

*Métodos de amostragem com parâmetros predefinidos adaptáveis: Uma análise estatística e económica***Elsa Rosmaninho***Departamento de Matemática, Universidade de Évora***Paulo Infante***Departamento de Matemática, Universidade de Évora*

**Resumo:** Diversos estudos têm mostrado que a alteração dos parâmetros de uma carta de controlo (instantes de amostragem, tamanho das amostras e limites de controlo) pode melhorar o seu desempenho, em particular para alterações pequenas e moderadas. Neste contexto, têm sido apresentados e analisados diversos esquemas de amostragem cujos parâmetros variam em função do valor da estatística amostral (esquemas adaptativos) e alguns outros cujos parâmetros são definidos no início do controlo do processo, mas não permanecem constantes ao longo do controlo do processo (esquemas com parâmetros predefinidos).

Em Infante e Rodrigues Dias (2004), considerando uma carta para a média, apresenta-se um novo método de amostragem em controlo de qualidade que combina as duas abordagens: os instantes de amostragem são calendarizados no início do controlo de acordo com a distribuição do tempo de vida do sistema sendo actualizados com a informação contida em cada amostra, através da função densidade da distribuição normal reduzida. O método revelou grandes potencialidades para sistemas com tempo de vida Weibull e taxas de risco crescentes, sendo sempre melhor que o método clássico de parâmetros fixos, o que não acontece com mais nenhum esquema adaptativo.

Neste trabalho, estuda-se o método combinado considerando diferentes distribuições de tempo de vida de forma a contemplar diferentes taxas de risco do sistema estendendo a sua aplicação à utilização simultânea das cartas para a média e para a amplitude de forma a contemplar também alterações da variabilidade do processo. Os resultados obtidos, nesta fase por simulação, são analisados de uma forma crítica e são comparados, com os obtidos para outros esquemas de amostragem anteriormente apresentados, através dos valores do AATS. Compara-se, ainda, o seu desempenho económico com o método VSI.

**Palavras-chave:** Controlo estatístico de qualidade, cartas de controlo, parâmetros adaptativos e predefinidos, simulação.

**Abstract:** Several studies have shown that changing control charts parameters (sampling intervals, sample sizes and control limits) can improve its performance, particularly, for small and moderate shifts. In this context, several sampling schemes were presented and analysed. Schemes whose parameters vary in function of the sample statistic are called adaptive schemes. On other hand, there are some schemes with predefined parameters, that is, schemes whose parameters are fixed but not constant for the duration of the monitoring operation.

Infante and Rodrigues Dias (2004), considering a  $\bar{X}$  chart, presents a new sampling method that combines both approaches: the sampling instants are schedule in the beginning of the control process according to the system lifetime distribution and are

actualized, with the information of each sample, by the density function of the standard normal random variable. This sampling scheme presents excellent potentialities. Particularly, this method is always more efficient than the classical periodic scheme for systems with Weibull lifetime distributions and increasing hazard rates, which is not the case with any other adaptive scheme.

In this paper, we extend these studies for process that are monitored by both,  $\bar{X}$  chart and R chart, considering different lifetime distributions in order to evaluate its performance for systems with different hazard rates. The obtained results, in this phase by simulation, are analyzed in a critical way and are compared, with the ones obtained for other sampling schemes previously presented, considering AATS values. We compare too its economic performance with the VSI sampling method.

**Keywords:** Statistical quality control, control charts, adaptive and predefined parameters, simulation.

## 1 Introdução

O Controlo Estatístico de Qualidade tem assumido um papel fundamental na melhoria da qualidade dos processos produtivos. Em particular, as cartas de controlo das médias e das amplitudes do tipo Shewhart devido, por um lado, à sua simplicidade, e, por outro lado, à possibilidade de controlar simultaneamente o nível médio e a variabilidade, têm-se mostrado de uma grande utilidade e são amplamente utilizadas no controlo dos mais variados processos.

Na sua concepção e utilização é necessário determinar os instantes de amostragem, os tamanhos das amostras e o múltiplo do desvio padrão nos limites de controlo. No método de amostragem clássico, as amostras de tamanho fixo são periodicamente recolhidas para análise e os valores da estatística amostral são representados numa carta de controlo com os usuais limites fixos “3-sigma”.

Nos últimos anos apareceram novos métodos de amostragem em controlo de qualidade. Em alguns procedimentos os parâmetros, não necessariamente constantes, são determinados antes do início do controlo do processo. Estes esquemas de amostragem são conhecidos por procedimentos com parâmetros predefinidos. Neste contexto podem ver-se, entre outros, os trabalhos de Banerjee e Rahim (1988), Parkhideh e Case (1989), Rahim e Banerjee (1993), Otha e Rahim (1997) e Costa e Rahim (2000). Em particular, Rodrigues Dias (2002) apresenta uma nova metodologia que denomina de Intervalos Predefinidos (IP) na qual os instantes de amostragem são definidos com base na taxa cumulativa de risco do sistema. Esta metodologia é comparada com outras em Infante (2004) e em Rodrigues Dias e Infante (preprint).

Numa outra classe de procedimentos de amostragem, pelo menos um parâmetro varia durante o processo de controlo em função dos valores da estatística amostral (que fornecem informação actualizada acerca do estado do processo produtivo). Têm surgido um grande número de artigos onde são estudados diferentes esquemas de amostragem ditos adaptativos, a partir do artigo inicial de Reynolds *et al.* (1988). Neste artigo os autores apresentam um método com intervalos

de amostragem variáveis, usualmente conhecido por método VSI, o qual considera dois intervalos de amostragem, sendo utilizado o menor quando o valor da estatística amostral cai numa zona próxima dos limites de controlo e o maior quando o valor da estatística amostral cai na zona que contém a linha central da carta de controlo. Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994) apresentam um método com tamanhos de amostras variáveis. Este método é usualmente designado por método VSS, sendo similar ao método anterior de intervalos variáveis. Neste, a amostra de maior dimensão é usada se o valor da estatística amostral pertencer à região que contém a linha central e a amostra de menor dimensão é usada se o valor da estatística amostral pertencer à região próxima dos limites de controlo. Prabhu *et al.* (1994) apresentam um método em que variam simultaneamente os intervalos de amostragem e os tamanhos das amostras. Este método, designado usualmente por VSSI, alterna um intervalo de amostragem maior e uma amostra de menor dimensão, quando a estatística amostral cai junto aos limites de controlo, com um menor intervalo de amostragem e uma amostra de maior dimensão, quando a estatística amostral está próxima dos limites de controlo. Costa (1999) propõe um método com os 3 parâmetros variáveis, alternando limites mais apertados, amostra de maior dimensão e intervalo de amostragem pequeno com limites mais amplos, amostra de menor dimensão e intervalo de amostragem maior. Em particular, Rodrigues Dias (1999) apresenta e analisa um novo método adaptativo (RD), o qual recorre à função densidade de probabilidade da variável normal reduzida para obter os intervalos de amostragem, que vão diminuindo à medida que o valor da estatística amostral se aproxima dos limites de controlo. Este método foi estudado e comparado com outros esquemas adaptativos de amostragem em Infante (2004).

Infante (2004) e Infante e Rodrigues Dias (2004) propõem um novo método de amostragem que combina o método de intervalos predefinidos IP proposto em Rodrigues Dias (2002) com o método adaptativo de amostragem RD proposto em Rodrigues Dias (1999), o qual tem revelado excelentes potencialidades. Na próxima secção apresentaremos este método e faremos a sua extensão ao uso simultâneo de uma carta de controlo para a média e outra para a amplitude. Na secção seguinte realizamos uma análise crítica comparativa entre o desempenho estatístico, em termos do período médio de mau funcionamento (AATS), deste método e de outros esquemas adaptativos usualmente considerados na literatura. Consideramos tempos de vida com diferentes taxas de risco associadas a diferentes valores do parâmetro de forma da distribuição de Weibull e um caso da distribuição de Burr.

Também é feita uma abordagem económica, comparando-se, para diferentes situações, o custo total médio por unidade de tempo de funcionamento do sistema obtido usando o método combinado com o custo total médio por unidade de tempo obtido considerando o método VSI. De um modo geral, a imensa bibliografia sobre controlo de qualidade não foca aspectos económicos. Duncan (1956) foi o primeiro autor a considerar este tipo de abordagem. A este propósito podem ver-se, entre outros, os trabalhos de Collani (1988), Vance (1983) e Ho e Case (1994). Os trabalhos referidos anteriormente a propósito dos procedi-

mentos com parâmetros predefinidos adoptam uma abordagem económica na qual uma função de um custo total é minimizada, sendo obtidos os instantes de amostragem e/ou dimensões amostrais e/ou coeficientes dos limites de controlo, onde a solução óptima é, no contexto de cada hipótese, específica do próprio modelo.

Em geral, os resultados obtidos neste trabalho com o método combinado, nesta fase recorrendo à simulação, são reveladores do seu muito bom desempenho para diferentes alterações da média e/ou do desvio padrão.

Terminamos com algumas considerações finais, sendo as conclusões mais específicas apresentadas ao longo do texto.

## 2 Método Combinado de Amostragem

Em Infante (2004) e em Infante e Rodrigues Dias (2004) apresenta-se um novo esquema de amostragem que combina a metodologia de intervalos predefinidos proposta em Rodrigues Dias (2002) com o método adaptativo de amostragem proposto por Rodrigues Dias (1999). Neste método, os instantes de amostragem são obtidos pela expressão

$$t_{i+1} = \theta t_{i+1}^{\text{RD}} + (1 - \theta) t_{i+1}^{\text{IP}} \quad (1)$$

$$\theta t_i^{\text{RD}} + (1 - \theta) \{k\phi(u_i) + R^{-1}[\exp(-i\Delta H - \Delta H)]\}, 0 \leq \theta \leq 1$$

em que os instantes de amostragem no método de intervalos predefinidos (IP) e no método de intervalos adaptativos (RD) são dados por:

$$t_{i+1}^{\text{IP}} = R^{-1}[\exp(-i\Delta H)] \quad (2)$$

$$t_{i+1}^{\text{RD}} = t_i + k\phi(u_i) \quad (3)$$

onde  $R(t)$  é a função de fiabilidade,  $k$  é uma constante de escala,  $\phi(u_i)$  é a função densidade da distribuição normal reduzida e  $u_i$  é a média standardizada da amostra obtida no instante  $i$ .

Os instantes de amostragem do método IP são obtidos de modo a que a taxa cumulativa de risco, entre dois quaisquer instantes consecutivos, seja constante e igual a  $\Delta H$ .

Os parâmetros  $k$  e  $\Delta H$  são calculados de modo a obtermos um dado período médio de amostragem (P) quando o processo está sob controlo. Em particular,

$$\Delta H \cong \frac{P}{E(T)} \quad (4)$$

O parâmetro  $\theta$  traduz o peso do esquema adaptativo. Quando  $\theta = 0,5$  (caso mais usado neste trabalho) ambos os métodos têm o mesmo peso.

Em termos práticos, antes de iniciar o controlo, os instantes de amostragem são calendarizados em função da distribuição do tempo de vida do sistema, isto é,

da expectativa do aparecimento de uma falha sendo actualizados sempre que se retira uma amostra em função do valor da média dessa amostra.

Em Infante (2004) e em Infante e Rodrigues Dias (2004) foi estudado este método, onde se podem observar algumas conclusões importantes sobre o mesmo.

### 2.1 Extensão do método para o uso simultâneo de uma carta de médias e uma carta de amplitudes

Neste trabalho, faz-se uma extensão do método combinado para o uso simultâneo de uma carta de médias e uma carta de amplitudes. Para tal, introduz-se uma alteração na obtenção dos instantes de amostragem pelo método adaptativo. Assim, o instante de amostragem é dado pela expressão

$$t_{i+1}^{\text{RD}} = t_i + k \min \{ \phi(u_i), \phi(w_i) \} \quad (5)$$

onde

$$\phi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu_i^2}{2}\right) \quad (6)$$

$$\phi(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w_i^2}{2}\right) \quad (7)$$

com

$$\mu_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0} ; w_i = \frac{r_i - \sigma_0 d_2}{\sigma_0 \sigma_w} \quad (8)$$

As grandezas  $E[W] = d_2$  e  $Var(W) = \sigma_W$  estão tabeladas para diferentes tamanhos de amostras.

Desta forma, utiliza-se o menor valor da função densidade da normal reduzida tomada para a média e para a amplitude da amostra, o que corresponde a considerar o valor da estatística mais próxima dos limites de controlo da respectiva carta.

Continuamos a obter o valor de  $\Delta H$  pela expressão (4). Relativamente ao parâmetro de escala  $k$  do método adaptativo, foi possível obter uma aproximação em função do peso do esquema adaptativo, para cada distribuição de tempo de vida considerada. Por exemplo, para uma distribuição de Weibull com parâmetro de forma  $\beta = 3$ , tem-se

$$k = -0,711\theta^2 + 1,753\theta + 3.4947 \quad (9)$$

ajustamento obtido com um valor do coeficiente de determinação igual a 0,997. Neste caso, calculou-se  $k$  de modo a que, sem perda de generalidade, obtivéssemos um período médio de amostragem unitário quando o processo está sob controlo.

### 3 Análise do Desempenho Estatístico

Para realizar uma análise do desempenho estatístico deste método, supõe-se que a produção, estando sob controlo estatístico, segue uma distribuição normal com média  $\mu_0$  e desvio padrão  $\sigma_0$ . Admite-se, por outro lado, que, após uma falha do sistema, a qualidade, embora ainda com distribuição normal, passa a ter uma nova média  $\mu_1 = \mu_0 + \lambda\sigma_0$ ,  $\lambda > 0$  e/ou novo desvio padrão  $\sigma_1 = \rho\sigma_0$ ,  $\rho > 1$ . Para podermos comparar a eficiência estatística deste método com a de outros, vamos comparar os respectivos períodos médios de mau funcionamento (AATS) considerando a grandeza:

$$Q_{\text{AATS}} = \frac{\text{AATS}_p - \text{AATS}_A}{\text{AATS}_p} \times 100\% \quad (10)$$

onde  $\text{AATS}_p$  é o período médio de mau funcionamento obtido utilizando o método periódico e  $\text{AATS}_A$  é o período médio de mau funcionamento utilizando um método adaptativo. Deste modo, a grandeza  $Q_{\text{AATS}}$  representa a variação relativa, em percentagem, dos valores do AATS obtidos segundo o método Periódico, em relação aos correspondentes valores de AATS obtidos segundo o método adaptativo considerado, tomando o esquema periódico como referência.

Todas as comparações são realizadas considerando todos os métodos nas mesmas condições com o processo sob controlo.

Os valores dos parâmetros de escala dos tempos de vida foram obtidos de modo a  $E(T) = 1000$ . Neste trabalho, considerámos amostras de tamanho 5, limites “3,25-sigma” para a carta das médias e limites “3,09-sigma” para a carta das amplitudes, de modo a obter-se um número médio de falsos alarmes igual a 2,4 em cada 1000 amostras, de modo análogo ao que se fez noutros trabalhos considerados neste contexto na literatura e, em particular, em Costa (1998), cujos valores dos parâmetros dos métodos adaptativos tomámos como referência para efeitos comparativos.

Vamos considerar a distribuição de Weibull com  $\beta = 0,7$  (taxa de risco decrescente),  $\beta = 3$  e  $\beta = 4$  (taxa de risco crescente) e a distribuição de Burr com  $c = 3$  e  $v = 1$  que corresponde a uma taxa de risco que começa por crescer e depois decresce à semelhança do que acontece com a distribuição lognormal (Zimmer *et al.* (1998)).

#### 3.1 Comparação com outros métodos adaptativos de amostragem

Foram calculados alguns valores de  $Q_{\text{AATS}}$  para alguns métodos adaptativos de amostragem usualmente considerados na literatura. À semelhança de Costa (1998), consideramos o método:

- a) VSI com  $d_1 = 1,2$ ;  $d_2 = 0,1$ ;  $n = 5$ ;  $W = 1,66$ ;
- b) VSS com  $n_1 = 4$ ;  $n_2 = 10$ ;  $W = 1,71$ ;
- c) VSSI com  $d_1 = 1,18$ ;  $d_2 = 0,1$ ;  $n_1 = 4$ ;  $n_2 = 10$ ;  $W = 1,71$ ;

- d) VP com  $d_1 = 1,18$ ;  $d_2 = 0,1$   $n_1 = 4$ ;  $n_2 = 10$ ;  $W_1 = 1,71$ ;  $L_1 = 5$ ;  $W_2 = 1,68$ ;  $L_2 = 2,7$ ;  $W_R(n_1) = 3,32$ ;  $L_R(n_1) = 6$ ;  $W_R(n_2) = 4,17$  e  $L_R(n_2) = 5,30$  ( $L_i$  limites de controlo para a carta das médias,  $L_R$  limites de controlo para a carta das amplitudes).

Tabela 1: Valores de  $Q_{AATS}$  para diferentes alterações da média ( $\lambda$ ) e/ou do desvio padrão ( $\rho$ )

QAATS		$\rho$				
$\lambda$	Método	1	1,25	1,5	1,75	2
0	comb $\beta=0,7$	0	47,75	46,90	42,16	36,77
	comb $\beta=3$	0	62,60	61,92	58,74	54,83
	comb $\beta=4$	0	67,12	66,83	64,47	60,45
	Burr	0	57,97	56,56	53,44	48,24
	Vp	0	47,63	59,31	56,20	46,73
	VSSI	0	28,31	51,84	55,67	49,07
	VSS	0	7,22	19,96	22,96	19,16
	VSI	0	22,63	38,57	44,59	42,99
0,5	comb $\beta=0,7$	41,86	39,60	42,63	39,65	35,37
	comb $\beta=3$	59,35	57,13	59,10	57,45	53,31
	comb $\beta=4$	64,22	62,30	64,66	63,22	59,52
	Burr	53,84	51,20	53,44	51,35	47,73
	Vp	68,90	63,71	61,17	54,52	44,50
	VSSI	45,77	51,84	57,26	54,84	47,12
	VSS	32,28	26,59	25,45	23,23	18,32
	VSI	18,44	32,74	42,41	45,16	41,88
0,75	comb $\beta=0,7$	32,43	32,79	36,64	36,93	32,96
	comb $\beta=3$	53,72	53,18	55,22	54,49	51,60
	comb $\beta=4$	60,19	59,70	61,52	61,08	57,89
	Burr	46,91	46,04	49,37	48,82	45,21
	Vp	77,83	67,61	59,95	51,41	40,72
	VSSI	70,72	63,25	58,99	53,01	43,71
	VSS	52,49	37,64	28,54	22,49	16,17
	VSI	36,15	41,49	45,32	44,58	40,12
1	comb $\beta=0,7$	31,52	29,65	32,53	32,44	29,77
	comb $\beta=3$	54,03	51,71	52,74	51,14	48,68
	comb $\beta=4$	61,54	59,12	58,80	58,65	55,20
	Burr	46,59	43,99	45,24	45,15	42,56
	Vp	74,24	63,91	55,27	46,11	35,92
	VSSI	73,05	63,66	56,36	48,70	39,44
	VSS	52,88	38,60	28,00	20,21	14,08
	VSI	50,34	47,62	46,18	43,01	37,32
1,5	comb $\beta=0,7$	26,92	24,77	25,01	23,67	22,01
	comb $\beta=3$	48,90	47,01	46,19	44,03	41,28
	comb $\beta=4$	56,78	55,15	52,98	50,77	48,35
	Burr	41,54	40,47	38,91	37,16	34,89
	Vp	40,74	37,78	33,86	28,07	22
	VSSI	44,44	41,48	37,80	32,46	26
	VSS	19,26	17,78	14,17	10,53	6
	VSI	43,70	40,74	37,01	32,46	27
2	comb $\beta=0,7$	11,31	13,00	15,41	14,97	13,13
	comb $\beta=3$	31,47	34,12	35,70	36,27	33,84
	comb $\beta=4$	38,21	40,63	43,44	42,65	40,74
	Burr	25,13	27,31	28,94	28,85	27,08
	Vp	-7,94	0,00	5,41	6,67	4,11
	VSSI	3,17	7,25	12,16	12,00	9,59
	VSS	-9,52	-5,80	-2,70	-1,33	-1,37
	VSI	3,17	10,14	13,51	14,67	12,33

Da sua observação, podemos retirar as seguintes conclusões:

1. Para todas as alterações consideradas e todas as distribuições dos tempos de vida, o método combinado é sempre melhor que o método periódico, sendo tanto melhor quanto mais acentuadamente crescente for a taxa de risco do sistema e, de um modo geral, quanto menor for a alteração da média e/ou do desvio padrão. As reduções no AATS são sempre superiores a 10%, chegando a ser quase 70% em algumas situações consideradas.
2. No caso em que só há apenas uma alteração  $\rho$  do desvio padrão, pode-se concluir que o método combinado é sempre melhor que a maior parte dos métodos aqui considerados. Como exceção tem-se o caso em que  $\rho = 1,5$  para o qual o método VP conduz a reduções maiores que o combinado no caso de um tempo de vida com distribuição de Weibull com  $\beta = 0,7$  ou de Burr. Contudo esta redução não é muito acentuada.
3. Ainda no caso em que só há alteração do desvio padrão, pode-se observar que para o método combinado o valor do  $Q_{AATS}$  vai diminuindo com o aumento da alteração do desvio padrão  $\rho$ . Para os restantes métodos  $V_p$ , VSSI, VSS e VSI, o valor do  $Q_{AATS}$  começa por aumentar até um determinado valor de  $\rho$  e depois diminui. A mesma conclusão se pode retirar para o caso de uma alteração da média  $\lambda = 0,5$ .
4. Para alterações da média  $0,5 \leq \lambda \leq 1$ , o método  $V_p$  e o método VSSI conduzem a maiores reduções que o método combinado quando  $\beta = 0,7$  e  $\beta = 3$  quando consideramos também pequenas alterações do desvio padrão. Para as outras distribuições consideradas o método combinado tem um melhor desempenho.
5. No caso de alterações da média de magnitude  $\lambda \geq 1,5$ , o método combinado tem melhor desempenho que qualquer um dos outros métodos considerados quando a distribuição do tempo de vida tem uma taxa de risco crescente.
6. Para grandes alterações da média e do desvio padrão o método combinado tem sempre melhor desempenho.

### 3.2 Comparação com o método TSS

Para além da comparação do método combinado com outros utilizados na literatura, compara-se ainda o método combinado com um método mais recente que foi introduzido por Costa e Rahim (2004) e que se denomina de método TSS (two-stage sampling).

Este método consiste em retirar uma amostra de dimensão  $n$  começando por analisar um elemento. Se esse elemento estiver próximo da linha central prossegue-se o processo sem ser analisado mais nenhum elemento da amostra e só se volta a retirar outra amostra quando estava previsto. Pelo contrário, se esse elemento está na zona próxima dos limites de controlo, os restantes elementos são analisados. No estudo comparativo tomamos duas versões do método TSS consideradas em Costa e Rahim (2004). Na versão TSS1 consideram-se amostras de dimensão 15 e na versão TSS2 consideram-se amostras de dimensão 20.

No método combinado vamos considerar o caso em que  $\theta = 0,5$  para uma distribuição de tempo de vida Weibull com parâmetro de forma  $\beta = 3$ . De modo a estarmos nas mesmas condições sob controlo, vamos utilizar limites “3,25-sigma” para a carta das médias e limites “3,6-sigma” para a carta das amplitudes.

A comparação foi feita tomando uma grandeza  $Q_{AATS^*}$  que resulta da expressão (10) substituindo o AATS do esquema periódico pelo AATS do esquema TSS. Na Figura 1 podemos observar os resultados obtidos.

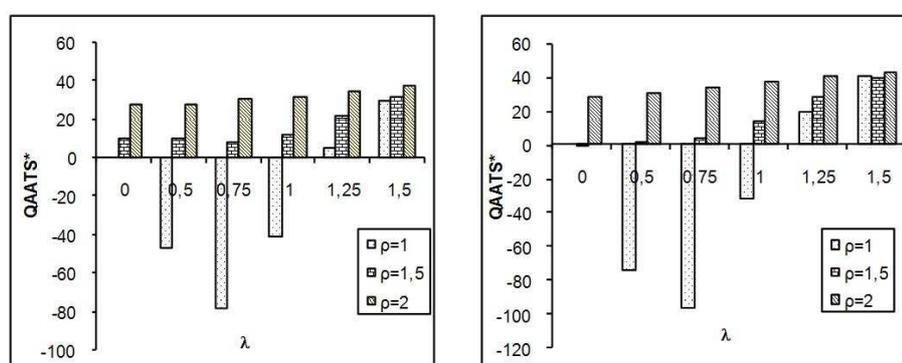


Figura 1: Valor de  $Q_{AATS^*}$  para diferentes alterações da média ( $\lambda$ ) e para alterações do desvio padrão  $\rho = 1, 5$  e  $\rho = 2$ , considerando duas versões do método TSS (TSS1 - esquerda e TSS2 - direita).

Pela observação da Figura 1 pode-se concluir que:

1. Quando há apenas uma alteração do desvio padrão, isto é, quando  $\lambda = 0$ , o método combinado é mais eficiente que o método TSS1.
2. Para alterações da média de magnitude  $\lambda > 1$ , o método combinado é sempre melhor que o método TSS1.
3. Nos casos em que  $0,5 \leq \lambda \leq 1$  o método TSS2 tem melhor desempenho para  $\rho = 1$ , enquanto que o método combinado tem melhor desempenho quando se altera também o desvio padrão.
4. Para alterações da média  $\lambda > 1$  o método combinado tem sempre melhor desempenho que o método TSS2.

### 3.3 Análise de sensibilidade do valor do tempo médio de vida

Neste trabalho, considera-se um tempo médio de vida igual a 1000. Com o objectivo de verificar se o valor considerado para o tempo médio de vida tem influencia significativa sobre os valores do período médio de mau funcionamento do método combinado, obtivemos os valores do AATS para diferentes alterações da média e do desvio padrão tomando também  $E(T) = 100$ . Na Tabela 2 podem observar-se os resultados obtidos.

Tabela 2: Valores do AATS para  $E(T) = 100$  e  $E(T) = 1000$  para diferentes alterações da média ( $\lambda$ ) e/ou do desvio padrão ( $\rho$ ).

$\lambda$	AATS		$\rho$				
		1	1,25	1,5	1,75	2	
0	$E(T)=100$	0	12,45	3,26	1,51	0,95	
	$E(T)=1000$	0	13,57	3,42	1,56	0,97	
0,5	$E(T)=100$	20,51	6,32	2,43	1,29	0,87	
	$E(T)=1000$	22,83	6,76	2,51	1,32	0,89	
0,75	$E(T)=100$	7,05	3,48	1,80	1,09	0,80	
	$E(T)=1000$	7,62	3,66	1,87	1,13	0,81	
1	$E(T)=100$	2,57	1,87	1,27	0,91	0,71	
	$E(T)=1000$	2,71	1,93	1,30	0,94	0,73	
1,5	$E(T)=100$	0,67	0,69	0,67	0,63	0,58	
	$E(T)=1000$	0,69	0,72	0,68	0,64	0,59	
2	$E(T)=100$	0,433	0,453	0,469	0,475	0,477	
	$E(T)=1000$	0,432	0,455	0,476	0,478	0,483	

Pela análise da Tabela 2 observa-se uma redução do AATS quando há alteração do tempo médio de vida de 1000 para 100. Contudo, a redução não é relevante sendo um pouco mais acentuada para pequenas alterações da média e do desvio padrão. Neste caso, podemos concluir que ao diminuir o número de amostras analisadas sob controlo, o método combinado melhora ligeiramente o seu desempenho, a que não é alheio o facto de resultar da combinação de dois métodos em que num deles os instantes de amostragem são agendados em função das expectativas de aparecimento de uma falha.

#### 4 Análise do Desempenho Económico

Neste ponto pretende-se comparar o método combinado com o método adaptativo VSI, em termos de custo total por unidade de tempo.

##### 4.1 Modelo

Tal como em Infante e Rodrigues Dias (2002), vamos considerar um modelo económico com as seguintes grandezas:

- $C1$  - Custo de obtenção e análise de uma amostra, bem como da marcação dos pontos nas cartas
- $C2$  - Custo médio de procura de uma falha quando esta não existe
- $C3$  - Custo médio de detecção de uma falha quando esta existe
- $C4$  - Custo médio de reparação de uma falha do sistema
- $P(fa)$  - Probabilidade de ocorrer um falso alarme
- $E(N)$  - Número médio de amostras inspeccionadas sob controlo
- $T2$  - Tempo médio de procura de uma falha quando esta não existe
- $T3$  - Tempo médio de detecção de uma falha quando esta existe
- $T4$  - Tempo médio de reparação de uma falha do sistema
- $G$  - Lucro por unidade de tempo durante o bom funcionamento do sistema

$G'$  - Lucro por unidade de tempo durante o funcionamento defeituoso do sistema

O custo total por unidade de tempo é o quociente entre o custo total por ciclo e o tempo de duração do ciclo.

O custo total médio por ciclo pode ser decomposto, de acordo com o modelo adaptado, em três parcelas. Assim, considerando, neste caso, que não há paragem do processo produtivo quando um ponto cai fora dos limites de controlo, temos:

- a) uma parcela referente aos falsos alarmes: verifica-se um custo  $C2$  por cada procura de uma causa que não existe.
- b) outra parcela referente às falhas do sistema: verificam-se os custos de detecção  $C3$ , de reparação  $C4$ , e ainda o custo de mau funcionamento do sistema durante  $(AATS + T3)$  dado por  $(G - G') \times (AATS + T3)$  e o custo  $G \times T4$  porque supomos não haver produção enquanto o sistema é reparado.
- c) uma outra parcela, por fim, referente à amostragem e análise de produtos dada por  $C1 \times (N_a + N_d)$ , onde  $N_a$  representa o número de amostras inspeccionadas antes do sistema falhar e  $N_d$  o número de amostras inspeccionadas depois do sistema falhar.

Representando-se por  $C$  o custo total por unidade de tempo, tem-se neste contexto, que o custo total médio por unidade de tempo é dado por:

$$E(C) = \frac{[P(fa) \cdot E(N) \cdot C2] + [(E(N) + 1/(1-\beta)) \cdot C1]}{E(T) + AATS + T3 + T4} + \frac{[C3 + C4 + G_m \cdot (T3 + AATS) + G \cdot T4]}{E(T) + AATS + T3 + T4} \quad (11)$$

onde o  $\beta$  representa o erro de tipo II.

Para este estudo, sem perda de generalidade, são considerados os seguintes valores:  $C2 = 20$ ,  $T2 = 2$ ,  $C3 = 10$ ,  $T3 = 1$ ,  $C4 = 100$ ,  $T4 = 3$ ,  $G_m = 100$ , em que se toma  $G = 100$  e  $G' = 0$  e  $C1 = 11, 18$ .

#### 4.2 Comparação de custos com o método VSI

Tendo como base o modelo económico apresentado anteriormente, foram calculados os valores dos custos totais por unidade de tempo usando o método combinado e usando o método VSI. Para os comparar consideramos uma grandeza  $Q_C$  que representa a variação relativa, em percentagem, dos valores do custo total médio obtido com o método VSI ( $E(C_{VSI})$ ), em relação ao correspondente valor do custo total médio obtido com o método Combinado ( $E(C_C)$ ). A expressão de  $Q_C$  é dada por:

$$Q_C = \frac{E(C_{VSI}) - E(C_C)}{E(C_{VSI})} \times 100\% \quad (12)$$

Considera-se a versão do método combinado em que  $\theta = 0,5$ . Para o método VSI toma-se  $d_1 = 1,2$ ;  $d_2 = 0,1$ ;  $W = 1,66$ .

Os resultados obtidos para diferentes alterações da média ( $\lambda$ ) e uma alteração do desvio padrão  $\rho = 0,25$ , e considerando as distribuições de tempo de vida podem ser observadas na Figura 2.

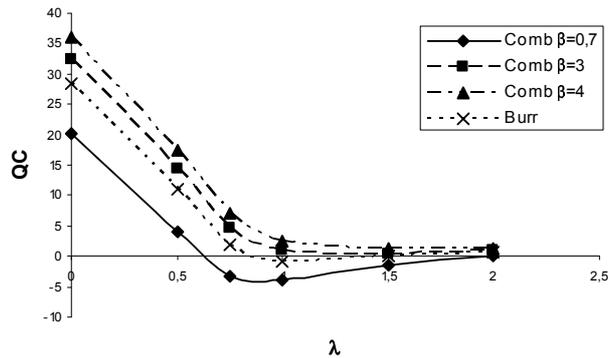


Figura 2: Valores de  $Q_C$  para diferentes alterações da média ( $\lambda$ ) e para uma alteração do desvio padrão  $\rho = 1,25$  considerando  $\theta = 0,5$  no método combinado e  $d_1 = 1,2$ ;  $d_2 = 0,1$ ;  $W = 1,66$  no método VSI.

Pela observação da Figura 2 pode-se concluir que:

1. Para pequenas alterações da média, isto é, para  $\lambda < 0,6$  o método combinado conduz sempre a menores custos que o método VSI.
2. Nos casos em que se tem taxas de risco crescente ou para a distribuição de Burr, os valores de  $Q_C$  decrescem até  $\lambda = 1$ , e o método combinado conduz sempre a menores custos. Para  $\lambda > 1$  o método combinado continua a ser melhor que o VSI, mas a diferença não é relevante.
3. O único caso em que o método VSI é melhor que o combinado é quando se tem taxa de risco decrescente no método combinado para alteração da média  $0,6 < \lambda < 2$ .
4. As reduções chegam a ser da ordem dos 25% - 35%.

Saliente-se que estes resultados foram obtidos sem estarmos a considerar a situação mais favorável ao método combinado.

## 5 Considerações finais

Neste trabalho apresentámos e analisámos a extensão, ao uso simultâneo de uma carta de controlo para a média e outra para a amplitude, de um novo esquema de amostragem que combina uma metodologia de intervalos predefinidos e um método adaptativo, sendo o intervalo de amostragem, em cada instante de inspeção, igual à média ponderada dos intervalos de amostragem que seriam

obtidos com cada um dos métodos individualmente. Trata-se de um procedimento de amostragem muito simples que não exige quaisquer alterações nas cartas de controlo, mas que exige o conhecimento da distribuição do tempo de vida do sistema.

Com base em resultados obtidos por simulação, para tempos de vida com distribuição de Weibull e distribuição de Burr, realizámos um estudo comparativo do desempenho estatístico deste método com outros focados na literatura e comparámos o seu desempenho económico com o do método VSI, em termos de um custo total por unidade de tempo. Apesar de nas secções anteriores se terem feito, à medida que os resultados numéricos iam sendo apresentados, as análises pertinentes, deixamos aqui a síntese dos pontos que nos parecem ser mais significativos.

Assim, por um lado, o método apresentado tem sempre um desempenho claramente superior ao do esquema periódico clássico, sendo globalmente superior aos dos outros esquemas adaptativos, em particular para sistemas com taxas de risco crescentes. Por outro lado, a maior eficiência deste método relativamente à dos outros esquemas adaptativos acentua-se com o aumento da alteração da média considerada. Em termos do desempenho económico, relativamente ao método VSI, o método combinado conduz globalmente a um menor custo total médio por unidade de tempo, acentuando-se esta diferença para pequenas alterações da média. Pensamos, pois, que este método constitui uma alternativa, tomando em linha de conta o conjunto dos resultados e os requisitos necessários a cada um.

Refira-se, por fim, que a ideia subjacente a este método pode ser melhorada, em determinadas situações, introduzindo novos esquemas adaptativos de amostragem, como sejam o VSI e o método VSS. Obter os parâmetros de modo a minimizar um custo total médio de funcionamento e fazer a extensão do método combinado a outras cartas de controlo (desvio padrão em vez de amplitudes e atributos) são algumas das ideias que pensamos explorar e que merecerão certamente a nossa atenção.

## Referências

- [1] Banerjee, P. K. and Rahim, M. A. (1988) Economic Design of  $\bar{X}$  Control Charts Under Weibull Shock Models, *Technometrics*, 30, p.407-414.
- [2] Collani, E., (1998) An Updated Bibliography of Economic Quality Control Procedures, *Economic Quality Control*, 3, p.48-62.
- [3] Costa, A. (1994)  $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size. *Journal of Quality Technology*, 26, p.155-163.
- [4] Costa, A. (1998) Joint  $\bar{X}$  and R charts with variable parameters, *IIE Transactions* 30, p.505-514.
- [5] Costa, A. (1999)  $\bar{X}$  Charts with Variable Parameters. *Journal of Quality Technology*, 31, p.408-416.

- [6] Duncan, A. J., (1956) The Economic Design of X - Charts Used to Maintain Current Control of a Process, *Journal of the American Statistical Association*, 51, p. 228-242.
- [7] Ho, C.; Case, K. E., (1994) Economic Design of Control Charts: A Literature Review 1981-1991, *Journal of Quality Technology*, 26, p.39-53.
- [8] Infante, P. (2004) *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. PhD Thesis, University of Évora.
- [9] Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2002) Análise da Importância da Distribuição de Tempo de Vida no Período de Inspeção em Controlo Estatístico de Qualidade, *Investigação Operacional*, 22 167-179
- [10] Infante, P.; Rodrigues Dias, J. (2004): “Esquema Combinado de Amostragem em Controlo de Qualidade com Intervalos Predefinidos Adaptáveis”, *Estatística com Acaso e Necessidade*. Editores: P. Rodrigues, E. Rebelo e F. Rosado, p.335-347.
- [11] Otha, H. and Rahim, M. A. (1997) A Dynamic Economic Model for an  $\bar{X}$  Control Chart Design. *IIE Transactions* 29, 481-486.
- [12] Parkhideh, B. and Case, K. E. (1989) The Economic Design of a Dynamic  $\bar{X}$  Control Chart, *IIE Transactions*, 21, p.313-323.
- [13] Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B. (1993) An Adaptive Sample Size  $\bar{X}$  Chart. *International Journal of Production Research*, 31, p.2895-2909.
- [14] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1994) A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme. *Journal of Quality Technology*, 27, p.74-83.
- [15] Rahim, M. A. and Banerjee, P. K. (1993) *A Generalized Model for the Economic Design of  $\bar{X}$  Control Charts for Production Systems with Increasing Failure Rate and Early Replacement*. *Naval Research Logistics*, 40, p.787-809.
- [16] Reynolds, M. R., Jr.; Amin, R. W.; Arnold, J. C.; Nachlas, J. A. (1988) -  $\bar{X}$  Charts With Variable Sampling Intervals, *Technometrics*, 30, p.181-192.
- [17] Rodrigues Dias, J. (1999) *Analysis of a New Method to Obtain Different Sampling Intervals in Statistical Quality Control*. Proceedings of the IV Congreso Galego de Estatística e Investigación de Opérations, University of Santiago de Compostela, p.155-158.
- [18] Rodrigues Dias, J. (2002) Amostragem em Controlo de Qualidade com Intervalos Diferentes Predefinidos: Uma Nova Abordagem. Proceedings of the VIII JOCLAD.
- [19] Rodrigues Dias, J.; Infante, P. (preprint) *Control Charts with Predetermined Sampling Intervals*. Submetido.
- [20] Vance, L. C., (1983) A Bibliography of Statistical Quality control Chart Techniques, 1970-1980, *Journal of Quality Technology*, 15, p.59-62.
- [21] Zimmer, W. J.; Keats, J. B.; Wang, F. K. (1998) - The Burr XII Distribution in Reliability Analysis, *Journal of Quality Technology*, 30, p.386-394.