figura 75 - **Resposta do grupo 5.**

Após uma análise das respostas anteriores e dos ficheiros do *Geogebra* de cada um dos grupos, posso então referir as representações e procedimentos utilizados pelos grupos de forma fundamentada.

O grupo 1 recorreu às mesmas representações e procedimentos que referiram nas alíneas i) e ii). Este grupo viu-se forçado a apresentar um valor aproximado para o valor de x quando y=0, porque o selector não permite localizar exactamente esse ponto de intersecção.

O grupo 2 só determinou o ponto de intersecção com o eixo das abcissas, tendo recorrido à informação já disponível desde que havia preenchido a tabela.

O grupo 3, valeu-se da representação gráfica e das ferramentas do *Geogebra*, determinando os dois pontos de intersecção, da função com o eixo das abcissas e o da função com o eixo das ordenadas.

Já os grupos 4 e 5 usaram para determinar o ponto de intersecção da função com o eixo das ordenadas o procedimento descrito para as alíneas i) e ii), dado que este ponto é fácil localizar através da alteração do selector “AbcissaA”. Dada a dificuldade de localizar o ponto de intersecção com o eixo das abcissas, os grupos procederam da mesma forma que o grupo 3.

Os grupos quando questionados sobre a monotonia da função, na pergunta 2 c) v), apresentaram as seguintes respostas:

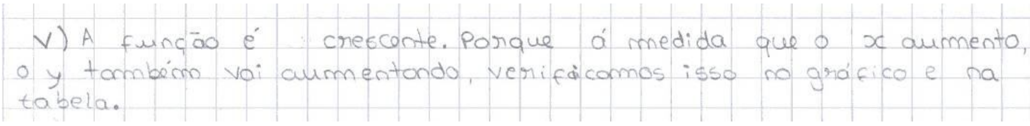

v) A função é crescente. Porque á medida que o x aumenta, o y também vai aumentando, verificamos isso no gráfico e na tabela.

Figura 76 - **Resposta do grupo 1.**

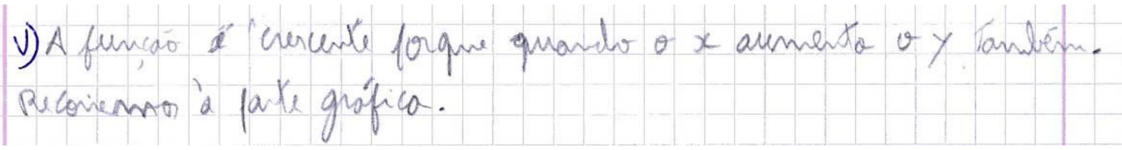

v) A função é crescente porque quando o x aumenta o y também. Recorremos à parte gráfica.

Figura 77 - **Resposta do grupo 2.**

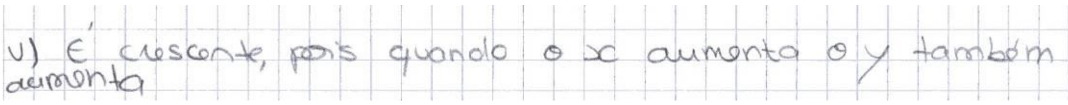

v) É crescente, pois quando o x aumenta o y também aumenta

Figura 78 - **Resposta do grupo 3.**

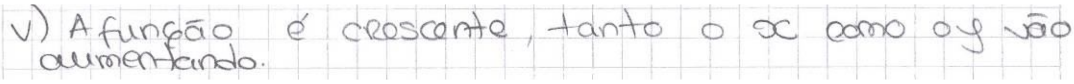

v) A função é crescente, tanto o x como o y vão aumentando.

Figura 79 - **Resposta do grupo 4.**

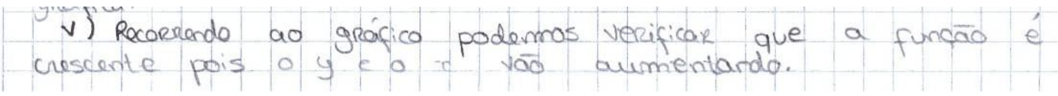

v) Recorrendo ao gráfico podemos verificar que a função é crescente pois o y e o x vão aumentando.

Figura 80 - **Resposta do grupo 5.**

Nestas respostas houve consenso entre os grupos, tendo todos eles recorrido à representação gráfica.

No estudo da influência do parâmetro *m*, na monotonia da função, os alunos apresentaram as seguintes conclusões:

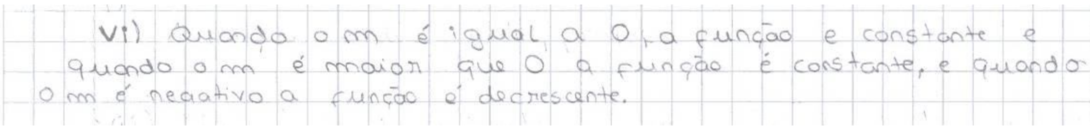

vi) Quando o m é igual a 0, a função é constante e quando o m é maior que 0 a função é constante, e quando o m é negativo a função é decrescente.

Figura 81 - **Resposta do grupo 1.**

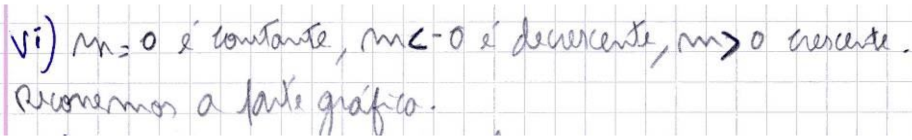

vi) m=0 é constante, m<0 é decrescente, m>0 crescente. Recorremos a parte gráfica.

Figura 82 - **Resposta do grupo 2.**


vi) quando o m é menor que zero é decrescente, quando é igual a 0 é constante e quando o m é maior que zero é crescente.

Figura 83 - **Resposta do grupo 3.**

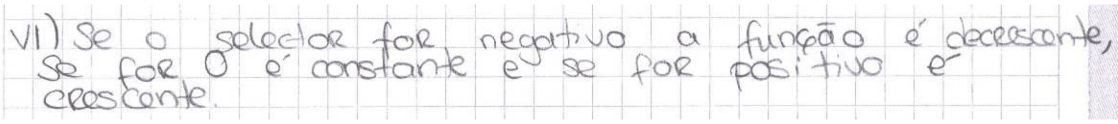

VI) Se o selector for negativo a função é decrescente, se for 0 é constante e se for positivo é crescente.

Figura 84 - **Resposta do grupo 4.**

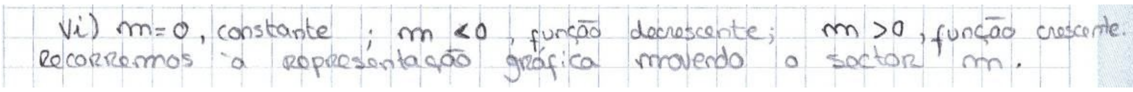

vi) m=0, constante ; m <0, função decrescente; m >0, função crescente. Recorremos à representação gráfica movendo o sector m.

Figura 85 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos usaram o selector "m" para fazer variar o parâmetro e posteriormente observaram e analisaram o gráfico, tendo conseguido obter as conclusões correctas.

Após a análise da influência do parâmetro *b* nas funções afim, com recurso ao selector "b", os alunos apresentaram as seguintes conclusões:

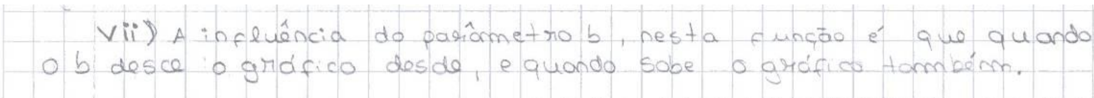

vii) A influência do parâmetro b, nesta função é que quando o b desce o gráfico desce, e quando sobe o gráfico também.

Figura 86 - **Resposta do grupo 1.**

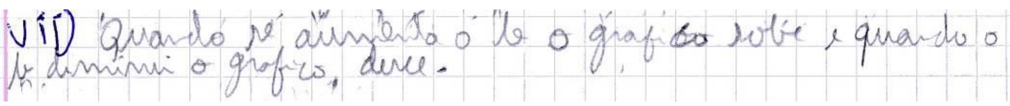

vii) Quando se aumenta o b o gráfico sobe e quando o b diminui o gráfico desce.

Figura 87 - **Resposta do grupo 2.**

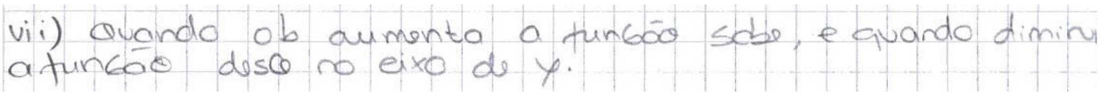

vii) quando o b aumenta a função sobe, e quando diminui a função desce no eixo do y.

Figura 88 - **Resposta do grupo 3.**

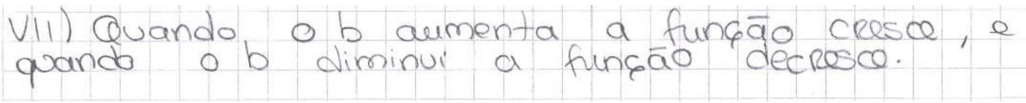

VII) Quando o b aumenta a função cresce, e quando o b diminui a função decresce.

Figura 89 - **Resposta do grupo 4.**

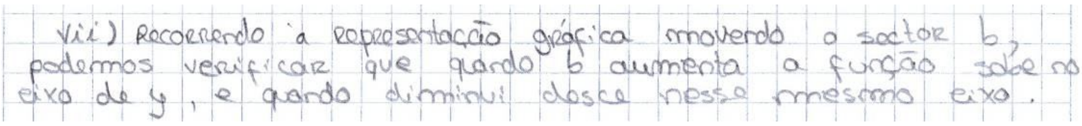

vii) Recorrendo à representação gráfica movendo o sector b, podemos verificar que quando b aumenta a função sobe no eixo do y, e quando diminui desce nesse mesmo eixo.

Figura 90 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos, à excepção do grupo 4, apresentaram correctamente as conclusões sobre a influência do parâmetro b.

Os alunos para darem resposta às questões apresentadas na tarefa recorreram a múltiplas representações da função em estudo, resumindo-se no quadro seguinte:

Quadro 5 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões*

PERGUNTA		**GRUPOS**				
		I	II	III	IV	V
2 b)		Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica
2c)	i)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular
	ii)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular
	iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	iv)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular
	v)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	vi)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	vii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

.

Nesta aula, comparativamente à primeira aula, os alunos mostraram-se mais participativos durante a realização da tarefa e na discussão em grande grupo.

Ao longo da realização da tarefa não demonstraram dificuldades, mostraram-se empenhados e motivados.

Esta tarefa foi considerada, por unanimidade, mais fácil que anterior.

Tarefa 3 - As folhas de papel que usamos

Na primeira questão, desta tarefa, é dado um exemplo, esquematicamente, de alteração da forma da folha A4 e é posteriormente questionado se a área sofre alterações.

Os grupos apresentaram as seguintes respostas:

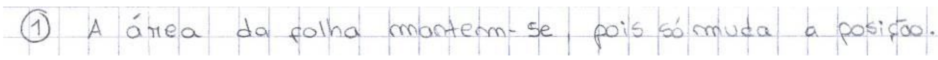

① A área da folha mantem-se, pois só muda a posição.

Figura 91 - **Resposta do grupo 1.**


1- A área fica igual porque o tamanho da folha não se alterou.

Figura 92 - **Resposta do grupo 2.**

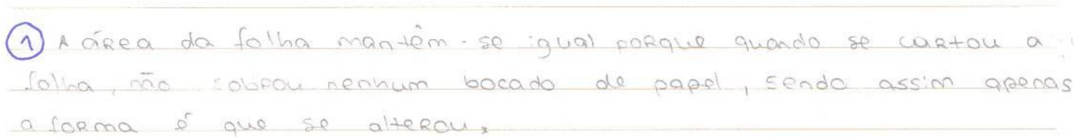

① A área da folha mantêm-se igual porque quando se cortou a folha, não sobrou nenhum bocado de papel, sendo assim apenas a forma é que se alterou.

Figura 93 - **Resposta do grupo 3.**

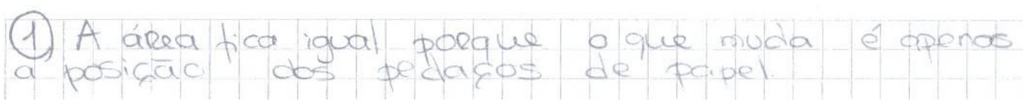

① A área fica igual porque o que muda é apenas a posição dos pedaços de papel.

Figura 94 - **Resposta do grupo 4.**

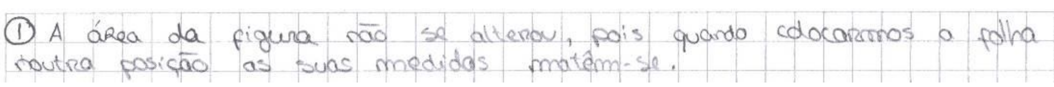

① A área da figura não se alterou, pois quando colocarmos a folha noutra posição as suas medidas mantêm-se.

Figura 95 - **Resposta do grupo 5.**

A partir da análise da representação esquemática apresentada no enunciado da tarefa, todos os grupos referiram que a área se iria manter e que a forma se alterava.

Na pergunta 2, era questionado se existem rectângulos com outras dimensões que tenham a mesma área que a folha A4 e era solicitado que indicassem três exemplo, sendo dadas as seguintes respostas:

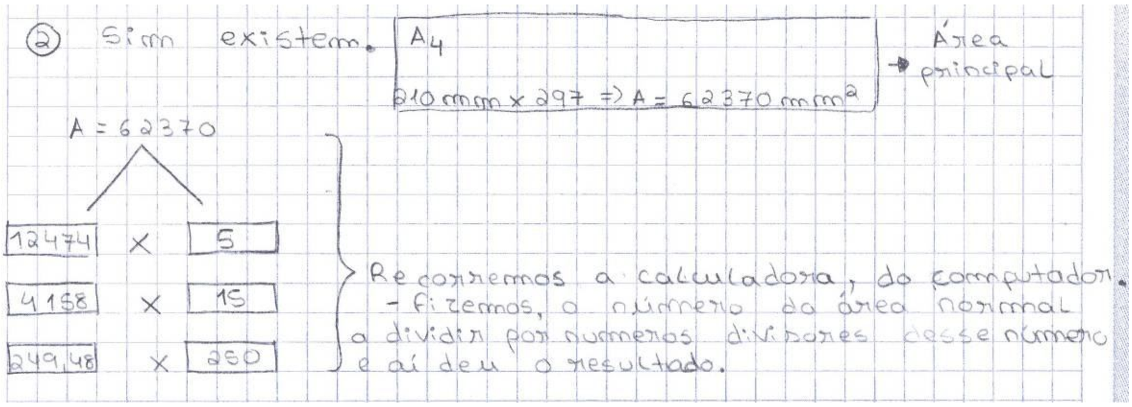


Figura 96 **- Resposta do grupo 1.**

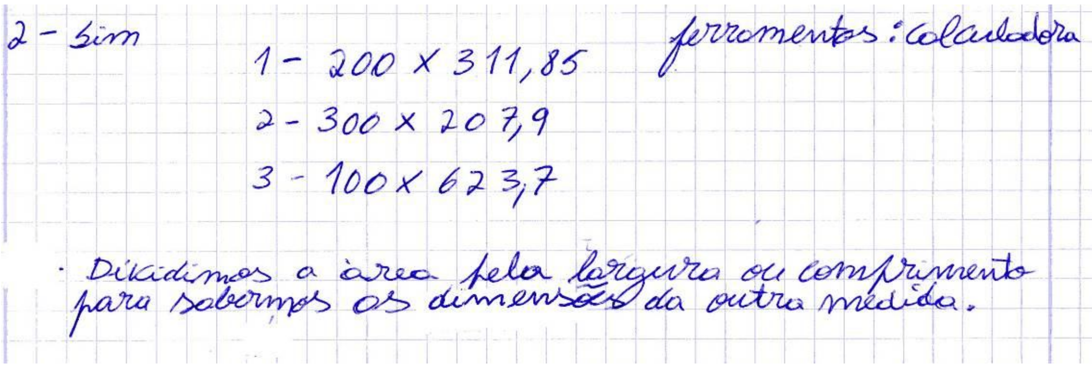


Figura 97 **- Resposta do grupo 2.**

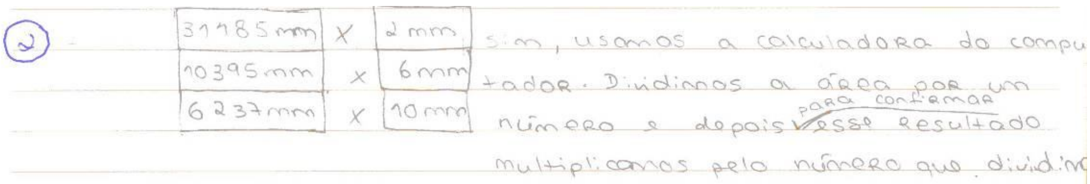


Figura 98 **- Resposta do grupo 3.**

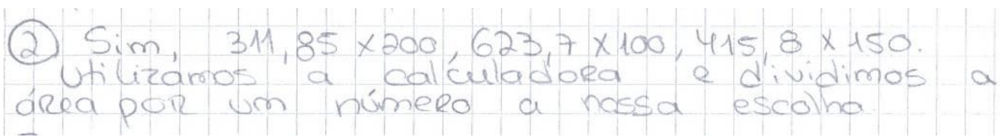


Figura 99 **- Resposta do grupo 4.**

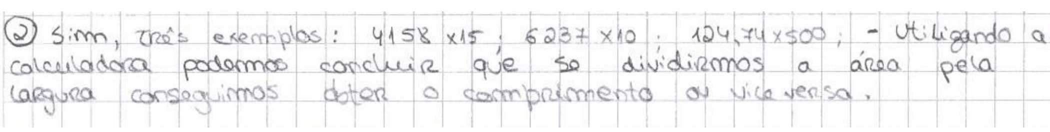
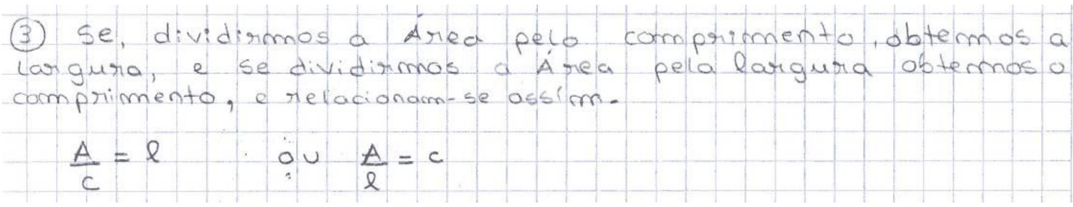


Figura 100 **- Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos de alunos, responderam afirmativamente à existência de outros rectângulos com dimensões diferentes e com a mesma área que a folha A4. Fez também parte das respostas a apresentação de exemplos de rectângulos com dimensões diferentes das medidas da folha A4. Para determinarem as medidas, os alunos, não recorreram a ferramentas do *Geogebra*, usaram a calculadora do computador. No entanto, durante a discussão final da tarefa, quando inquiridos se era possível ou não determinar diferentes medidas de comprimento e largura mantendo a área com recurso ao *Geogebra*, de uma forma geral todos referiram a folha de cálculo, fazendo um paralelismo com as actividades realizadas anteriormente no que diz respeito ao preenchimento das tabelas.

Na pergunta 3, é pedido que os alunos descrevam a relação estabelecida entre as variáveis e para a traduzirem através de uma expressão matemática. Os alunos apresentaram as seguintes respostas:


3 Se, dividirmos a Área pelo comprimento, obtemos a largura, e se dividirmos a Área pela largura obtemos o comprimento, e relacionam-se assim.

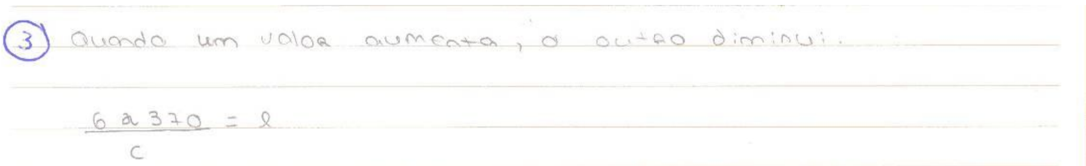
$\frac{A}{c} = l$ ou $\frac{A}{l} = c$

Figura 101 - **Resposta do grupo 1.**


· Dividimos a àrea pela largura ou comprimento para sabermos as dimensões da outra medida.

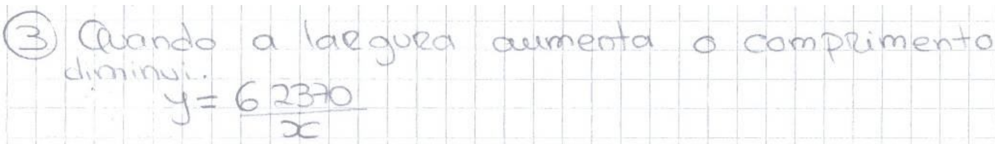
3 - Quando a largura aumenta . o comprimento diminui e Viaversa $f(x) = 62\,370 : x$

Figura 102 - **Resposta do grupo 2.**


3 Quando um valor aumenta, o outro diminui.

$\frac{62\,370}{c} = l$

Figura 103 - **Resposta do grupo 3.**


3 Quando a larguea aumenta o comprimento diminui.

$y = \frac{62\,370}{x}$

Figura 104 - **Resposta do grupo 4.**

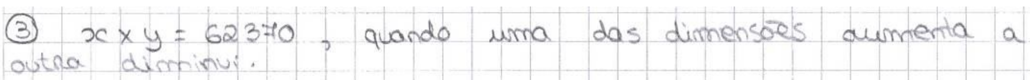

3 $x \times y = 62\,370$, quando uma das dimensões aumenta a outra diminui.

Figura 105 - **Resposta do grupo 5.**

Os alunos definiram a relação entre as variáveis através da observação e análise dos exemplos que apresentaram, foi evidenciada essa estratégia durante a discussão:

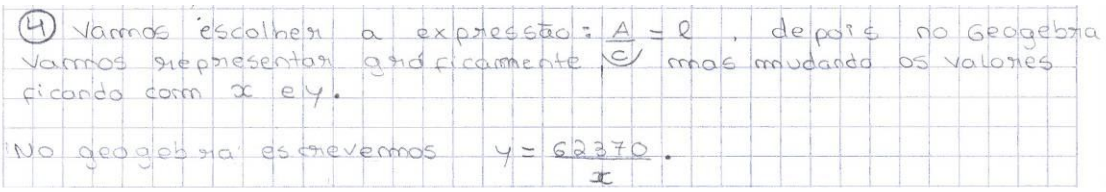
Mafalda (grupo 3): Se no primeiro exemplo a largura for “15 cm” e a seguir for “20 cm”, no comprimento é ao contrário, este vai descendo, então quando uma medida aumenta a outra diminui.

Foi com facilidade que os alunos escreveram a expressão algébrica, tendo o grupo 1 e 2 apresentado a estratégia utilizada de forma clara.

O grupo 5 apesar de ter realizado o mesmo procedimento apresentou uma expressão diferente, baseando-se na expressão utilizada para determinar a área de um rectângulo.

Todos os grupos consideraram a variável *x* como o comprimento e *y* a largura.

Na pergunta 4, era pedido aos alunos que representassem graficamente a expressão algébrica determinada anteriormente, no *Geogebra*. Em seguida, serão apresentadas as descrições dos procedimentos utilizados por cada grupo:


④ Vamos escolher a expressão: $\frac{A}{c} = l$, depois no Geogebra vamos representar graficamente mas mudando os valores ficando com x e y.

No geogebra escrevemos $y = \frac{62370}{x}$.

Figura 106 - **Resposta do grupo 1.**

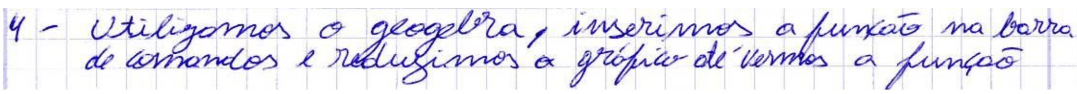

4 - Utilizamos o geogebra, inserimos a função na barra de comandos e reduzimos o gráfico de vermos a função

Figura 107 - **Resposta do grupo 2.**

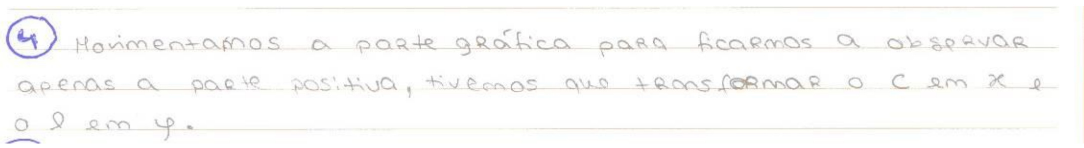

④ Movimentamos a parte gráfica para ficarmos a observar apenas a parte positiva, tivemos que transformar o C em x e o l em y.

Figura 108 - **Resposta do grupo 3.**

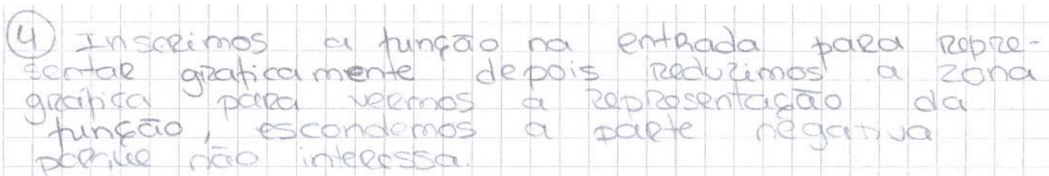

④ Inserimos a função na entrada para representar graficamente depois reduzimos a zona gráfica para vermos a representação da função, escondemos a parte negativa porque não interessa.

Figura 109 - **Resposta do grupo 4.**

(4) Introduzindo a seguinte formula: $y = \frac{62370}{x}$ na entrada de comando do Geogebra, e a reduzirmos a área gráfica, e podemos concluir que a parte que nos interessa da função é a parte positiva.

Figura 110 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos recorreram à barra de entrada introduzindo a expressão algébrica para representarem graficamente a função. Fez parte do procedimento o ajuste da janela de visualização ao contexto do problema.

Na última pergunta, era dada a medida do comprimento da folha A4 e os alunos tinham que determinar a altura, de forma a manter a área. Os grupos apresentaram as seguintes respostas:

(5) A altura, vai ser de 207,89. Recorremos ao Geogebra, fomos procurar o ponto de coordenada √300, marcamos mais ou menos aproximado e de seguida andamos com a seta até chegar ao ponto mais próximo do 300. (300,02).

Figura 111 - **Resposta do grupo 1.**

5 - Se o comprimento da folha A4 for 300 mm a altura terá 207,9 mm porque recorremos à resposta anterior.

Figura 112 - **Resposta do grupo 2.**

(5) Se o comprimento da folha A4 for 300 mm a altura será 207,9. (Recorremos à representação gráfica fazendo a intersecção com a recta de x = 300 mm).

Figura 113 - **Resposta do grupo 3.**

(5) A altura terá 207,9 mm, recorremos a representação gráfica, mudamos a escala do quadriculado para 100 e marcamos o ponto 300.

Figura 114 - **Resposta do grupo 4.**

(5) Recorrendo à parte gráfica do Geogebra a imagem de 300 é 207,9 pois alterando a escala de forma a vermos o 300, marcamos um ponto e olhando para a zona algébrica vimos realmente o valor da imagem de 300 no eixo do y.

Figura 115 - **Resposta do grupo 5.**

Para responder a esta questão, os grupos 1, 3, 4 e 5 recorreram à representação gráfica, utilizando procedimentos distintos. O grupo 2 não necessitou determinar este valor, uma vez que era um dos exemplos que haviam apresentado.

Para sintetizar as representações a que recorreram os grupos para responder a cada uma das perguntas, segue-se o quadro:

Quadro 6 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões.*

PERGUNTA	**GRUPOS**				
	I	II	III	IV	V
1	Esquemática	Esquemática	Esquemática	Esquemática	Esquemática
2	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
3	Tabular	Tabular	Tabular	Tabular	Tabular
5	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

Os alunos reagiram com grande entusiasmo e empenho a esta tarefa, o que facilitou a apreensão dos conceitos introduzidos (funções de proporcionalidade inversa).

Tarefa 4 - Matemática por um Canudo

Os alunos iniciaram a tarefa 4 introduzindo os dados na folha de cálculo do *Geogebra* e posteriormente representaram os pontos na zona gráfica, com recurso à ferramenta “criar lista de pontos”. Em seguida, era pedido que analisassem o comportamento das variáveis, obtendo-se as seguintes respostas:

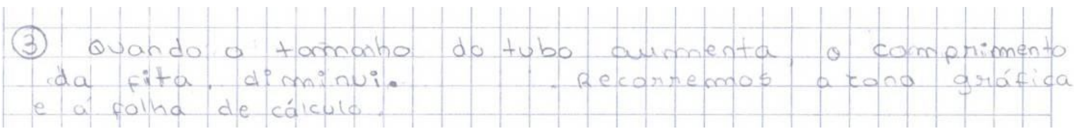


Figura 116 - **Resposta do grupo 1.**

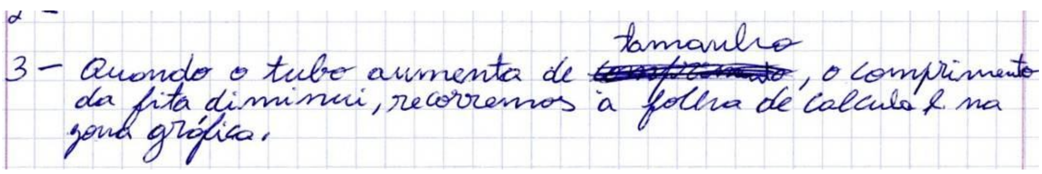


Figura 117 - **Resposta do grupo 2.**

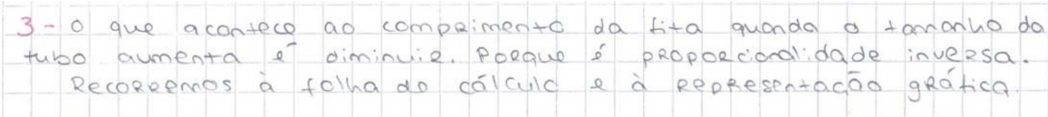

3 - O que acontece ao comprimento da fita quando o tamanho do tubo aumenta é diminuie. Porque é proporcionalidade inversa.
Recorremos à folha do cálculo e à representação gráfica.

Figura 118 - **Resposta do grupo 3.**


Quando o tamanho do tubo aumenta o comprimento da fita diminui. Recorremos à tabela.

Figura 119 - **Resposta do grupo 4.**

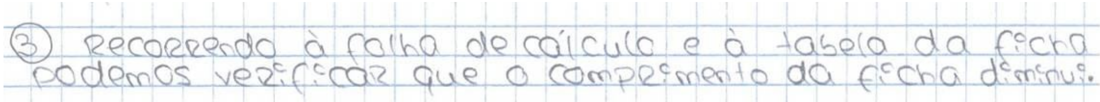

③ Recorrendo à folha de cálculo e à tabela da ficha podemos verificar que o comprimento da ficha diminui.

Figura 120 - **Resposta do grupo 5**

Os grupos a partir da análise da representação gráfica e tabular dos dados recolhidos descreveram o comportamento das variáveis e identificaram o tipo de relação em estudo com facilidade:


④ Esta é uma situação de proporcionalidade inversa, porque no gráfico representa uma hipérbole, e também as variáveis (tamanho do tubo e comprimento da fita) quando uma diminuia outra aumenta.

Figura 121 - **Resposta do grupo 1.**

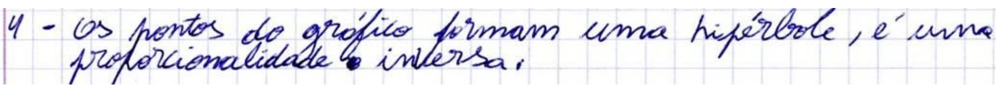

4 - Os pontos do gráfico formam uma hipérbole, é uma proporcionalidade inversa.

Figura 122 - **Resposta do grupo 2.**

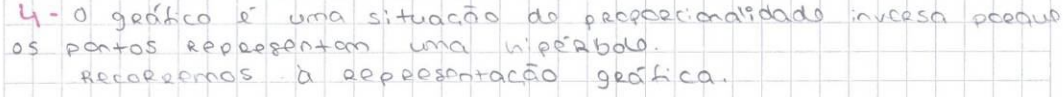

4 - O gráfico é uma situação de proporcionalidade inversa porque os pontos representam uma hipérbole.
Recorremos à representação gráfica.

Figura 123 - **Resposta do grupo 3.**

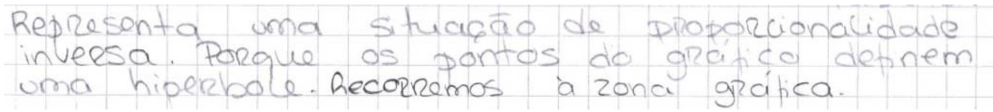

Representa uma situação de proporcionalidade inversa. Porque os pontos do gráfico definem uma hipérbole. Recorremos à zona gráfica.

Figura 124 - **Resposta do grupo 4.**

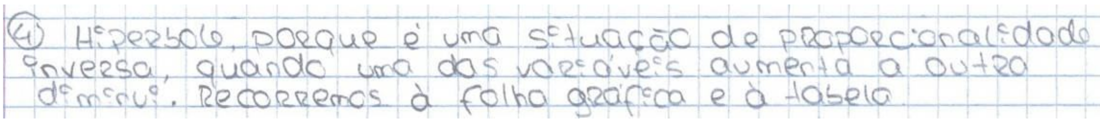


Figura 125 - **Resposta do grupo 5.**

Na pergunta 5, era pedido que escrevessem a expressão algébrica que representasse a relação entre as variáveis. Como anteriormente já haviam identificado a relação como proporcionalidade inversa, todos os grupos começaram por determinar, na folha de cálculo do *Geogebra*, o produto entre as variáveis:

	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	Número C2: A2 B2	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	

Figura 126 - **Cálculos efectuados pelos grupos 1, 2, 4 e 5.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4	tamanho ...	80	70	50	44	40	30	23	20	10
5	comprime...	5	6	8	9	10	12	17	19	26
6	constante	400	420	400	396	400	360	391	380	260
7		Número B6: B5 B4								
8										

Figura 127 – **Cálculos efectuados pelo grupo 3.**

Para escreverem a expressão algébrica todos os alunos definiram 400 como a constante de proporcionalidade inversa, argumentado que era o valor que mais surgiu como resultado do produto das variáveis. Os grupos definiram então a expressão algébrica como:

Figura 128 - **Expressão algébrica apresentada pelos grupos 1, 2, 4 e 5.**

ou como,

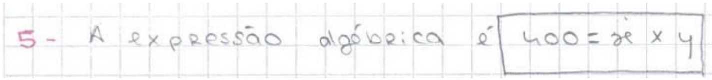

5- A expressão algébrica é $\boxed{400 = x \times y}$

Figura 129 - **Expressão algébrica definida pelo grupo 3.**

Na pergunta 6 a) era pedido que determinassem o comprimento de fita visualizado se se utilizasse um tubo de 60 cm e outro de 90 cm, os grupos apresentaram as seguintes respostas:

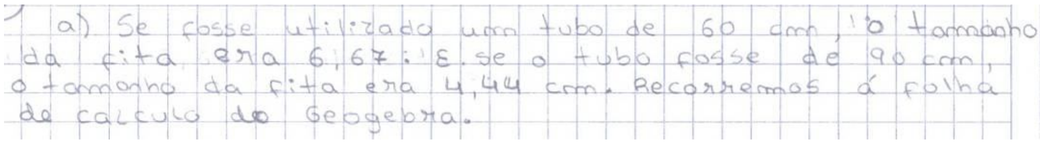

a) Se fosse utilizado um tubo de 60 cm, o tamanho da fita era 6,67. E se o tubo fosse de 90 cm, o tamanho da fita era 4,44 cm. Recorremos à folha de calculo do Geogebra.

Figura 130 - **Resposta do grupo 1.**


a)
Recorremos à zona gráfica marcando um ponto no comprimento da fita é de 6, e se fosse no tubo de 90 era de 4.

Figura 131 - **Resposta do grupo 2.**

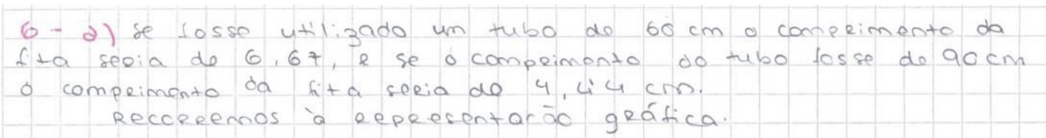

6 - a) se fosse utilizado um tubo de 60 cm o comprimento da fita seria de 6,67, e se o comprimento do tubo fosse de 90 cm o comprimento da fita seria de 4,44 cm.
Recorremos à representação gráfica.

Figura 132 - **Resposta do grupo 3.**

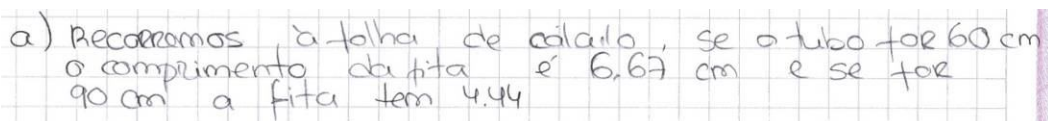

a) Recorremos à folha de cálculo, se o tubo for 60 cm o comprimento da fita é 6,67 cm e se for 90 cm a fita tem 4,44

Figura 133 - **Resposta do grupo 4.**

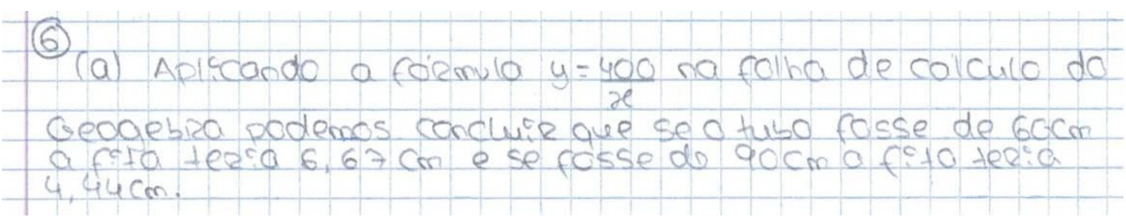

6 (a) Aplicando a fórmula $y = \frac{400}{x}$ na folha de calculo do Geogebra podemos concluir que se o tubo fosse de 60cm a fita teria 6,67 cm e se fosse de 90cm a fita teria 4,44cm.

Figura 134 - **Resposta do grupo 5.**

	A	B	C	D
1	Tam. Tubo	Comp. Fita		
2	80	5	400	
3	70	6	420	
4	50	8	400	
5	44	9	396	
6	40	10	400	
7	30	12	360	
8	23	17	391	
9	20	19	380	
10	10	26	260	
11	60	6.67		
12	90	4.44		
13	100	4		

Número **B11**: 400 / A11

Figura 135 – **Procedimento utilizado pelos grupos 1, 4 e 5.**

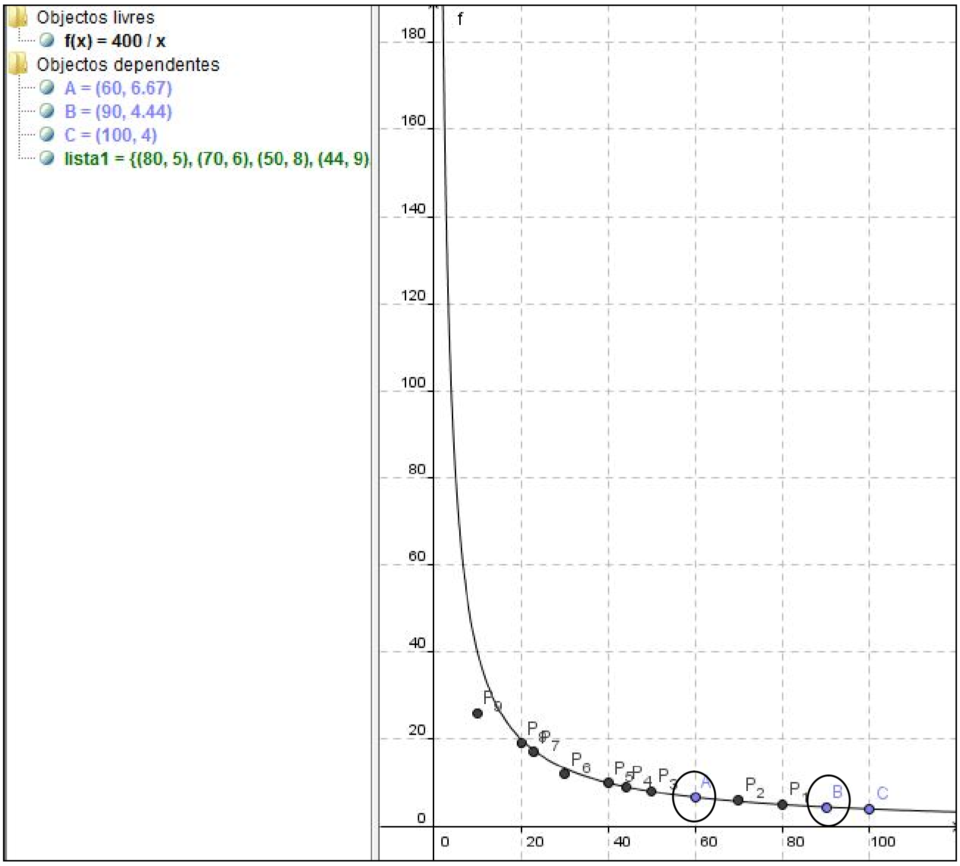


Figura 136 - **Procedimento utilizado pelo grupo 2.**

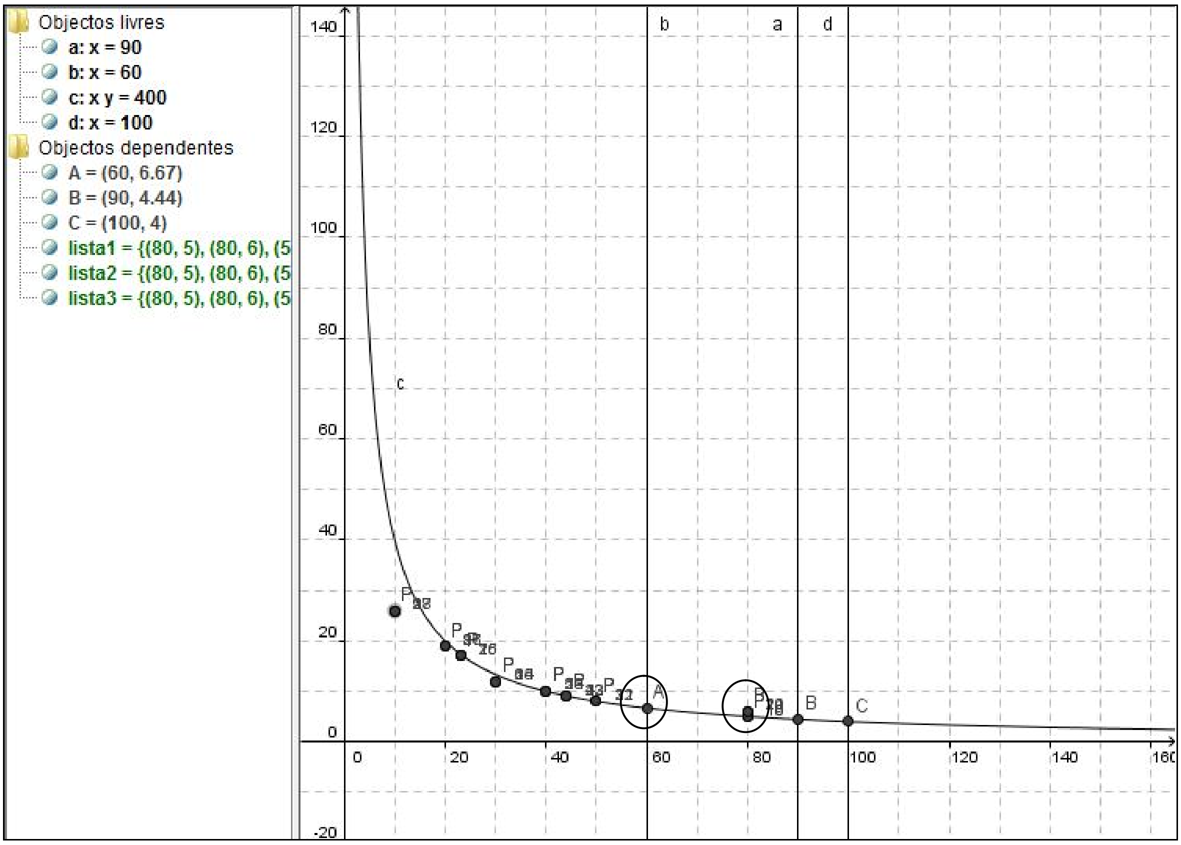


Figura 137 - **Procedimento utilizado pelo grupo 3.**

Todos os grupos determinaram os valores pedidos, tal como se pode ver anteriormente, pelas respostas e procedimentos. Estes últimos apesar de terem sido distintos, entre os grupos, quanto à representação utilizada, todos levaram aos mesmos resultados finais.

À pergunta 6 b), o que acontece ao tamanho da fita visualizada à medida que o tamanho se aproxima de 1 m, os grupos responderam:

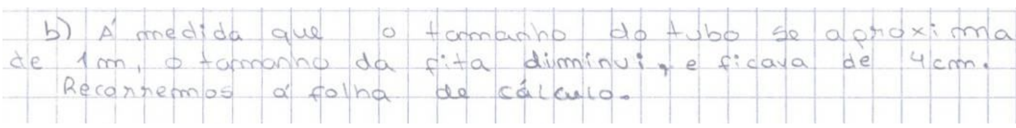


Figura 138 - **Resposta do grupo 1.**

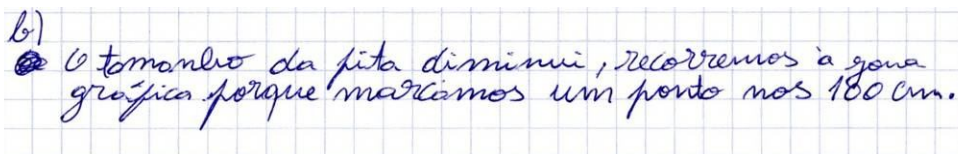
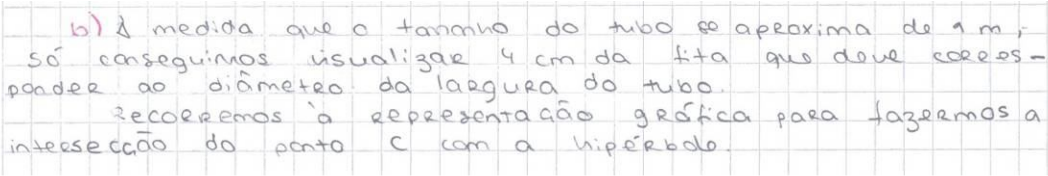
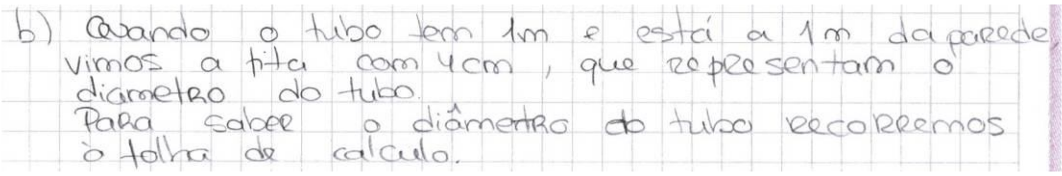


Figura 139 - **Resposta do grupo 2.**



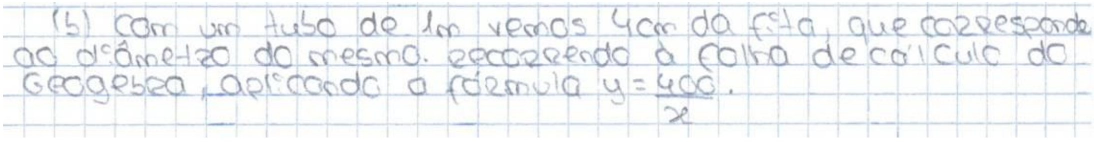
b) À medida que o tamanho do tubo se aproxima de 1 m, só conseguimos visualizar 4 cm da fita que deve corres-poder ao diâmetro da largura do tubo.
Recorremos à representação gráfica para fazermos a intersecção do ponto C com a hipérbole.

Figura 140 - **Resposta do grupo 3.**



b) Quando o tubo tem 1m e está a 1m da parede vimos a fita com 4cm, que representam o diametro do tubo.
Para saber o diâmetro do tubo recorremos à folha de calculo.

Figura 141 - **Resposta do grupo 4.**



(b) Com um tubo de 1m vemos 4cm da fita, que corresponde ao diâmetro do mesmo. recorrendo à folha de cálculo do Geogebra, aplicando a fórmula $y = \frac{400}{x}$.

Figura 142 - **Resposta do grupo 5.**

Nesta pergunta todos os alunos concluíram que à medida que o tamanho do tubo se aproxima de 1m (distância a que o observador se encontra da fita) o comprimento de fita visualizada aproxima-se do diâmetro do tubo. Os grupos recorreram aos mesmos procedimentos que haviam utilizado na pergunta anterior.

As representações a que os grupos recorreram para responder a cada uma das questões colocadas encontram-se sintetizadas no seguinte quadro:

Quadro 7 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões.*

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">PERGUNTA</th><th colspan="5">GRUPOS</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>a)</td><td>Algébrica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Algébrica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
</table>

Os alunos na resolução desta tarefa mostraram-se mais autónomos comparativamente com as primeiras tarefas, foram empenhados e revelaram grande motivação.

Tarefa 5 - Estudo das funções do tipo *$y=ax^2$*

Para resolução desta tarefa tal como na tarefa 2 também foi dado, aos alunos, um ficheiro que continha: um selector para o parâmetro *a* da função e um outro que permite movimentar o ponto A sobre o gráfico da função *f* com a opção "enviar traço para a folha de cálculo" activada, que permite enviar para a folha de cálculo as diferentes coordenadas do ponto A.

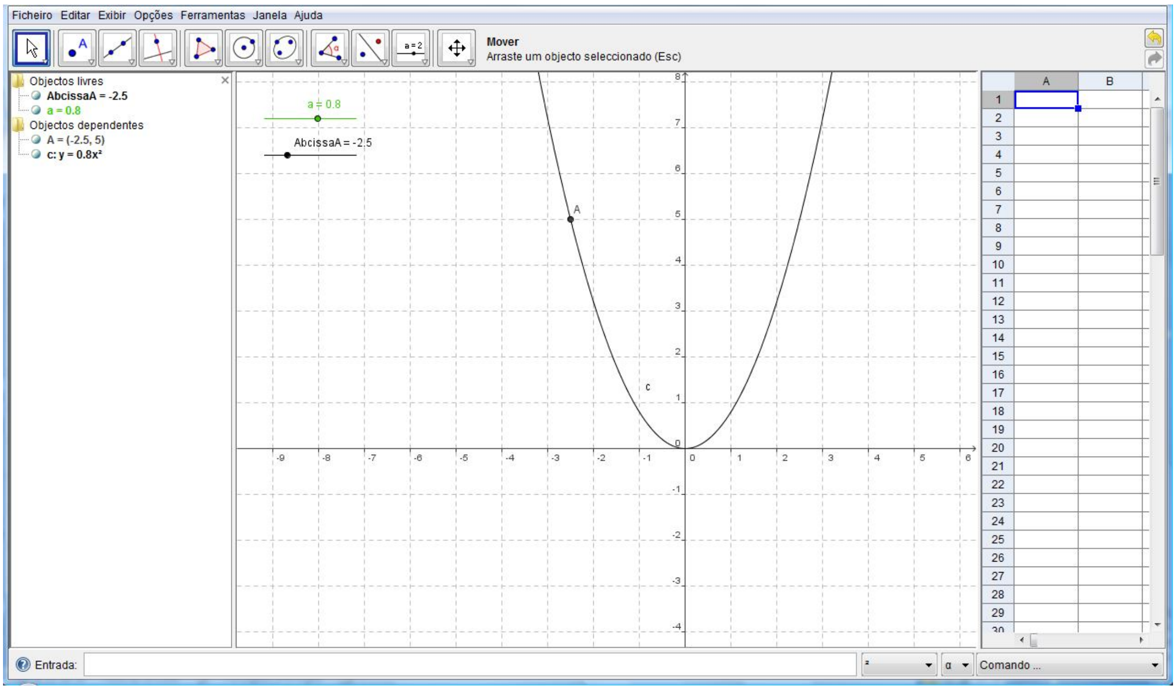


Figura 143 - **Janela do ficheiro disponibilizado aos alunos, para resolução da tarefa.**

Na pergunta 2b), completar a tabela referente à função $y=2x^2$, os grupos apresentaram as seguintes tabelas:

x	-3	2	0	1,5	3
y	18	8	0	4,5	18

Figura 144 - **Tabela do grupo 1.**

x	-3	-2	0	40,5	3
y	18	8	0	4,5	18

Figura 145 - **Tabela do grupo 2.**

x	-3	-2 | 2	0	-1,5 / 1,5	3
y	18	8	0	4,5	18

Figura 146 - **Tabela dos grupos 3, 4 e 5.**

Nesta tarefa, tal como na tarefa dois, os alunos para preencherem a tabela recorreram ao selector "AbcissaA" e ao registo da folha de cálculo:

② b) Para completar a tabela movemos os pontos da AbcissaA, para vermos os valores de baixo, e apareceram na folha de cálculo, e para completar os valores de cima fomos ver também na folha de cálculo.

Figura 147 - **Descrição do procedimento utilizado pelo grupo 1.**

b) Movemos o selector "Abcissa A" para permitir fazer o cálculo de vários pontos na folha de cálculo e na parte algébrica

Figura 148 - **Descrição do procedimento utilizado pelo grupo 2.**

O grupo 3 não apresentou descrição do procedimento utilizado para completar a tabela.

b) Para completar a tabela movemos o "AbcissaA" para o número que queríamos e isso ia-nos dando o valor de y. Para saber o x consultamos a tabela na zona de calculo.

Figura 149 – **Descrição do procedimento utilizado pelo grupo 4.**

(b) Para conseguirmos completar a tabela, recorremos ao Geogebra, mexendo o selector de a, ficando a = 2. E mexendo também a abcissaA, podemos obter os valores das variáveis através da folha de cálculo.

Figura 150 - **Descrição do procedimento utilizado pelo grupo 5.**

Na pergunta c) i) pretendia-se que os alunos determinassem as imagens dos objectos indicados, tendo os vários grupos respondido:

i) A imagem do objecto 6 é 72, e a imagem do objecto -5 é -50. Recorremos a folha de calculo introduzindo os números necessários e fazendo a fórmula $= 2\times6^2$ e $2x-5^2$.

Figura 151 - **Resposta do grupo 1.**

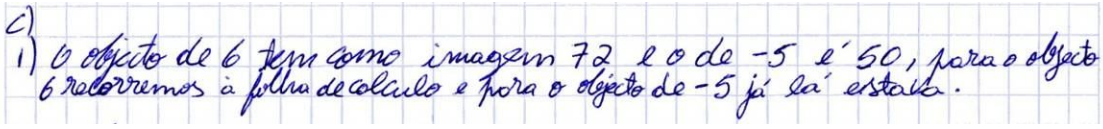

c)
i) o objecto de 6 tem como imagem 72 e o de -5 é 50, para o objecto 6 recorremos à folha de calculo e para o objecto de -5 já lá estava.

Figura 152 - **Resposta do grupo 2.**


2) c) i) A imagem do objecto 6 é 72 e a imagem do objecto -5 é 50.
Recorremos à representação gráfica

Figura 153 - **Resposta do grupo 3.**

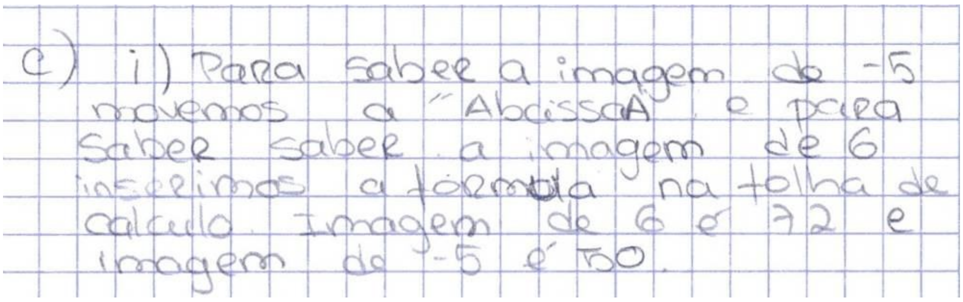

c) i) Para saber a imagem do -5 movemos a "Abcissa" e para saber saber a imagem de 6 inserimos a formula na folha de calculo. Imagem de 6 é 72 e imagem de -5 é 50.

Figura 154 - **Resposta do grupo 4.**

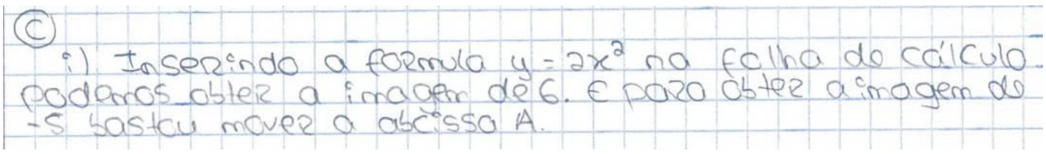

c)
i) Inserindo a formula y=2x² na folha do cálculo podemos obter a imagem de 6. E para obter a imagem de -5 bastou mover o abcissa A.

Figura 155 - **Resposta do grupo 5.**

Para valores que o selector não permitia determinar usaram as potencialidades da folha de cálculo para a realização de cálculos:

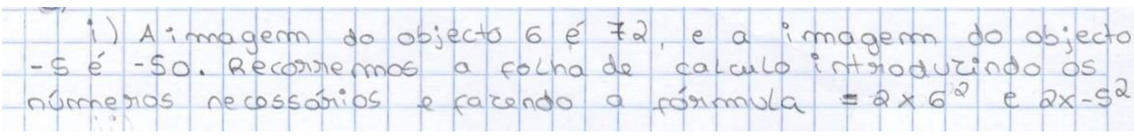

i) A imagem do objecto 6 é 72, e a imagem do objecto -5 é -50. Recorremos a folha de calculo introduzindo os números necessários e fazendo a fórmula =2x6² e 2x-5²

Figura 156 - **Resposta do grupo 1.**

Para responder a esta questão houve procedimentos diferentes. Todos os grupos, à excepção do grupo 3, recorreram à expressão algébrica para determinar a imagem de 6. O grupo 3 recorreu à representação gráfica, tendo definido a recta de equação x=6 e determinou o ponto de intersecção coma função *f*.

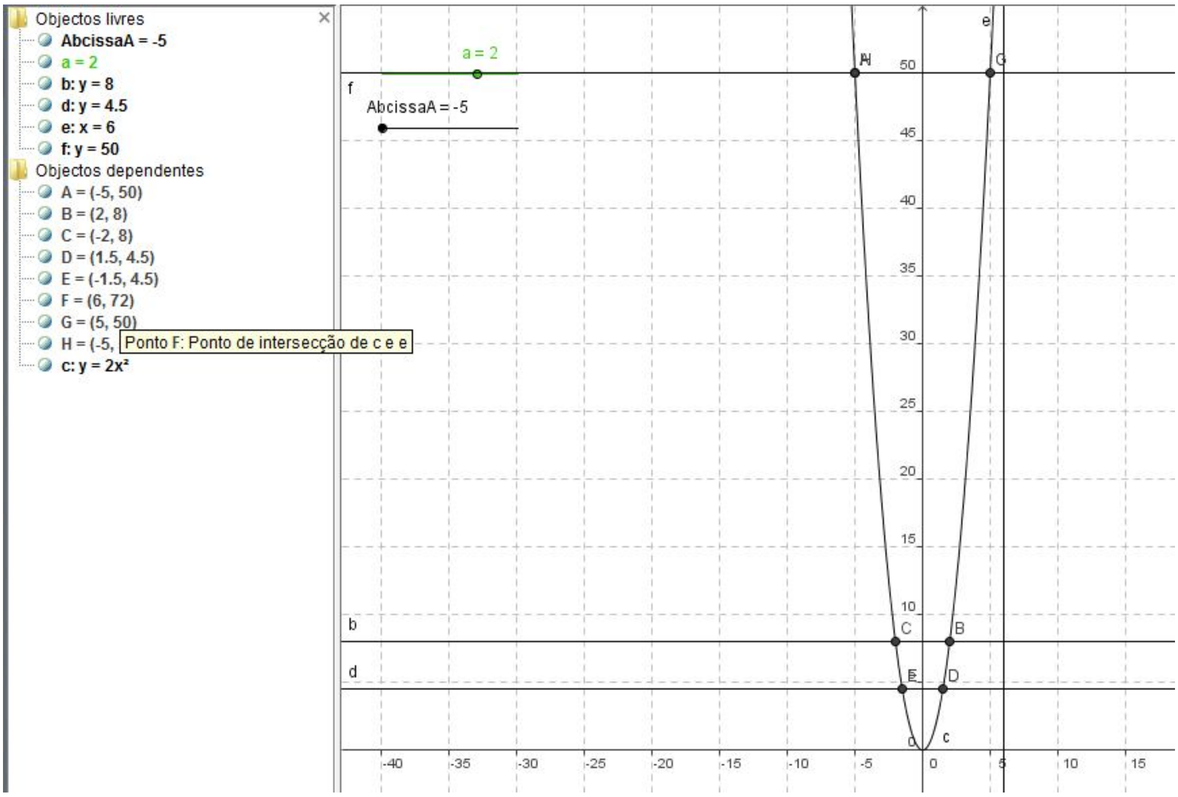


Figura 157 - **Procedimento utilizado pelo grupo 3.**

Para determinar a imagem de -5 todos os grupos recorreram à representação gráfica, uma vez que era um valor que era possível determinar através da leitura do gráfico.

Na pergunta c) ii) os alunos tinham que determinar o(s) objecto(s) que tinha(m) como imagem 50:

Figura 158 - **Resposta do grupo 1.**

Figura 159 - **Resposta do grupo 2.**

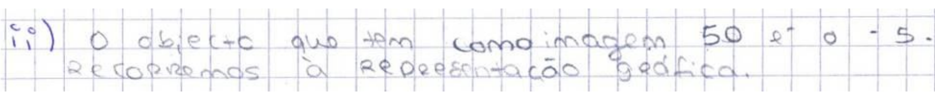


Figura 160 - **Resposta do grupo 3.**

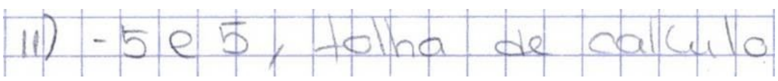


Figura 161 - **Resposta do grupo 4.**

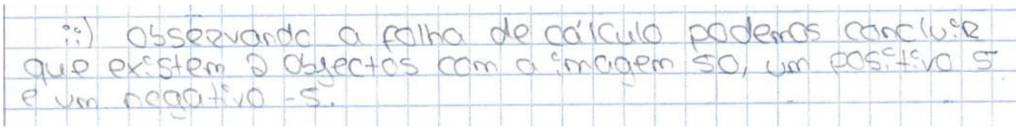

ii) observando a folha de cálculo podemos concluir que existem 2 objectos com a imagem 50, um positivo 5 e um negativo -5.

Figura 162 - **Resposta do grupo 5.**

Os grupos 1, 2 e 3 apresentaram respostas incompletas, as quais podem ter sido influenciadas pela alínea anterior. No entanto, o grupo 3 apresentou uma construção gráfica que lhes permitia apresentar a resposta correcta:

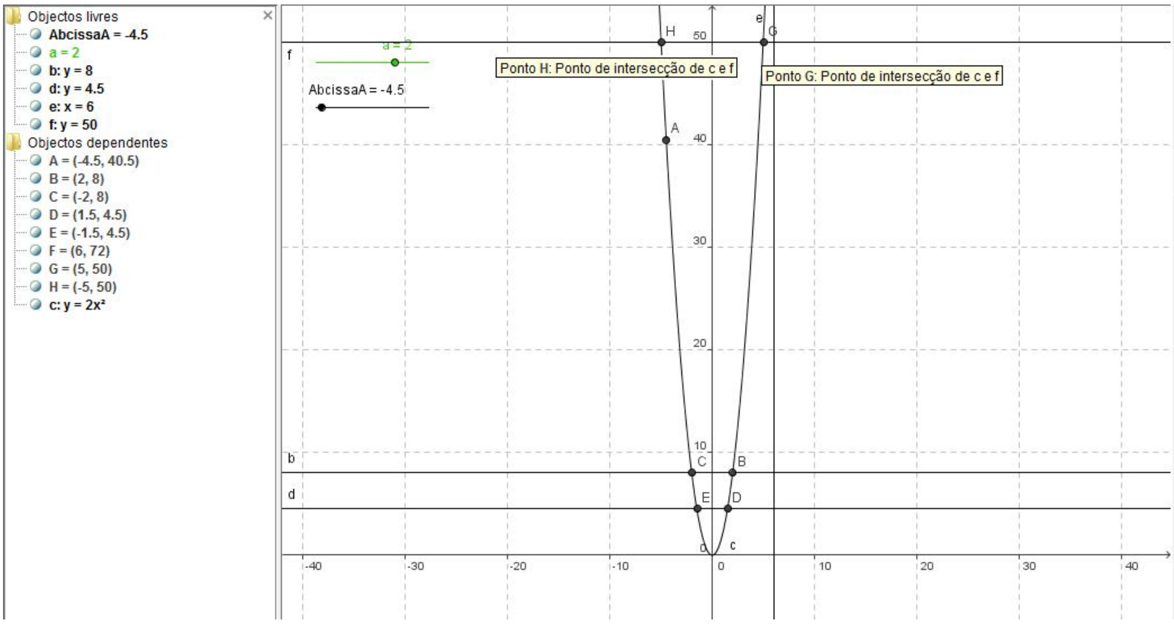


Figura 163 - **Procedimento utilizado pelo grupo 3.**

Os grupos 4 e 5 apresentaram a resposta correcta, baseando-se na análise da tabela construída automaticamente na folha de cálculo através da alteração do valor do selector “AbcissaA”.

Nesta tarefa também era formulada a pergunta, existe algum objecto que tenha como imagem um número negativo, à qual os grupos responderam:

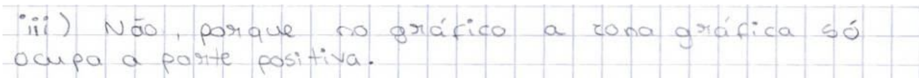

iii) Não, porque no gráfico a zona gráfica só ocupa a parte positiva.

Figura 164 - **Resposta do grupo 1.**

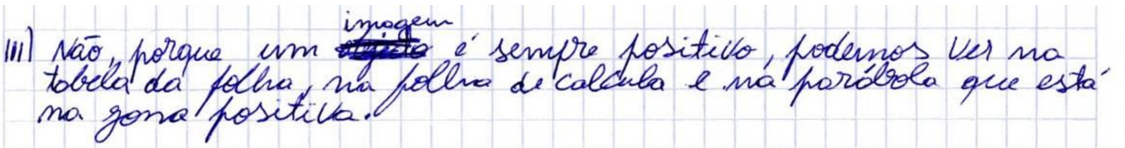

iii) Não, porque um ~~objecto~~ imagem é sempre positivo, podemos ver na tabela da folha, na folha de calcula e na parábola que está na zona positiva.

Figura 165 - **Resposta do grupo 2.**

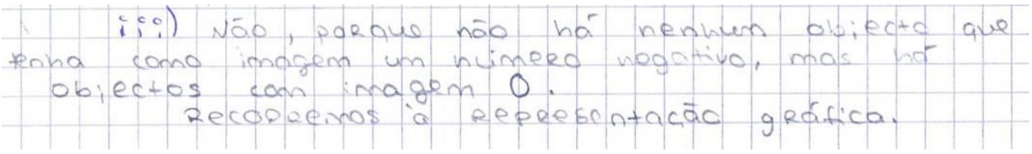

iii) Não, porque não há nenhum objecto que tenha como imagem um número negativo, mas há objectos com imagem 0.
Recorremos à representação gráfica.

Figura 166 - **Resposta do grupo 3.**


III) Não, porque o ponto A é positivo, e como a formula é $2x^2$ não pode dar negativo.

Figura 167 - **Resposta do grupo 4.**


iii) como a>0 e é o coeficiente de uma função quadrática nenhum objecto tem como imagem um numero negativo.

Figura 168 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos, à excepção do grupo 5, recorreram à representação gráfica para verificarem se existia algum objecto com imagem negativa. Todavia o grupo 2, consultou também a tabela construída na folha de cálculo e o grupo 4 usou a expressão algébrica para justificar. O grupo 5, justificou a partir da expressão algébrica.

À última questão da primeira parte da tarefa, existe mais do que um objecto com a mesma imagem, os grupos responderam:

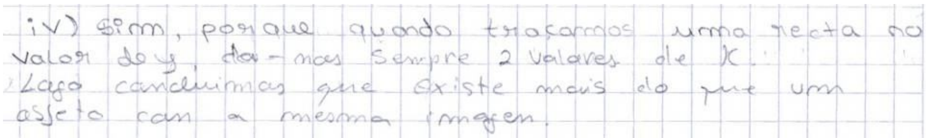

iv) sim, porque quando traçarmos uma recta no valor do y, dá-nos sempre 2 valores de x. Logo concluimos que existe mais do que um objecto com a mesma imagem.

Figura 169 - **Resposta do grupo 1.**

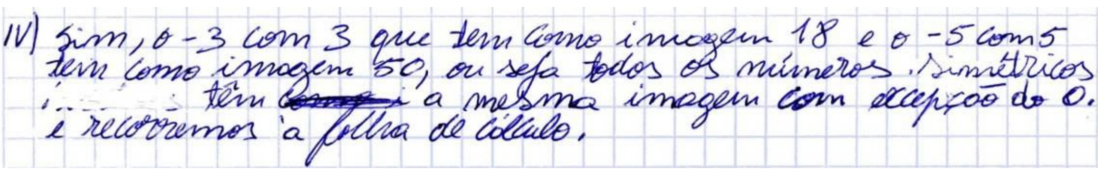

IV) Sim, o -3 com 3 que tem como imagem 18 e o -5 com 5 tem como imagem 50, ou seja todos os números simétricos têm ~~como~~ a mesma imagem com excepção do 0.
E recorremos à folha de cálculo.

Figura 170 - **Resposta do grupo 2.**

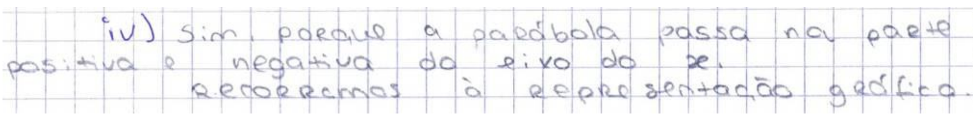
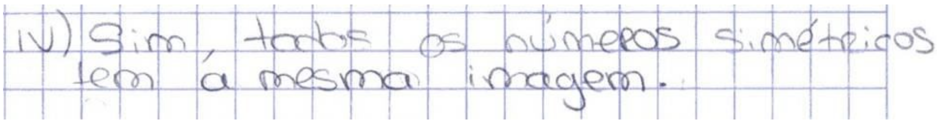
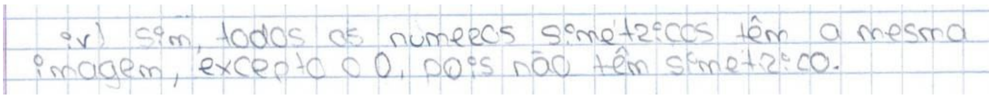

iv) Sim, porque a parábola passa na parte positiva e negativa do eixo do x.
Recorremos à representação gráfica.

Figura 171 - **Resposta do grupo 3.**



iv) Sim, todos os números simétricos tem a mesma imagem.

Figura 172 - **Resposta do grupo 4.**



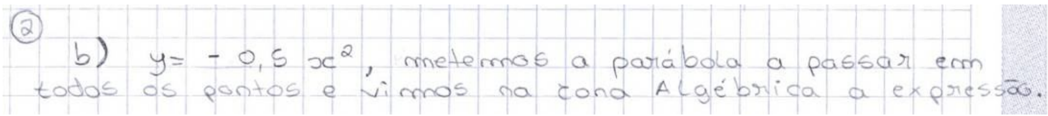
iv) sim, todos os numeros simétricos têm a mesma imagem, excepto o 0, pois não têm simétrico.

Figura 173 - **Resposta do grupo 5.**

As respostas dos grupos basearam-se na análise das diferentes representações da função em estudo. Os grupos 1 e 3 analisaram a representação gráfica, enquanto que os restantes grupos recorreram à representação tabular.

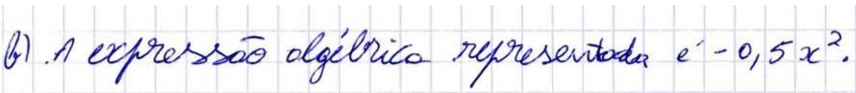
Na segunda parte da tarefa, pretendia-se que os alunos analisassem uma outra função quadrática, partindo-se da sua representação em tabela.

Os alunos para determinarem a expressão algébrica, depois de terem representado os pontos que eram indicados na tabela, recorreram ao selector ***a***:



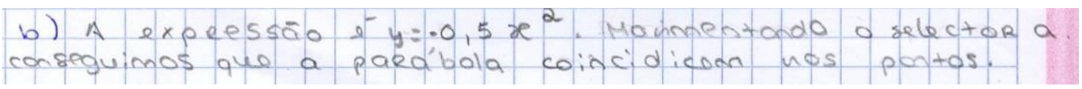
2
b) $y = -0,5\,x^2$, metemos a parábola a passar em todos os pontos e vimos na zona Algébrica a expressão.

Figura 174 - **Resposta do grupo 1.**



b) A expressão algébrica representada é $-0,5\,x^2$.

Figura 175 - **Resposta do grupo 2.**

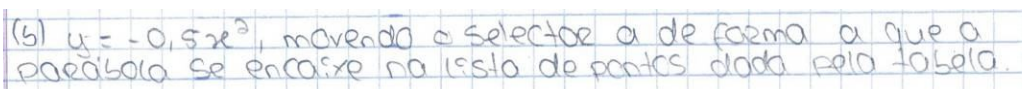


b) A expressão é $y = -0,5\,x^2$. Movimentando o selector a conseguimos que a parábola coincidissem nos pontos.

Figura 176 - **Resposta do grupo 3.**

b) $-0,5\,x^2$, mechemos no A para que os pontos encaixassem na parabola.

Figura 177 - **Resposta do grupo 4.**



(5) $y = -0,5\,x^2$, movendo o selector a de forma a que a parábola se encaixe na lista de pontos dada pela tabela.

Figura 178 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos identificaram imediatamente o tipo de gráfico definido pela expressão algébrica encontrada.

As perguntas que se seguiram, foram iguais às colocadas na primeira parte da tarefa.

Para determinar a imagem de dois objectos dados os alunos reponderam:

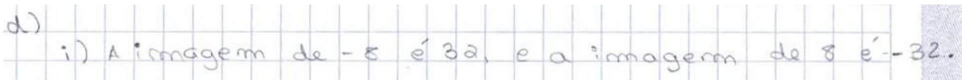

d) i) A imagem de -8 é 32, e a imagem de 8 é -32.

Figura 179 - **Resposta do grupo 1.**


d) i) A imagem dos objectos -8 e 8 é -32, recorremos à folha de cálculo.

Figura 180 - **Resposta do grupo 2.**

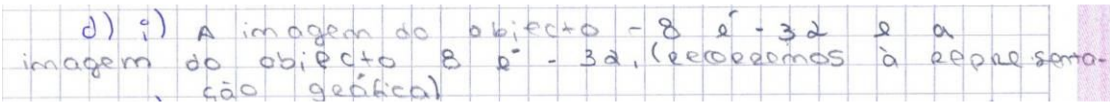

d) i) A imagem do objecto -8 é -32 e a imagem do objecto 8 é -32, (recorremos à representação gráfica)

Figura 181 - **Resposta do grupo 3.**

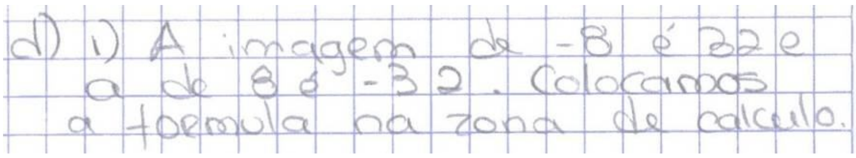

d) i) A imagem de -8 é 32 e a de 8 é -32. Colocamos a formula na zona de calculo.

Figura 182 - **Resposta do grupo 4.**

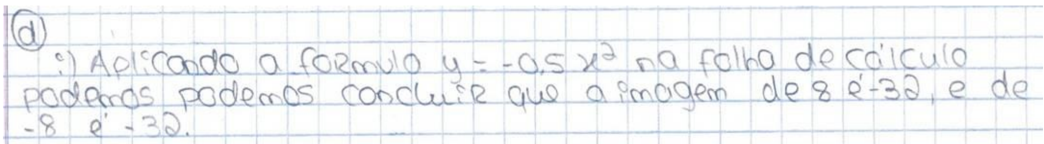

d) i) Aplicando a formula y = -0,5 x² na folha de cálculo ~~podemos~~ podemos concluir que a imagem de 8 é -32, e de -8 é -32.

Figura 183 - Resposta do grupo 5.

Esta questão apesar de já terem respondido, no caso da função anterior, os grupos 4 e 5, recorreram a uma representação diferente da que haviam utilizado anteriormente.

Para determinarem os objectos que têm determinada imagem, os grupos responderam:


ii) os objectos que tem como imagem -50 é -5.

Figura 184 - **Resposta do grupo 1.**

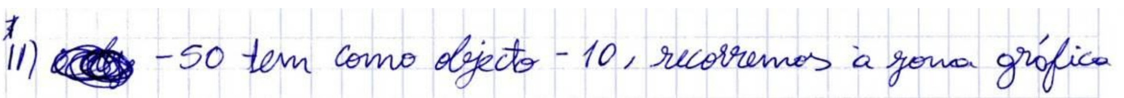

ii) -50 tem como objecto -10, recorremos à zona gráfica

Figura 185 - **Resposta do grupo 2.**

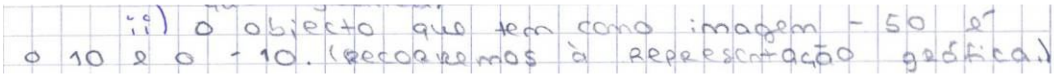

ii) o objecto que tem como imagem -50 é o 10 e o -10. (recorremos à representação gráfica)

Figura 186 - **Resposta do grupo 3.**


ii) -5 e 5, zona de calculo.

Figura 187 - **Resposta do grupo 4.**

O grupo 5 não respondeu a esta pergunta e os grupos 1 e 4 apresentaram uma resposta errada, o grupo 2 incompleta, tendo sido somente o grupo 3 a apresentar a resposta correcta.

A pergunta que se seguia, existe mais do que um objecto com a mesma imagem, todos os grupos apresentaram a mesma resposta, apresentando a seguinte a título de exemplo:

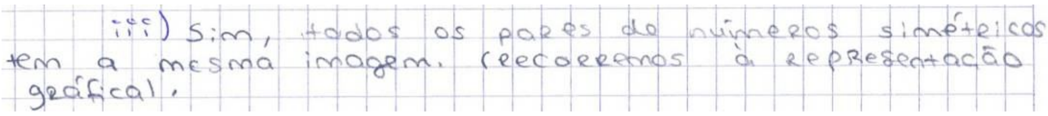

iii) Sim, todos os pares de números simétricos tem a mesma imagem. (recorremos à representação gráfica).

Figura 188 - **Resposta do grupo 3.**

Na pergunta, existe algum objecto com imagem positiva, todos os grupos responderam correctamente, tendo sido justificado por todos os grupos de forma igual:


iii) Não, porque o gráfico está representado na parte negativa do y.

Figura 189 - **Resposta do grupo 5.**

Para compreensão da influência do parâmetro ***a*** nas funções do tipo $y = ax^2$ os alunos manipularam o selector que permite a alteração deste parâmetro para valores pertencentes ao intervalo [-5,5], tendo sido apresentadas as seguintes respostas:

O grupo 1 não apresentou resposta alguma.

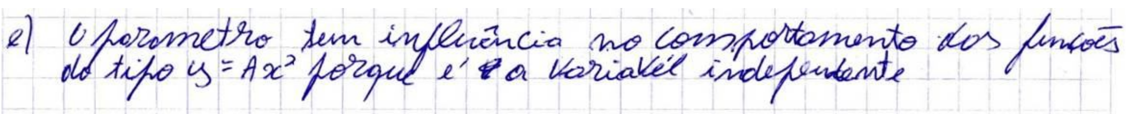

e) O parometro tem influência no comportamento dos funções do tipo $y=Ax^2$ porque é a variavél independente

Figura 190 - **Resposta do grupo 2.**

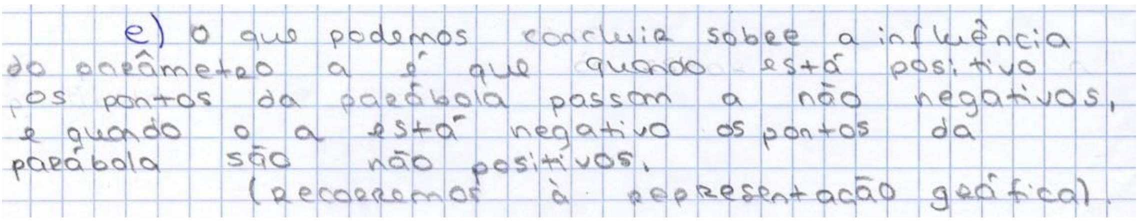

e) O que podemos concluir sobre a influência do parâmetro a é que quando está positivo os pontos da parábola passam a não negativos, e quando o a está negativo os pontos da parábola são não positivos. (recorremos à representação gráfica).

Figura 191 - **Resposta do grupo 3.**

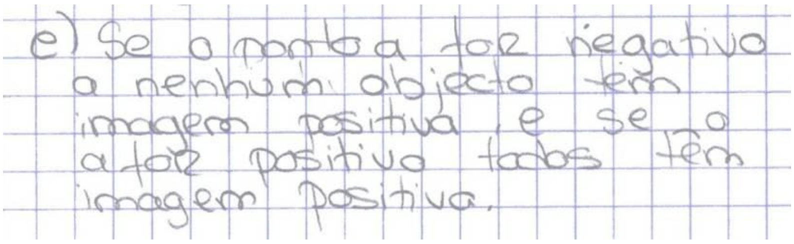

e) Se o ponto a for negativo a nenhum objecto tem imagem positiva, e se o a for positivo todos têm imagem positiva.

Figura 192 - **Resposta do grupo 4.**


(e) Podemos concluir que quando a é positivo, as imagens são não negativos, e quando o a é negativo as imagens são não positivas.

Figura 193 - **Resposta do grupo 5.**

Todos os grupos responderam correctamente, à excepção do grupo 2, uma vez que não especificaram a influência do parâmetro *a*.

As representações a que cada grupo recorreu para responder às questões serão sintetizadas no quadro seguinte:

Quadro 8 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões.*

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">PERGUNTA</th><th colspan="5">GRUPOS</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th></tr>
<tr><td rowspan="6">PARTE 1</td><td colspan="2">2 b)</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td></tr>
<tr><td rowspan="5">C</td><td>i)</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td></tr>
<tr><td>ii)</td><td>Algébrica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td></tr>
<tr><td>iii)</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td>iv)</td><td>Gráfica</td><td>Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td></tr>
<tr><td>i)</td><td>Algébrica</td><td>Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
</table>

A		ii)	Tabular	Gráfica	Gráfica	----	Tabular
R		iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
T		iv)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
E 2	e)		-----	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

Tarefa 6 – O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função

Na primeira pergunta, desta tarefa, era pedido aos alunos que determinassem qual seria o comprimento do seu cabelo, tendo em conta a sua idade e se nunca o tivessem cortado. Os diferentes grupos apresentaram as seguintes respostas:

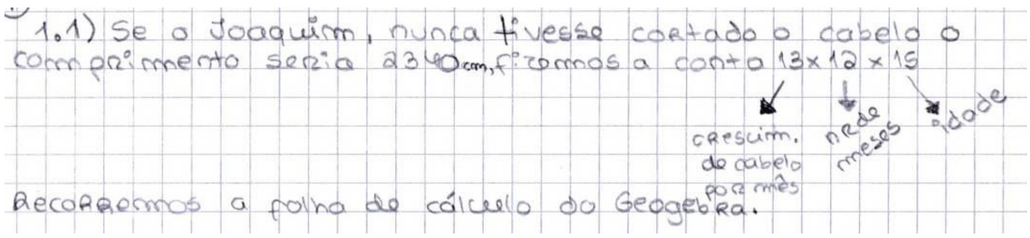

1.1) Se o Joaquim, nunca tivesse cortado o cabelo o comprimento seria 2340cm, fizemos a conta 13x12x15
crescim. do cabelo por mês
nº de meses
idade
Recorremos a folha de cálculo do Geogebra.

Figura 194 - **Resposta do grupo 1.**

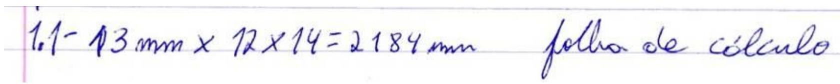

1.1- 13 mm x 12 x 14 = 2184 mm folha de cálculo

Figura 195 - **Resposta do grupo 2.**

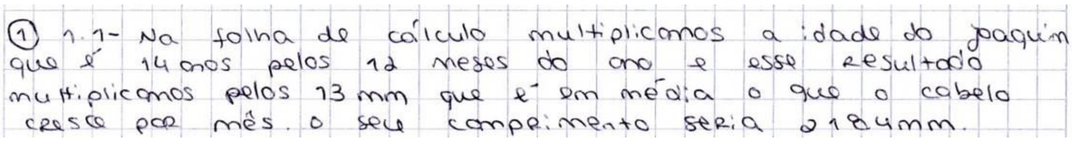

1 1.1- Na folha de cálculo multiplicamos a idade do Joaquim que é 14 anos pelos 12 meses do ano e esse resultado multiplicamos pelos 13 mm que é em média o que o cabelo cresce por mês. O seu comprimento seria 2184mm.

Figura 196 - **Resposta do grupo 3.**

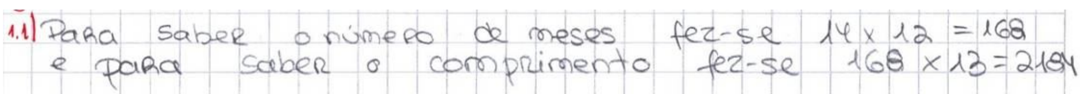

1.1) Para saber o número de meses fez-se 14 x 12 = 168 e para saber o comprimento fez-se 168 x 13 = 2184

Figura 197 - **Resposta do grupo 4.**

1

1.1) 15 × 12 = 180 180 × 13 = 2 340 mm.

O Joaquim têm 15 anos, e o cabelo cresce 13mm por mês. Para saber quantos meses tinham passado multiplicamos 15 por 12 meses, recorrendo a folha de cálculo, ficamos a saber que tinham passado 180 meses. Logo, para saber quanto tinha crescido, multiplicamos o número de meses pelos milimetros que cresce por mês, recorrendo a folha de cálculo, e ficamos a saber que tinha de comprimento 2 340 mm.

Figura 198 - **Resposta do grupo 5.**

Para responderem a esta questão todos os grupos usaram a representação numérica e utilizaram como ferramenta de cálculo a folha de cálculo do *Geogebra*.

Todos os grupos, à excepção dos grupos 4 e 5, não tiveram em conta a unidade da variável tempo, ou seja, não determinaram a sua idade em meses ou então não determinaram qual é o crescimento médio do cabelo por ano.

Na segunda pergunta era dado o comprimento do cabelo e pedia-se que determinassem a idade mínima, tendo os grupos respondido:

1.2) A idade Mínima que a Joana pode ter é 3,2 anos, Recorremos a folha de cálculo.

Figura 199 - **Resposta do grupo 1.**

1.2 - 500/13 = 38,46 folha de cálculo

38.46/12 = 3,21 = 3 anos

Figura 200 - **Resposta do grupo 2.**

1.2 - dividindo os 500 mm que tem o cabelo da Joana pelos 13 mm deu 38,46. Esse valor dividiu-se pelos 12 meses do ano que deu 3,21 anos

Figura 201 - **Resposta do grupo 3.**

1.2) Para saber a idade fez-se 50 cm = 500 mm

$\frac{500}{13}$ = 38,46 meses Logo em anos em anos tem $\frac{38,46}{12}$ = 3,21

Tem 3,21 anos

Figura 202 - **Resposta do grupo 4.**

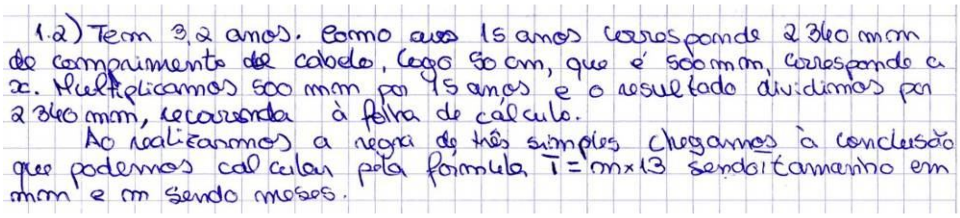

1.2) Tem 3,2 anos. Como aos 15 anos corresponde 2 360 mm de comprimento de cabelo, logo 50 cm, que é 500 mm, corresponde a x. Multiplicamos 500 mm por 15 anos e o resultado dividimos por 2 360 mm, recorrendo à folha de cálculo.
Ao realizarmos a regra de três simples chegamos à conclusão que podemos calcular pela formula T = m×13 sendo T tamanho em mm e m sendo meses.

Figura 203 - **Resposta do grupo 5.**

A estratégia utilizada pelos grupos para responderem a esta questão, foi a mesma que haviam usado na pergunta anterior; recorreram à representação numérica da função e usaram a folha de cálculo do *Geogrebra* para efectuarem os cálculos.

O grupo 2 na resposta escrita apresenta os cálculos com 50 cm, contudo na folha de cálculo efectuou-os correctamente, usando 500 mm.

Durante a elaboração da resposta a esta questão os elementos do grupo 5 apresentaram opiniões e estratégias de resolução divergentes. Houve um elemento do grupo que usou a regra de três simples com os dados da alínea anterior, enquanto que os outros dois elementos efectuaram com os dados iniciais do problema. Esta situação levou a que discutissem as resoluções apresentadas e por fim a concluir que o comprimento do cabelo é sempre igual ao produto do número de meses por 13mm, e daí a escreverem a expressão algébrica da função que modela o problema.

Na pergunta 1.3, era pedido o tempo necessário para que o cabelo tenha de 1m de comprimento. Os grupos responderam o seguinte:

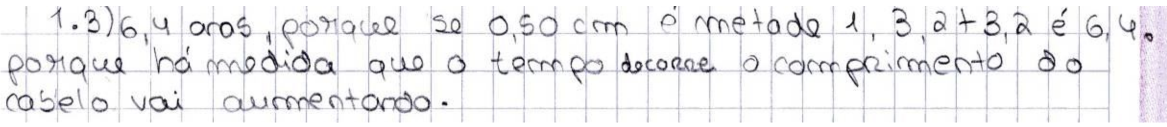

1.3) 6,4 anos, porque se 0,50 cm é metade 1, 3,2+3,2 é 6,4. porque há medida que o tempo decorre o comprimento do cabelo vai aumentando.

Figura 204 - **Resolução do grupo 1.**

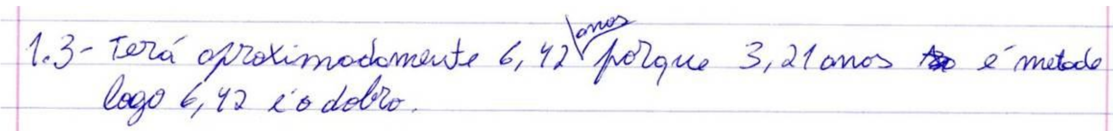

1.3- Terá aproximadamente 6,42 anos porque 3,21 anos ~~ao~~ é metade logo 6,42 é o dobro.

Figura 205 - **Resolução do grupo 2.**

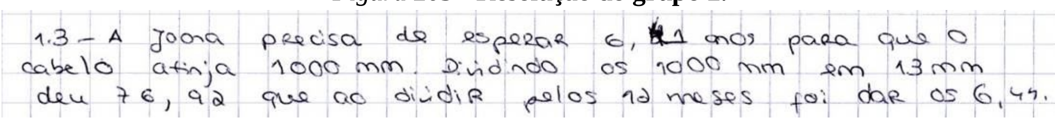

1.3 – A Joana precisa de esperar 6,41 anos para que o cabelo atinja 1000 mm. Dividindo os 1000 mm em 13 mm deu 76,92 que ao dividir pelos 12 meses foi dar os 6,41.

Figura 206 - **Resposta do grupo 3.**

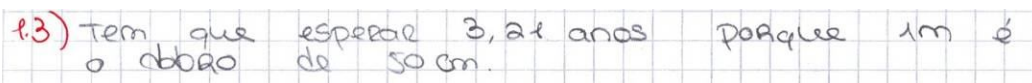
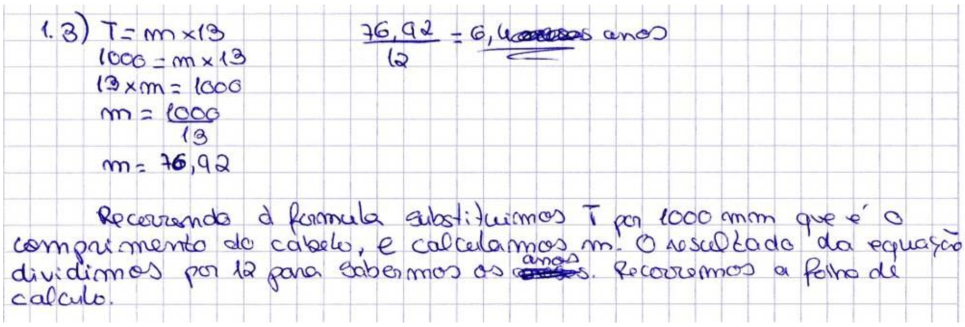

1.3) Tem que esperar 3,21 anos porque 1m é o dobro de 50 cm.

Figura 207 - **Resposta do grupo 4.**



1.3) $T = m \times 13$

$1000 = m \times 13$

$13 \times m = 1000$

$m = \frac{1000}{13}$

$m = 76,92$

$\frac{76,92}{12} = 6,4$ anos

Recorrendo à formula substituimos T por 1000 mm que é o comprimento do cabelo, e calculamos m. O resultado da equação dividimos por 12 para sabermos os anos. Recorremos à folha de calculo.

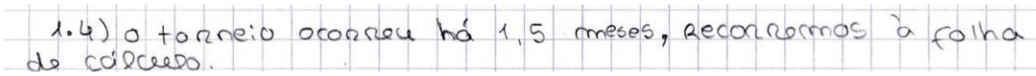
Figura 208 - **Resposta do grupo 5.**

Os grupos 1, 2 e 4 usaram nas suas resposta, ainda que implicitamente, o conceito de proporcionalidade directa.

Os grupos 3 e 5 utilizaram a representação algébrica para determinarem o valor pretendido. O grupo 5, partiu da expressão algébrica que haviam escrito na resposta à pergunta anterior.

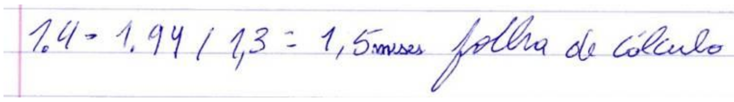
A folha de cálculo do *Geogebra* foi aqui também utilizada pelos grupos como auxiliar nos cálculos.

Na pergunta 1.4 era pedido aos alunos que determinassem quanto tempo havia passado para que o cabelo crescesse 1,95 cm, à qual responderam:



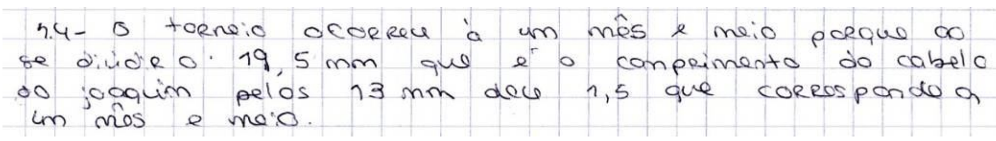
1.4) o torneio ocorreu há 1,5 meses, recorremos à folha de calculo.

Figura 209 - **Resposta do grupo 1.**



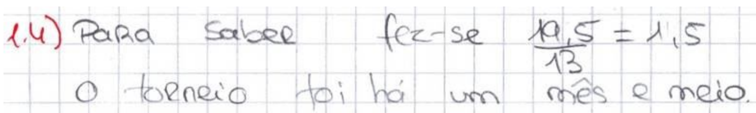
1.4 - 1,94 / 1,3 = 1,5 meses folha de cálculo

Figura 210 - **Resposta do grupo 2.**



1.4- O torneio ocorreu à um mês e meio porque ao se divide o 19,5 mm que é o comprimento do cabelo do Joaquim pelos 13 mm deu 1,5 que corresponde a um mês e meio.

Figura 211 - **Resposta do grupo 3.**



1.4) Para saber fez-se $\frac{19,5}{13} = 1,5$

O torneio foi há um mês e meio.

Figura 212 - **Resposta do grupo 4.**

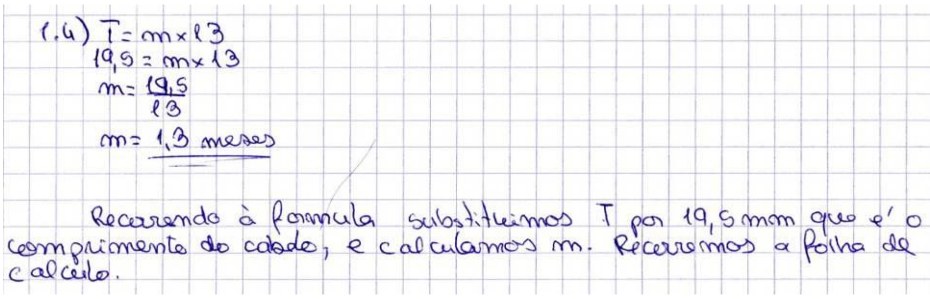


Figura 213 - **Resposta do grupo 5.**

As respostas a esta pergunta não apresentam estratégias diferentes das utilizadas anteriormente, todos os grupos recorrem à representação numérica e usaram mais uma vez a folha de cálculo do *Geogebra* como ferramenta de cálculo.

O grupo 5 distingue-se mais uma vez dos restantes grupos pelo simples facto de recorrer à expressão algébrica.

Na questão 1.5 é alterada a constante de proporcionalidade e é pedido aos alunos que determinem o tempo necessário para que o cabelo atinja o comprimento de 1,95 cm, verificaram-se então as seguintes respostas:

Figura 214 - **Resposta do grupo 1.**

Figura 215 - **Resposta do grupo 2.**

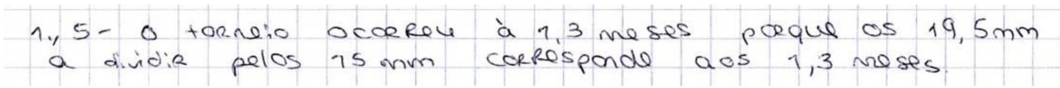


Figura 216 - **Resposta do grupo 3.**

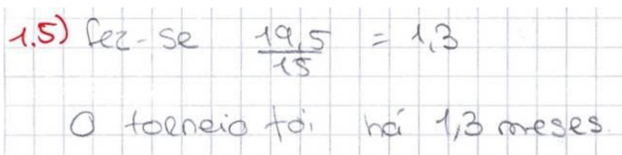


Figura 217 - **Resposta do grupo 4.**

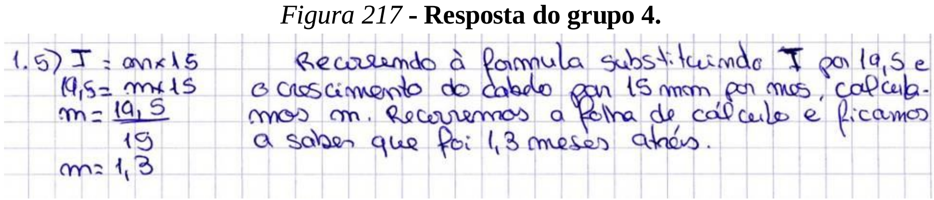


Figura 218 - **Resposta do grupo 5.**

Mais uma vez todos os grupos recorreram às mesmas representações e procedimentos que haviam utilizado nas perguntas anteriores

Na última pergunta pedia-se, aos alunos, que comparassem duas situações de crescimento de cabelo, modeladas por funções afim, e em particular, que determinassem se em algum momento as duas funções representavam o mesmo comprimento de cabelo. A esta pergunta os grupos responderam da seguinte forma:

1.6) Joana - $y=100+13x$
Joaquim - $15x$

$1,3 \times 13 = 16,9$ mm
$1,3 \times 100 = 116,9$ cm

R: Ao fim de 50 meses, ~~...~~ recorremos à zona gráfica, colocamos o valor da Joana, e do Joaquim.

Figura 219 - **Resposta do grupo 1.**

1.6- $10+13 \times x$ Da Rapariga

Têm o mesmo tamanho passado 5 meses

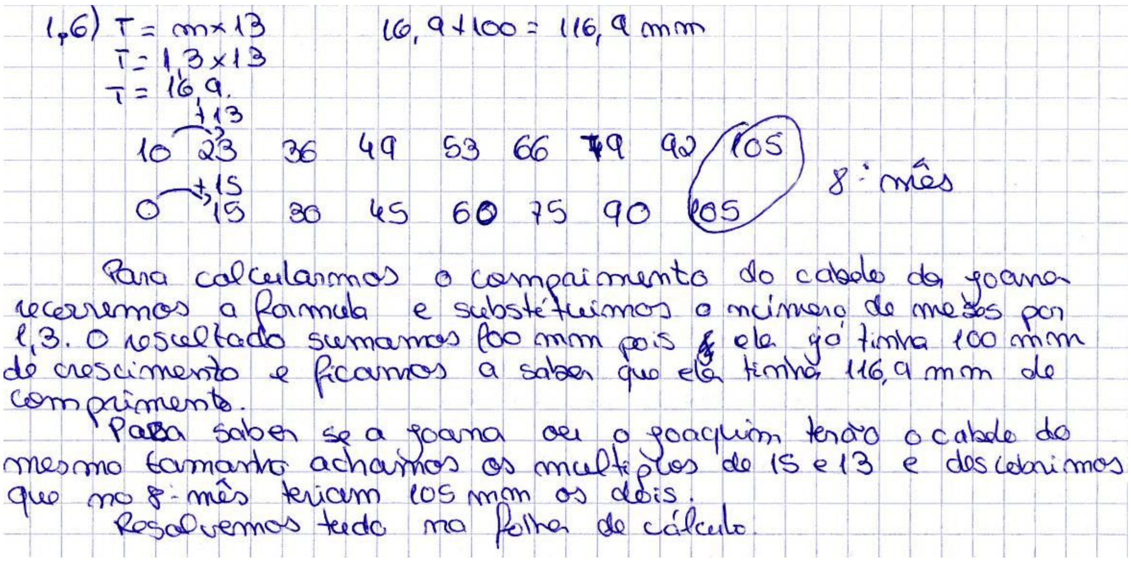
Figura 220 - **Resposta do grupo 2.**

1.6 -
Colocando a equação $\boxed{y = 100 + 13x}$ que é o comprimento do cabelo da Joana que cresce 13mm por cada mês e a equação $\boxed{y = 15x}$ as rectas vão se cruzar quando eles tiverem 750 mm de comprimento de cabelo e isso acontecerá ao fim de 50 meses.

Figura 221 - **Resposta do grupo 3.**

1.6) Sim, ao fim de 50 meses.

Figura 222 - **Resposta do grupo 4.**



1,6) T = m×13   16,9+100 = 116,9 mm
T = 1,3×13
T = 16,9.
+13
10 23 36 49 53 66 79 92 105
+15
0 15 30 45 60 75 90 105   8.º mês

Para calcularmos o comprimento do cabelo da Joana recorremos a formula e substituimos o número de meses por 1,3. O resultado sumamos 100 mm pois ela já tinha 100 mm de crescimento e ficamos a saber que ela tinha 116,9 mm de comprimento.
Para saber se a Joana ou o Joaquim terão o cabelo do mesmo tamanho achamos os multiplos de 15 e 13 e descobrimos que no 8.º mês teriam 105 mm os dois.
Resolvemos tudo na folha de cálculo.

Figura 223 - **Resposta do grupo 5.**

Os grupos 1, 3 e 4 recorreram à representação gráfica para responderam a esta pergunta, efectuando a representação de cada uma das funções no *Geogebra* e determinando o ponto de intersecção entre elas:

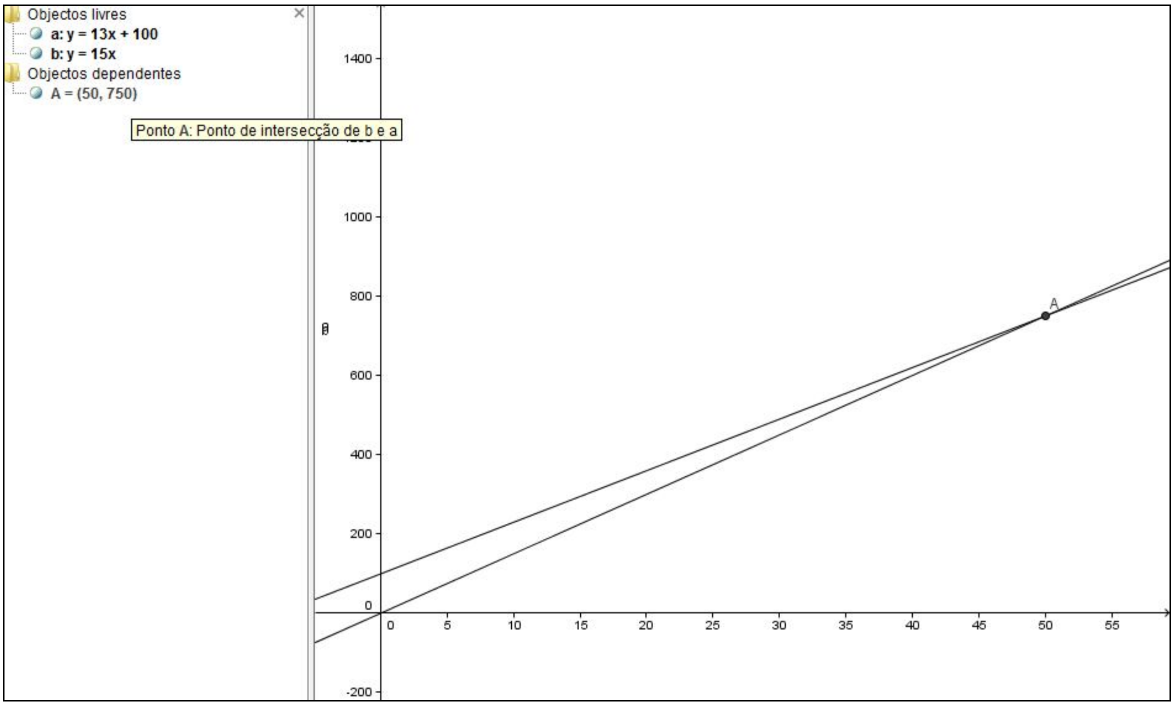
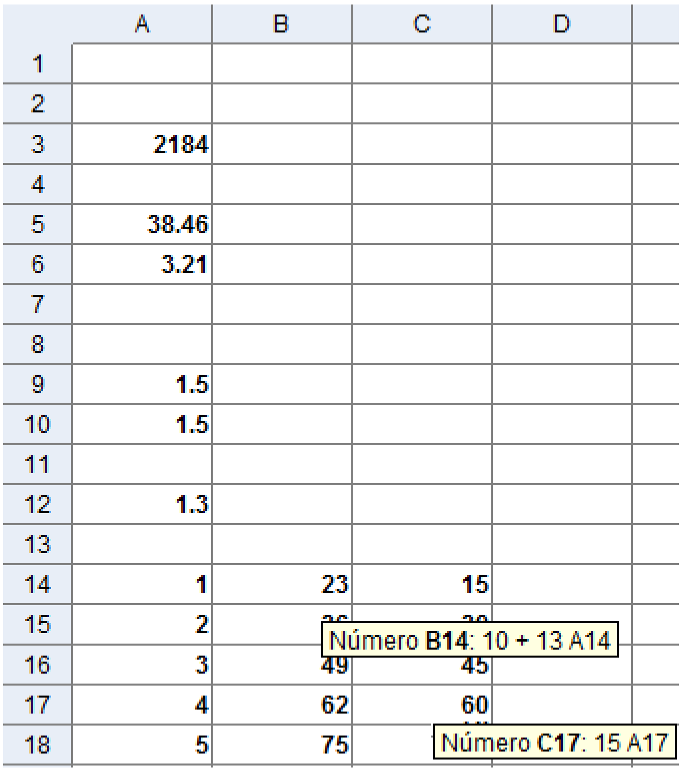


Figura 224 - **Procedimento utilizado pelos grupo 1, 3 e 4.**

Os grupos 2 e 5 usaram as representações algébricas e tabulares, mas usando procedimentos distintos.

O grupo 2 usou a folha de cálculo do *Geogebra* e as suas potencialidades em conjunto com a expressão algébrica da função que modela cada uma das situações, como se pode ver em seguida:



	A	B	C	D
1				
2				
3	2184			
4				
5	38.46			
6	3.21			
7				
8				
9	1.5			
10	1.5			
11				
12	1.3			
13				
14	1	23	15	
15	2	[illegible]	[illegible]	
16	3	49	45	
17	4	62	60	
18	5	75	[illegible]	

Figura 225 - **Procedimento usado pelo grupo 2.**

O grupo 2, cometeu o erro de usar os 10 cm onde teria que usar 100 mm, daí a justificação para a sua resposta não estar correcta.

O grupo 5, só usou a folha cálculo para efectuar os cálculos auxiliares, no entanto, cometeram alguns erros o que justifica a sua resposta.

Os grupos nesta tarefa tinham total liberdade de escolha da(s) representação(ões) a que recorreriam para responder à questões. Todavia, não houve grandes diferenças nos procedimentos utilizados entre os grupos e no mesmo grupo entre as perguntas.

Os alunos resolveram numericamente todas as questões, à excepção do grupo 5 que a partir da pergunta 1.2 recorreram à expressão algébrica. Os grupos 1, 2, 3 e 4 só definiram a expressão algébrica que modela o problema quando tiveram necessidade de fazer a representação gráfica.

Nas respostas os grupos apresentaram alguns erros, uma vez que não respeitaram as unidades das variáveis, porém o mais importante nesta análise é o procedimento utilizado pelos grupos e não o resultado final.

Para sintetizar as representações a que cada grupo recorreu durante a resolução desta tarefa apresentar-se-á a seguinte tabela:

Quadro 9 - *Representações a que recorreram os grupos para reponderem às questões.*

Pergunta	**Grupos**				
	I	II	III	IV	V
1.1	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
1.2	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
1.3	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica
1.4	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica
1.5	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica
1.6	Gráfica	Algébrica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Numérica

Capítulo V

Conclusões

Neste capítulo pretende-se sintetizar os resultados obtidos ao nível das representações matemáticas utilizadas por cada grupo na resolução das tarefas propostas ao longo da intervenção pedagógica.

Neste estudo não se pretende obter generalizações dos resultados, mas compreender o caso em estudo (a turma) identificando pontos fundamentais de discussão e reflectindo sobre os mesmos.

Na intervenção foram desenvolvidas seis tarefas. As primeiras cinco tarefas propostas apresentam uma estrutura comum, podendo-se considerar constituídas por duas partes distintas, uma destinada à construção das diferentes formas de representação de Funções e a outra para analisar e/ou interpretar as Funções em estudo. A última tarefa apresentava uma estrutura única, em que era colocado um problema aos alunos e questões sobre o mesmo, tendo estes que dar uma resposta recorrendo à representação matemática que considerassem mais adequada ou com a que sentissem mais familiarizados ou com a que apresentassem maior destreza em trabalhar.

Tendo por base a descrição dos resultados obtidos nas tarefas, apresentados anteriormente, pode-se então procurar responder às questões orientadoras do estudo apresentadas no primeiro capítulo, que aqui recordo:

a) Quais são as representações a que os alunos mais recorrem?
b) Que factores influenciam a escolha da representação?
c) Como é que os alunos conciliam as diferentes representações?

QUAIS AS REPRESENTAÇÕES A QUE OS ALUNOS MAIS RECORRERAM?

Para analisar esta questão construi um quadro resumo (quadro 10) com as representações a que os alunos recorreram na realização de cada uma das tarefas, possibilitando assim uma análise cruzada das informações recolhidas relativamente às representações utilizadas por cada grupo na resolução de cada pergunta. Este quadro só contempla as questões em que os alunos tinham que recorrer a um ou a um conjunto de representações para darem uma resposta:

Quadro 10 - *Representações utilizadas por cada grupo*

	Pergunta		Grupos 1	2	3	4	5	Representação Predominante
Tarefa 1	2		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Tarefa 2	2 b)		Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica
	2c)	i)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		ii)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		iv)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		v)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vi)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Tarefa 3	2		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
	3		Tabular	Tabular	Tabular	Tabular	Tabular	Tabular
	5		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Tarefa 4	3		Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Tabular	Tabular	Tabular
	4		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	6	a)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica

Tarefa	Parte	Pergunta		Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Representação Predominante
Tarefa 5	Parte 1	2 b)		Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		c	i)	Algébrica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica
			ii)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Tabular	Gráfica/ Tabular
			iii)	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Tabular	Gráfica	Tabular	Tabular	Tabular
	Parte 2	d	i)	Algébrica	Tabular	Gráfica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
			ii)	Tabular	Gráfica	Gráfica	----	Tabular	Gráfica/ Tabular
			iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
			iv)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		e)		-----	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Tarefa 6		1.1		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
		1.2		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
		1.3		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
		1.4		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
		1.5		Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
		1.6		Gráfica	Algébrica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Numérica	Gráfica
Representação predominante				**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**

Recorde-se que para este estudo foram considerados os modos de representação enunciados por Friedland e Tabach (2001): representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Para além destas representações considerou-se ainda a representação tabular.

O quadro anterior será analisado verticalmente e horizontalmente.

A análise vertical do quadro permite verificar as representações utilizadas por cada grupo para responder às perguntas e, globalmente, as representações utilizadas em cada tarefa e ao longo de toda a intervenção.

A partir da análise mais global pode-se então verificar que todos os grupos utilizaram os diferentes modos de representação no conjunto de tarefas propostas. A representação gráfica foi a representação a que os alunos mais recorreram, tendo sido as representações tabular e numérica as segundas representações mais utilizadas, surgindo em último lugar a representação algébrica. Ao efectuar o mesmo tipo de análise, mas a cada grupo individualmente, verificam-se algumas discrepâncias relativamente ao descrito anteriormente. Nesta análise verifica-se que todos os grupos recorreram também com maior frequência à representação gráfica. No entanto, verificou-se que só os grupos 2, 3 apresentaram a mesma ordem de preferência/utilização dos modos de representação, ou seja, as representações tabular e numérica como as segundas representações mais utilizadas seguidas pela representação algébrica. Para grupos 1, 4 e 5 a segunda representação mais utilizada é a representação algébrica, logo de seguida estão referidas as representações numérica e tabular, respectivamente. O grupo 3 destaca-se por apresentar uma forte incidência no recurso à representação gráfica em comparação com os outros grupos.

Os alunos ao recorrerem a todos os modos de representação durante a intervenção e em particular na resolução de cada uma das tarefas, manifestam assim competências de leitura, interpretação e apresentação da informação em qualquer uma das formas de representação.

Como já foi referido anteriormente, na primeira parte das primeiras cinco tarefas procurou-se apresentar o problema das tarefas em diferentes representações. Nas tarefas 1, 4 e 5 (2ª parte) era dada a informação do problema aos alunos na forma tabular. Nas tarefas 2 e 5 (1ª parte) era dada inicialmente uma expressão algébrica. Na tarefa 3 era dado um problema em linguagem corrente. Todos os grupos conseguiram traduzir a informação de cada uma das tarefas em todas as formas de representação solicitadas, revelaram assim capacidade de traduzir informação de uma forma de representação para outra.

A tarefa 6 teve como objectivo colocar os alunos perante uma situação que teriam que modelar recorrendo às representações matemáticas do seu conhecimento. Como nesta tarefa não eram solicitados resultados em determinadas formas de representação os alunos para responderem às questões utilizaram as representações que acharam mais adequadas ou que preferiam ou ainda com as que se sentiam mais à vontade a trabalhar, não se tendo verificado o uso de todas elas por nenhum grupo. Os grupos 1, 3 e 4 restringiram-se à utilização das representações numérica e gráfica. É de referir que estes grupos apesar de terem usado somente estas representações para responder às questões, quando precisaram de construir a representação gráfica no *Geogebra,* usaram a representação algébrica. O grupo 2 usou as representações numérica, algébrica e tabular e o grupo 5 destaca-se dos restantes grupos por ter recorrido maioritariamente à representação algébrica.

As formas de representação a que recorreram os alunos para resolver esta tarefa não foram ao encontro do que era esperado, tendo em conta as preferências/utilização pelas formas de representação manifestadas ao longo da intervenção pedagógica. Pela análise já apresentada anteriormente das cinco tarefas, a qual também já tinha sido efectuada antes da aplicação desta tarefa, esperava que todos os grupos recorressem na maioria das perguntas à representação gráfica. No entanto, este facto pode ser justificado pela forma como a tarefa foi apresentada primeiramente aos alunos, tendo sido distribuída sem ter sido feita uma apresentação da tarefa e do seu objectivo, verificando-se que os alunos não efectuaram uma leitura da mesma, tendo resolvido pergunta a pergunta e procurando estratégias para cada uma delas. Não sentiram necessidade de encontrar uma forma de representação mais global que lhes permitisse responder a todas as questões, restringindo-se à forma numérica, em que consideraram cada pergunta como um caso particular. Só sentiram necessidade de recorrer a uma outra forma de representação diferente quando lhes foi pedido que estabelecessem comparação entre Funções, procuraram então formas de representação mais generalistas (gráfica e algébrica).

Ao analisar horizontalmente o quadro, ou seja, verificando quais as representações utilizadas pelos grupos por pergunta, constata-se que raramente houve grandes diferenças. Na tarefa 5, foi onde se verificou uma maior discrepância entre os grupos na utilização da forma de representação a utilizar. Esta ocorrência pode ter como interpretação o seguinte: como esta tarefa foi das últimas da intervenção didáctica, então os alunos nesta altura já possuíam preferências ou facilidades de utilização por determinadas formas de representação, às quais recorriam para responderem às questões.

Em suma, neste estudo os alunos recorreram preferencialmente à representação gráfica das Funções.

QUE FACTORES INFLUENCIAM A ESCOLHA DA REPRESENTAÇÃO?

Para responder a esta questão considerarei 2 factores: a natureza das perguntas e as ferramentas que os alunos dispunham para a resolução das tarefas.

Quanto à natureza das perguntas efectuei a sua categorização em cinco classes:

A) Identificar a imagem dado o objecto;

B) Identificar o objecto dada a imagem;

C) Comparação de Funções;

D) Variação de uma função;

E) Influência da variação de parâmetros.

A categoria A – Identificar a imagem dado o objecto é composta por perguntas de todas as tarefas em que é dado objecto e os alunos têm que determinar a sua imagem.

Quadro 11 - *Representações utilizadas por cada grupo, nas perguntas da categoria A.*

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th rowspan="2">PERGUNTA</th><th colspan="5">GRUPOS</th><th rowspan="2">Representação predominante</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="10">TAREFA</td><td rowspan="2">1</td><td>2</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td></tr>
<tr><td>7 a)</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>2 b)</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td></tr>
<tr><td>2 c) i)</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6 a)</td><td>Algébrica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td>2 b)</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica/ Tabular</td></tr>
<tr><td>2 c) i)</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica/ Gráfica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td>2 d) i)</td><td>Algébrica</td><td>Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1.1</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td><td>Numérica</td></tr>
<tr><td colspan="3">Representação predominante</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td><td>Algébrica</td></tr>
</table>

Para responder às perguntas da categoria A – identificar a imagem dado o objecto, todos os grupos à excepção do grupo 3 recorreram maioritariamente à representação algébrica, tendo o grupo 3 recorrido à representação gráfica.

As perguntas em que predomina o recurso à representação numérica, foram perguntas essenciais à compreensão do problema e de investigação de casos particulares, o que vai ao encontro do que é referido por Friedland e Tabach (2001).

O recurso generalizado à representação algébrica, pode ser justificado por serem expressões algébricas de fácil compreensão, ainda mais quando foram escritas pelos próprios alunos, em que eram usadas metodologias de resolução (cálculo) com que os alunos estão mais familiarizados.

O grupo 3, como desde início mostrou à vontade e entusiasmo em utilizar as potencialidades gráficas do *Geogebra*, procurou sempre que o conseguiu utilizar somente a representação gráfica.

As perguntas que compõem a categoria B – Identificar o objecto dada a imagem, são situações em que os alunos têm que determinar o objecto que tem por imagem o valor dado.

Quadro 12 - *Representações utilizadas por cada grupo, nas perguntas da categoria B.*

		PERGUNTA	GRUPOS					Representação predominante
			1	2	3	4	5	
TAREFA	1	7 b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Gráfica
	2	2 b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		2 c) ii)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
	5	2 b)	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		2 c) ii)	Algébrica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Tabular	Gráfica/ Tabular
		2 d) ii)	Tabular	Gráfica	Gráfica	----	Tabular	Gráfica/ Tabular
	6	1.2	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica
		1.3	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
		1.4	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
		1.5	Numérica	Numérica	Numérica	Numérica	Algébrica	Numérica
Representação predominante			**Gráfica e Numérica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica e Numérica**	**Tabular**	**Gráfica**

Nas respostas às perguntas da categoria B verifica-se que os grupos recorrem maioritariamente à representação gráfica, sendo o grupo 5 excepção.

Analisando em particular o grupo 5, este grupo recorre em grande parte à representação tabular, no entanto a representação tabular de cada uma das Funções foi construída com base na representação gráfica. Portanto, pode-se afirmar que este grupo conciliou dois tipos de representação, a gráfica e tabular.

A utilização da representação gráfica pode ser justificada por ser a forma mais imediata e fácil, uma vez que neste tipo de perguntas para dar uma resposta recorrendo à representação algébrica ou numérica tem que se recorrer a procedimentos e cálculos, como a manipulação de variáveis e a substituição de uma variável por um número, em que normalmente os alunos deste nível de escolaridade apresentam algumas dificuldades ou pouco à vontade.

Os alunos neste tipo de pergunta recorreram à representação algébrica principalmente quando os valores dados não os conseguiam localizar exactamente no gráfico ou quando eram valores muito grandes para a janela de visualização. Pode-se, então, concluir que o recurso à representação algébrica em detrimento da gráfica tem a ver com a ocorrência de limitações da última no que diz respeito à obtenção rigorosa de um valor.

Na última tarefa o grupo 5 recorreu maioritariamente à representação algébrica, o que vai contra o que foi referido anteriormente. Este facto pode-se justificar pelo momento em que foi aplicada esta tarefa, no final do ano lectivo, momento em que os alunos já haviam trabalhado consecutivamente com as diferentes formas de representação, com grande ênfase na representação algébrica, uma vez que é a forma geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, e o que permite justificar ou efectuar generalizações. As respostas deste grupo, indicavam que os alunos se encontram num estádio de desenvolvimento do pensamento algébrico já avançado, sendo as suas respostas classificadas, segundo Schwinggendorf e Beineke (1992) como processo, uma vez que indicam de uma forma coerente o que fazer na generalidade a um valor para obter outro.

Nesta tarefa surge em contradição as representações utilizadas pelos restantes grupos, uma vez que recorreram à representação numérica. As suas respostas manifestam pouco ou nada do conceito de função, sendo classificadas, segundo Schwinggendorf e Beineke (1992), como pré-funções, estádio inicial do pensamento algébrico. Uma possível justificação para este facto já foi referida anteriormente.

Apesar das excepções referidas anteriormente, poder-se-á afirmar que a representação matemática que os alunos mais utilizaram nas suas respostas foi a representação gráfica.

As perguntas em que era solicitado o estudo comparativo de duas ou mais Funções constituem a categoria C – comparação de Funções.

Quadro 13 - *Representações utilizadas pelos grupos, nas perguntas da categoria C.*

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2" rowspan="2">PERGUNTA</th><th colspan="5">GRUPOS</th><th rowspan="2">Representação predominante</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td rowspan="4">TAREFA</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">7</td><td>c)</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td><td>Algébrica</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td><td>Tabular</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica/ Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">1.6</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Tabular</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Algébrica/ Numérica</td><td>Gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="4">Representação predominante</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td><td>Gráfica</td></tr>
</table>

As respostas às perguntas da categoria C mostram que os alunos recorreram, na maioria das vezes, à representação gráfica. A representação gráfica dá uma imagem clara do valor real das Funções, sendo esta uma mais valia quando se pede aos alunos que estabeleçam comparações entre Funções ou que identifiquem momentos em as Funções assumem o mesmo valor.

Os alunos recorreram à representação tabular quando lhes foi pedido para analisarem as Funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas.

Nas tarefas foram propostas questões em que os alunos tinham que analisar e interpretar a relação entre as variáveis e as variações das Funções quanto à sua monotonia e compreender a influência da variação dos parâmetros das Funções. As questões relacionadas com a análise e interpretação da relação entre as variáveis e o estudo da monotonia das Funções constituem a classe D – variação das Funções. A classe E – influência dos parâmetros é composta pelas perguntas em que é pedido aos alunos que avaliem a influência dos parâmetros de cada um dos tipos de função.

Quadro 14 - *Representações utilizadas pelos grupos, nas perguntas da classe D.*

Tarefa	Pergunta		Grupos I	II	III	IV	V
2	2c)	iii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		iv)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular
		v)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		vi)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
3	3		Tabular	Tabular	Tabular	Tabular	Tabular
4	3		Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Tabular	Tabular
	4		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	6 b)		Algébrica	Gráfica	Gráfica	Algébrica	Algébrica
5	2 c) iii)		Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Algébrica
	2 c) iv)		Gráfica	Tabular	Gráfica	Tabular	Tabular
	2 d) iii)		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
	2 d) iv)		Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Representação predominante			**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**

Quadro 15 - *Representações utilizadas pelos grupos, nas perguntas da classe E.*

Tare	Pergunta	Grupos I	II	III	IV	V
2	2 c) vii)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
5	e)	-----	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
Representação predominante		**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**	**Gráfica**

Tal como na classe C, nas classes D e E a representação matemática predominante é a representação gráfica, a justificação para este facto é a mesma que foi apresentada para a classe C.

Nesta investigação as potencialidades dos AGD'S evidenciaram-se mais uma vez como uma mais valia no ensino e aprendizagem da Matemática. O recurso ao *Geogebra* permitiu aos alunos uma manipulação directa dos parâmetros das Funções, explorar, analisar e visualizar as diferentes representações de Funções e formular conjecturas baseadas nos *feedbacks* oferecidos pelo *software.*

Na resolução de cada uma das tarefas, os alunos, usaram mais do que um tipo de representação, uma vez que este *software* permite ao utilizador visualizar e alterar, no mesmo ambiente de trabalho, todas as representações, não ficando este limitado na sua análise por não ter presente uma das formas de representação, sendo assim possível colmatar as desvantagens de cada uma das representações com as vantagens das outras.

Os alunos ao efectuarem a análise das Funções com recurso ao *Geogebra* tiveram oportunidade de manipular directamente as diversas formas de representação das Funções, proporcionando assim um ambiente de aprendizagem que permite o envolvimento na exploração das suas características e propriedades matemáticas. O *Geogebra* nesta intervenção pedagógica assumiu um papel de facilitador da resolução das tarefas matemáticas, permitindo aos alunos experimentarem as suas ideias, verificarem as propriedades e garantirem a legitimidade das suas resoluções.

No *Geogebra* a representação gráfica assume um papel central, podendo isso também justificar o facto dos alunos terem recorrido como maior frequência a essa forma de representação.

Os factores referidos anteriormente influenciam a escolha das representações, no entanto, as preferências dos alunos é também um factor a ter em conta justificando então as diferenças verificadas entre os grupos.

COMO É QUE OS ALUNOS CONCILIAM AS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES?

Ao longo da intervenção pedagógica, os alunos, em algumas perguntas recorreram a mais do que um modo de representação, tal como se pode verificar no Quadro 1. Os alunos conciliaram a representação gráfica com a representação algébrica e a tabular com a gráfica.

A representação gráfica foi conciliada com a representação algébrica nas seguintes situações: quando o domínio representado pela representação gráfica não abrange os valores em estudo ou então quando, por limitações do *software*, o aluno não consegue seleccionar o valor em estudo. Os alunos também recorreram frequentemente à representação algébrica para construírem a representação gráfica das Funções.

Dadas as características/potencialidades do *Geogebra* a representação gráfica foi muitas vezes a base da construção da representação tabular das Funções, uma vez que a partir da definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo, o *Geogebra* constrói automaticamente a tabela.

O facto de o *Geogebra* permitir o trabalho com múltiplas representações faz com que sejam colmatadas as desvantagens das diversas formas de representação em combinação umas com as outras.

Algumas considerações finais

As considerações finais apresentadas enquadram-se no âmbito do ensino da Matemática, e referem-se à importância das representações no estudo das Funções, com recurso ao AGD, *Geogebra*.

A partir do trabalho desenvolvido no âmbito da presente investigação pode-se concluir que a representação gráfica desempenhou, para estes alunos, um papel fundamental no estudo das Funções. Esta forma de representação foi em muitas situações a base da construção de outras formas de representação, nomeadamente da algébrica e da tabular. Todavia, foi também complementada, essencialmente, pela representação algébrica. Pois a representação gráfica, tal como todas as outras formas de representação, apresenta algumas limitações, destacando-se o pouco rigor na determinação de valores de uma função.

Uma outra consideração vai para o papel do *Geogebra*. A possibilidade dos alunos usarem de forma autónoma um Ambiente de Geometria Dinâmica fez com que não existissem constrangimentos relativamente ao tipo de representação a adoptar, pois a utilização de qualquer tipo de representação foi agilizada pelo uso do *Geogebra*, bem como a utilização simultânea de diversas representações para a mesma situação. É essencial que os alunos possam usar este tipo de ferramenta de forma continuada nas aulas, de modo a poderem beneficiar de uma Matemática mais flexível, que permita uma maior ênfase na compreensão dos conceitos e uma menor preocupação com os aspectos procedimentais que lhe estão associados. Recordo que a construção à mão, em papel e lápis, de um gráfico de uma função, pode ser extremamente penosa, morosa, e não acrescentar nada *per si* ao conhecimento do aluno, sendo muito mais benéfico a discussão e exploração de uma representação gráfica rigorosa e rapidamente obtida a partir do *software*.

É fundamental proporcionar aos alunos espaços nos quais estes possam partilhar com os seus pares, e com o professor, as representações a que recorreram. Desta forma contactam com diferentes representações do mesmo objecto, constatando que diferentes representações podem transmitir informações distintas e assim poder-se evidenciar a importância da selecção de representações adequadas às especificidades das tarefas a trabalhar.

Os resultados desta investigação levam a crer que, para além de factores intrínsecos e extrínsecos ao próprio aluno, a natureza das perguntas que constituem as tarefas são também um possível factor de influência do tipo de representação a que os alunos recorrem.

Espero que esta investigação contribua para uma maior e melhor compreensão da importância da utilização de diversas formas de representação ao longo do percurso de aprendizagem da Matemática e, em particular, no estudo das Funções. Este estudo é um estudo inicial e ao longo da sua realização fui sentindo como pertinente outras questões gerais para possíveis investigações futuras: a) Qual o papel do professor enquanto factor promotor da utilização de diversas representações? b) Que vantagens e desvantagens são atribuídas pelos alunos a cada uma das formas de representação? Trata-se de um campo fértil para futuras investigações que poderão contribuir para melhorar as aprendizagens matemáticas ao nível do uso das representações múltiplas.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1997). A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação. *Educação e Matemática*, *45*, 27-31; 65.

Abrantes, P. (2003). Matemática, projectos e oportunidades. *Educação e Matemática*, *72*, 1-2.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.

Abrantes, P., Leal, L. C., Teixeira, P., Veloso, E. (1997). *MAT789 – Inovação em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Alves, A. J. C. (2000). *O conceito de função em professores–estagiários de Matemática: um estudo de caso em supervisão* (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho) Lisboa: APM.

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários em Matemática – diferenças na prática da sala de aula. *Actas do XVII EIEM* (pp. 286-299). Lisboa: SPCE.

APM (1998). *Matemática 2001. Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Apostol, T. M.(1986). *Analisis matemático*. 2ª Ed, Barcelona: Editorial Reverté.

Azevedo, A. F. R. (1994). O computador no ensino da Matemática. Um estudo sobre concepções de professores. *Quadrante*, 3(*2*), 51-78.

Azevedo, A.F. R. (1993). *O Computador no Ensino da Matemática. Uma contribuição para o estudo das concepções e práticas dos professores* (Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade e Ciências e Tecnologias). Lisboa: APM.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no* Ensino *Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Boyer, C. B., (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Lda.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to Bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(*9*), 532-538.

Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A.P. (1994). O computador nas concepções e práticas de professores de Matemática. *Quadrante*, 3(*2*), 25-49.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em Ambientes de Geometria Dinâmica (8º ano).* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2008). Aprender Geometria utilizando um Ambiente de Geometria Dinâmica. *Actas do XVII EIEM* (pp. 313-326). Lisboa: SPCE.

Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender Matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.

Carvalho, A. A. A. (2000). A representação do conhecimento segundo uma teoria da flexibilidade cognitiva. *Revista Portuguesa de Educação*, 13(*1*), 169-184.

Carvalho, M. J. O. R., Andrade, A. M. V., & Cardoso, E. L. (2009). A utilização de ambientes geométricos dinâmicos no ensino e aprendizagem de geometria – um curso de geometria no 9º ano de escolaridade (3º Ciclo do Ensino Básico). *Profmat2009 – Simpósio de comunicação.*

Castro, M. (2003). *Educação algébrica e resolução de problemas.* Documento retirado de http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/.

Cavalcanti, C. T. (2001) Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender Matemática* (pp. 121-149). Porto Alegre: Artmed.

Coelho, M. e Saraiva, M. (2002). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. Em Saraiva, M., Coelho, M. e Matos, J. (Orgs.). *Ensino e Aprendizagem da Geometria*. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Cooney, T. J. & Wilson, M. R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. In T. Romberg, E. Fennema & T.Carpenter (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Function* (pp. 131-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Costa, A. C. (2004). *Conhecimentos dos Estudantes Universitários sobre o conceito de função*. (Dissertação de Mestrado. PUC:SP)

Costa, A. I. L., & Canavarro, A. P. (2008). Ensinar Matemática com computador: Factores de inibição ou motivação das práticas dos professores. *Actas do XVII EIEM* (pp. 300-312). Lisboa: SPCE.

Costa, M. J. (2005). A Álgebra nos seus primórdios… *Educação e Matemática, 85*, 23-29.

Coulombe, W. N., & Berenson S. B.(2001). Representations of Patterns and Functions – Tools for Learning. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-174). Reston, VA: NCTM.

DGEBS (1994). *Programa Matemática. Plano de organização do Ensino-Aprendizagem (3º Ciclo)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

Domingos, A. M. D. (1994). *A Aprendizagem de Funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* (Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologias). Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1994). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. Em S. Cunningham & W. Zimmermann (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky. *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, No. 28, 85-106

Duarte, J. (2008). Álgebra, pensamento algébrico e tecnologias. *Educação e Matemática, 98*, 40-42.

Ferreira, E. M. B. (2006). *Ensino e aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O tema de Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade.* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho. Braga.) (consultado em https://repositorium.sdum.uminho.pt/)

Finzer, W. & Jackiw, N. (1998). Dynamic Manipulation of Mathematical Objects [online] Acessível em: *mathforum.org/technology/papers/papers/s2k/index.htm*

Fiorentine, D. Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar… A educação algébrica elementar. *Pro-posições* 4 (*1*), 78-91.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promothing multiple representation in álgebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Galbraith, P. (2002). "Life wasn't meant to be easy": Separating wheat from chaff in technology aided learning? In *Proceedings of the 2nd International Conference on the teaching of mathematics (at the undergraduate level).*University of Crete, Greece.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197 -218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Gómez, P. (1998) Tecnología y educación Matemática. Revista de Informática Educativa, 10(1).

Gómez, P. Tecnología y educación Matemática. Revista Informática Educativa. UNIANDES – LIDIE. Vol. 10, Nº. 1. p 93-11, 1997.

Gonçalves, C., Góis, E., & Martins, M. P. (2003). Sustentabilidade das mudanças curriculares. *Educação e Matemática, 72,* 10-15.

Goos, M. (2005). A sociocultural analysis of the development of pre-service and beginning teacher's pedagogical identities as users of technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8,* 35-59.

Gorgulho, I. (2005). *Actividades de carácter investigativo em Ambientes de Geometria Dinâmica: um estudo com alunos de 6º e 7º anos. (*Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade e Ciências). Lisboa: APM.

Guimarães, H. M. (2008). Dois anos depois, vinte anos depois... Renovar o currículo, melhorar o ensino, melhorar a aprendizagem. *Educação e Matemática*, *98*, 1-2.

Guimarães, H. M. (2008). Renovação do currículo – o "livrinho" amarelo. *Educação e Matemática*, *98*, 9-11.

Hazzan, O., & Goldenberg, E. (1997). Student's understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*, 263-291.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em Geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante,* 2(*1*), 63-78.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003) (Orgs.). *Geometria dinâmica: selecção de textos do livro Geometry turned on!*. Lisboa: APM.

Laborde, C. (2001). Integration of Tchnology in the Design of Geometry Task with Cabri-Geometry. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), 283 – 317.

Lança, C.G.E. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recurso a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos*. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Évora).

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Reseacg in Education,* 16, 1 – 64.

Lins, R., & Giménes, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.* São Paulo: Papirus.

Matos, A. S. S. M. (2007). *Explorando relações funcionais no 8º ano. Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico.* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

Matos, A., Branco, N., & Ponte, J.P. (2005). Como vai o pensamento algébrico dos alunos? *Educação e Matemática, 85*, 54-59.

Matos, J. F. (2007). Comunicação e colaboração na construção do conhecimento com utilização das TIC no projecto WebLabs. In Costa, F. Peralta, H. & Viseu, O. (Orgs.), *As TIC na Educação em Portugal*. Porto: Porto Editora.

Matos, J.F. (2008). Mediação e colaboração na aprendizagem em Matemática com as TIC. *Actas do XVII EIEM* (pp. 76-88). Lisboa: SPCE.

Mendes, M.H.M. (1994). *O Conceito de Função. Aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau.* (dissertação de Mestrado PUC:RJ).

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Monk, S. (2003). Representation in School Mathematics: Learning to Graph and Graphing to Learn. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schiifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 250-262). Reston: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). *Software* no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. *Actas do XVII EIEM* (pp. 279-285). Lisboa: SPCE.

Pesquita, I. M. P. (2007). Álgebra *e pensamento algébrico de alunos de 8º ano.* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências). Lisboa: APM.

Pimenta, P. (2007). A geometria dinâmica no ensino básico e secundário. *Educação e Matemática*, *95*, 37-40.

Pinto, E. (2009). *O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1º ano de escolaridade*. (Dissertação de mestrado, Universidade de Évora). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1984). *Functional Reasoning and the Interpretation of Cartesian Graphs*. (Dissertação de doutoramento, University of Geórgia). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

Ponte, J. P. (1994). *O Projecto MINERVA: Introduzindo as NTI na educação em Portugal.* Lisboa: Departamento de Programação e Gestão Financeira do Ministério da Educação.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34*, 2-7.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática, 34*, 2-7.

Ponte, J. P. (2003). Didácticas: Que desafios? In A. Neto, J. Nico, J. C. Chouriço, P. Costa, & P. Mendes (Eds.), *Didácticas e metodologias da educação: Percursos e desafios* (Vol. 2, pp. 1413-1417). Évora: Universidade de Évora.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 159-192). Campinas: Mercado de Letras.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: uma experiência. *Actas do XVII EIEM* (pp. 196-209). Lisboa: SPCE.

Ribeiro, M. J. B., & Ponte, J. P. (2000). A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores. *Quadrante, 9*(2), 3-26.

Santos, E. (2000). O computador e o professor: Um contributo para o conhecimento das culturas profissionais de professores. *Quadrante*, 9(*2*), pp. 55-81.

Santos, L., Canavarro, A. P., & Ponte, J. P. (2000). O currículo de Matemática: que problemas? Que mudanças? *Actas do ProfMat2000* (pp. 84-95). Lisboa: APM.

Schwinggendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). *Horizontal and vertical growth of student's conception of function.* In Ed Dubinsky & Guershon Harel (Ed), *The concept of function*. Mathematical Association of America, 59-84.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 1-21). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1 989). Transition from operacional to structural conception: The notion of function revisited. *Actes de Ia Troisieme Conference Internationale Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 1 5 1 - 1 58). Paris: França.

Sfard, A. (1 992). Operacional origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *Theconcept of function* (pp. 59-84). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 25-58). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Silva, J. C. (2003). A Matemática, a Tecnologia e a Escola. *Educação e Matemática, 71*, 1-2.

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra throughout the K-12 Curriculum. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schiifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston: NCTM.

Smith, S.P., (2003). *Representation in School Mathematics: Children's Representations of Problems*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schiifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 263-274). Reston: NCTM.

Stake, R. E. (2009). A *Arte da Investigação com Estudos de Caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Veloso, E. (1998). *Geometria-Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E., & Candeias, N. (2003). Prefácio. In J. King & D. Schattschneider (Eds.). *Geometria dinâmica: Selecção de textos do livro Geometry turned on*! Lisboa: APM.

Vinner, S. (1 992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. Em G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 195- 21 3). Washington, EUA: Mathematical Association of America.

Wong, K. (2004). Using Multi-modal think-board to teach mathematics. In *Proceedings of ICME-10.* Copenhagen: Technical University of Denmark. (consultado em http://math.nie.edu.sg/kywong/Multi-modal%20think-board%20ICME%2010%20paper.pdf).

Anexo 1

Tarefa 1

Qual o tarifário melhor? Eis a questão…

O Pedro possui três telemóveis, porque efectua chamadas para todas as redes móveis. Em cada um dos telemóveis tem um tarifário diferente, como apresentado em seguida:

Telemóvel	Operadora	Tarifário	Preço	
1	**Vodafone**	Best Total Base	*Mensalidade*	*Preço/min.*
			15,27 €	0,153
2	**TMN**	+Perto	0,609 cênt /min	
3	**Optimus**	Total	0,00403 €/seg	

1. Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome *Tarefa 1*.

2. Completa as seguintes tabelas, na folha de cálculo do *Geogebra*:

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 1

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 2

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 3

3. Para cada um dos tarifários escreve uma expressão algébrica que permita determinar o valor a pagar para qualquer duração de chamadas.

4. Num referencial cartesiano, faz um esboço dos gráficos que representam cada um dos tarifários.

5. Representa, na zona gráfica do *Geogebra*, os pontos referentes a cada um dos tarifários.

1-Selecciona os dados referentes a cada um dos tarifários → 2- Clica com o botão direito do rato → 3- Selecciona a opção "Criar lista de pontos"

6. Usando o comando *RegressãoLinear traça o* gráfico que representa cada um dos tarifários (Exemplo: RegressãoLinear[lista1]). Compara cada uma das expressões algébricas associadas a cada um dos gráficos com as que tu definiste na pergunta 2.

7. Analisa cada um dos tarifários, apresentando sempre uma justificação para as tuas respostas e indicando também a qual ou a quais das representações (tabela, expressão algébrica ou gráfico) recorreste para dar resposta:

   a) Tendo em conta que o Pedro, mensalmente, fala cerca de 120 minutos, qual dos tarifários é que o Pedro deverá escolher de forma a pagar menos?

   b) Se o Pedro só quiser gastar 25 euros, mensalmente, de entre os tarifários da Vodafone e da TMN, qual deverá escolher?

   c) Existirá algum momento em que o tarifário da Vodafone seja o mais vantajoso?

   d) Se o Pedro pagasse não mensalmente, mas por chamada, qual dos tarifários seria o mais vantajoso?

   e) Se o Pedro quisesse ficar só com um telemóvel com qual dos telemóveis deveria ficar, na tua opinião?

Anexo 2

Tarefa 2

As informações dadas pelas funções y=mx+b

1. Abre o ficheiro *Parâmetro das funções.ggb.*

2. Considera a função que tem como expressão algébrica:

$$y=3x+2$$

a) Representa-a graficamente, através da manipulação dos selectores *m* e *b*.

b) O selector "*AbcissaA*" permite fazer o registo na folha de cálculo de vários pontos pertencentes à função, activando a opção "enviar traço para a folha de cálculo". Completa a seguinte tabela:

x		$-\frac{2}{3}$		1	2
y	-4		2		

Elabora um pequeno texto explicando como fizeste encontrar os valores para completar a tabela.

c) Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação de qual foi a(s) representação a que recorreste para dar a resposta.

i) Qual é a imagem do objecto 10? E de -6?

ii) Qual é o objecto que tem com imagem -10? E 17?

iii) Existe mais do que um objecto com a mesma imagem?

iv) Em que valores é que a função intersecta o eixo das abcissas e o das ordenadas?

v) A função é crescente ou decrescente? Justifica a resposta.

vi) Recorrendo ao selector *m*, indica para que valores de *m* é que a função é crescente, decrescente e constante?

vii) Qual a influência do parâmetro *b* numa função do tipo $y=mx+b$.

d) Guarda o ficheiro como *Tarefa2.*

Anexo 3

Tarefa 3

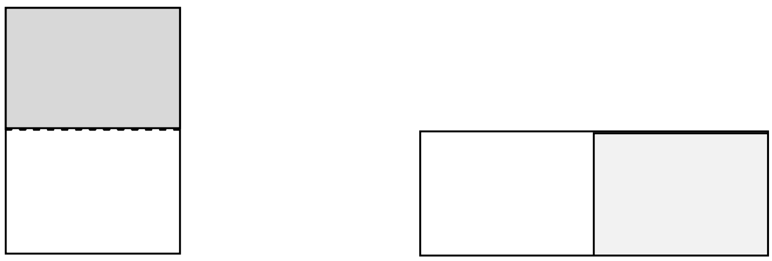
A s folhas de papel que usamos

Já reparaste nas medidas das folhas A4 que usas no teu dia-a-dia?

São umas medidas um tanto ao quanto para o estranhas, 210mm de largura por 297mm de altura …será que há alguma justificação?

Sim, há uma explicação… Estas medidas são uma norma internacional e devem-se ao facto de se ter partido do princípio que a folha A0 (a maior) tinha de ter de área 1 m^2 e a dos restantes formatos seria sempre metade da área do formato precedente, ou seja, a área da folha A4 é 16 vezes menor que a da A0. Temos assim que a área da folha A4 é: 62370 mm^2.

1. Se cortares um pedaço de uma folha A4 e a colocares noutra posição, por exemplo:



   A forma da folha alterou-se, e o que é que acontece à área?

2. Existem rectângulos com outras dimensões que tenham a mesma área da folha A4? Consegues dar mais três exemplos?

3. Como se relacionam as variáveis comprimentos e largura? Consegues escrever uma relação entre as duas?

4. Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome *Tarefa3.ggb* e representa graficamente a função anterior. Indica o procedimento que utilizaste.

5. Se o comprimento da folha A4 for 300 mm quanto terá de altura? Indica as representações a que recorreste para responder.

Anexo 4

Tarefa 4

M atemática por um canudo

Nesta actividade pretende-se relacionar o tamanho de uma imagem que consegues observar através de um cilindro oco com o tamanho do cilindro por onde observas.

Material:

- cilindros ocos de tamanhos diferentes e com o mesmo diâmetro;
- duas fitas métricas;

Procedimento:

- Fixa uma fita métrica numa parede
- Coloca-te a um metro da parede e, olhando através de tubos de vários tamanhos, regista o comprimento de fita visualizada. O tubo deve estar paralelo ao chão aquando do momento de observação e registo.

Tamanho do tubo (cm)	80	70	50	44	40	30	23	20	10
Comprimento da fita (cm)									

Questões:

1. Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome *Tarefa 4*.ggb.

2. Insere os dados na folha de cálculo e representa os pontos na zona gráfica do *Geogebra*.

3. O que acontece ao comprimento da fita visualizada quando o tamanho do tubo aumenta? A qual(ais) da(s) representação(ões) recorreste para responderes.

4. Dado o comportamento das variáveis e a representação gráfica, identifica esta situação com situações já estudadas.

5. Escreve a expressão algébrica desta função e representa-a graficamente no *Geogebra*.

6. Analisa a relação existente entre o tamanho do tubo e o comprimento da fita visualizada, justificando sempre as tuas respostas e indicando também a qual(ais) da(s) representações recorreste:

   a) Se fosse utilizado um tubo de 60 cm, qual o comprimento de fita visualizado? E se fosse de 90 cm?

   b) À medida que o tamanho do tubo se aproxima de 1 m, o que acontece ao tamanho de fita visualizada?

Anexo 5

Tarefa 5

Estudo das funções $y=ax^2$

Para realizar esta tarefa abre o ficheiro *funções ax^2.ggb*.

1ª PARTE

1. Abre o ficheiro *funções ax^2.ggb*.

2. Considera a função que tem como expressão algébrica:

$$y=2x^2$$

a) Representa-a graficamente, através da manipulação do selector *a*.

b) O selector "*AbcissaA*" permite fazer o registo na folha de cálculo de vários pontos pertencentes à função, activando a opção "enviar traço para a folha de cálculo". Completa a seguinte tabela:

x	-3		0		3
y		8		4,5	

Elabora um pequeno texto indicando o procedimento que utilizaste para completar a tabela.

c) Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação da(s) representação(ões) a que recorreste para dar a resposta.

i) Qual é a imagem do objecto 6? E de -5?

ii) Qual é o objecto que tem com imagem 50?

iii) Existe algum objecto que tenha como imagem um número negativo? Justifica a resposta

iv) Existe mais do que um objecto com a mesma imagem? Justifica a resposta

v) Guarda as alterações num ficheiro com o nome *Tarefa 5.1*.

2ª PARTE

1. Abre o ficheiro *funções ax^2.ggb*.

2. Considera a seguinte tabela:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-0,5	0	-0,5	-2

a) Representa graficamente, no *Geogebra*, os pontos apresentados na tabela.

b) Qual a expressão algébrica desta função?

c) Que tipo de gráfico define esse conjunto de pontos? Traça o gráfico.

d) Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação de qual foi a(s) representação a que recorreste para dar a resposta.

i) Qual a imagem dos objectos -8 e 8?

ii) Que objectos têm como imagem -50?

iii) Existe mais do que um objecto com a mesma imagem?

iv) Existe algum objecto que tenha como imagem um número positivo?

e) Compara as duas funções apresentadas anteriormente (na 1ªparte e na 2ª parte). O que podes concluir sobre a influência do parâmetro a no comportamento das funções do tipo $y=ax^2$? Justifica a resposta.

f) Guarda o ficheiro como *Tarefa 5.2*.

Anexo 6

Tarefa 6

O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função

Para realizar esta tarefa usa o *Geogebra.*   **Deve fazer parte de cada resposta a representação a que recorreram e os procedimentos utilizados.**

De acordo com a Enciclopédia Britânica o cabelo humano cresce, em média, 13 mm por mês.

1. Os alunos Joaquim e Joana depois de terem tomado conhecimento desta informação colocaram algumas questões.
   1.1. O Joaquim tem a mesma idade que tu, se nunca tivesse cortado o cabelo, qual seria o seu comprimento?

   1.2. A Joana mediu o seu cabelo, tendo este 50 cm. Qual é a idade mínima que a Joana pode ter?

   1.3. A Joana precisa de esperar quantos anos, sem cortar o cabelo, para que este fique a medir 1m?

   1.4. O Joaquim rapou o cabelo para participar num torneio de natação. Há quanto tempo ocorreu este torneio, sabendo que o cabelo do Joaquim mede já 1,95 cm e que ele entretanto nunca o cortou?

   1.5. Mais tarde o Joaquim revelou que quando rapou o cabelo fez um tratamento que aumenta o crescimento médio do cabelo para 15 mm por mês. Tendo esta informação em conta e os dados da alínea anterior, quando é que ocorreu o torneio?

   1.6. A Joana cortou o cabelo no mesmo dia que o Joaquim cortou, ficando com um comprimento de 10 cm. Quanto medirá agora? Considerando que eles não tencionam cortar o cabelo nos próximos tempos, será que em algum momento o Joaquim e a Joana terão o cabelo do mesmo tamanho?