

Modelos de crescimento de animais em ambiente aleatório

Patrícia A. Filipe

Centro de Investigação em Matemática e Aplicações - Universidade de Évora

Carlos A. Braumann

Centro de Investigação em Matemática e Aplicações - Universidade de Évora

Carlos J. Roquete

Instituto de Ciências Agrárias Mediterrânicas - Universidade de Évora

Resumo: Após uma breve revisão dos modelos usualmente utilizados para descrever o crescimento de animais, propõe-se, como modelos descritivos gerais para a evolução do peso de animais em ambiente aleatório, equações diferenciais estocásticas da forma $dY(t) = f(Y(t))dt + \sigma dW(t)$, $Y(t_0) = y_0$, onde $Y(t)$ representa o peso, uma potência do peso ou o logaritmo do peso do animal na idade t , σ mede a intensidade dos efeitos das perturbações aleatórias do ambiente sobre o crescimento, W_t é o processo de Wiener e y_0 é o peso à nascença (que supomos conhecido). Considerámos $f(Y(t)) = b(A - Y(t))$. Para este modelo, a partir da solução explícita, é possível obter a função de máxima verosimilhança. Em particular, estudamos o modelo de Bertalanffy-Richards estocástico e o modelo de Gompertz estocástico.

Estes modelos foram aplicados a dados de crescimento de bovinos mertolengos da estirpe rosilho. São apresentadas as estimativas dos parâmetros e intervalos de confiança assintóticos. Os problemas de previsão foram também abordados.

Palavras-chave: Modelos de crescimento, equações diferenciais estocásticas, estimação, peso de bovinos.

Abstract: After a short presentation of the models usually used to describe the growth of animals, we suggest, as general models for the evolution of animal weight in a random environment, stochastic differential equations of the form $dY(t) = f(Y(t))dt + \sigma dW(t)$, $Y(t_0) = y_0$, where $Y(t)$ represents the weight, a power of the weight or the logarithm of the weight of the animal at age t , σ measures the effect of random environmental fluctuations on growth, W_t is the Wiener process and y_0 is the weight at birth (assumed known). We consider $f(Y(t)) = b(A - Y(t))$. From the explicit solution of this model it is possible to obtain the maximum likelihood function. We study the Bertalanffy-Richards and the Gompertz stochastic models.

These models were applied to bovine growth data. Estimates and asymptotic confidence intervals of the parameters are presented. Prediction problems are also treated.

Keywords: Growth models, stochastic differential equations, estimation, cattle weight.

1 Introdução

Estudámos alguns modelos de crescimento individual em ambiente aleatório. Os modelos foram aplicados a dados de evolução do peso de bovinos mertolengos. Começámos por pesquisar os modelos de crescimento que têm sido utilizados para descrever, em particular, a evolução do peso de bovinos ([7], [9]). Os modelos encontrados foram sobretudo determinísticos. Na secção 2 são apresentados, de forma breve, alguns dos principais modelos de crescimento determinísticos, em particular, os modelos de Mitscherlich, Bertalanffy-Richards e Gompertz. Estes modelos têm sido, e continuam a ser, amplamente estudados e aplicados não só como modelos de crescimento de animais de várias espécies ([3], [8] e [11]) mas também, por exemplo, para descrever o crescimento de tumores ([6]).

Com o objectivo de obter modelos que incluam o efeito das variações aleatórias do ambiente na evolução do peso, recorreremos a equações diferenciais estocásticas (secção 3). Com efeito, não faz muito sentido utilizar os métodos clássicos de regressão que pressupõem desvios de uma curva determinística independentes ao longo tempo, o que é altamente inverosímil (já seria verosímil se esses desvios se devessem a erros de medição, o que não é manifestamente o caso). O método de regressão admite que um atraso de crescimento num certo momento não tem repercussões sobre os pesos futuros, o que não é realista.

A secção 4 apresenta o método da máxima verosimilhança aplicado aos modelos em estudo, com o objectivo de posteriormente obtermos as estimativas dos parâmetros e analisarmos algumas das suas características.

A secção 5 trata da questão da previsão de valores futuros do processo.

Na secção 6 aplicámos as metodologias expostas aos dados de crescimento de um bovino para o qual dispunhamos de uma série relativamente longa de evolução do peso desde a nascença. Os dois modelos estudados com maior detalhe consistem em equações diferenciais estocásticas relacionadas, respectivamente, com o modelo de Bertalanffy-Richards e o modelo de Gompertz.

A secção 7 contém algumas considerações finais.

2 Modelos de crescimento determinísticos

Uma das equações diferenciais mais simples é a equação linear

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(a - X(t)), \quad X(t_0) = x_0, \quad (1)$$

com $a, b > 0$. Este é o conhecido *modelo de Mitscherlich* ou *modelo monomolecular*. Integrando, obtemos a função de crescimento

$$X(t) = a - (a - x_0) \exp\{-b(t - t_0)\}. \quad (2)$$

Podemos encontrar em [5] e [12] aplicações do modelo (2) em agricultura.

Admitindo que $X(t)$ representa o peso do animal na idade t , quando $t \rightarrow +\infty$, verifica-se que $X(t) \rightarrow a$, que funciona assim como peso assintótico, sendo b o coeficiente de crescimento que regula a velocidade de aproximação a a . Em Garcia [4] sugerem-se modelos mais gerais onde o comportamento linear da taxa de aproximação ao valor assintótico se aplica, não ao peso propriamente dito $X(t)$, mas a uma função do peso, como $X^c(t)$ ou $\ln X(t)$. No contexto da modelação do peso é usual considerar $c = 1/3$, traduzindo a ideia de que o peso é uma espécie de "volume" e $X^c(t)$ uma espécie de "comprimento" do animal. O modelo será

$$\frac{dY(t)}{dt} = b(A - Y(t)), \quad (3)$$

onde

$$Y(t) = \begin{cases} X^c(t) & \text{se } c \neq 0 \\ \ln X(t) & \text{se } c = 0 \end{cases} \quad \text{e } A = \begin{cases} a^c & \text{se } c \neq 0 \\ \ln a & \text{se } c = 0. \end{cases} \quad (4)$$

No caso em que $c \neq 0$ podemos escrever (3) da seguinte forma

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{b}{c} X(t) \left(\left(\frac{a}{X(t)} \right)^c - 1 \right) \quad \text{ou} \quad \frac{dX(t)}{dt} = \eta X(t)^m - \kappa X(t), \quad (5)$$

com $\eta = ba^c c^{-1}$, $m = 1 - c$ e $\kappa = bc^{-1}$. Este modelo foi proposto por von Bertalanffy [1] e estudado por Richards [10]. O *modelo de Bertalanffy-Richards* é muito flexível, incluindo como casos especiais algumas das funções de crescimento mais conhecidas. Em particular, quando $c = 1$ temos o modelo de Mitscherlich (1).

No caso $c = 0$, (3) corresponde ao *modelo de Gompertz*

$$\frac{dX(t)}{dt} = bX(t) (\ln a - \ln X(t)). \quad (6)$$

A solução de (3) é dada pela equação

$$Y(t) = A - (A - y_0) \exp \{-b(t - t_0)\}. \quad (7)$$

3 Modelos de equações diferenciais estocásticas

Consideremos o modelo (3). Ao adicionar um movimento browniano ou processo de Wiener, representando o efeito do ambiente aleatório, obtemos um modelo de equação diferencial estocástica

$$dY(t) = b(A - Y(t))dt + \sigma dW(t). \quad (8)$$

Aqui σ mede a intensidade das flutuações aleatórias do ambiente sobre o crescimento e $W(t)$ é um processo de Wiener, com incrementos $W(t) - W(s)$ independentes normalmente distribuídos com média zero e variância $t - s$, para $t \geq s$.

A equação (8) coincide com o já conhecido *modelo de Vasicek* utilizado na modelação da dinâmica das taxas de juro. Este modelo é uma variante do *modelo de Ornstein-Uhlenbeck*.

O modelo (8) é uma equação diferencial estocástica satisfazendo as condições do teorema de existência e unicidade. A solução é um processo de difusão homogéneo com coeficiente de tendência $b(A - y)$ e coeficiente de difusão σ^2 . Como o coeficiente de difusão não depende de y é indiferente usar o cálculo de Itô ou o de Stratonovich [2].

Aplicando a transformação $Z(t) = Y(t) - A$ em (8) obtemos o modelo de Ornstein-Uhlenbeck $dZ(t) = -bZ(t)dt + \sigma dW(t)$. Multiplicando ambos os membros desta equação pelo factor integrante e^{bt} vem $d(e^{bt}Z(t)) = \sigma e^{bt}dW(t)$, pelo que $e^{bt}Z(t) = z_0 + \int_0^t \sigma e^{bs}dW(s)$ e, portanto

$$Y(t) = A + e^{-bt}(y_0 - A) + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs}dW(s). \quad (9)$$

Como em (9) a função integranda é determinística, o integral estocástico segue uma distribuição normal de média 0 e variância $\int_0^t (e^{bs})^2 ds = (e^{2bt} - 1)/2b$. Logo, $Y(t)$ tem distribuição

$$\text{Normal} \left(A + e^{-bt}(y_0 - A), \frac{\sigma^2}{2b}(1 - e^{-2bt}) \right), \quad (10)$$

com a média e variância indicadas. Verificamos que, quando $t \rightarrow +\infty$, a distribuição transiente (10) converge para a distribuição normal de média A e variância $\sigma^2/2b$. Designando por $Y_{+\infty}$ uma variável aleatória com esta distribuição, podemos dizer que $Y(t)$ converge em distribuição para $Y_{+\infty}$. A densidade estacionária é a função densidade de probabilidade desta distribuição estacionária. Observamos que, ao contrário do que sucede no modelo determinístico (3) em que $Y(t)$ converge para um ponto de equilíbrio A , no modelo estocástico (8) a medida de crescimento $Y(t)$ flutua aleatoriamente mas a sua distribuição de probabilidade converge para uma distribuição de equilíbrio. O processo $Y(t)$ é ergódico e logo podemos estimar a média assintótica A e a variância assintótica $\sigma^2/2b$ usando médias e variâncias temporais ao longo da trajectória do processo.

Relembramos que $Y(t) = X^c(t)$ e $A = a^c$, quando $c \neq 0$. O facto de $Y(t)$ seguir uma distribuição normal permite valores negativos do processo, o que não faz sentido. No entanto, a probabilidade de tal ocorrer é, para os valores típicos dos parâmetros, desprezável.

No caso de $c = 0$, não há problema com os valores negativos pois trabalhamos com $Y(t) = \ln X(t)$ e $A = \ln a$, obtendo a equação diferencial estocástica

$$dX(t) = -bX(t)(\ln X(t) - \ln a)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (11)$$

que se pode escrever na forma

$$dX(t) = (\alpha X(t) - \beta X(t) \ln X(t))dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (12)$$

onde $\alpha = b \ln(a)$ e $\beta = b$. Neste caso, o processo $X(t)$ é o chamado *modelo de crescimento de Gompertz estocástico*.

4 Estimação

Vamos supor que o peso do animal é observado nos instantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ e designar os valores das observações do processo por $X_0 = X(t_0)$, $X_1 = X(t_1)$, ..., $X_n = X(t_n)$ e por $Y_0 = Y(t_0)$, $Y_1 = Y(t_1)$, ..., $Y_n = Y(t_n)$ os correspondentes valores de $Y(t)$.

Vamos estudar o modelo (8), cuja solução é dada por (9). Os parâmetros a estimar são a , b , c e σ e, no caso de desconhecermos o seu valor, c . O método da máxima verossimilhança foi o utilizado para estimar os parâmetros do modelo.

Para $k = 1, 2, \dots, n$, vemos que, usando o mesmo método que o usado para obter (9) mas com condição inicial $Y(t_{k-1}) = y_{k-1}$, vem

$$Y_k = A + e^{-b(t_k - t_{k-1})}(y_{k-1} - A) + \sigma e^{-bt_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{bs} dW_s.$$

Logo, condicionado a se ter $Y_{k-1} = y_{k-1}$, a função densidade de probabilidade de Y_k é

$$f_{Y_k|Y_{k-1}=y_{k-1}}(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})})}} \exp \left\{ -\frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b(t_k - t_{k-1})})^2}{2 \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})})} \right\}.$$

Seja $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o vector de observações de $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ o correspondente vector de observações de $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$. Obtemos a seguinte expressão para a função de log-verossimilhança

$$\begin{aligned} L(a, b, c, \sigma; \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^n \ln(f_{X_k|X_{k-1}}(x_k)) = \sum_{k=1}^n \ln \left(f_{Y_k|Y_{k-1}}(y_k) \frac{dY}{dX} \Big|_{x=x_k} \right) = \\ &= L_Y + \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{dY}{dX} \Big|_{x=x_k} \right), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} L_Y &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{\sigma^2}{2b} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})} \right) \\ &\quad - \frac{b}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \frac{(y_k - A - (y_{k-1} - A)e^{-b(t_k - t_{k-1})})^2}{1 - e^{-2b(t_k - t_{k-1})}}, \end{aligned}$$

com $y_k = x_k^c$, $A = a^c$ se $c \neq 0$ e com $y_k = \ln x_k$, $A = \ln a$ se $c = 0$. As estimativas de máxima verossimilhança \hat{a} , \hat{b} , $\hat{\sigma}$ e \hat{c} obtêm-se por maximização de L . Neste

caso recorremos a métodos numéricos, aplicando a rotina nlminb do software S-PLUS. Note-se que os estimadores obtidos são assintoticamente normais. Para os casos em que c é dado e pretendemos estimar apenas os parâmetros a , b e σ , maximizar L é equivalente a maximizar L_Y .

5 Previsão

Dados os valores do processo até ao instante t_k , Y_1, Y_2, \dots, Y_k , pretendemos prever o valor $Y(t)$ para $t > t_k$,

$$Y(t) = A + (Y_k - A)e^{-b(t-t_k)} + \sigma e^{-bt} \int_{t_k}^t e^{bs} dW(s).$$

Tendo em conta que $Y(t)$ é um processo de Markov, vem $E[Y(t)|Y_1, \dots, Y_k] = E[Y(t)|Y_k]$. Como $Y_t|Y_k$ segue uma distribuição normal com média $A + (Y_k - A)\exp(-b(t - t_k))$ e variância $\frac{\sigma^2}{2b}(1 - \exp(-2b(t - t_k)))$, podemos usar como previsão

$$\hat{Y}(t) = \hat{E}[Y(t)|Y_k] = \hat{A} + (Y_k - \hat{A})e^{-\hat{b}(t-t_k)}, \quad (13)$$

onde \hat{E} representa um estimador da esperança matemática. Podemos considerar $\hat{Y}(t) - Y(t)$ aproximadamente normal e obter um intervalo de confiança aproximado a 95% para $Y(t)$:

$$\hat{Y}(t) - E(\hat{Y}(t) - Y(t)) \pm 1.96\sqrt{\text{Var}(\hat{Y}(t) - Y(t))}. \quad (14)$$

6 Aplicação

Aplicámos os modelos a dados de bovinos mertolengos da estirpe rosilho, criados na região de Serpa, na margem esquerda do Guadiana, na Herdade da Abóboda. Os animais foram criados juntamente com as mães, em pastoreio, até ao desmame e posteriormente criados em pastoreio e suplementados com silagens durante os períodos de escassez de pastagem, o período de Outono e Inverno. Os dados correspondem ao peso de um animal. Temos 79 observações desde a nascença do animal até por volta dos seus 5 anos.

Aplicámos o modelo (8) para os casos particulares em que $c = 1$, $c = 1/3$, $c = 0$, e também para o caso em que o valor de c era suposto ser desconhecido, e portanto era necessário estimá-lo. Para estes casos, procedemos ao cálculo das estimativas de máxima verosimilhança cujos valores estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Estimativas de máxima verosimilhança.

	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}$	L
$\hat{c} = 0.2245$	417.4	1.206	0.187	-337.82
$c = 1$	449.7	0.655	79.65	-339.79
$c = 1/3$	422.4	1.096	0.525	-337.88
$c = 0$ (Gompertz)	407.1	1.472	0.226	-338.12

As estimativas não são comparáveis à exceção das do peso assintótico a . Na Tabela 1 estão também apresentados os valores da log-verosimilhança para cada modelo. Comparando apenas estes valores verificamos que aparentemente o "pior" modelo corresponde a $c = 1$, seguido do modelo de Gompertz ($c = 0$), $c = 1/3$ e claro, o melhor, o valor estimado por máxima verosimilhança $c=0.2245$. No entanto, tendo em conta o princípio da parcimónia e confirmando com os valores do critério AIC (Tabela 2), observamos que os melhores modelos de entre os estudados são os correspondentes a $c = 1/3$ e o de Gompertz. Foram estes os modelos que aplicámos aos dados.

Tabela 2: Critério AIC.

$c = 0.2245$	$c = 1$	$c = 1/3$	$c = 0$ (Gompertz)
683.64	685.58	681.76	682.24

Para os modelos seleccionados apresentamos, na figura 1, os gráficos das curvas na ausência do termo de variabilidade ambiental.

Calculámos a matriz de informação de Fisher para ambos os modelos:

$$I_{c=0} = \begin{bmatrix} 233.4 & 486 & 0 \\ 48.6 & 40.9 & -22.8 \\ 0 & -22.8 & 3057 \end{bmatrix} \quad I_{c=1/3} = \begin{bmatrix} 0.0008 & 0.0923 & 0 \\ 0.0923 & 32.170 & -9.998 \\ 0 & -9.998 & 566.5 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente obtivemos as matrizes de variâncias-covariâncias e correlações assintóticas:

$$V_{c=0} = \begin{bmatrix} 0.0057 & -0.0068 & -0.0001 \\ -0.0068 & 0.0327 & 0.0002 \\ -0.0001 & 0.0002 & 0.0003 \end{bmatrix} \quad V_{c=1/3} = \begin{bmatrix} 1732.04 & -4.9994 & -0.0882 \\ -4.9994 & 0.0457 & 0.0008 \\ -0.0882 & 0.0008 & 0.0018 \end{bmatrix}$$

$$R_{c=0} = \begin{bmatrix} 1 & -0.498 & -0.037 \\ -0.498 & 1 & 0.074 \\ -0.037 & 0.074 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{c=1/3} = \begin{bmatrix} 1 & -0.562 & -0.050 \\ -0.562 & 1 & 0.089 \\ -0.050 & 0.089 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Tabela 3 apresenta os limites dos intervalos de confiança assintóticos, a 95%, para os parâmetros.

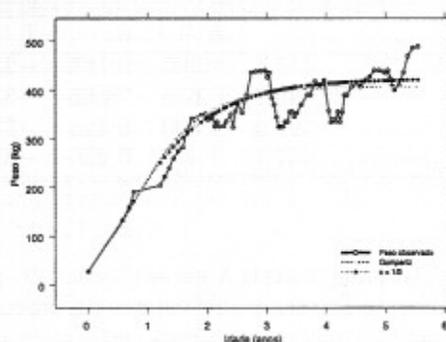


Figura 1: Curvas estimadas, para $c=0$ (Gompertz) e $c=1/3$, quando $\sigma = 0$.

Tabela 3: Intervalos de confiança assintóticos.

	a	b	σ
$c = 0$ (Gompertz)	407.1 ± 60.5	1.472 ± 0.354	0.226 ± 0.036
$c = 1/3$	422.4 ± 81.6	1.096 ± 0.525	0.525 ± 0.083

Utilizámos os modelos anteriores para prever valores futuros do peso. Para tal, deixámos as últimas oito observações da série para prever com base nos primeiros setenta valores do peso do animal. Realizámos previsão a um passo, que consiste no cálculo do valor previsto do peso, num dado instante, conhecendo o seu real valor no instante imediatamente anterior. Realizámos também previsão a longo prazo, em que os oito valores previstos são obtidos apenas com o conhecimento do valor do peso no instante t_{70} . Para obter os valores previstos utilizamos (13). Os limites de confiança, aproximados, a 95% para os valores do peso foram calculados através da expressão (14). Para o cálculo destes limites foi necessário recorrer a simulação para obter valores aproximados de $E(\hat{Y}(t) - Y(t))$ e $Var(\hat{Y}(t) - Y(t))$ uma vez que não foi possível chegar às suas expressões explícitas. Os resultados da previsão encontram-se ilustrados na figura 2. O modelo no caso $c = 1/3$ parece produzir melhores resultados de previsão do que o modelo de Gompertz. Os intervalos de confiança possuem uma menor amplitude e os valores previstos do peso estão mais próximos dos observados na realidade.

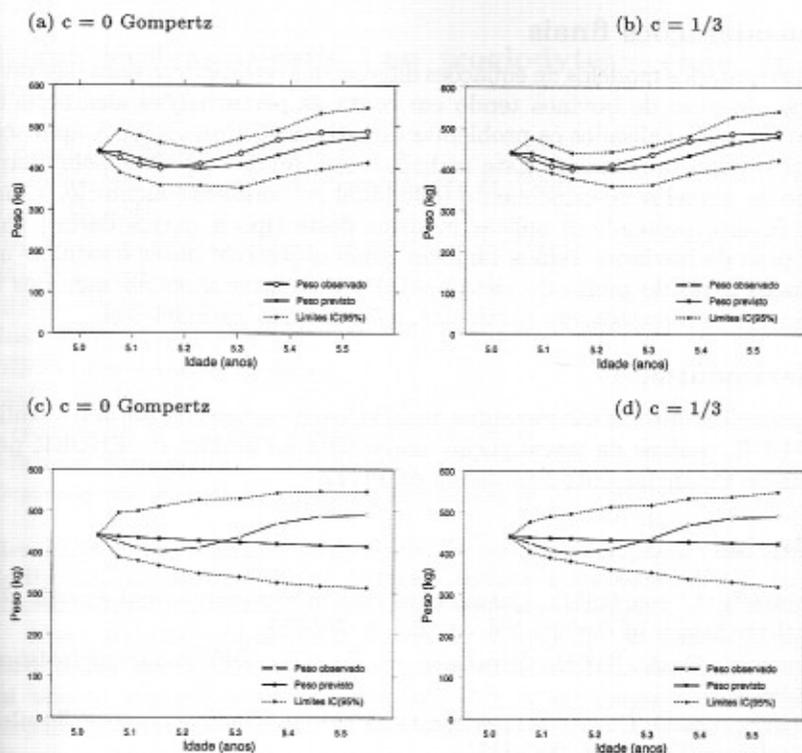


Figura 2: Gráficos de previsão. (a) e (b) previsão a 1 passo. (c) e (d) previsão a longo prazo.

Calculámos a raiz do erro quadrático médio (REQM), denominado também erro padrão de previsão, para comparar os modelos (Tabela 4).

Tabela 4: Valores de EQM e REQM.

	$c = 0.2245$	$c = 1$	$c = 1/3$	$c = 0$ (Gompertz)
REQM (1 passo)	20.30	19.01	19.93	21.23
REQM (longo prazo)	40.42	35.92	39.27	43.49

Os valores observados de REQM não são muito distintos e confirmam a ligeira superioridade do modelo baseado em $c = 1/3$ sobre o modelo de Gompertz ($c = 0$), se bem que o modelo que melhor se comporta no que respeita a este critério seja o correspondente a $c = 1$.

7 Considerações finais

Foram apresentados modelos de equações diferenciais estocásticas para descrever a evolução do peso de bovinos tendo em conta as perturbações aleatórias do ambiente. Foram analisados os problemas de estimação e previsão. A aplicação aos dados revelou-se razoável. Este trabalho resultou de trabalhos preliminares no estudo de modelos de crescimento individual em ambiente aleatório. Como trabalho futuro, pretende-se aplicar modelos deste tipo a outros dados, para além do peso de bovinos. Temos também como objectivos obter e estudar um modelo mais geral do ponto de vista analítico e recorrer a outros métodos de estimação dos parâmetros, em particular, métodos não-paramétricos.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores são membros do CIMA-UE e o terceiro autor é membro do ICAM-UE, centros de investigação financiados no âmbito do FEDER pelo Programa de Financiamento Plurianual da FCT.

Referências

- [1] Bertalanffy, L. von (1957). Quantitative laws in metabolism and growth. *The Quarterly Review of Biology*, Vol. 34, n. 3, p. 786-795.
- [2] Braumann, C. A. (2005). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas*. Edições SPE.
- [3] Freitas, A. (2005). Curvas de crescimento na produção animal. *Revista Brasileira de Zootecnia*, Vol. 35, p. 1843-1851.
- [4] Garcia, O. (1983). A stochastic differential equation model for the height of forest stands. *Biometrics*, Vol. 39, p. 1059-1072.
- [5] Goldsworthy, P. e Colegrove, M. (1974). Growth and yield of highland maize in Mexico. *Journal of Agriculture Science*, Vol. 83, p. 213-221.
- [6] Kozusko, F. e Bajzer, Z. (2003). Combining gompertzian growth and cell population dynamics. *Mathematical Biosciences*, Vol. 185, p. 153-167.
- [7] Mazini, A., Muniz, J., Aquino, L. e Silva, F. (2003). Análise da curva de crescimento de machos Hereford. *Ciência Agrotécnica*, Vol. 27, n. 5, p. 1105-1112.
- [8] Ohnishi, S. e Akamine, T. (2006). Extension of von Bertalanffy growth model incorporating growth patterns of soft and hard tissues in bivalve molluscs. *Fisheries Science*, Vol. 72, n. 4, p. 787-795.
- [9] Oliveira, H., Lôbo, R. e Pereira C. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Vol. 35, p. 1843-1851.
- [10] Richards, F. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, Vol. 10, p. 290-300.
- [11] Sengül, T. e Kiraz, S. (2005). Non-Linear models for growth curves in large white turkeys. *Turkish Journal of Veterinary and Animal Sciences*, Vol. 29, p. 331-337.
- [12] Valentine, H. (1985). Tree-growth models: derivations employing the pipe-model theory. *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 117, p. 579-585.

Estatística Ciência Interdisciplinar

Actas do XIV Congresso Anual da
Sociedade Portuguesa de Estatística

XIV CONGRESSO
Sociedade
Portuguesa de
estatística
Universidade de Beira Interior

Editores

Maria Eugénia Ferrão
Célia Nunes
Carlos A. Braumann

Estatística

Ciência Interdisciplinar

Actas do XIV Congresso Anual da
Sociedade Portuguesa de Estatística

Covilhã, 27 a 30 de Setembro de 2006

Editores: Maria Eugénia Ferrão
Célia Nunes
Carlos A. Braumann

Ano 2007
EdiçõesSPE

© 2007, Sociedade Portuguesa de Estatística

Editores: Maria Eugénia Ferrão, Célia Nunes, Carlos A. Braumann

Título: *Estatística: Ciência Interdisciplinar. Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*

Editora: Sociedade Portuguesa de Estatística

ISBN: 978-972-8890-12-4

Concepção Gráfica da Capa: LUPIM Design

Impressão: Novelgráfica

Tiragem: 500 exemplares

Depósito legal: 260676/07