

COSMOLOGIA RELATIVISTA,
INFLAÇÃO E MATÉRIA ESCURA

Maria da Assunção Figueiredo da Silva

Dissertação para obtenção do Grau
de Mestre em Física na
Universidade de Évora

ÉVORA, 1998

PREFÁCIO

Os conhecimentos na área da física que a minha formação anterior (Licenciatura em Química – Ramo Educacional e Curso de Pós Graduação em Ensino de Química e de Física, frequentados na Universidade de Coimbra) me permitiu adquirir, apesar de, dada a sua especificidade, serem fracos e muito limitados, despertaram-me o interesse por esta ciência e a vontade de explorar algumas das áreas que desconhecia. Foi com esse objectivo que iniciei o Curso de Mestrado em Física. No entanto, dadas as dificuldades que sabia que decorreriam do trabalho em simultâneo como professora do Ensino Secundário em início de carreira (e, portanto, com 22 horas lectivas semanais) e da distância geográfica que me separava da Universidade de Évora (≈ 100 Km), não poderia esperar que o trabalho aqui desenvolvido, nomeadamente durante a fase de elaboração desta dissertação, pudesse revelar-se tão formativo e sobretudo tão gratificante como, de facto, aconteceu. Foi, portanto, largamente superior às minhas expectativas iniciais o resultado da frequência deste Curso, especialmente porque, partindo de um completo desconhecimento das noções mais elementares da Cosmologia e da Teoria da Relatividade Geral, se tornou possível a elaboração desta tese. Por tal facto, não poderei deixar de agradecer ao Professor Leite Videira que, com infinita paciência, extrema dedicação e empenho, aliados ao rigor e à exigência que o caracterizam, excedeu largamente o exigível à sua função de Orientador, só assim, tornando viável a concretização do trabalho aqui apresentado. Por todo o esforço que comigo desenvolveu durante a preparação deste trabalho e por tudo o que, desse modo, me permitiu aprender, desejo expressar o meu profundo reconhecimento e a minha amizade.

Gostaria ainda de agradecer a um conjunto de pessoas que, com o seu apoio, amenizaram o meu percurso até à conclusão deste trabalho. Em primeiro lugar o meu

agradecimento à minha família (pais e irmão) e ao João por tudo o que, não podendo aqui enunciar pela inconveniente extensão, resumirei como o seu amor, a sua presença sempre constante e o seu apoio incondicional. Ao João, em particular, apresento as minhas desculpas pela minha frequente indisponibilidade e agradeço o seu “apoio técnico” na resolução dos problemas informáticos.

Gostaria, também, de agradecer a todos os professores do Curso de Mestrado em Física a disponibilidade e a simpatia com que sempre nos ensinaram, bem como, a todos os colegas de curso pelo espírito de inter-ajuda e de camaradagem, que tornaram este curso um agradável espaço de convívio. De entre muitos divertidos episódios, relembrarei com saudade os magníficos almoços das quartas-feiras e as reconfortantes conversas telefónicas com a Ana Carla.

Queria ainda expressar a minha gratidão aos professores dos Conselhos Directivos e das Comissões de Horários da Escola Secundária Mouzinho da Silveira, de Portalegre, que sempre me facultaram horários que permitiram a frequência das actividades deste Curso, e aos colegas desta Escola que, de alguma forma, tenham demonstrado a sua compreensão pela minha situação de estudante.

Para terminar, não posso deixar de lamentar que a vontade de progressão dos professores do Ensino Secundário seja tão menosprezada que, quando procuramos aumentar as nossas qualificações profissionais, sejamos abandonados a nós próprios, sem qualquer apoio do Estado Português, quer ao nível financeiro quer ao nível de flexibilidade e/ou redução do horário lectivo. Para todos os professores que, mesmo nestas condições, aceitaram corajosamente o desafio de crescer profissionalmente, os meus votos de sucesso. A todos os amigos que me acompanharam, durante esta minha aventura, mais uma vez, os meus profundos agradecimentos.

Portalegre, 1998

Assunção Silva

Aos meus pais,

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
1 - O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	5
1.1- Introdução	5
1.2- A geometria do Universo	7
1.2.1- O Postulado de Weyl e o Princípio Cosmológico	7
1.2.2- A métrica de Robertson-Walker	9
1.2.3- O tensor de Einstein para a geometria de Robertson-Walker	13
1.3- A dinâmica do Universo	17
1.4- Os modelos de Friedmann	22
1.4.1- O parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração	22
1.4.2- Universo dominado pela matéria	23
1.4.2.1- O modelo de Einstein-de Sitter ($k=0$)	24
1.4.2.2- O modelo fechado ($k=1$)	26
1.4.2.3- O modelo de Milne ($k=-1$)	31
1.4.3- Universo dominado pela radiação	35
1.4.4- Conclusão	37
1.5- A constante cosmológica	39
1.6- Relação entre q_0 e H_0 e grandezas cosmológicas mensuráveis	45
1.6.1- A lei de Hubble e o desvio para o vermelho	45
1.6.2- Distância-luminosidade	47
1.7- Horizontes cosmológicos	51
1.8- Singularidade inicial e era de Planck	54

2 - EVOLUÇÃO TÉRMICA DO UNIVERSO	57
2.1- Equilíbrio térmico	57
2.1.1- Distribuição de partículas no equilíbrio	58
2.1.2- Relação entre as grandezas N_γ , ϵ_γ , p_γ , s_γ e a temperatura	59
2.1.3- Relação entre densidade e temperatura para partículas com massas não nulas	61
2.1.3.1- Aproximação de alta temperatura	61
2.1.3.2- Aproximação de baixa temperatura	63
2.1.4- Conclusão	64
2.2- Variação da temperatura	66
2.3- Desacoplamento e temperatura dos neutrinos	69
2.4- Nucleossíntese primordial	76
2.4.1- Razão neutrão/protão	76
2.4.2- Reacções nucleares	79
2.4.3- Abundância de elementos primordiais	83
2.5- Recombinação	87
2.5.1- Recombinação do hidrogénio	87
2.6- A radiação cósmica de fundo	91
3 - PROBLEMAS DO MODELO PADRÃO	97
3.1- Introdução	97
3.2- O problema da bariossíntese	99
3.3- O problema dos horizontes	103
3.4- O problema dos monopólos	105
3.5- O problema da planura	108
4 - INFLAÇÃO	111
4.1- Introdução	111
4.2- Inflação caótica	115
4.3- Solução dos problemas do modelo padrão	122
5 - MATÉRIA ESCURA	125
5.1- O que é a matéria escura?	125
5.2- Evidências da existência de matéria escura	127
5.2.1- Argumentos cosmológicos	127

5.2.2- Evidências mecânicas	129
5.2.2.1- Curvas de rotação de galáxias espirais	130
5.2.2.2- Aplicação do teorema do Virial a enxames	132
5.2.2.3- Conclusão	134
5.3- Constituição da matéria escura	136
5.3.1- Matéria bariónica	136
5.3.1.1- A distribuição do hidrogénio	136
5.3.1.2- Objectos compactos massivos dos halos das galáxias	138
5.3.2- Matéria não bariónica	139
5.3.2.1- Neutrinos massivos	140
5.3.2.2- Partículas massivas que interagem fracamente	142
5.4- Tentativas de detecção de matéria escura	144
5.4.1- Detecção de objectos compactos	144
5.4.2- Detecção de partículas	147
5.5- Conclusão	151
6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	155
APÊNDICES	157
A- Programa em BASIC para a obtenção das curvas $R(t)$ dos modelos fechados	157
B- Programa em BASIC para a obtenção das curvas $R(t)$ dos modelos abertos	159
C- Determinação de N_γ e de ε_γ	161
D- Densidade de partículas na aproximação de baixa temperatura	163
BIBLIOGRAFIA	165

INTRODUÇÃO

Num contexto cosmológico a Teoria da Relatividade Geral (TRG) estabelece a interligação entre a geometria espaço-temporal do Universo e o seu conteúdo dinâmico (matéria-energia). Ao longo deste trabalho teremos por base esta interligação, tentando clarificar o modo como ela nos pode fornecer um quadro explicativo da evolução do Universo. No primeiro capítulo, que será essencialmente dedicado ao estabelecimento da geometria espaço-temporal do Universo, veremos como, através da imposição de determinadas condições, relativas quer à geometria, quer ao conteúdo do Universo, podemos obter, a partir das equações da Teoria da Relatividade Geral, as soluções cosmológicas correspondentes ao actual modelo padrão da cosmologia: o modelo do big bang. Neste capítulo serão apresentados os modelos de Friedmann, obtendo-se as respectivas soluções para os modelos de Universo com geometria plana, aberta e fechada, dominados por matéria não relativista e para um Universo plano dominado por radiação. Como exemplos de modelos com constante cosmológica não nula, e dada a sua importância histórica, serão ainda referidos os modelos de Einstein e de de Sitter. Estabeleceremos a relação entre os parâmetros em termos dos quais as soluções dos modelos de Friedmann são apresentadas (parâmetro de Hubble e parâmetro de desaceleração) e grandezas cosmológicas mensuráveis como o desvio para o vermelho e a distância-luminosidade. Ainda neste capítulo, verificaremos quais os limites que os modelos apresentados impõem às nossas comunicações com diferentes pontos da geometria espaço-temporal do Universo, investigando acerca da existência de horizontes cosmológicos. Concluiremos este capítulo com uma breve referência à existência de uma singularidade inicial nos modelos de Friedmann e definindo era de Planck.

No segundo capítulo, completamos a interligação geometria-dinâmica, analisando a forma como a evolução da geometria do Universo influencia os processos dinâmicos que nela podem decorrer, determinando o conteúdo do Universo em cada época da sua evolução. Veremos, neste capítulo, como, numa situação de equilíbrio térmico, é possível, conhecida a temperatura do Universo, determinar as diferentes grandezas físicas que caracterizam a matéria e a radiação e estabeleceremos a evolução térmica que acompanha a expansão do Universo. Iniciaremos o estudo dos processos que acompanham a descida de temperatura, com a aniquilação electrão-positrão e o desacoplamento dos neutrinos. Investigaremos, a seguir, quais as condições em que surgiram os primeiros núcleos atómicos (nucleossíntese primordial), mostrando como a concordância entre as previsões do modelo do big bang, para as densidades de elementos primordiais, e os dados observacionais, constitui um dos grandes sucessos deste modelo. Continuando a seguir a evolução térmica do Universo analisaremos a formação dos primeiros átomos neutros (recombinação) e o consequente desacoplamento da radiação da matéria, que origina a radiação cósmica de fundo observada no Universo. Chamaremos a atenção para o facto de o acordo entre as características observadas nessa radiação e as previsões do big bang constituir o mais importante suporte observacional deste modelo.

No capítulo seguinte, será efectuado um breve balanço relativamente aos sucessos e problemas do modelos, seguido da descrição de algumas questões às quais o modelo não consegue dar resposta. São elas, a dificuldade de explicar a assimetria observada entre bariões e antibariões (bariossíntese), o problema que a existência de horizontes cosmológicos levanta relativamente à explicação do elevado grau de homogeneidade e isotropia do Universo, o problema da excessiva produção de monopólos magnéticos durante a evolução do Universo muito jovem e a inexplicável proximidade da densidade do Universo do valor crítico, necessário para apresentar uma geometria plana (problema da planura). Todos estes problemas, que no contexto estrito do modelo padrão permanecem sem resposta, são apresentados como estímulos para o desenvolvimento dos modelos inflacionários de que nos ocuparemos no quarto capítulo.

No capítulo quatro, depois de uma introdução onde referiremos a evolução por que passaram os modelos inflacionários, descreveremos o modelo caótico de Linde. Veremos ainda quais as soluções que a inflação apresenta para os problemas analisados no capítulo anterior.

Por fim, concluiremos este trabalho, apresentando uma perspectiva geral do conhecimento actual acerca do problema da matéria escura, uma das questões mais importantes da cosmologia actual, que permanece, ainda, por solucionar. Depois de referirmos várias evidências para a existência de maior densidade de matéria no Universo do que a que a matéria visível pode originar, apresentamos algumas possibilidades para a constituição dessa matéria escura e descrevemos algumas das tentativas que se vêm desenvolvendo no sentido de a detectar, referindo os novos conhecimentos que estas têm fornecido e as dificuldades com que se têm debatido.

Capítulo 1

O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

1.1- Introdução

Em 1915, Einstein concluiu a Teoria da Relatividade Geral (TRG). A solução de Schwarzschild, fornecendo a deformação da geometria espaço-temporal nas vizinhanças de uma distribuição esférica de matéria, foi a primeira solução das equações de campo desta teoria com significado físico. No entanto, esta solução reporta-se apenas a efeitos locais, na medida em que a deformação do espaço se vai anulando, à medida que nos afastamos da esfera de matéria. Einstein procurou, então, encontrar uma solução global das equações da TRG que descrevesse o Universo, supostamente estático e preenchido por uma distribuição contínua e uniforme de matéria. A solução por ele encontrada foi publicada em 1917, mas não, sem que antes, Einstein tivesse alterado as equações iniciais, de forma a obter a desejada solução estática que as equações originais não conseguiam fornecer, acrescentando-lhe um novo termo, que denominou *constante cosmológica*. Ainda nesse ano, de Sitter mostrou que as equações da TRG com constante cosmológica, podiam fornecer outras soluções, obtendo, a partir delas, a expansão exponencial do espaço vazio. A possibilidade da expansão do Universo não foi tomada seriamente até que, na década de vinte, as observações dos desvios espectrais das galáxias o mostraram inequivocamente. Em 1929, E. Hubble obtém um valor para a taxa dessa expansão, estabelecendo a denominada Lei de Hubble.

Quatro anos antes dos resultados de Hubble se tornarem conhecidos (entre 1922 e 1924), já A. Friedmann, considerando a hipótese de um Universo dinâmico com

densidade de energia variável no tempo, havia obtido das equações da TRG soluções que expressavam a expansão do Universo. Depois da descoberta de Hubble, os modelos cosmológicos de Friedmann, tornaram-se uma base de trabalho para investigadores como A. Lemâitre, A. Eddington, H. Robertson e A. Walker, constituindo actualmente a teoria cosmológica padrão.

1.2- A geometria do Universo

A TRG fornece-nos dez equações diferenciais interligadas, conhecidas por *equações de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -KT_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}; \quad \mu \text{ e } \nu = 0,1,2,3 \quad (1.1)$$

nas quais a componente geométrica é representada pelo tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, definido a partir do tensor e do escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ e R , que nos informam acerca da curvatura de uma geometria quadri-dimensional, espaço-temporal, na presença de determinado conteúdo dinâmico (matéria e/ou radiação), expresso pelo tensor energia, $T_{\mu\nu}$. A obtenção de uma solução cosmológica para estas equações passa obrigatoriamente pela definição prévia quer da geometria do Universo quer do seu conteúdo. Contudo, para que a obtenção da solução se torne matematicamente possível é necessário descobrir nas características geométricas e dinâmicas do Universo algumas regularidades que, através da introdução de condições de simplificação, permitam a resolução das equações de Einstein. O tipo de simplificações consideradas, conducentes a possíveis soluções cosmológicas das equações de Einstein, caracteriza os denominados modelos cosmológicos. Nesta secção, iremos dedicar-nos apenas à componente geométrica das equações (1.1), procurando, em primeiro lugar, estabelecer a métrica que caracteriza a geometria do modelo dinâmico, definido pelo Postulado de Weyl e pelo Princípio Cosmológico, para, posteriormente, determinarmos o correspondente tensor de Einstein.

1.2.1- O Postulado de Weyl e o Princípio Cosmológico

O *Postulado de Weyl* estabelece que as linhas de universo das unidades básicas do Universo (galáxias, na época actual) formam um feixe tri-dimensional de geodésicas, que se afastam regularmente sem se intersectarem. Ao longo de cada linha de universo

consideraremos que as coordenadas espaciais não variam, $x^j = \text{constante}$ para $j=1,2,3^*$, variando apenas a coordenada temporal, x^0 . Perpendicularmente a todas as linhas de Universo podemos considerar uma série de hipersuperfícies tipo espaço, para as quais $x^0 = \text{constante}$.

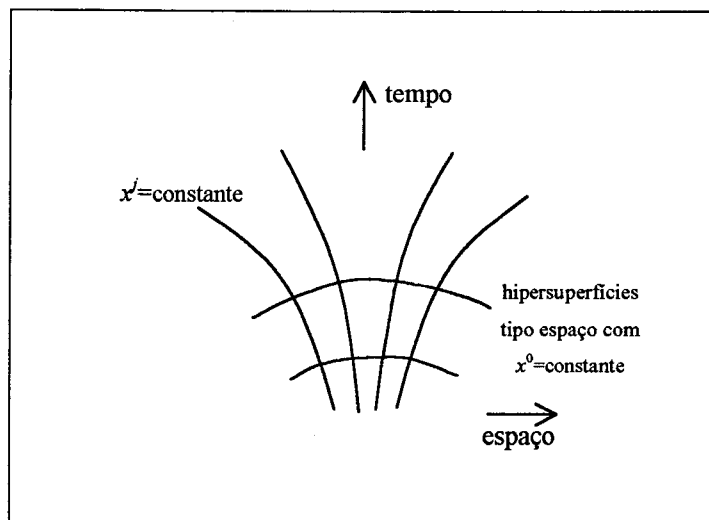


Figura 1.1- Representação das linhas de Universo e das superfícies ortogonais de tempo cósmico constante.

Se, em vez de um conjunto discreto formado pelas unidades básicas do Universo, considerarmos que este pode ser representado por um fluido contínuo e homogêneo, podemos usar as coordenadas x^0 e x^j como as quatro coordenadas de uma geometria contínua espaço-temporal. Deste modo, é possível definir um sistema de referência cósmico, relativamente ao qual todos os observadores que sigam as geodésicas da geometria do Universo, para as quais $x^j = \text{constante}$, se encontram em repouso (observadores fundamentais). Por outro lado, como em cada superfície ortogonal às linhas de Universo referidas, a coordenada x^0 é constante, é possível definirmos um tempo cósmico preferencial, que sincronize os relógios de todos os observadores fundamentais, permitindo-nos, assim, falar de épocas cósmicas sem quaisquer ambiguidades. O sistema de coordenadas x^μ , assim obtido, é vulgarmente designado

* Usamos letras gregas para as coordenadas espaço-temporais, com variação de 0 a 3, e letras latinas para as coordenadas exclusivamente espaciais, com variação de 1 a 3.

sistema *comóvel*. O *Princípio Cosmológico* estabelece a homogeneidade e a isotropia do Universo em qualquer tempo cósmico, o que significa que, em cada época da sua evolução, todas as posições do Universo e todas as direcções espaciais são equivalentes.

Embora as simplificações introduzidas pelo Princípio Cosmológico e pelo Postulado de Weyl tenham o objectivo principal de possibilitar a resolução das equações de Einstein – obviamente muito difícil para universos não homogéneos, anisotrópicos e sem quaisquer regularidades dinâmicas – elas não representam um grande afastamento da realidade observada no nosso Universo. De facto, os desvios para o vermelho observados nas galáxias indicam apenas pequenos desvios relativamente ao comportamento descrito no Postulado de Weyl. Por outro lado, os dados observacionais disponíveis para a distribuição de matéria no Universo, permitem considerar que, em larga escala e dentro de uma aproximação razoável, o Universo é homogéneo e isotrópico. Também a existência de uma radiação de fundo cósmica altamente homogénea e isotrópica vem ao encontro das simplificações consideradas.

1.2.2- A métrica de Robertson-Walker

Para a obtenção da geometria espaço-temporal do modelo de Universo definido pelo Postulado de Weyl e pelo Princípio Cosmológico, teremos que estabelecer quais as consequências das condições de simplificação que eles impõem na métrica do espaço-tempo, expressa pelo quadrado do elemento de linha:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é uma função das coordenadas x^μ , que descreve todas as propriedades geométricas do espaço-tempo em questão.

A condição de ortogonalidade entre as linhas de Universo e as superfícies de tempo cósmico constante implica que todos os termos cruzados espaço-tempo sejam nulos, $g_{0j} = 0$. Procuremos agora alguma informação sobre g_{00} .

A equação das geodésicas de ds^2 é:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (1.3)$$

com os símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, dados por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\varphi\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\varphi} \right) \quad (1.4)$$

Fazendo, em (1.3), $\alpha=\beta=0$ e $\mu=j=1,2,3$:

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \Gamma_{00}^j \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0 \quad (1.5)$$

podemos concluir que, no caso das linhas de Universo, como $x^j=\text{constante}$, então, $d^2 x^j / ds^2 = 0$, e, portanto,

$$\Gamma_{00}^j = 0, \quad (1.6)$$

que, de acordo com a definição de símbolos de Christoffel, (1.4), para $\varphi=i=1,2,3$, fica:

$$\Gamma_{00}^j = \frac{1}{2} g^{ji} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Como, pela condição de ortogonalidade entre espaço e tempo, $g_{i0}=0$, então, de (1.7), podemos concluir que g_{00} é função apenas de x^0 :

$$\Gamma_{00}^j = -\frac{1}{2} g^{ji} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0 \quad (1.8)$$

Se, na função $g_{00}(x^0)$, substituirmos x^0 por uma função $f(x^0)$ adequada, podemos escolher $g_{00}=1$. Sabendo, então, que $g_{00}=1$ e que $g_{0j}=0$, escrevemos o elemento de linha como

$$ds^2 = (dx^0)^2 - g_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (1.9)$$

onde t é o tempo cósmico, e $d\sigma^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ é o elemento de linha espacial, cuja forma cumpre-nos agora encontrar.

Para a obtenção do elemento de linha espacial iremos considerar uma superfície tridimensional, cuja métrica nos forneça as três componentes espaciais com curvatura constante, a fim de assegurar a homogeneidade e a isotropia exigidas pelo Princípio Cosmológico. A solução mais intuitiva (que, por isso, apresentamos em primeiro lugar) será a escolha da superfície S^3 de uma hiper-esfera de raio R (superfície fechada), num espaço quadridimensional. A equação desta superfície será

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2 \quad (1.10)$$

e o elemento de linha correspondente é

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad (1.11)$$

Através da mudança de coordenadas (análoga à passagem habitual em \mathfrak{R}^3 de coordenadas cartesianas para coordenadas polares esféricas)

$$\begin{aligned} x_1 &= R \operatorname{sen} \chi \cos \theta \\ x_2 &= R \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ x_3 &= R \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ x_4 &= R \cos \chi \end{aligned} \quad (1.12)$$

com $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, decorre, então, que

$$d\sigma^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \chi \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2) \quad (1.13)$$

ou, fazendo $r = \operatorname{sen} \chi$,

$$d\sigma^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.14)$$

A superfície da hipersfera considerada corresponde a uma geometria de curvatura positiva; no entanto, como nenhuma das condições que definem este modelo a isso obrigam, uma outra hipótese, igualmente satisfatória, consiste em tomar uma superfície tridimensional de curvatura constante negativa (superfície aberta), para a qual

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -R^2, \quad (1.15)$$

com o elemento de linha dado por

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2, \quad (1.16)$$

que, através das mudanças de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sinh \chi \cos \theta \\ x_2 &= R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ x_3 &= R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ x_4 &= R \cosh \chi \end{aligned} \quad (1.17)$$

seguido de $r = \sinh \chi$, fica

$$d\sigma^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.18)$$

As duas hipóteses anteriores, juntamente com uma terceira hipótese que considera uma superfície plana (de curvatura nula), para a representação da geometria espacial do Universo, podem ser aglutinadas numa única expressão, através da introdução de um factor k , vulgarmente denominado constante de curvatura, que, para espaços de curvatura positiva (espaço fechado), nula (espaço plano) ou negativa (espaço aberto), pode tomar, respectivamente, os valores $k = +1, 0$, ou -1 :

$$d\sigma^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.19)$$

No caso de considerarmos o Universo como um espaço fechado, o factor R , cuja dimensão é a de um comprimento, adquire vulgarmente o significado de “raio do Universo”. Contudo, esta designação é vazia de significado em espaços planos ou abertos, pelo que, a designação mais comum é a de *factor de escala*. De facto, se contemplarmos a hipótese da sua variação no tempo, compatível com o modelo dinâmico que nos propusemos analisar, o parâmetro $R(t)$ fornecerá a variação real dos comprimentos, *as distâncias próprias*, através da contracção ou expansão da escala considerada para o sistema comóvel, no qual as posições de todas as partículas livres do Universo são constantes no tempo. Assim, será a dependência temporal de R que indicará qual a evolução geométrica do Universo como um todo. Nos modelos estáticos, como o de Einstein, R será sempre constante, mas, para os modelos dinâmicos, indica-nos a forma como o Universo se expande ou se contrai ao longo do tempo.

Por substituição de (1.19) em (1.9), obtemos, então, o elemento de linha compatível com o Princípio Cosmológico e o Postulado de Weyl:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (1.20)$$

onde as coordenadas comóveis são representadas por t , r , θ e ϕ .

Esta métrica foi deduzida pela primeira vez, em 1930, por Robertson e Walker, independentemente, sendo, por isso, designada *métrica de Robertson-Walker*.

1.2.3- O tensor de Einstein para a geometria de Robertson-Walker

A partir da métrica de Robertson-Walker, considerando $x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$ e $x^3=\phi$, podemos explicitar as componentes não nulas do tensor métrico:

$$g_{00} = 1; g_{11} = -\frac{R^2}{1-kr^2}; g_{22} = -R^2 r^2; g_{33} = -R^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (1.21)$$

que, uma vez que todas as quantidades presentes na componente geométrica das equações de Einstein são funções de $g^{\mu\nu}$, nos permitirão determinar o tensor de Einstein para o caso particular do modelo que temos vindo a considerar.

Considerando o tensor métrico (1.21), obtêm-se, a partir da equação de definição dos símbolos de Christoffel (1.4), 12 componentes não nulas de $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ [Narlikar, 1993, p.106]:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{R\dot{R}}{c(1-kr^2)}, & \Gamma_{22}^0 &= \frac{R\dot{R}r^2}{c}, & \Gamma_{33}^0 &= \frac{R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta}{c}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2)\sin^2 \theta, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^2 &= \cot \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{R}}{R}\end{aligned}$$

O tensor de Ricci pode determinar-se a partir dos símbolos de Christoffel assim obtidos,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \ln(-g)^{1/2}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\theta}^\gamma \Gamma_{\nu\gamma}^\theta - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \ln(-g)^{1/2}}{\partial x^\rho} \quad (1.22)$$

e de $g = \det\|g_{\mu\nu}\|$, que, no caso do tensor métrico (1.20), fica

$$g = \det\|g_{\mu\nu}\| = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} = -\frac{R^6 r^4 \sin^2 \theta}{1-kr^2} \quad (1.23)$$

Obtêm-se, deste modo, quatro componentes não nulas do tensor de Ricci (sendo três delas idênticas)¹,

¹ Usamos a notação $\dot{x} = dx/dt$ e $\ddot{x} = d^2x/dt^2$

$$R_0^0 = \frac{3}{c^2} \ddot{R}$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2 + 2kc^2}{R^2} \right) \quad (1.24)$$

($R_\mu^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$), a partir das quais podemos determinar o escalar de Ricci

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{c^2 R^2} \right) \quad (1.25)$$

Podemos, seguidamente, calcular o tensor de Einstein através do tensor e do escalar de Ricci. Substituindo (1.24) e (1.25) em

$$G_\mu^\mu = R_\mu^\mu - \frac{1}{2} R \quad (1.26)$$

obtemos

$$G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2} R = -\frac{3}{c^2} \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} \quad (1.27)$$

e

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1}{c^2} \left(2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} \right) \quad (1.28)$$

que, substituídos nas equações de Einstein, fornecem, respectivamente, as equações cosmológicas

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0 \quad (1.29)$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_1^1 = \frac{8\pi G}{c^2} T_2^2 = \frac{8\pi G}{c^2} T_3^3 \quad (1.30)$$

para cuja resolução nos falta ainda escolher os tensores energia adequados à descrição do conteúdo do Universo. Convém neste momento notar que, ao considerarmos determinadas condições acerca da geometria do Universo, obtivemos, a partir das equações gerais da TRG, duas únicas equações, cuja resolução se reduz, apenas, à determinação da função $R(t)$, para cada um dos valores possíveis da constante k .

1.3- A dinâmica do Universo

A idealização mais comum em cosmologia representa o conteúdo do Universo por um fluido perfeito, sendo, nesse caso, o tensor energia dado por:

$$T_{\mu}^{\nu} = (p + \rho c^2)u_{\mu}u^{\nu} - p \quad (1.31)$$

onde u_{μ} é a quadri-velocidade do fluido,

$$u_{\mu} = g_{\mu\nu}u^{\nu} = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{ds}, \quad (1.32)$$

p é a pressão e ρc^2 a densidade de energia. Ao longo de uma linha de Universo de um elemento de fluido, a única componente não nula da sua quadri-velocidade será $u^0=1$ e, portanto, o tensor energia (1.31) fica

$$T_{00} = \rho c^2 = \varepsilon \quad (1.33)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p \quad (1.34)$$

As equações de campo (1.29) e (1.30) podem, então, escrever-se

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon \quad (1.35)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (1.36)$$

Como a variação do factor de escala ao longo do tempo, ou seja, a expansão ou contracção do Universo, provoca variações na densidade de energia, a obtenção da solução $R(t)$ a partir das equações de campo exige o conhecimento da função $\varepsilon(R)$, a qual poderá ser obtida a partir de uma equação dinâmica que, como veremos adiante, relaciona R , p e ε , e de uma *equação de estado* $p(\varepsilon)$.

Multiplicando a equação (1.35) por R^3 e (1.36) por $\dot{R}R^2$ e notando que os resultados obtidos no primeiro membro de cada equação – respectivamente $R(\dot{R}^2 + kc^2)$ e $\dot{R}(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2)$ – se podem relacionar por

$$\frac{d}{dt} [R(\dot{R}^2 + kc^2)] = \dot{R}(2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2), \quad (1.37)$$

podemos relacionar igualmente os segundos membros, obtendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon R^3 \right) = - \frac{8\pi G}{c^2} p \dot{R} R^2$$

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon R^3) + 3p \dot{R} R^2 = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{d}{dR} (\varepsilon R^3) + 3p R^2 = 0 \quad (1.39)$$

Como todos os termos de (1.38) têm dimensões de energia/tempo, esta expressão indica-nos que é nula a variação da energia do Universo por unidade de tempo, podendo, portanto, ser entendida como a lei de conservação da energia. É de salientar, também, que a equação (1.39), que relaciona as densidades de energia e de pressão com o factor de escala, foi obtida directamente das equações de Friedmann, sem quaisquer imposições posteriores, além da de que o conteúdo do Universo se comporta como um fluido perfeito. Considerando determinadas aproximações para a dinâmica interna do fluido representativo do conteúdo do Universo, podem obter-se diferentes funções de estado, $p(\varepsilon)$. Na maioria dos casos de interesse físico, $p(\varepsilon)$ reduz-se a

$$p = \omega \varepsilon = \omega \rho c^2 ; \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (1.40)$$

O caso mais simples, vulgarmente denominado *poeira*, é caracterizado pela ausência de pressão, pelo que, neste caso teremos $\omega = 0$, ficando a equação de estado simplesmente $p = 0$. Esta aproximação vale para o caso de fluidos não relativistas, onde todas as partículas seguem as linhas de Universo, sem movimentos relativos significativos.

No caso de fluídos relativistas, os movimentos desordenados das partículas e as frequentes colisões entre elas originam densidades de pressão

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (1.41)$$

Este último caso, denominado aproximação relativista, será útil para as épocas mais remotas da evolução do Universo em que a radiação tem um papel dominante, enquanto a poeira, ou aproximação não relativista, é vulgarmente utilizada para a descrição da matéria, em épocas mais recentes, em que a densidade de matéria supera a da radiação, e a temperatura é demasiado baixa para que a matéria apresente comportamento relativista.

No caso da aproximação não relativista obtemos, por substituição de $p=0$ em (1.39), $d(\varepsilon R^3)/dR=0$, o que nos permite concluir que εR^3 independe de R e que, portanto, se manterá constante durante toda a evolução do Universo. Deste modo, considerando os valores da densidade de energia e do factor de escala correspondentes à época actual¹, ε_0 e R_0 , podemos estabelecer, para esta aproximação, a desejada função $\varepsilon(R)$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_0^3}{R^3} \quad (1.42)$$

De modo análogo, obtemos por substituição de $p=1/3\varepsilon$ em (1.39), a função $\varepsilon(R)$ válida para a aproximação relativista:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_0^4}{R^4} \quad (1.43)$$

Uma vez que o Universo é composto por matéria e radiação, é comum considerar separadamente os seus contributos para a densidade total de energia, adoptando a aproximação não relativista (poeira) para a descrição da matéria, $\varepsilon_{\text{mat}} = \varepsilon_{0\text{mat}} R_0^3 / R^3$ e a aproximação relativista para a radiação, $\varepsilon_{\text{rad}} = \varepsilon_{0\text{rad}} R_0^4 / R^4$. No contexto destas

¹ Usamos o índice "0" quando nos referimos aos valores das diferentes grandezas físicas na época actual.

aproximações, podemos concluir que a relação entre a densidade de matéria e a densidade de radiação terá variado ao longo do tempo, de acordo com

$$\frac{\varepsilon_{\text{rad}}}{\varepsilon_{\text{mat}}} = \frac{\varepsilon_{0\text{rad}}}{\varepsilon_{0\text{mat}}} \frac{R_0}{R} \quad (1.44)$$

A substituição dos valores (observacionais) actuais $\varepsilon_{0\text{rad}} \approx 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$ e $\varepsilon_{0\text{mat}} \approx 10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$ em (1.44) permite concluir que a época $R \approx 10^{-3} R_0$, em que as contribuições da matéria e radiação se igualam, $\varepsilon_{\text{mat}} \approx \varepsilon_{\text{rad}}$, faz a transição entre a época da evolução do Universo onde a contribuição da radiação para a densidade de energia total é superior à da matéria, $R < 10^{-3} R_0$, e a época em que a matéria passa a ter um papel dominante, relativamente à radiação, $R > 10^{-3} R_0$ (ver Figura 1. 2).

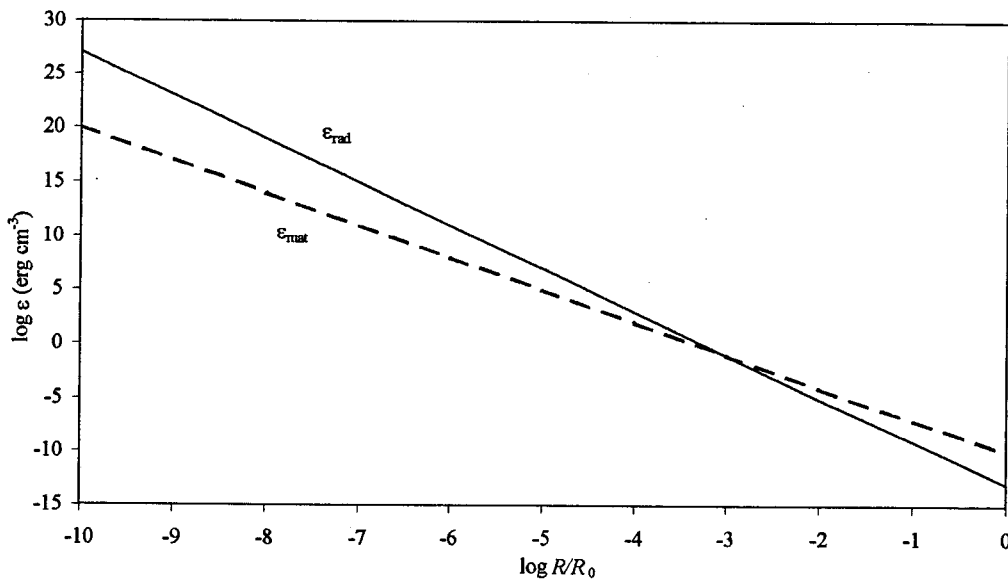


Figura 1. 2 - Variação de ε_{rad} e de ε_{mat} ao longo da evolução do Universo. As linhas ε_{mat} e ε_{rad} foram obtidas a partir de (1.42) e (1.43)*, respectivamente, considerando os valores $\varepsilon_{0\text{mat}} = 10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$ e $\varepsilon_{0\text{rad}} = 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$: $\varepsilon_{\text{mat}} = 10^{-10} (R/R_0)^{-3}$ e $\varepsilon_{\text{rad}} = 10^{-13} (R/R_0)^{-4}$. Verifica-se do gráfico que para $R = 10^{-3} R_0$, que corresponde a $\varepsilon_{\text{mat}} = \varepsilon_{\text{rad}}$, ocorre a transição entre as épocas dominadas pela radiação e as épocas dominadas pela matéria.

* Todos os gráficos apresentados foram gerados em EXCEL, a partir das respectivas funções.

Se considerarmos que, nas épocas dominadas pela radiação, ε_{mat} é desprezável, podemos obter a solução $R(t)$ a partir da equação de campo (1.35), considerando a densidade de energia do Universo dada por (1.43). Por outro lado, se nas épocas dominadas pela matéria, considerarmos o conteúdo do Universo representado apenas por poeira, desprezando a contribuição da radiação, podemos obter a solução $R(t)$, através da substituição de (1.42) em (1.35). As aproximações relativista e não relativista dão, assim, origem a dois modelos cosmológicos: Universo dominado pela radiação e Universo dominado pela matéria.

1.4- Os modelos de Friedmann

Os modelos cosmológicos, de cujas soluções nos ocuparemos de seguida, foram elaborados por Friedmann, entre 1922 e 1924, e caracterizam-se pela obtenção de soluções cosmológicas dinâmicas, $R(t)$, a partir das equações de Einstein, considerando a geometria de Robertson-Walker e funções $\epsilon(R)$, obtidas da forma descrita na secção anterior. Iniciaremos esta secção, definindo dois parâmetros, *parâmetro de Hubble* e *parâmetro de desaceleração*, funções de R , que nos serão úteis para a obtenção das soluções. Seguidamente serão obtidas, numa primeira parte, as soluções para os modelos que consideram o Universo dominado pela matéria, para cada um dos valores da constante de curvatura, $k=1, 0$ ou -1 , e, numa segunda fase, será encontrada a solução, para $k=0$, para o modelo de Universo dominado pela radiação.

1.4.1- O parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração

O parâmetro de Hubble, $H(t)$, é definido por

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.45)$$

(com as dimensões t^{-1}) e traduz, para cada época t , a velocidade de expansão do Universo, por unidade de comprimento, informando-nos, portanto, sobre a taxa de expansão (ou contracção) do Universo em cada época da sua evolução. O seu valor na época actual é vulgarmente designado *constante de Hubble*, estando esta designação ligada à lei empírica, estabelecida por Hubble, na qual a “constante” H_0 relaciona as velocidades de recessão das galáxias, v , e a sua distância, D , em relação a nós: $v=H_0D$. As observações de Hubble não se estenderam, no entanto, a galáxias suficientemente distantes, para que os seus resultados se possam generalizar para todas as épocas da evolução do Universo. Veremos, posteriormente, quando voltarmos a este assunto, na secção 1.5, que a linearidade desta lei só é aplicável para objectos muito próximos. As observações apontam para valores de H_0 situados entre 50 e 100 $\text{Km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$,

resultados normalmente expressos por $H_0 \approx 100 h_0 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $0,5 \leq h_0 \leq 1$, representando a incerteza do valor.

Define-se o parâmetro de desaceleração, $q(t)$, (adimensional) por

$$q = -\frac{\ddot{R}}{R} H^{-2} = -\ddot{R} \frac{R}{\dot{R}^2} \quad (1.46)$$

As soluções $R(t)$ serão expressas em termos dos valores actuais destes dois parâmetros, H_0 e q_0 , os quais, como veremos na secção 1.5, podem relacionar-se com grandezas cosmológicas mensuráveis (como luminosidades e desvios para o vermelho).

1.4.2-Universo dominado pela matéria

Considerando em (1.35) e (1.36) as equações válidas para a aproximação não relativista:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_0^3}{R^3} = \rho_0 c^2 \frac{R_0^3}{R^3} \quad (1.47)$$

$$p=0 \quad (1.48)$$

obtemos

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R^3} \quad (1.49)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} = 0 \quad (1.50)$$

Uma vez que, para a determinação da solução $R(t)$, basta-nos apenas uma das equações anteriores, consideraremos, para maior simplicidade de resolução, (1.49), na qual tomaremos cada um dos valores de k , obtendo, assim, as três possíveis soluções deste modelo.

1.4.2.1- O modelo de Einstein-de Sitter ($k=0$)

Considerando $k=0$, (1.49) e (1.50) ficam, respectivamente,

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R} \quad (1.51)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 0 \quad (1.52)$$

Integrando (1.51), obtemos:

$$\int R^{1/2} dR = \int \left(\frac{8\pi G\rho_0 R_0^3}{3} \right)^{1/2} dt$$
$$R = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3} \right)^{1/3} R_0 t^{2/3} \quad (1.53)$$

Considerando em (1.51) e na definição do parâmetro de Hubble (1.45), a época actual ($R=R_0$), obtemos

$$H_0^2 = \frac{\dot{R}_0^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G\rho_0}{3} \quad (1.54)$$

A solução (1.53) pode, então, ser escrita em termos da constante de Hubble:

$$R = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 \right)^{2/3} t^{2/3} \quad (1.55)$$

ou, uma vez que, fazendo na equação anterior $t=t_0$ ($R=R_0$), se obtem

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}, \quad (1.56)$$

temos R em termos da idade actual do Universo:

$$R = \frac{R_0}{t_0^{2/3}} t^{2/3} \quad (1.57)$$

A eterna expansão fornecida por esta solução, (1.57), é evidenciada pela representação gráfica $R(t)$ que apresentamos na Figura 1.3.

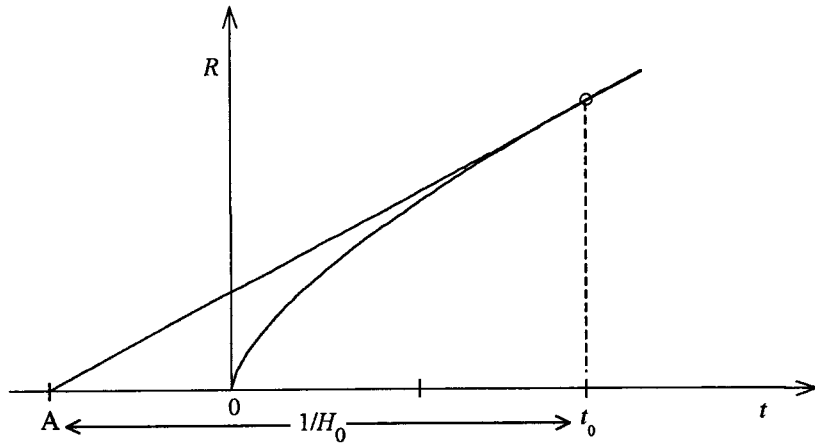


Figura 1.3- Solução $R(t)$ no modelo de Einstein-de Sitter. A distância entre o ponto A, em que a tangente à curva $R(t)$, no ponto t_0, R_0 , assinalado pelo círculo, cruza o eixo dos tempos, e o ponto $t=t_0$, é $1/H_0$ (pois o seu declive é $\dot{R} = R_0 H_0 = R_0 / (t_0 - A)$). A figura mostra que t_0 é $2/3$ dessa distância.

De acordo com (1.54), a densidade de matéria na época actual, será:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_c \quad (1.58)$$

Esta densidade corresponde à densidade de matéria necessária para que um Universo dominado por poeira apresente uma geometria plana, sendo, por isso, vulgarmente designada por *densidade crítica*, ρ_c , e utilizada como referência para exprimir a densidade de matéria dos modelos abertos e fechados, através do *parâmetro de densidade*:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.59)$$

De acordo com a definição anterior, um Universo plano será caracterizado por $\Omega_0=1$.

A partir de (1.52) e (1.45), podemos concluir que o parâmetro de desaceleração fica

$$q = -\frac{\ddot{R}}{R}H^{-2} = -\left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{R}^2}{R^2}\right)\left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2 = \text{constante} = \frac{1}{2} \quad (1.60)$$

pelo que, neste modelo, o valor actual $q_0=1/2$, será idêntico ao de todas as épocas, passadas ou futuras, da evolução do Universo. Concluimos, então, que, de acordo com o modelo de Einstein-de Sitter, o Universo expande-se indefinidamente, com um parâmetro de desaceleração constante ($q=1/2$), tem a idade $t_0 \approx 10^{17}$ s e uma densidade de matéria $\rho_0 = \rho_c \approx 2 \times 10^{-29} h_0^2 \text{ g cm}^{-3}$ (ou $\Omega_0=1$) (valores obtidos por substituição de $H_0 \approx 100 h_0 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ em (1.56) e (1.58)).

1.4.2.2- O modelo fechado ($k=1$)

Fazendo $k=1$ em (1.49) e (1.50), obtemos:

$$\frac{\dot{R}^2 + c^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R^3} \quad (1.61)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + c^2}{R^2} = 0 \quad (1.62)$$

Na época actual, estas equações, escritas em termos de H_0 e de q_0 , ficam:

$$\frac{\dot{R}_0^2 + c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \Leftrightarrow H_0^2 + \frac{c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3}$$

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 + \frac{c^2}{R_0^2} \right) \quad (1.63)$$

e

$$2 \frac{\ddot{R}_0}{R_0} + \frac{\dot{R}_0^2 + c^2}{R_0^2} = 0 \Leftrightarrow 2(-q_0 H_0^2) + H_0^2 + \frac{c^2}{R_0^2} = 0$$

$$H_0^2(2q_0 - 1) = \frac{c^2}{R_0^2} \quad (1.64)$$

$$R_0 = \frac{c}{H_0(2q_0 - 1)^{1/2}} \quad (1.65)$$

Substituindo (1.64) em (1.63), obtemos a densidade de matéria actual, em termos de H_0 e q_0 :

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G} \quad (1.66)$$

Procederemos agora à eliminação de ρ_0 e de R_0 da equação de campo (1.61), para que, integrando-a, possamos obter uma solução $R(t)$ expressa, apenas, em termos dos parâmetros H_0 e q_0 . Por substituição das equações (1.65) e (1.66), (1.61) fica:

$$\dot{R}^2 = c^2 \left(\frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{1}{R} - 1 \right) \quad (1.67)$$

ou, fazendo

$$\alpha = \frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}}, \quad (1.68)$$

$$\dot{R}^2 = c^2 \left(\frac{\alpha}{R} - 1 \right) \quad (1.69)$$

Integrando esta última

$$ct = \int \frac{R^{1/2}}{(\alpha - R)^{1/2}} dR \quad (1.70)$$

que, através da substituição

$$R = \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1.71)$$

fica

$$ct = \int \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \int \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$ct = \frac{1}{2} \alpha (\theta - \sin \theta) \quad (1.72)$$

A solução deste modelo pode, então, ser expressa pelas equações paramétricas (1.71) e (1.72). Eliminando θ destas equações, ficamos com

$$ct = \frac{1}{2} \alpha \cos^{-1} \left(1 - \frac{2R}{\alpha} \right) - R^{1/2} (\alpha - R)^{1/2} \quad (1.73)$$

A representação gráfica destas soluções, apresentada na Figura 1.4, mostra-nos o tipo de evolução característico dos modelos fechados: após um período de expansão, que se prolongará para além da época actual, o Universo contrai-se até ao *colapso* ($R=0$).

Veremos a seguir quais as informações que este modelo fornece acerca dos valores actuais, Ω_0 , q_0 e t_0 , do tempo máximo de vida do Universo, t_{vida} , e do valor máximo atingido pelo factor de escala, R_{max} .

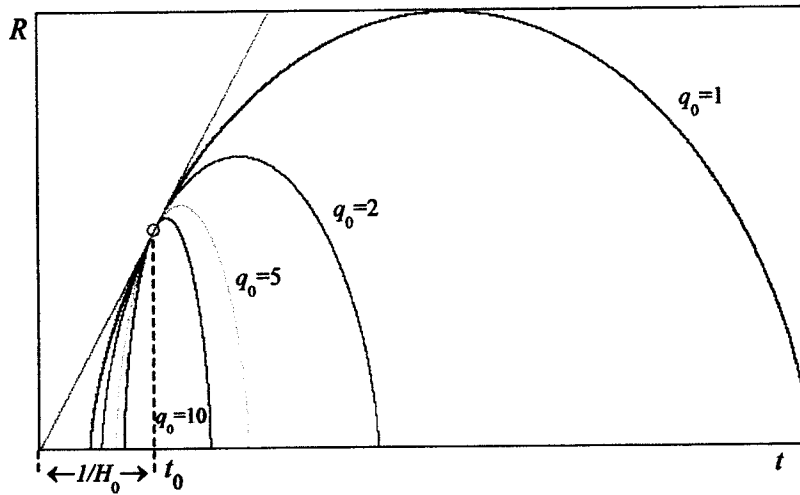


Figura 1.4 – Soluções das equações de Friedmann para $k=1$. A escala das curvas, para diferentes valores de q_0 , foi escolhida de modo a que todas elas tivessem o ponto comum t_0, R_0 (assinalado com o círculo) e a mesma tangente, nesse ponto. As curvas foram obtidas a partir das equações (1.71) e (1.72) através de um programa em BASIC (Apêndice A).

Substituindo na definição do parâmetro de densidade (1.59), a expressão da densidade actual do Universo (1.66), e a da densidade crítica (1.58), vemos que

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} = 2q_0 \quad (1.74)$$

Como o segundo membro de (1.64) é positivo, $c^2/R_0^2 > 0$, também $2q_0 - 1 > 0$, pelo que, neste modelo só são permitidos valores $q_0 > 1/2$ e, portanto, para que o Universo seja fechado teremos densidades $\Omega_0 > 1$. Assim, concluímos que, nos modelos fechados, a densidade de matéria e o parâmetro de desaceleração, que caracterizam a época actual do Universo, serão superiores aos valores previstos, para a mesma época, para um Universo plano.

De (1.65) e de (1.71), aplicada à época actual, obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \cdot (1 - \cos\theta_0) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{(2q_0 - 1)^{1/2}}$$

$$\cos \theta_0 = \frac{1 - q_0}{q_0} \quad (1.75)$$

e, portanto,

$$\text{sen } \theta_0 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \quad (1.76)$$

Por substituição destes resultados em (1.72), obtemos a idade actual do Universo:

$$t_0 = \frac{1}{2c} \cdot \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \cdot (\theta_0 - \text{sen } \theta_0)$$

$$t_0 = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{1}{H_0} \left[\cos^{-1} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right) - \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \right] \quad (1.77)$$

Fazendo $R=0$ em (1.71), verificamos que o factor de escala é nulo para $\theta=0$, que corresponde à origem dos tempos $t=0$, e para $\theta=2\pi$, que corresponde ao tempo máximo de vida do Universo, o qual, de acordo com (1.72), fica:

$$t_{\text{vida}} = \frac{1}{2c} \alpha (2\pi - \text{sen } 2\pi) = \frac{\alpha \pi}{c} = \frac{1}{H_0} \frac{2\pi q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \quad (1.78)$$

Voltando a considerar (1.71) vemos que o valor máximo do factor de escala, R_{max} , ocorre para $\theta=\pi$,

$$R_{\text{max}} = \frac{1}{2} \alpha (1 - \cos \pi) = \alpha = \frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \quad (1.79)$$

na época

$$t_{R_{\text{max}}} = \frac{1}{2c} \alpha (\pi - \text{sen } \pi) = \frac{\alpha \pi}{2c} = \frac{1}{2} t_{\text{vida}} \quad (1.80)$$

Exemplificando, para o caso de $q_0=1$, temos:

$$\Omega_0 = 2$$

$$R_0 = \frac{c}{H_0} \approx 10^{28} \text{cm}$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx 10^{17} \text{s}$$

$$t_{\text{vida}} = \frac{2\pi}{H_0} \approx 10^{18} \text{s}$$

$$R_{\text{max}} = \frac{2c}{H_0} = 2R_0 \approx 10^{28} \text{cm}$$

1.4.2.3- O modelo de Milne ($k = -1$)

Considerando $k = -1$, as equações de Friedmann (1.49) e (1.50), ficam:

$$\frac{\dot{R}^2 - c^2}{R^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R^3} \quad (1.81)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 - c^2}{R^2} = 0 \quad (1.82)$$

As soluções deste modelo, conhecido por modelo de Milne, serão obtidas de forma análoga à efectuada, na secção anterior, para o modelo fechado. Escrevendo as equações anteriores, aplicadas à época actual, em termos de H_0 e de q_0 , obtemos:

$$\frac{\dot{R}_0^2 - c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \Leftrightarrow H_0^2 - \frac{c^2}{R_0^2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3}$$

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 - \frac{c^2}{R_0^2} \right) \quad (1.83)$$

e

$$2\frac{\ddot{R}_0}{R_0} + \frac{\dot{R}_0^2 - c^2}{R_0^2} = 0 \Leftrightarrow 2(-q_0 H_0^2) + H_0^2 - \frac{c^2}{R_0^2} = 0$$

$$H_0^2(1 - 2q_0) = \frac{c^2}{R_0^2} \quad (1.84)$$

$$R_0 = \frac{c}{H_0(1 - 2q_0)^{1/2}} \quad (1.85)$$

Substituindo (1.84) em (1.83), obtemos para a densidade actual uma expressão idêntica à já obtida para o caso $k=1$:

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G} \quad (1.86)$$

Considerando R_0 e ρ_0 , dados respectivamente, por (1.85) e (1.86), podemos escrever a equação (1.81) em termos de H_0 e q_0 ,

$$\dot{R}^2 = c^2 \left(\frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}} \frac{1}{R} + 1 \right) \quad (1.87)$$

Fazendo,

$$\beta = \frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(1 - 2q_0)^{3/2}}, \quad (1.88)$$

(1.87), fica:

$$\dot{R}^2 = c^2 \left(\frac{\beta}{R} + 1 \right) \quad (1.89)$$

e integrando:

$$ct = \int \frac{R^{1/2}}{(\beta + R)^{1/2}} dR \quad (1.90)$$

Procedendo, agora, à substituição

$$R = \beta \sinh^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \beta (\cosh \phi - 1); \phi \geq 0 \quad (1.91)$$

obtemos

$$ct = \int \beta \sinh^2 \frac{\phi}{2} d\phi = \int \frac{1}{2} \beta (\cosh \phi - 1) d\phi$$

$$ct = \frac{1}{2} \beta (\sinh \phi - \phi) \quad (1.92)$$

A solução dos modelos de Friedmann para o Universo aberto pode, então, exprimir-se através das duas equações (1.91) e (1.92),

$$R = \frac{1}{2} \beta (\cosh \phi - 1) \quad (1.93)$$

$$ct = \frac{1}{2} \beta (\sinh \phi - \phi) \quad (1.94)$$

ou, eliminando θ destas equações, por

$$ct = R^{1/2} (\beta + R)^{1/2} - \frac{1}{2} \beta \cosh^{-1} \left(\frac{2R}{\beta} + 1 \right), \quad (1.95)$$

com $\phi \geq 0$ e $\beta = \frac{c}{H_0} \frac{2q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}$.

A Figura 1.5 ilustra o comportamento deste modelo, para diferentes valores de q_0 , mostrando-nos que, tal como no modelo plano de Einstein-de Sitter, também um Universo aberto se expande para sempre.

De (1.84) concluímos que, neste modelo, $0 \leq q_0 < 1/2$ e, portanto, como $\Omega = 2q_0$, $0 \leq \Omega < 1$. Assim, nos modelos abertos, o Universo terá uma densidade de matéria inferior à densidade crítica e, conseqüentemente, uma desaceleração inferior à do modelo plano.

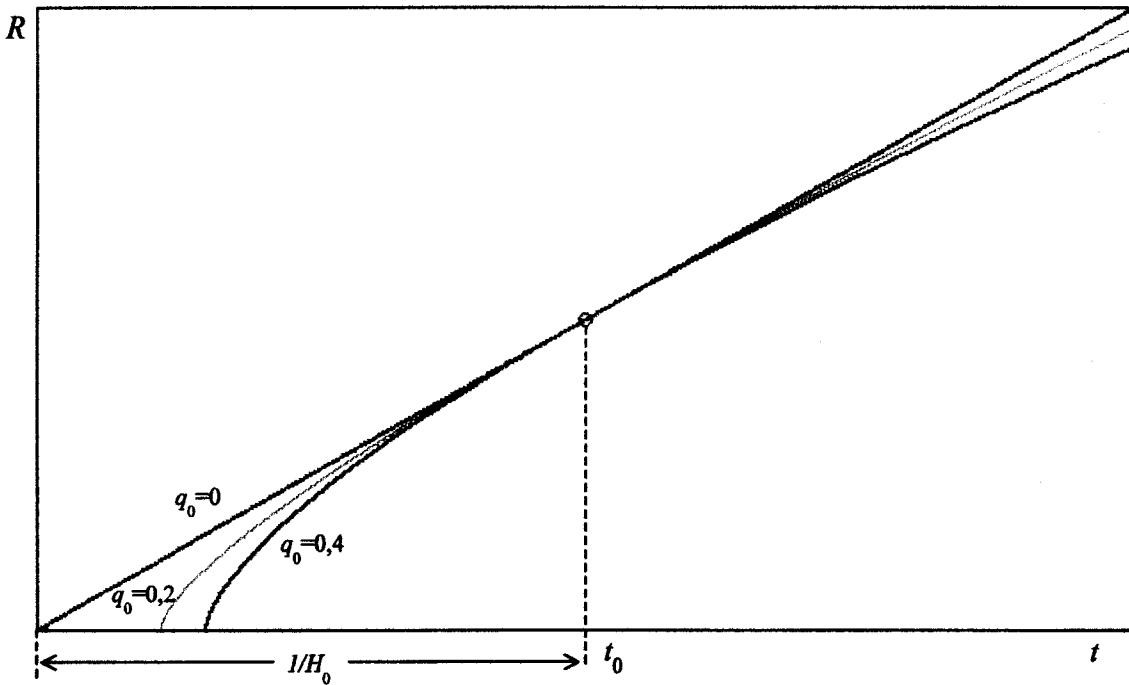


Figura 1.5- Soluções das equações de Friedmann para $k=-1$. A escala das curvas, para diferentes valores de q_0 , foi escolhida de modo a que todas elas tivessem o ponto comum t_0, R_0 (assinalado com o círculo) e a mesma tangente, nesse ponto. As curvas foram obtidas a partir das equações (1.93) e (1.94), através de um programa em BASIC (Apêndice B).

Considerando $R=R_0$ em (1.93) e igualando a (1.85), obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \cdot (\cos \phi_0 - 1) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{(1-2q_0)^{1/2}}$$

$$\cosh \phi_0 = \frac{q_0 - 1}{q_0} \quad (1.96)$$

$$\sinh \phi_0 = \frac{(1-2q_0)^{1/2}}{q_0} \quad (1.97)$$

A equação (1.94), escrita para a época actual, permite, por substituição de $\cosh \phi_0$ e de $\sinh \phi_0$, a obtenção da idade actual do Universo:

$$t_0 = \frac{1}{2c} \cdot \frac{2q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \frac{c}{H_0} \cdot (\sinh \phi_0 - \phi_0)$$

$$t_0 = \frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \frac{1}{H_0} \left[\frac{(1-2q_0)^{1/2}}{q_0} - \cosh^{-1} \left(\frac{1-q_0}{q_0} \right) \right] \quad (1.98)$$

que, atendendo a que $\cosh^{-1}x = \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$, pode também escrever-se

$$t_0 = \frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}} \frac{1}{H_0} \left[\frac{(1-2q_0)^{1/2}}{q_0} - \ln \left(\frac{1-q_0 + (1-2q_0)^{1/2}}{q_0} \right) \right] \quad (1.99)$$

Neste modelo, o caso limite $q_0=0$ corresponde a um Universo com densidade de matéria nula, $\Omega=0$, no qual a ausência de gravidade provoca uma expansão não desacelerada, com o factor de escala aumentando linearmente com o tempo, $R=ct$; neste caso, a idade do Universo é máxima e igual a $1/H_0$ (ver Figura 1.5).

1.4.3-Universo dominado pela radiação

Para encontrarmos a solução das equações de Friedmann, (1.35) e (1.36), para o modelo que considera o Universo dominado pela radiação, devemos considerar para os tensores energia a aproximação relativista dada por (1.41) e (1.43), $p=1/3\varepsilon$ e $\varepsilon = \varepsilon_0 R_0^4 / R^4$, onde ε representa agora apenas a contribuição da radiação para a densidade de energia do Universo. Consideraremos unicamente a solução para o caso $k=0$, uma vez que este modelo se adequa ao estudo das épocas mais jovens da evolução do Universo, nas quais a curvatura não influencia significativamente a dinâmica da evolução. As equações de Friedmann ficam, então,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi\varepsilon_0}{3c^2} \frac{R_0^4}{R^4} \quad (1.100)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2} \frac{R_0^4}{R^4} \quad (1.101)$$

Por integração de (1.100) obtemos

$$R = \left(\frac{32\pi G \varepsilon_0}{3c^2} \right)^{1/4} R_0 t^{1/2} \quad (1.102)$$

Escrevendo (1.100) em termos do parâmetro de Hubble, e para a época actual, decorre

$$\varepsilon_0 = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2, \quad (1.103)$$

que, substituída em (1.102), fornece o factor de escala em termos da constante de Hubble,

$$R = R_0 (2H_0)^{1/2} t^{1/2} \quad (1.104)$$

Considerando $t=t_0$ na equação anterior, obtemos a idade actual do Universo,

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0}, \quad (1.105)$$

que nos permite escrever (1.104) como

$$R = \frac{R_0}{t_0^{1/2}} t^{1/2} \quad (1.106)$$

Concluimos que, tal como para o Universo plano dominado pela matéria, também um Universo plano, dominado pela radiação se expande para sempre (ver Figura 1.6).

O parâmetro de desaceleração, na época actual, pode ser obtido considerando $t=t_0$ em (1.101) e escrevendo esta equação em termos de q_0 e de H_0 :

$$2 \frac{\ddot{R}_0}{R_0} + \frac{\dot{R}_0^2}{R_0^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0$$

$$-2q_0 H_0^2 + H_0^2 = -H_0^2$$

$$q_0 = 1 \quad (1.107)$$

Uma vez que actualmente o Universo é claramente dominado pela matéria, a importância dos valores actuais, fornecidos por este modelo, para os diversos parâmetros, não é muito significativa.

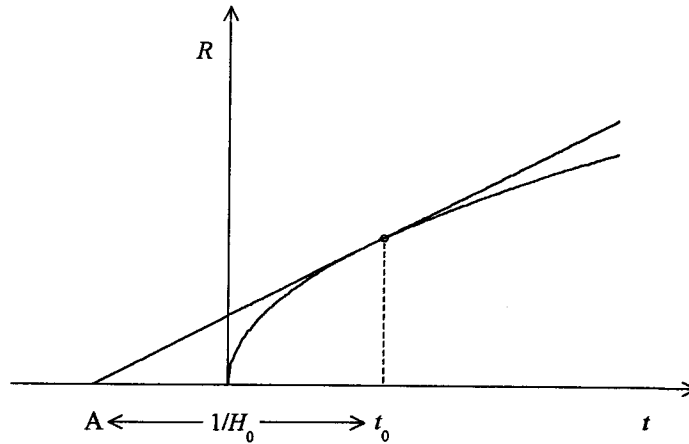


Figura 1.6- Solução $R(t)$ para um Universo plano dominado pela radiação. A distância entre o ponto A , em que a tangente à curva $R(t)$, no ponto t_0, R_0 , assinalado pelo círculo, cruza o eixo dos tempos, e o ponto $t=t_0$, é $1/H_0=2t_0$.

1.4.4-Conclusão

Os modelos de Friedmann constituem actualmente a teoria cosmológica padrão, ou teoria do *big bang*, termo que foi proposto pela primeira vez por F. Hoyle, para designar a origem do Universo.

A densidade de energia do Universo determina a curvatura da geometria espaço-temporal e, conseqüentemente, o tipo de evolução fornecido por esta teoria. Assim, num Universo plano ou aberto, de densidade actual, respectivamente, $\Omega_0=1$ e $\Omega_0<1$, a expansão mantém-se por toda a evolução do Universo, o qual terá, portanto, um tempo de vida ilimitado. Essa expansão é, no entanto, contrariada pela atracção gravítica, sendo, portanto, tanto mais desacelerada quanto maior a densidade. De um modo geral, a desaceleração varia com o tempo, mas o modelo de Einstein-de Sitter

(Universo plano) constitui uma excepção a esse comportamento, sendo neste caso o parâmetro de desaceleração constante e igual a $1/2$ durante toda a evolução do Universo. Na época actual, para o Universo dominado por matéria, temos $0 \leq q_0 < 1/2$ para $\Omega_0 < 1$, $q_0 = 1/2$ para $\Omega_0 = 1$ e $q_0 > 1/2$ para $\Omega_0 > 1$. Nos modelos fechados, isto é com $\Omega_0 > 1$, o efeito de desaceleração da gravidade é suficiente para que, após o período inicial de expansão, quando se atinge um valor máximo do factor de escala, R_{\max} (em $t_{R_{\max}}$), o Universo se comece a contrair, terminando numa nova singularidade, após um tempo finito, $t_{\text{vida}} = 2t_{R_{\max}}$, fenómeno que podemos designar como o colapso do Universo.

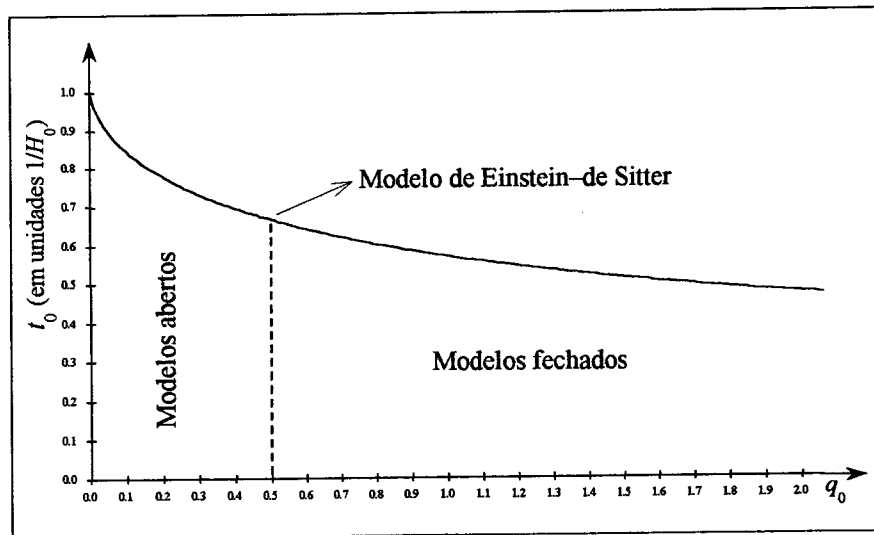


Figura 1.7- Idade actual do Universo, dominado pela matéria, em função de q_0 . Usámos, para os modelos fechados, (1.77), para os modelos abertos, (1.98) e, para o modelo plano de Einstein-de Sitter, (1.56).

A idade actual do Universo é também função da densidade de energia, ou equivalentemente, do parâmetro de desaceleração. A Figura 1.7 ilustra essa dependência, mostrando que o Universo dominado pela matéria, será tão mais jovem quanto maior o valor de q_0 . O caso $q_0 = 0$, que corresponde a um Universo vazio, impõe um limite superior para a idade actual do Universo: $t_0 < 1/H_0$.

1.5- A constante cosmológica

Quando Einstein procurou uma solução cosmológica das equações da TRG verificou que estas não forneciam uma solução para o modelo de Universo por si considerado: homogéneo, isotrópico, fechado, estático e constituído por poeira. Fazendo $R=\text{constante}=R_E$ nas equações de campo, (1.61) e (1.62), obtidas para o modelo de Friedmann, no caso $k=1$ e para o Universo dominado pela matéria, facilmente se verifica que não é possível a obtenção de uma solução para o modelo de Einstein a partir das equações da TRG (para $R=R_E$, (1.62) fica $1/R_E=0$). Para que a TRG fornecesse uma solução compatível com o seu modelo cosmológico, Einstein alterou as equações, introduzindo-lhe um novo termo, Λ , que denominou constante cosmológica:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.108)$$

Somando o termo Λ às equações (1.27) e (1.28), que representam a geometria do Universo de Robertson-Walker, obtemos as equações cosmológicas com constante cosmológica:

$$\frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}T_0^0 \quad (1.109)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2} - \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^2}T_j^j, \text{ com } j=1,2,3 \quad (1.110)$$

Considerando nestas equações, $R=R_E$ e a aproximação não relativista para os tensores energia, obtemos, para o modelo de Einstein,

$$\frac{c^2}{R_E^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \quad (1.111)$$

$$\frac{c^2}{R_E^2} - \Lambda c^2 = 0 \quad (1.112)$$

ficando, então, a respectiva solução:

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} \rho_0 \quad (1.113)$$

$$R_E = \Lambda^{-1/2} \quad (1.114)$$

Se substituirmos em (1.113) o valor observacional para a densidade de matéria actual do Universo, $\rho_0 \approx 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$, obtemos o valor de Λ necessário para a obtenção de um Universo estático: $\Lambda_E \approx 10^{-58} \text{ cm}^{-2}$.

De Sitter também usou as equações da TRG com constante cosmológica, para obter a solução de um modelo de Universo, homogéneo e isotrópico, mas vazio ($\rho=0$) e, portanto, plano ($k=0$). Neste caso, obtemos de (1.109)

$$\frac{\dot{R}}{R} = H = \left(\frac{1}{3} \Lambda c \right)^{1/2} = \text{constante} \quad (1.115)$$

que, por integração, fornece-nos uma expansão exponencial do Universo:

$$R = e^{Ht} \quad (1.116)$$

Como no Universo vazio de de Sitter não há qualquer efeito da gravidade, este apresenta uma expansão eterna acelerada (ver Figura 1.8). Este modelo ilustra bem o efeito “repulsivo” ou “anti-gravítico” da introdução de uma constante cosmológica positiva, nas equações da TRG ($\Lambda < 0$ funciona como a gravidade desacelerando a expansão). No modelo de Einstein, Λ tem exactamente o valor necessário para contrariar a atracção gravítica da matéria, originando, assim, um Universo estático.

Estes dois modelos têm apenas interesse histórico, uma vez que, tanto um como o outro, não traduzem o observado no nosso Universo. Depois de, em 1929, os dados observacionais de Hubble terem mostrado que, de facto, o Universo se expandia, Einstein lamentou a introdução de Λ nas suas equações, as quais, traduziam, por si só, esse comportamento, elaborando, então, juntamente com de Sitter, o modelo dinâmico que ficou conhecido por modelo de Einstein-de Sitter. Na década de trinta, Eddington e Lemaître, voltaram a desenvolver alguns modelos com constante cosmológica, obtendo

diversas soluções para modelos planos, abertos e fechados, com diferentes valores de Λ [ver, por exemplo, Tolmann, 1934].

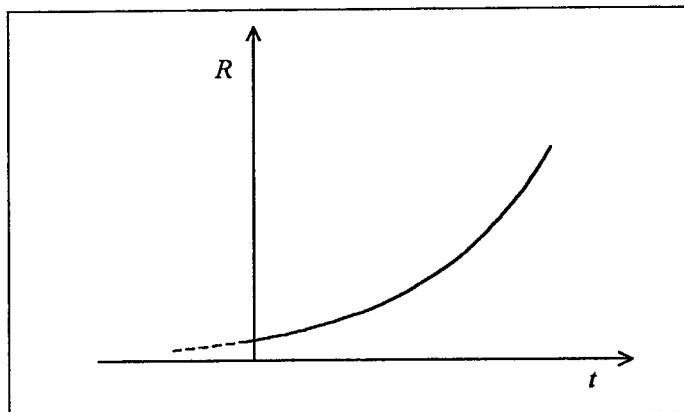


Figura 1.8 -Solução do modelo de de Sitter.

Actualmente ainda se discute a necessidade da inclusão da constante cosmológica, aparecendo esta como uma possível solução para alguns problemas do modelo padrão, como, por exemplo, o facto da idade de algumas estrelas parecer superior à do Universo, ou como o problema da matéria escura (a discutir no capítulo 5). As tentativas para, através da observação, resolver esta questão são dificultadas pelo facto de apenas em larga escala se tornarem evidentes os efeitos da constante cosmológica, o que implica que apenas as medições que envolvam objectos a longas distâncias possam fornecer alguma informação sobre o seu valor. Uma técnica actual, desenvolvida em 1990, independentemente por Turner e uma equipa de astrónomos japoneses, utiliza a frequência do efeito de *focalização gravítica* (*gravitational lensing*) (este fenómeno é descrito no capítulo 5) para estimar o valor da constante cosmológica. Contudo, os resultados das observações são muito incertos, e pouco conclusivos, apontando, no entanto, para que esta seja nula ou muito pequena [Croswell, 1997].

A inclusão da física de partículas na cosmologia trouxe uma nova interpretação para a constante cosmológica, sendo esta, neste contexto, vulgarmente associada a uma densidade de energia do vácuo, que durante um curto período de tempo, em que se mantém constante, age, tal como a constante cosmológica, como uma força repulsiva, que influencia a evolução do Universo muito jovem, conduzindo-o a uma expansão

exponencial, como a obtida para o modelo de de Sitter. Os modelos assim obtidos, denominados *modelos inflacionários*, serão o assunto do capítulo 4 [Roos, 1996, p.164].

Na tabela 1.1 apresentamos um resumo dos vários modelos analisados ao longo deste capítulo: os modelos de Einstein e de de Sitter, como exemplo de modelos com constante cosmológica não nula, e os modelos de Friedmann (descritos na secção 1.4).

1.6- Relação entre q_0 e H_0 e grandezas cosmológicas mensuráveis

1.6.1- A lei de Hubble e o desvio para o vermelho

Se o comprimento de onda de uma radiação emitida na nossa direcção, λ_e , é inferior ao comprimento de onda por nós recebido, λ_r , diz-se que a radiação sofreu um desvio para o vermelho,

$$z = \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.117)$$

Entre 1912 e 1925, V. Slipher mediu os desvios espectrais de cerca de trinta galáxias, verificando com alguma surpresa, que todos eles se apresentavam desviados para o vermelho, o que apontava para um movimento de recessão de todas as galáxias relativamente a nós. Hubble e M. Humason estenderam essas observações a mais galáxias e enxames de galáxias, obtendo idênticos resultados. Em 1929, Hubble verificou que a velocidade de recessão das galáxias, v , por si observadas, era proporcional à distância, D , – estimada a partir das luminosidades aparentes – a que estas se encontravam de nós, estabelecendo, assim, a relação que ficou conhecida como lei de Hubble: $v=c z=H_0 D$. A dificuldade em estabelecer distâncias a partir das luminosidades levou a que o valor que Hubble obteve para a constante de proporcionalidade, denominada *constante de Hubble*, $H_0 \approx 500 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, fosse muito elevado, relativamente ao valor que as observações recentes sugerem, $H_0 \approx 100 h_0 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $0,5 \leq h_0 \leq 1$. O estabelecimento desta lei empírica foi de extrema importância, já que ela implicava que cada galáxia podia ser tomada como o centro de uma expansão global do Universo.

Através da métrica de Robertson-Walker, podemos verificar teoricamente a relação entre a variação do factor de escala e os desvios para o vermelho. Consideremos, então, que uma galáxia, cuja posição pode ser representada pelas coordenadas comóveis (r_1, θ_1, ϕ_1) , envia em $t=t_1$ uma radiação que nós, situados em $(r=0, \theta_1, \phi_1)$ recebemos em $t=t_0$. Como a luz seguirá uma geodésica nula do espaço-

tempo – linha de $ds=0$ – ao longo da qual as coordenadas θ e ϕ não variam, a partir da métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (1.118)$$

fazendo $ds=0$, $d\theta=0$ e $d\phi=0$, obtemos

$$cdt = -R(t) \frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}} dr \quad (1.119)$$

(escolhemos o sinal negativo porque, no sentido seguido pela luz, r diminui ao longo da geodésica) que, por integração, fica:

$$\int_{t_1}^{t_0} c \frac{1}{R(t)} dt = \int_0^{r_1} \frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}} dr \quad (1.120)$$

Consideremos, agora, que o intervalo de tempo entre a emissão de duas cristas consecutivas é dt_1 e que o intervalo de tempo que medeia a recessão dessas mesmas cristas é dt_0 . Para a segunda crista, (1.120) fica

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} c \frac{1}{R(t)} dt = \int_0^{r_1} \frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}} dr \quad (1.121)$$

Subtraindo (1.120) a (1.121), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+dt_0} c \frac{1}{R(t)} dt - \int_{t_1}^{t_1+dt_1} c \frac{1}{R(t)} dt &= 0 \\ \frac{cdt_0}{R_0} = \frac{cdt_1}{R_1} &\Leftrightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R_0}{R_1} \end{aligned} \quad (1.122)$$

De acordo com (1.122) e atendendo à definição de desvio para o vermelho,(1.117), podemos escrever a relação entre o *desvio para o vermelho cosmológico*, registado em qualquer radiação, emitida numa época caracterizada por um factor de escala R , como

$$z + 1 = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{R_0}{R} \quad (1.123)$$

1.6.2- Distância-luminosidade

Como vimos, as soluções dos modelos de Friedmann são expressas como função dos parâmetros q_0 e H_0 , o que implica na necessidade de se estabelecer a sua relação com grandezas cosmológicas mensuráveis. Os raios luminosos que nos chegam de fontes distantes constituem a mais importante fonte de informação cósmica, permitindo que, associadas a processos específicos de medida [Rowan-Robinson, 1981, p. 43], se possam definir diferentes grandezas que satisfaçam esse objectivo. Não nos ocuparemos neste trabalho dos aspectos observacionais, mas convém referir que estes envolvem diversas dificuldades, das quais se destaca a de, à escala cósmica, estabelecer com exactidão as distâncias, especialmente para os objectos mais remotos, portadores das mais importantes informações sobre as épocas passadas. De seguida, mostramos como é possível relacionar teoricamente os parâmetros referidos com os desvios para o vermelho e a grandeza *distância-luminosidade*, determinada a partir da *luminosidade* de um objecto (energia emitida por unidade de tempo), alertando desde já que as dificuldades dos métodos observacionais [ver, por exemplo, Börner, 1993] não permitiram ainda determinar com exactidão o valor da taxa de expansão do Universo, H_0 , e especialmente o valor da sua desaceleração, q_0 .

Define-se distância-luminosidade, D , de um objecto luminoso a que corresponde um desvio para o vermelho z , e uma coordenada comóvel r , como

$$D = \left(\frac{L}{4\pi d} \right)^{1/2} = rR_0 (z+1) \quad (1.124)$$

onde L é a potência emitida pelo objecto e l a correspondente potência recebida por unidade de área (ou fluxo) [Colles, 1996, p.18].

A integração de (1.120), para cada um dos modelos de Friedmann ($k=0, 1$ e -1), fornece-nos uma função $r(z, q_0)$ que nos permitirá relacionar a distância-luminosidade com o desvio para o vermelho e os parâmetros q_0 e H_0 .

Substituindo (1.69) e (1.71) no primeiro integral de (1.120), vem

$$\int_{t_1}^{t_0} c \frac{1}{R(t)} dt = \int_{R_1}^{R_0} \frac{1}{[R(\alpha - R)]^{1/2}} dR = \int_{\theta_1}^{\theta_0} d\theta = \theta_0 - \theta_1 \quad (1.125)$$

A seguir, considerando $k=1$ no segundo integral (1.120):

$$\int_0^{r_1} \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} dr = \text{sen}^{-1} r_1 \quad (1.126)$$

Igualando (1.126) e (1.125) obtemos:

$$r_1 = \text{sen}(\theta_0 - \theta_1) = \text{sen}\theta_0 \cos\theta_1 - \cos\theta_0 \text{sen}\theta_1 \quad (1.127)$$

Por substituição de (1.71), (1.123) fornece, para o tempo $t=t_1$, da emissão da radiação,

$$z + 1 = \frac{R_0}{R_1} = \frac{1 - \cos\theta_0}{1 - \cos\theta_1}$$

ou seja,

$$\cos\theta_1 = \frac{z + \cos\theta_0}{1 + z} \quad (1.128)$$

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{2 \text{sen} \frac{\theta_0}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta_0}{2} + z \right)^{1/2}}{1 + z} \quad (1.129)$$

A partir de (1.75) e de (1.76):

$$\cos \theta_0 = \frac{1 - q_0}{q_0}, \quad \text{sen } \theta_0 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \quad (1.130)$$

ou:

$$\cos \frac{\theta_0}{2} = \left(\frac{1}{2q_0} \right)^{1/2}, \quad \text{sen } \frac{\theta_0}{2} = \left(\frac{2q_0 - 1}{2q_0} \right)^{1/2} \quad (1.131)$$

Substituindo as equações (1.128) - (1.131) em (1.127) obtemos

$$r_1 = \frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0^2(1+z)} \cdot [q_0 z + (1 - q_0)(1 - (2q_0 z + 1)^{1/2})] \quad (1.132)$$

que, substituída em (1.124), juntamente com (1.65), nos fornece a função $D(z, q_0, H_0)$:

$$D_1 = \frac{c}{H_0} \frac{1}{q_0^2} \cdot [q_0 z + (1 - q_0)(1 - (2q_0 z + 1)^{1/2})] \quad (1.133)$$

Repetindo a dedução da distância-luminosidade para os modelos planos ($k=0$) e abertos ($k=-1$), decorre que a função $D(z, q_0, H_0)$ é independente de k e que, portanto, a expressão (1.133) é válida para todos os modelos de Friedmann.

Através da representação gráfica de (1.133) (Figura 1.9) verificamos que, apenas para pequenos valores de z , se obtém, para todos os valores de q_0 , a relação linear prevista pela lei estabelecida empiricamente por Hubble com valores de $z \ll 1$; para maiores valores do desvio para o vermelho, a relação entre D e z deixa de ser linear. Apenas o caso $q_0=1$ constitui uma exceção a este comportamento, mantendo-se, para todos os valores de z , a relação $D=(c/H_0)z$ (que podemos obter fazendo $q_0=1$ na equação (1.133)). Podemos também verificar que, para um determinado desvio para o vermelho, a distância a que se encontra o objecto luminoso será tanto maior quanto menor o valor de q_0 .

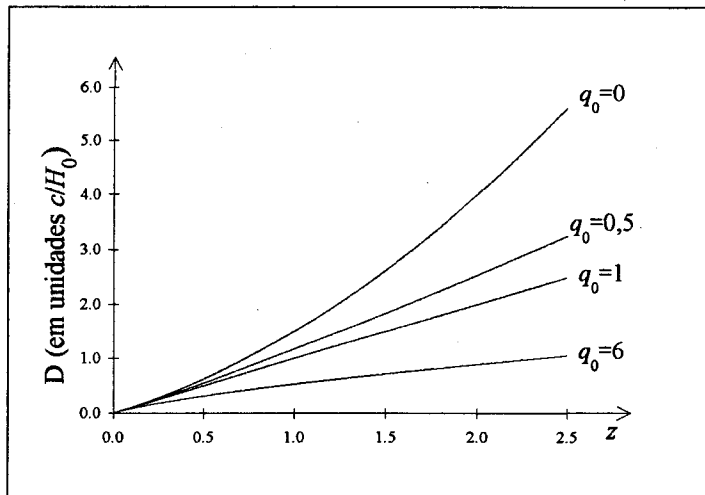


Figura 1.9 – Distância-luminosidade, D , (em unidades de c/H_0) em função do desvio espectral z para diferentes valores de q_0 .

1.7- Horizontes cosmológicos

Como nenhum sinal pode viajar a velocidades superiores à velocidade da luz, em qualquer época, t , da evolução do Universo só podemos comunicar com objectos que não distem de nós uma distância superior à que a luz teve tempo de percorrer desde o início do Universo. As regiões do Universo que se situem a distâncias demasiado grandes para que algum sinal possa ter sido trocado entre si, dizem-se *causalmente desligadas*.

Suponhamos, então, que a partir de um ponto de coordenada r_{HP} foi emitido um sinal luminoso em $t=0$, que chega até nós, situados em $r=0$, no instante t . Neste caso r_H será o limite (em coordenadas comóveis) para além do qual, na época t , nada podemos observar, pois os pontos de coordenada r_H encontram-se à distância máxima que qualquer sinal pode ter percorrido desde a origem do Universo. A distância própria correspondente a este limite, denominada *horizonte de partículas*, R_H , num Universo descrito pela métrica de Robertson-Walker, pode ser obtida multiplicando pelo factor de escala o resultado da integração, entre r_H e $r=0$ (e entre $t=0$ e t), da equação (1.119):

$$R_H(t) = R(t) \int_0^{r_H} \frac{1}{(1 - kr^2)^{1/2}} dr = R(t) \int_0^t c \frac{1}{R(t')} dt' \quad (1.134)$$

A primeira integral definida de (1.134) fica:

$$\int_0^{r_H} \frac{1}{(1 - kr^2)^{1/2}} dr = \begin{cases} r_H, & \text{se } k = 0 \\ \text{sen}^{-1} r_H, & \text{se } k = 1 \\ \text{senh}^{-1} r_H, & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.135)$$

e a segunda, no caso particular dos modelos de Friedmann, fica:

$$\int_0^t c \frac{1}{R(t')} dt' = \begin{cases} 3ct/R, & \text{se } k = 0 \\ \theta, & \text{se } k = 1 \\ \phi, & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.136)$$

(a integração para $k=1$ é idêntica à já efectuada para a obtenção de (1.125) e a integração para $k=-1$ é efectuada de modo análogo; θ relaciona-se com R e t por (1.71) e (1.72), e ϕ por (1.93) e (1.94)). O horizonte de partículas para estes modelos será, então, finito e expresso por:

$$R_H(t) = \begin{cases} 3ct, & \text{se } k = 0 \\ R(t) \text{sen}^{-1} r_H = R(t)\theta(t), & \text{se } k = 1 \\ R(t) \text{senh}^{-1} r_H = R(t)\phi(t), & \text{se } k = -1 \end{cases} \quad (1.137)$$

Notar que, no caso do Universo plano, o horizonte aumenta linearmente no tempo.

Considerando, nas expressões anteriores, a época actual, podemos por substituição de (1.65) e (1.76) para $k=1$, e de (1.97) e (1.85) para $k=-1$, obter o horizonte de partículas actual:

$$R_H(t_0) = \begin{cases} 3ct_0 = 2\frac{c}{H_0}, & \text{se } k = 0, q_0 = \frac{1}{2} \\ \frac{c}{H_0} \frac{1}{(2q_0 - 1)^{1/2}} \text{sen}^{-1} \left(\frac{(2q_0 - 1)^{1/2}}{q_0} \right), & \text{se } k = 1, q_0 > \frac{1}{2} \\ \frac{c}{H_0} \frac{1}{(1 - 2q_0)^{1/2}} \text{senh}^{-1} \left(\frac{(1 - 2q_0)^{1/2}}{q_0} \right), & \text{se } k = -1, 0 \leq q_0 < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.138)$$

Concluimos, então, que, de acordo com os modelos de Friedmann, actualmente, a esfera de raio próprio $R_H(t_0)$ constitui o nosso limite visível do Universo, estando todo o seu exterior causalmente desligado de nós. Para o caso $q_0=1$, vemos que o horizonte actual é $R_H(t_0) = \pi/2 \times R_0 = \pi/2 \times c/H_0$.

Uma vez que, nos modelos de Friedmann, a existência de horizontes de partículas estabelece limites à comunicação com o passado, poderemos pensar se existirá também algum limite para as nossas comunicações com o futuro.

Define-se *horizonte de eventos* actual a distância própria R_{Hev} , a partir da qual todos os sinais luminosos, enviados na nossa direcção de $r=r_{Hev}$, na época actual, nunca serão recebidos por nós, localizados em $r=0$, em qualquer época futura da evolução do Universo. A existência deste horizonte impede, assim, todas as comunicações futuras

com o exterior de uma esfera de raio próprio R_{Hev} . Podemos obter o horizonte de eventos actual, considerando novos limites de integração (de $t=t_0$ a $t=t_{max}$ e de $r=0$ a $r=r_{Hev}$) na equação (1.134):

$$R_{Hev}(t) = R(t) \int_0^{r_{Hev}} \frac{1}{(1-kr^2)^{1/2}} dr = R(t) \int_{t_0}^{t_{max}} c \frac{1}{R(t')} dt' \quad (1.139)$$

onde t_{max} representa o tempo máximo de vida do Universo. Nos modelos de Friedmann, abertos e planos, quando $t_{max} \rightarrow \infty$, o integral diverge para infinito, o que mostra que não existe um limite finito, para as comunicações futuras; isto é, de acordo com estes modelos, qualquer sinal luminoso emitido na época actual (ou em qualquer outra época), em qualquer ponto do Universo, será um dia recebido por nós. Nos modelos de Friedmann fechados, o Universo apresenta um tempo de vida finito, o que faz com que neste modelo o integral convirja para um valor finito:

$$R_{Hev} = R_0 \int_{t_0}^{t_{vida}} c \frac{1}{R(t)} dt = R_0 (\theta_{vida} - \theta_0) \quad (1.140)$$

$$R_{Hev} = \frac{c}{H_0 (2q_0 - 1)^{1/2}} \left[2\pi - \cos^{-1} \left(\frac{1 - q_0}{q_0} \right) \right] \quad (1.141)$$

(para a obtenção de (1.141) a partir de (1.140), usámos as equações (1.65) e (1.75)). A distância dada por (1.141) representa o limite para além do qual um sinal luminoso emitido hoje não chegará até nós antes do colapso do Universo.

No modelo de de Sitter, o Universo apresenta também um tempo de vida infinito mas, neste caso, existe um horizonte de eventos,

$$R_{Hev} = R_0 \int_{t_0}^{\infty} c \frac{1}{R(t)} dt = R_0 c \int_{t_0}^{\infty} e^{-H_0 t} dt = R_0 c \left(\frac{1}{H_0} e^{-H_0 t_0} \right) = \frac{c}{H_0} \quad (1.142)$$

que impede que um sinal luminoso enviado hoje de uma distância própria superior a c/H_0 , chegue até nós durante toda a vida (eterna) do Universo.

1.8- Singularidade inicial e era de Planck

Nos modelos de Friedmann, a origem do Universo $t=0$, $R=0$, denominada big bang, constitui uma singularidade espaço-temporal, onde todos os parâmetros físicos, como por exemplo, densidade de energia e temperatura, divergem para infinito. Na singularidade, o conceito de espaço-tempo perde o significado – os invariantes obtidos a partir das componentes do tensor de curvatura divergem para infinito – e toda a física deixa de ser válida.

Por outro lado, quando nos aproximamos da origem será de esperar, que, a partir de certa escala, os efeitos quânticos se tornem significativos, deixando a TRG, puramente clássica, de poder ser aplicada. Para uma partícula de massa M , a escala em que os efeitos quânticos se tornam importantes pode ser definida pelo comprimento de onda de Compton,

$$\lambda = \frac{\hbar}{Mc} \quad (1.143)$$

enquanto que a escala em que os efeitos gravitacionais se tornam significativos é dada pelo raio de Schwarchild,

$$r_c = \frac{MG}{c^2} \quad (1.144)$$

A massa para a qual os efeitos quânticos e gravíticos se tornam igualmente importantes denomina-se *massa de Planck*:

$$\frac{\hbar}{M_p c} = \frac{M_p G}{c^2}$$
$$M_p = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} \approx 10^{-5} \text{ g} \quad (1.145)$$

e caracteriza a *era de Planck*, para a qual podemos ainda definir, a partir das constantes c , G e \hbar , a *energia de Planck*,

$$E_P = \left(\frac{\hbar c^5}{G} \right)^{1/2} \approx 10^{19} \text{ GeV}, \quad (1.146)$$

o comprimento de Planck,

$$\ell_P = \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{1/2} \approx 10^{-33} \text{ cm}, \quad (1.147)$$

e o tempo de Planck,

$$t_P = \left(\frac{G\hbar}{c^5} \right)^{1/2} \approx 10^{-43} \text{ s} \quad (1.148)$$

Para épocas anteriores à era de Planck, tornar-se-ia necessária uma descrição quântica da gravitação, não permitida pela física actual, que apenas dispõe, para a descrição da gravitação, da teoria clássica da relatividade geral. Assim, esta época é vulgarmente considerada como o limite para além do qual não podemos seguir a evolução do Universo.

Capítulo 2

EVOLUÇÃO TÉRMICA DO UNIVERSO

2.1- Equilíbrio térmico

De acordo com o modelo do big bang, o Universo, durante uma época remota da sua evolução, terá passado por uma situação de equilíbrio térmico, permitida pelas condições de alta temperatura e densidade. Nestas condições, todos os processos de interacção das diferentes famílias de partículas presentes, entre si, e com a radiação ocorrem com grande frequência, permitindo a redistribuição de energias e momentos que conduz ao equilíbrio térmico. Deste modo, o número de partículas que possuem propriedades (posição, energia, momento, etc.) com valores compreendidos dentro de um certo intervalo é estável e pode ser tratado estatisticamente. Para cada família de partículas, uma lei estatística fornece-nos, para cada temperatura, a distribuição das diferentes grandezas físicas que a caracterizam.

Num Universo estático, a situação de equilíbrio térmico manter-se-ia para sempre, mas, no modelo do big bang, a história do Universo é caracterizada por progressivas quebras nesse equilíbrio. Pouco a pouco, com o abaixamento da temperatura e da densidade, que acompanha a expansão, a interacção de determinada família de partículas com o restante conteúdo do Universo torna-se pouco significativa, tendo, então, essas partículas iniciado a sua propagação livre pelo espaço (desacoplamento) e, embora tendo continuado a contribuir para a densidade total do Universo, deixaram de ter um papel activo nos processos dinâmicos.

As considerações acerca de que partículas participam no equilíbrio térmico, a uma determinada temperatura, dependem da relação entre a taxa de reacções das partículas, que tem em conta as reacções possíveis a essa energia, e a taxa de expansão do Universo. Para que uma família de partículas se mantenha em equilíbrio térmico é necessário que a taxa de reacção dos processos em que essa família intervém supere a taxa de expansão do Universo, isto é, que a escala de tempo entre sucessivas interacções seja pequena relativamente à escala de tempo da expansão. Em caso contrário, a distância entre as partículas cresce demasiado depressa para que estas se possam continuar a encontrar, de modo que as interacções cessam e as partículas desacoplam-se. Acompanhando a queda de temperatura desde 10^{12}K até 10^3K , seguiremos, ao longo desta secção, a evolução do Universo jovem, analisando os diferentes processos dinâmicos que envolvem as partículas em equilíbrio térmico, bem como daquelas que, progressivamente, vão abandonando esse equilíbrio.

2.1.1- Distribuição de partículas no equilíbrio

Na aproximação de um gás ideal, isto é, sempre que pudermos desprezar a energia de interacção entre as partículas, relativamente à sua energia cinética, a distribuição de momentos para uma família A de partículas em equilíbrio térmico, à temperatura T , é dada por:

$$n_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} P^2 \left[\exp\left(\frac{E_A(P) - \mu_A}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP, \quad (2.1)$$

onde $n_A dP$ é a densidade de partículas (número de partículas por cm^3) com momentos entre P e $P+dP$, μ_A é o potencial químico da espécie A , g_A é o número de estados de spin da espécie A , k é a constante de Boltzmann e $E_A(P)$ é a energia correspondente à partícula de massa m_A , dada por $E_A(P) = (m_A^2 c^4 + c^2 P^2)^{1/2}$; o sinal $+$ aplica-se às partículas que obedecem à estatística de Fermi-Dirac (fermiões), e o sinal $-$ aplica-se às que obedecem à estatística de Bose-Einstein (bosões).

Como o potencial químico dos fótons é nulo, os potenciais químicos presentes em (2.1) podem ser ignorados, se considerarmos que leptões e bariões existem em

pequeníssimas densidades relativamente à densidade de fotões. Esta aproximação é equivalente a desprezar a contribuição de todas as outras espécies com potencial químico não nulo, relativamente ao elevado número de fotões. Os pequenos valores observados para a relação entre a densidade de bariões e de fotões sugerem que também a densidade de leptões (para os quais, a dificuldade de detecção dos neutrinos não nos permite dispor de dados observacionais) possa ser desprezável, relativamente à de fotões, fundamentando esta aproximação. Na abordagem que se segue só consideraremos a contribuição dos potenciais químicos quando as pequenas densidades das partículas em estudo desempenharem um papel relevante.

Considerando $\mu_A=0$, por integração da expressão (2.1), estendida a todo o domínio de momentos, podemos determinar as densidades totais de partículas (N_A), de energia (ε_A), de entropia (s_A), e a pressão (p_A) através das expressões:

$$N_A = \int_0^\infty n_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_A = \int_0^\infty n_A(P) E_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 E_A(P) \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (2.3)$$

$$p_A = \int_0^\infty n_A(P) \frac{P^2 c^2}{3E_A(P)} dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} \frac{P^2 c^2}{3E_A(P)} dP =$$

$$= \frac{g_A}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{P^4 c^2}{E_A(P)} \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (2.4)$$

$$s_A = \frac{\varepsilon_A + p_A}{T} \quad (2.5)$$

2.1.2- Relação entre as grandezas N_γ , ε_γ , p_γ , s_γ e a temperatura

Efectua-se a seguir a determinação das equações que, para o caso particular dos fotões (símbolo γ) fornecem a dependência com a temperatura das grandezas físicas que caracterizam a radiação (N_γ , ε_γ , p_γ e s_γ).

$N_\gamma(T)$ e $\varepsilon_\gamma(T)$ são obtidas pela resolução das integrais definidas das equações (2.2) e (2.3), tendo em atenção que $E_\gamma = cP$ e $g_\gamma=2$ (apêndice C):

$$N_\gamma = \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{\hbar^3 c^3} \quad (2.7)$$

Como, para partículas relativistas, $p = \frac{1}{3} \varepsilon$, p_γ e s_γ são funções de ε_γ :

$$p_\gamma = \frac{1}{3} \varepsilon_\gamma = \frac{\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{\hbar^3 c^3} \quad (2.8)$$

$$s_\gamma = \frac{4}{3} \frac{\varepsilon_\gamma}{T} = \frac{4\pi^2}{45} \frac{k^4 T^3}{\hbar^3 c^3} \quad (2.9)$$

Por substituição das constantes pelos respectivos valores, em unidades c.g.s., obtemos as relações numéricas:

$$N_\gamma (\text{cm}^{-3}) = 20,3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3} \cdot T^3 (\text{K}) \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_\gamma (\text{erg cm}^{-3}) = a T^4 (\text{K}), \text{ com } a = 7,6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (2.11)$$

$$p_\gamma (\text{erg cm}^{-3}) = 2,5 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \cdot T^4 (\text{K}) \quad (2.12)$$

$$s_\gamma (\text{erg cm}^{-3} \text{ K}^{-1}) = 1,0 \times 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} T^3 (\text{K}) \quad (2.13)$$

A relação (2.11) é conhecida como Lei de Stefan-Boltzmann e caracteriza a radiação de corpo negro.

2.1.3- Relação entre densidade e temperatura para partículas com massas não nulas

A criação e aniquilação de matéria-antimatéria através da interconversão matéria \leftrightarrow radiação, constituiu um dos processos mais importantes durante a evolução do Universo jovem. A colisão de uma partícula com a respectiva antipartícula provoca a aniquilação de ambas, originando dois fótons, enquanto que o processo inverso só é possível quando a energia (E_γ) de cada fóton não é inferior à energia (E_A) de repouso da partícula: $E_\gamma \geq E_A = m_A c^2$. Assim, o equilíbrio $A + \bar{A} \rightleftharpoons 2 \gamma$ só é mantido enquanto a radiação tiver energia suficiente para assegurar a criação dos pares partícula-antipartícula, compensando o processo de aniquilação. Como a energia de um fóton à temperatura T é $E_\gamma \approx kT$, podemos definir, para cada espécie de partículas, uma temperatura $T_A = m_A c^2 / k$, que corresponde à temperatura, à qual a energia do fóton iguala a energia de repouso da partícula: $E_\gamma = E_A = m_A c^2$. Assim, T_A , que denominaremos *temperatura crítica* de A , faz a separação entre a possibilidade de criação do par partícula-antipartícula, a partir da radiação, para $T \geq T_A$, e a situação em que a energia dos fótons é insuficiente para que o processo ocorra, quando $T < T_A$.

A diminuição da energia da radiação devido ao abaixamento de temperatura determina o conteúdo do Universo em cada época da sua evolução. Quando a temperatura desce abaixo da temperatura crítica de uma família de partículas, o processo de aniquilação dessa espécie deixa de ser compensado pela formação de novos pares, a partir da radiação. Como resultado, a densidade da espécie diminui até ao seu desaparecimento quase completo. Embora no Universo muito jovem as elevadas temperaturas tenham favorecido a variedade de espécies, com o decorrer do tempo, algumas delas foram desaparecendo por aniquilação ou por decaimento em espécies mais estáveis.

2.1.3.1- Aproximação de alta temperatura

Quando a temperatura é muito superior à temperatura crítica de uma espécie, as partículas comportam-se relativisticamente. Para partículas de massa nula, como os

fotões, a sua energia resume-se a $E=cP$; para partículas de massa diferente de zero, mas com comportamento relativista, a energia de repouso é desprezável relativamente ao termo cinético, e podemos considerar $E_A \approx cP$. Neste caso, que iremos designar de alta-temperatura, podemos determinar as densidades de partículas e de energia para qualquer espécie, em equilíbrio térmico, da qual sejam conhecidos o número de estados de spin e a natureza fermiónica ou bosónica, através de um processo análogo ao utilizado para o caso dos fotões. Na época dominada pela radiação, será vantajoso tomar como referência as propriedades dos fotões para exprimir as densidades de todas as outras espécies. Como os fotões obedecem à estatística de Bose-Einstein, para qualquer outro bóson (índice B) as relações entre a suas densidades e as dos fotões, à mesma temperatura, são dadas simplesmente pela relação entre os seus factores de spin; como $g_\gamma=2$,

$$N_B = \frac{g_B}{2} N_\gamma \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_B = \frac{g_B}{2} \varepsilon_\gamma \quad (2.15)$$

Para os fermiões (índice F), podemos obter as relações N_F/N_γ e $\varepsilon_F/\varepsilon_\gamma$ por integração das expressões (2.2) e (2.3), tomando agora o sinal positivo e $E_F=cP$, seguida da substituição de (2.6) e (2.7):

$$\begin{aligned} N_F &= \int_0^\infty n_F(P) dP = \frac{g_F}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{cP}{kT}\right) + 1 \right]^{-1} dP \\ &= \frac{3}{8} g_F \left[\frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 \right] = \frac{3}{8} g_F \left[\frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 \right] = \frac{3}{8} g_F N_\gamma \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &= \int_0^\infty n_F(P) E_F(P) dP = \frac{g_F}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 E_F(P) \left[\exp\left(\frac{cP}{kT}\right) + 1 \right]^{-1} dP = \\ &= \frac{7}{16} g_F \left[\frac{\pi^2}{15} \frac{(kT)^4}{c^3 \hbar^3} \right] = \frac{7}{16} g_F \varepsilon_\gamma \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uma vez que s e p são apenas funções de ε , as relações s_A/s_γ e p_A/p_γ , para qualquer partícula A , são idênticas a $\varepsilon_A/\varepsilon_\gamma$. A tabela seguinte apresenta as densidades de partículas e de energia para diferentes espécies, tomando como referência a radiação. Recordamos que estes resultados são obtidos para a aproximação de alta-temperatura, o que significa que, para cada espécie A , as relações apresentadas só valem para $T \gg T_A$.

Tabela 2.1- Quantidades termodinâmicas para várias partículas na aproximação de alta temperatura [Narlikar, 1993, p. 141].

Espécie A	Símbolo	T_A (K)	g_A	N_A/N_γ	$\varepsilon_A/\varepsilon_\gamma$
Fermiões:					
Neutrino	ν	0	1	3/8	7/16
Electrão	e^-	$5,9 \times 10^9$	2	3/4	7/8
Positrão	e^+				
Muão	μ^-	$1,2 \times 10^{12}$	2	3/4	7/8
Antimuão	μ^+				
Protão	p	10^{13}	2	3/4	7/8
Neutrão	n				
Bosões:					
Piões	π^+	$1,6 \times 10^{12}$	1	1/2	1/2
	π^-				
	π^0				

2.1.3.2- Aproximação de baixa temperatura

Para temperaturas iguais ou inferiores à temperatura crítica de uma espécie, as partículas tornam-se não relativistas, a sua energia de repouso ganha importância, passando a energia total a ser dada por $E_A = m_A c^2 + p^2 / 2m_A$, e a integração de (2.2),

para esta situação – dita aproximação de baixa temperatura – fornece-nos a densidade total de partículas, a cada temperatura (apêndice D):

$$N_A = g_A \left(\frac{m_A kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-T_A}{T} \right) \quad (2.18)$$

Esta expressão mostra-nos como, devido à rápida diminuição do factor de Boltzmann ($\exp(-T_A/T)$), a descida da temperatura, abaixo da temperatura crítica de uma espécie provoca um rápido decréscimo da densidade dessa espécie. Uma vez que fótons e neutrinos têm massa nula, a variação das suas densidades nunca poderá ser descrita pela aproximação de baixa temperatura.

2.1.4- Conclusão

No Universo em expansão e, portanto, em constante arrefecimento, numa situação de equilíbrio térmico, a densidade das partículas cuja massa seja suficientemente pequena para que o processo de interconversão matéria-radiação se mantenha em equilíbrio e as suas velocidades sejam relativistas diminui proporcionalmente a T^3 , de acordo com as expressões (2.14) e (2.16), para bósons e férmions, respectivamente. Quando a temperatura de equilíbrio se aproxima da temperatura crítica da partícula, diminui a eficácia do processo de criação de partículas a partir da radiação e o efeito das colisões partícula-antipartícula começa a prevalecer. As partículas deixam de ter comportamentos relativistas e as suas densidades diminuem exponencialmente, de acordo com (2.18), tendendo para zero, logo que a temperatura desce um pouco abaixo da sua temperatura crítica. Este processo não conduz a uma destruição completa da matéria porque, mais uma vez relembramos, o palco em que ocorre, está em permanente expansão, permitindo, assim, que uma densidade residual de matéria sobreviva. De facto, o processo de aniquilação termina quando a sua taxa de reacção é superada pela taxa de expansão do Universo, fazendo com que algumas das partículas não sejam destruídas. Como veremos posteriormente, esta explicação não justifica a densidade actual de matéria, especialmente a não existência de iguais densidades de matéria e antimatéria.

Depois de concluído o processo de aniquilação de uma família de partículas, as sobreviventes, podem continuar em equilíbrio térmico, desde que os seus processos de interação com outras famílias presentes ocorram a taxas suficientemente elevadas. Se, relativamente à taxa de expansão, estes processos são pouco significativos, as partículas cessam as suas interações e desacoplam, passando a evoluir independentemente.

2.2- Variação da temperatura

Consideremos a situação em que o Universo é dominado pela radiação e se encontra em equilíbrio térmico. No caso relativista, a densidade de energia diminui durante a expansão, de acordo com,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{R_0^4}{R^4} \quad (2.19)$$

Por outro lado, a condição de equilíbrio fornece-nos um modo de determinar a densidade de energia da radiação, a cada temperatura,

$$\varepsilon = \alpha T^4 \quad (2.20)$$

Considerando apenas a contribuição da radiação para a energia total do Universo, a conjugação destas duas relações permite-nos determinar a variação da temperatura com a expansão:

$$\varepsilon_0 \frac{R_0^4}{R^4} = \alpha T^4$$
$$TR = \text{constante} \quad (2.21)$$

Quando nos aproximamos da origem do Universo ($t \rightarrow 0$), $R \rightarrow 0$ e então, $T \rightarrow \infty$. Assim, nesta aproximação, o Universo, partindo de temperaturas extremamente elevadas, arrefece de acordo com $T \propto R^{-1}$.

Conhecendo o modo como o Universo se expande ao longo do tempo, podemos obter a sua idade para cada temperatura. Consideremos, então, a solução $R(t)$, já obtida, ((1.102)) para um Universo plano ($k=0$) e dominado por radiação, isto é, com uma densidade de energia dada por (2.19),

$$R = \left(\frac{32\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 \right)^{1/4} R_0 t^{1/2} \quad (2.22)$$

Levando (2.20), aplicada à época actual, $\varepsilon_0 = \alpha T_0^4$, em (2.22), obtemos,

$$R = \left(\frac{32\pi G}{3c^2} a \right)^{1/4} T_0 R_0 t^{1/2} \quad (2.23)$$

Como, por (2.21), $T_0 R_0 = TR$

$$t = \left(\frac{3c^2}{32\pi G a} \right)^{1/2} T^{-2} \quad (2.24)$$

que pode ser escrita como

$$t(\text{s}) = 2,304 \times 10^{20} \text{ K}^2 \text{s} \cdot T^{-2}(\text{K}) \quad (2.25)$$

Na aproximação relativista, $\varepsilon \propto R^{-4}$, a temperatura do Universo varia inversamente com a expansão, $T \propto R^{-1}$. No entanto, a forma como varia no tempo depende da taxa de expansão do Universo, a qual, por sua vez, depende da densidade de energia total. Na abordagem anterior, considerámos apenas a contribuição da radiação, mas o tipo de partículas presentes no Universo, em cada época da sua evolução, também influencia a forma como este se expande. Se desejarmos, numa abordagem mais rigorosa, seguir a evolução térmica do Universo, considerando a matéria presente, devemos determinar a sua contribuição para a densidade de energia e levá-la em conta na obtenção da solução $R(t)$. A densidade total será, então, o somatório, estendido a todas as partículas presentes (inclusive fótons), das densidades de energia, densidades essas, que, na aproximação de alta temperatura, são dadas por (2.15) e (2.17), para bósons e férmions, respectivamente. Então,

$$\varepsilon = \sum \left(\frac{g_B}{2} + \frac{7}{16} g_F \right) \varepsilon_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{2} \sum \left(g_B + \frac{7}{8} g_F \right) \quad (2.26)$$

Definindo

$$g = \sum \left(g_B + \frac{7}{8} g_F \right) \quad (2.27)$$

obtemos um factor de peso que nos dá a contribuição das famílias de partículas presentes no Universo a determinada temperatura, para a densidade energética total,

$$\varepsilon = \frac{g}{2} \varepsilon_\gamma = \frac{g}{2} aT^4 \quad (2.28)$$

Levando (2.19), aplicada à radiação, $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_{0\gamma} R_0^4 / R^4$, e (2.20) aplicada à época actual, $\varepsilon_0 = aT_0^4$, em (2.28), vem

$$\varepsilon = \frac{g}{2} \frac{aT_0^4 R_0^4}{R^4} \quad (2.29)$$

Com a densidade energética fornecida por (2.29), a integração da equação de campo

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon$$

fornece a solução

$$R = \left(\frac{32\pi G}{3c^2} \frac{g}{2} a \right)^{1/4} T_0 R_0 t^{1/2} \quad (2.30)$$

Como $TR = \text{constante}$,

$$t = \left(\frac{3c^2}{16\pi G a} \right)^{1/2} g^{-1/2} T^{-2} \quad (2.31)$$

ou, substituindo os valores das constantes,

$$t(\text{s}) = 3,3 \times 10^{20} \text{K}^2 \text{s} \cdot g^{-1/2} T^{-2} (\text{K}) = 2,4 \times 10^{-6} \text{GeV}^2 \text{s} \cdot g^{-1/2} T^{-2} (\text{GeV}) \quad (2.32)$$

2.3-Desacoplamento e temperatura dos neutrinos

Os neutrinos interagem fracamente com electrões, muões e respectivas antipartículas, através de processos como os que se apresentam a seguir

$$e^- + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

$$\nu_e + \mu^- \leftrightarrow \nu_\mu + e^-$$

$$\nu_\mu + \mu^+ \leftrightarrow \nu_e + e^+$$

A secção eficaz destes processos é, de acordo com a teoria das interacções fracas,

$$\sigma \approx g_{wk}^2 \hbar^{-4} c^{-4} (kT)^2 \quad (2.33)$$

onde $g_{wk} = 1,4 \times 10^{-49} \text{ erg cm}^{-3}$ é a constante de acoplamento das interacções fracas [Weinberg, 1972, p.534]. A taxa de reacção, η , é proporcional à secção eficaz e à densidade de partículas (leptões) intervenientes nos processos, (N_l),

$$\eta = c\sigma N_l \quad (2.34)$$

Para temperaturas $T > T_\mu \approx 10^{12} \text{ K}$, todos os leptões participantes têm comportamentos relativistas com densidades, de acordo com (2.16), da ordem, $N_l \approx (kT / c\hbar)^3$, de modo que a taxa de reacções é

$$\eta = c\sigma N_l \approx g_{wk}^2 \hbar^{-7} c^{-6} (kT)^5 \quad (2.35)$$

A taxa de expansão do Universo, para $k=0$, é fornecida pelo parâmetro de Hubble,

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon \right)^{1/2} \quad (2.36)$$

a qual considerando apenas a contribuição da radiação para a densidade de energia

$$\varepsilon \approx \varepsilon_\gamma = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} (kT)^4 \quad (2.37)$$

fica,

$$H \approx \left(\frac{8\pi^3 G}{45c^5 \hbar^3} \right)^{1/2} (kT)^2 \quad (2.38)$$

A comparação entre a taxa de reacção dos processos em que intervêm os neutrinos e a taxa de expansão do Universo fornece-nos o critério que permite a determinação da temperatura mínima à qual estes permanecem em equilíbrio. A temperatura de desacoplamento dos neutrinos será, então, aquela a que se igualam as duas taxas, $\eta = H$, já que, à medida que a temperatura for caindo, a escala de tempo entre duas interacções sucessivas é inferior à escala de tempo da expansão cósmica, deixando, portanto, essas interacções de ocorrer. A relação entre (2.35) e (2.38) fornece-nos

$$\frac{\eta}{H} \approx G^{-1/2} \hbar^{-11/2} c^{-7/2} g_{wk}^2 (kT)^3 \quad (2.39)$$

ou seja,

$$\frac{\eta}{H} \approx \left(\frac{T(\text{K})}{10^{10}} \right)^3 \quad (2.40)$$

Para temperaturas $T > T_\mu \approx 10^{12} \text{K}$, $\eta/H \gg 1$, o que demonstra que, enquanto as temperaturas permitirem que muões e antimuões se encontrem em equilíbrio, em grande abundância, os neutrinos permanecem em equilíbrio térmico. Quando as temperaturas descem abaixo de T_μ , as densidades dos muões-antimuões começam a diminuir exponencialmente,

$$N_{\mu^\pm} \approx \exp\left(-\frac{T_\mu}{T}\right) \approx \exp\left(-\frac{10^{12}}{T(\text{K})}\right) \quad (2.41)$$

Levando, então, (2.41) em (2.34), obtemos

$$\eta \approx g_{wk}^2 h^{-7} c^{-6} (kT)^5 \exp\left(-\frac{10^{12}}{T(\text{K})}\right) \quad (2.42)$$

que, comparando com a taxa de expansão fornecida por (2.38), fornece

$$\frac{\eta}{H} \approx \left(\frac{T(\text{K})}{10^{12}}\right)^3 \exp\left(-\frac{10^{12}}{T(\text{K})}\right) \quad (2.43)$$

Verificamos que a relação anterior (válida para temperaturas $T < 10^{12} \text{K}$) diminui rapidamente com a descida da temperatura, isto é, as reacções em que intervêm os neutrinos passam a ocorrer a taxas cada vez menores, relativamente à taxa de expansão do Universo. Quando esta relação diminui até à unidade, o que ocorrerá para $T \approx 1,3 \times 10^{11} \text{K}$ [Weinberg, 1972, p. 535], os neutrinos saem do equilíbrio térmico.

A unificação das interacções fraca e electromagnética na teoria electrofraca possibilita a intervenção dos neutrinos em novos processos de interacção com a matéria [Börner, 1993, p.95]:

$$e^+ + e^- \leftrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e$$

$$e^\pm + \nu_e \rightarrow e^\pm + \nu_e$$

$$e^\pm + \bar{\nu}_e \rightarrow e^\pm + \bar{\nu}_e$$

Como estes processos não envolvem muões, enquanto a temperatura for superior a $T_e \approx 5 \times 10^9 \text{K}$ – temperatura a que electrões e positrões deixam de ser relativistas – a taxa de reacção destes processos é dada por (2.35), assegurando a permanência dos neutrinos em equilíbrio até temperaturas da ordem $T \approx 10^{10} \text{K}$, para as quais de acordo com (2.40), $\eta/H \approx 1$ [Narlikar, 1993, p.144; Weinberg, 1972, p. 335]. O desacoplamento dos neutrinos ocorre, portanto, entre as épocas de aniquilação dos muões, a cerca de

$T_\nu \approx 10^{12}$ K, e de aniquilação dos electrões-positrões, a temperaturas $T_e \approx 5 \times 10^9$ K. Depois do desacoplamento, não tendo contacto térmico com nenhum outro componente, os neutrinos expandem-se adiabaticamente, sendo a sua entropia dada por

$$S_\nu = s_\nu R^3 = \text{constante.}$$

Uma vez que, para a radiação de fundo de neutrinos, podemos considerar a equação de estado $p = 1/3 \epsilon \propto T^4$, adequada a partículas relativistas, por analogia com (2.9) vem,

$$S_\nu \propto T_\nu^3 R^3.$$

Como $S_\nu = \text{constante}$, a variação da temperatura da radiação de neutrinos é dada por $T_\nu \propto R^{-1}$. Depois do desacoplamento dos neutrinos, as restantes partículas continuam a formar um gás relativista, cuja temperatura continua a evoluir de acordo com $T \propto R^{-1}$. Assim, embora após o desacoplamento, os neutrinos não interajam, a sua temperatura continua igual à da restante matéria, já que ambas evoluem igualmente, a partir de uma situação de equilíbrio. Embora esta evolução se mantenha para sempre no caso dos neutrinos, para a radiação a situação é alterada quando, para temperaturas abaixo de $T \approx 5 \times 10^9$ K, os electrões entram na fase não relativista e iniciam o processo de aniquilação. Para temperaturas $5 \times 10^9 \text{ K} \leq T \leq 10^{12} \text{ K}$, (sistema inicial, representado pelo índice i) os fótões, electrões e positrões encontram-se em equilíbrio. Considerando os factores de spin de cada uma destas partículas, (tabela 2.1), g_i , será dado por

$$g_i = \sum \left(g_B + \frac{7}{8} g_F \right) = 2 + \frac{7}{8} (2 \times 2) = \frac{11}{2} \quad (2.44)$$

e a contribuição destas partículas para a densidade de energia será, de acordo com (2.28),

$$\epsilon_i = \frac{g_i}{2} \epsilon_\gamma = \frac{11}{4} a T_{\gamma i}^4 \quad (2.45)$$

Depois da aniquilação dos $e^+ - e^-$, as únicas partículas em equilíbrio, cuja contribuição é significativa são os fótons (sistema final, representado pelo índice f),

$$\varepsilon_f = \varepsilon_\gamma = aT_{\gamma f}^4 \quad (2.46)$$

A imposição de que a entropia do sistema em equilíbrio térmico se mantenha constante permite estabelecer uma relação entre o sistema inicial, constituído por electrões, positrões e fótons, e o sistema final, constituído por fótons. A entropia de um volume R^3 será, $S=sR^3$ (onde s representa a densidade de entropia) que, de acordo com (2.9), para partículas relativistas será,

$$S = \frac{4 R^3}{3 T} \varepsilon \quad (2.47)$$

Substituindo (2.45) e (2.46) em (2.47):

$$S_i = \frac{4 R_i^3}{3 T_{\gamma i}} \frac{11}{4} a T_{\gamma i}^4 = \frac{11}{3} a (RT_\gamma)_i^3 \quad (2.48)$$

$$S_f = \frac{4 R_f^3}{3 T_{\gamma f}} a T_{\gamma f}^4 = \frac{4}{3} a (RT_\gamma)_f^3 \quad (2.49)$$

e igualando $S_i=S_f$

$$\frac{(RT_\gamma)_f}{(RT_\gamma)_i} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \quad (2.50)$$

Mas, como antes da aniquilação, a temperatura dos neutrinos é igual à temperatura de equilíbrio, $T_\mu = T_\nu$, então, $(RT_\gamma)_i = (RT_\nu)_i$ e como $RT_\nu = \text{constante}$, $(RT_\gamma)_i = (RT_\nu)_f$. A expressão (2.50) fica, pois,

$$\frac{(RT_\gamma)_f}{(RT_\gamma)_i} = \frac{(RT_\gamma)_f}{(RT_\nu)_f} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)_f = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} = 1,4 \quad (2.52)$$

Mesmo depois do desacoplamento dos neutrinos, enquanto não ocorrer a aniquilação electrão-positrão, a temperatura desses neutrinos mantém-se idêntica à temperatura da radiação, já que ambas seguem a mesma lei de evolução $RT=\text{constante}$. A aniquilação electrão-positrão provoca um aumento na densidade de fótons, aumentando a temperatura da radiação, mas, como os neutrinos evoluem independentemente, não são afectados por esse aumento e a sua temperatura torna-se 1,4 vezes inferior à temperatura da radiação. Para todas as temperaturas inferiores, tanto a temperatura dos neutrinos como a da radiação (que daqui para a frente tomaremos como representando a temperatura T do Universo) evoluem de acordo com $T \propto R^{-1}$ e, portanto, a relação (2.52) ter-se-á mantido até hoje. Considerando os dados observacionais, que fornecem para a radiação de fundo, uma temperatura actual $T_0 \approx 2,7$ K, será de esperar que o fluxo de neutrinos que se propaga pelo Universo, tenha actualmente uma temperatura

$$T_{\nu 0} = 1,4T_{\gamma 0} = 1,9\text{K} \quad (2.53)$$

Para temperaturas $5 \times 10^9 \text{K} < T < 10^{12} \text{K}$, estão presentes no Universo fótons, electrões, positrões, neutrinos e antineutrinos electrónicos e muónicos. Considerando os factores de spin de cada uma destas partículas, neste intervalo de temperaturas, g será dado por

$$g = \sum \left(g_B + \frac{7}{8} g_F \right) = 2 + \frac{7}{8} (4 \times 1 + 2 \times 2) = 9 \quad (2.54)$$

A expressão (2.32) fica,

$$t(\text{s}) = 1,09 \times 10^{20} \text{K}^2 \text{s} \cdot T^{-2} (\text{K}) \quad (2.55)$$

Para temperaturas inferiores à temperatura de aniquilação dos pares $e^- - e^+$ (10^9K), a temperatura dos neutrinos é $(4/11)^{1/3}$ vezes inferior à da radiação. Então, como a densidade de energia varia com T^4 , a relação entre a densidade de energia dos neutrinos

e dos fótons (2.17) deve ser corrigida pelo factor $(4/11)^{4/3}$, relativamente à situação de equilíbrio térmico entre ambos, ou seja, passamos a ter:

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \frac{7}{16} \varepsilon_\gamma \quad (2.56)$$

Para ter em conta esta correcção, a equação (2.54) passa a ficar

$$g = 2 + \frac{7}{8} \times (4 \times 1) \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 2,91 \quad (2.57)$$

que, substituída na expressão (2.32), fornece

$$t(s) = 1,92 \times 10^{20} \text{ K}^2 \text{ s } T^{-2} (\text{K}) \quad (2.58)$$

A relação numérica (2.55) permite seguir a evolução térmica do Universo jovem, desde a aniquilação dos múons-antimúons até à época em que se inicia a aniquilação electrão-positrão. Até então T pode representar a temperatura da radiação e dos neutrinos. Depois da aniquilação dos electrões-positrões, a evolução da temperatura da radiação, bem como de toda a matéria em equilíbrio térmico, é descrita por (2.58). Os neutrinos seguem agora uma evolução independente, com temperatura sempre inferior à da radiação, de acordo com a relação (2.52) (ver Figura 2.3).

2.4- Nucleossíntese primordial

A temperaturas superiores à temperatura crítica de prótons, neutrões e respectivas anti-partículas, $T_p \approx T_n \approx 10^{13}$ K ≈ 1 GeV, a densidade destas partículas é elevada e idêntica à densidade de radiação. Quando, por outro lado, a temperatura desce abaixo desse valor o processo de aniquilação conduz rapidamente ao quase desaparecimento da matéria bariónica. Contudo, a existência de um pequeno excesso de partículas relativamente a antipartículas assegura uma densidade bariónica residual que, embora muito pequena relativamente à densidade de radiação, $N_B \approx 10^{-9} N_\gamma$, compreende as peças fundamentais para a formação dos núcleos atômicos, constituindo, portanto, a causa, não só, da nossa existência, como da de todas as estruturas conhecidas no Universo.

Durante algum tempo pensou-se que a formação de núcleos atômicos ocorria apenas nas estrelas o que, de facto, acontece com a maioria dos elementos. No entanto, em 1948, R. A. Alpher, H. A. Bethe e G. Gamow, reconhecendo a dificuldade em explicar a síntese do hélio apenas por processos estelares, consideraram a hipótese de esta ocorrer durante a evolução do Universo jovem, propondo o primeiro modelo para a nucleossíntese primordial. Na sequência deste modelo, e para resolver algumas das dificuldades que ele apresentava, Gamow considerou, pela primeira vez, a hipótese de existir no Universo uma radiação de fundo com uma temperatura $T_0 \approx 5$ K. Na época, tanto um facto como o outro, não despertaram grande atenção, mas hoje, a concordância das previsões do modelo da nucleossíntese primordial com as abundâncias de elementos leves observadas e a descoberta da radiação de fundo, constituem os pilares centrais do sucesso do big bang. Nesta secção, seguiremos a história dos prótons e neutrões desde a sua saída do equilíbrio térmico até à formação dos primeiros núcleos atômicos. Posteriormente, veremos como se obtiveram os primeiros átomos neutros e como esse fenómeno se relaciona com a existência actual de uma radiação de fundo cósmica.

2.4.1- Razão neutrão/protão

Apesar de a temperaturas $T \approx 10^{12}$ K o processo de aniquilação dos bariões já ter cessado e das suas densidades serem muito baixas, a pequena diferença de massa entre o protão e o neutrão, $\Delta mc^2 = (m_n - m_p)c^2 \approx 1,3$ MeV (correspondente a $T \approx 1,5 \times 10^{10}$ K), e a

existência de leptões muito energéticos, $E_L \approx kT \approx 86 \text{ MeV} \gg \Delta mc^2$, mantém prótons e neutrões em equilíbrio térmico, através dos processos de interacção fraca,



[Weinberg, 1972, p.546]. De acordo com (2.18), as densidades de equilíbrio de neutrões e prótons serão, respectivamente,

$$N_n = \frac{2}{\hbar^3} \left(\frac{m_n kT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_n}{T}\right) \quad (2.60)$$

$$N_p = \frac{2}{\hbar^3} \left(\frac{m_p kT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_p}{T}\right), \quad (2.61)$$

o que nos permite determinar a razão entre a densidade de neutrões e de prótons, N_n/N_p , para qualquer temperatura do período de equilíbrio,

$$\frac{N_n}{N_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{T_p - T_n}{T}\right) \approx \exp\left(-\frac{1,5 \times 10^{10} \text{ K}}{T}\right) \quad (2.62)$$

ou, equivalentemente, a fracção de neutrões relativamente à totalidade de bariões,

$$X_n = \frac{N_n}{N_n + N_p} = \left[1 + \exp\left(\frac{1,5 \times 10^{10} \text{ K}}{T}\right) \right]^{-1} \quad (2.63)$$

As equações anteriores evidenciam a diminuição do valor N_n/N_p com a descida da temperatura, traduzindo, assim, o facto de se tornar mais difícil converter prótons em neutrões (mais pesados) que o inverso, à medida que os leptões se vão tornando menos energéticos. Enquanto a taxa de reacção dos processos fracos, em que intervêm os prótons e neutrões, for superior à taxa de expansão do Universo, estas partículas manter-se-ão em equilíbrio e, portanto, a fracção de neutrões continua a decrescer de acordo com a equação (2.63). Cálculos detalhados, envolvendo as taxas de reacção dos

processos fracos, permitem concluir que estas são suficientemente altas para manter o equilíbrio térmico até temperaturas $T \approx 3 \times 10^{10}$ K [Weinberg, 1972, p.548]. Durante o período de equilíbrio térmico, a abundância de neutrões decresce lentamente com o abaixamento da temperatura, desde $X_n \approx 0,5$, para temperaturas $T \approx 10^{12}$ K, até $X_n \approx 0,38$, no momento em que ocorre a saída do equilíbrio térmico, a $T \approx 3 \times 10^{10}$ K (tabela 2.2).

Tabela 2.2 – Variação de N_n/N_p e X_n com a temperatura. Valores calculados a partir das equações (2.62) e (2.63), excepto o assinalado com *, obtido em Weinberg, 1972, p.549.

$T(K)$	N_n/N_p	X_n
10^{12}	1:1	0,5
10^{11}	5:6	0,46
3×10^{10}	3:5	0,38
$1,3 \times 10^9$	1:6	0,15(*)

Para temperaturas inferiores, a densidade de protões e neutrões deixa de poder ser descrita pelas densidades de equilíbrio, passando a variar de acordo com as taxas das reacções específicas em que estes intervêm, as quais poderão ser calculadas pela teoria $V-A$ das interacções fracas [Weinberg, 1992]. Quando a temperatura desce até cerca de $T \approx 1,3 \times 10^9$ K, os pares electrão-positrão já praticamente desapareceram da mistura e, portanto, os processos de interconversão entre protões e neutrões tornam-se desprezáveis, deixando uma abundância de neutrões $X_n \approx 0,15$ [Weinberg, 1992, p.549], que, daqui em diante, só poderá ser alterada pelo decaimento β do neutrão,



Dado o elevado tempo de vida, $\tau = 1013$ s, característico deste processo, até à temperatura de $T \approx 1,3 \times 10^9$ K ($t \approx 20$ s) podemos negligenciá-lo relativamente aos referidos processos de interconversão protão-neutrão. Para temperaturas inferiores a $T \approx 1,3 \times 10^9$ K, quando todos os outros processos já cessaram, a abundância de neutrões passa a variar de acordo com a lei do decaimento radioactivo,

$$X_n(t) \propto \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \quad (2.65)$$

até que a formação dos primeiros núcleos trave este processo.

2.4.2- Reacções nucleares

A temperaturas superiores a $T \approx 10^{10}$ K, encontram-se vários núcleos complexos (índice i) em equilíbrio térmico, com densidades determinadas por (2.18):

$$N_i = \frac{g_i}{h^3} \left(\frac{m_i kT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_i - m_i c^2}{kT}\right) \quad (2.66)$$

Os potenciais químicos são desconhecidos, mas conservam-se em todos os processos nucleares:

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n, \quad (2.67)$$

então, se definirmos,

$$X_i = \frac{N_i A_i}{N_N}, \quad X_n = \frac{N_n}{N_N}, \quad X_p = \frac{N_p}{N_N}, \quad (2.68)$$

onde N_N é a densidade total de nucleões, ligados ou livres, e Z_i e A_i são, respectivamente, o número atómico e o número de massa do núcleo i , a partir das densidades de equilíbrio de núcleos (2.66) e de nucleões, (2.60) e (2.61), e, considerando a conservação dos potenciais químicos (2.67), podemos escrever,

$$X_i = \frac{g_i}{2} X_p^{Z_i} X_n^{A_i - Z_i} A_i^{1/2} \xi^{A_i - 1} \exp\left(\frac{B_i}{kT}\right) \quad (2.69)$$

onde B_i é a energia de ligação do núcleo,

$$B_i = [Z_i m_p + (A_i - Z_i) m_n - m_i] c^2, \quad (2.70)$$

e ξ é um número adimensional:

$$\xi = \frac{1}{2} N_N \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \quad (2.71)$$

[Narlikar, 1993, p.150; Weinberg, 1972, p.552].

A relação

$$N_N = N_{N0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{\rho_0}{m_N} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (2.72)$$

e a aproximação $m_N \approx m_n \approx m_p$, permitem escrever ξ como

$$\xi = 1,61 \times 10^{-12} \left(\frac{\rho_0}{10^{-30} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left(\frac{R}{10^{-10} R_0} \right)^{-3} \left(\frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^{-3/2} \quad (2.73)$$

Como ξ é muito pequeno durante o período de interesse, para se obter uma abundância significativa de determinado núcleo é necessário que a temperatura desça o suficiente para que, em (2.69), $\exp(B_i/kT) \approx \xi^{A-1}$. Assim, para se obterem densidades apreciáveis de um núcleo i , em equilíbrio térmico, é necessário que a temperatura atinja o valor

$$T_i \approx \frac{B_i}{k(A-1)|\ln \xi|} \quad (2.74)$$

Uma vez que a variação de $|\ln \xi|$ com a temperatura é pouco significativa (ver tabela 2.3), podemos obter facilmente valores aproximados de T_i , para diferentes núcleos, desprezando essa variação e tomando o valor médio $|\ln \xi| \approx 30$ (correspondente a $T \approx 10^{10} \text{ K}$ e $\rho_0 = 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$) em (2.74). A Tabela 2.4 apresenta os valores aproximados que obtivemos desse modo e os valores exactos, que consideram a variação de ξ com a

temperatura, obtidos em [Weinberg, 1972, p.552], para iguais densidades, $\rho_0=10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$.

Tabela 2.3- Variação de $|\ln\xi|$ com a temperatura e densidade actual de matéria bariónica.

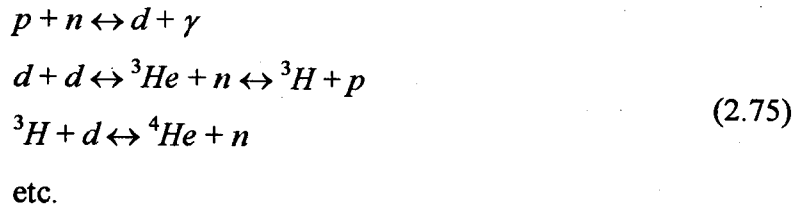
$T(\text{K})$	$ \ln\xi $		
	$\rho_0=10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$	$\rho_0=10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$	$\rho_0=10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$
10^9	31	34	36
10^{10}	28	30	32
10^{11}	24	27	29

Tabela 2.4- Valores de T_i para diferentes núcleos, para $\rho_0=10^{-30} \text{ gcm}^{-3}$. $T_{\text{apx } i}$ são valores aproximados obtidos por (2.74), considerando $|\ln\xi| \approx 30$; T_i são valores de [Weinberg, 1972, p.552].

Núcleo	$B_i (10^{-6} \text{ erg})$	$T_{\text{apx } i} (10^9 \text{ K})$	$T_i (10^9 \text{ K})$
^2H	0,36	0,9	0,8
^3H	1,36	1,6	1,5
^3He	1,23	1,5	1,3
^4He	4,53	3,6	3,6

Da tabela 2.4, podemos concluir que as temperaturas típicas, às quais são permitidas abundâncias significativas de núcleos, são da ordem $T \approx 10^9 \text{ K}$, sendo tão mais baixas quanto menos estáveis forem os núcleos. Assim, se, para temperaturas desta ordem, as abundâncias fossem governadas pelas condições de equilíbrio, os núcleos mais estáveis ter-se-iam formado primeiro e só posteriormente, a temperaturas inferiores, para as quais a energia da radiação fosse já insuficiente para a desintegração dos núcleos de menor energia de ligação, como o deutério, é que estes poderiam começar a aparecer em densidades relevantes. No entanto, não é este o curso dos acontecimentos durante a evolução do Universo jovem, pois, às temperaturas, $T \approx 10^9 \text{ K}$, a que os primeiros núcleos pesados poderiam começar a aparecer, em abundâncias significativas, as densidades de bariões são demasiado baixas para permitirem o equilíbrio de processos envolvendo a colisão simultânea das várias partículas que os

constituem, como, por exemplo, $2n + 2p \rightarrow {}^4\text{He}$. Deste modo, só através de uma sequência de processos envolvendo colisões entre dois corpos, cujo primeiro passo é obrigatoriamente a síntese de deutério, é possível sintetizar núcleos complexos:



O processo de colisão entre um próton e um neutrão, que conduz à produção de deutério, ocorre a uma taxa muito superior à taxa de expansão do Universo, pelo que a abundância de núcleos de deutério pode ser descrita pelas condições de equilíbrio, sendo dada, de acordo com (2.69), por

$$X_d = \frac{3}{\sqrt{2}} X_p X_n \xi \exp\left(\frac{B_d}{kT}\right).
 \tag{2.76}$$

Como já vimos, esta abundância é muito pequena enquanto a temperatura não descer até $T_d \approx 0,8 \times 10^9 \text{K}$, pois, para temperaturas superiores, os núcleos formados são rapidamente desintegrados por colisão com os fotões, cuja energia é, a essas temperaturas, muito superior à energia de ligação do deutério. A pequena energia de ligação do deutério constitui, assim, o factor determinante no que respeita ao início da nucleossíntese, uma vez que não é possível a formação de qualquer outro núcleo, antes que a temperatura desça o suficiente para que a abundância de deutério se torne suficientemente elevada para que os passos seguintes da cadeia de reacções (2.75) possam ocorrer a taxas elevadas. Logo que T_d é atingida, as reacções de síntese de ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ e ${}^4\text{He}$ processam-se com grande rapidez, já que (conforme a Tabela 2.4) a temperaturas $T < T_d$, são permitidas elevadas abundâncias de equilíbrio para todos os elementos.

A nucleossíntese primordial não produz quantidades apreciáveis de núcleos mais pesados que o ${}^4\text{He}$, não permitindo, por si só, explicar as abundâncias actuais desses núcleos. A explicação reside no facto de não existirem núcleos estáveis com número de massa entre 5 e 8, o que faz com que os núcleos formados por adição ao ${}^4\text{He}$ de mais uma partícula (quer um próton quer outro núcleo idêntico) sejam rapidamente

desintegrados pela radiação, quebrando-se, assim, a cadeia de reacções que, passo a passo, vinha adicionando aos núcleos existentes uma outra partícula, criando núcleos cada vez mais pesados. Para ultrapassar esta barreira e sintetizar núcleos como ^{12}C ou ^{16}O são necessárias condições físicas não presentes no universo jovem: densidades elevadas durante um tempo suficientemente longo; o Universo jovem expande-se e arrefece demasiado rapidamente para tornar possível a continuação da nucleossíntese até à formação dos elementos pesados. A nucleossíntese primordial termina, portanto, quando a quase totalidade dos neutrões se encontrar incorporada em núcleos de ^4He , o mais estável de todos os elementos com número de massa inferior a cinco. Embora em abundâncias muito pequenas, a nucleossíntese primordial produz também algum deutério e vestígios de outros elementos, como ^7Li e ^7Be . Acredita-se hoje que os elementos pesados foram criados nos interiores das estrelas ou em explosões de supernovas, em épocas relativamente recentes [Silk, 1989].

2.4.3- Abundância de elementos primordiais

Uma vez que a nucleossíntese incorpora a quase totalidade dos neutrões em núcleos de hélio, a abundância deste elemento no final do processo depende da abundância de neutrões, isto é, do valor X_n , imediatamente antes do início da nucleossíntese. A fracção em massa de ^4He , Y , no final da nucleossíntese, é, então, dada por

$$Y = X_{^4\text{He}} = \frac{A_{^4\text{He}} N_{^4\text{He}}}{N_N} = 2 \frac{N_n}{N_N} = 2X_n. \quad (2.77)$$

Durante o intervalo de tempo $\Delta t \approx 200$ s que medeia a época em que cessam as conversões prótão \leftrightarrow neutrão, $T \approx 1,3 \times 10^9$ K ($t \approx 100$ s), para a qual $X_n \approx 0,15$ (ver tabela 2.2), e a época em que se inicia a nucleossíntese, $T \approx 0,8 \times 10^9$ K ($t \approx 300$ s) (tempos calculados a partir das temperaturas por (2.58)), a abundância de neutrões decresce, de acordo com (2.65), até ao valor $X_n \approx 0,125$. Então, no final da nucleossíntese prevê-se uma abundância de ^4He ,

$$Y = X_{\text{He}} = 2X_n \approx 0,25 \quad (2.78)$$

A teoria da nucleossíntese permite, através de cálculos rigorosos baseados nas taxas de reacção dos vários processos nucleares e dos processos envolvendo a interacção dos núcleos com a radiação [Weinberg, 1972, p.553], prever as abundâncias de hélio e outros elementos primordiais. A abundância de hélio prevista pela teoria, $Y \approx 0,25$, é quase independente da densidade bariónica, mas, as abundâncias de outros elementos primordiais, nomeadamente a de deutério, são muito sensíveis a esse factor. A Figura 2.1 resume os resultados dos cálculos das abundâncias dos elementos primordiais, para diferentes valores da densidade bariónica.

A abundância de hélio é pouco sensível à densidade de matéria (Figura 2.1) pois, como a formação dos núcleos de hélio consome quase todos os neutrões, a sua abundância final depende apenas da fracção de neutrões no início da nucleossíntese, a qual depende muito pouco da densidade bariónica, uma vez que o valor da relação N_n/N_p é determinado por processos fracos, envolvendo a interacção dos bariões com os leptões e não dos bariões entre si. Assim, a diminuição da densidade bariónica em uma ou duas ordens de grandeza, apesar de diminuir um pouco a taxa das reacções que incorporam protões e neutrões em núcleos de hélio, não afecta significativamente a abundância final deste elemento, reduzindo-a em apenas um ou dois pontos percentuais [Silk, 1989, p.145; Weinberg, 1972, p.555].

Ao contrário do que acontece com o hélio, a abundância de deutério primordial é extremamente sensível à densidade de bariões, já que este só poderá sobreviver se as reacções de formação do hélio não forem suficientemente rápidas para que todo o deutério seja consumido. Assim, embora o deutério surja em grande abundância na primeira fase da nucleossíntese independentemente da densidade bariónica, se a densidade bariónica for muito elevada, as colisões entre dois corpos serão muito frequentes e rapidamente todo o deutério será fundido em núcleos de hélio; para densidades menores a taxa destas reacções, que diminui proporcionalmente a ρ_0^2 [Rowan, 1981, p.84], será mais baixa e algum deutério poderá escapar ao processo. Deste modo, como evidencia a Figura 2.1, enquanto os modelos cosmológicos abertos permitem densidades de deutério relativamente elevadas, os modelos fechados não prevêem qualquer produção de deutério primordial. Embora o deutério não seja um isótopo muito abundante ($1 \text{ } ^2\text{H} : 3 \times 10^4 \text{ } ^1\text{H}$), como ele não pode ser produzido nas

estrelas comuns, dado que aí as altas temperatura destruí-lo-iam, crê-se que todo o deutério observado no Universo deva ter sido produzido durante a nucleossíntese primordial. Como a abundância de deutério primordial é altamente dependente da densidade de bariões, os valores observacionais da sua abundância podem constituir um factor de decisão relativamente à densidade bariónica actual do Universo. Este assunto será retomado quando discutirmos a questão da matéria escura (capítulo 5).

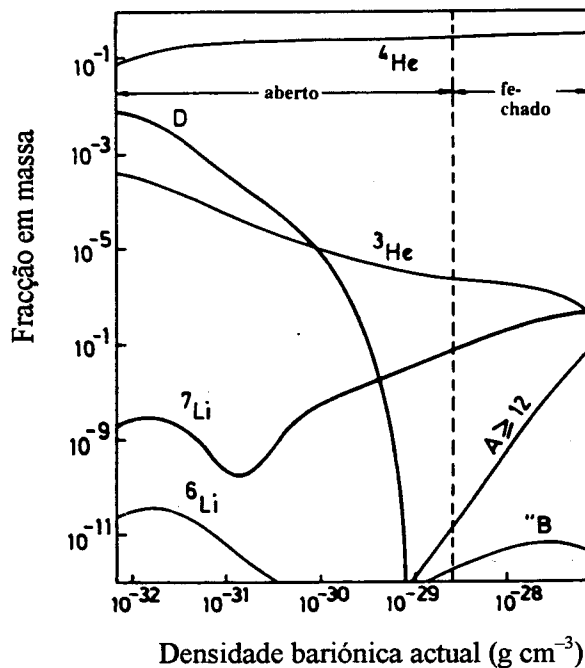


Figura 2.1 - Abundâncias de elementos primordiais em função da densidade de matéria bariónica actual [Fang Li Zhi, 1994, p.146].

A abundância de ^4He observada no Universo, $Y \approx 0,25$, é muito superior aos valores esperados, se a sua síntese ocorresse apenas em processos de fusão estelares, os quais prevêem valores de Y entre 0,01 e 0,04 [Börner, 1993, p.106], sendo, portanto, altamente concordantes com as previsões da nucleossíntese primordial. O excelente acordo entre as abundâncias de elementos leves primordiais observadas no Universo e os valores previstos teoricamente, constituem um dos mais importantes testes observacionais do modelo cosmológico padrão.

A abundância primordial de hélio depende do número de famílias de neutrinos, na medida em que estas contribuem para a densidade de energia do Universo e, conseqüentemente, para a sua taxa de expansão, da qual depende o momento em que terminam as interconversões próton – neutrão e, portanto, a abundância de neutrões no início da nucleossíntese. Quantitativamente, pode-se determinar que, por cada família de neutrinos adicional existente no Universo jovem, a abundância de hélio seria aumentada em cerca de 2% [Narlikar, 1993, p.153]. Uma vez que a abundância de hélio primordial prevista pela teoria, considerando as três famílias de neutrinos previstas pelo modelo padrão da física de partículas, é concordante com a observada no Universo, este facto fornece um bom acordo entre o big bang e o modelo padrão da física de partículas.

2.5- Recombinação

Imediatamente a seguir à nucleossíntese, o Universo é constituído por núcleos de hélio, protões e electrões livres, formando um gás ionizado em equilíbrio com a radiação. Os processos mais comuns são a difusão dos fotões pelos electrões livres, os quais, além de assegurar o equilíbrio térmico entre matéria e radiação, mantêm o Universo opaco, impedindo que os fotões se propaguem livremente. Com o arrefecimento causado pelo prosseguimento da expansão, a energia de interacção Coulombiana entre protões e electrões torna-se progressivamente mais significativa, relativamente à energia da radiação, permitindo que os processos de equilíbrio,



comecem a fornecer abundâncias significativas de átomos neutros [Coles, 1996, p.178]. A época em que ocorre a neutralização dos núcleos é vulgarmente denominada *época de recombinação*.

A ligação electrostática dos electrões vem permitir que, pela primeira vez, os fotões possam percorrer longos caminhos ($\approx c/H$) sem interagirem com a matéria. O Universo torna-se, deste modo, transparente para a radiação, a qual desacopla da matéria, passando a evoluir independentemente até à época actual. Hoje, podemos detectar esta radiação “fóssil”, vulgarmente conhecida por *radiação cósmica de fundo*, com uma temperatura muito baixa (2,7 K), devido ao arrefecimento causado pela expansão, e continuando a manter a sua forma Planckiana de *radiação de corpo negro*, a provar a sua origem numa época de equilíbrio térmico com a matéria.

2.5.1– Recombinação do hidrogénio

Com protões, electrões e átomos de hidrogénio neutros em equilíbrio com a radiação, $p + e^- \leftrightarrow \text{H} + \gamma$, podemos seguir a evolução das densidades relativas destas

espécies com o abaixamento da temperatura, determinando, assim, a época em que todos os protões são neutralizados. Considerando as densidades fornecidas pela distribuição de Boltzmann (2.18) (com $g_e=g_p=2$ e $g_H=4$), para os electrões livres, N_e , protões livres, N_p , e átomos de hidrogénio, N_H , e notando que a neutralidade global da matéria exige que $N_e \approx N_p$, podemos obter a relação

$$\frac{N_e N_p}{N_H} = \frac{N_e^2}{N_H} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{B_H}{kT} \right) \quad (2.80)$$

onde $B_H = [(m_p + m_e) - m_H] \cdot c^2 \approx 13,6 \text{ eV}$ (correspondente a $T \approx 1,6 \times 10^5 \text{ K}$) é a energia de ligação do electrão ao núcleo de hidrogénio. Definindo a *fracção de ionização* do hidrogénio,

$$x = \frac{N_e}{N_p + N_H} \approx \frac{N_e}{N_B}, \quad (2.81)$$

onde N_B é a densidade de bariões, que, desprezando a pequena contribuição dos neutrões, pode ser considerada $N_B \approx N_p + N_H$, a relação (2.80) fica

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{N_e^2}{N_H N_B} = \frac{1}{N_B} \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{B_H}{kT} \right), \quad (2.82)$$

permitindo-nos determinar a fracção de ionização, x , isto é, a percentagem de protões livres relativamente à totalidade de protões, a cada temperatura. Para um cálculo aproximado, considerámos, em (2.82),

$$N_B = \frac{\rho}{m_p} = \frac{\rho_c \Omega}{m_p} \approx 10^{-5} \Omega h_0^2 \quad (2.83)$$

e $\Omega h_0^2 \approx 1$, obtendo, assim, para $T=5\,000 \text{ K}$, uma fracção de ionização do hidrogénio, $x \approx 1$, o que nos permite concluir que, a esta temperatura, a totalidade dos protões (e

electrões) ainda se encontra livre; para uma temperatura $T=2\ 500$ K, obtém-se já $x\approx 0$, mostrando que, no período entre $T=5\ 000$ K e $T=2\ 500$ K, todos os protões e electrões livres se combinaram para formar átomos de hidrogénio neutro (recombinação do hidrogénio). A tabela 2.5 apresenta a fracção de ionização do hidrogénio como função da temperatura e respectivo desvio para o vermelho, $z=(R_0/R)-1=(T/T_0)-1$, para diferentes valores de Ωh_0^2 .

Tabela 2.5- Fracção de ionização do hidrogénio em função de T e z , para diferentes valores de Ωh_0^2 [Coles, 1996, p.181].

z	2000	1800	1600	1400	1200	1000
$T(K)$	5400	4860	3780	3240	2970	2700
Ωh_0^2						
10	0,995	0,914	0,358	0,004	0,001	10^{-5}
1	0,999	0,990	0,732	0,108	0,004	4×10^{-5}
0,1	1	1	0,954	0,303	0,012	10^{-4}
0,01	1	1	0,995	0,664	0,039	3×10^{-4}

Como se pode ver pela tabela, o valor do desvio para o vermelho para o qual a fracção de ionização atinge $x\approx 0,5$, não depende muito do parâmetro Ωh_0^2 , situando-se entre $z=1\ 400$ e $1\ 600$. Assim, admite-se vulgarmente o valor médio $z_{\text{rec}}\approx 1\ 500$, a que corresponde uma temperatura $T_{\text{rec}}\approx 4\times 10^3$ K, como característico da época de recombinação.

Poder-se-ia pensar que, logo que a energia da radiação descasse abaixo da energia de ionização do hidrogénio, iniciar-se-ia a sua recombinação. No entanto, a temperatura abaixo da qual começa a aparecer uma percentagem significativa de hidrogénio neutro é muito inferior à temperatura correspondente à sua energia de ionização ($T_H\approx 1,6\times 10^5$ K). Este facto pode ser compreendido, se pensarmos que a energia da radiação, $\varepsilon_\gamma=kT$, que usamos como referência, é um valor médio estatístico, e que, portanto, e uma vez que a densidade de fotões é muito superior à densidade de bariões, mesmo a temperaturas inferiores a T_{HP} pode existir um número de fotões com energias superiores a B_{HP} suficiente para impedir a recombinação. Por outro lado, também a possibilidade de

existência de estados excitados do hidrogénio faz com que, mesmo os fótons de energia inferior a B_{HP} contribuam para o aumento da fracção de ionização [Rofls, 1988, p.65].

A maior energia de ligação entre os núcleos de hélio e os seus electrões, permite-lhe iniciar a recombinação a temperaturas mais altas que o hidrogénio: para $T \approx 10^4$ K, 50% do hélio encontra-se na forma He^{++} e 50% na forma He^+ ; para temperaturas $T \approx 7 \times 10^3$ K, temos já 50% de He^+ e 50% de He (e ainda 100% H^+); para a temperatura $T \approx 4 \times 10^3$ K a que, como já vimos, corresponde uma percentagem de ionização do hidrogénio de 50%, todo o hélio está já na sua forma neutra [Coles, 1996, p.178].

2.6- A radiação cósmica de fundo

Em 1948, G. Gamow, R. Alpher e R. Herman previram a existência de uma radiação de corpo negro, com origem numa época de temperatura elevada, que, devido à expansão teria arrefecido até uma temperatura actual muito baixa, $T_0 \approx 5$ K. Esta previsão não despertou grande interesse nessa altura, uma vez que o modelo do big bang era, então, considerado muito especulativo e a detecção da radiação de fundo prevista estava muito além das possibilidades tecnológicas da época. Em 1964, Arno Penzias e Robert Wilson, dos Bell Laboratories, quando calibravam uma antena de rádio, no comprimento de onda $\lambda = 7,35$ cm (escolhido de forma a minimizar as interferências das conhecidas emissões da Galáxia e da Terra), detectaram um ruído de fundo rádio, que persistia, independentemente da orientação da antena, mesmo depois de excluídas todas as possibilidades de problemas técnicos com a aparelhagem utilizada. Um grupo liderado por Robert Dicke, da Universidade de Princeton, que se preparava para iniciar as observações com que pretendia detectar uma radiação de fundo de origem cósmica, que lhe permitiria confirmar a teoria do big bang quente, reconheceu imediatamente a importância da radiação detectada por Penzias e Wilson, construindo uma antena com a qual efectuou novas medições que permitiram confirmar a existência no Universo, de uma radiação de corpo negro de temperatura $T_0 \approx 3$ K. Os dois grupos de cientistas publicaram em conjunto os seus resultados, anunciando a descoberta da radiação, que denominaram radiação cósmica de corpo negro, como uma confirmação do modelo do big bang. Penzias e Wilson foram galardoados com o prémio Nobel em física, em 1978, por esta descoberta.

Desde a descoberta de Penzias e Wilson foram realizadas inúmeras medições de grande precisão, investigando as características desta radiação. Resultados relativamente recentes, obtidos pelo fotómetro FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*) instalado no satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*), lançado em 1989, fornecem para a radiação de fundo uma temperatura $T_0 = 2,726$ K, com uma precisão de 0,01 K, e um espectro extraordinariamente concordante, em todos os 34 comprimentos de onda observados, com a curva teórica da radiação de corpo negro (ver Figura 2.2) [Roos, 1996, p. 97]. Outras observações recentes estabeleceram também o alto grau de isotopia e a ausência de polarização desta radiação. Algumas medições apresentam

ligeiros desvios, com pequeno peso estatístico, do espectro da radiação de fundo relativamente à curva teórica de 2,7 K, os quais estão ainda por explicar, mas, caso se confirmem, pensa-se que poderão fornecer importantes informações para as teorias da formação de estruturas [Börner, 1993, p. 80].

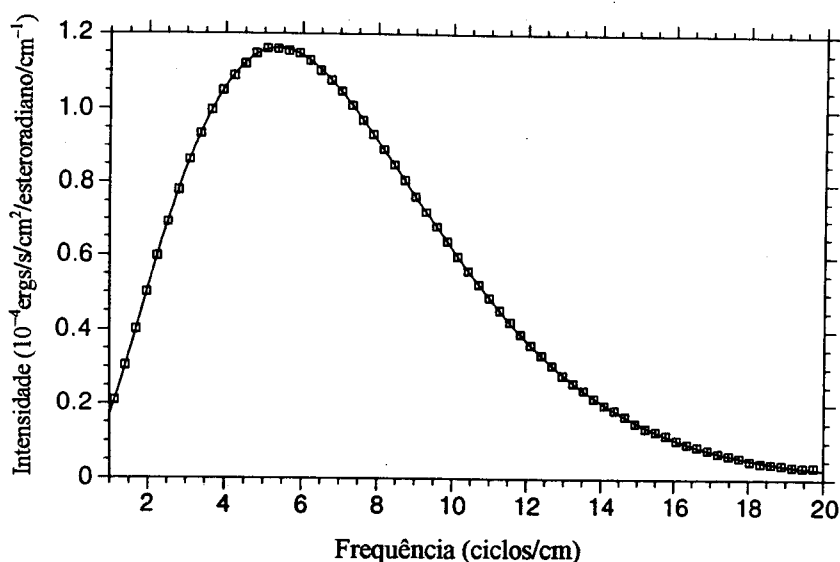


Figura 2.2– Espectro da radiação de fundo cósmica, construído com dados de 1990, obtidos pelo COBE [Börner, 1993, p. 418]. As caixas representam os erros de cada medição individual. A linha é a curva teórica da radiação de corpo negro de temperatura $T=2,7$ K.

As características da radiação de fundo estão de acordo com uma origem numa época quente da evolução do Universo, na qual, o desaparecimento dos os electrões livres, os principais elementos difusores da radiação, que asseguravam o equilíbrio térmico entre matéria e radiação, permitiu o desacoplamento de radiação de corpo negro quase pura. Como posteriormente, esta radiação não interage significativamente com o restante conteúdo do Universo, a sua temperatura irá decrescendo devido à expansão, de acordo com $T \propto R^{-1}$, mantendo a sua forma Planckiana. O perfeito acordo entre as previsões do modelo cosmológico padrão e as características da radiação de fundo observada no Universo fizeram da sua descoberta o mais importante suporte experimental deste modelo.

O conhecimento preciso de T_0 permite determinar algumas quantidades cosmológicas importantes. Considerando $T_0=2,726$ K e desprezando a contribuição, para o aumento da densidade de radiação, da aniquilação electrão–positrão, podemos

obter a densidade de fótons e a densidade de energia da radiação actuais, através das relações (2.10) e (2.11), respectivamente:

$$N_{\gamma 0} (\text{cm}^{-3}) = 20,3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3} T_0^3 (\text{K}) \approx 400 \text{ cm}^{-3} \quad (2.84)$$

$$\varepsilon_{\gamma 0} (\text{erg cm}^{-3}) = a T_0^4 (\text{K}) \approx 4 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} \quad (\rho_{\gamma 0} = \varepsilon_{\gamma 0} / c^2 \approx 5 \times 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}); \quad (2.85)$$

com $a = 7,6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$

Com o valor $N_{\gamma 0}$, obtido em (2.84), e considerando o valor N_{B0} , obtido de (2.83),

$$N_{B0} = \frac{\rho_0}{m_p} = \frac{\rho_c \Omega_0}{m_p} \approx 10^{-5} \Omega_0 h_0^2, \quad (2.86)$$

podemos determinar o valor da razão

$$\frac{N_{\gamma}}{N_B} \approx 4 \times 10^7 \Omega_0 h_0^2, \quad (2.87)$$

característico da época actual do nosso Universo, e aproximadamente constante durante toda a sua evolução, com pequenas variações causadas pela produção de fótons pela aniquilação dos pares de partícula-antipartícula, quando atingida a sua temperatura crítica (como descrito na secção 2.3 para a aniquilação electrão-positrão).

A comparação das leis de evolução das densidades de energia da radiação e da matéria,

$$\varepsilon_{\gamma} = \varepsilon_{0\gamma} \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{0m} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (2.89)$$

e o conhecimento dos valores actuais, $\varepsilon_{0\gamma} \approx 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3}$ e $\varepsilon_{0m} \approx 10^{-31} \text{ g cm}^{-3} \cdot c^2 \approx 10^{-10} \text{ erg cm}^{-3}$ (ε_{0m} corresponde à previsão da nucleossíntese;

discutiremos no Capítulo 5 a incerteza associada a este valor), permite determinar que, a partir da época $R \approx 10^{-3} R_0$ ($T \approx 10^3 T_0$), ou equivalentemente $z \approx 10^3$, o Universo deixa de ser dominado pela radiação para passar para uma época de domínio da matéria. Como vimos, nessa época, ocorre também a recombinação do hidrogénio e consequente desacoplamento da radiação. A simultaneidade destes dois acontecimentos permanece uma inexplicável coincidência.

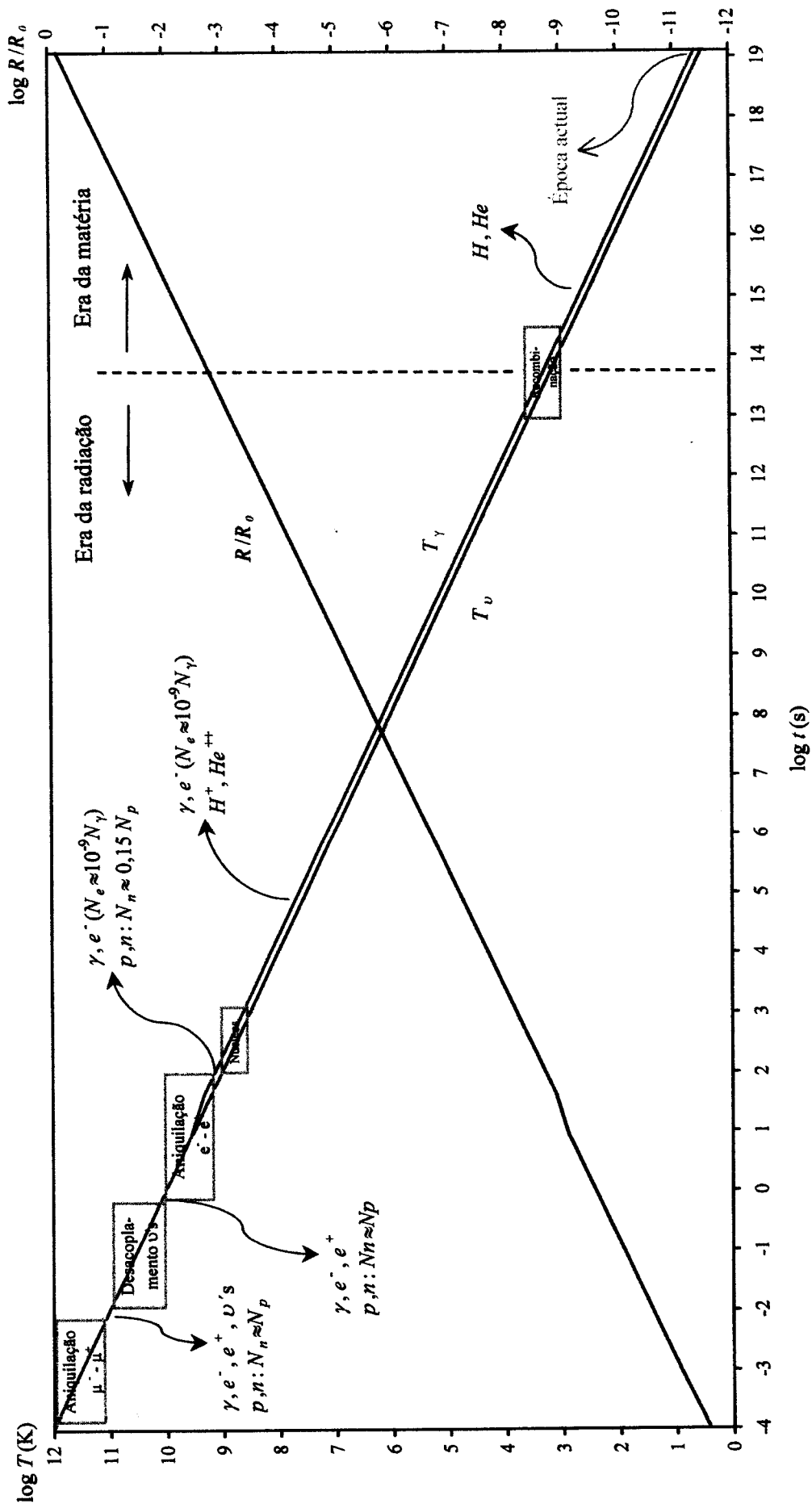


Figura 2.3- Evolução térmica do Universo para $T < 10^{12}$ K. A linha R/R_0 foi obtida a partir de $R/R_0 = 2,7/T_\gamma$, com T_γ dada por (2.56), antes da aniquilação electrón-positrão, e por (2.59) depois da aniquilação. T_ν é obtida a partir de (2.56).

Capítulo 3

PROBLEMAS DO MODELO PADRÃO

3.1-Introdução

Ao longo deste trabalho temos apresentado o modelo do big bang – o modelo cosmológico padrão – como uma possível explicação para a evolução do Universo ou, pelo menos, para alguns aspectos dessa evolução. Vimos, também, como várias das suas previsões são confirmadas pelos resultados da observação:

- 1- A explicação da expansão do Universo.
- 2- A concordância das previsões do modelo para as abundâncias dos elementos leves, produzidas durante a nucleossíntese primordial, com os dados observacionais.
- 3- A explicação natural da radiação de fundo como um vestígio de uma fase quente de equilíbrio térmico.

No entanto, há várias questões que, no contexto exclusivo do modelo padrão, permanecem por resolver:

- 1- A evolução do Universo para tempos inferiores à era de Planck .
- 2- O problema da existência de horizontes.
- 3- O motivo por que a densidade do Universo parece estar tão próxima da densidade crítica.
- 4- A origem da assimetria bariônica (*bariossíntese*).

- 5- A evolução do Universo para temperaturas superiores a 100 GeV.
- 6- Os aparentemente excessivos grau de homogeneidade e isotropia do Universo.
- 7- A natureza da matéria escura.

A inclusão da física de partículas no modelo original do big bang abriu novas perspectivas para a resolução de alguns destes problemas, tendo-se conseguido alguns avanços como:

- 1- Uma melhor explicação da evolução do Universo a partir de temperaturas $T > 10^{12}$ GeV.
- 2- Uma possível explicação da bariossíntese.
- 3- A hipótese de a matéria escura conter matéria não bariónica.

No entanto, as teorias da física de partículas para energias muito altas, além de implicarem um domínio mais polémico e especulativo, trazem consigo novos problemas, tais como os decorrentes da existência de defeitos topológicos no espaço-tempo. Dentre estes problemas, referir-se-á, posteriormente, o problema da excessiva densidade de monopólos magnéticos, originada nas quebras de simetria das teorias de grande unificação (GUT). A resolução destes problemas constituiu a principal motivação para o desenvolvimento dos modelos inflacionários, os quais fornecem, como veremos, possíveis soluções para os problemas da planura, dos horizontes e dos monopólos.

3.2- O problema da bariossíntese

Considerando que, durante a sua evolução, o Universo passa por uma fase de equilíbrio térmico, seria de esperar que, a temperaturas suficientemente elevadas, bariões, leptões e respectivas antipartículas, em densidades idênticas, $N_B \approx N_{\bar{B}} \approx N_L \approx N_{\bar{L}} \approx N_\gamma$, se encontrassem em equilíbrio térmico com a radiação. Com o abaixamento da temperatura, os bariões tornam-se não relativistas ($T \approx 10^{13} \text{K} \approx 1 \text{GeV}$) e, através do processo de aniquilação partícula-antipartícula, a sua densidade diminui rapidamente, pelo factor de Maxwell-Boltzmann. Podemos dizer que este processo termina, para temperaturas $T \approx 20 \text{ MeV} = 2 \times 10^{11} \text{ K}$, quando a densidade bariónica, é já tão pequena que a taxa de reacção do processo de aniquilação é superada pela taxa de expansão do Universo [Narlikar, 1993, p.165]. A temperaturas inferiores a 20 MeV, restará então, uma densidade residual de matéria bariónica, composta por iguais densidades de partículas e antipartículas. Considerando as expressões para as densidade de bariões (na aproximação de baixa temperatura), (2.18),

$$N_B = g_B \left(\frac{m_B kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_B c^2}{kT} \right) \quad (3.1)$$

e de fotões, (2.6),

$$N_\gamma = \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \quad (3.2)$$

podemos determinar a dependência com a temperatura, da razão entre a densidade de bariões e de fotões,

$$\eta(T) = \frac{N_B}{N_\gamma} = \frac{g_B \pi^2}{2,404(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_B c^2}{kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_B c^2}{kT} \right) \quad (3.3)$$

($g_B = 2 \times g_p + 2 \times g_n = 8$).

Uma vez que o processo de aniquilação cessa para temperaturas da ordem de 20 MeV, a variação de η com a temperatura congela no valor $\eta(20 \text{ MeV}) \approx 10^{-18}$, o que significa que, em épocas posteriores, qualquer variação significativa de N_B ou $N_{\bar{B}}$ através deste processo é impossível. Uma vez que os processos de aniquilação matéria-antimatéria são a principal fonte de fótons no Universo (e desprezando a contribuição da aniquilação electrão-positrão para o aumento de N_{γ}) e uma vez que, às temperaturas em questão, as teorias da física das partículas não permitem processos que violem a conservação do número bariónico, os valores $(N_B / N_{\bar{B}})_{\text{teor}} \approx 1$ e $\eta_{\text{teor}} \approx 10^{-18}$ ter-se-ão mantido até hoje. No entanto, os dados observacionais apontam para um Universo quase exclusivamente constituído por matéria, $N_{\bar{B}} / N_B \leq 10^{-6}$ [Rofls, 1988, p.71], fornecendo para η valores nove ordens de grandeza superiores ao previsto pelo modelo padrão, $\eta = N_B / N_{\gamma} \approx 10^{-9}$.

Estes dados colocam em causa a nossa condição de partida, segundo a qual, no equilíbrio, $N_B \approx N_{\bar{B}}$, forçando-nos a admitir a hipótese de que, em alguma época anterior à aniquilação, se criou uma assimetria barião-antibarião (bariossíntese). No modelo cosmológico clássico, anterior à inclusão da física de partículas, este facto era encarado como uma condição inicial inexplicável do Universo. A física de partículas, permitiu ir um pouco mais além, fornecendo uma possível solução para a bariossíntese, a partir de um Universo inicialmente simétrico relativamente a matéria e antimatéria.

A primeira condição para que, a partir de uma situação de igualdade entre as duas densidades, seja criado um excesso de bariões sobre antibariões é a existência de reacções que violem a conservação do número bariónico (B). Como as GUT são simétricas relativamente a leptões e quarks (de números bariónicos nulo e $1/3$, respectivamente), elas admitem processos que não conservam B , os quais não são permitidos seja pela cromodinâmica quântica, seja pela teoria electro-fraca.

Os intermediários para as interacções GUT, os bosões leptoquarks X (de número bariónico nulo), intervêm em processos que podem violar explicitamente a conservação do número bariónico, como acontece, por exemplo, nos decaimentos:

$$X \rightarrow e^- + d; \quad \Delta B = 1/3$$

$$X \rightarrow \bar{u} + \bar{u}; \quad \Delta B = -2/3$$

No entanto, enquanto os bosões X , permanecerem em equilíbrio térmico, estes processos não podem causar a assimetria bariónica, pois ocorrem a igual taxa em ambos os sentidos. O momento propício para a bariossíntese ocorre quando a temperatura desce até $T \approx 10^{14} - 10^{15}$ GeV, época em que a simetria GUT é espontaneamente quebrada e os bosões X saem do equilíbrio térmico, iniciando o seu desaparecimento por aniquilação ou decaimento. Contudo, para permitir a bariossíntese, uma terceira condição deve ser obedecida: a simetrias C ou a simetria CP deve ser violada. Se estas simetrias forem estritamente conservadas, mesmo que, em determinados processos ocorra uma variação do número bariónico (ΔB), os “anti-processos” correspondentes, ocorrendo à mesma taxa, causarão uma variação simétrica ($-\Delta B$) e, em média, não haverá qualquer contribuição para a assimetria bariónica. Exemplificando para os decaimentos de X :

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \bar{u} + \bar{u}; & \Delta B_1 &= -2/3 \\ X &\rightarrow u + u; & \Delta B_2 &= 2/3 \end{aligned} \quad ; \Delta B_{total} = 0$$

se existir violação de C ou CP , a taxa a que ocorrem os dois processos não é obrigatoriamente igual e podemos obter, $\Delta B_{total} \neq 0$ [Roos, 1996, p.150].

Então, se aceitarmos as teorias de grande unificação, que permitem processos que não conservam B , se considerarmos as temperaturas, próximas da quebra de simetria GUT, a que os bosões X , quarks e leptões saem do equilíbrio térmico e se admitirmos a violação de C e CP , para essas épocas, é possível que a bariossíntese tenha ocorrido para temperaturas entre $T \approx 10^{14}$ e $T \approx 10^{15}$ GeV. Esta possível solução para o problema da bariossíntese é, contudo, especulativa, na medida que se baseia na hipótese da existência de uma simetria GUT, para a qual não podemos ter qualquer evidência experimental. A solução para este problema pode não se restringir apenas à transição de fase GUT, pois o conjunto das três condições pode ocorrer um pouco mais tarde, a temperaturas mais baixas, dependendo da versão particular da GUT ou outra teoria. Pode mesmo acontecer que a bariossíntese ocorra a energias muito menores, próximas da escala electro-fraca [Coles, 1995, p.127].

Apesar da controvérsia e de inúmeras dificuldades ligadas a esta solução, é possível, com hipóteses razoáveis, chegar a um valor para a assimetria $B - \bar{B}$ da ordem de 10^{-8} a 10^{-13} , o que inclui o valor observado. A grande incerteza deriva não só da possibilidade de considerar diferentes tipos de GUT's como de, em cada teoria GUT,



existirem muitos parâmetros livres ou mal determinados. Analogamente ao modo como é criada a assimetria bariónica, e uma vez que as GUT's unificam leptões e quarks, é possível que uma assimetria leptónica seja também criada. As dificuldades de detecção dos neutrinos não nos permitem dados observacionais para este caso.

3.3- O problema dos horizontes

Um dos princípios fundamentais do modelo padrão é o Princípio Cosmológico, que estabelece a homogeneidade do Universo. A existência de horizontes de partículas nos modelos de Friedmann dificulta a compreensão deste Princípio, na medida em que este pressupõe uma forte correlação das condições físicas, impossível entre regiões que se situem fora dos horizontes umas das outras, e que, portanto, não podem estabelecer contactos causais. Estamos, então, perante um modelo que admite a homogeneidade como princípio, mas cuja estrutura estabelece limites às comunicações entre as diferentes partes do Universo, dificultando, assim, a explicação, das causas da homogeneidade.

Num Universo plano, dominado por radiação, o horizonte, R_H , será dado por, $R_H = 2ct$ (resultado análogo ao obtido para $k=0$ no Universo dominado por poeira) que, atendendo a que $t(T)(s) = 2,4 \times 10^{-6} \text{ GeV}^2 \text{ s} \cdot g^{-1/2} T^{-2}(\text{GeV})$, pode ser escrito,

$$R_H(T) \text{ (cm)} = 1,4 \times 10^5 \text{ GeV}^2 \text{ cm} \cdot g^{-1/2} T^{-2} \text{ (GeV)} \quad (3.4)$$

O factor de escala pode ser determinado, em qualquer época, por $R(T) = R_0 T_0 / T$, (2.21), de modo que, para $T_{\text{GUT}} \approx 10^{15} \text{ GeV}$, $R_H(T_{\text{GUT}}) = 1,44 \times 10^{-26} \text{ cm}$ e o valor do factor de escala, para a mesma época, com $R_0 \approx 10^{28} \text{ cm}$ e $T_0 \approx 2,59 \times 10^{-13} \text{ GeV}$, será $R(T_{\text{GUT}}) \approx 3 \text{ cm} \gg R_H(T_{\text{GUT}})$. Este exemplo mostra-nos como grande parte das regiões estão causalmente desligadas no Universo muito jovem, tornando difícil aceitar que os mesmos fenómenos físicos, como, neste exemplo, a quebra de simetria GUT, ocorram simultaneamente, em pontos do espaço sem possibilidades de contacto. O problema é tanto mais grave, isto é, a relação $R(T)/R_H(T)$ é tanto maior, quanto mais recuamos no tempo, pois, como $R_H \propto t$ e $R \propto t^{1/2}$, R_H diminui mais rapidamente que R , quando $t \rightarrow 0$.

Podemos, como curiosidade, determinar a escala de homogeneidade que hoje veríamos no nosso Universo, admitindo-a como uma consequência da homogeneidade passada das regiões causalmente ligadas em determinada época. Para o exemplo anterior, a escala de homogeneidade em T_{GUT} , alargada pela expansão, seria hoje,

$$L_{O\ hom} = R_H(T_{GUT}) \times R_0 / R(T_{GUT}) \approx 1m \quad (3.5)$$

Actualmente, a maior evidência de homogeneidade do Universo é fornecida pelo enorme grau de homogeneidade da radiação de fundo, que nos fornece um exemplo claro do problema ligado à existência de horizontes. Até à temperatura T_{rec} , de desacoplamento da radiação com a matéria, estas estão em equilíbrio térmico, com uma distribuição isotrópica de fótons assegurada por processos de difusão. Como, depois do desacoplamento, matéria e radiação passaram a evoluir independentemente até hoje, a homogeneidade da radiação de fundo, actualmente observada, implica uma idêntica homogeneidade à temperatura T_{rec} . No entanto, na época correspondente ao desacoplamento da radiação, considerando $T_{rec} \approx 3000$ K e $g_{rec} \approx 3$, temos

$$R(T_{rec}) \approx 10^{25} \text{ cm},$$

$$R_H(T_{rec}) \approx 10^{24} \text{ cm},$$

sendo o horizonte apenas um décimo do factor de escala. Se a homogeneidade em T_{rec} existisse apenas à escala dos comprimentos de causalidade, a homogeneidade da radiação de fundo, seria dez vezes menor, que a observada [Coles, 1996]. Deste modo, provamos que a homogeneidade em T_{rec} , se estende para além dos horizontes cosmológicos. Como é possível, então, que a radiação adquira as mesmas propriedades, em regiões separadas por diversos comprimentos R_H , que, até à época do desacoplamento, nunca estabeleceram contactos causais entre si?

Esta dificuldade de explicação da homogeneidade decorrente da existência de horizontes nos modelos de Friedmann, constitui mais uma das dificuldades do modelo padrão, o chamado problema dos horizontes.

3.4- O problema dos monopólos

As substâncias magnéticas comuns têm regiões de polaridade oposta, isto é, todos os ímãs comuns são dipólos, incapazes de se separarem em duas partículas magnéticas independentes. Este facto levou Maxwell a formular a electrodinâmica sem considerar partículas livres de carga magnética, como fontes do campo magnético. Em 1931, Dirac propôs a existência de monopólos magnéticos, ou cargas magnéticas livres, modificando as equações de Maxwell, de modo a torná-las simétricas relativamente à electricidade e ao magnetismo. Dirac mostrou que a existência de cargas magnéticas explicava a quantização da carga eléctrica, estabelecendo, na sua teoria, uma relação entre cargas magnéticas (q_M) e cargas eléctricas (e),

$$q_M = n \frac{\hbar c}{2e} = 68,5 ne \quad (3.6)$$

onde n é um número inteiro não especificado. Em 1974, G. 't Hooft e A. Polyakov mostraram que a quebra espontânea de simetrias GUT, num grupo de menor simetria, contendo o grupo de simetria do electromagnetismo, $U(1)$ – como, por exemplo, a quebra de simetria $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ – implica a formação de monopólos magnéticos.

Estes monopólos GUT podem ser considerados como defeitos pontuais no campo escalar de Higgs, ϕ , que surgem se, após uma transição de fase, existirem, nesse campo ϕ , que deveria ser idêntico em todos os pontos, determinadas variações espaciais, ou seja, se em certas regiões aparecerem valores diferentes de ϕ . Essas variações constituem defeitos topológicos do espaço-tempo, cujas estruturas e dimensões dependem da transição de fase e da simetria nela quebrada. Os monopólos são defeitos adimensionais, mas podem também formar-se defeitos mono, di ou tri-dimensionais, denominados, respectivamente, cordas (“strings”), fronteiras de domínios (“domain walls”) e texturas [Coles, 1996, p.131].

A densidade de monopólos depende da coerência do campo ϕ , isto é, depende do comprimento típico em que ocorrem variações espaciais do valor de ϕ . Se ξ corresponder à escala espacial em que se espera que ocorreram diferenças em ϕ – o

comprimento de correlação do campo – a densidade de monopólos será da ordem de $N_M \approx \xi^{-3}$. Numa região de volume ξ^3 , ϕ será igual em todos os pontos, mas, para um volume superior encontrar-se-ão variações, o que significa, que teremos cerca de um monopólo (defeito no campo) por volume de correlação ξ^3 . O comprimento de correlação do campo é limitado superiormente, em cada época, pelo comprimento de causalidade no Universo, isto é, pelo valor do horizonte na época em questão, que, para as épocas dominadas pela radiação, é dado por $R_H(t) = 2ct$. Temos, então,

$$\xi \leq R_H = 2ct \quad (3.7)$$

O limite mínimo para a densidade de monopólos será de um monopólo por R_H^3 ,

$$N_M \approx \xi^{-3} \geq R_H^{-3} \quad (3.8)$$

[Coles, 1996, p.132]. Como, para $T_{\text{GUT}} \approx 10^{15}$ GeV ($\approx 1,2 \times 10^{28}$ K), de (3.4), $R_H(T_{\text{GUT}}) = 1,44 \times 10^{-26}$ cm e de (2.10), $N_\gamma(T_{\text{GUT}}) = 20,3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3} \cdot T^3(\text{K}) = 3,17 \times 10^{85} \text{ cm}^{-3}$, então,

$$\frac{N_M}{N_\gamma} \geq \frac{1}{R_H^3 N_\gamma} \approx 10^{-8} \quad (3.9)$$

Nenhum processo físico posterior à formação dos monopólos GUT é eficiente na redução da sua densidade, pois, uma vez formados, estes são indestrutíveis. A relação acima ter-se-ia, então, mantido até hoje, conduzindo a uma densidade actual de monopólos, comparável à densidade bariónica do Universo. Estes valores são, obviamente, absurdos, especialmente porque sendo os monopólos, partículas extremamente massivas, $m_M \approx 10^{16}$ GeV, o parâmetro actual de densidade dos monopólos, $\Omega_{M0} = \rho_M / \rho_c$, tomaria valores que violariam completamente todos os limites observacionais de densidade do Universo. Mesmo para o valor mínimo obtido, $N_M / N_\gamma \approx 10^{-8}$, com $N_M \approx N_B$, $m_B \approx 1$ GeV e $\Omega_{B0} \approx 1$, teríamos,

$$\Omega_{M0} = \frac{N_M}{N_B} \frac{m_M}{m_B} \Omega_{B0} \approx 10^{16} \quad (3.10)$$

Estamos, portanto, perante um problema que põe em causa a inclusão destas teorias da física de partículas no modelo cosmológico padrão: o valor que elas fornecem para a densidade do Universo, admitindo a formação dos monopólos, não é compatível com a dinâmica que o modelo cosmológico fornece para o nosso Universo. Um Universo com $\Omega_0 \approx 10^{16}$, seria fechado e teria um tempo máximo de vida que seria apenas uma pequena fracção da idade actual do nosso Universo. Considerando a idade máxima do Universo, fornecida pelo modelo de Friedmann, para $k=1$ e para épocas dominadas por matéria, expressa como função dos valores actuais dos parâmetros de desaceleração, $q_0 = \Omega_0/2$, e de Hubble, H_0 ,

$$t_{max} = \frac{2\pi q_0}{(2q_0 - 1)^{3/2}} \frac{1}{H_0} = \frac{\pi \Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \frac{1}{H_0} \quad (3.11)$$

para a densidade de monopólos, atrás obtida, o Universo teria um tempo máximo de vida,

$$t_{max} \approx \frac{\pi}{H_0 \sqrt{\Omega_0}} \approx 10^2 \text{ anos} \quad (3.12)$$

Várias tentativas têm sido feitas para detectar monopólos, mas, até hoje, nenhuma delas teve sucesso. Este problema, da excessiva produção de monopólos, associada às transições de fase GUT, constituiu um dos principais estímulos, que deram origem aos modelos cosmológicos inflacionários.

3.5- O problema da planura

A equação de campo, (1.35),

$$\frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad (3.13)$$

pode ser expressa em termos do parâmetro de densidade, $\Omega = \rho/\rho_c$, onde, relembramos, a densidade crítica ρ_c é a densidade de um Universo plano ($k=0$), (1.58),

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad (3.14)$$

Então,

$$\frac{kc^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Omega - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{kc^2}{R^2} = (\Omega - 1) \frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad (3.16)$$

Esta equação evidencia que se $\Omega=1$, então $k=0$, isto é, o Universo é plano. O factor $\Omega-1$ pode, então, ser entendido, como o grau de planura do Universo, na medida em que nos indica quanto o parâmetro de densidade difere da unidade.

Como, no Universo dominado pela radiação, $R = A t^{1/2}$, (1.106) com $A = R_0/t_0^{1/2}$,

$$\dot{R}^2 = A^2 \frac{1}{4t} \quad (3.17)$$

e, portanto,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{1}{4t^2} \quad (3.18)$$

Usando (3.18), podemos escrever (3.16) como,

$$\frac{kc^2}{R^2} = (\Omega - 1) \frac{1}{4t^2} \quad (3.19)$$

Para a época actual, (3.16) fica,

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = (\Omega_0 - 1) H_0^2 \quad (3.20)$$

A razão entre (3.19) e (3.20) permite-nos escrever

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega_0 - 1} = 4t^2 H_0^2 \frac{R_0^2}{R^2} \quad (3.21)$$

Usando (2.32), lembrando que $R \propto T^{-1}$ e considerando os valores actuais, $T_0 \approx 3 \text{ K} \approx 2,6 \times 10^{-13} \text{ GeV}$, $H_0 = 100 h_0 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3,2 \times 10^{-18} h_0 \text{ s}^{-1}$, obtemos de (3.21),

$$\Omega - 1 = 3,5 \times 10^{-21} \text{ GeV}^2 h_0^2 g^{-1} T^{-2} (\text{GeV}) (\Omega_0 - 1) \quad (3.22)$$

Esta expressão permite-nos comparar o grau de planura do Universo em qualquer época com o grau de planura actual. Para $T = T_{\text{GUT}} \approx 10^{15} \text{ GeV}$, $g_{\text{GUT}} \approx 100$,

$$\Omega_{\text{GUT}} - 1 = 3,5 \times 10^{-53} h_0^2 (\Omega_0 - 1) \quad (3.23)$$

Considerando os valores actuais de Ω_0 , $|\Omega_0 - 1|$ nunca será superior a um, e como tal, Ω_{GUT} difere da unidade apenas de 10^{-53} , o que representa uma surpreendente proximidade da densidade crítica. Encarando estes dados de forma inversa, constatamos que qualquer pequeníssimo afastamento de Ω , em t_{GUT} , da unidade, conduziria a valores

actuais absolutamente incompatíveis com os observados. O Universo poderia inclusive, já ter colapsado muito antes de atingir a idade actual. O desvio permitido relativamente à unidade, é tanto menor quanto mais nos aproximamos da origem; considerando, por exemplo, a época de Planck, $T=T_p \approx 10^{19}$ GeV, obtém-se $\Omega_p - 1 \approx 10^{-61} h_0^2 (\Omega_0 - 1)$.

Esta característica do modelo padrão, que obriga o Universo, ao longo dos tempos, a tão grande proximidade da planura, constitui o que denominamos problema da planura. De facto, o modelo não pode explicar a razão para este facto, o qual aparece como resultado de fazermos recuar até épocas primordiais a resolução das equações diferenciais de Einstein, partindo dos dados actuais. Será, portanto, natural encontrarmos determinadas valores que constituam as condições iniciais do modelo e que sejam responsáveis pelo estado actual do Universo [Börner, 1993, p.275]. A explicação em termos de processos físicos dos motivos que obrigam à planura do Universo é conseguida através dos modelos inflacionários, que veremos a seguir.

Capítulo 4

INFLAÇÃO

4.1-Introdução

Os problemas inerentes ao modelo cosmológico padrão parecem requerer que em algum momento da evolução do Universo muito jovem, a sua dinâmica se tenha alterado durante um certo período de tempo, após o qual, terá retomado a expansão fornecida pelo modelo padrão. Em 1980, A. Guth propôs uma dinâmica caracterizada por uma expansão exponencial do factor de escala $R(t)$, que designou por *inflação*. O modelo de Guth foi rapidamente substituído por novas alternativas que, mantendo a ideia base de uma expansão exponencial, eliminaram alguns dos problemas do modelo inicial. Todos os modelos inflacionários recorrem a um mecanismo em que um campo escalar φ – um campo de Higgs – evolui a partir de um estado instável de falso vácuo até ao vácuo verdadeiro (estado fundamental). Se a evolução de φ ocorrer de forma a que a energia do Universo, e conseqüentemente, a taxa de expansão, se mantenha quase constante, a expansão dá-se exponencialmente. Exemplificando para o caso de um Universo plano, vemos que, se a densidade de energia for quase constante, o parâmetro de Hubble também o será,

$$H = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho \right)^{1/2} \approx \text{constante} \quad (4.1)$$

de modo que,

$$R(t) = R_i \exp\left[\int_{t_i}^t H dt\right] \approx R_i \exp[H(t - t_i)] \quad (4.2)$$

com o índice i representando o início da inflação; o período de inflação termina quando a densidade de energia começa a diminuir rapidamente, a energia do vácuo é, então, transformada em energia térmica que reaquece o Universo, prosseguindo a expansão do modo previsto pelo modelo padrão.

No modelo de Guth, a inflação ocorre ligada a uma transição de fase de segunda ordem, na qual o estado fundamental do campo φ se altera. O Universo parte de um estado $\varphi(T_i)=0$, ao qual, para a temperatura T_i , corresponde um mínimo estável do potencial associado ao campo, $V(\varphi_i)$. Quando a temperatura desce até valores $T \ll T_p$, surgem novos mínimos do potencial e o verdadeiro vácuo passa a corresponder, não a $\varphi_i=0$, mas a um novo valor $\varphi_f \neq 0$ (ver figura 4.1). Como uma barreira de potencial separa o mínimo local em $V(\varphi_i)$ do vácuo verdadeiro $V(\varphi_f)$, a transição pode não ocorrer imediatamente, permanecendo o Universo no falso vácuo, num estado de sobrearrefecimento, durante o qual, enquanto não ocorrer o tunelamento através da barreira de potencial, pelo qual se atinge o estado fundamental, o falso vácuo dispõe de uma quantidade de energia quase constante, que permite a inflação. A expansão exponencial termina (localmente) quando em determinada região se atinge o vácuo verdadeiro. A transição de fase vai-se estendendo a todo o Universo através da formação de bolhas da nova fase, com $\varphi = \varphi_f$ que, após a inflação, podem seguir a evolução descrita pelos modelos de Friedmann.

A par da expansão inflacionária, ocorre um grande arrefecimento do Universo prevendo o modelo que, através da colisão entre as bolhas, se redistribuísse a energia, o que reaqueceria o Universo. No entanto, este mecanismo não funciona, já que a rápida expansão nas regiões exteriores às bolhas – que continuam na fase $\varphi=0$ – não permite que estas se encontrem. Deste modo, o Universo permaneceria para sempre num estado altamente não homogêneo e anisotrópico, incompatível com os dados fornecidos pela observação [Linde, 1990, p.37], [Guth, 1994, p.45].

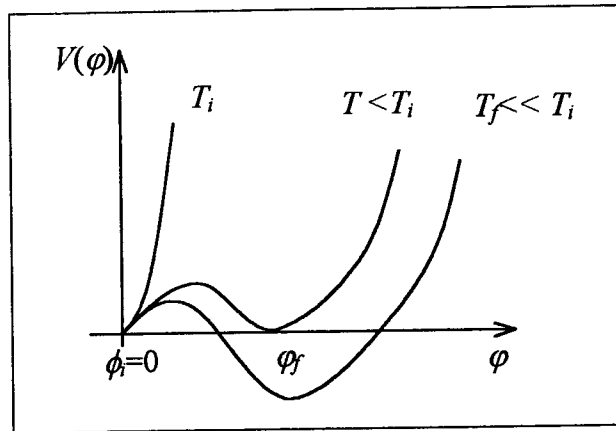


Figura 4.1- Curva de potencial para o modelo de Guth.

Para tentar solucionar este problema, mantendo os sucessos que a inflação prometia, A. Linde e, independentemente, A. Albrecht e P. Steinhardt apresentaram, em 1981, um modelo que ficou conhecido por *nova inflação* o qual também considera uma transição de fase (de primeira ordem), só que agora sem barreira de potencial entre o falso vácuo $V(\varphi_i=0)$ e o vácuo verdadeiro $V(\varphi_f \neq 0)$. Oscilações quânticas podem perturbar o falso vácuo em pequenas regiões do Universo, bolhas de dimensões $l \approx H^{-1}$ [Guth, 1992, p.10], iniciando-se uma lenta evolução até se atingir o mínimo do potencial. Se a curva de potencial for escolhida de forma a que na proximidade do falso vácuo se apresente quase plana, enquanto a evolução de φ ocorrer nessa zona a energia mantém-se quase constante, originando uma expansão exponencial, que termina quando se atinge o verdadeiro vácuo (φ_f) (ver figura 4.2). As regiões do Universo onde ocorre esta transição de fase, num período de tempo da ordem $\tau \approx 10^{-34}$ s, podem expandir-se por um factor $P \approx R_f/R_i \approx 10^{50}$ [Guth, 1994, p.45], suficiente para que apenas uma dessas regiões tenha dado origem ao nosso Universo. O reaquecimento do Universo ocorre então, por meio da colisão de partículas criadas a partir das oscilações do campo em torno do mínimo do potencial.

Este modelo, apesar de ter resolvido a questão da termalização do Universo, continua a apresentar diversos problemas, dos quais se destacam a rigidez dos limites que ele impõe a diversos parâmetros (que dificilmente decorrem de maneira natural das teorias da física de partículas) e a dificuldade de um campo, com as características que o

modelo impõe, se encontrar em equilíbrio térmico nas épocas em que se espera começar a inflação [Linde, 1990, p. 38; Guth, 1994, p.52].

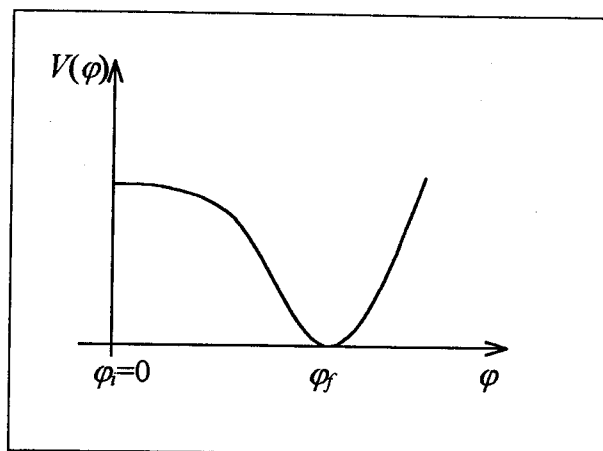


Figura 4.2- Curva de potencial na nova inflação.

Na tentativa de solucionar alguns destes problemas, em 1983, Linde propôs outro modelo denominado *inflação caótica* e no qual mostra que, sem recorrer a qualquer transição de fase, é possível, a partir de um estado altamente não homogêneo do Universo, que, pequenas regiões, onde surgem condições adequadas, inflacionem expandindo-se até dimensões capazes de compreender todo o Universo observável. Dedicaremos a próxima secção ao tratamento um pouco mais pormenorizado deste modelo.

4.2- Inflação caótica

O modelo caótico de Linde considera que, antes do período inflacionário, o Universo se encontra num estado caótico, altamente não homogéneo, onde os valores dos campos de Higgs apresentam grandes flutuações. Deste modo, o modelo evita os limites rígidos e tão pouco naturais, que os modelos anteriores impõem como condições iniciais para todo o Universo. No modelo caótico, para ocorrer inflação, basta que, em certas bolhas do espaço-tempo, possam surgir condições que permitam uma expansão exponencial dessas regiões. Cada uma das bolhas, causalmente desligada das restantes, evolui isoladamente, como resultado das condições iniciais que nela surgiram. Altera-se, assim, a ideia de uma evolução única do universo como um todo e passa-se a admitir a existência de diferentes “universos”, que evoluem isoladamente, expandindo-se a diferentes taxas. O nosso Universo (por nós denotado em maiúscula) será o resultado da evolução de uma dessas bolhas, onde surgiram condições que permitiram que, durante um pequeníssimo intervalo de tempo, uma evolução inflacionária tenha originado um Universo com as propriedades com que hoje o conhecemos. O domínio observável será, assim, apenas um dentre um número indefinido de bolhas das quais nunca saberemos nada.

Consideremos, então, o universo de bolhas preenchido por um campo escalar clássico φ , com uma distribuição aleatória e analisemos quais as condições iniciais com as quais é possível obter inflação em determinadas bolhas. Como, antes da era de Planck, $t < t_P$, o Universo não pode ser descrito classicamente, se desejarmos estabelecer as condições iniciais para a distribuição de um campo φ numa geometria espaço-temporal clássica, o primeiro instante da evolução cósmica em que poderemos fazê-lo será em $t = t_P$. Uma vez que, pelo Princípio de Heisenberg, nessa época, a densidade de energia – que depende da variação espaço-temporal do campo φ e do potencial $V(\varphi)$ a ele associado – só pode ser conhecida com uma precisão da ordem de M_P^4 ($\Delta\rho = \Delta E / (\Delta\ell)^3 \geq \Delta t^{-4} = M_P^4$, $M_P = G^{-1/2} \approx 10^{19}$ GeV)*, as condições iniciais mais naturais, para a distribuição de φ no universo de bolhas, parecem ser:

* Usaremos, neste Capítulo, $c = \hbar = 1$.

$$\partial_0 \varphi \partial^0 \varphi \approx M_p^4 \quad (4.3)$$

$$\partial_i \varphi \partial^i \varphi \approx M_p^4 ; i=1,2,3 \quad (4.4)$$

$$V(\varphi) \approx M_p^4 \quad (4.5)$$

[Linde, 1990, p.41]. $V(\varphi)$ poderá ser qualquer potencial que, para $\varphi \geq M_p$, seja dado por

$$V(\varphi) = \frac{\lambda \varphi^n}{n M_p^{n-4}} \quad (4.6)$$

com $n > 0$ e $0 < \lambda \ll 1$. Esta escolha destina-se a assegurar que, quando φ variar lentamente no tempo, a variação do potencial seja suficientemente lenta para permitir a inflação.

Como em $t \approx t_p$, o horizonte tem o tamanho mínimo que pode ser tratado classicamente, $l \approx H^{-1} \approx M_p^{-1}$, será esta a dimensão inicial típica das bolhas, para as quais iremos considerar a hipótese de uma evolução inflacionária. Se uma destas bolhas iniciar uma expansão exponencial, nenhum sinal vindo do exterior poderá afectar a sua evolução, já que, como vimos no caso do modelo de de Sitter, num espaço que se expande exponencialmente, existe um horizonte de eventos que impede qualquer comunicação com o exterior. Assim, a evolução destas regiões, causalmente desligadas pode prosseguir isoladamente, obedecendo apenas às condições físicas do interior de cada uma delas.

Uma vez que, em $t \approx t_p$, o campo φ obedece à condição inicial (4.4), numa região de tamanho $l \approx M_p^{-1}$, as flutuações espaciais do seu valor inicial, $\varphi_p \equiv \varphi(x, t_p)$, são $\Delta \varphi_p \approx M_p^2 l \approx M_p$. Considerando em (4.6) o caso particular $n=4$, que adoptaremos daqui em diante, vem:

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4} \varphi^4, \quad 0 < \lambda \ll 1 \quad (4.7)$$

e, uma vez que, de acordo com as condições iniciais escolhidas, $V(\varphi_p) \approx M_p^4$, o valor inicial do campo será $\varphi_p \approx \lambda^{-1/4} M_p \gg M_p$, apesar da distribuição de φ apresentar largas flutuações em cada bolha de dimensão $l \approx M_p^{-1}$, o campo é quase uniforme:

$\Delta\varphi_p \approx M_p \ll \varphi_p$. A dimensão destas bolhas permite-nos considerar cada uma delas como suficientemente homogénea e isotrópica, de modo a podermos tratá-la como um espaço de Friedmann local, com uma evolução descrita pela equação de campo, (1.35):

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3M_p^2} \rho \quad (4.8)$$

onde ρ , de acordo com a teoria de campos mais simples que acopla um campo φ à gravitação, é dado por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi) \quad (4.9)$$

[Roos, 1996, p.167].

A evolução de φ é descrita pela equação de Klein-Gordon, que, num espaço em expansão, toma a forma:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\Delta\varphi}{R^2} = -V'(\varphi) \quad (4.10)$$

onde Δ é o operador Laplaciano e $V'(\varphi) = dV/d\varphi$ [Linde, 1990, p.44].

Como já vimos que, no interior de cada bolha, o campo φ é uniforme, podemos desprezar as variações espaciais nas equações (4.9) e (4.10). Por outro lado, como numa expansão inflacionária, R cresce muito rapidamente, o termo de curvatura k/R^2 , presente em (4.8), pode ser desprezado. Se, além disso, a variação de φ no tempo for suficientemente lenta para que $\dot{\varphi}^2/2 \ll V(\varphi)$ e $\ddot{\varphi} \ll V'(\varphi)$, as equações (4.8) e (4.9) ficam, respectivamente,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_p^2} V(\varphi) \quad (4.11)$$

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi) \quad (4.12)$$

Veremos, de seguida, como a resolução do sistema de equações constituído por (4.11) e (4.12) fornece uma evolução exponencial das bolhas que temos vindo a considerar. Substituindo (4.11) e (4.7) em (4.12), obtemos

$$\dot{\varphi} = -\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} M_P \varphi \quad (4.13)$$

donde:

$$\varphi = \varphi_P \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} M_P (t - t_P)\right] \quad (4.14)$$

Conhecendo a forma como φ evolui no tempo, fornecida pela equação (4.14), podemos a partir de (4.11) obter a solução $R(\varphi(t))$. Substituindo (4.7) em (4.11) e integrando,

$$\int_{R_P}^R \frac{1}{R} dR = \left(\frac{2\lambda}{3} \frac{\pi}{M_P^2}\right)^{1/2} \int_{t_P}^t \varphi^2 dt \quad (4.15)$$

Como $\varphi(t)$ é dado por (4.14), vem:

$$\begin{aligned} \int_{t_P}^t \varphi^2 dt &= \int_{t_P}^t \varphi_P^2 \exp\left[-2\left(\frac{\lambda M_P^2}{6\pi}\right)^{1/2} t\right] dt = \\ &= \left(\frac{3}{2\lambda} \frac{\pi}{M_P^2}\right)^{1/2} \left[\varphi_P^2 - \varphi(t)^2\right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

que, levada em (4.15), fornece

$$R = R_P \exp\left[\frac{\pi}{M_P^2} (\varphi_P^2 - \varphi(t)^2)\right] \quad (4.17)$$

Esta última equação descreve a expansão de uma pequena região do Universo, de dimensão inicial $l \approx M_p^{-1}$, onde surgiu um campo φ uniforme, $\Delta\varphi \ll \varphi_p$, quase estacionário, $\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$, e com valores iniciais elevados, $\varphi_p \gg M_p$, de tal modo que foi possível descrevê-la como um espaço de Friedmann, onde a densidade de energia, $\rho \approx V(\varphi)$, decresce de forma suficientemente lenta no tempo para que a expansão ocorra a uma taxa quase constante. Nestas condições, a região em questão expande-se exponencialmente e, como já referimos, independentemente das demais bolhas. Concluimos deste modo que, a partir de um estado caótico, descrito pelas condições iniciais (4.3)-(4.5), é possível que nalgumas bolhas do espaço-tempo, surjam as condições para uma evolução inflacionária, obedecendo à equação (4.17). Contudo, é ainda necessário investigarmos quando termina a expansão exponencial, já que, para que possamos considerar o nosso Universo como resultado da evolução de uma das bolhas que inflacionaram, temos que admitir que, após o período inflacionário, a expansão retomou a sua forma “normal”, descrita pelo modelo padrão.

Como a expansão exponencial descrita pela equação (4.17) resulta de termos considerado que $\dot{\varphi}^2 / 2 \ll V(\varphi)$, a variação de φ no tempo deixa de ser desprezável quando $\dot{\varphi}^2 / 2 \approx V(\varphi)$ e a aproximação segundo a qual considerámos que a densidade de energia é dada apenas por $V(\varphi)$ perde, então, a validade, terminando a inflação. A partir das equações (4.11) e (4.12), vemos que

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{M_p^2}{48\pi V(\varphi)} V'^2(\varphi) \quad (4.18)$$

Considerando o potencial $V(\varphi) = \lambda\varphi^4 / 4$, fornecido por (4.7), $V'^2(\varphi) = 16V^2(\varphi) / \varphi^2$, que, levado em (4.18), fornece

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{M_p^2}{3\pi\varphi^2} V(\varphi) \quad (4.19)$$

Então, $\dot{\varphi}^2 / 2 \approx V(\varphi)$, quando $\varphi \approx \varphi_p \approx M_p / 3$. Como o valor inicial do campo é $\varphi_p \approx \lambda^{-1/4} M_p$, a inflação ocorre enquanto a diminuição de φ ocorrer no intervalo $M_p / 3 < \varphi < \lambda^{-1/4} M_p$ (ver figura 4.3). Quando φ atinge o limite $M_p / 3$, o campo começa a

oscilar em torno do mínimo de potencial $V(\varphi=0)$ e, como resultado dessas oscilações, são criadas partículas, que, ao colidirem entre si, redistribuem a energia, conduzindo o Universo a um estado de equilíbrio térmico de alta temperatura. Este processo de conversão da energia do campo em energia térmica aquece o Universo rapidamente, desde as baixas temperaturas a que a expansão exponencial o conduziu até uma temperatura elevada, que, no modelo $V(\varphi) = \lambda\varphi^4/4$, não excederá $T \approx 10^{14}$ GeV [Linde, 1990, p.55].

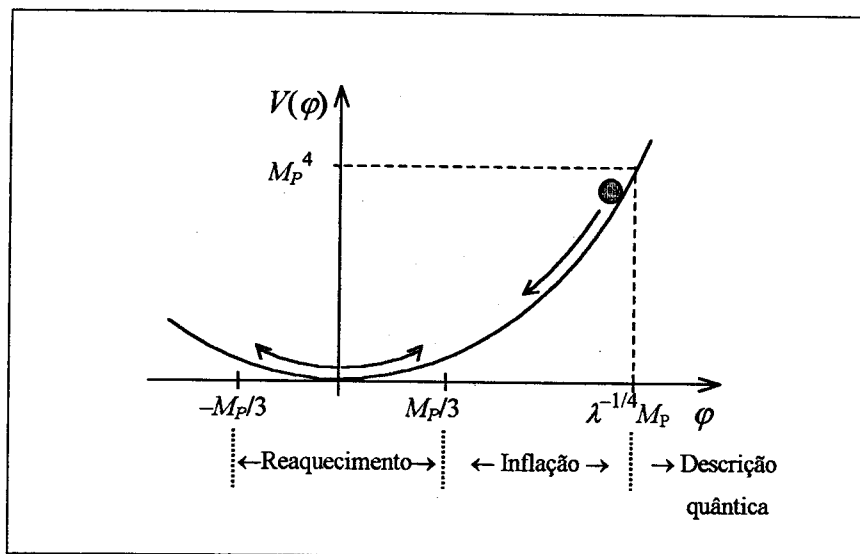


Figura 4.3 – Evolução do campo φ no modelo inflacionário caótico. As setas representam o sentido da evolução de φ no decorrer do tempo. Inicialmente a diminuição de φ ocorre lentamente e o Universo expande-se exponencialmente. Quando atinge a proximidade do mínimo de potencial, o campo oscila rapidamente, reaquecendo o Universo [Adaptado da Figura 5 de Linde, 1996, p.46].

Limites impostos pela teoria de formação de galáxias à amplitude das flutuações de densidade implicam que os valores de λ sejam extremamente pequenos, $\lambda \approx 10^{-12} - 10^{-14}$ [Linde, 1990, p.53]. Os valores iniciais do campo serão, então, $\varphi_p \approx \lambda^{-1/4} M_p \gg M_p$ e, portanto, $\varphi_p \gg \varphi_f \approx M_p$, o que nos permite desprezar φ_f em (4.17). Assim, depois da inflação, a bolha de dimensões $l \approx l_p$ ter-se-á expandido por um factor

$$P = \frac{R}{R_p} = \exp\left[\frac{\pi}{M_p^2} \varphi_p^2\right] = \exp\left[\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right] = 10^{10^6}, \quad (4.20)$$

adquirindo uma dimensão

$$L = P \times \ell_p = 10^{10^6} \times 10^{-33} \text{ cm} \approx 10^{10^6} \text{ cm}$$

(muito superior à parte observável do nosso Universo actual, $R_0 \approx 10^{28}$ cm).

Tomando os valores $\varphi_p \approx \lambda^{-1/4} M_p$ e $\varphi_f \approx M_p/3$ em (4.14), podemos determinar o período de tempo em que ocorre a inflação, $\tau = t_f - t_p$:

$$\frac{\varphi_p}{\varphi_f} = \exp\left[\left(\frac{\lambda}{6\pi}\right)^{1/2} M_p \tau\right]$$

$$\tau \approx \left(\frac{6\pi}{\lambda}\right)^{1/2} M_p^{-1} \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) \approx 10^{-35} \text{ s} \quad (4.21)$$

Deste modo, se, em determinadas regiões do Universo, surgirem as condições aqui consideradas (segundo Linde, a probabilidade de tal ocorrer num Universo com as condições iniciais (4.3)-(4.5) não será muito inferior à unidade [Linde, 1990, p.246]) é possível que, durante o período de tempo $\tau \approx 10^{-35}$ s, estas se expandam por um factor $P = 10^{10^6}$, adquirindo um tamanho muitas vezes superior às dimensões actuais do nosso Universo. Uma dessas bolhas poderá ter estado na origem do nosso Universo.

4.3- Solução dos problemas do modelo padrão

O aumento exponencial do factor de escala durante a inflação fornece uma solução para algumas das questões que permanecem sem resposta, no contexto estrito do modelo padrão, como os problemas da planura, do horizonte ou dos monopólos.

Como, durante a inflação, na equação (4.8) o termo H^2 varia muito lentamente, enquanto kR^2 diminui exponencialmente, tendendo rapidamente para zero, a diferença entre a geometria do Universo e a de um espaço plano também diminui exponencialmente. Assim, tal como uma esfera que, ao ser largamente expandida, se apresenta plana numa pequena escala relativamente à sua dimensão, depois da inflação, como a dimensão do Universo é muito superior à sua parte observável, para qualquer observador local, a geometria não pode diferir de uma geometria plana. Então, como durante a inflação, $k \rightarrow 0$, independentemente do seu valor inicial, a densidade do Universo tende rapidamente para a densidade crítica e no final da inflação teremos $\Omega=1$. A planura do Universo surge, assim, não como uma estranha condição inicial, mas como uma consequência natural de um processo físico que ocorre em certo momento da sua evolução.

Além disso, como nos modelos inflacionários o Universo tem origem numa região causalmente ligada, a homogeneidade da parte observável do Universo aparece como um facto natural, resultante da existência de ligações causais entre regiões separadas por distâncias muitas ordens de grandeza superiores ao horizonte. No modelo padrão, regiões separadas por distâncias superiores ao horizonte, encontram-se causalmente desligadas, aparecendo como um facto estranho que nelas surjam as mesmas temperaturas e que se desencadeiem simultaneamente os mesmos processos físicos. No entanto, a inflação, ao expandir exponencialmente o Universo, varre, para além do horizonte, regiões causalmente ligadas que, antes dessa expansão, faziam parte da nossa bolha, justificando, assim, o grau de homogeneidade que hoje observamos no nosso Universo.

A inflação resolve ainda o problema dos monopólos ou de quaisquer outros defeitos topológicos produzidos antes ou durante a inflação, uma vez que a expansão inflacionária diminui exponencialmente a sua densidade. A temperatura à qual o Universo é reaquecido após a inflação é determinante na solução deste problema, pois,

em algumas teorias, T_r pode ser superior à temperatura à qual se prevê a formação destas partículas, mantendo-se o problema por resolver. No modelo caótico, dependendo da escolha para $V(\varphi)$, o Universo pode ser reaquecido a temperaturas $T_r \approx 10^{14}$ GeV ou muito inferiores [Linde, 1990, p.55], o que permite a resolução do problema dos monopólos, mas dificulta a explicação da bariossíntese.

Uma vez que qualquer assimetria matéria-antimatéria anterior à inflação é diluída pela expansão exponencial, a bariossíntese tem que ocorrer posteriormente a este período. Como o decaimento das partículas X ocorre a temperaturas superiores à temperatura de reaquecimento da inflação caótica, $T_r \approx 10^{14}$ GeV, no contexto deste modelo, este mecanismo não pode explicar a assimetria observada. No entanto, algumas teorias prevêem a possibilidade de a bariossíntese ocorrer a temperaturas menores em processos que ocorrem durante o reaquecimento ou mesmo a temperaturas mais baixas, da ordem $T \approx 10^2$ GeV [Linde, 1990, p.55].

Capítulo 5

MATÉRIA ESCURA

5.1- O que é a matéria escura?

No modelo cosmológico padrão, a densidade do Universo é um factor determinante na forma como este evolui, pois, dependendo do seu valor, o Universo poderá expandir-se eternamente ou colapsar, depois de um período inicial de expansão. Assim, só o exacto conhecimento da densidade do Universo nos poderá informar acerca do seu futuro e da forma como decorreu a sua evolução até à época actual. No entanto, o nosso conhecimento da densidade do Universo é muito limitado, uma vez que a única forma directa de detecção da matéria é através da recepção dos fotões por ela emitidos e, desde há uma década, têm surgido fortes evidências de que, além da matéria visível, deverá existir no Universo uma quantidade significativa de matéria não luminosa. Sobre a densidade exacta e a constituição dessa *matéria escura* quase nada se sabe, mas a sua existência teve que ser postulada para justificar a dinâmica observada em algumas estruturas do Universo e para ajustar a densidade do Universo às previsões das teorias cosmológicas. Verificou-se que a matéria luminosa não existia em densidades capazes de originar os campos gravíticos necessários para explicar as velocidades observadas nos movimentos das estrelas em algumas galáxias e as velocidades das galáxias nos enxames. Concluiu-se, então, que considerando válidas as leis da gravitação a essas escalas, a dinâmica destes objectos só poderia justificar-se se existissem, nos respectivos sistemas, densidades de matéria invisível muito superiores à densidade de

matéria luminosa neles observada. Também as densidades previstas pelos modelos inflacionários e pela teoria da nucleossíntese são largamente superiores à densidade de matéria que se conhece no Universo, fazendo crer que a sua densidade deverá ser superior e que provavelmente, também matéria não bariónica contribuirá para essa densidade.

Como só tem sido possível detectar a matéria escura através da sua acção gravítica, quer através dos seus efeitos na dinâmica dos sistemas, quer através do efeito geométrico de deformação do espaço detectável através dos desvios que provoca nos raios luminosos, a sua constituição permanece completamente desconhecida. Algumas hipóteses têm apontado ou para diferentes tipos de partículas não bariónicas, ou para distribuições de hidrogénio ou para objectos compactos, mas nenhuma das inúmeras tentativas no sentido de as confirmar esclareceu qual a constituição da matéria escura.

Deste modo, não é de estranhar que o problema da matéria escura constitua uma das mais importantes questões em investigação na cosmologia actual, pois não só a resposta a se vivemos num Universo aberto, fechado ou plano, não pode ser dada até se conhecer com exactidão qual a contribuição da matéria escura para a densidade total, como também a constituição e a estrutura do Universo permanecem completamente desconhecidas até que as experiências e observações em curso possam determinar qual a forma em que esta matéria escura se encontra e como ela se distribui pelo Universo.

5.2- Evidências da existência de matéria escura

5.2.1- Argumentos cosmológicos

Como vimos, o modelo padrão fornece três possíveis tipos de evolução do Universo, dependentes da sua constante de curvatura ($k = +1, 0$ ou -1), a qual é determinada pela densidade de energia do Universo ($\Omega_0 > 1, = 1$ ou < 1 , respectivamente). No entanto, um dos problemas deste modelo, o problema da planura, é a surpreendente aproximação da densidade crítica, quando recuamos para épocas cada vez mais remotas, o que parece apontar para que o Universo tenha, inexplicavelmente, surgido com $\Omega_0 = 1$. Esta questão tem sido tratada pelos modelos inflacionários, onde a planura aparece como uma consequência natural do período de expansão exponencial. Uma vez que a inflação resolve não só o problema da planura, directamente relacionado com a densidade do Universo, mas também porque fornece soluções para diversas outras questões, às quais o modelo padrão não pode dar resposta, ela é um poderoso argumento teórico para que consideremos seriamente a hipótese de $\Omega_0 = 1$, optando, assim, por uma curvatura nula do Universo e pela expansão eterna, fornecida pelo modelo padrão, para este caso.

A nucleossíntese primordial fornece densidades de elementos leves, sensíveis à densidade de matéria bariónica do Universo, o que, a partir dos dados observacionais para a densidade de hidrogénio primordial, permite estimar uma densidade bariónica actual, $1,5 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3} \leq \rho_{0 \text{ bar}} \leq 4,5 \times 10^{-31} \text{ g cm}^{-3}$, a que correspondem, para o parâmetro de densidade, $\Omega_{0 \text{ bar}} = \rho_{0 \text{ bar}} / \rho_c$, os limites $0,008 h_0^{-2} \leq \Omega_{0 \text{ bar}} \leq 0,024 h_0^{-2}$ ($\rho_c = 3H_0^2 / 8\pi G = 1,88 \times 10^{-29} h_0^2 \text{ g cm}^{-3}$). Embora o valor da constante de Hubble não se encontre determinado com exactidão, os astrónomos concordam com valores $0,5 < h_0 < 0,8$, para os quais a densidade bariónica actual se situará entre 1% a 10% do valor crítico ($0,013 \leq \Omega_{0 \text{ bar}} \leq 0,096$) [Turner, 1996, p.33; Dodelson, 1996, p.69]. Como as observações fornecem para a densidade de matéria luminosa valores, $\Omega_{0 \text{ lum}} = 0,003 h_0^{-2}$ [Turner, 1996, p.33] ($0,005 \leq \Omega_{0 \text{ lum}} \leq 0,012$, aceitando $0,5 < h_0 < 0,8$), largamente inferiores, quer à previsão dos modelos inflacionários, quer aos valores que permitem a consistência entre os dados observacionais, para a densidade de hidrogénio

primordial e as previsões da nucleossíntese, teremos que admitir que grande parte do conteúdo do Universo seja matéria escura.

Sendo a densidade de matéria luminosa inferior à densidade bariónica prevista pela nucleossíntese, podemos concluir que, algures no Universo, deverá existir matéria bariónica não luminosa. Por outro lado, como a densidade de matéria bariónica consistente com a nucleossíntese é muito inferior ao valor crítico, previsto pela inflação, a maior contribuição para a matéria total do Universo será de matéria escura não bariónica. A inferência da existência de matéria escura não bariónica, resultante de considerarmos $\Omega_0=1$, pode parecer um tanto precipitada, uma vez que a inflação é um modelo para o qual não dispomos, até ao momento, de nenhuma validação observacional directa. A hipótese de existência de matéria escura não bariónica é, no entanto, apoiada por alguns dados observacionais, obtidos através da medição da velocidade das galáxias nos enxames, que fornecem para a densidade total do Universo valores $\Omega_0 \geq 0,3$, superiores à densidade de matéria bariónica.

Também a teoria de formação de estruturas (assunto de que não nos ocuparemos neste trabalho) parece necessitar densidades superiores à da matéria luminosa, com larga contribuição de matéria não bariónica. Os modelos computacionais para a simulação da formação de estruturas necessitam da contribuição da matéria escura para conseguirem reproduzir as características que observamos no nosso Universo. As flutuações na radiação de fundo, necessárias para o aparecimento de estruturas, deverão apresentar amplitudes muito superiores às existentes, se apenas existir matéria bariónica, o que parece resolver-se se formas de matéria escura não bariónica contribuírem de forma dominante para a densidade total [Longair, 1995, p.460].

Ao longo desta secção, vimos que existem vários motivos, decorrentes das teorias cosmológicas, que apontam para a existência de matéria no Universo, da qual não temos conhecimento directo. Parte dessa matéria poderá ser constituída por bariões, tal como a que nos é familiar, mas a julgar pelos argumentos apresentados, será constituída maioritariamente por partículas não bariónicas, além de formas ainda por descobrir, não havendo qualquer garantia da existência de alguma forma de matéria não bariónica massiva.

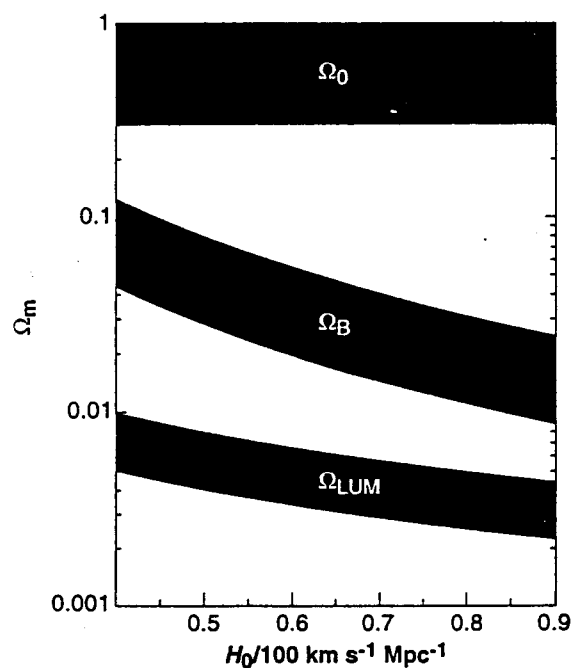


Figura 5.1- Resumo do conhecimento de Ω_0 . A banda Ω_{LUM} refere-se à matéria luminosa; na banda Ω_B temos a previsão da nucleossíntese para a densidade de matéria bariônica; o limite inferior da banda Ω_0 é uma estimativa da densidade de matéria total, obtida através da observação das velocidades das galáxias nos enxames sendo o limite superior a previsão dos modelos inflacionários [Turner, 1997, p.70].

5.2.2- Evidências mecânicas

Além dos argumentos teóricos que, como vimos, sugerem a existência de matéria escura no Universo, também os resultados observacionais da cinética de objectos luminosos mostram que os campos gravíticos responsáveis pelos seus comportamentos devem ser muito mais fortes que os que a matéria visível poderia causar. Assim, a dinâmica de estrelas e de nuvens de gás no interior das galáxias ou a dinâmica de galáxias em enxames, constituem a mais directa evidência da existência de elevadas densidades de matéria escura no Universo.

Iremos, a seguir, apresentar alguns dos métodos dinâmicos que nos mostram a necessidade de admitir densidades de matéria superiores à visível, tanto nas galáxias espirais como em escalas superiores, no interior de grandes enxames.

5.2.2.1- Curvas de rotação de galáxias espirais

Na maioria das galáxias espirais, as estrelas movimentam-se no plano de um fino disco, em órbitas quase circulares em torno do centro da galáxia. A sua velocidade de rotação, v , para um determinado raio, r , pode ser determinada a partir do desvio Doppler, ao longo da linha dos sinais emitidos, por estrelas ou nuvens de gás interestelar. O registo da velocidade de rotação em função da distância ao centro da galáxia, $v(r)$, permite construir a denominada curva de rotação da galáxia (ver Figura 5.2). Para estimar a contribuição da matéria escura para a massa da galáxia, comparam-se as curvas de rotação assim obtidas, com o modelo teórico que prevê as velocidades de rotação a partir da distribuição de matéria visível.

A luminosidade total de uma galáxia espiral típica, $L_G \approx 10^{11} L_\odot$ (o Sol, uma estrela típica, é vulgarmente usado como referência para massas e luminosidades) não é uniforme ao longo de toda a sua extensão, diminuindo exponencialmente desde a região central, até à zona mais exterior, sugerindo assim, que a matéria se concentre preferencialmente na região central da galáxia. De acordo com a física Newtoniana, para uma massa m , que descreve um movimento circular à distância r do centro da galáxia,

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM(r)}{r^2} \quad (5.1)$$

onde $M(r)$ é a massa da galáxia contida na esfera de raio r . Então, se a massa da galáxia se encontrar quase exclusivamente no núcleo central, de raio r_c , para nuvens de gás ou estrelas da periferia, $r \gg r_c$, onde poderemos considerar $M(r) \approx M(r_c) = \text{constante}$, teremos velocidades de rotação dadas por

$$v \approx \pm \left(\frac{GM(r_c)}{r} \right)^{1/2} \propto \pm r^{-1/2} \quad (5.2)$$

No entanto, as curvas de rotação das inúmeras galáxias espirais já estudadas, apresentam, todas elas, resultados muito diferentes desta previsão teórica. À exceção

da região central, onde, tal como no modelo teórico, a velocidade aumenta rapidamente com a distância ao centro, as velocidades de rotação permanecem constantes, independentemente da distância ao centro da galáxia (Figura 5.2).

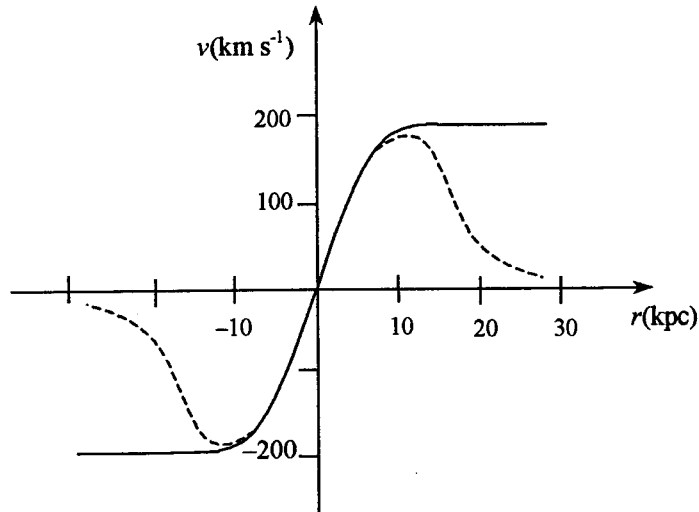


Figura 5.2 – Curva de rotação típica de uma galáxia espiral. A curva a tracejado representa a previsão teórica.

Se $v \approx$ constante, então, de acordo com (5.1),

$$M(r) = \frac{v^2}{G} r \propto r \quad (5.3)$$

e a densidade radial será

$$\rho(r) \propto r^{-2} \quad (5.4)$$

incompatível, portanto, com a diminuição exponencial de luminosidade, observada quando nos afastamos do centro, o que nos leva a concluir que a massa das galáxias não poderá limitar-se à matéria luminosa concentrada no núcleo e que, alguma forma de matéria não luminosa deverá estender-se até distâncias superiores. Para justificar que estrelas ou nuvens de gás mantenham velocidades demasiado elevadas, para que o campo gravítico originado pela distribuição conhecida de matéria luminosa as possa

manter em órbita, é necessário admitir que um halo escuro de densidade comparável à densidade central se estenda para além dos limites visíveis da galáxia. O campo gravítico concordante com as curvas de rotação é cerca de dez vezes superior ao calculado teoricamente. Através deste processo dinâmico têm-se obtido, para a massa total das galáxias, valores típicos $M_G \geq 10^{12} M_\odot$, o que nos fornece uma razão mínima massa/luminosidade, Y_G , da ordem $Y_G = M_G/L_G \approx 10 M_\odot/L_\odot$ [Collins, 1989, p.390], que claramente evidencia que as galáxias não poderão ser essencialmente constituídas por estrelas comuns, emissoras de radiação e que, portanto, alguma forma de matéria escura, de elevado valor M/L , deverá contribuir de forma determinante para a sua massa total. Os patamares das curvas de rotação (Figura 5.2) sugerem que essa matéria se distribua em halos que rodeiam a matéria visível. Um modelo empírico para a densidade radial do halo das galáxias fornece uma distribuição esférica da matéria:

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{1 + r^2/r_c^2} \quad (5.5)$$

onde o raio do núcleo, r_c , e a sua densidade, ρ_c , são parâmetros livres ajustáveis [Tremaine, 1992, p.31]. Obviamente, esta expressão será válida até uma distância máxima, r_{\max} (ou a galáxia teria extensão e massa infinitas), que, a partir da medição das velocidades relativas de pares de galáxias ou da cinética de galáxias satélites, se prevê que seja da ordem $r_{\max} \geq 100$ kpc. Estes métodos são, no entanto, muito pouco precisos – precisão muito inferior à permitida pelas curvas de rotação – fazendo com que, a par do desconhecimento da constituição da matéria que os constitui, também a exacta extensão dos halos das galáxias permaneça ainda indeterminada.

5.2.2.2- Aplicação do teorema do Virial a enxames

Para que um sistema de corpos interagindo graviticamente se mantenha num estado estacionário, sem colapsar ou se espalhar, deve existir um balanço adequado entre a atracção gravitacional dos vários corpos que o constituem e a velocidade dos movimentos destes no interior do sistema. A condição para se atingir o equilíbrio gravitacional é conhecida por Teorema do Virial e relaciona a energia cinética total do sistema, T , com a sua energia potencial gravítica de ligação, U :

$$T = -\frac{1}{2}U. \quad (5.6)$$

Um enxame de massa total M e raio R , terá uma energia potencial:

$$U = -\alpha \frac{GM^2}{R}, \quad (5.7)$$

onde o factor α depende da distribuição de massa do sistema, sendo vulgarmente da ordem da unidade, $1/2 < \alpha < 1$, e uma energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle, \quad (5.8)$$

onde v é a velocidade individual de uma galáxia e $\langle \rangle$ representa o valor médio do quadrado desta grandeza, para as galáxias do enxame. Então, de acordo com o Teorema do Virial,

$$M = \frac{\langle v^2 \rangle R}{\alpha G}, \quad (5.9)$$

expressão que nos permite estimar a massa total do enxame, desde que, por observação, consigamos determinar $\langle v^2 \rangle$ e R . Os valores que a observação fornece para estas grandezas revestem-se, contudo, de grandes incertezas, uma vez que o método utilizado se depara com inúmeras dificuldades [Tayler, 1995, p. 63]. Como a dispersão de velocidades é determinada através dos desvios Doppler dos sinais luminosos enviados pelas galáxias, para se poder determinar as suas velocidades individuais é necessário distinguir o desvio devido ao seu movimento no enxame, do desvio para o vermelho devido à expansão do Universo, ou do desvio associado a um eventual movimento do enxame como um todo. Assim, é necessário determinar o valor médio de z associado ao enxame, $\langle z \rangle$, para que, a partir da diferença entre o desvio individual obtido para cada galáxia e o valor médio, se possa estimar a sua velocidade no enxame. Um outro

problema prende-se com a dificuldade em determinar quais as galáxias que efectivamente pertencem ao enxame, o que novamente se faz recorrendo ao valor de $\langle z \rangle$, mas que origina sempre grandes incertezas na estimativa da massa total, devido à dificuldade de estabelecer os limites além dos quais o afastamento de z relativamente a $\langle z \rangle$ deve conduzir à exclusão das galáxias da estimativa. Também a estimativa de R é algo incerta, pois, a possibilidade de existir matéria escura para além da região visível do enxame mantém a sua exacta extensão desconhecida.

Este método fornece para a massa dos enxames valores da ordem $M_E \approx 10^{15} M_\odot$, a que correspondem razões massa – luminosidade $Y_E \approx 100 Y_\odot - 800 Y_\odot$ [Collins, 1989, p.390] e densidades $\Omega \approx 0,2 - 0,3$ [Tayler, 1995, p.133]. Os valores Y_E são cerca de dez vezes superiores aos obtidos para as galáxias, o que sugere que a matéria escura existente nos enxames não poderá ser atribuída apenas aos halos escuros das galáxias, devendo existir algum tipo de matéria de elevado valor M/L distribuída pelo espaço inter-galáctico dos enxames [Roos, 1996, p.158].

5.2.2.3- Conclusão

Vimos nas anteriores secções dois exemplos de como, através da dinâmica de diferentes sistemas, podemos estimar as suas massas. Os métodos dinâmicos têm fornecido valores que vão desde 2,5 a 7 Y_\odot na vizinhança do sistema solar (obtidos através da medição da velocidade das estrelas perpendicularmente ao plano da Galáxia [Tayler, 1995, p.52; Tremaine, 1992, p.30]), até valores da ordem $10^2 Y_\odot$ para grandes enxames. A tabela 5.1 resume alguns resultados obtidos em diferentes escalas através dos métodos referidos. Todos os resultados obtidos através destes métodos têm demonstrado que a única forma de compatibilizar as teorias dinâmicas com os resultados observacionais recolhidos é admitir a existência de elevadas densidades de matéria escura no Universo.

O comportamento dinâmico de galáxias e enxames constituiu a primeira evidência observacional de que no Universo poderia não existir apenas a matéria de que temos conhecimento, através da sua emissão de radiação, alertando para o problema da matéria escura.

Tabela 5.1 – Estimativas para a massa de diferentes estruturas (em unidades solares) [Börner, 1993, p. 318].

Objecto	M	M/L	M/M_{luminosa}
Grandes enxames	10^{15}	316 ± 40	$8,4^{+7,0}_{-1,0}$
Pequenos grupos dominados por galáxias espirais	2×10^{13}	40^{+50}_{-10}	$14,2^{+36}_{-6}$
Via Láctea	10^{12}	50	14

Apesar das incertezas destes métodos, a comparação entre as suas estimativas e a densidade de matéria visível deixa poucas dúvidas de que elas são, de facto, um forte argumento a favor da existência da matéria escura, uma vez que será pouco provável que valores tão altos de densidade, encontrados em diferentes escalas e através de métodos (dinâmicos) diferentes, possam, todos eles, dever-se a uma sobrestimativa causada pelas incertezas dos métodos.

5.3- Constituição da matéria escura

Como vimos, dispõe-se actualmente de sugestivos argumentos para que a matéria escura seja constituída tanto por matéria bariónica como não bariónica, permanecendo desconhecidas, para ambos os casos, as formas em que ela se apresenta e como se distribui pelo Universo. Apesar de diversas possibilidades terem sido apresentadas, os esforços para a sua confirmação continuam a fornecer resultados pouco esclarecedores. Nesta secção iremos apresentar algumas das hipóteses, actualmente mais populares, para a constituição da matéria bariónica e não bariónica, reservando, para a secção seguinte, a descrição dos esforços que vêm sendo feitos na tentativa de encontrar uma resposta para esta questão.

5.3.1- Matéria bariónica

5.3.1.1- A distribuição do hidrogénio

Em 1970, descobriu-se que os espectros dos quasares apresentavam numerosas linhas escuras, fenómeno que se supõe, desde então, ser o resultado da absorção da radiação proveniente dos quasares por átomos de hidrogénio, através da transição Lyman- α . Embora a absorção ocorra sempre no mesmo comprimento de onda, a passagem da radiação por uma multiplicidade de nuvens de hidrogénio, situadas a diferentes distâncias de nós, provoca uma série de linhas de absorção no espectro, denominada *floresta de Lyman- α* , correspondendo cada uma delas a um diferente desvio para o vermelho.

As linhas da floresta de Lyman- α são tão numerosas que se pensa que um efeito tão acentuado não poderá resultar apenas da passagem da radiação por galáxias e que, portanto, talvez também no meio intergaláctico devam existir nuvens de hidrogénio. Esta questão permanece ainda por resolver, existindo diversas opiniões relativamente à localização das nuvens, algumas associando-as aos halos das galáxias, outras a super-enxames ou mesmo aos “vazios” (*voids*) [Bechtold, 1997, p.32].

A distribuição de hidrogénio em nuvens discretas parece, contudo, não contribuir significativamente para a densidade do Universo, sendo por si só, insuficiente para fornecer a densidade de bariões necessária para compensar o défice existente.

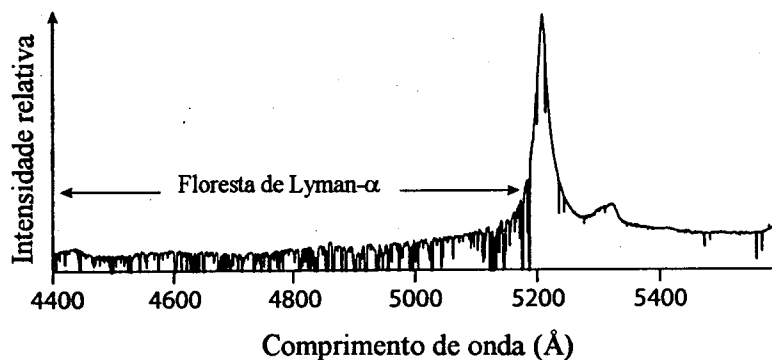


Figura 5.3– Floresta de Lyman- α observada no espectro de um quasar (Q0302-003) em Cetus [Bechtold, 1997, p.30].

Actualmente, várias equipas de rádio-astrónomos procuram detectar hidrogénio neutro tanto no meio intergaláctico como numa espécie de galáxias que se apresentam menos brilhantes que o normal (*low-surface-brightness galaxies*) e que sendo de muito difícil detecção só recentemente foram detectadas em número que parece sugerir que existam com a mesma densidade que a das galáxias normais. Uma das equipas [*Astrophys. J.*, Novembro, 1997, citado em *Science*, Agosto, 1997, p.1201] concluiu que este tipo de galáxias contribui muito pouco para a massa total de hidrogénio neutro; uma outra equipa, procurará, até ao ano 2001, nuvens de hidrogénio neutro no meio intergaláctico, mas os resultados actuais não fornecem grande esperança de que um número significativo venha a ser encontrado.

Recentemente, Arthur Davidsen e Hong Bi [*Astrophys. J.*, Maio, 1997, citado em *Science*, Maio, 1997, p.899] apresentaram uma nova sugestão para a explicação da floresta de Lyman- α que, simultaneamente, fornece uma possível solução para a constituição da matéria escura bariónica. Esta nova hipótese substitui, em todo o espaço intergaláctico, as nuvens discretas por uma distribuição contínua de hidrogénio onde existirão zonas de diferentes densidades. Sujeito à intensa radiação dos quasares, a maior parte do hidrogénio seria ionizado, tornando-se incapaz de absorver ou emitir radiação, o que, por um lado, o torna “transparente” à radiação dos quasares e, por

outro, impossível de detectar através dos rádio-telescópios (o hidrogénio neutro é detectado através da emissão de ondas rádio numa frequência característica). Nas zonas mais densas, existirá hidrogénio neutro em quantidade suficiente para originar uma linha de absorção no espectro dos quasares, tal como as nuvens discretas o fariam, mas as zonas mais ténues da distribuição, onde a quantidade de átomos neutros é muito pequena, não deixarão qualquer impressão. Ao contrário do que acontece com as nuvens discretas, uma distribuição deste tipo, com o espaço intergaláctico preenchido por hidrogénio ionizado, seria suficiente para que se atingissem os valores de densidade bariónica previstos pela nucleossíntese.

Este novo modelo foi testado computacionalmente através da simulação de florestas de Lyman- α obtidas pela passagem da radiação dos quasares por uma distribuição contínua de hidrogénio, fornecendo resultados concordantes com as florestas observadas. Os modelos computacionais para a simulação da formação de estruturas deste tipo fornecem resultados extraordinariamente concordantes com este novo quadro, o que representa uma vantagem relativamente à teoria anterior, uma vez que os modelos computacionais não conseguem reproduzir a formação de nuvens discretas. Apesar de atractiva, esta hipótese está longe de ser consensual: alguns astrónomos argumentam que esta teoria sobrestima a percentagem de ionização do hidrogénio e, conseqüentemente, a densidade de matéria escura bariónica.

Os espectros dos quasares continuam a ser objecto de estudo, nomeadamente no que se refere a riscas de absorção de hélio e de elementos pesados (as quais poderão, por exemplo, fornecer informações sobre os graus de ionização), esperando-se que o melhor conhecimento do fenómeno da floresta de Lyman- α e os resultados da continuação da pesquisa do hidrogénio possam fornecer novos elementos que permitam uma estimativa mais exacta da contribuição do hidrogénio para a densidade bariónica do Universo.

5.3.1.2- Objectos compactos massivos dos halos das galáxias

Uma outra hipótese para a constituição da matéria escura bariónica é ela encontrar-se sob a forma de objectos compactos massivos, situados nos halos das galáxias, que, por serem fracos emissores de radiação electromagnética, são muito difíceis de detectar directamente e, por isso, permanecem ocultos, não contribuindo para as estimativas da densidade de matéria luminosa. Exemplos destes objectos são as

estrelas conhecidas por anãs castanhas, (*brown dwarfs*), com massas $M \leq 0,05M_{\odot}$, demasiado baixas para queimarem hidrogénio em hélio e, portanto, fracas emissoras de luz visível [Longair, 1995, p.461]. Outros objectos, com massas tão diferenciadas como planetas, asteróides, estrelas de neutrões ou buracos negros, podem igualmente contribuir para a densidade de matéria bariónica. Um importante programa para a detecção destes objectos na nossa Galáxia, conhecido por MACHO (*Massive Compact Halo Objects*), foi iniciado em 1993. Actualmente, a tentativa de detecção de objectos compactos, dentro e fora da nossa Galáxia, através da *focalização (lensing)* – uma técnica experimental que descreveremos adiante – é um dos campos de maior actividade na procura de uma solução para o problema da matéria escura.

5.3.2- Matéria não bariónica

A matéria escura não bariónica é vulgarmente classificada em matéria quente ou fria, conforme a velocidade das partículas que a constituem, no momento do seu desacoplamento da restante matéria (bariónica), seja, respectivamente, relativista ou não relativista. As partículas da matéria escura quente, à temperatura a que ocorre o seu desacoplamento, T_d , têm massas $mc^2 \ll kT_d$, desacoplando, portanto, com velocidades altamente relativistas e em densidades próximas da densidade de fótons (densidades fornecidas pela aproximação de alta temperatura ((2.14) e (2.16)), enquanto que as partículas da matéria escura fria, para as quais, $mc^2 > kT_d$, desacoplam com velocidades $v \ll c$ e com densidades largamente inferiores à densidade de fótons, determinadas pelo factor de Boltzmann (de acordo com (2.18)).

Para cada um destes dois tipos de matéria, podemos determinar qual o intervalo de massas que poderá originar $\Omega_0 \approx 1$ e, assim, limitar a procura de candidatos para a matéria escura às partículas cuja massa se situe nos intervalos relevantes, excluindo todas as que, por terem uma contribuição insignificante para a densidade total do Universo ou por originarem densidades tão elevadas, que seriam incompatíveis com os dados observacionais para a idade do Universo (que para $\Omega_0 = 1$ é já desconfortavelmente pequena) não são boas hipóteses para a resolução do problema.

Para a matéria escura quente serão aceitáveis partículas com massas de cerca de 10–100 eV, intervalo para o qual os candidatos mais prováveis serão os neutrinos

massivos. Como veremos na secção dedicada aos neutrinos, a incerteza na determinação deste intervalo deriva do impreciso conhecimento de H_0 e do desconhecimento do número de famílias de neutrinos que poderão ser massivas.

São bons candidatos para a matéria escura fria, partículas com massas $1 \text{ GeV} < m < 10^3 \text{ GeV}$, que interajam fracamente. Os limites impostos dependem das taxas de interacção das partículas, as quais determinam a temperatura do seu desacoplamento e conseqüentemente a densidade de partículas que se obtém. Para as partículas que não se mantêm relativistas até ao desacoplamento, a aniquilação partícula-antipartícula, não compensada pelo processo inverso de criação, impedido pelo facto de $mc^2 > kT_d$, prossegue até ao desacoplamento, diminuindo a densidade da espécie. Os limites para a massa das partículas são, então, obtidos de forma a que o produto da sua massa individual pela densidade de partículas sobreviventes forneça a densidade crítica, dependendo o seu valor dos detalhes das interacções das partículas e do número de estados de spin das mesmas [Tayler, 1995, p.142].

Os candidatos à matéria escura fria podem ainda ser partículas muito leves, que, pela sua dificuldade em interagir com a restante matéria, desacoplam muito cedo podendo até nunca chegar a participar do equilíbrio térmico, nunca chegando, portanto, a atingir velocidades relativistas. O exemplo mais divulgado deste tipo de matéria é o axião, uma partícula com massa entre 10^{-4} e 10^{-6} eV [Turner, 1996, p.35].

De seguida, serão apresentadas algumas das partículas que actualmente se apresentam como possíveis constituintes da matéria escura não bariónica: os neutrinos massivos, como exemplo de matéria escura quente, e as partículas massivas que interagem fracamente, como exemplo de matéria escura fria.

5.3.2.1- Neutrinos massivos

Os neutrinos são os únicos candidatos para a constituição da matéria escura não bariónica já detectados experimentalmente, sendo todos os outros especulações teóricas da física de partículas. No entanto, para que os neutrinos possam contribuir para a densidade de matéria do Universo é necessário admitir que estes têm massa, facto que

está longe de uma confirmação experimental definitiva. Actualmente, os resultados experimentais, fornecem apenas alguns limites superiores para a massa dos neutrinos.

Neutrinos relativistas, e, portanto, candidatos à matéria escura quente, existirão no Universo em densidades que, de acordo com a aproximação de alta temperatura, são dadas por, $N_\nu = 3/8 N_\gamma$ (tabela 2.1). Como depois da aniquilação de pares electrão-positrão, $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$ (2.52), e como a densidade de partículas relativistas varia com o cubo da temperatura, $N \propto T^3$ (2.16), a densidade actual de neutrinos deverá ser:

$$N_\nu = \left(\frac{3}{8} \times \frac{4}{11} \right) N_\gamma = \frac{3}{22} N_\gamma \quad (5.10)$$

Uma vez que, por (2.84), $N_\gamma = 20,3 \text{ K}^3 \text{ cm}^{-3}$. $T_0^3 \approx 400 \text{ cm}^{-3}$, a densidade de cada tipo de neutrinos será $N_\nu \approx 55 \text{ cm}^{-3}$, o que, considerando também a contribuição idêntica dos anti-neutrinos, fornece para cada família de neutrinos, electrónicos, muónicos ou tauónicos, uma densidade de partículas $N_{\nu, \bar{\nu}} \approx 110 \text{ cm}^{-3}$. A contribuição total dos neutrinos (e anti-neutrinos) para a densidade do Universo será, então,

$$\rho_\nu = N_\nu n_{fm} m_\nu \quad (5.11)$$

onde $n_{fm} = 1, 2$ ou 3 é o número de famílias de neutrinos massivos. Para que $\rho_\nu = \rho_c$, devemos ter, pela equação acima:

$$m_\nu = \frac{1,88 \times 10^{-29} h_0^2}{110 n_{fm}} \approx 10 \text{ eV} - 100 \text{ eV}. \quad (5.12)$$

O limite inferior corresponde à massa média de cada família, considerando que as três são massivas ($n_{mf} = 3$) e que $h_0 = 0,5$; o limite superior corresponde à massa necessária, para a obtenção do valor crítico, se apenas uma das famílias for massiva ($n_{mf} = 1$) e se $h_0 = 1$. Os limites laboratoriais apontam para que $m_\nu \leq 9 \text{ eV}$ [Longair, 1995, p.463], o que torna o neutrino electrónico demasiado leve para ser um bom candidato para a

matéria escura, embora esses limites sejam ainda muito pouco esclarecedores relativamente à massa dos neutrinos muónicos ou tauónicos, não excluindo, no entanto, a hipótese destes terem maiores massas [Roos, 1996, p.185]. Os neutrinos podem também ser candidatos à matéria escura fria, desde que alguma das famílias tenha massa muito superior aos limites aqui apresentados [Roos, 1996, p.180].

5.3.2.2- Partículas massivas que interagem fracamente

Algumas teorias que ultrapassam o modelo padrão da física de partículas prevêem a existência de certas partículas estáveis, ainda não observadas, que existiriam actualmente no Universo, em densidades capazes de atingir a densidade crítica. As teorias super-simétricas – uma extensão do modelo padrão, que unifica a gravidade com as restantes interações – prevêem a existência de partículas massivas, que interagem fracamente, e que constituem possíveis candidatos à constituição da matéria escura fria não bariónica. Nestas teorias, simétricas relativamente a bósons e férmions, todos os bósons têm um par super-simétrico férmionico, denominado *super-par*, e vice-versa. Exemplos destas partículas, e alguns dos mais populares candidatos à matéria escura, são o gravitino (o super-par do gravitão), o fotino (o super-par do fóton) e o neutralino (uma combinação do fotino com o super-par do bóson de Higgs) [Rees, 1995, p.116; Narlikar, 1993, p.223].

Uma outra possibilidade para a constituição da matéria escura fria é o axião, que interage através de um tipo de interações super-fracas, cerca de 10^{12} mais fracas que as interações fracas padrão [Tayler, 1995, p.173], cuja existência foi postulada como associada a uma quebra espontânea de simetria, que solucionou um problema do modelo padrão da física de partículas, relacionado com as simetrias *CP* [Turner, 1996, p.35]. Estas partículas terão surgido no Universo com velocidades muito baixas e mantiveram-se sempre fora do equilíbrio térmico, de modo que, apesar de muito leves, as mais leves de todos os candidatos à matéria escura, os axiões são partículas frias [Collins, 1989, p.394].

A existência de todas estas partículas, conhecidas colectivamente por WIMP's (*Weakly Interacting Massive Particles*), é pura especulação teórica de algumas correntes da física de partículas que, até ao momento, não dispõem de qualquer validação experimental. Apesar das diversas tentativas para provar experimentalmente a existência

destas partículas, jamais alguma delas foi detectada, quer nos aceleradores, que operam muito aquém das energias de grande parte delas, quer nos raios cósmicos.

Na próxima secção, descreveremos sumariamente algumas das experiências que se continuam a realizar, na esperança de encontrar alguns destes candidatos à matéria escura.

Tabela 5.2- Alguns candidatos à matéria escura [Collins, 1989, p.392]

Partícula	mc^2	N (cm ⁻³) (densidade de partículas necessária para que $\rho = \rho_c$)	t (s) (época de desacoplamento)	Tipo de matéria
Neutrino	<30 eV	100	1	Quente
	>2 GeV	10 ⁻⁵	10 ⁻⁴	Fria
Axião	10 ⁻⁵ eV	10 ⁻⁹	10 ⁻³⁰	Fria
Fotino	<100 eV	100	1	Quente
	>2 GeV	10 ⁻⁶	10 ⁻⁴	Fria
Gravitino	<1 keV	10	10 ⁻¹²	Quente
Glúino	>5 GeV	10 ⁻⁶	10 ⁻⁴	Fria
Axino	<10 ² eV	10	10 ⁻⁵	Quente
Monopólos magnéticos	>10 ¹⁷ GeV	10 ⁻²³	10 ⁻³⁵	Fria
Buracos negros	>10 ¹⁵ g	10 ⁻⁴⁴	10 ⁻¹²	Fria

5.4- Tentativas de detecção de matéria escura

5.4.1- Detecção de objectos compactos

A teoria da relatividade geral prevê que, devido à deformação da geometria espaço-temporal, os raios luminosos que passem suficientemente próximos de um objecto massivo sejam desviados. Este fenómeno foi confirmado experimentalmente, pela primeira vez por A. S. Eddington em 1919, durante um eclipse solar, através da observação de uma aparente variação da posição de algumas estrelas, cujos raios luminosos, no seu percurso até nós, passam próximo do Sol. O efeito de um corpo sobre a geometria do espaço, associado ao consequente desvio dos raios luminosos está a ser utilizado, actualmente, para a detecção de corpos que, pela sua fraca emissão de radiação, não podem ser observados directamente. Este fenómeno tornou-se, assim, numa das ferramentas observacionais mais valiosas para a detecção de matéria escura, permitindo a procura e a determinação da massa, quer dos objectos compactos que possam existir no suposto halo escuro da nossa Galáxia, quer de galáxias e enxames de galáxias longínquos.

Quando uma massa compacta se interpõe entre nós e um objecto luminoso distante, o desvio gravítico dos raios luminosos, provocado pela deformação do espaço causada pelo objecto massivo, altera a imagem que temos da fonte de luz. O objecto compacto massivo funciona como uma espécie de “lente”, que tanto pode desdobrar a imagem do objecto luminoso em múltiplas imagens, como ampliá-lo, aumentando a sua intensidade luminosa. O tipo de efeitos deste fenómeno de *focalização*, que depende do alinhamento entre o observador, a fonte e a lente, depende, sobretudo, da natureza do objecto luminoso: se este é uma fonte pontual, como, por exemplo, um quasar, pode ser desdobrado em duas ou mais imagens distintas, mas, se a fonte é extensa, como acontece com as galáxias, a sua imagem aparece geralmente na forma de arcos luminosos gigantes.

No caso de fontes pontuais, a distância angular α que separa as várias imagens obtidas por focalização é proporcional à raiz quadrada da massa da lente: $\alpha = kM^{1/2}$ com $k = 7,09 \times 10^{-22}$ s arc $\text{kg}^{-1/2}$ [Hewett, 1997, p.626]. Para objectos com massa da ordem da massa do Sol ou inferior ($M \leq M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30}$ kg), como os que se espera que constituam

o halo da Galáxia, as separações obtidas entre as imagens são tão pequenas ($\alpha \leq 10^{-6}$ s arc) que nenhuma das técnicas ópticas de que dispomos alcança essa resolução e, portanto, para objectos com massas desta ordem de grandeza, o efeito visível do desvio dos raios luminosos será apenas um aumento da intensidade da fonte luminosa, obtido devido à ampliação do objecto através da (aparente) sobreposição das várias imagens, durante o período de tempo em que durar o fenómeno, neste caso vulgarmente designado por *microfocalização*. O período de tempo de um evento de microfocalização, Δt , é directamente proporcional à raiz quadrada da massa da lente e inversamente proporcional à distância a que esta se encontra do observador, d , e à sua velocidade perpendicularmente à linha do sinal luminoso, v : $\Delta t \propto M^{1/2}/dv$ [Hewett, 1997, p.626]. Este processo de detecção de objectos massivos implica que o brilho das fontes luminosas (usam-se normalmente estrelas das duas pequenas galáxias nossas vizinhas, a Grande e a Pequena Nuvens de Magalhães) seja seguido regularmente, de forma a detectar o eventual aumento de luminosidade que indicará a ocorrência de microfocalização, dando a conhecer que um objecto compacto do halo se interpôs na linha de observação da estrela. Os fenómenos de microfocalização conhecidos, causados por objectos compactos da nossa Galáxia, têm uma duração típica de alguns dias [Mateo, 1997, p.43].

Contudo, mesmo que toda a matéria escura que se pensa existir no halo da Galáxia se encontre sob a forma de objectos compactos, a frequência de ocorrência de um fenómeno de microfocalização, para uma determinada estrela, seria de cerca de 10^{-6} por ano [Hewett, 1997, p.626], o que, adicionado ao facto de, em curtos períodos de tempo, ter que se proceder à observação do brilho de cada estrela, mostra a dificuldade da técnica e a necessidade de pesquisas prolongadas, envolvendo um grande número de estrelas, para conseguir uma recolha significativa de dados que permita, a partir da frequência de ocorrência do fenómeno, determinar até que ponto a existência de objectos compactos massivos pode contribuir para a densidade total da Galáxia.

O projecto MACHO, pioneiro neste tipo de investigação, iniciou em 1993, uma pesquisa cuidada dos fenómenos de microfocalização, usando estrelas da Grande Nuvem de Magalhães. Durante os dois primeiros anos, oito casos foram registados, e hoje, com vários outros grupos trabalhando nesta área e com o precioso auxílio do telescópio espacial Hubble, muitos outros casos de microfocalização foram detectados através da observação de estrelas da Grande e da Pequena Nuvens de Magalhães.

Simultaneamente, como forma de controlo de resultados, iniciou-se também a observação de estrelas do centro da Via Láctea, tendo-se detectado um número muito superior de casos de microfocalização, provocado por estrelas comuns (que agem como lentes), do que aquele que o conhecimento da estrutura da Galáxia e da sua população de estrelas fazia prever, sugerindo que a densidade de estrelas aí existentes poderá ser muito superior ao que se supunha, o que poderá, inclusive, conduzir à alteração da classificação da Galáxia de uma espiral normal para uma espiral barrada [Hewett, 1997, p.626; Mateo, 1997, p.44].

No entanto, a taxa precisa da ocorrência dos eventos de microfocalização permanece ainda incerta, tornando difícil tirar conclusões a partir dos dados disponíveis sobre a possibilidade de a matéria escura bariónica ser essencialmente constituída por objectos compactos do halo das galáxias. Só a continuação das pesquisas permitirá reunir um número suficientemente grande de eventos, que permita um tratamento estatístico capaz de resolver esta questão. Entretanto, a microfocalização superou o objectivo inicial de detecção de matéria escura, revelando-se uma indispensável ferramenta, com potencialidades que proporcionaram já um melhor conhecimento da estrutura da Galáxia e novos conhecimentos no campo da estrutura estelar, e que, actualmente, se tentam aproveitar para a detecção de planetas [Mateo, 1997, p.43].

Em uma escala maior, as galáxias são também importantes intervenientes em processos de focalização. Têm-se registado casos em que as galáxias, funcionando como lentes, originam múltiplas imagens de quasares, como o conhecido exemplo da "*Cruz de Einstein*", que apresenta quatro imagens distintas de um quasar, um caso raro de focalização (geralmente só se obtêm duas imagens), formando uma cruz com a galáxia (lente) ao centro (Figura 5.4). Por outro lado, as galáxias podem também agir como fontes luminosas, caso em que aparecem como arcos luminosos que se estendem por grandes distâncias, como consequência do desvio gravitacional da luz que emitem quando esta passa por um enxame de galáxias. A determinação da posição e distorção desses arcos, permitiu a J. Tyson e seus colaboradores estimar a massa dos enxames que funcionam como lentes, concluindo, deste modo, que cerca de 90% da sua constituição será matéria escura [Bartusiak, 1997, p.47].

Este fenómeno tem ainda a vantagem de fornecer imagens de galáxias muito distantes, que de outra forma não seriam visíveis, fornecendo, deste modo, uma forma de explorar o Universo jovem, o que está a ser utilizado, por exemplo, para a medição da constante de Hubble [Bartusiak, 1997, p.47].

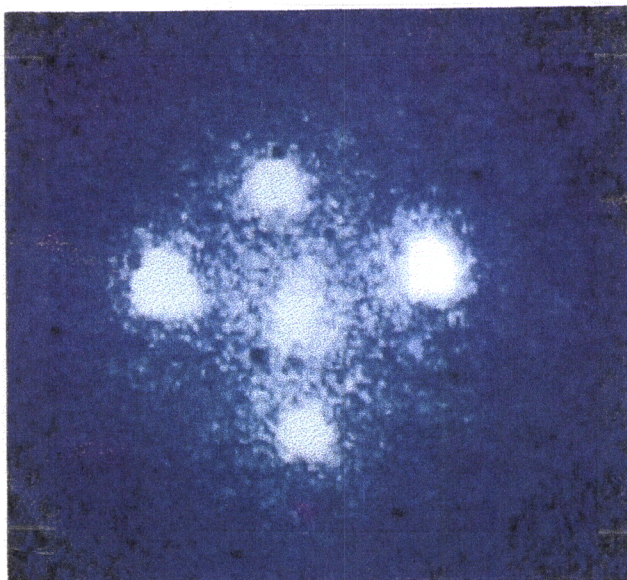


Figura 5.4- Cruz de Einstein. A imagem central é a galáxia responsável pela focalização gravítica que origina as quatro imagens, dispostas ao seu redor, de um quasar distante [Bartusiak, 1997, p.46].

A questão fundamental que motivou as investigações descritas ao longo desta secção continua, contudo, por esclarecer. Apesar de se ter concluído que, de facto, o efeito dos corpos massivos escuros sobre a geometria possibilita a sua detecção, através de alterações que o desvio gravítico da luz provoca na imagem de objectos luminosos, os dados obtidos através desse efeito continuam a ser insuficientes e demasiado imprecisos para permitir qualquer conclusão sobre a contribuição desses objectos para a matéria escura.

5.4.2- Detecção de partículas

Como vimos, de todas as partículas que potencialmente poderão constituir a matéria escura, os neutrinos são os únicos que têm a sua existência comprovada experimentalmente e, mesmo para estes, há grandes dúvidas quanto à sua massa permanecendo, portanto, igualmente incerta, a sua capacidade de contribuir para a massa total do Universo.

Como a detecção de neutrinos cósmicos não é possível, dado que a sua baixa energia – neutrinos de massa $m_\nu \approx 10 \text{ eV}/c^2$ poderão apresentar momento $P \approx 10^{-2} \text{ eV}/c$ e energia cinética $E_c \approx 10^{-5} \text{ eV}$ [Tayler, 1995, p. 175] – torna praticamente impossível a sua detecção através da transferência de energia para uma partícula alvo com a qual o neutrino interagisse, as experiências para a determinação da sua massa são realizadas em aceleradores de partículas. Diversas experiências têm sido realizadas e, algumas delas, apontam para que os neutrinos tenham pequenas massas. Exemplo disso é a experiência realizada no Laboratório Nacional de Los Alamos no Novo México, em Maio de 1996, na qual foi detectado o que se pensa ser a troca de identidade de um tipo de neutrinos noutra (oscilação de neutrinos), o que só é possível se estes tiverem massa [Naeye, 1996]. Estes resultados são ainda muito ambíguos, carecendo de futuras confirmações. Espera-se que a continuação das experiências forneça, num futuro próximo, resultados definitivos para a massa dos neutrinos, esclarecendo qual a sua possível contribuição para a matéria escura.

Relativamente aos candidatos mais pesados para matéria escura não bariónica fria, os aceleradores são ainda incapazes de atingir energias suficientemente elevadas para os produzir ou detectar, mas, caso eles existam nos raios cósmicos poderão ser detectados por meio da transferência de energia para partículas alvo. Contudo, os baixos fluxos destas partículas nos raios cósmicos e as suas fracas interações com a matéria, farão com que a probabilidade de detecção seja muito pequena. Experiências actuais tentam detectar partículas com massa superior a alguns GeV e com interações fracas normais, através da colisão com um núcleo atómico de uma rede cristalina para a qual transferem parte da sua energia cinética, ΔE , que posteriormente, se transfere a todo o cristal através de vibrações, provocando um aumento de temperatura que, para um volume V de um material de capacidade calorífica C , é dado por $\Delta T = \Delta E / VC$.

Os detectores que, para aumentar a probabilidade de captura das partículas, têm um volume imenso, são subdivididos em pequenas regiões isoladas termicamente, a cada uma das quais se acopla um sensor. São construídos com materiais de pequena capacidade calorífica, como isoladores ou supercondutores, e arrefecidos a temperaturas extremamente baixas, para que a sua capacidade calorífica, proporcional a T^3 , seja o menor possível. A detecção é efectuada através da medição directa da temperatura ou, em alguns casos, através de variações no campo magnético que atravessa o material do detector, quando a pequena variação de temperatura o faz passar de um estado de

supercondutor para um estado resistivo [Tayler, 1995, p.178]. Obviamente, estas experiências são de muito difícil execução e revestem-se de dificuldades técnicas variadas, como a dificuldade de distinguir os efeitos desejados de efeitos causados por outras partículas de fundo, a dificuldade de arrefecimento dos materiais a temperaturas tão baixas quanto as desejadas ou a dificuldade de registar tão pequenas variações térmicas.

Diferentes grupos têm tentado colocar em prática algumas experiências supostamente capazes de detectar os WIMP's. Nos Estados Unidos, um grupo de físicos da Universidade de Stanford e da Universidade da Califórnia procuram estas partículas usando um detector de cristais de silício e germânio ultra-puro a uma temperatura de 0,02 K. Outros grupos, na Inglaterra, Alemanha e Japão procuram estas partículas utilizando diferentes detectores. No Fermilab, em Illinois, e no CERN, na Suíça, alguns físicos procuram os candidatos à matéria escura nos aceleradores, tentando, através de experiências de altas energias, recriar as condições que existiriam no Universo e procurando alguma evidência de novas partículas [Naeye, 1996, 51].

Os axiões são outra das partículas muito procuradas. As experiências idealizadas baseiam-se em teorias, segundo as quais os axiões sujeitos a um campo magnético decaem em fótons. Para as massas esperadas para os axiões, os fótons assim originados terão frequências na zona das microondas, o que, dada a sua baixa energia, os torna extremamente difíceis de detectar. Para obter um sinal detectável, utiliza-se uma cavidade de ressonância, sensível ao valor esperado da frequência. Como não é conhecido o valor exacto da massa do axião e, conseqüentemente, a frequência dos fótons obtidos, é necessário repetir as experiências sucessivamente, com diferentes cavidades, até percorrer um largo intervalo de frequências. Algumas experiências foram postas em prática no Laboratório Nacional de Lawrence, Livermore, na Califórnia, bem como na Universidade de Kyoto, no Japão, [Naeye, 1996, p.51], sendo elas, no entanto, experiências ainda incipientes, que não forneceram qualquer resultado e que (de acordo com os físicos envolvidos) antes de uma década não poderão fornecer resultados conclusivos acerca da existência dos axiões.

Até ao momento, nenhuma das tentativas para encontrar estas novas partículas se revelou frutífera. As dificuldades de execução técnica e o facto de os candidatos à constituição da matéria escura serem muitos e com massas muito diferentes, implicando todos eles técnicas específicas de detecção, dificulta a obtenção de resultados. Contudo, alguns físicos crêem que a continuação destas experiências poderá conduzir, dentro de

poucos anos, à descoberta ou exclusão definitiva de algumas destas partículas. Se, de facto, estas experiências vierem a fornecer resultados conclusivos, poderão constituir um importante passo na resolução do problema da matéria escura e, ainda, trazer novos avanços para o domínio da física de partículas.

5.5- Conclusão

A evidência da existência de menos matéria no Universo que a necessária para obter, por um lado, as densidades previstas pelas teorias cosmológicas, por outro, as densidades capazes de explicar a mecânica dos objectos no interior das galáxias e enxames, obriga a procurar a matéria em falta no Universo ou a elaborar novas teorias que permitam explicar a evolução do Universo e interpretar os dados observacionais disponíveis, sem o recurso a densidades mais elevadas, coisa que o modelo do big bang com inflação não consegue resolver. Por outro lado, há quem argumente no sentido da matéria escura não existir, devendo-se, alternativamente, procurar desenvolver novos modelos descritivos para o Universo. As hipóteses mais comuns que surgem nesta linha, sugerem que a TRG possa não funcionar em larga escala, ou que uma força repulsiva, representada pela constante cosmológica, ressuscitada, com o significado de uma energia de vácuo, que preenche todo o espaço vazio, funcionaria como uma espécie de “massa invisível”. No entanto, não há qualquer explicação teórica que justifique a falha da TRG em larga escala e também as tentativas de determinação directa dos efeitos da constante cosmológica, apontam para que esta, se não for nula, tenha valores tão pequenos que, de modo algum, poderão vir a constituir uma solução com um impacto significativo na questão da matéria escura. Assim, a maioria dos físicos escolhe a hipótese que representa um menor afastamento da física actual, preferindo a procura da matéria escura, que permite que se continue a considerar como válida uma teoria que apresentou já diversos sucessos, em vez do vazio teórico a que conduziria a rejeição da TRG. Deste modo, há uma década que se vem desenvolvendo uma intensa actividade científica com o objectivo de resolver uma das mais importantes questões cosmológicas do momento: detectar e determinar a constituição da matéria escura. Para o efeito, surgiram algumas teorias, foram idealizadas experiências e montados dispendiosos equipamentos para a sua concretização. Ao longo dos últimos anos, numerosos cientistas têm repetido experiências e observações exaustivamente que, provavelmente, continuarão ainda durante mais algum tempo, procurando candidatos para a constituição da matéria escura bariónica e não bariónica.

A comparação da densidade de matéria luminosa com as densidades bariónicas previstas pela nucleossíntese primordial, sugeriu que parte da matéria escura fosse

constituída por matéria “normal”, bariónica, que não teria sido ainda detectada. As hipóteses mais comuns para a sua constituição apontam para que esta possa existir sob a forma de objectos compactos massivos, situados nos halos das galáxias ou para distribuições de hidrogénio gasoso. Alguns objectos escuros compactos, de grandes dimensões, foram já detectados, através do seu efeito sobre a geometria do espaço, sendo, no entanto, os dados recolhidos ainda insuficientes para permitir determinar qual a sua contribuição para a densidade de matéria bariónica. Simultaneamente, os radioastrónomos têm procurado detectar o hidrogénio, neutro ou ionizado, distribuído pelo Universo, mas, até ao momento, este não tem sido encontrado em densidades significativas, desconhecendo-se se poderá ou não ser um constituinte importante da matéria escura bariónica. Acerca desta hipótese debate-se ainda, quer a percentagem de ionização do hidrogénio, quer a forma como este se poderá distribuir pelo espaço.

As observações continuam tentando, através de uma persistente recolha de dados, determinar a contribuição de cada uma destas formas para a densidade total de matéria bariónica.

Como a inflação e alguns dados observacionais mostraram que grande parte da matéria escura terá que ser matéria não bariónica, uma vez que as densidades que prevêem para o Universo são largamente superiores às compatíveis com as densidades bariónicas previstas pela nucleossíntese, surgiu também o problema de ter que encontrar formas massivas de matéria não bariónica. As teorias mais recentes da física de partículas avançaram com algumas hipóteses, mas todos os candidatos propostos necessitam ser detectados experimentalmente, antes de se tornarem uma solução viável. Também os neutrinos que, por já terem sido detectados, se apresentam como os candidatos mais populares, nos mantêm em expectativa até que a sua massa seja determinada com exactidão.

Todas as tentativas experimentais de detecção da matéria escura, como a focalização, os detectores de partículas ou a determinação da massa dos neutrinos, têm-se confrontado com inúmeras e variadas dificuldades. Em todas elas, os meios técnicos necessários são muito avançados, as recolhas de um número significativo de dados exigem prolongadas observações e, muitas vezes, as experiências repetem-se inconclusivamente, por longos períodos de tempo. Todos os resultados entretanto conseguidos revestem-se ainda de grandes incertezas. Trabalhando muito próximo dos limites permitidos pela tecnologia actual, continua-se a tentar obter a resposta às duas questões mais fundamentais da cosmologia que, apesar dos sucessos do big bang e de

certa forma, também da inflação, continuarão sem resposta até ao completo esclarecimento do problema da matéria escura: como evolui o Universo e qual é a sua constituição.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na Teoria da Relatividade Geral, construiu-se um modelo cosmológico que fornece uma possível explicação da evolução do Universo. Das várias previsões deste modelo, a expansão do Universo, a abundância de elementos primordiais e a existência de uma radiação de fundo, confirmadas, respectivamente, pelos desvios para o vermelho registados em todas as galáxias observadas, pelas percentagens de hélio e hidrogénio observadas no Universo e pela detecção de uma radiação de fundo com características compatíveis com a previsão teórica, transformaram este modelo numa teoria credível, aceite como padrão para a cosmologia actual. Contudo, à medida que nos aproximamos da origem do Universo confrontamo-nos com um número crescente de problemas que o modelo não consegue solucionar. Uma das razões, será certamente o facto de que, sendo este um modelo estritamente clássico, não podemos estender o seu tratamento a escalas espaço-temporais onde se espera que os efeitos quânticos sejam determinantes. No entanto, a inexistência de uma teoria quântica da gravidade consensual impede a aceitação de uma descrição cosmológica quântica.

Os modelos inflacionários surgiram como uma tentativa para solucionar alguns problemas relacionados com as épocas mais remotas da evolução do Universo, adicionando à teoria clássica alguns efeitos quânticos, mas – e embora estes tenham conseguido respostas para algumas questões problemáticas – são, ainda, modelos nitidamente simplistas, para os quais se coloca o grave problema de parecerem teorias incapazes de se testarem observacionalmente. A sua previsão relativamente à densidade actual de matéria é testável, remetendo-nos para a questão da matéria escura, mas ainda

que, uma vez resolvida esta questão, se viesse a provar que de facto $\Omega_0=1$, não teríamos uma prova da existência de inflação, já que esta densidade poderá ser obtida sem o recurso aos modelos inflacionários. Assim, falta, ainda, percorrer um longo caminho até que possamos usar a inflação como uma teoria definitiva para a explicação da evolução do Universo muito jovem.

Ligado ao modelo cosmológico padrão persiste o grave problema da matéria escura: diversos dados observacionais, conjuntamente com alguns argumentos teóricos, apontam para que o Universo apresente densidades de matéria muito superiores às visíveis. No entanto, e apesar dos inúmeros esforços que vêm sendo realizados para a sua detecção, não só a contribuição dessa matéria para a densidade total do Universo permanece completamente desconhecida, como a forma como se distribui pelo Universo e a sua constituição são um completo mistério. Associados a esta questão subsistem inúmeros problemas. O tipo de evolução que o modelo padrão prevê para o Universo, o futuro deste (a sua eterna expansão ou um colapso futuro), e a sua idade actual, não podem ser conhecidos sem que se conheça a densidade do Universo. Por outro lado, pode acontecer que se conclua que a matéria escura não existe de facto, e nesse caso, talvez se torne necessário proceder a uma reformulação da teoria, como por exemplo através da reintrodução da constante cosmológica nas equações de Einstein, ou mesmo abandonar o modelo baseado na TRG.

Contudo, na actualidade, o conjunto do modelo clássico da relatividade geral com a inflação, embora com problemas evidentes, apresenta-se, na globalidade, como uma boa teoria explicativa da evolução do Universo, cuja confirmação de algumas das suas previsões pela observação, nos incentivam a continuar a sua utilização até que os resultados das investigações, quer acerca do problema da matéria escura, quer em muitas outras frentes, nos possam fornecer novos dados que determinem qual o rumo futuro da cosmologia.

APÊNDICES

A- Programa em BASIC para a obtenção das curvas $R(t)$ dos modelos fechados

```
REM Solução das equações de Friedmann para k=1
pi = 3.14159
c = 3 * (10 ^ 8)
h = 50
dte = .0001: REM dte é o passo do programa
i = 1: REM i dá a cor da curva

GOSUB graf

tf = ((pi / 2) - 1) / h

REM ciclos para diferentes valores de q(k dá o número de curvas)
FOR k = 0 TO 3 STEP 1
q = 1 + (k ^ 2)
PRINT "qo="; q

REM calculo do arccos
FOR j = 0 TO pi STEP .001
IF COS(j) < ((1 - q) / q) + .0008 AND COS(j) > ((1 - q) / q) - .0008
THEN tezero = j: GOTO 20
NEXT j

REM constantes
20 a = (2 * c * q) / (h * ((2 * q) - 1) ^ (3 / 2))
ta = (q / (((2 * q) - 1) ^ (3 / 2)) * h) * (tezero - (((2 * q) - 1)
^ (1 / 2)) / q)
```

```

dt = tf - ta
so = .5 * a * (1 - ((1 - q) / q))

WINDOW ((1 / h) * ((pi / 2) - 2), 0)-(2 * pi / h, 2 * so)

REM curvas
FOR te = 0 TO (2 * pi) STEP dte
s = .5 * a * (1 - COS(te))
t = (.5 * a * (te - SIN(te))) / c
t = t + dt
PSET (t, s): CIRCLE (ta + dt, so), .001
NEXT te

i = i + 1
COLOR i

NEXT k

REM linha recta
FOR t = (1 / h) * ((pi / 2) - 2) TO 2 * pi / h STEP .000001
f = (so * h) * (t - ((1 / h) * ((pi / 2) - 2)))
PSET (t, f)
NEXT t

END

graf:
SCREEN 12
VIEW (60, 100)-(600, 400), 7, 9
LOCATE 28, 50: COLOR 4: PRINT "t"
LOCATE 12, 5: COLOR 4: PRINT "R"
COLOR 1
RETURN

```

Notação usada no programa: $s=R$; $h=H_0$; $q=q_0$; $te=\theta$; $tezero=\theta_0$; $ta=t_0$; $tf=t_0$ para $q_0=1$.

B- Programa em BASIC para a obtenção das curvas $R(t)$ dos modelos abertos

```
REM Solução das equações de Friedmann para k=-1
```

```
pi = 3.14159
```

```
c = 3 * (10 ^ 8)
```

```
h = 50
```

```
q = 0
```

```
dte = .00001: REM passo do programa
```

```
i = 2: REM cor da curva
```

```
GOSUB graf
```

```
tf = 1 / h
```

```
REM recta s=ct, obtida quando q=0
```

```
FOR tempo = 0 TO 2 / h STEP .0000001
```

```
R = c * tempo
```

```
WINDOW (0, 0)-(2 / h, 2 * c / h)
```

```
COLOR 1: PSET (tempo, R)
```

```
NEXT tempo
```

```
PSET (1 / h, c / h): CIRCLE (1 / h, c / h), .0002
```

```
PRINT "qo=0"
```

```
REM ciclos para diferentes q
```

```
FOR j = 1 TO 2
```

```
q = q + .2
```

```
i = i + 1
```

```
COLOR i
```

```
PRINT "qo="; q
```

```
REM constantes
```

```
b = (2 * c * q) / (h * (1 - (2 * q)) ^ (3 / 2))
```

```
x = -(LOG((1 - q + ((1 - (2 * q)) ^ (1 / 2))) / q))
```

```
ta = (.5 / c) * b * (((1 - (2 * q)) ^ (1 / 2)) / q) + x)
```

```
dt = tf - ta
```

```
so = .5 * b * (((1 - q) / q) - 1)
```



```

WINDOW (0, 0)-(2 / h, 2 * so)
CIRCLE (ta + dt, so), .0002

REM curvas
FOR te = 0 TO 1.3 * pi STEP dte
cosh = (EXP(te) + (1 / EXP(te))) / 2
senh = (EXP(te) - (1 / EXP(te))) / 2
s = .5 * b * (cosh - 1)
t = (.5 * b * (senh - te)) / c
t = t + dt
PSET (t, s)
NEXT te

NEXT j

END

graf:
SCREEN 12
VIEW (60, 100)-(600, 400), 15, 9
LOCATE 28, 50: COLOR 4: PRINT "t"
LOCATE 12, 5: COLOR 4: PRINT "R"
RETURN

```

Notação usada no programa: $s=R$; $h=H_0$; $q=q_0$; $b=\beta$; $te=\phi$; $ta=t_0$; $tf=t_0$ para $q_0=0$.

C- Determinação de N_γ e ε_γ

Como $E_\gamma=cP$ e $g_\gamma=2$, e dada a natureza bosónica dos fotões, a equação

$$N_A = \int_0^\infty n_A(P)dP = \frac{g_A}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (2.2)$$

no caso da radiação, fica

$$N_\gamma = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{cP}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} dP \quad (C.1)$$

ou, através da mudança de variável $x=cP/kT$,

$$N_\gamma = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \quad (C.2)$$

Substituindo

$$\frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}x^2}{1 - e^{-x}} = e^{-x}x^2 [1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots] = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}x^2 \quad (C.3)$$

na integral definida, presente em (C.2),

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-nx}x^2 dx \quad (C.4)$$

e efectuando a mudança de variável $y=nx$, obtemos

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \int_0^\infty e^{-y}y^2 dy = \zeta(3) \cdot \Gamma(3) = 1,202 \times 2 = 2,404. \quad (C.5)$$

onde ζ e Γ são, respectivamente, as funções

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (\text{C.6})$$

e

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy = (x-1)! \quad (\text{C.7})$$

Por substituição do valor $I=2,404$ em(C.2), obtemos

$$N_\gamma = \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^3 \quad (\text{C.8})$$

De forma análoga, a partir da equação

$$\varepsilon_A = \int_0^{\infty} n_A(P) E_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} P^2 E_A(P) \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (\text{2.3})$$

podemos obter

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{(kT)^4}{c^3 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (\text{C.9})$$

que, por substituição do valor da integral definida

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} y^3 dy = \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{90} \times 6 = \frac{\pi^4}{15}, \quad (\text{C.10})$$

fica

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{(kT)^4}{c^3 \hbar^3} \quad (\text{C.11})$$

[Reif, 1965, p.622].

D- Densidade de partículas na aproximação de baixa temperatura

Para temperaturas $T < T_A$, isto é, na aproximação de baixa temperatura, as partículas têm comportamentos não relativistas e a sua energia é dada por,

$$E_A(P) = m_A c^2 + \frac{P^2}{2m_A} \quad (\text{D. 1})$$

A equação:

$$N_A = \int_0^\infty n_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{E_A(P)}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (\text{2.2})$$

fica, então,

$$N_A = \int_0^\infty n_A(P) dP = \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{m_A c^2 + P^2 / 2m_A}{kT}\right) \pm 1 \right]^{-1} dP \quad (\text{D.2})$$

Para temperaturas inferiores a T_A , $m_A c^2 > kT$ e o termo ± 1 torna-se desprezável relativamente à exponencial:

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty P^2 \left[\exp\left(\frac{m_A c^2 + P^2 / 2m_A}{kT}\right) \right]^{-1} dP = \\ &= \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(-\frac{m_A c^2}{kT}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{P^2}{2m_A kT}\right) P^2 dP \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Podemos resolver o integral presente em (D.3), a partir de

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^n dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha^{-(n+1)/2}, \quad (\text{D.4})$$

fazendo $\alpha=1/(2m_AkT)$ e $n=2$ [Reif, 1965, p.608]. De acordo com (D.4), para $n=2$:

$$I(2) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \alpha^{-3/2} \quad (D.5)$$

Usando a propriedade da função Γ segundo a qual, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ e o valor $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ obtemos $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ e, portanto,

$$I(2) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \alpha^{-3/2} = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \alpha^{-3/2} \quad (D.6)$$

A equação (D.3) fica, então,

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{g_A}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(-\frac{m_A c^2}{kT}\right) \times \left[\frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2m_A kT}\right)^{-3/2} \right] = \\ &= \frac{g_A}{\hbar^3} \left(\frac{m_A kT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_A c^2}{kT}\right) \end{aligned} \quad (D.7)$$

que, atendendo à definição de temperatura crítica de uma espécie A , $T_A = m_A c^2 / k$, pode ser escrita:

$$N_A = \frac{g_A}{\hbar^3} \left(\frac{m_A kT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_A}{T}\right) \quad (D.8)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Barrow, J.D. and Silk, J. 1989, *A Mão Esquerda da Criação*, Lisboa, Gradiva.
- [2] Bartusiak, M. 1996, *The New Dark Age of Astronomy*, Astronomy, October, p. 36-39.
- [3] Bartusiak, M. 1997, *Gravity's Rainbow*, Astronomy, August, p. 44-49.
- [4] Bertchinger, E. 1990, *Einstein's Blunder Resurrected*, Nature, Vol. 348, December, p. 675-676.
- [5] Betchold, J. 1997, *Shadows of Creation: Quasar Absorption Lines and the Genesis of Galaxies*, Sky & Telescope, September, p. 29-34.
- [6] Börner, Gerhard 1993, *The Early Universe – Facts and Fiction*, Berlin, Springer-Verlag.
- [7] Coles, P. and Lucchin, F. 1996, *Cosmology - The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Chichester, John Wiley & Sons.
- [8] Collins, P., Martin, A. and Squires, E. 1989, *Particle Physics and Cosmology*, New York, John Wiley & Sons.
- [9] Croswell, K. 1996, *The Dark Side of the Galaxy*, Astronomy, October, p. 41-45.

- [10] Croswell, K. 1997, *Playing Cosmology's Wild Card*, Astronomy, April, p. 56-59.
- [11] d' Inverno R., 1992, *Introducing Einstein's Relativity*, New York, Clarendon Press.
- [12] Dodelson, S., Gates, E. and Turner, M. 1996, *Cold Dark Matter*, Science, Vol. 274, October, p. 69-75.
- [13] Dolgov, A. 1983, *Progress in Particle Physics and Modern Cosmology*, Moscovo, Institute of Theoretical and Experimental Physics (pré-publicação).
- [14] Gribbin, J. and Rees, M. 1995, *The Stuff of the Universe- Dark Matter, Mankind and Anthropic Cosmology*, London, Penguin Books.
- [15] Guth, A. 1992, *Inflation*, Proceedings of the National Academy of Sciences *Coloquium on Physical Cosmology*, Irvine, California, Março 27-28, Ed. David N. Schramm.
- [16] Guth, A. and Steinhardt, P. 1994, *The Inflacionary Universe*, em *The New Physics*, Ed. Paul Davies, Cambridge, Cambridge University Press.
- [17] Hewett, P. and Warren, S. 1997, *Microlensing Sheds Light on Dark Matter*, Science, Vol. 275, January, p. 626-627.
- [18] Jakobsen, Peter, 1997, *Peering Between the Clouds*, Nature, Vol. 387, May, p. 348-349.
- [19] Kaiser, N. and Silk, J. 1986, *Cosmic Microwave Background Anisotropy*, Nature, Vol. 324, December, p.529-537.

- [20] Lachiéze-Rey, M. 1995, *Cosmology - a First Course*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [21] Linde, A. 1986, *Eternal Chaotic Inflation*, Trieste, International Centre for Theoretical Physics (pré-publicação).
- [22] Linde, A. 1986, *Eternal Existing Self-Reproducing Inflationary Universe*, Trieste, International Centre for Theoretical Physics (pré-publicação).
- [23] Linde, A. 1996, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Canada, Harwood Academic Publishers.
- [24] Mateo, M. 1997, *Bonuses of the Microlensing Business*, Sky & Telescope, September, p. 39-44.
- [25] Naeye, R. 1996, *Ghosts in the Cosmic Machine*, Astronomy, October, p. 49-53.
- [26] Narlikar, J. 1993, *Introduction to Cosmology*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [27] North, J. 1990, *The Measure of the Universe – A History of Modern Cosmology*, New York, Dover Publications, Inc..
- [28] Peebles, P. 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton, Princeton University Press.
- [29] Rees, M. 1983, *The Universe from $<10^{-36}$ second to $>10^{30}$ Years - Part I*, Current Science, Vol. 52, N.10, May, p.443-449.
- [30] Rees, M. 1983, *The Universe from $<10^{-36}$ second to $>10^{30}$ Years - Part II*, Current Science, Vol. 52, N.11, June, p. 509-517.

- [31] Reeves, H. 1995, *Últimas Noticias do Cosmos*, Lisboa, Gradiva.
- [32] Reif, F. 1965, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, Mc Graw Hill International Editions.
- [33] Rolfs, C. and Rodney, W. 1988, *Cauldrons in the Cosmos*, Chicago, University of Chicago Press.
- [34] Roos, Matts 1996, *Introduction to Cosmology*, Chichester, John Wiley & Sons.
- [35] Rowan-Robinson, M. 1981, *Cosmology*, Oxford, Clarendon Press.
- [36] Longair, M., Sandage, A. and Kron, R. 1995, *The Deep Universe*, New York, Springer-Verlag.
- [37] Schilling, G. 1997, *No Hidden Starstuff in Nearby Universe*, Science, Vol. 277, August, p. 1201.
- [38] Schutz, B. 1990, *A First Course in General Relativity*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [39] Sciama, D. 1973, *Modern Cosmology*, Cambridge, Cambridge University Press.
- [40] Seit, C. 1997, *Primordial Gas: Fog not Clouds*, Science, Vol. 276, May, p. 899.
- [41] Sexl, R. and Sexl, H. 1979, *White Dwarfs – Black Holes*, New York, Academic Press.
- [42] Shandarin, S. 1991, *Massive Neutrinos and Cosmology*, Neutrino Physics, Ed. K. Winter, Cambridge, Cambridge University Press.
- [43] Silk, J. 1995, *The Big Bang*, New York, W.H. Freeman and Company.

- [44] Tayler, R. J. 1995, *The Hidden Universe*, Chichester, John Wiley & Sons and Praxis Publishing.
- [45] Tolman, R. 1934, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, Clarendon Press.
- [46] Tremaine, S. 1992, *The Dynamical Evidence for Dark Matter*, Physics Today, February, p. 28-36.
- [47] Turner, M. 1996, *Cosmology: going beyond the big bang*, Physics World, September, p. 31-39.
- [48] Videira, A. 1988, *Big Bang e Inflação*, Gazeta de Física, Vol. 11 (2), 63.
- [49] Videira, A. 1989, *Big Bang e Inflação*, Gazeta de Física, Vol. 12 (3), 44.
- [50] Videira, A. 1990, *Chaotic Inflation and the Mass of the X-Boson*, Il Nuovo Cimento, Vol. 103 A, 541.
- [51] Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York, John Wiley and Sons.
- [52] Weinberg, S. 1987, *Os Três Primeiros Minutos do Universo*, Lisboa, Gradiva.
- [53] Zhi, F. L. e Xian, L.S. 1994, *A Criação do Universo*, Lisboa, Gradiva.

