

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

# **Iteradas de aplicações do plano no plano**

Diogo Pedro Ferreira Nascimento Baptista

Orientador: Doutora Sandra Maria Santos Vinagre

Co-orientador: Doutor Ricardo José Mendes Severino

"Esta Tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri."

Dezembro de 2008

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

# Iteradas de aplicações do plano no plano

Diogo Pedro Ferreira Nascimento Baptista



170 178

Orientador: Doutora Sandra Maria Santos Vinagre

Co-orientador: Doutor Ricardo José Mendes Severino

"Esta Tese não inclui as críticas e sugestões feitas pelo júri."

Dezembro de 2008

## RESUMO

Neste trabalho estudamos as iteradas de aplicações do plano no plano. Usando as técnicas da dinâmica simbólica em aplicações do plano no plano, tendo sempre por base a teoria de amassamento de Milnor e Thurston e o formalismo da dinâmica simbólica desenvolvido por Sousa Ramos, abordamos diferentes aspectos qualitativos da dinâmica das aplicações de Lozi.

Assim, através da dinâmica simbólica introduzida por Yutaka Ishii, começamos por reformular a fronteira do espaço dos parâmetros correspondente às aplicações de Lozi equivalentes à ferradura de Smale. No seguimento, apresentamos um método que permite a construção da bacia de atracção para o atractor de uma qualquer aplicação de Lozi.

Ainda usando a dinâmica simbólica para as aplicações de Lozi, apresentamos um método que fazendo uso de expansões em fracções contínuas, nos permite calcular o maior dos expoentes de Lyapunov de uma aplicação de Lozi.

Com a introdução do conceito de ponto crítico e subsequentemente de sequência de amassamento para as aplicações de Lozi, partimos para uma a construção de uma partição de Markov do seu espaço de fases. Desse modo, é possível a caracterização completa do espaço dos parâmetros através da introdução do conceito de curva de amassamento, que mostramos serem curvas isentrópicas. Consequentemente, obtemos a descrição em termos da entropia topológica da família das aplicações de Lozi.

**PALAVRAS-CHAVE:** Aplicações no plano, hiperbolicidade, atractores estranhos, dinâmica simbólica, partição de Markov, invariantes topológicos.



## ABSTRACT

In this work, we study the iterations of two dimensional maps. Using symbolic dynamics techniques for two dimensional maps, based on both the kneading theory of Milnor and Thurston and the formalism of symbolic dynamics developed by Sousa Ramos, we studied the qualitative aspects of the dynamics of Lozi maps.

Thus, through the symbolic dynamics introduced by Yutaka Ishii, through the correction of symbolic sequence that characterized the first tangency between stable and unstable manifolds, we reformulate the border for the Smale horseshoes. Following this work, we present a method that allows the construction of the basin of attraction for the Lozi attractor. Even using the symbolic dynamics, we introduce a new method, using continuous fractions expansions, that allow us to compute the largest Lyapunov exponent.

Through the kneading sequence for Lozi map, we characterize the region in the parameter space where we have the kneading curves and we also give a method to the construction of a partition of Markov for the Lozi attractors. Consequently we characterize the topological entropy for the Lozi map, and construct a new topological invariant, the second invariant.

**KEYWORDS:** Two dimensional maps, hiperbolicity, strange attractors, symbolic dynamics, Markov partition, topological invariants.



## AGRADECIMENTOS

Ao Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria, à Escola Superior de Tecnologia e Gestão, ao Instituto Politécnico de Leiria, ao Departamento de Matemática da Universidade de Évora e ao Centro de Investigação em Matemática e Aplicações da Universidade de Évora, agradeço todo o apoio institucional.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia pela concessão da bolsa de investigação que, com o co-financiamento do POCI 2010 e do FSE, apoiaram a execução deste trabalho.

Aos meus orientadores Professora Doutora Sandra Maria Vinagre e Professor Doutor Ricardo Severino. Não posso deixar de dizer que os seus conhecimentos, dedicação, compreensão e amizade tiveram um papel muito importante no desenrolar de todo este trabalho.

À Xana, agradeço por tudo. Agradeço também ao Duarte, não pelas noites mal dormidas, mas pelo seu fantástico sorriso que serviu muitas vezes de motivação.





**Dedico este trabalho,**

**à Xana e ao Duarte,**

**pois sem eles, não teria sentido;**

**ao Professor Sousa Ramos,**

**pois sem ele, não teria existido.**



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Aplicações no plano e hiperbolicidade</b>	<b>7</b>
2.1	Hiperbolicidade . . . . .	8
2.1.1	Conjuntos hiperbólicos . . . . .	9
2.1.2	Variedades Invariantes . . . . .	10
2.2	A família de aplicações de Lozi . . . . .	11
2.2.1	Pontos fixos . . . . .	11
2.2.2	Órbita periódica de período dois . . . . .	12
2.2.3	Atractor estranho . . . . .	14
2.2.4	Regiões no espaço dos parâmetros . . . . .	18
2.2.5	Hiperbolicidade das aplicações de Lozi . . . . .	19
2.3	Bacia de atracção . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Dinâmica Simbólica para a Família de Aplicações de Lozi</b>	<b>31</b>
3.1	Dinâmica simbólica das aplicações tenda . . . . .	31
3.2	Dinâmicas do plano para o plano . . . . .	36
3.2.1	A ferradura de Smale . . . . .	36
3.2.2	Bifurcações homoclínicas e atractores . . . . .	42
3.3	Dinâmica simbólica para os atractores de Lozi . . . . .	45
3.3.1	A poda do espaço simbólico . . . . .	51
3.3.2	O problema da primeira tangência . . . . .	56
3.4	Exponentes de Lyapunov para a aplicação de Lozi . . . . .	58

<b>4</b>	<b>Partições de Markov para aplicações de Lozi</b>	<b>67</b>
4.1	Partições de Markov . . . . .	67
4.2	Partições de Markov dos automorfismos lineares do toro . . . . .	74
4.3	Sequências de amassamento de aplicações de Lozi . . . . .	80
4.4	Partição de Markov para uma aplicação de Lozi . . . . .	88
4.5	Invariantes topológicos para a família de aplicações de Lozi . . . . .	94
	<b>Bibliografia</b>	<b>99</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas tem-se assistido a um interesse crescente, no sentido de um maior entendimento, relativamente ao que entretanto se apelidou de comportamento caótico. Este tipo de evolução temporal de um sistema, que aparenta ser transversal a toda a Natureza, seja em reacções químicas, em fenómenos de mecânica dos fluidos, na observação da dinâmica de satélites no sistema solar, na meteorologia, ou em circuitos eléctricos, mas igualmente perceptível em processos da actividade humana, como no crescimento de populações, ou em fenómenos económicos, não pode mais ser encarado como excepção à regra do comportamento regular que durante as últimas quatro centenas de anos tem sido descrito por leis. Contudo, a enorme diversidade dos fenómenos em causa faz com que este tipo de comportamento seja extremamente difícil de caracterizar nas suas componentes mais básicas. É por isso fundamental encontrar modelos simplificados para esses fenómenos, modelos que ainda retenham o carácter complexo da evolução temporal dos sistemas, mas que sejam passíveis de um estudo matemático mais profundo, embora por vezes só possível através de uma simulação computacional.

Nos últimos trinta anos, com o desenvolvimento das ferramentas computacionais, em particular das suas capacidades simbólicas, tem-se acentuado a vertente computacional destes estudos, sobretudo pela possibilidade de simulação de modelos matemáticos cujas dinâmicas revelam comportamentos extremamente complicados. Embora muitos deles já sem intenção de modelar um qualquer fenómeno natural, a sua importância no entendimento e caracterização do comportamento caótico é enorme, na medida em que a sua simplificação extrema nos conduz aos elementos mais simples que conseguem gerar esse tipo de dinâmica. E, mais importante ainda, na medida em que nos permite estudar famílias inteiras de modelos, distin-

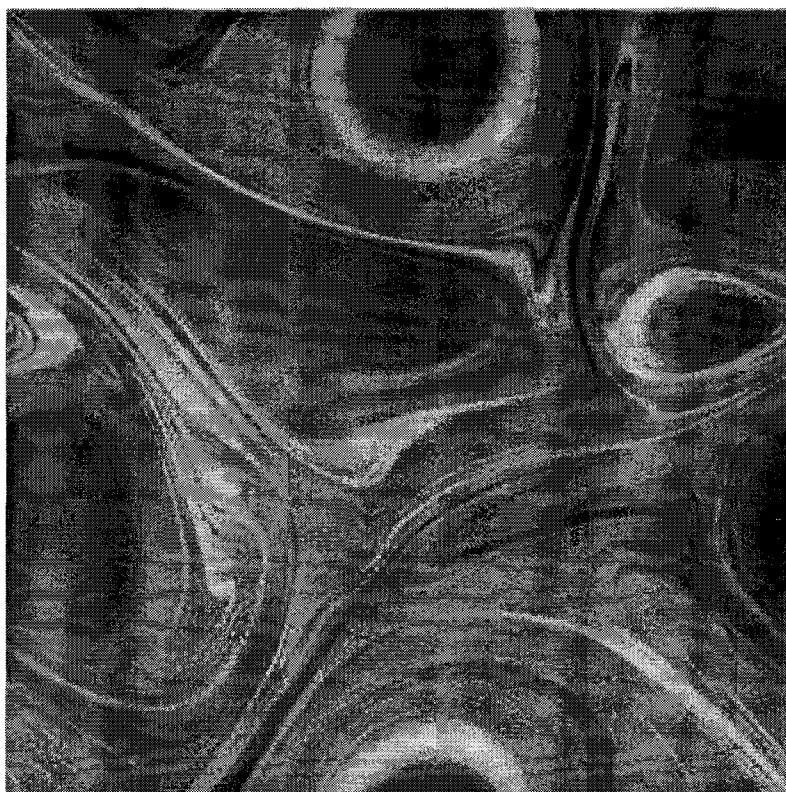


Figura 1.1: Um campo de vórtices em duas dimensões.

guidas por alguns parâmetros, o que tem permitido estudar mesmo os mecanismos que levam um sistema de um comportamento regular a comportamentos muito complicados. A imagem que mostramos na Figura 1.1 é um desses exemplos e representa um campo de vórtices em duas dimensões com uma força de resistência proporcional à velocidade adicionada ao lado direito da tradicional equação dinâmica de Navier-Stokes.

Como para tudo existe um início, também o estudo da dinâmica caótica de certos sistemas teve o seu ponto de partida, e esse foi dado por Henri Poincaré. Em 1890, no estudo do problema da dinâmica de três corpos, Poincaré encontrou órbitas não-periódicas e órbitas que não se aproximavam de um ponto fixo. Pouco tempo depois, em 1898, Jacques Hadamard, no seu trabalho "*Hadamard's billiards*", conseguia mostrar que todas as trajetórias são instáveis em todas as trajetórias de partículas que divergem exponencialmente uma da outra, com um expoente de Lyapunov positivo. De seguida, e como seria de esperar, foi construída por

---

matemáticos muita teoria sobre a dinâmica caótica, mas que se apresentava com o nome de teoria ergódica. Foi então com a teoria ergódica, assim como com a teoria das equações diferenciais não lineares, que matemáticos como G. D. Birkhoff, A. N. Kolmogorov, M. L. Cartwright, J.E. Littlewood e Stephen Smale, entre muitos outros, deram o seu importante contributo para a compreensão da dinâmica destes sistemas.

Mas, compreensivelmente, a dificuldade e a complexidade de trabalhar com sistemas que continham várias variáveis representava um grande entrave no desenvolvimento de uma estrutura teórica que suportasse o estudo dos sistemas dinâmicos. Desse modo, o recurso a sistemas cujo espaço de fases se reduzisse ao intervalo foi uma estratégia natural, e muita da teoria hoje conhecida dos sistemas dinâmicos, escondida atrás de objectos aparentemente muito simples — funções quadráticas a uma variável real e a uma variável complexa — mas que, quando iteradas, apresentam níveis de complexidade surpreendentes, se deve ao estudo do comportamento complexo de sistemas na recta ou num seu intervalo. Por outro lado, a descoberta de fenómenos cuja evolução temporal aparentava uma grande semelhança com as simulações computacionais deste tipo mais simples de dinâmicas precipitou uma grande quantidade de investigadores na procura de fenómenos naturais que manifestavam características típicas do caos unidimensional.

Estes exemplos impulsionaram a introdução de novos conceitos e novas grandezas, mas tornaram-se incapazes de descrever com relativo rigor certo tipo de sistemas. O que era excluído por ser imprecisão de medida ou um simples *ruído*, era agora considerado pela teoria do caos como uma componente dos sistemas estudados, mas que não se conseguia estudar com o recurso aos sistemas unidimensionais. O oscilador de van der Pol e as equações que modelavam a evolução da atmosfera definidas por Edward Lorenz, são dois de muitos exemplos onde o estudo da dinâmica unidimensional não era suficiente.

Estando em dimensão superior, estes sistemas apresentavam um atractor cujo aspecto geométrico ia muito para além do que era conhecido em sistemas unidimensionais. Estávamos perante um novo objecto de estudo, apelidado, por razões óbvias, de atractor estranho.

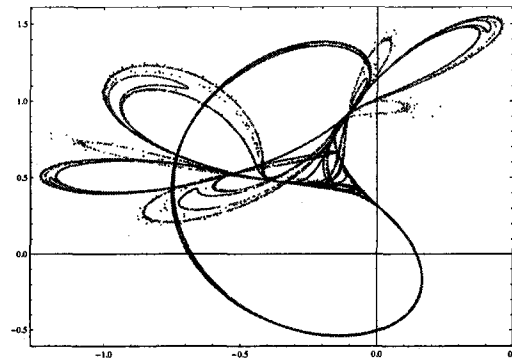


Figura 1.2: O atrator estranho da aplicação Tinkerbell.

Toda a ordem que imperava no estudo dos sistemas unidimensionais deixa de existir quando entramos em dimensões superiores, em particular em sistemas definidos no plano. Os sistemas dinâmicos a duas dimensões, por razões óbvias, são preferíveis aos de dimensões três ou superiores, pois apesar da sua aparente aleatoriedade existe a esperança de, usando as técnicas de estudo da dinâmica em sistemas unidimensionais, encontrar a ordem necessária para explicar a dinâmica dos sistemas em duas dimensões. Neste aspecto, a família das aplicações introduzida por Michel Hénon é aceite como sendo a família das mais simples dinâmicas no plano com caos, figurando assim como os objectos onde a caracterização do comportamento complexo pode ser mais acessível, sem contudo ser de modo algum fácil.

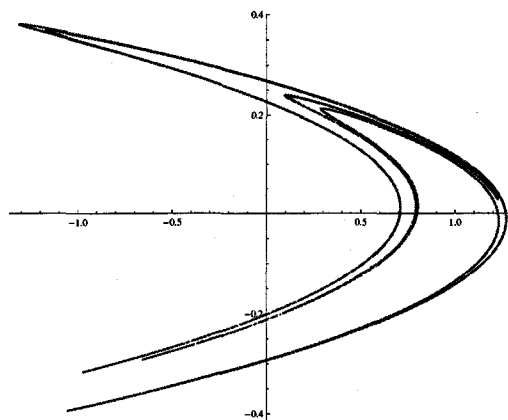


Figura 1.3: O atrator estranho de uma aplicação de Hénon.



Tal como a família das aplicações tenda no intervalo surgiu em determinado momento como uma forma mais simples de encarar certos problemas das dinâmicas unimodais no intervalo, sobretudo parábolas, sendo muitíssimo eficaz quando se tratava de testar a eficácia de certos conceitos na caracterização do comportamento complexo, pensamos que a família das aplicações introduzida por René Lozi pode constituir um papel muito importante no estudo do caos em dimensão superior a um. Surgindo como um modelo linear, logo ainda mais simples que os modelos de Hénon, esse parece ser o laboratório ideal para caminharmos no sentido de uma total compreensão dos fenómenos complexos.

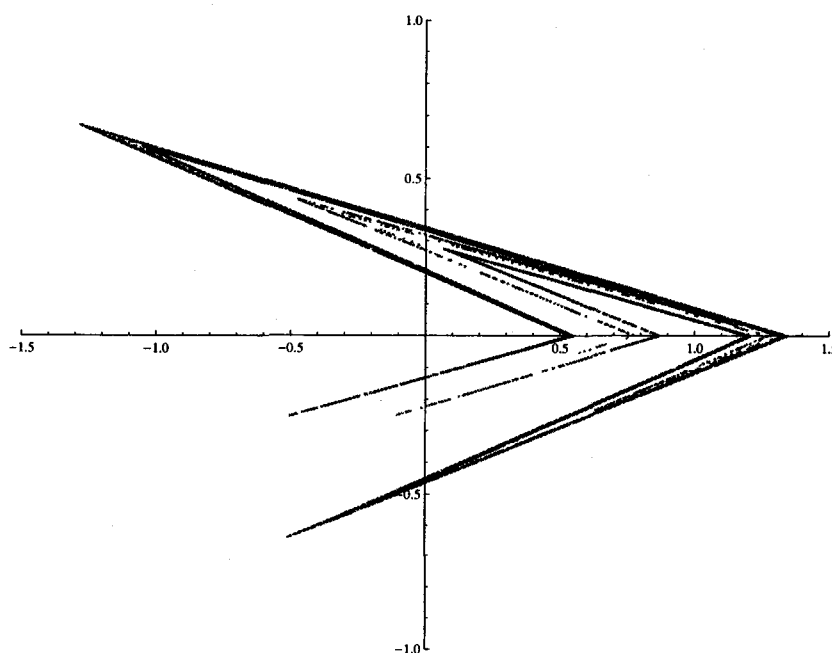


Figura 1.4: O atrator de uma aplicação de Lozi.

É exactamente esse o nosso propósito com este trabalho, onde, no Capítulo 2, apresentamos a família de aplicações de Lozi, com particular ênfase nas condições nos parâmetros que garantem que as dinâmicas admitem um atrator estranho. São essas as condições que nos interessam e relativamente às quais apresentamos uma caracterização da bacia de atracção do atrator, resultados já aceites para publicação na revista *International Journal of Bifurcation and Chaos*. No capítulo seguinte, introduzimos a dinâmica simbólica desenvolvida por Yukata Ishii, em 1998, para esta família de aplicações no plano, para depois mostrarmos de que

forma é possível utilizar essas técnicas para calcular o expoente de Lyapunov máximo da dinâmica, ideias que foram apresentadas na conferência internacional *Equadiff07* e aceites para publicação nas suas actas. Por fim, no Capítulo 4, continuamos a explorar as técnicas da dinâmica simbólica, mas agora para apresentar a construção de partições de Markov dos atractores de Lozi e a consequente caracterização topológica do espaço dos parâmetros. A importância destes resultados, que são consequência da linearidade das aplicações de Lozi, está sobretudo na possibilidade de ser um guia para abordarmos o mesmo problema para outras dinâmicas no plano, como as aplicações de Hénon. A construção referida, assim como a caracterização das curvas no espaço dos parâmetros correspondentes a aplicações de Lozi de igual entropia, encontra-se descrita num trabalho já submetido a uma revista científica internacional.

## Capítulo 2

# Aplicações no plano e hiperbolicidade

Vamos iniciar o percurso pelas aplicações do plano no plano, tendo sempre em atenção o estudo da dinâmica simbólica neste tipo de aplicações. O sucesso obtido na dinâmica simbólica em aplicações de uma dimensão deve-se em grande parte às boas propriedades da ordenação dos números reais, propriedade essa que falha muitas vezes quando estamos a falar em dimensões superior a um.

Em dimensão dois, muitos exemplos de aplicações foram estudados, uns com sucesso, como por exemplo a dinâmica simbólica na aplicação ferradura de Smale, e outros exemplos ainda sem uma teoria completamente estabelecida, como é o caso das aplicações de Hénon e de Lozi, muito por culpa das características que este tipo de aplicações apresentam, tais como as tangências homoclínicas.

Neste trabalho vamos explorar as aplicações do plano no plano, que apresentam a seguinte forma "triangular",

$$x_{n+1} = f(a, x_n) + by_n,$$

$$y_{n+1} = x_n$$

com o objectivo de entender as características que apresentam, para que no capítulo seguinte possamos avançar com novos desenvolvimentos na criação de uma teoria de dinâmica simbólica neste tipo de aplicações, em particular, para a aplicação de Lozi.

## 2.1 Hiperbolicidade

Seja  $f$  uma aplicação linear do plano descrita pela matriz

$$A_f = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

onde  $0 < \lambda < 1 < \mu$ . Atendendo à forma da matriz  $A_f$  e às condições satisfeitas pelos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , podemos afirmar que o eixo horizontal é a direcção estável, isto é, contractiva, caracterizado pela relação  $f^n \omega \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $\omega$  no eixo dos  $xx$ . Qualquer outro vector  $\omega$  satisfaz  $f^n \omega \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e, deste modo, vemos que o eixo vertical não pode ser caracterizado por esta propriedade. Para o eixo vertical, fazemos o tempo correr para o passado e obtemos  $f^{-n} \omega \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, se passarmos para a aplicação  $f^{-1}$ , apenas alteramos os subespaços expansivos e contractivos.

Esta análise da situação linear pode ser transportada para o caso não linear, onde estudamos o comportamento local e os subespaços estável e instável são substituídos pelas variedades locais estável e instável. A variedade local estável é caracterizada pela contracção exponencial quando deslocamos o tempo para o futuro e, de forma análoga, fazendo o tempo andar para o passado, a variedade instável é caracterizada pela contracção exponencial. Assim, de seguida, apresentamos a mais forte versão de hiperbolicidade, onde as taxas de contracção e de expansão são uniformes. Este é o caso dos difeomorfismos de Anosov.

**Definição 2.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de uma variedade diferencial compacta  $M$ . Então,  $f$  é de Anosov se existem constantes  $c > 0$  e  $0 < \lambda < 1$ , tais que, em cada ponto  $x \in M$ , o fibrado tangente  $T_x M$  decompõe-se em dois espaços tangentes, o estável e o instável,*

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u$$

satisfazendo as seguintes condições: para todo  $k > 0$  e  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned} (D_x f)|_{E_x^s} &= E_{f(x)}^s, \\ (D_x f)|_{E_x^u} &= E_{f(x)}^u, \\ \left\| (D_x f^k)|_{E_x^s} \right\| &\leq c\lambda^k, \\ \left\| (D_x f^{-k})|_{E_x^u} \right\| &\leq c\lambda^k. \end{aligned}$$

Os exemplos mais simples de difeomorfismos de Anosov são os difeomorfismos lineares hiperbólicos no toro.

Seja  $M$  uma variedade suave,  $D \subset M$  um conjunto aberto e  $f : D \rightarrow M$  um difeomorfismo. Se considerarmos os difeomorfismos em que o número de pontos periódicos é finito, obrigatoriamente destacamos os de Morse-Smale (apresentam um conjunto de pontos finito constituído por pontos fixos e periódicos hiperbólicos). Os sistemas de Morse-Smale são um exemplo de sistema dinâmicos estruturalmente estáveis.

### 2.1.1 Conjuntos hiperbólicos

Um conjunto hiperbólico é um conjunto invariante tal que, para todo o ponto  $x$ , a derivada para este ponto  $x$  comporta-se tal e qual como se se tratasse de um ponto fixo hiperbólico, isto é, existem subespaços complementares  $E_x^s$ , estável, e  $E_x^u$ , instável, tais que  $(D_x f^{-1})$  é uma  $\lambda$ -contração em  $E_x^u$  e  $(D_x f)$  é uma  $\lambda$ -contração em  $E_x^s$ , para todo o ponto  $x$ , com  $\lambda < 1$ , independentemente do ponto  $x$ .

**Definição 2.2** (Conjunto hiperbólico). *Suponhamos que  $D$  é um conjunto aberto e que a aplicação  $f$  está definida em  $D$ . Se  $\Lambda$  é um conjunto compacto e invariante, isto é,  $f(\Lambda) = \Lambda$ , tal que em  $\Lambda$  a aplicação  $f$  é invertível, então, o conjunto  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico se para todo o ponto  $x \in \Lambda$  existem subespaços  $E_x^s$ , estável, e  $E_x^u$ , instável, tais que, cada vector  $v$  se pode escrever de forma única como  $v = v^s + v^u$ , com  $v^s \in E_x^s$  e  $v^u \in E_x^u$ , e existem  $c > 0$  e  $\lambda < 1$  tais que,  $\|(D_x f^k)|_{E_x^s}\| \leq c\lambda^k$  e  $\|(D_x f^{-k})|_{E_x^u}\| \leq c\lambda^k$ , para todo  $x \in \Lambda$  e todo  $k \in \mathbb{N}$ .*

A aplicação linear hiperbólica do toro é um exemplo desta situação.

Por vezes, determinar se um determinado sistema é ou não hiperbólico torna-se uma tarefa um pouco complicada, sobretudo devido à necessidade de encontrar os subespaços contractivo e expansivo do espaço tangente. Uma caracterização alternativa pode ser feita através do conceito mais computável de cone num ponto.

**Definição 2.3.** *O  $\gamma$ -cone horizontal num ponto  $p \in D \subset M$  é definido por*

$$H_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p D : \|v\| \leq \gamma \|u\|\}.$$

*O  $\gamma$ -cone vertical num ponto  $p \in D \subset M$  é definido por*

$$V_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p D : \|u\| \leq \gamma \|v\|\}.$$

É importante lembrar que a maior parte dos conjuntos hiperbólicos possui uma propriedade muito importante e útil que é a propriedade de localidade máxima.

**Definição 2.4.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo definido numa variedade compacta  $M$ . Um conjunto hiperbólico  $\Lambda$  é máximo local se existe uma vizinhança  $V$  de  $\Lambda$  que está em  $M$  tal que*

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V).$$

Um conjunto máximo local hiperbólico possui propriedades muito importantes, donde destacamos a propriedade de ter um produto de estrutura local e a propriedade de admitir uma partição de Markov, algo que é particularmente importante e que vamos abordar no último capítulo.

### 2.1.2 Variedades Invariantes

Seja  $x \in M$  um ponto fixo hiperbólico para  $f : M \rightarrow M$ , ou seja,  $D_x f$  não tem valores próprios de módulo um. Neste contexto, são importantes dois resultados, a saber, o Teorema de Hartman e Grobman e o Teorema da Variedade Estável.

**Teorema 2.5** (Hartman e Grobman). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  com um ponto fixo hiperbólico  $x$ . Então, existe um homeomorfismo  $h$  definido nalguma vizinhança de  $x$ ,  $U_x$ , tal que,  $h(f(y)) = D_x f h(y)$ , para todo  $y \in U_x$ .*

**Teorema 2.6** (da Variedade Estável). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  com um ponto fixo hiperbólico  $x$ . Então, existem variedades estáveis e instáveis locais,  $W_{loc}^s(x)$  e  $W_{loc}^u(x)$ , tangentes aos espaços próprios  $E_x^s$  e  $E_x^u$  de  $D_x f$ .*

**Definição 2.7.** *Seja  $(M, f)$  um sistema dinâmico topológico com métrica  $d$ . Então, para todo  $\delta > 0$  e  $x \in M$ , chama-se variedade  $\delta$ -estável de  $x$  a*

$$W_\delta^s(x) = \left\{ y \in M : d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta, \forall k \geq 0 \right\}$$

e variedade  $\delta$ -instável de  $x$  a

$$W_\delta^u(x) = \left\{ y \in M : d(f^k(x), f^k(y)) \leq \delta, \forall k \leq 0 \right\}.$$

Uma variedade global estável, num ponto  $x \in M$ , é definida por

$$W^s(x) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(W_\delta^s(f^n(x))),$$

e uma variedade global instável, num ponto  $x \in M$ , é definida por

$$W^u(x) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^n(W_\delta^u(f^{-n}(x))).$$

## 2.2 A família de aplicações de Lozi

A família de aplicações de Lozi é definida como sendo uma família a-dois-parâmetros de aplicações do plano no plano descrita por

$$\mathcal{L}(x, y) = (1 - a|x| + y, bx), \quad (2.1)$$

com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $a, b$  dois parâmetros reais. Trata-se de uma família de dinâmicas introduzida como sendo a versão linear das aplicações de Hénon. Como se verifica facilmente, para  $b \neq 0$ ,  $\mathcal{L}$  é uma aplicação injectiva. Deste modo, podemos definir, para  $b \neq 0$ , a aplicação inversa da aplicação de Lozi,  $\mathcal{L}^{-1}$ , dada por

$$\mathcal{L}^{-1}(x, y) = \left( \frac{y}{b}, x - 1 + a \left| \frac{y}{b} \right| \right).$$

Para começar, vamos estudar a questão da existência de pontos fixos de  $\mathcal{L}$ .

### 2.2.1 Pontos fixos

Querendo encontrar os pontos fixos de uma aplicação de Lozi, resolvemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 1 - a|x| + y = x \\ bx = y \end{cases} \quad (2.2)$$

Analisando (2.2), podemos afirmar que, para  $a \leq -1 + b$ , uma aplicação de Lozi não tem qualquer ponto fixo. Contudo, já para valores do parâmetro  $a$  tais que  $-1 + b < a \leq 1 - b$ , verifica-se que uma aplicação de Lozi admite um ponto fixo,

$$A = \left( \frac{1}{a + (1 - b)}, \frac{b}{a + (1 - b)} \right). \quad (2.3)$$

Por fim, quando  $a > 1 - b$ , não é difícil concluir que uma aplicação de Lozi admite um segundo ponto fixo,

$$B = \left( \frac{-1}{a - (1 - b)}, \frac{-b}{a - (1 - b)} \right). \quad (2.4)$$

Analisando (2.3) e (2.4) e a condição no espaço dos parâmetros que assegura a sua existência, podemos constatar que estes pontos fixos estão, respectivamente, no primeiro e terceiro quadrantes. Construindo a matriz jacobiana da aplicação de Lozi,

$$D\mathcal{L}(x, y) = \begin{bmatrix} \mp a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix},$$

podemos determinar, para todo o ponto  $(x, y)$  do plano, que não pertença ao eixo dos  $yy$ , os seus valores próprios. Assim sendo, temos que, para o ponto fixo  $A$ , esses valores próprios são

$$\lambda_{\pm}^A = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

enquanto para o ponto fixo  $B$  temos

$$\lambda_{\pm}^B = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Assim sendo, facilmente se reconhece que, satisfeita a condição da sua existência, ambos os pontos fixos  $A$  e  $B$  são pontos de sela hiperbólicos. Por outro lado, para  $-1 + b < a \leq 1 - b$ , verificamos que ambos os valores próprios  $\lambda_{\pm}^A$  são negativos, pelo que, nessas condições, o único ponto fixo  $A$  é um nodo estável.

Regressando à matriz jacobiana calculada anteriormente, podemos ver que o seu determinante é igual a  $-b$ . Assim sendo, em todo este trabalho vamos restringir este parâmetro ao intervalo  $(-1, 1)$ , a que correspondem aplicações dissipativas, isto é, onde teremos contracção de área.

### 2.2.2 Órbita periódica de período dois

Para além do estudo dos seus pontos fixos, é possível constatar que uma aplicação de Lozi admite uma órbita periódica de período 2, cujos pontos,  $C_1$  e  $C_2$ , são dados por

$$C_1 = \left( \frac{a + b - 1}{a^2 + (1 - b)^2}, \frac{b(a - b + 1)}{a^2 + (1 - b)^2} \right)$$

e

$$C_2 = \left( \frac{a - b + 1}{a^2 + (1 - b)^2}, \frac{b(a + b - 1)}{a^2 + (1 - b)^2} \right).$$

Uma análise muito simples das expressões acima permite-nos concluir que, para valores dos parâmetros satisfazendo  $a > 1 - b$  e  $0 < b < 1$ ,  $C_1$  é um ponto localizado no segundo quadrante, enquanto  $C_2$  está localizado no quarto quadrante.



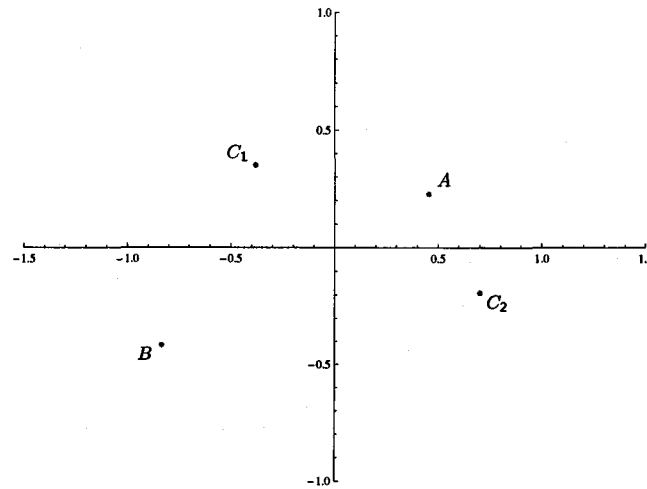


Figura 2.1: Os pontos fixos e a órbita de período 2 da aplicação de Lozi correspondente aos valores  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$ .

Como sabemos, a estabilidade desta órbita periódica é determinada pelos valores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - a^2 & a \\ -ab & b \end{bmatrix},$$

que são

$$\lambda_1 = b - \frac{a^2 + a\sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

$$\lambda_2 = b - \frac{a^2 - a\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

O resultado seguinte, cuja prova pode ser vista em [LXZL92], caracteriza, para uma determinada região do espaço dos parâmetros, a estabilidade de todos os pontos periódicos, qualquer que seja o seu período, de uma aplicação de Lozi.

**Teorema 2.8.** *Para valores dos parâmetros satisfazendo as condições  $0 < b < 1$  e  $a > 1 + b$ , todos os pontos periódicos da aplicação  $\mathcal{L}$ , qualquer que seja o seu período, são selas instáveis.*

Com base neste resultado, podemos dividir o espaço dos parâmetros em dois semi-planos, de acordo com a estabilidade dos seus pontos periódicos.

**Definição 2.9.** *Definimos como fronteira de estabilidade da família de aplicações de Lozi a recta no espaço dos parâmetros descrita pelos pontos que verificam a condição  $a = 1 + b$ .*

Naturalmente que esta é a parte mais interessante desta família de dinâmicas no plano, ou seja, os valores dos parâmetros para os quais o comportamento assintótico de  $\mathcal{L}_{ab}$  não é de modo algum periódico.

### 2.2.3 Atrator estranho

Quando, em 1978, René Lozi chamou a atenção para uma certa aplicação no plano, aquilo que destacou foi a semelhança do seu atrator relativamente ao, já na altura muito famoso, atrator da aplicação de Hénon. Escolhendo os valores  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$  para os parâmetros, Lozi mostrou numericamente que o atrator de  $\mathcal{L}$  tinha um aspecto assaz estranho.

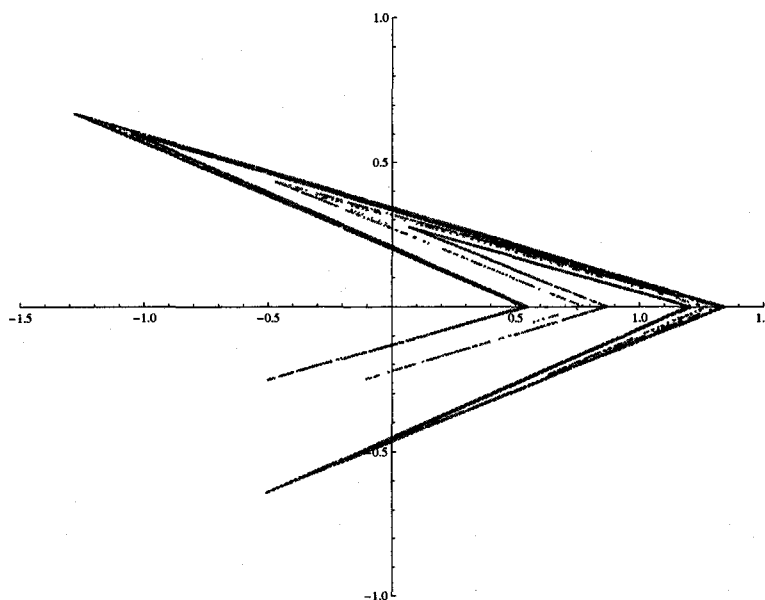


Figura 2.2: Atrator para a aplicação de Lozi correspondente aos valores  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$ .

Mais tarde, Michał Misiurewicz, em [Mis80], forneceu uma prova da existência do atrator estranho, caracterizando mesmo a região do espaço dos parâmetros relativamente aos quais a correspondente aplicação de Lozi admite um atrator estranho. Segundo Misiurewicz, se os

parâmetros  $a$  e  $b$  verificarem as seguintes condições

$$\mathcal{M} = \begin{cases} (\mathcal{M}_1) & 0 < b < 1, a > 0; \\ (\mathcal{M}_2) & 2a + b < 4; \\ (\mathcal{M}_3) & b < \frac{(a^2 - 1)}{2a + 1}; \\ (\mathcal{M}_4) & a\sqrt{2} > b + 2, \end{cases} \quad (2.5)$$

então a aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  apresenta um atrator estranho. A região do plano que, simultaneamente, satisfaz todas as quatro condições  $\mathcal{M}$  é chamada o domínio de Misiurewicz.

Mais tarde, em [LXZL92], obteve-se uma extensão no espaço dos parâmetros da região onde era possível encontrar um atrator estranho para a aplicação de Lozi. Foi proposta então uma nova estrutura para os atratores estranhos para aplicações de duas dimensões dissipativas e desse modo, usando a teoria de ciclos heteroclínicos transversais e o método da aplicação dual, ver [LXZL92], ficou provada a existência do atrator estranho para qualquer aplicação de Lozi na região do espaço dos parâmetros definida pelas condições

$$\begin{cases} 0 < b < 1; \\ a > b + 1; \\ a < 2 - \frac{b}{2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Na figura seguinte podemos ver a região definida por Misiurewicz, Região 1, e a região definida pelas condições 2.6, a união de ambas as Regiões 1 e 2, que passaremos a denotar por  $D_{\mathcal{L}}$ .

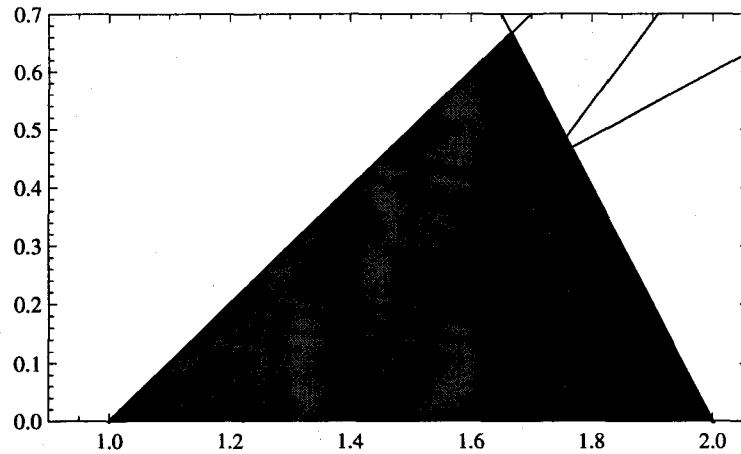


Figura 2.3: Regiões definidas por (2.6) e por Misiurewicz, onde a aplicação Lozi apresenta um atrator estranho.

Para além da identificação de uma região do espaço dos parâmetros para os quais mostrou que a aplicação  $\mathcal{L}$  tinha um atrator estranho, Misiurewicz mostrou também de que forma este atrator poderia ser descrito.

Consideremos a variedade instável do ponto fixo  $A$  e o ponto onde esta intersecta pela primeira vez a parte positiva do eixo dos  $xx$ ,

$$I = \left( \frac{2 + a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2(1 + a - b)}, 0 \right).$$

A partir deste ponto, consideremos o triângulo  $\Delta_M$  de vértices  $I$ ,  $\mathcal{L}(I)$  e  $\mathcal{L}^2(I)$ . Na figura seguinte desenhamos, para certos valores dos parâmetros, não só o atrator mas também o triângulo  $\Delta_M$  proposto por Misiurewicz.

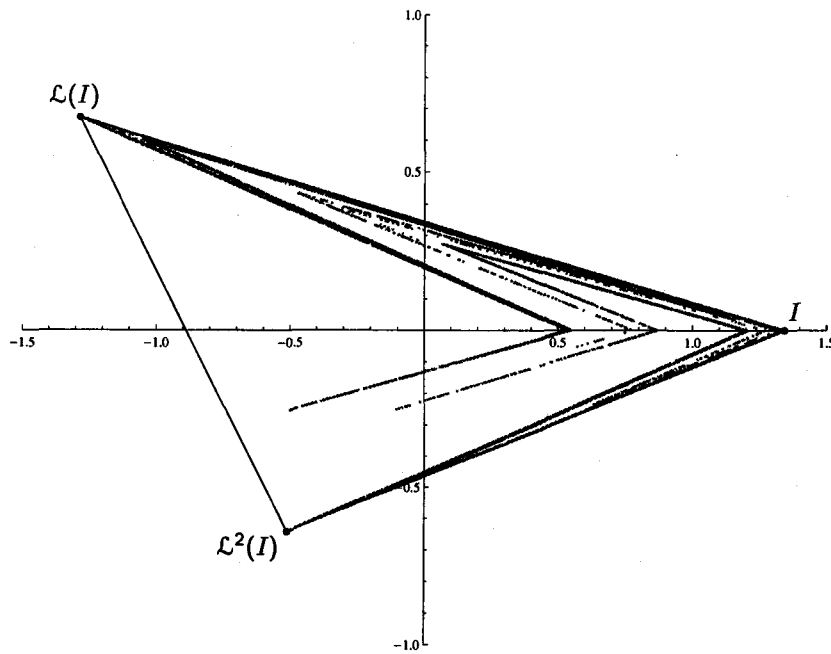


Figura 2.4: O atrator de Lozi e o triângulo  $\Delta_M$ , para  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$ .

O resultado que justifica a introdução do triângulo  $\Delta_M$  é o seguinte, cuja demonstração pode ser vista em [Mis80].

**Teorema 2.10.** *Para valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  que satisfazem as condições  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  e  $a > 1 + b$ , temos que  $\mathcal{L}(\Delta_M) \subset \Delta_M$ .*

De facto, com base neste resultado podemos definir o atrator de Lozi,  $\tilde{\mathcal{F}}$ , como sendo o conjunto não vazio dado por

$$\tilde{\mathcal{F}} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}^n(\Delta_M). \quad (2.7)$$

Como facilmente se retira de (2.7), o conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}$  é obtido pela intersecção de conjuntos decrescentes, sendo completamente invariante, isto é, satisfaz ambas as igualdades

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}).$$

Ainda em [Mis80], podemos encontrar os seguintes resultados.

**Teorema 2.11.** *Para valores dos parâmetros  $a$  e  $b$  que satisfazem as condições  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  e  $a > 1 + b$ , são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *existe uma vizinhança compacta  $G$  de  $\Delta_M$  tal que  $\mathcal{L}(G) \subset \text{int}(G)$  e  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{L}^n(G)$ ;*
2. *a variedade instável global  $W_A^u$  de  $A$  é densa em  $\tilde{\mathcal{F}}$ ;*
3.  *$\mathcal{L}$  é topologicamente mixing, ou seja, para quaisquer subconjuntos abertos e não vazios  $U$  e  $V$  de  $\tilde{\mathcal{F}}$ , existe uma ordem  $n_0$  a partir da qual  $\mathcal{L}^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

### 2.2.4 Regiões no espaço dos parâmetros

Resumindo de alguma forma o estudo efectuado anteriormente, gostaríamos de explicitar as diferentes regiões do espaço dos parâmetros correspondentes a diferentes comportamentos da aplicação de Lozi. Na figura seguinte podemos ver as três regiões  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , descritas por

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < b < 1) \wedge (a < b - 1)\},$$

isto é, a região dos pontos onde as aplicações de Lozi não têm pontos fixos,

$$R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < b < 1) \wedge (b - 1 \leq a < -b + 1)\}$$

isto é, a região dos pontos onde as aplicações de Lozi têm um único ponto fixo, e, por fim,

$$R_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < b < 1) \wedge (-b + 1 \leq a < b + 1)\}$$

isto é, a região dos pontos correspondentes a aplicações de Lozi que admitem dois pontos fixos. Por último, temos a região  $CR$  definida por

$$CR = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (b + 1 \leq a \leq \frac{4 - b}{2}) \wedge (-b + 1 \leq a \leq \frac{b + 4}{2}) \right\},$$

região esta correspondente aos valores dos parâmetros onde as aplicações de Lozi vão admitir órbitas periódicas de vários períodos e também atractores estranhos, ou seja, a região onde a aplicação de Lozi tem a sua complexidade, levando conseqüentemente à obtenção de um expoente de Lyapunov máximo positivo, como veremos no capítulo seguinte.

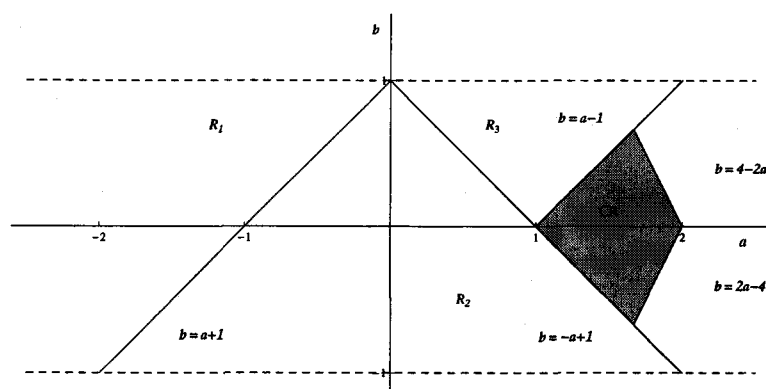


Figura 2.5: Divisão do espaço dos parâmetros em diferentes regiões de complexidade.

De seguida vamos estudar as questões da hiperbolicidade relativamente à família de aplicações de Lozi.

### 2.2.5 Hiperbolicidade das aplicações de Lozi

Ainda em [Mis80], Misiurewicz mostrou que, para valores dos parâmetros  $(a, b)$  satisfazendo as condições  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$ , a aplicação de Lozi é hiperbólica, ou seja, que para todo o ponto  $P$  existe uma decomposição do espaço tangente num subespaço estável e noutra instável, onde esta decomposição é invariante e contínua, e para as constantes  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , com  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , temos

$$\|D\mathcal{L}^n(v)\| \leq \alpha_1 \lambda_1^n \|v\|$$

para qualquer  $v$  pertencente ao subespaço estável, e

$$\|D\mathcal{L}^n(v)\| \leq \alpha_2 \lambda_2^n \|v\|$$

para qualquer  $v$  pertencente ao subespaço instável. Neste caso, vê-se facilmente que a matriz  $D\mathcal{L}$  não está definida em todos os pontos, portanto será de esperar que a decomposição do espaço tangente não se verifique para todos os pontos da trajectória e também que não tenha um comportamento contínuo. Deste facto, o termo hiperbolicidade usado nas aplicações de Lozi é um pouco diferente do usual.

Para a constante

$$c = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

tal que  $0 < c < 1 < |b|/c$ , o teorema seguinte dá-nos o resultado pretendido sobre a hiperbolicidade:

**Teorema 2.12.** *Sejam  $a$  e  $b$  parâmetros tais que  $0 < b < 1$  e  $a > b + 1$ . Então:*

1. *seja  $P \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathcal{L}$  é diferenciável em todos os pontos  $\mathcal{L}^n(P)$ , para  $n \geq 0$ ; então, existe um subespaço de dimensão 1,  $E_P^s \subset \mathbb{T}_P\mathbb{R}^2$ , tal que  $\|D\mathcal{L}^n(v)\| \leq c^n \|v\|$ , para todo  $v \in E_P^s$  e todo  $n \geq 0$ ; temos também que  $D\mathcal{L}(E_P^s) = E_{\mathcal{L}(P)}^s$ ;*
2. *seja  $P \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathcal{L}^{-1}$  é diferenciável em todos os pontos  $\mathcal{L}^{-n}(P)$ , para  $n \geq 0$ ; então, existe um subespaço de dimensão 1,  $E_P^u \subset \mathbb{T}_P\mathbb{R}^2$ , tal que  $\|D\mathcal{L}^n(v)\| \geq \left(\frac{|b|}{c}\right)^n \|v\|$ , para todo  $v \in D\mathcal{L}^{-n}(E_P^u)$  e todo  $n \geq 0$ ; temos também que  $D\mathcal{L}^{-1}(E_P^u) = E_{\mathcal{L}^{-1}(P)}^u$ ;*
3. *seja  $P \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathcal{L}$  é diferenciável em todos os pontos  $\mathcal{L}^n(P)$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ ; então,  $\mathbb{T}_P\mathbb{R}^2 = E_P^s \oplus E_P^u$ .*

**Definição 2.13.** *Chamamos cone estável e cone instável num qualquer ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  a, respectivamente,*

$$(Co)_P^s = \{(u, v) \in \mathbb{T}_P\mathbb{R}^2 : |v| \leq |cu|\},$$

$$(Co)_P^u = \{(u, v) \in \mathbb{T}_P\mathbb{R}^2 : |bu| \leq |cv|\}.$$

Deste modo, vamos ter que  $D\mathcal{L}((Co)_P^u) = (Co)_{\mathcal{L}(P)}^u$ , para todo o ponto  $P$  que não pertence ao eixo dos  $yy$ , enquanto  $D\mathcal{L}^{-1}((Co)_P^s) = (Co)_{\mathcal{L}^{-1}(P)}^s$ , para todo o ponto  $P$  que não pertence ao eixo dos  $xx$ . Assim, considerando o Teorema 2.11, podemos concluir que, nas condições apontadas, o atrator de Lozi é um conjunto hiperbólico maximal e que, portanto, admite uma partição de Markov.

Depois de obtida a região  $\Delta_M$  dos pontos do plano que contém o atrator  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}$  de uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$ , é importante conhecer quais os pontos do plano que têm por destino essa região  $\Delta_M$ , ou seja, identificar a bacia de atracção de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}$ . É esse o estudo que se apresenta de seguida.



## 2.3 Bacia de atracção

Seja  $X$  o ponto de intersecção da variedade estável do ponto fixo  $B$  com o eixo vertical. Através de alguns cálculos muito simples conseguimos obter a expressão do ponto  $X$ ,

$$X = \left( 0, \frac{b(2 - a + \sqrt{a^2 + 4b})}{(a - \sqrt{a^2 + 4b})(a + b - 1)} \right).$$

Consideremos agora o segmento  $\overline{XL^{-2}(X)}$ . Como se verifica facilmente, este segmento interseca o semi-eixo positivo dos  $xx$  num ponto  $T$  dado por

$$T = \left( \frac{b(2 - a + \sqrt{a^2 + 4b})(a(1 + b) + (1 - b)\sqrt{a^2 + 4b})}{(a - \sqrt{a^2 + 4b})(1 - a - b)(2b(b - 1) + a^2(1 + 2b) + a(1 - 2b)\sqrt{a^2 + 4b})}, 0 \right).$$

É possível provar que, numa situação muito particular, os pontos  $T$  e  $I$  são coincidentes.

**Lema 2.14.** Para valores dos parâmetros tais que  $2a + b = 4$ , temos que  $I = T$ .

**Dem.** Igualando as componentes da variável  $x$  de cada um dos pontos, facilmente se chega ao resultado pretendido, quando  $2a + b = 4$ .  $\square$

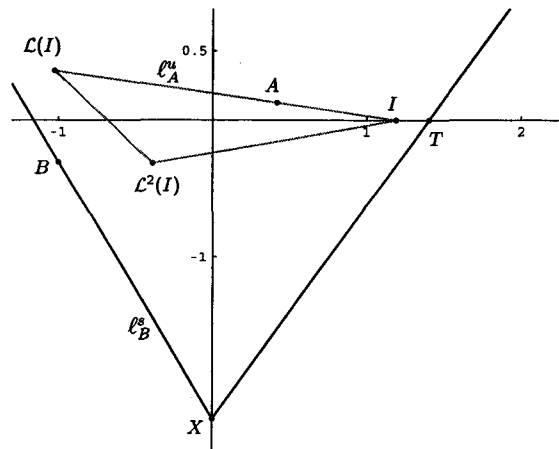


Figura 2.6: Triângulo de Misiurewicz e os pontos  $X$  e  $T$ , para  $a = 1.7$  e  $b = 0.3$ .

Consideremos a região  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{L}}$  limitada por uma linha poligonal  $S$  que é totalmente caracterizada pelos pontos  $T$  e  $X$  e as suas sucessivas pré-imagens. Para simplificar a construção da linha poligonal  $S$ , vamos separar a sua construção em dois passos: assim, vamos considerar primeiro a linha poligonal  $S_1$ , que une os quatro pontos  $\mathcal{L}^{-1}(T)$ ,  $\mathcal{L}^{-1}(X)$ ,  $X$  e  $T$ . Podemos ver essa linha poligonal  $S_1$  na Figura 2.7.

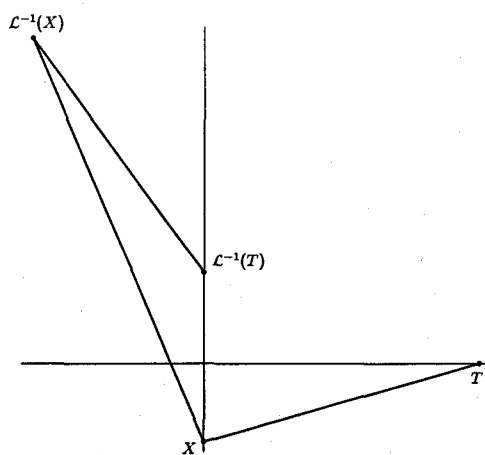
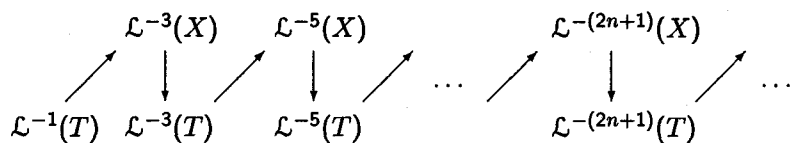
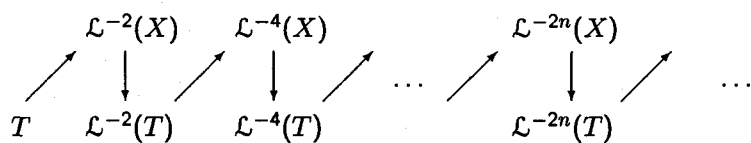


Figura 2.7: A linha poligonal  $S_1$ .

De seguida, vamos considerar outras duas linhas poligonais, uma definida a partir do ponto  $L^{-1}(T)$  e uma segunda definida a partir do ponto  $T$ . Assim, seja  $S_2$  a linha poligonal que une os pontos



e  $S_3$  a linha poligonal que une os pontos



A figura seguinte mostra um esboço de ambas as linhas poligonais,  $S_2$  e  $S_3$ .

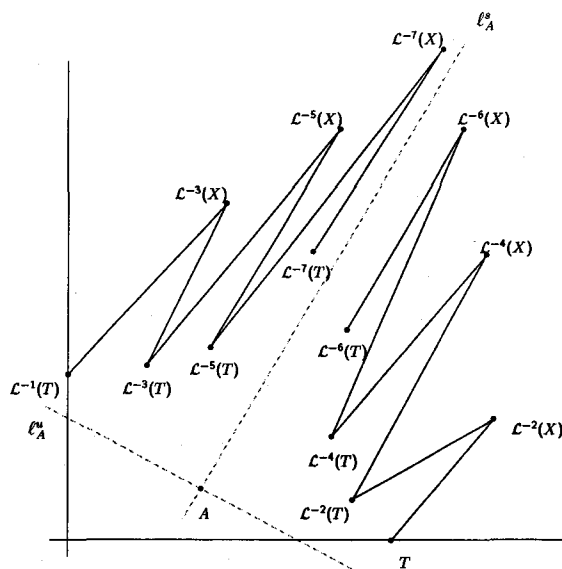


Figura 2.8: As linhas poligonais  $S_2$  e  $S_3$ .

Como o gráfico anterior sugere,  $S_2$  e  $S_3$  não se vão intersectar.

**Lema 2.15.** *As linhas poligonais  $S_2$  e  $S_3$  não se intersectam.*

**Dem.** Consideremos os pontos  $T$  e  $L^{-2}(X)$ . Estes pontos estão no primeiro quadrante localizados acima ou pertencentes à variedade instável  $\ell_A^u$ . Assim, concluímos que todos os pontos  $L^{-(n+1)}(X)$  e  $L^{-n}(T)$ , para qualquer natural  $n$ , pertencem também ao primeiro quadrante. Sabendo que o maior valor próprio, em valor absoluto,

$$\lambda_{A,2} = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2},$$

é negativo, temos que os pontos correspondentes às iteradas ímpares da aplicação inversa  $L^{-1}$  vão estar no semi-plano à esquerda da variedade estável  $\ell_A^s$ , enquanto os pontos correspondentes às iteradas pares da mesma aplicação vão estar no semi-plano à direita da variedade estável  $\ell_A^s$ . Obtemos assim, o resultado pretendido.  $\square$

A distância dos pontos  $L^{-(n+1)}(X)$  e  $L^{-n}(T)$  à variedade estável  $\ell_A^s$ , quando  $n$  tende para mais infinito, tende para zero, o que nos permite concluir que a linha poligonal  $S$ , definida pela concatenação de  $S_1, S_2$  e  $S_3$ , define uma região do plano, região essa que vamos representar por  $\mathcal{B}$ ; ver Figura 2.9.

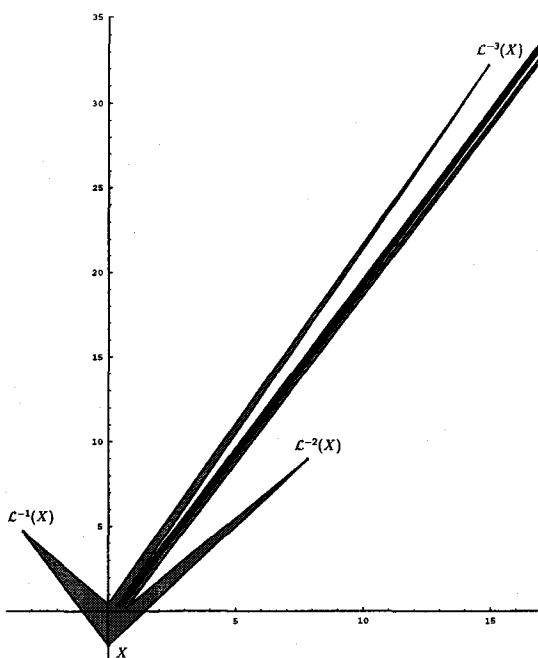


Figura 2.9: A região  $\mathcal{B}$ , para  $a = 1.7$  e  $b = 0.58$ .

No que se segue, vamos provar que  $\mathcal{B}$  é o conjunto de pontos do plano para os quais as sucessivas iterações da aplicação de Lozi vão para o conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Para provar que  $\mathcal{B}$  é a bacia de atracção do conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}$  vamos analisar as sucessivas iterações dos pontos que estão em  $\mathcal{B}$ . Para simplificar a prova, vamos primeiro mostrar que, depois de algumas iterações, os pontos que estão em  $\mathcal{B}$  vão estar inevitavelmente num polígono  $\mathcal{P}$ , de vértices nos pontos  $\mathcal{L}^{-1}(T)$ ,  $\mathcal{L}^{-1}(X)$ ,  $X$  e  $T$ . O resultado pretendido fica provado quando de seguida provarmos que  $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ .

Seguindo [LXZL92], vamos definir as aplicações lineares  $R$  e  $L$  do seguinte modo: para todo o ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$R(x, y) = \mathcal{L}|_{x \geq 0}(x, y)$$

$$L(x, y) = \mathcal{L}|_{x \leq 0}(x, y)$$

Assim sendo, vamos definir  $R^{-1}$  como a aplicação inversa da aplicação linear  $R$ . Se considerarmos os pontos do plano que estão no primeiro quadrante, facilmente se obtém que  $R^{-1} = \mathcal{L}^{-1}$ .

**Definição 2.16.** Denotemos por  $\Delta_n$  os seguintes triângulos

$$\Delta_n = \mathcal{L}^{-(n+2)}(T)\mathcal{L}^{-(n+2)}(X)\mathcal{L}^{-(n)}(T), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Olhando, uma vez mais, para a Figura 2.8 podemos identificar os triângulos  $\Delta_n$ . A introdução destas regiões do plano é justificada pela sua dinâmica, como resultado seguinte nos revela.

**Lema 2.17.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $\mathcal{L}^{n+1}(\Delta_n) \subset \mathcal{P}$ .

**Dem.** Da definição da aplicação linear  $R$  retira-se que  $R(\Delta_n) = \Delta_{n-1}$ . Assim sendo, facilmente se obtém que a região  $R^{n+1}(\Delta_n) = R(\Delta_0)$  é o triângulo de vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T)\mathcal{L}^{-1}(X)\mathcal{L}(T)$ .

□

Na figura seguinte encontra-se desenhado o triângulo  $R^{n+1}(\Delta_n)$  e, claro está, a região  $\mathcal{P}$  que o contém.

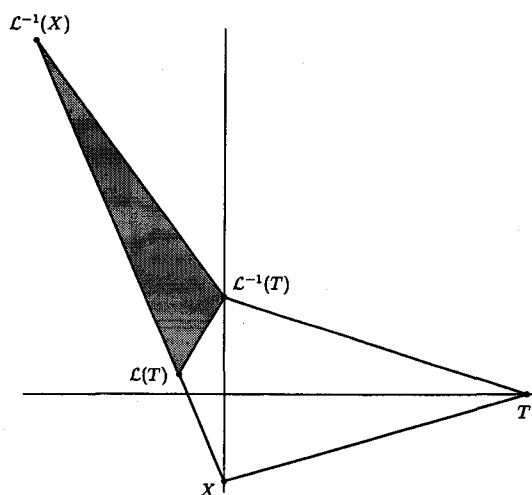


Figura 2.10: O polígono  $\mathcal{P}$  e o triângulo  $R^{n+1}(\Delta_n)$ .

Quando consideramos os parâmetros  $(a, b)$  pertencentes à fronteira  $\partial\mathcal{H}$ , sabemos já, pelo Lema 2.14, que o ponto  $T$  e as suas sucessivas iteradas para o passado pertencem à variedade instável  $\mathcal{L}_A^u$ . Neste caso, resulta imediatamente que os únicos pontos de  $\mathcal{B}$  que estão fora do polígono  $\mathcal{P}$  são exactamente os pontos dos triângulos  $\Delta_n$ . Contudo, na situação geral, tal não acontece, pelo que vamos introduzir novos triângulos, por forma a considerar esses outros pontos.

**Definição 2.18.** Denotemos por  $\nabla_n$  os seguintes triângulos

$$\nabla_n = \mathcal{L}^{-n}(T) \mathcal{L}^{-(n+2)}(T) A, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Como se pode constatar pela definição acima, todos os triângulos  $\nabla_n$  têm em comum o ponto fixo  $A$ . Como se pode verificar na Figura 2.8, com estes triângulos vamos conseguir estudar a dinâmica dos restantes pontos de  $\mathcal{B}$ .

**Lema 2.19.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se que  $\mathcal{L}^{n+1}(\nabla_n) \subset \mathcal{P}$ .

**Dem.** Pela definição da aplicação linear  $R$ , verifica-se facilmente que  $R(\nabla_n) = \nabla_{n-1}$ . Deste modo, retira-se que  $R^{n+1}(\nabla_n) = R(\nabla_0)$  é o triângulo de vértices nos pontos  $\mathcal{L}^{-1}(T) \mathcal{L}(T) A$ .  $\square$

Na figura que de seguida se apresenta podemos ver onde se encontra o triângulo  $R^{n+1}(\nabla_n)$ , sobretudo relativamente ao polígono  $\mathcal{P}$ , que também se inclui.

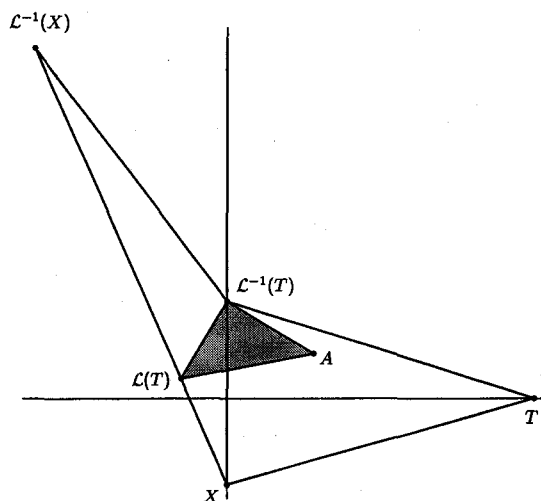


Figura 2.11: O polígono  $\mathcal{P}$  e o triângulo  $R^{n+1}(\nabla_n)$ .

Para terminar esta primeira parte, uma vez que ficou provado que a dinâmica dos pontos dos triângulos acima considerados os levam a  $\mathcal{P}$ , vamos estudar a dinâmica dos pontos que pertencem ao polígono  $\mathcal{P}$ .

Com o objectivo de utilizar as aplicações lineares  $R$  e  $L$ , vamos dividir o polígono  $\mathcal{P}$  em dois triângulos, a saber, o triângulo localizado no semi-plano à esquerda do eixo vertical, definido

pelos vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T)\mathcal{L}^{-1}(X)X$ , e o triângulo localizado no semi-plano à direita do eixo vertical, definido pelos vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T)XT$ .

**Lema 2.20.** *Para todo o par de parâmetros  $(a, b)$  pertencente ao domínio de Misiurewicz,  $\Delta_M$ , temos que  $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ .*

**Dem.** Consideremos o triângulo definido pelos vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T)\mathcal{L}^{-1}(X)X$ . Aplicando a este triângulo a aplicação linear  $L$ , obtemos um novo triângulo, este agora de vértices em  $T, X$  e  $\mathcal{L}(X)$ ; ver a Figura 2.12. De seguida, fazemos a mesma operação ao triângulo definido pelos vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T), X$  e  $T$ , mas agora, naturalmente, usando a aplicação linear  $R$ , obtendo-se então o triângulo definido pelos vértices  $T\mathcal{L}(T)\mathcal{L}(X)$ , onde  $\mathcal{L}(X)$  é o ponto dado pela intersecção do segmento de recta  $\overline{\mathcal{L}^{-1}(X)\mathcal{L}(X)}$  com o eixo horizontal.  $\square$

Nas figuras seguintes estão representadas as imagens dos triângulos esquerdo e direito, respectivamente, resultantes da decomposição do polígono  $\mathcal{P}$ . Para mais facilmente se ilustrar o resultado acima, inclui-se, em ambos os casos, o próprio polígono  $\mathcal{P}$ .

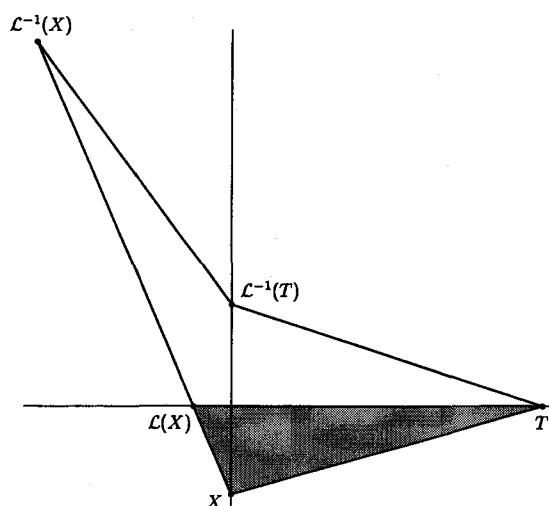


Figura 2.12: A imagem do triângulo de vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T)\mathcal{L}^{-1}(X)X$  pela aplicação  $\mathcal{L}$ .

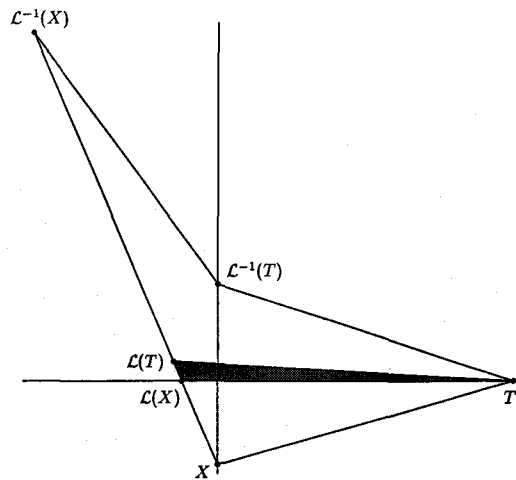


Figura 2.13: A imagem do triângulo de vértices  $\mathcal{L}^{-1}(T) X T$  pela aplicação  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 2.21.** *Dada uma aplicação de Lozi,  $\mathcal{L}$ , com os parâmetros a verificar as condições dadas em (2.5), do domínio de Misiurewicz  $\Delta_M$ , a região  $\mathcal{B}$  é a bacia de atracção de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}$ .*

**Dem.** Com o estudo já efectuado mostrámos que  $\mathcal{L}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ . Deste modo, vamos agora estudar a dinâmica de um qualquer ponto  $P$  não pertencente a  $\mathcal{B}$ .

Para simplificar esse estudo, vamos distinguir diferentes regiões de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ , correspondendo cada uma delas a diferentes comportamentos dos pontos através da aplicação  $\mathcal{L}$ ; ver Figura 2.14:

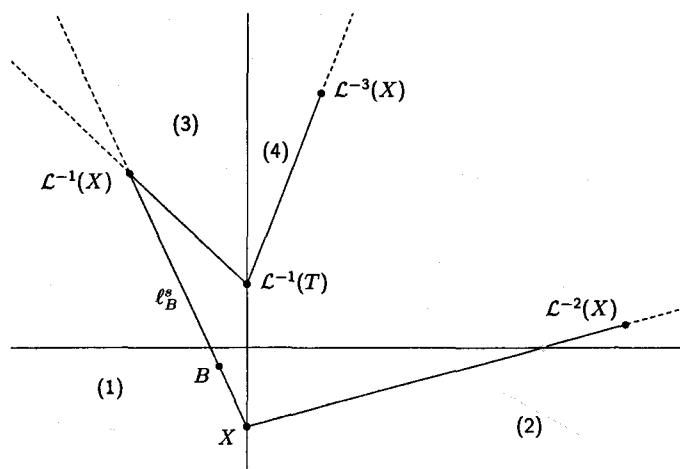


Figura 2.14: A região do plano  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ .



- (1) dado um qualquer ponto  $P$  pertencente ao semi-plano definido à esquerda da variedade estável  $\ell_B^s$ , é óbvio que  $\mathcal{L}^n(P)$  diverge, quando  $n$  vai para infinito;
- (2) a imagem do semi-plano abaixo da recta definida pelos pontos  $X$  e  $\mathcal{L}^{-2}(X)$  pela aplicação linear  $R$  vai estar no segundo quadrante, no sector abaixo de  $\ell_B^s$ , e, deste modo, podemos assegurar a sua divergência.
- (3) seja  $P$  um qualquer ponto pertencente ao segundo quadrante, situado acima da recta definida pelos pontos  $\mathcal{L}^{-1}(X)$  e  $\mathcal{L}^{-1}(T)$ . A imagem de  $P$  pela aplicação linear  $L$  vai estar no segundo ou terceiro quadrante, mas com certeza abaixo da recta definida pelos pontos  $X$  e  $\mathcal{L}^{-2}(X)$ , pelo que vamos cair nos casos descritos em (1) e (2);
- (4) a imagem, através da aplicação linear  $R$ , da região que está no primeiro quadrante, acima da recta definida por  $\mathcal{L}^{-1}(T)$  e  $\mathcal{L}^{-3}(X)$ , vai estar no primeiro quadrante, mas abaixo da recta definida pelos pontos  $T$  e  $\mathcal{L}^{-2}(X)$ . Assim sendo, vamos obter a divergência das iterações futuras, pelo caso já estudado em (2);
- (5) por último, devemos analisar a iteração de pontos pertencentes aos diferentes sectores triangulares do primeiro quadrante,  $\angle_n$ , para qualquer inteiro positivo  $n$ , com vértice no ponto  $\mathcal{L}^{-n}(T)$  e definidos pelas rectas que passam nos pontos  $\mathcal{L}^{-n}(X)$  e  $\mathcal{L}^{-(n+2)}(X)$ ; ver Figura 2.8. Ora, uma vez que  $R(\angle_n) = \angle_{n-1}$ , podemos desde logo concluir que  $R^{n-1}(\angle_n) = R(\angle_2)$ , ou seja, que para qualquer ponto  $P \in \angle_n$ , se tem que a iterada  $\mathcal{L}^n(P)$  é um ponto pertencente ao sector triangular de vértice em  $\mathcal{L}^{-1}(T)$  e definido pelas rectas que passam em  $\mathcal{L}^{-1}(X)$  e  $\mathcal{L}^{-3}(X)$ , cujas sucessivas iterações já foram discutidas em (3) e (4).  $\square$

Com a identificação da bacia de atracção do atractor de uma qualquer aplicação de Lozi terminamos o segundo capítulo deste trabalho. De seguida, vamos apresentar a dinâmica simbólica das aplicações de Lozi e mostrar como a aplicação desses métodos nos pode levar muito longe no seu estudo.



## Capítulo 3

# Dinâmica Simbólica para a Família de Aplicações de Lozi

Desde o momento em que foram introduzidas, ficou entendido que a família das aplicações de Lozi tinha como limite dinâmicas já conhecidas, a saber, a família das aplicações tenda, quando escolhemos  $b = 0$ , e a ferradura de Smale, quando se atinge a fronteira correspondente à complexidade máxima que as aplicações de Lozi podem exibir. Nesta parte deste trabalho vamos apresentar a dinâmica simbólica das aplicações de Lozi tendo em atenção esses casos particulares, para os quais existe já um apreciável trabalho com técnicas da dinâmica simbólica. Para começar vamos apresentar um formalismo alternativo ao introduzido, em finais dos anos 70, por Milnor e Thurston, para a teoria do amassamento das aplicações unimodais no intervalo, por forma a que o formalismo apresentado posteriormente para a família das aplicações de Lozi surja como uma generalização quase imediata.

### 3.1 Dinâmica simbólica das aplicações tenda

Quando escolhemos o segundo parâmetro da família das aplicações de Lozi igual a zero,  $b = 0$ , verificamos facilmente que a família  $a$ -um-parâmetro de aplicações no plano que então se obtém é de uma certa forma equivalente à família  $T_a$  de aplicações tenda na recta real

$$T_a(x) = 1 - a|x|, \quad 1 < a \leq 2,$$

ou seja, uma família de aplicações unimodais no intervalo. Como é sobejamente conhecido, este tipo de dinâmicas foi estudado através da teoria do amassamento, introduzida por Milnor e Thurston, no final da década de 70, nomeadamente o problema da sua classificação topológica.

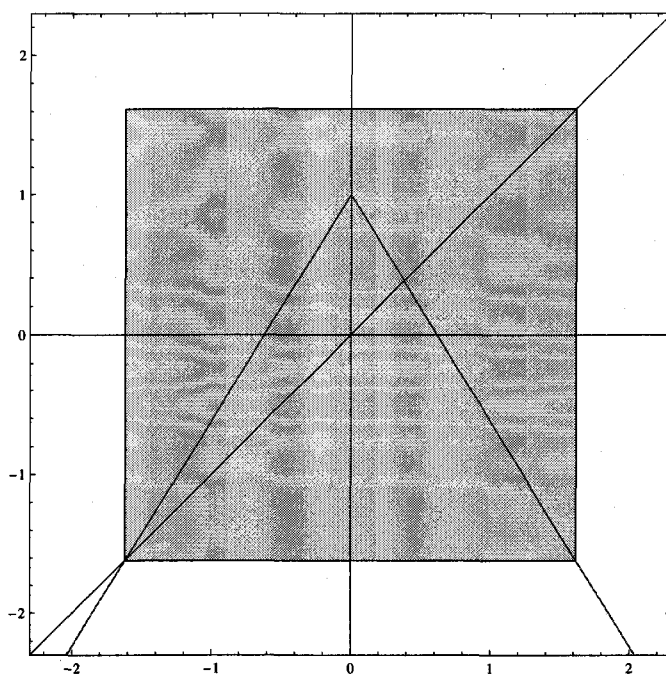


Figura 3.1: Aplicação tenda  $T_a$ , onde se destaca o intervalo invariante  $I_a = [-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}]$ .

Um dos aspectos mais significativos do estudo proposto foi, sem dúvida alguma, a utilização de sequências simbólicas para distinguir dinâmicas topologicamente distintas. De seguida, vamos apresentar algumas das principais ideias da teoria do amassamento para a família das aplicações tenda referida acima, mas com algumas diferenças.

**Definição 3.1.** Dada uma qualquer aplicação  $T_a$ , vamos chamar endereço de um ponto  $x \in \mathbb{R}^a$

$$\text{end}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ \star & \text{se } x = 0 \\ +1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde por  $\star$  se representa qualquer dos símbolos  $+1$ , ou  $-1$ .

Aqui reside logo a primeira e principal diferença relativamente ao formalismo de Milnor e Thurston, uma vez que esses autores usaram três letras,  $L, C, R$ , para distinguir as três possíveis localizações do ponto  $x$  no espaço de fases. A ambiguidade que resulta da utilização da  $\star$ , ao

invés da introdução de um símbolo específico, como fizeram Milnor e Thurston, será resolvida mais à frente.

A partir do conceito de endereço de um ponto, vamos construir uma sequência simbólica infinita associada à órbita, por  $T_a$ , desse ponto.

**Definição 3.2.** *Dada uma qualquer aplicação  $T_a$ , vamos chamar itinerário de um ponto  $x \in \mathbb{R}$  à sequência simbólica infinita formada pelos endereços das suas sucessivas iteradas, isto é,*

$$\tau_a(x) = \text{end}(x) \text{end}(T_a(x)) \text{end}(T_a^2(x)) \cdots$$

Fixada uma aplicação  $T_a$ , é natural que nem todas as sequências de símbolos  $-1$  e  $+1$  sejam realizadas como itinerários de pontos do espaço de fases. Vamos denotar por  $\Sigma_a$  o conjunto das sequências simbólicas que são itinerário de algum ponto do espaço de fases da dinâmica e por  $\Sigma^2 = \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$  o espaço simbólico de todas as sequências infinitas compostas por dois símbolos, neste caso, pelos símbolos  $-1$  e  $+1$ .

A observação fundamental de Milnor e Thurston foi que o itinerário da imagem do máximo da aplicação tem características muito especiais, pelo que é conveniente destacar essa sequência simbólica.

**Definição 3.3.** *Dada uma qualquer aplicação  $T_a$ , vamos chamar sequência de amassamento de  $T_a$  ao itinerário do ponto  $T_a(0) = 1$ , passando-se a denotar essa sequência como*

$$\kappa_a = \tau_a(1).$$

De seguida vamos enunciar um corolário de um teorema mais geral formulado por John Guckenheimer, em [Guc79], que estabelece condições necessárias e suficientes para que duas aplicações tenda sejam topologicamente equivalentes.

**Corolário 3.4.** *Dadas duas aplicações tenda  $T_a$  e  $T_b$ , estas são topologicamente equivalentes,  $T_a \sim T_b$ , se e só se, as suas sequências de amassamento são iguais, isto é, se e só se  $\kappa_a = \kappa_b$ .*

Deste resultado vemos que a sequência simbólica  $\kappa_a$  é um invariante topológico completo para a família de aplicações tenda  $T_a$ . De seguida, vamos mostrar de que modo a ambiguidade resultante do símbolo  $*$  é resolvida.

Dada uma qualquer aplicação  $T_a$  e uma qualquer sequência simbólica  $\varepsilon \in \Sigma_a$ ,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots,$$

seja  $q_a$  a aplicação de  $\Sigma_a$  para  $\mathbb{R}$  definida por

$$q_a(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{a^{k+1}}.$$

Como se pode verificar em [IS98], esta aplicação está nas condições da seguinte proposição:

**Proposição 3.5.** *Dada uma qualquer aplicação  $T_a$  e para qualquer  $x \in I_a$ , com  $I_a = [-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}]$  o intervalo invariante da dinâmica, tem-se que*

$$q_a(\tau_a(x)) = x. \quad (3.1)$$

Neste sentido, considerando a restrição do espaço de fases ao intervalo invariante  $I_a$ , podemos dizer que a aplicação  $q_a$  acima definida é a aplicação inversa da aplicação itinerário  $\tau_a$ . Gostaríamos de destacar que o resultado acima apresentado é válido mesmo que a órbita em causa passe por  $x = 0$ , ou seja, que quando se tem um símbolo  $\star$ , qualquer que seja a escolha feita na sequência simbólica  $\varepsilon$ , a igualdade é verdadeira.

Neste formalismo alternativo a Proposição 3.5 tem um papel muito importante, uma vez que é devido à igualdade (3.1) que, ao invés de considerarmos uma relação de ordem entre sequências simbólicas de  $\Sigma_a$  traduzindo a ordem do intervalo, vamos poder usar directamente a ordem dos pontos do intervalo. De facto, como vai ser possível verificar já de seguida, pelo resultado dado em [IS98], vamos conseguir caracterizar todos os itinerários possíveis para uma dada aplicação  $T_a$  através da aplicação  $q_a$ .

**Proposição 3.6.** *Dada uma qualquer aplicação  $T_a$ , uma sequência simbólica  $\varepsilon \in \Sigma^2$  pertence ao espaço dos itinerários dos pontos do intervalo invariante se e só se*

$$T_a^k(q_a(\varepsilon)) \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (3.2)$$

Tal como foi feito por Milnor e Thurston, a ideia fundamental passa por afirmar, em termos simbólicos, que a imagem por  $T_a$  de qualquer ponto do espaço de fases é seguramente menor ou igual à imagem do ponto  $x = 0$ , ou seja, é menor ou igual a 1. Veja-se que esta análise da aplicação no intervalo invariante não é de todo restritiva, uma vez que, como é possível observar na Figura 3.1, o itinerário de qualquer ponto à direita de  $1/(a-1)$  é exactamente o mesmo que o desse ponto, o mesmo sucedendo com o ponto mais à esquerda no intervalo invariante,  $-1/(a-1)$ , onde o itinerário de qualquer ponto menor que esse é igual ao itinerário de  $-1/(a-1)$ .

Na figura seguinte desenhamos o intervalo invariante  $I_a$ , visto como espaço das imagens de  $T_a$ , assinalando o subintervalo dos pontos cujos itinerários constituem o espaço simbólico  $\Sigma_a$ .

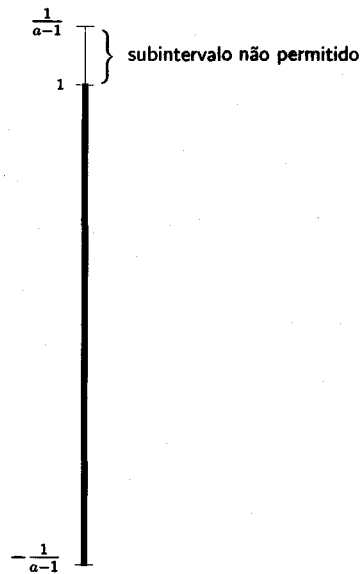


Figura 3.2: Intervalo invariante  $I_a$ .

Olhando para o gráfico acima, percebemos imediatamente que, para  $1/(a-1) = 1$ , ou seja, para  $a = 2$ , o intervalo invariante é igual a  $[-1, 1]$ , ou seja, a condição (3.2) é satisfeita por toda e qualquer sequência simbólica de  $\Sigma^2$ . Deste modo, podemos concluir que para esse valor do parâmetro, a aplicação  $T_a$  admite toda e qualquer sequência como itinerário de pontos de  $I_a$ . Assim sendo, através da relação (3.1), podemos perceber que quando consideramos valores decrescentes do parâmetro a partir de 2, isso corresponde a ir *cortando* algumas sequências do espaço dos itinerários permitidos. É nesse sentido que se olha para o espaço dos itinerários  $\Sigma_a$  como resultante de uma poda do espaço simbólico completo,  $\Sigma^2$ , poda essa que é tanto maior quanto mais pequeno for o parâmetro escolhido.

Naturalmente que estas ideias não são um exclusivo deste formalismo, estando já presentes nos estudos de Sousa Ramos, principalmente quando este apresentou a árvore, ordenada pelo parâmetro, de todas as sequências de  $\Sigma^2$ , ver [Sou89].

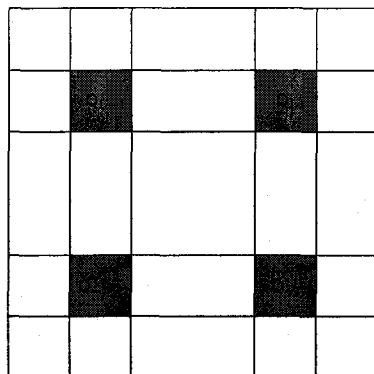


Figura 3.6: Os quadrados invariantes dados através da primeira iteração do rectângulo  $Q$  pela aplicação  $\phi$  quer para o futuro quer para o passado.

A notação utilizada lembra que um ponto  $(x, y)$  pertencente ao quadrado  $Q_{i,j}$  satisfaz as condições

$$\phi^{-1}(x, y) \in H_i$$

$$\phi(x, y) \in V_j.$$

Naturalmente que podemos considerar a segunda iterada por  $\phi$  do quadrado  $Q$ , calculando a imagem por  $\phi$  dos rectângulos verticais  $V_{-1}$  e  $V_1$ . Como facilmente se verifica, essa imagem vai ser a união de quatro rectângulos verticais, cada um deles de largura  $1/\lambda^2$ . Para percebermos melhor quais dos rectângulos são imagem de cada um dos rectângulos  $V_{-1}$  e  $V_1$ , é preferível imaginar ainda a imagem de  $Q$  como o resultado de uma segunda iteração das operações anteriormente consideradas, como se pode ver na figura seguinte.



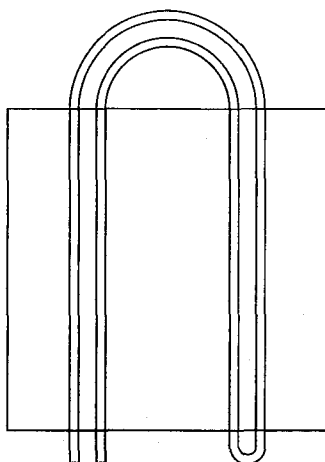


Figura 3.7: A segunda iteração da aplicação  $\phi$  sobre o rectângulo  $Q$ , e o rectângulo  $Q$ .

Deste modo, denotando por  $V_{-1-1}$ ,  $V_{-11}$ ,  $V_{1-1}$  e  $V_{11}$  os quatro rectângulos obtidos, como na figura seguinte,

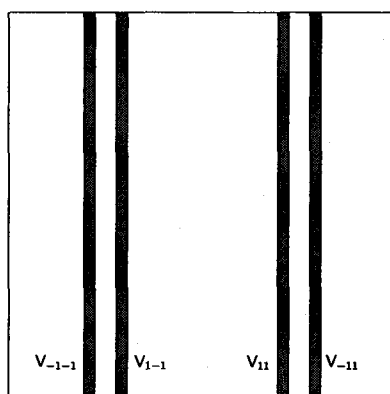


Figura 3.8: Os rectângulos verticais  $V_{-1-1}$ ,  $V_{1-1}$ ,  $V_{11}$  e  $V_{-11}$  dados por  $\phi^2(Q) \cap Q$ .

verifica-se facilmente que,

$$\phi(V_{-1}) = V_{-1-1} \cup V_{-11}$$

$$\phi(V_1) = V_{1-1} \cup V_{11}.$$

Procedendo de modo análogo, podemos concluir que a imagem inversa dos dois rectângulos horizontais  $H_{-1}$  e  $H_1$  é igualmente constituída por quatro rectângulos horizontais, cada um

deles de espessura  $1/\lambda^2$ , tal como se indica na figura seguinte.

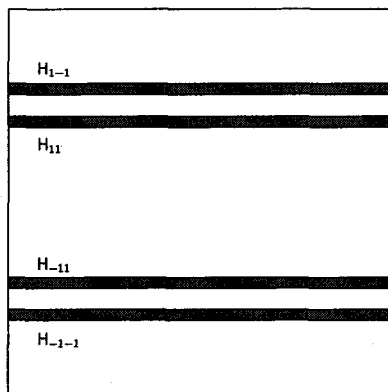


Figura 3.9: Os rectângulos horizontais  $H_{1-1}$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{-11}$  e  $H_{-1-1}$  dados por  $\phi^{-2}(Q) \cap Q$ .

Tal como foi feito anteriormente, podemos também agora construir a intersecção de conjuntos  $Q \cap \phi^2(Q) \cap \phi^{-2}(Q)$ , a união de dezasseis pequenos quadrados de lado  $1/\lambda^2$ .

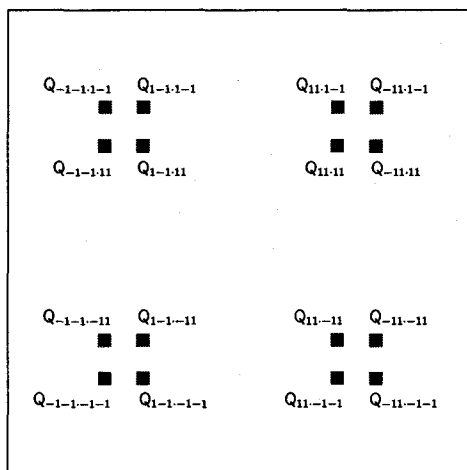


Figura 3.10: Os quadrados invariantes dados através da segunda iteração do rectângulo  $Q$  pela aplicação  $\phi$  quer para o futuro quer para o passado.

Dando seguimento à notação adoptada anteriormente, desta vez estamos a distinguir os pequenos quadrados descrevendo-os como  $Q_{s_{-2}s_{-1}s_1s_2}$ , com cada um dos índices  $s_k = 0, 1$ , com o seguinte significado: um ponto  $(x, y)$  pertence ao pequeno quadrado  $Q_{s_{-2}s_{-1}s_1s_2}$  se satisfaz

as condições

$$\phi^{-2}(x, y) \in H_{s_{-2}}$$

$$\phi^{-1}(x, y) \in H_{s_{-1}}$$

$$\phi(x, y) \in V_{s_1}$$

$$\phi^2(x, y) \in V_{s_2}.$$

Nesta altura achamos importante olhar os quadrados  $Q_{s_{-2}s_{-1}s_1s_2}$  segundo uma perspectiva um pouco diferente. Da descrição da aplicação  $\phi$  ficou patente que certos pontos de  $Q$  têm como imagem pontos que já não pertencem ao quadrado. Dessa forma podemos dizer que são pontos que se perdem, uma vez que são pontos relativamente aos quais não tem sentido considerar a imagem por  $\phi^2$ . Assim sendo, podemos olhar para os dezasseis pequenos quadrados  $Q_{s_{-2}s_{-1}s_1s_2}$  como os (únicos) pontos do quadrado  $Q$  cujas imagens quer por  $\phi^2$  quer por  $\phi^{-2}$ , ainda pertencem a  $Q$ . Nessa perspectiva, fixado um qualquer inteiro positivo  $n$ , verifica-se que os pontos de  $Q$  cujas imagens por  $\phi^n$  e  $\phi^{-n}$  ainda pertencem a  $Q$  estão situados em  $4^n$  pequenos quadrados de lado igual a  $1/\lambda^n$ . Levando mais longe esta construção, podemos perguntar quais os pontos de  $Q$  cuja imagem por  $\phi^k$ , para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ , se encontra ainda em  $Q$ . A resposta é dada pelo conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(Q),$$

habitualmente designado por ferradura<sup>1</sup> de Smale. Como facilmente se reconhece, a ferradura  $\Lambda$  é um conjunto geometricamente muito complexo, trata-se do produto cartesiano de dois cantorianos, correspondente ao cruzamento do cantoriano dos rectângulos verticais com o cantoriano dos rectângulos horizontais. Trata-se de um conjunto que resulta de levar ao limite, quando  $n$  tende para infinito, um processo de construção de pequenos quadrados que podem ser descritos simbolicamente: de facto, cada sequência finita  $\varepsilon_{-n} \cdots \varepsilon_{-1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$  corresponde a um quadrado de lado  $1/\lambda^n$ . No limite, quando  $n$  tende para infinito, do processo de construção teremos uma correspondência entre sequências bi-infinitas e pontos do conjunto  $\Lambda$ , correspondência essa que está na base do resultado que passaremos a enunciar e que permite estudar a dinâmica de  $(\Lambda, \phi)$  a partir do estudo de um espaço de sequências simbólicas e da aplicação deslocamento (para a esquerda)  $\sigma$ .

<sup>1</sup>Recordando a imagem que surge na construção da imagem por  $\phi$  do quadrado original.

Denotemos por  $\Sigma^{2b}$  o espaço simbólico de todas as sequências bi-infinitas de elementos  $-1$  ou  $+1$ ,

$$\Sigma^{2b} = \{\varepsilon = \cdots \varepsilon_{-2}\varepsilon_{-1} \cdot \varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots : \varepsilon_i = -1 \vee \varepsilon_i = +1, i \in \mathbb{Z}\}.$$

Então, tem-se que, ver [Rob99],

**Teorema 3.7.** *As dinâmicas  $(\Lambda, \phi)$  e  $(\Sigma^{2b}, \sigma)$  são topologicamente equivalentes.*

Este resultado representa uma simplificação enorme no estudo da dinâmica da ferradura de Smale, uma vez que a equivalência topológica permite passar imediatamente todas as propriedades dinâmicas de  $(\Sigma^{2b}, \sigma)$  para  $(\Lambda, \phi)$ . Assim sendo, podemos desde logo afirmar que  $(\Lambda, \phi)$  tem pontos periódicos de todos os períodos, ou que admite uma órbita densa. Para além disso, trata-se de um sistema dinâmico caótico.

A importância da ferradura de Smale  $(\Lambda, \phi)$  não é exactamente o facto de se tratar de um sistema dinâmico caótico. De alguma forma podemos dizer que a ferradura é a impressão digital, a marca do caos para aplicações no plano. Esta ideia é consequência do resultado que apresentaremos logo após introduzirmos alguns conceitos da dinâmica do plano.

### 3.2.2 Bifurcações homoclínicas e atractores

A palavra homoclínica refere-se a uma qualquer órbita (trajectória) de um sistema dinâmico que tem o mesmo destino assintótico, quer para o futuro quer para o passado. O processo da criação de uma órbita homoclínica tem despertado, ao longo dos anos, um interesse cada vez maior, no que diz respeito ao estudo da dinâmica.

Uma bifurcação homoclínica é um mecanismo complexo de uma modificação dinâmica, e tem um papel importante no aparecimento e desenvolvimento do comportamento caótico em muitos sistemas dinâmicos. De facto, a presença de órbitas homoclínicas, é uma condição para que se encontrem dinâmicas muito ricas, como por exemplo, infinitos pontos periódicos e entropia positiva, como veremos adiante.

Seja  $M$  uma variedade suave e  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo em  $M$ . Um ponto hiperbólico homoclínico associado a um ponto  $p$  periódico hiperbólico de  $f$  é um ponto  $q$  pertencente à intersecção da variedade estável,  $W^s(p)$ , com a variedade instável,  $W^u(p)$ , do ponto  $p$ . Este ponto homoclínico,  $q$ , diz-se transversal se as duas variedades se intersectam transversalmente em  $q$ , como se pode ver na figura seguinte.

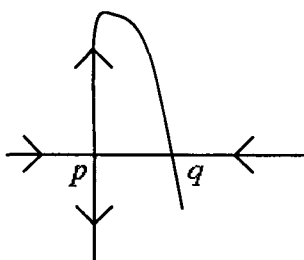


Figura 3.11: Ponto homoclínico transverso.

Esta forma de intersecção das duas variedades não é única e na figura seguinte apresenta-se uma situação em que  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  se intersectam num ponto, mas não transversalmente. Trata-se apenas de uma tangência e, nesse sentido, o ponto  $q$  diz-se uma tangência homoclínica.

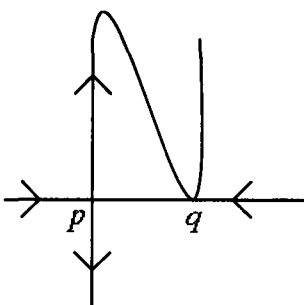


Figura 3.12: Tangência homoclínica.

Poincaré foi o primeiro a observar que a simples presença de um ponto homoclínico transversal implicava uma grande complexidade da dinâmica. Esta observação foi mais tarde confirmada por Birkhoff, que mostrou que um ponto hiperbólico transversal é acumulado por pontos periódicos do difeomorfismo. Esta prova foi mais tarde revista no trabalho feito por Smale sobre a hiperbolicidade: todo o ponto homoclínico transversal é parte de um conjunto hiperbólico invariante — uma ferradura — que contém uma dinâmica muito rica, como, por exemplo, órbitas densas, um subconjunto denso de pontos periódicos, folheações invariantes, etc.

Uma bifurcação homoclínica, quer seja com a criação ou com a destruição de um ponto homoclínico transversal, é acompanhada por profundas modificações na dinâmica. Uma forma de obter tais bifurcações é através da tangência homoclínica. Na Figura 3.13 podemos ver um exemplo onde existe uma destruição de um ponto homoclínico transversal.

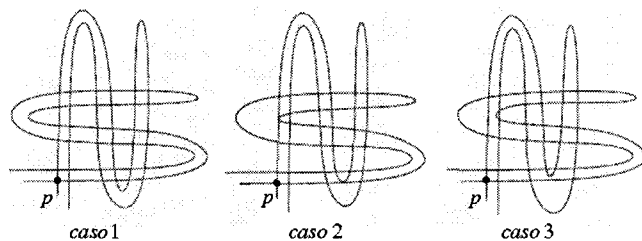


Figura 3.13: Processo de destruição de um ponto homoclínico transverso.

É importante realçar que no caso 3 já não temos o ponto homoclínico transversal que existia no caso 1, havendo deste modo a perda de informação sobre a dinâmica que existia no sistema descrito no caso 1. Grosso modo, podemos dizer que o caso 2, onde existe a tangência homoclínica, faz um género de fronteira entre estas duas situações. No primeiro caso temos uma ferradura de Smale completa e assim, como vimos anteriormente, o seu conjunto invariante tem uma representação simbólica equivalente ao conjunto  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ ; ver Figura 3.14.

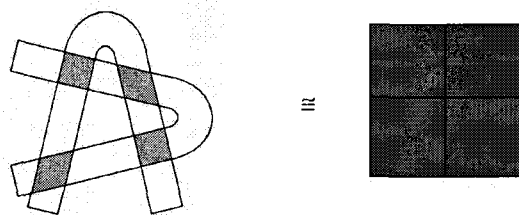


Figura 3.14: Ferradura completa.

Quando a aplicação degenera um pouco, como no caso 3 da Figura 3.13, a representação simbólica deixa de ser trivial e o espaço simbólico pode mesmo perder sequências devido à degeneração ocorrida perto da "primeira dobra"; ver Figura 3.15.

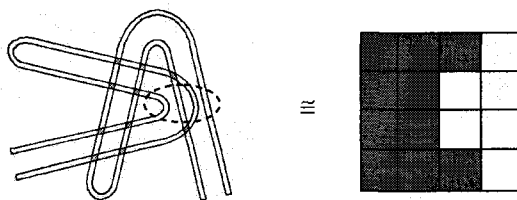


Figura 3.15: Ferradura incompleta

A esta região proibida chamamos a primeira região podada e a sua fronteira é chamada primeira frente podada. A primeira frente podada é consequência da primeira tangência. Utilizamos o termo "primeira" pois passamos de uma situação onde não havia qualquer tipo de tangência, para uma onde ocorre a primeira tangência.

Deste modo, a frente podada permite distinguir as sequências admissíveis das não admissíveis. Devido à invariância do espaço dinâmico, todas as imagens e pré-imagens das sequências que estão na primeira região podada são também proibidas.

O resultado que junta o conceito de ponto homoclínico e a dinâmica complexa da ferradura de Smale pode ser apresentado do seguinte modo, cuja prova pode ser encontrada, por exemplo, em [Rob99].

**Teorema 3.8.** *Seja  $f$  uma aplicação no plano e  $\Lambda$  o seu conjunto invariante, que supomos ser hiperbólico, e seja  $P$  um ponto periódico de período  $n$  de  $f$ . Se existe um ponto homoclínico  $Q \in W^u(P) \cap W^s(P)$ , então podemos dizer que  $f^n$  tem uma ferradura, no sentido da sua dinâmica em  $\Lambda$  ser equivalente a  $(\Sigma^{2b}, \sigma)$ .*

Para terminar, gostaríamos de fazer um paralelo com a dinâmica da aplicação tenda  $T_a$ : para  $a = 2$ , mostra-se que a aplicação tenda é topologicamente equivalente à dinâmica da aplicação deslocamento no espaço das sequências infinitas (mas não bi-infinitas) com elementos escolhidos entre dois símbolos. Trata-se da maior complexidade que uma aplicação unimodal pode assumir, uma vez que a imagem por  $T_a$  de ambas as voltas da aplicação atinge todo o intervalo invariante. De alguma forma corresponde à ferradura de Smale, quando existem pontos homoclínicos relativos aos seus pontos fixos. Então, para valores do parâmetro inferiores a 2, a dinâmica de  $T_a$  vai perdendo complexidade, no sentido em que o número de voltas de  $T_a^n$  é desde logo inferior a  $2^n$ , o que corresponde, em termos simbólicos, a uma perda, ou poda, do conjunto dos itinerários possíveis para os pontos do intervalo relativamente a  $\Sigma^2$ .

### 3.3 Dinâmica simbólica para os atratores de Lozi

De seguida, vamos apresentar a dinâmica simbólica introduzida por Yutaka Ishii, [Ish97], para a família de aplicações de Lozi. Nesse seu trabalho, Ishii, recorrendo às expressões das variedades estáveis e instáveis, provou o problema da primeira tangência para as aplicações de Lozi e, desse modo, conseguiu distinguir as sequências simbólicas admissíveis das não admissíveis. Contudo, essa prova tem uma pequena gralha na construção da sequência simbólica que define a fronteira

da admissibilidade. Naturalmente que iremos corrigir esse erro e, conseqüentemente, a região onde as seqüências simbólicas são admissíveis apresentar-se-á reformulada.

Consideremos um ponto  $X$  pertencente ao atrator  $\tilde{\mathcal{F}}$  de uma aplicação de Lozi. Para esse ponto definimos,

$$\pi_{\mathcal{L}}(X) \equiv \cdots \varepsilon_{-2} \varepsilon_{-1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$$

em que

$$\varepsilon_i \equiv \begin{cases} +1 & \mathcal{L}^i(X)_x > 0 \\ \star & \mathcal{L}^i(X)_x = 0 \\ -1 & \mathcal{L}^i(X)_x < 0 \end{cases},$$

onde  $\star$  tem o significado que a esse  $\varepsilon_i$  tanto podemos fazer corresponder o símbolo  $+1$ , como o símbolo  $-1$ . Nas expressões acima usámos a notação  $\mathcal{L}^i(X)_x$ , que representa a componente  $x$  do ponto  $\mathcal{L}^i(X)$ .

A multi-função  $\pi_{\mathcal{L}}$  faz a conjugação entre a aplicação de Lozi em  $\tilde{\mathcal{F}}$  e a aplicação deslocamento no conjunto  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \tilde{\mathcal{F}} \\ \pi_{\mathcal{L}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{L}} \\ \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Um elemento de  $\pi_{\mathcal{L}}(X)$  diz-se um itinerário de  $X$ . Como podemos ver, devido à variação que existe com uma ocorrência de um símbolo  $\star$ , o ponto  $X$  pode ter mais do que um itinerário. Dizemos que uma seqüência simbólica  $\underline{\varepsilon}$  é admissível se existe um ponto  $X \in \tilde{\mathcal{F}}$  tal que  $\underline{\varepsilon} \in \pi_{\mathcal{L}}(X)$ .

**Exemplo 3.9.** Vamos supor que a órbita de um ponto  $X \in \tilde{\mathcal{F}}$  satisfaz

$$\begin{cases} \mathcal{L}^i(X)_x > 0 & (i \leq -1) \\ \mathcal{L}^i(X)_x = 0 & (i = 0, 2) \\ \mathcal{L}^i(X)_x < 0 & (i \geq 3 \text{ ou } i = 1) \end{cases}.$$

Assim sendo, podemos concluir que o itinerário de  $X$  consiste em quatro seqüências diferentes,



$\pi_{\mathcal{L}}(X) = \{\underline{\varepsilon}_1, \underline{\varepsilon}_2, \underline{\varepsilon}_3, \underline{\varepsilon}_4\}$ , dadas por

$$\begin{array}{cccccccc} & \cdots & \varepsilon_{-2} & \varepsilon_{-1} & \cdot & \overbrace{\varepsilon_0}^* & \varepsilon_1 & \overbrace{\varepsilon_2}^* & \varepsilon_3 & \cdots \\ \underline{\varepsilon}_1 & \rightarrow & \cdots & +1 & +1 & \cdot & +1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ \underline{\varepsilon}_2 & \rightarrow & \cdots & +1 & +1 & \cdot & +1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ \underline{\varepsilon}_3 & \rightarrow & \cdots & +1 & +1 & \cdot & -1 & -1 & +1 & -1 & \cdots \\ \underline{\varepsilon}_4 & \rightarrow & \cdots & +1 & +1 & \cdot & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \end{array}$$

Dada uma qualquer sequência simbólica  $\underline{\varepsilon}$ ,

$$\underline{\varepsilon} = \cdots \varepsilon_{-2} \varepsilon_{-1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$$

pertencente a  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ , dizemos que a subsequência

$$\underline{\varepsilon}^u = \cdots \varepsilon_{-2} \varepsilon_{-1} \cdot$$

é o itinerário para o passado de  $\underline{\varepsilon}$ , enquanto a subsequência simbólica

$$\underline{\varepsilon}^s = \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$$

é o itinerário para o futuro de  $\underline{\varepsilon}$ .

Denotemos por  $C^u$  e  $C^s$  os conjuntos de todos os passados e todos os futuros, respectivamente, das sequências simbólicas pertencentes a  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ . Deste modo, podemos dizer que

$$C^u \times C^s = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}.$$

**Definição 3.10.** Para toda a sequência  $\underline{\varepsilon} = \cdots \varepsilon_{-2} \varepsilon_{-1} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$  pertencente ao espaço simbólico  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ , chamamos folha instável de  $\underline{\varepsilon}$  a

$$\ell_{\underline{\varepsilon}}^u \equiv \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{L}^n(F_{-n}),$$

e chamamos folha estável de  $\underline{\varepsilon}$  a

$$\ell_{\underline{\varepsilon}}^s \equiv \bigcap_{n \leq 0} \mathcal{L}^n(F_{-n}),$$

onde

$$F_i \equiv \begin{cases} \{(x, y) : x \geq 0\} \cap \Delta_M & \text{se } \varepsilon_i = +1 \\ \{(x, y) : x \leq 0\} \cap \Delta_M & \text{se } \varepsilon_i = -1 \end{cases}.$$

De seguida, definimos uma relação de ordem  $<_x$  nos pontos do atractor e relações de ordem  $<_s$  e  $<_u$  nos espaços das sequências  $C^s$  e  $C^u$ , respectivamente.

**Definição 3.11.** *Para uma qualquer sequência  $\underline{\varepsilon}$ , sejam  $X$  e  $Y$  dois pontos da folha instável  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$ . Então, dizemos que  $X <_x Y$  se e só se  $X_x < Y_x$ , onde por  $X_x, Y_x$  se denota a componente segundo o eixo dos  $xx$  de cada um dos pontos. Caso  $X$  e  $Y$  sejam pontos da folha estável  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$ , então dizemos que  $X <_y Y$  se e só se  $X_y < Y_y$ , onde por  $X_y, Y_y$  se denota a componente segundo o eixo dos  $yy$  de cada um dos pontos.*

As relações de ordem simbólicas que introduziremos de seguida vão fazer intervir uma paridade: dada uma sequência simbólica finita  $\zeta_1 \cdots \zeta_k$  denotamos por  $\rho_+(\zeta_1 \cdots \zeta_k)$  e por  $\rho_-(\zeta_1 \cdots \zeta_k)$ , respectivamente, o número de símbolos  $+1$  e o número de símbolos  $-1$  presentes nessa sequência.

**Definição 3.12.** *Sejam  $\underline{\varepsilon}^s$  e  $\underline{\delta}^s$  duas sequências distintas de  $C^s$  e seja  $k$  o menor inteiro não negativo tal que  $\varepsilon_k \neq \delta_k$ . Então, dizemos que  $\underline{\varepsilon}^s <_s \underline{\delta}^s$ :*

1. se  $\rho_+(\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{k-1})$  é um número par e  $\varepsilon_k < \delta_k$ , ou
2. se  $\rho_+(\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_{k-1})$  é um número ímpar e  $\delta_k < \varepsilon_k$ .

Naturalmente, estamos a considerar a ordem habitual  $-1 < +1$  entre os símbolos escolhidos. Por fim, introduzimos igualmente uma relação de ordem relativamente a quaisquer duas sequências do espaço de todos os passados.

**Definição 3.13.** *Sejam  $\underline{\varepsilon}^u$  e  $\underline{\delta}^u$  duas sequências distintas de  $C^u$  e seja  $k$  o maior inteiro negativo tal que  $\varepsilon_k \neq \delta_k$ . Então, para  $b > 0$ , dizemos que  $\underline{\varepsilon}^u <_u \underline{\delta}^u$ :*

1. se  $\rho_-(\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{-1})$  é um número par e  $\varepsilon_k < \delta_k$ , ou
2. se  $\rho_-(\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{-1})$  é um número ímpar e  $\delta_k < \varepsilon_k$ .

*Caso  $b < 0$ , então dizemos que  $\underline{\varepsilon}^u <_u \underline{\delta}^u$ :*

1. se  $\rho_+(\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{-1})$  é um número par e  $\varepsilon_k < \delta_k$ , ou
2. se  $\rho_+(\varepsilon_{k+1} \cdots \varepsilon_{-1})$  é um número ímpar e  $\delta_k < \varepsilon_k$ .

A justificação das relações de ordem simbólicas torna-se evidente perante a proposição seguinte, apresentada por Ishii, em [Ish97], na medida em que estabelece que a aplicação  $\pi_{\mathcal{L}}$  preserva a ordem.

**Proposição 3.14.** *Suponhamos que  $a > |b| + 1$ . Então a aplicação  $\pi_{\mathcal{L}}$  preserva a ordem no seguinte sentido:*

1. *consideremos quaisquer pontos  $X, Y$  pertencentes a uma folha instável  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$  e quaisquer sequências  $\underline{\omega} \in \pi_{\mathcal{L}}(X)$  e  $\underline{\delta} \in \pi_{\mathcal{L}}(Y)$ ; então*

$$X <_x Y \implies \underline{\omega}^s \leq_s \underline{\delta}^s.$$

2. *consideremos quaisquer pontos  $X, Y$  pertencentes a uma folha estável  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  e quaisquer sequências  $\underline{\omega} \in \pi_{\mathcal{L}}(X)$  e  $\underline{\delta} \in \pi_{\mathcal{L}}(Y)$ ; então*

$$X <_y Y \implies \underline{\omega}^u \leq_u \underline{\delta}^u.$$

Como podemos constatar com o resultado acima apresentado, existe uma compatibilidade entre a ordem definida no conjunto dos pontos do atrator pertencentes a uma determinada folha, seja ela a folha estável ou a folha instável, e os seus itinerários simbólicos. De seguida, vamos definir uma aplicação que nos leva das sequências simbólicas de  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  para pontos do atrator  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Naturalmente que, como fizemos anteriormente ao estudar a dinâmica simbólica da família das aplicações tenda no intervalo, o nosso objectivo é conseguir introduzir uma aplicação que funcione como inversa da aplicação itinerário de um ponto de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

Para cada escolha de  $\underline{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$  consideremos o operador

$$M_{\underline{\varepsilon}} : \ell_{\infty}(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$$

definido por

$$(M_{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}))_n \equiv \frac{1 - x_{n+1} + bx_{n-1}}{\varepsilon_n a} \quad (3.3)$$

onde por  $x_n$  se representa o  $n$ -ésimo elemento de  $\underline{x} \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z})$ . O resultado que apresentamos de seguida deve-se ainda a Ishii, podendo a sua prova ser vista em [Ish97].

**Proposição 3.15.** *Suponhamos que  $a > |b| + 1$ ; então,*

1. *para qualquer  $\underline{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ , existe um único ponto fixo  $\underline{x}(\underline{\varepsilon})$  de  $M_{\underline{\varepsilon}}$  e,*

2. para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , o ponto fixo  $\underline{x}(\varepsilon)$  satisfaz

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + bx_{n-1}, \quad (3.4)$$

se e só se

$$\varepsilon_n \underline{x}(\varepsilon)_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Da definição do operador  $M_\varepsilon$ , escrevendo  $(M_\varepsilon(\underline{x}))_n = x_n$ , conclui-se facilmente que os elementos de  $\underline{x}(\varepsilon)$  verificam sempre a igualdade

$$x_{n+1} = 1 - \varepsilon_n a x_n + b x_{n-1}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, através da definição da aplicação de Lozi e definindo

$$\underline{x}(\varepsilon)_{n,n-1} \equiv (\underline{x}(\varepsilon)_n, \underline{x}(\varepsilon)_{n-1}),$$

podemos ver que  $\underline{x}(\varepsilon)$  verifica a equação (3.4) se e só se

$$(\underline{x}(\varepsilon)_n, \underline{x}(\varepsilon)_{n-1}) = \mathcal{L}^n(\underline{x}(\varepsilon)_0, \underline{x}(\varepsilon)_{-1}).$$

Por fim, se  $\underline{x}(\varepsilon)$  verifica (3.4), temos imediatamente que  $\underline{x}(\varepsilon)_{n,n-1} \in \tilde{\mathcal{F}}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 3.16.** Seja  $\underline{x}_{0,-1}$  a aplicação definida do espaço simbólico para  $\mathbb{R}^2$ , dada por

$$\underline{x}(\varepsilon)_{0,-1} = (\underline{x}(\varepsilon)_0, \underline{x}(\varepsilon)_{-1}).$$

Seja  $\mathcal{A}_\mathcal{L}$  o conjunto de todas as sequências simbólicas que satisfazem a condição (3.5). Pelos argumentos acima expostos, temos que  $\underline{x}_{0,-1}(\mathcal{A}_\mathcal{L}) \subset \tilde{\mathcal{F}}$ . Desta forma, podemos concluir dizendo que a aplicação  $\underline{x}_{0,-1}$  definida no conjunto  $\mathcal{A}_\mathcal{L}$  é sobrejectiva, sendo a aplicação inversa de  $\pi$  em  $\tilde{\mathcal{F}}$ , ou seja, para um qualquer ponto  $X \in \tilde{\mathcal{F}}$ , temos que

$$\pi(X) = \underline{x}_{0,-1}^{-1}(X) \cap \mathcal{A}_\mathcal{L}.$$

Em particular, temos

$$\underline{x}_{0,-1} \circ \pi = \text{id}|_{\tilde{\mathcal{F}}}.$$

Ainda em [Ish97], podemos ver a demonstração do seguinte resultado.

**Lema 3.17.** A aplicação  $\underline{x}_{0,-1}$  é contínua em  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ .

### 3.3.1 A poda do espaço simbólico

Os atractores estranhos da aplicação Lozi formam uma ferradura de Smale incompleta. Por outras palavras, podemos dizer que quando a aplicação degenera, o espaço simbólico pode perder certas sequências. Existem certas sequências, itinerários, que se caírem na região incompleta, então as suas pré-imagens também estão proibidas, isto é, são sequências não admissíveis. A esta região chamou-se a região poda preliminar e à sua fronteira chamou-se a frente poda. Em termos de aplicação do plano no plano, este facto é descrito como sendo o par podado.

Seja  $X$  um ponto do plano tal que as suas iterações para o passado por uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  não intersectam o eixo dos  $yy$ . Tal como vimos no capítulo anterior, o cone instável de  $X$  é dado por

$$(Co)_{\mathcal{L}^{-n}(X)}^u = \{(x, y) \in T_{\mathcal{L}^{-n}(X)}\mathbb{R}^2 : |bx| \leq |cy|\},$$

ou ainda, substituindo o valor da constante  $c$ , obtemos

$$(Co)_{\mathcal{L}^{-n}(X)}^u = \left\{ (x, y) \in T_{\mathcal{L}^{-n}(X)}\mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2|b|} |y| \right\}.$$

Por outro lado, para todo o ponto  $X$  cujas iteradas para o futuro por uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  não intersectam o eixo dos  $yy$ , temos que o seu cone estável,

$$(Co)_{\mathcal{L}^n(X)}^s = \{(u, v) \in T_{\mathcal{L}^n(X)}\mathbb{R}^2 : |v| \leq |cu|\}$$

pode tomar a expressão

$$(Co)_{\mathcal{L}^n(X)}^s = \left\{ (x, y) \in T_{\mathcal{L}^n(X)}\mathbb{R}^2 : |y| \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 4|b|}}{2} |x| \right\},$$

uma vez mais substituindo o valor da constante  $c$ . Consideremos novamente um ponto  $X$  pertencente ao plano tal que as suas iteradas para o passado por uma aplicação de Lozi nunca passam pelo eixo dos  $yy$  e seja  $\underline{\varepsilon}^u = \cdots \varepsilon_{-2}\varepsilon_{-1}$  a (única) sequência simbólica para o passado associada ao ponto  $X$ . Então, o conjunto dos pontos  $\underline{x}_{0,-1}(\cdots \varepsilon_{-2}\varepsilon_{-1} \cdot C^s)$  está totalmente contido em

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(\mathcal{L}^n)(Co)_{\mathcal{L}^{-n}(X)}^u.$$

Ora, como  $E_X^u$  é um subespaço unidimensional de  $T_X\mathbb{R}^2$ ,  $\underline{x}_{0,-1}(\cdots \varepsilon_{-2}\varepsilon_{-1} \cdot C^s)$  está efectivamente contido na recta  $y = s_{-1}(x - p)$ , cujo declive  $s_{-1}$  é dado por

$$s_{-1} = \frac{1}{-a\varepsilon_{-1} + \frac{1}{-a\varepsilon_{-2} + \frac{1}{-a\varepsilon_{-3} + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (3.7)$$

onde, como é óbvio, o ponto  $(p, 0)$  é a intersecção da referida recta com o eixo dos  $xx$ . Para determinarmos o valor de  $p$  vamos começar por fixar um qualquer valor de  $n$  não negativo e considerar o ponto  $(x_n, x_{n-1})$  pertencente à recta

$$y = s_{n-1}(x - p_{n-1}).$$

Mas, como

$$s_{n-1} = \frac{1}{-a\varepsilon_{n-1} + bs_{n-2}},$$

podemos escrever

$$x_n - p_{n-1} = (-a\varepsilon_{n-1} + bs_{n-2})x_{n-1},$$

e ainda, por (3.6),

$$p_{n-1} = a\varepsilon_{n-1}x_{n-1} + 1 - a\varepsilon_{n-1}x_{n-1} - bs_{n-2}x_{n-1} + bx_{n-2},$$

donde resulta que

$$p_{n-1} = 1 - bs_{n-2}p_{n-2}.$$

Deste modo obtemos uma fórmula recursiva para os diferentes  $p_n$ ,

$$p_{n+1} = 1 - bs_n p_n,$$

a partir da qual concluímos que  $p$  pode ser escrito como

$$p = p_{-1} = 1 - bs_{-2} + b^2 s_{-2} s_{-3} - \cdots \quad (3.8)$$

De modo análogo, caso a órbita para o futuro de  $X$  não intersekte o eixo dos  $yy$ , temos que o conjunto  $\underline{x}_{0,-1}(C^u \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots)$  está totalmente contido em

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(\mathcal{L}^{-n})(Co)_{\mathcal{L}^n(X)}^s = E_X^s,$$

ou seja, todos os seus pontos vão estar sobre uma recta, que iremos denotar por  $y = \frac{1}{r_0}(x - q)$ , cujo declive pode ser obtido através de

$$r_0 = \frac{b}{a\varepsilon_0 + \frac{b}{a\varepsilon_1 + \frac{b}{a\varepsilon_2 + \dots}}}. \quad (3.9)$$

Ora, uma vez que  $r_n = \frac{b}{a\varepsilon_n + r_{n+1}}$ , ficamos com a igualdade

$$\frac{b}{(a\varepsilon_n + r_{n+1})}x_{n-1} = x_n - q_n,$$

isto é, por (3.6),

$$x_{n+1} - 1 - r_{n+1}x_n = -q_n(a\varepsilon_n + r_{n+1}).$$

Deste modo, temos que

$$\frac{1}{b}(q_{n+1} - 1) = -q_n,$$

donde se retira igualmente uma fórmula recursiva para  $q_n$ ,

$$q_n = -b^{-1}r_n(q_{n+1} - 1).$$

Assim, o valor de  $q$  pode ser obtido através de

$$q = q_0 = b^{-1}r_0 - b^{-2}r_0r_1 + b^{-3}r_0r_1r_2 - \dots. \quad (3.10)$$

Pela sua importância, é conveniente introduzir uma notação para as duas rectas acima consideradas: para todo  $\underline{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ , denotemos por  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$  o conjunto dos pontos que estão sobre a recta  $y = s_{-1}(x - p)$  e por  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  o conjunto dos pontos que estão sobre a recta  $y = \frac{1}{r_0}(x - q)$ .

**Exemplo 3.18.** Consideremos a aplicação de Lozi  $\mathcal{L}_{ab}$  correspondente ao par de parâmetros  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$ . e a sequência simbólica  $\underline{\varepsilon}$  cujos primeiros símbolos do itinerário para o passado são

$$\underline{\varepsilon}^u = \dots + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1,$$

enquanto os primeiros símbolos do itinerário para o futuro são

$$\underline{\varepsilon}^s = \dots + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \dots.$$

Deste modo, conseguimos obter aproximações para os declives de ambas as variedades estável e instável, assim como para os coeficientes  $p$  e  $q$ . A partir de um cálculo bastante simples, obtemos a expressão

$$y = -0.357237 + 4.15615x,$$

para a recta estável e

$$y = 0.347649 - 0.685205x,$$

para a recta instável, pelo que podemos traçar os seus gráficos e encontrar, no ponto de intersecção destas variedades, o ponto do atractor cujo itinerário, tanto para o passado como para o futuro, tem como primeiros símbolos os acima apresentados.

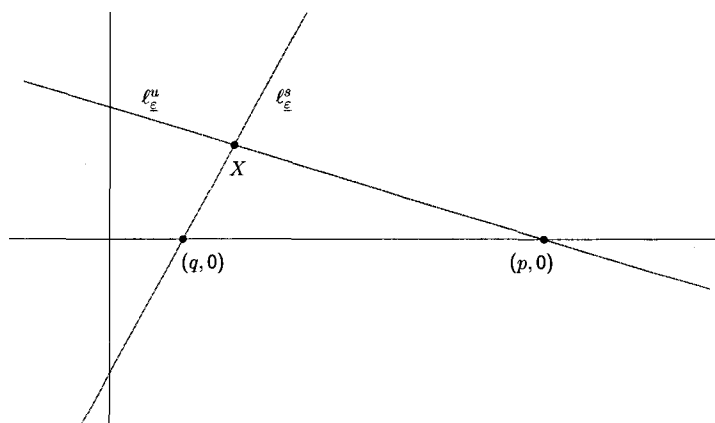


Figura 3.16: A recta estável  $l_{\epsilon}^s$  e a recta instável  $l_{\epsilon}^u$ .

Em [Ish97], Ishii mostrou que (3.8) e (3.10) são séries convergentes e que as sequências simbólicas  $s_n, r_n, p$  e  $q$  são funções holomorfas para  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Deste modo, ficou estabelecido o seguinte resultado.

**Proposição 3.19.** *Consideremos o conjunto das sequências simbólicas com um passado,  $\underline{\epsilon}^u$ , fixo. Então as imagens por  $\underline{x}_{0,-1}$  de todas essas sequências simbólicas estão contidas numa recta cujo declive e intersecção com o eixo dos  $xx$  são dados por expansão em fracção contínua usando apenas os valores dos parâmetros  $a, b$  e o itinerário para o passado  $\underline{\epsilon}^u$ . De forma análoga, se considerarmos o conjunto das sequências simbólicas com um determinado futuro,  $\underline{\epsilon}^s$ , então, as imagens por  $\underline{x}_{0,-1}$  de todas essas sequências simbólicas estão contidas numa*



recta cujo declive e intersecção com o eixo dos  $xx$  são dados por expansão em fracção contínua usando apenas os valores dos parâmetros  $a, b$  e o itinerário para o futuro  $\underline{\varepsilon}^s$ .

Para uma determinada aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  e fixados itinerários para o passado,  $\underline{\varepsilon}^u$ , e para o futuro,  $\underline{\varepsilon}^s$ , a proposição anterior permite-nos concluir que o ponto de intersecção das respectivas rectas  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$  e  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  corresponde ao ponto do atractor cujo itinerário  $\underline{\varepsilon}$  é exactamente igual a  $\underline{\varepsilon}^u \cdot \underline{\varepsilon}^s$ . Dessa forma, é natural que a caracterização dos pontos do atractor, ou do conjunto dos itinerários possíveis para  $\mathcal{L}$ , se faça através de características destas rectas. Preparando o resultado fundamental, que se apresenta posteriormente, Ishii mostrou, [Ish97], o seguinte lema.

**Lema 3.20.** *A diferença  $(p - q)$  é uma função contínua dos parâmetros  $a, b$  e das sequências simbólicas  $\underline{\varepsilon}$ .*

Vai ser com base nesta diferença,  $p - q$ , que vamos introduzir os conceitos seguintes, cuja justificação e importância ficará patente no resultado que se seguirá.

**Definição 3.21.** *Dada uma qualquer aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$ , ao conjunto*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} \equiv \left\{ \underline{\varepsilon}^u \cdot \underline{\varepsilon}^s \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} : p(\underline{\varepsilon}^u) - q(\underline{\varepsilon}^s) = 0 \right\}$$

*chamamos a frente de poda de  $\mathcal{L}$  e ao conjunto*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} \equiv \left\{ \underline{\varepsilon}^u \cdot \underline{\varepsilon}^s \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} : p(\underline{\varepsilon}^u) - q(\underline{\varepsilon}^s) < 0 \right\}$$

*a sua região preliminar de poda. Por fim, o par  $(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}, \mathcal{D}_{\mathcal{L}})$  é chamado por par de poda da aplicação  $\mathcal{L}$ .*

Atentando nas expressões (3.7) e (3.9), não é difícil concluir que o declive de  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$  é positivo sempre que  $\varepsilon_{-1} = -1$ , e negativo, caso contrário. Mais ainda, podemos mesmo dizer que, em valor absoluto, o declive de  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  é sempre superior que o declive de  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^u$ , qualquer que seja o itinerário  $\underline{\varepsilon}^u \cdot \underline{\varepsilon}^s$ . Assim sendo, temos que, se  $\varepsilon_{-1} = +1$ , então,

$$\underline{x}(\underline{\varepsilon})_{-1} > 0 \iff p - q > 0,$$

enquanto, se  $\varepsilon_{-1} = -1$ ,

$$\underline{x}(\underline{\varepsilon})_{-1} < 0 \iff p - q > 0.$$

Estas duas equivalências permitem uma outra caracterização da frente de poda,  $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ , e da região preliminar de poda,  $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ , de uma qualquer aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} : \varepsilon_{-1} \underline{x}_{-1}(\underline{\varepsilon}) = 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \left\{ \underline{\varepsilon} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}} : \varepsilon_{-1} \underline{x}_{-1}(\underline{\varepsilon}) < 0 \right\}.$$

O resultado que justifica a dinâmica simbólica para as aplicações de Lozi, tal como foi introduzida, cuja prova pode ser encontrada em [Ish97], tem a seguinte formulação.

**Teorema 3.22.** *Seja  $\mathcal{L}$  uma aplicação de Lozi satisfazendo a condição  $a > |b| + 1$  e seja  $\underline{\varepsilon}$  uma qualquer sequência simbólica de  $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}}$ . Então,*

$$\exists X \in \tilde{\mathcal{F}} : \underline{\varepsilon} \in \pi(X) \iff \forall n \in \mathbb{Z}, \sigma^n(\underline{\varepsilon}) \notin \mathcal{D}_{\mathcal{L}}.$$

### 3.3.2 O problema da primeira tangência

O problema da primeira tangência para a família de aplicações de Lozi teve uma proposta de resolução por parte de Ishii, em [Ish97]. No seu trabalho, Ishii mostrou que sob certas condições nos parâmetros, as tangências da aplicação de Lozi  $\mathcal{L}_{ab}$  eram dadas através de um certo ponto  $T$ , situado na parte positiva do eixo dos  $xx$ , e pelas suas pré-imagens. Mas começemos por definir o conjunto  $\mathcal{H}$  no espaço dos parâmetros:

$$\mathcal{H} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{L} \text{ em } \tilde{\mathcal{F}} \text{ é equivalente ao deslocamento completo e } a > 1 + |b| \right\}.$$

O problema da existência das tangências ficou resolvido através do teorema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ish97].

**Teorema 3.23.** *Toda a aplicação de Lozi  $\mathcal{L}_{ab}$  tal que  $(a, b)$  pertence à fronteira,  $\partial\mathcal{H}$ , de  $\mathcal{H}$ , tem uma tangência heteroclínica, quando  $b > 0$ , e uma tangência homoclínica, quando  $b < 0$ .*

Segundo Ishii, as tangências são precisamente as pré-imagens de

$$\underline{x}(\cdots + 1 + 1 + 1 - 1 \pm 1 \cdot + 1 - 1 - 1 - 1 \cdots)_{0, -1}$$

quando  $b > 0$ , e

$$\underline{x}(\cdots - 1 - 1 - 1 + 1 \pm 1 \cdot + 1 - 1 - 1 - 1 \cdots)_{0, -1}$$

quando  $b < 0$ . Denotando por  $T$  este ponto, pertencente ao eixo dos  $xx$ , e uma vez que  $a > |b| + 1$ , podemos assegurar que é satisfeita a dupla desigualdade entre as componentes segundo o eixo dos  $xx$  dos pontos  $I$  e  $T$

$$1 < I_x \leq T_x.$$

Deste modo, quando  $b > 0$ , temos que

$$\mathcal{L}^{-2}(T)_x = \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}(T)_y = \frac{x-1}{b} > 0,$$

e, de forma análoga, quando  $b < 0$ , também podemos concluir que

$$\mathcal{L}^{-2}(T)_x = \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}(T)_y = \frac{x-1}{b} < 0.$$

Assim sendo, para  $b > 0$ , vemos claramente que o endereço do ponto  $\mathcal{L}^{-2}(T)$  não pode ser  $-1$ , da mesma forma que, quando  $b < 0$ , esse endereço não pode ser  $-1$ . Trata-se efectivamente de uma gralha em ambos os casos. Como consequência desta troca de sinal, a expressão algébrica da curva  $\partial\mathcal{H}$  dada em [Ish97] não está correcta.

Considerando as seqüências simbólicas correctas do ponto  $T$ , temos que este é igual a

$$\underline{x}(\cdots + 1 + 1 + 1 + 1 \pm 1 \cdot + 1 - 1 - 1 - 1 \cdots)_{0,-1},$$

quando  $b > 0$ , e a

$$\underline{x}(\cdots - 1 - 1 - 1 - 1 \pm 1 \cdot + 1 - 1 - 1 - 1 \cdots)_{0,-1},$$

quando  $b < 0$ . Então, recordando que um par de valores  $(a, b)$  pertence à fronteira  $\partial\mathcal{H}$  se e só se  $p(\underline{\varepsilon}^u) - q(\underline{\varepsilon}^s) = 0$ , ou seja, atendendo a (3.8) e (3.10), se e só se é satisfeita a igualdade

$$1 - bs_{-2} + b^2s_{-2}s_{-3} - b^3s_{-2}s_{-3}s_{-4} + \cdots - \frac{r_0}{b} + \frac{r_0r_1}{b^2} - \frac{r_0r_1r_2}{b^3} + \cdots = 0,$$

onde a curva do espaço dos parâmetros correspondente à fronteira  $\partial\mathcal{H}$  é descrita por

$$\frac{1}{1+r_1} - \frac{1}{(a+r_1)(1+b^{-1}r_1)} = 0.$$

Contudo, uma vez que  $r_1$  é a expansão em fracção contínua de um irracional quadrático, solução da equação  $x^2 - ax - b = 0$ , temos que a equação acima pode ser apresentada como

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)} - \frac{1}{\left(a + \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)\left(1 + \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2b}\right)} = 0.$$

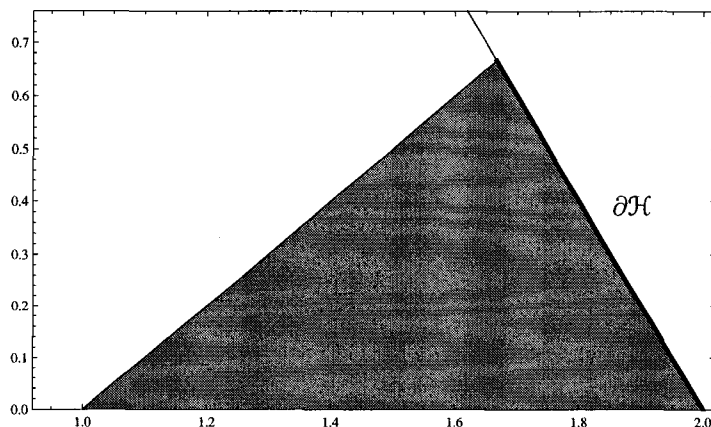


Figura 3.17: O domínio (2.5) e a curva  $\partial\mathcal{H}$  quando  $b > 0$ .

Na figura seguinte podemos ver o gráfico da curva  $\partial\mathcal{H}$  assim como a região para a qual está provada a existência de um atrator estranho para a aplicação  $\mathcal{L}$ .

Quando consideramos as condições (2.5), vemos facilmente que  $\partial\mathcal{H}$  é descrita pela igualdade  $b = 4 - 2a$ , quando  $b > 0$ , e por  $b = -4 + 2a$ , quando  $b < 0$ . É por isso que na Figura 3.17 esta curva surge na fronteira do domínio onde  $\mathcal{L}$  tem um atrator estranho, isto é, na fronteira do domínio da complexidade das aplicações de Lozi.

### 3.4 Expoentes de Lyapunov para a aplicação de Lozi

A detecção do caos num sistema dinâmico é um problema importante que pode ser resolvido pelo cálculo do maior expoente de Lyapunov, em valor absoluto. Para terminar este capítulo, vamos apresentar um novo método de cálculo do maior expoente de Lyapunov para as aplicações de Lozi no conjunto  $\tilde{\mathcal{F}}$ , usando a dinâmica simbólica introduzida anteriormente.

**Definição 3.24.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo numa variedade compacta de dimensão  $m$ . Para cada  $x \in M$  e  $v \in T_x M$ , seja*

$$\lambda(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\|Df_x^k v\|),$$

*sempre que o limite exista.*

Assim, podemos dizer que  $\lambda(x, v)$  traduz a taxa de crescimento exponencial do vector transportado pelas equações linearizadas ao longo de uma órbita da aplicação  $f$ . O resul-

tado seguinte foi apresentado por V.I. Oseledets, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ose68].

**Teorema 3.25** (ergódico multiplicativo de Oseledets). *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $f$  um difeomorfismo de  $M$  com derivadas uniformemente limitadas e seja  $\mu$  uma medida de probabilidade de Borel em  $M$ . Então, para quase todo o ponto  $x$ , o espaço tangente  $T_x M$  pode ser decomposto em subespaços  $W_1(x) \oplus \cdots \oplus W_{r(x)}$  tal que:*

1.  $Df(x)(W_i(x)) = W_i(f(x))$ , para todo  $i$ , as divisões são preservadas pela acção de  $Df$ ;
2. para cada  $x$  e cada  $i$ , existe um número  $\lambda_i(x)$  tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^{\pm n}(x)v\| = \pm \lambda_i(x),$$

para cada  $v \in W_i(x)$ ;

3. se  $\theta(x, i, j)$  representa o ângulo entre  $W_i(x)$  e  $W_j(x)$ , então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\sin \theta(f^{\pm n}(x), i, j)| = 0.$$

Aquilo que o teorema ergódico multiplicativo de Oseledets nos garante é que, para quase todos os pontos  $x$  tais que o limite existe para todos os vectores tangentes  $v \in T_x M$ , existem, no máximo,  $m$  valores distintos de  $\lambda(x, v)$  para cada ponto  $x$ . Assim, seja  $r(x)$  o número dos diferentes valores de  $\lambda(x, v)$  em  $x$  para  $v \in T_x M$ , com vectores tangentes  $v^j \in T_x M$ , para  $1 \leq j \leq r(x)$  a fornecer diferentes valores

$$\lambda_j(x) = \lambda(x, v^j),$$

com

$$\lambda_1(x) < \cdots < \lambda_{r(x)}(x).$$

**Definição 3.26.** *Os valores  $\lambda_j(x)$ , para  $1 \leq j \leq r(x)$ , são chamados expoentes de Lyapunov no ponto  $x$ .*

Vamos considerar  $Df_x^k$  como uma matriz. Então, o quadrado do comprimento da imagem de um vector  $v$  por  $Df_x^k$  pode ser dado por

$$\|Df_x^k v\|^2 = (Df_x^k v)^T (Df_x^k v) = v^T \left[ (Df_x^k)^T Df_x^k \right] v.$$

A matriz  $(Df_x^k)^T Df_x^k$  é simétrica e positiva. Deste modo, podemos calcular as suas raízes, onde  $[(Df_x^k)^T Df_x^k]^{1/2}$  mede a variação do comprimento através de  $Df_x^k$  e  $[(Df_x^k)^T Df_x^k]^{1/2k}$  mede, em média, o quanto os vectores são esticados.

**Definição 3.27.** *Seja  $\Lambda_x$  a matriz definida por*

$$\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} [(Df_x^n)^T Df_x^n]^{1/2n},$$

*sempre que o limite exista. O logaritmo dos valores próprios de  $\Lambda_x$  são os expoentes de Lyapunov.*

Devido ao trabalho efectuado por Misiurewicz [Mis80], é possível, para quase todo o ponto  $x$  pertencente a  $\tilde{\mathcal{F}}$ , criar uma divisão hiperbólica do espaço tangente em dois subespaços. Mais ainda, através do trabalho de Collet-Levy e Young, existe uma medida Sinai-Ruelle-Bowen  $\mu$  para a aplicação de Lozi. Estamos assim nas condições de utilizar a construção dos expoentes de Lyapunov através da Definição 3.27.

Consideremos a matriz jacobiana da aplicação de Lozi ao longo de uma órbita que não intersecta o eixo dos  $xx$ ,

$$D\mathcal{L}^i = \begin{bmatrix} -a\varepsilon_i & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora a expansão em fracção contínua

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}$$

e os respectivos convergentes, dados por

$$A_0 = b_0$$

$$B_0 = 1$$

$$A_1 = b_1 b_0 + a_1$$

$$B_1 = b_1$$

$$A_{n+1} = b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1} \quad B_{n+1} = b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}.$$

Quando consideramos o produto das matrizes  $D\mathcal{L}^i$ , esse produto é dado através dos convergentes da fracção contínua

$$0 + \frac{b}{-a\varepsilon_1 + \frac{b}{-a\varepsilon_2 + \frac{b}{-a\varepsilon_3 + \dots}}}$$

da seguinte forma,

$$\prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i = \begin{bmatrix} B_{k+1} & B_k \\ A_{k+1} & A_k \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 0; & B_0 &= 1; \\ A_1 &= b; & B_1 &= \varepsilon_0 a; \\ A_{k+1} &= (-\varepsilon_k a)A_k + bA_{k-1} & B_{k+1} &= (-\varepsilon_k a)B_k + bB_{k-1}. \end{aligned}$$

Antes de continuarmos, gostaríamos de recordar que, para qualquer matriz real de ordem 2,

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

o traço da matriz  $P = M^T M$  é dado por

$$\text{tr}(P) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Deste modo, temos que os valores próprios da matriz  $(\prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i)^T \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i$  satisfazem a igualdade

$$\lambda^2 - \lambda \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right)^T \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right) + \det \left( \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right)^T \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right) \right) = 0.$$

Ora, quando fazemos  $k$  tender para infinito, uma vez que  $|b| < 1$ , vamos ter que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det \left( \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right)^T \left( \prod_{i=1}^k D\mathcal{L}^i \right) \right) = 0,$$

donde se retira que o expoente de Lyapunov máximo é dado por

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \log((A_k)^2 + (A_{k+1})^2 + (B_k)^2 + (B_{k+1})^2).$$

Deste modo, provámos o seguinte resultado.

**Teorema 3.28.** *Sejam  $(a, b)$  tais que os valores próprios da matriz  $D\mathcal{L}^i$  são reais. Então, o expoente de Lyapunov máximo da aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  é dado por*

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k} \log((A_k)^2 + (A_{k+1})^2 + (B_k)^2 + (B_{k+1})^2),$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= 0; & B_0 &= 1; \\ A_1 &= b; & B_1 &= \varepsilon_0 a; \\ A_{k+1} &= (-\varepsilon_k a)A_k + b A_{k-1}; & B_{k+1} &= (-\varepsilon_k a)B_k + b B_{k-1}. \end{aligned}$$

Para terminar, vamos comparar os resultados obtidos segundo o método anteriormente descrito, ou seja, usando os convergentes das fracções contínuas, com os valores que se obtêm pela Definição 3.27, que passaremos a designar por método da transposta, e pelo método numérico mais usual, que passaremos a descrever sucintamente.

1. Considerar uma condição inicial  $(\bar{x}, \bar{y})$  que esteja na bacia de atracção;
2. iterar vezes suficientes até que a órbita esteja no atractor; seja  $(x_0, y_0)$  esse ponto;
3. seleccionar um ponto que esteja a uma distância suficientemente pequena  $d_0$  desse ponto; por exemplo, podemos considerar  $d_0 = 10^{-12}$ ; seja  $(x'_0, y'_0)$  esse ponto;
4. fazer avançar uma iterada em ambos os pontos e calcular a sua distância

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2};$$

5. calcular  $\log(d_1/d_0)$ ;
6. Reajustar uma das órbitas de modo que a separação seja  $d_0$  na direcção de  $(x'_1, y'_1) - (x_1, y_1)$ ; deste modo vamos supor que ajustamos a órbita  $b$ , tal que  $(x_{b1}, y_{b2})$  é o seu ponto fazendo uma iteração; deste modo, esse ponto será reinicializado para

$$x_{b0} = x_{a1} + \frac{d_0}{d_1}(x_{b1} - x_{a1});$$

$$y_{b0} = y_{a1} + \frac{d_0}{d_1}(y_{b1} - y_{a1});$$

7. Repetir os passos 4 a 6 tantas vezes quantas as desejadas e calcular a média dos valores obtidos no passo 5.

Na tabela seguinte apresentamos as aproximações obtidas para valores dos parâmetros  $a = 1.7$  e  $b = 0.5$  usando todos os três métodos mencionados anteriormente. Neste caso foram efectuadas 1 000 000 iterações do ponto inicial  $(\bar{x}, \bar{y})$ , pertencente ao atractor de Lozi.



Método numérico	Método da transposta	Método das fracções contínuas
0.4703663381	0.4703675499	0.4703679607

Analisando os valores obtidos, podemos constatar que os métodos têm uma aproximação de aproximadamente  $1.6 \times 10^{-6}$ . Como seria de esperar, a aproximação entre o método da transposta com o método das fracções contínuas, é relativamente melhor, obtendo um valor de  $4.1 \times 10^{-7}$ . Assim, conhecendo apenas a dinâmica simbólica, em particular uma sequência simbólica, podemos calcular o expoente de Lyapunov máximo para aplicação de Lozi usando o método das fracções contínuas.

Na tabela seguinte apresentamos os resultados obtidos ao longo da curva  $2a + b = 4$  no espaço dos parâmetros. Recordamos apenas que esta curva dá-nos a frente de poda para a família das aplicações de Lozi.

$(a, b)$	Método numérico	Método da transposta	Método das fracções contínuas
(1.715, 0.57)	0.4685667	0.4685697	0.4685694
(1.730, 0.54)	0.4850813	0.4850819	0.4850824
(1.745, 0.51)	0.5069156	0.5069174	0.5069171
(1.760, 0.48)	0.5264909	0.5264941	0.5264938
(1.775, 0.45)	0.5390484	0.5390440	0.5390444
(1.790, 0.42)	0.5537612	0.5537585	0.5537587
(1.805, 0.39)	0.5658964	0.5658975	0.5658978
(1.820, 0.36)	0.5758556	0.5758558	0.5758555
(1.835, 0.33)	0.5875776	0.5875762	0.5875764
(1.850, 0.30)	0.6000046	0.6000099	0.6000101
(1.865, 0.27)	0.6112732	0.6112758	0.6112760
(1.880, 0.24)	0.6218687	0.6218701	0.6218702
(1.895, 0.21)	0.6309968	0.6309907	0.6309908
(1.910, 0.18)	0.6405120	0.6405413	0.6405413
(1.925, 0.15)	0.6507000	0.6506941	0.6506941
(1.940, 0.12)	0.6597741	0.6597726	0.6597726
(1.955, 0.09)	0.6684406	0.6684538	0.6684538
(1.970, 0.06)	0.6771359	0.6771374	0.6771374
(1.985, 0.03)	0.6853319	0.6853455	0.6853455

Analisando a tabela anterior, e comparando os valores do método da transposta com o método das fracções contínuas, verificamos que para valores de  $b$  relativamente pequenos, a aproximação dos dois métodos é aproximadamente igual a  $1 \times 10^{-7}$ .

Na figura seguinte podemos ver o expoente de Lyapunov máximo calculado através do método das fracções contínuas, mas agora fixando um dado valor de  $b$  e fazendo variar o parâmetro  $a$ .

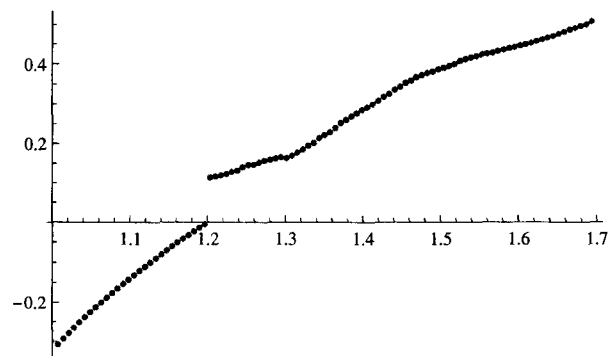


Figura 3.18: Expoente de Lyapunov máximo para  $b = 0.2$  e  $1 < a < 1.7$ .



## Capítulo 4

# Partições de Markov para aplicações de Lozi

A teoria do amassamento, seja na sua versão original para aplicações modais no intervalo, ou na sua generalização para as aplicações de Lozi, introduzida por Yutaka Ishii, e por nós apresentada no capítulo precedente, passa essencialmente por uma escolha de carácter topológico, isto é, por uma identificação de partes do espaço de fases da dinâmica que se mostram, muitas vezes *a posteriori*, relevantes para o estudo dessas dinâmicas. Basta recordar que essa escolha é sempre a mesma para toda uma família de dinâmicas com características dinâmicas completamente diferentes. É esse aspecto que torna o estudo em causa, porque inesperado, absolutamente extraordinário. Contudo, aquilo que vamos apresentar agora é uma outra abordagem do estudo de uma dinâmica, aquela que tem por ponto fundamental a construção de regiões do espaço de fases com certas características dinâmicas. No entanto, seguindo de perto o trabalho realizado por Sousa Ramos para diferentes famílias de aplicações no intervalo, vamos proceder a essa construção utilizando o formalismo da teoria do amassamento.

### 4.1 Partições de Markov

A identificação de uma partição de Markov do espaço de fases de uma dinâmica significa essencialmente uma muito grande simplificação do estudo dessa dinâmica, sobretudo pela sua representação por um formalismo matricial e consequente utilização de todo um conjunto de métodos algébricos para caracterizar a dinâmica em causa. São essas as razões que levam a que, dada uma certa dinâmica, a identificação de uma partição de Markov seja um problema muito importante. Contudo, trata-se de algo que foi resolvido apenas para certas famílias de

dinâmicas, sobretudo no intervalo. Quando passamos para aplicações em dimensão superior as dificuldades aumentam enormemente e são conhecidos apenas alguns casos de sucesso, como, por exemplo, os automorfismos lineares do toro, que apresentaremos adiante.

Existe um grande número de variantes da definição de partição de Markov, algumas envolvendo a geometria que está subjacente às aplicações. Aquela que vamos de seguida definir é, de alguma forma, aquela que de uma maneira clara e simples vai ao encontro dos nossos objectivos. Mas comecemos pelo conceito mais simples de partição topológica de um qualquer espaço métrico.

**Definição 4.1.** *Uma partição topológica de um espaço métrico  $M$  é uma colecção finita de conjuntos abertos disjuntos, que passaremos a designar, sugestivamente, por rectângulos,*

$$\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\},$$

tal que a união dos fechos  $\overline{R}_j$  vai cobrir todo o espaço  $M$ , isto é,

$$M = \overline{R}_1 \cup \overline{R}_2 \cup \dots \cup \overline{R}_k.$$

O conceito de partição topológica assume um especial interesse quando  $(M, f)$  é um sistema dinâmico, uma vez que então se prova, ver [Adl98], o seguinte resultado.

**Proposição 4.2.** *Seja  $(M, f)$  um sistema dinâmico invertível e seja  $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  uma partição topológica do espaço  $M$ . Então, para todo o ponto  $x \in M$ , existe uma sequência  $(R_{\omega_j})_{j \in \mathbb{Z}}$  de rectângulos tal que*

$$x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{j=-n}^n f^{-j}(R_{\omega_j})}.$$

Este resultado diz-nos que, dada uma partição topológica  $\mathcal{P}$  de um sistema dinâmico  $(M, f)$ , podemos associar um código dinamicamente significativo a todo o ponto de  $M$ , neste caso a sequência  $\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$ . A questão que se pode então colocar é até que ponto essa representação simbólica dos pontos nos pode ajudar no estudo da dinâmica.

Naturalmente, nem todas as sequências possíveis vão ser realizadas pela dinâmica  $f$ . Denotemos por  $\Sigma = \Sigma((M, f), \mathcal{P}) \subset \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$  o conjunto das sequências simbólicas  $\dots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$  para as quais existe um ponto  $x$  de  $M$  tal que  $f^n(x) \in R_{\omega_n}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Como se verifica facilmente, a acção da aplicação  $f$  em pontos de  $M$  vai ser representada pela acção da chamada aplicação deslocamento (para a esquerda)  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  nas

correspondentes sequências simbólicas, aplicação essa descrita por  $(\sigma(\omega))_n = \omega_{n+1}$ . Neste sentido podemos olhar um qualquer elemento de  $\Sigma$  como uma representação da órbita de um ponto de  $M$  por  $f$  e, nesse sentido, esperar que o estudo da dinâmica de  $(M, f)$  signifique estudar o conjunto simbólico  $\Sigma$ .

Muitos autores destacam o facto do sistema dinâmico simbólico  $(\Sigma((M, f), \mathcal{P}), \sigma)$ , resultante da escolha de uma partição topológica para  $M$ , ser uma simplificação do sistema dinâmico original  $(M, f)$ , mas aqui simplificação deve ser entendida de duas formas distintas: uma simplificação que todos gostaríamos de conseguir de modo a facilitar o estudo da dinâmica  $(M, f)$  e uma simplificação que devemos sobretudo evitar, uma vez que apenas certos sistemas dinâmicos e certas, muito bem escolhidas, partições topológicas nos conduzem a sistemas simbólicos que retêm grande parte da informação dinâmica de  $(M, f)$ . Veja-se, por exemplo, que a escolha trivial de uma partição constituída por um único rectângulo, o próprio espaço  $M$ , nos leva a um espaço simbólico com uma única sequência, arrasando assim por completo toda a possível riqueza da dinâmica original.

A avaliação da qualidade da representação simbólica  $(\Sigma, \sigma)$  de um sistema dinâmico  $(M, f)$  pode ser feita do seguinte modo: dado um qualquer elemento  $\omega = \cdots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \cdots$  de  $\Sigma$ , consideremos o conjunto aberto

$$D_n(\omega) = \bigcap_{j=-n}^n f^{-j}(R_{\omega_j}) \subset M.$$

Como se constata facilmente, pertencem a  $D_n(\omega)$  todos os pontos de  $M$  cujos códigos partilhem a mesma palavra  $\omega_{-n} \cdots \omega_n$ . Por outro lado, também não é difícil perceber que os fechos destes conjuntos são compactos, decrescentes com  $n$ , ou seja, que satisfazem a seguinte cadeia de inclusões

$$\overline{D}_0(\omega) \supseteq \overline{D}_1(\omega) \supseteq \cdots \supseteq \overline{D}_n(\omega) \supseteq \cdots,$$

resultando então que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{D}_n(\omega) \neq \emptyset.$$

Sendo garantidamente diferente do conjunto vazio, o problema que se coloca é de saber quantos pontos efectivamente pertencem a este conjunto. Por outras palavras, fixada uma sequência simbólica  $\omega \in \Sigma$ , quantos vão ser os pontos que partilham o código  $\omega$ . Voltando ao exemplo extremo da escolha de uma partição com um único rectângulo, o próprio espaço  $M$ , temos que todos os conjuntos  $D_n(\omega)$  são iguais, qualquer que seja a escolha para  $n$ , e iguais a  $M$ , pelo

que a intersecção anterior é ainda o espaço  $M$ , ou seja, todos os pontos do sistema partilhariam a mesma, e única, sequência simbólica. No extremo oposto vai estar, como é óbvio, a melhor das representações possíveis, ou seja, aquela escolha da partição topológica  $\mathcal{P}$  para a qual as intersecções acima referidas consistem em exactamente um único ponto, significando isso que teremos um código para cada ponto do sistema.

**Definição 4.3.** *Seja  $(M, f)$  um sistema dinâmico e  $\mathcal{P}$  uma partição topológica de  $M$ . Chamamos a  $\mathcal{P}$  uma partição de Markov de  $(M, f)$  se a representação simbólica  $(\Sigma((M, f), \mathcal{P}), \sigma)$  de  $(M, f)$  é tal que, para cada  $\omega \in \Sigma((M, f), \mathcal{P})$ , a intersecção*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{D}_n(\omega)$$

*consiste exactamente num único ponto.*

Identificado o tipo de partição topológica que proporciona a melhor representação de um sistema dinâmico, importa agora conseguir encontrar condições mais razoáveis que essa partição deve necessariamente satisfazer para que seja uma partição de Markov. Como o contexto deste trabalho são as aplicações hiperbólicas, vamos apresentar as condições que caracterizam uma partição de Markov referentes a esse tipo de sistemas dinâmicos.

Seja  $(M, f)$  um sistema dinâmico e denotemos por  $\Lambda$  o seu conjunto invariante, que supomos ser hiperbólico, indecomponível e maximal. A partição que vamos construir refere-se ao sistema  $(\Lambda, f)$ , pelo que os rectângulos vão agora, muito provavelmente, ser conjuntos desconexos obtidos pela intersecção de rectângulos, no sentido literal do termo, de  $M$  com  $\Lambda$ . Mas comecemos pela identificação dos rectângulos que são, neste contexto, dinamicamente interessantes.

**Definição 4.4.** *Um rectângulo  $R$  para  $\Lambda$  é um subconjunto fechado de  $\Lambda$  tal que, escolhidos quaisquer dois pontos  $x, y \in R$ , o conjunto  $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$  seja constituído por exactamente um ponto.*

Neste sentido, é possível mostrar que um rectângulo  $R$  de  $\Lambda$  pode ser sempre identificado com o produto cartesiano dos conjuntos  $W_\epsilon^s(x, R) = W_\epsilon^s(x) \cap R$  e  $W_\epsilon^u(x, R) = W_\epsilon^u(x) \cap R$ , para todo  $x \in \text{int } R$ , onde

$$\text{int } R = \{x \in R : W_\delta^s(x) \cap \Lambda \subset R \text{ e } W_\delta^u(x) \cap \Lambda \subset R, \text{ para algum } \delta > 0\}.$$

Consideremos uma colecção finita  $(R_i)_{i=1}^k$  de rectângulos de  $\Lambda$  satisfazendo as seguintes condições:



1.  $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ ;
2.  $\bigcup_{i=1}^k R_i = \Lambda$ ;
3. para todo  $x \in \text{int } R_i \cap f^{-1}(\text{int } R_j)$ , tem-se

$$\begin{aligned} f(W^u(x, \text{int } R_i)) &\supset W^u(f(x), \text{int } R_j) \\ f(W^s(x, \text{int } R_i)) &\subset W^s(f(x), \text{int } R_j). \end{aligned} \tag{4.1}$$

É então possível mostrar o seguinte resultado, ver [Bow70].

**Teorema 4.5.** *Dada uma colecção finita  $(R_i)_{i=1}^k$  de rectângulos de  $\Lambda$  nas condições anteriores, então  $\mathcal{P} = \{\text{int } R_1, \dots, \text{int } R_k\}$  é uma partição de Markov de  $(\Lambda, f)$ .*

Naturalmente que a caracterização (4.1) de uma partição de Markov para  $\Lambda$  não nos revela se esta é ou não difícil de ser encontrada. A resposta a essa questão foi dada, em 1978, por Rufus Bowen, [Bow78], quando mostrou o seguinte resultado.

**Teorema 4.6.** *Para todo o conjunto invariante hiperbólico, compacto, maximal e indecomponível, é sempre possível encontrar uma partição de Markov.*

Depois de termos introduzido o conceito de partição de Markov de um sistema dinâmico motivados pela qualidade do sistema simbólico que o representa, vamos agora caracterizar os sistemas simbólicos  $(\Sigma, \sigma)$  que resultam da escolha de uma partição de Markov.

Dado um sistema dinâmico  $(M, f)$  e escolhida uma partição de Markov  $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_k\}$  de  $(M, f)$ , mostra-se que o espaço das sequências  $\Sigma$  realizadas por pontos de  $M$  tem uma caracterização algébrica particularmente simples: seja  $A = (a_{ij})$  a matriz de dimensão  $k \times k$  cujos elementos são dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \text{int } R_i \cap f^{-1}(\text{int } R_j) \neq \emptyset; \\ 0 & \text{se } \text{int } R_i \cap f^{-1}(\text{int } R_j) = \emptyset. \end{cases}$$

Então, o conjunto  $\Sigma$  é constituído pelas sequências  $\omega = \dots \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$  tais que  $a_{\omega_i, \omega_{i+1}} = 1$ , isto é, só são permitidas palavras de dois símbolos  $\omega_i \omega_{i+1}$  caso a correspondente transição entre os rectângulos  $R_{\omega_i}$  e  $R_{\omega_{i+1}}$  seja admitida pela matriz  $A$ . Deste modo, o conjunto simbólico fica completamente descrito pela matriz de transição de rectângulos  $A$ ,

sendo por isso muitas vezes utilizada a notação  $\Sigma_A$ . A analogia com as cadeias de Markov probabilísticas, também elas definidas através de uma matriz de transição  $A$ , mas cujos elementos têm um sentido de uma probabilidade de transição, permitem chamar cadeias de Markov topológicas a estes sistemas dinâmicos simbólicos  $(\Sigma_A, \sigma)$ .

Para relacionarmos propriedades dinâmicas de uma cadeia de Markov topológica  $(\Sigma_A, \sigma)$  com propriedades algébricas da matriz  $A$ , vamos agora relembrar alguns conceitos importantes da teoria das matrizes não negativas. Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz quadrada não negativa e denotemos por  $a_{ij}^{(n)}$  o elemento na posição  $(i, j)$  da matriz  $A^n$ .

**Definição 4.7.** *A matriz  $A$  diz-se irredutível se, para cada  $(i, j)$ , existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ .*

**Definição 4.8.** *A matriz  $A$  diz-se aperiódica, ou primitiva, se existe um inteiro positivo  $n$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ , para todo  $(i, j)$ .*

**Definição 4.9.** *A matriz  $A$  diz-se redutível se existe  $(i, j)$  tal que, para todo o inteiro positivo  $n$ , se tem  $a_{ij}^{(n)} = 0$ .*

Dinamicamente, podemos dizer que, se a matriz  $A$  é redutível, então nenhuma sequência de  $\Sigma_A$  terá uma palavra com os símbolos  $i$  e  $j$ , para algum par  $(i, j)$ . Por outro lado, se a matriz  $A$  é irredutível, podemos afirmar que, para todo o par  $(i, j)$ , existe uma sequência de  $\Sigma_A$  com ambos esses símbolos,  $i$  e  $j$ . Por fim, se a matriz  $A$  é aperiódica, ou primitiva, existe a garantia que, no conjunto das palavras com um certo número de símbolos, existe um elemento com os símbolos  $i$  e  $j$ , para todo  $(i, j)$ .

Vejamos então agora, através de alguns dos resultados mais importantes, como a dinâmica de  $(\Sigma_A, \sigma)$  se reflecte na matriz de transição  $A$ , ver, por exemplo, [Wal82].

**Proposição 4.10.** *Seja  $(\Sigma_A, \sigma)$  uma cadeia de Markov topológica. Então,*

1.  $(\Sigma_A, \sigma)$  é topologicamente ergódica, ou transitiva, se, e só se, a matriz  $A$  é irredutível.
2.  $(\Sigma_A, \sigma)$  é topologicamente mixing se, e só se, a matriz  $A$  é aperiódica.

Dois outros importantes resultados relativos a matrizes de transição falam-nos dos seus valores próprios máximos, ver [AY81] e [Wal82].

**Teorema 4.11.** *Seja  $A$  uma matriz de transição irredutível. Então, existe um único valor próprio  $\lambda_{\max}$ , positivo, tal que,*

$$\lambda_{\max} \geq |\lambda_i|, \quad \forall \lambda_i \in \text{espectro}(A).$$

*Se, no espectro de  $A$ , existirem  $r$  valores próprios com módulo igual a  $\lambda_{\max}$ , então, existem  $r$  submatrizes aperiódicas tais que*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{r-1,r} \\ A_{r,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

*O inteiro positivo  $r$  é designado por índice de ciclicidade de  $A$ .*

**Teorema 4.12.** *Seja  $(\Sigma_A, \sigma)$  uma cadeia de Markov topológica. Então, a entropia topológica é dada por:*

$$h_{\text{top}}(\sigma|_{\Sigma_A}) = \log(\lambda_{\max}(A)).$$

Um dos problemas fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos é, como sabemos, a conjugação topológica. Para as cadeias de Markov topológicas esse problema foi resolvido por R.F. Williams, em 1973, com a introdução do conceito de matrizes fortemente equivalentes pelo deslocamento<sup>1</sup>. Nesse mesmo trabalho, Williams apercebeu-se da dificuldade que significava provar que duas matrizes não são fortemente equivalentes pelo deslocamento, pelo que introduziu uma segunda relação de equivalência, mas que se sabe hoje não ser de todo equivalente à equivalência topológica.

**Definição 4.13.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes inteiras, não negativas. Então,  $A$  e  $B$  dizem-se fortemente equivalentes pelo deslocamento se existirem matrizes inteiras, não negativas  $U_1, \dots, U_n$ ,*

<sup>1</sup>Do inglês, *strong shift-equivalent*.

e  $V_1, \dots, V_n$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} A = U_1 V_1, \\ V_1 U_1 = U_2 V_2, \\ \vdots \\ V_{n-1} U_{n-1} = U_n V_n, \\ V_n U_n = B. \end{array} \right.$$

A partir deste conceito de equivalência entre matrizes inteiras, não negativas, não necessariamente da mesma dimensão, Williams, em [Wil73], provou o seguinte resultado.

**Teorema 4.14.** *Sejam  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  e  $(\Sigma_B, \sigma_B)$  duas cadeias de Markov topológicas. Então,  $(\Sigma_A, \sigma_A)$  é topologicamente equivalente a  $(\Sigma_B, \sigma_B)$  se, e só se,  $A$  e  $B$  são matrizes fortemente equivalentes pelo deslocamento.*

## 4.2 Partições de Markov dos automorfismos lineares do toro

A aplicação ferradura, introduzida por Steve Smale, é um exemplo de uma dinâmica no plano com um número infinito de pontos periódicos. Quase em simultâneo, René Thom terá sugerido a Steve Smale, segundo [Rob99], uma família de dinâmicas em dimensão dois possuidora também dessa característica, ou seja, todas elas admitindo um número infinito de pontos periódicos. Essas aplicações tinham a particularidade de serem muito simples, de serem lineares, mas cujo espaço de fases era agora o toro bidimensional. É exactamente essa simplicidade que torna estas dinâmicas extremamente populares, na medida em que muitos dos conceitos mais difíceis têm aí uma possibilidade de serem explorados e entendidos. De certa forma é o que vamos fazer com a construção da partição de Markov de uma dinâmica em dimensão dois, preparando o caminho para o resultado mais importante deste capítulo, a construção da partição de Markov para uma aplicação de Lozi.

Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz inteira, de dimensão  $2 \times 2$ , com determinante  $\det(A) = \pm 1$  e tal que nenhum dos seus valores próprios tem módulo igual a 1. Denotemos por  $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação linear induzida por  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ . Uma vez que todos os elementos da matriz  $A$  são números inteiros, temos que  $L_A$  é uma aplicação do reticulado  $\mathbb{Z}^2$  nele próprio. Por outro lado, sabendo que  $\det(A) = \pm 1$ , temos a garantia que a matriz inversa  $A^{-1}$  é ainda uma matriz inteira e assim, que  $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$  é também uma aplicação no reticulado  $\mathbb{Z}^2$ . Deste modo, podemos concluir que  $L_A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ .

Consideremos agora a aplicação projecção  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  que leva um qualquer ponto  $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  no ponto  $\pi(\bar{x}) = (x_1 \bmod 1, x_2 \bmod 1)$  do toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$ . Ora, uma vez que  $L_A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ , temos que a aplicação  $L_A$  induz uma aplicação  $f_A$  no toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$ , aquela aplicação relativamente à qual é satisfeita a igualdade

$$f_A \circ \pi = \pi \circ L_A.$$

Pela mesma razão acima referida, temos que  $(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$ . As principais características destas aplicações no toro bidimensional são descritas no seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em certos textos elementares sobre dinâmica em dimensão 2, por exemplo, [Rob99].

**Teorema 4.15.** *Seja  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  a aplicação do toro bidimensional acima descrita. Então, temos que:*

1.  $f_A$  é um difeomorfismo;
2. os pontos periódicos de  $f_A$  são densos em  $\mathbb{T}^2$ ;
3.  $f_A$  tem uma estrutura hiperbólica em  $\mathbb{T}^2$ ;
4. para todo o ponto  $P \in \mathbb{T}^2$ , as variedades  $W^u(P)$  e  $W^s(P)$  são densas em  $\mathbb{T}^2$ , assim como o são as suas intersecções, que são pontos homoclínicos transversais;
5.  $f_A$  é topologicamente transitiva;
6.  $f_A$  tem sensitividade às condições iniciais.

A família das aplicações  $f_A$  são habitualmente chamadas de automorfismos lineares no toro. De seguida, apresentamos a construção da partição de Markov do toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$  associada a cada automorfismo  $f_A$ .

Para facilitar, começamos por considerar a aplicação linear  $L_A$  no plano e perceber como é possível cobrir todo o  $\mathbb{R}^2$  com dois rectângulos construídos a partir da sua dinâmica. Para tal, vamos desenhar a partir da origem do plano, ponto fixo da aplicação, a variedade estável e a variedade instável, isto é, as rectas com vectores directores,  $u_1$  e  $u_2$ , vectores próprios dos valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$ . De seguida, relativamente ao quadrante superior direito, vamos formar dois rectângulos desenhando, a partir dos pontos  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  e  $(1, 1)$ , pontos esses equivalentes ao ponto fixo anterior perante a projecção  $\pi$ , com exactamente as mesmas variedades anteriores.

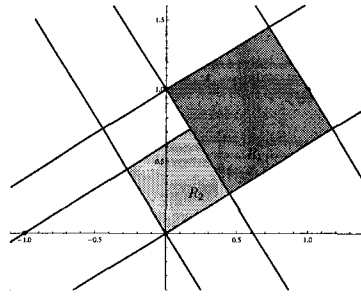


Figura 4.1: Rectângulos  $R_1$  e  $R_2$  construídos pelas variedades estável e instável dos pontos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$ .

A pavimentação do plano com estes dois rectângulos surge assim facilmente, como se ilustra com a figura seguinte.

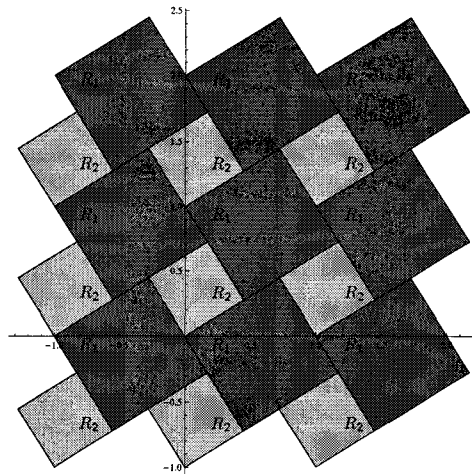


Figura 4.2: Pavimentação do plano através dos rectângulos  $R_1$  e  $R_2$ .

No entanto, estes dois rectângulos não formam uma partição geradora do plano. De facto, como se verifica facilmente, para se obter uma partição geradora temos de considerar as intersecções de cada um dos rectângulos com as suas imagens pela aplicação  $L_A$ . No caso que estamos a acompanhar, verifica-se que a imagem do maior dos rectângulos intersecta ambos os rectângulos, como se ilustra na figura seguinte, enquanto a imagem do mais pequeno dos rectângulos intersecta apenas o maior dos rectângulos, como se pode ver igualmente na figura seguinte.

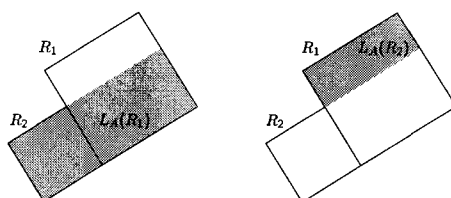


Figura 4.3: Intersecção dos rectângulos  $R_1$  e  $R_2$  com as respectivas imagens.

Deste modo, podemos concluir que a partição de Markov do toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$  associada ao automorfismo  $f_A$  vai ser obtida pela projecção  $\pi$  dos seguintes três rectângulos.

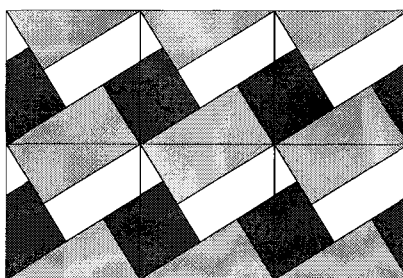


Figura 4.4: Pavimentação do plano através de três rectângulos.

Deste modo, fazendo a habitual representação do toro bidimensional como o quadrado unitário, temos que a partição de Markov de  $\mathbb{T}^2$  associada ao automorfismo  $f_A$  é dada por:

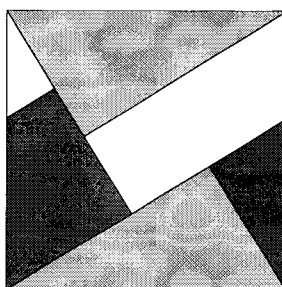


Figura 4.5: Partição geradora do plano.

Como acabámos de ver, existe uma construção canónica da partição de Markov para um qualquer automorfismo  $f_A$  do toro bidimensional, a partir de uma primeira identificação da pavi-

mentação com dois rectângulos,  $R_1, R_2$ , encontrando-se depois a partição pretendida através das componentes conexas  $(C_1, \dots, C_N)$ , das quatro intersecções

$$\begin{aligned} f_A(R_1) \cap R_1 &= C_1 \cup \dots \cup C_{\alpha_1} \\ f_A(R_1) \cap R_2 &= C_{\alpha_1+1} \cup \dots \cup C_{\alpha_1+\alpha_2} \\ f_A(R_2) \cap R_1 &= C_{\alpha_1+\alpha_2+1} \cup \dots \cup C_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\ f_A(R_2) \cap R_2 &= C_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+1} \cup \dots \cup C_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

para alguns inteiros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  e onde  $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ . Assim sendo, é possível associar ao automorfismo  $f_A$  um deslocamento de tipo finito com a matriz de transição  $T_A$ , de dimensão  $N \times N$ , dada por

$$T_A = (t_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(C_i) \cap C_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f(C_i) \cap C_j = \emptyset \end{cases}.$$

Na ilustração da construção da partição de Markov temos sido acompanhados pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de valores próprios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Vemos assim que o deslocamento de tipo finito que lhe está associado é descrito pela matriz de transição de Markov

$$T_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo raio espectral é  $\rho(T_A) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . Vejamos agora um segundo exemplo.

**Exemplo 4.16.** Consideremos o automorfismo  $f_A$  do toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$ , com  $A$  a seguinte matriz inteira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$



Um cálculo muito simples permite-nos concluir que os seus valores próprios são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5});$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

A construção acima descrita (só que desta vez é a variedade estável do ponto  $(1,0)$  que intersecta primeiro a variedade instável relativamente ao ponto  $(0,0)$ , como podemos ver na figura) leva-nos então aos dois rectângulos  $R_1, R_2$ , obtidos a partir das variedades estável e instável do ponto fixo da aplicação linear no plano  $L_A$ ,

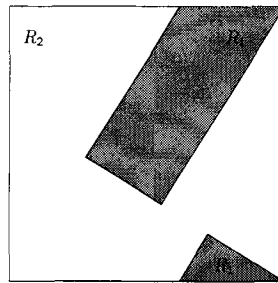


Figura 4.6: Os rectângulos  $R_1$  e  $R_2$  para a aplicação linear no plano  $L_A$ .

vindo assim as componentes conexas  $(C_1, \dots, C_5)$ , obtidas a partir de (4.2), como

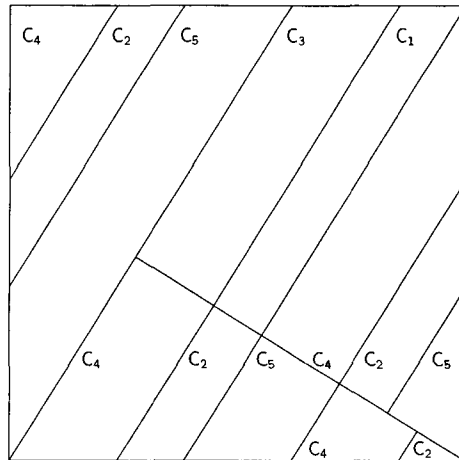


Figura 4.7: Partição geradora para a aplicação linear no plano  $L_A$ .

Deste modo, temos que a matriz de transição de Markov associada à partição  $(C_1, \dots, C_5)$  é dada por

$$T_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo raio espectral é  $\rho(T_A) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ .

Os valores comuns encontrados em ambos os exemplos, isto é, o raio espectral da matriz de transição, ou seja, o número de crescimento do deslocamento de tipo finito a ela associado, e o valor próprio positivo da matriz  $A$  geradora do automorfismo  $f_A$ , não são uma mera coincidência. De facto, existe um resultado que mostra que, caso apenas um dos valores próprios da matriz  $A$  seja, em módulo, superior à unidade, então o número de crescimento de  $f_A$  é exactamente esse valor; para a demonstração ver [Wal82].

**Teorema 4.17.** *O número de crescimento do automorfismo do toro bidimensional  $f_A$  é dado por*

$$s(f_A) = \sum_{|\lambda_i| > 1} |\lambda_i|.$$

com  $\lambda_1, \lambda_2$  os valores próprios da matriz  $A$ .

Esta secção teve o propósito de apresentar um exemplo da construção da partição de Markov do espaço de fases de uma família de dinâmicas em dimensão dois. Sendo conhecida a construção da partição de Markov para aplicações modais no intervalo, devida fundamentalmente a Sousa Ramos, a família dos automorfismos no toro bidimensional pretende ser um passo mais na construção da partição de Markov do plano correspondente a uma aplicação de Lozi, que será proposta numa próxima secção.

### 4.3 Sequências de amassamento de aplicações de Lozi

No capítulo anterior apresentámos uma relação de ordem simbólica entre pontos do atractor de uma aplicação de Lozi, devida a Ishii. Contudo, se recordarmos a Definição 3.11, podemos perceber que essa comparação só é possível para pontos numa mesma variedade estável ou

instável. De seguida vamos introduzir uma relação de ordem para quaisquer pontos do atractor, construída a partir da de Ishii, mas sem qualquer limitação. Antes mesmo de apresentarmos a definição, uma vez que as rectas  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  desempenham aí um papel fundamental, é necessário fazer duas pequenas observações.

Dados dois pontos  $X$  e  $X'$  pertencentes ao atractor  $\tilde{\mathcal{F}}$  de uma aplicação de Lozi, denotemos por  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  e  $\ell_{\underline{\varepsilon}'}$ , respectivamente, as suas rectas estáveis. Pela sua definição, sabemos que estas rectas contêm os conjuntos de pontos do atractor com itinerários para o futuro iguais aos itinerários para o futuro de  $X$  e  $X'$ , respectivamente. Desse modo podemos garantir que não existe qualquer ponto de  $\tilde{\mathcal{F}}$  que pertença simultaneamente a ambas as rectas, isto é, que as rectas  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  e  $\ell_{\underline{\varepsilon}'}$  não se intersectam em  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Por outro lado, é também evidente que, dado qualquer ponto  $X \in \tilde{\mathcal{F}}$ , a sua recta estável, que continuaremos a denotar por  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$ , intersecta o segmento de recta que une os pontos  $I$  e  $\mathcal{L}(I)$ , segmento esse, como sabemos, contido na recta instável do ponto fixo  $A$ . De facto, esta constatação significa apenas que, dado um qualquer ponto do atractor, existe um ponto  $X'$  do atractor com itinerário dado por

$$\pi(X') = (\dots + 1 + 1 \cdot \underline{\varepsilon}^s),$$

onde por  $\underline{\varepsilon}^s$  se denota o itinerário para o futuro do ponto  $X$ . Vejamos então agora como é possível comparar quaisquer pontos pertencentes ao atractor de uma aplicação de Lozi.

**Definição 4.18.** *Sejam  $X$  e  $X'$  dois quaisquer pontos do atractor  $\tilde{\mathcal{F}}$  de uma aplicação de Lozi que não pertençam ao eixo vertical e denotemos por  $\ell_{\underline{\varepsilon}}^s$  e  $\ell_{\underline{\varepsilon}'}$ , as respectivas rectas estáveis. Então, dizemos que*

$$X \prec X' \iff Y <_x Y',$$

com  $Y, Y'$  os únicos pontos pertencentes à recta instável  $\ell^u(A)$  do ponto fixo  $A$  da aplicação de Lozi dados por

$$Y \in \ell_{\underline{\varepsilon}}^s \cap \ell^u(A)$$

$$Y' \in \ell_{\underline{\varepsilon}'}$$

Uma vez que esta relação de ordem generalizada se apoia nas rectas estáveis dos pontos em causa, fomos naturalmente obrigados a colocar a restrição dos pontos não estarem no eixo vertical. Contudo, se definirmos o ponto  $\mathcal{L}^{-1}(I)$  como o representante de todos os pontos do atractor que estejam no eixo vertical, verifica-se facilmente que a definição anterior se estende a todos os pontos do atractor. Como vamos ver de seguida, essa relação de ordem

vai ser essencial para introduzir, no contexto das aplicações de Lozi, conceitos que surgem naturalmente como generalizações de conceitos conhecidos de aplicações no intervalo.

Na quadro da teoria do amassamento das aplicações unimodais no intervalo existe um ponto que assume um papel muito importante, uma vez que o seu itinerário coloca condições muito restritas aos itinerários admissíveis para todos os outros pontos do atractor da aplicação: trata-se do ponto crítico da aplicação. O resultado seguinte evidencia que também para as aplicações de Lozi existe um ponto com um papel semelhante.

**Proposição 4.19.** *O itinerário para o futuro de um qualquer ponto  $X \in \tilde{\mathcal{F}}$  satisfaz a dupla desigualdade*

$$\varepsilon^s(\mathcal{L}(I)) \preceq \sigma^k(\varepsilon^s(X)) \preceq \varepsilon^s(I), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.3)$$

**Dem.** Este resultado é uma consequência directa da caracterização de Misiurewicz do atractor de uma aplicação de Lozi, uma vez que ambos os pontos  $I$  e  $\mathcal{L}(I)$  participam na construção do triângulo  $\Delta_M$ . Deste modo, podemos garantir que todo o ponto do atractor que esteja na recta  $\ell^u(A)$  satisfaz

$$\mathcal{L}(I) \leq_x \mathcal{L}^k(X) \leq_x I, \quad k = 0, 1, \dots$$

Assim sendo, podemos concluir que as desigualdades apresentadas surgem directamente da definição de relação de ordem generalizada.  $\square$

A analogia da desigualdade (4.3) com aquela que é válida para a família das aplicações tenda no intervalo sugere a seguinte definição formal.

**Definição 4.20.** *Dada uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$ , denotemos por  $X_c$  o ponto do atractor tal que  $X_c = \mathcal{L}^{-1}(I)$ . Vamos dizer que  $X_c$  é o ponto crítico de  $\mathcal{L}$ .*

Uma computação bastante simples mostra-nos que o ponto crítico de uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$  é o ponto do eixo vertical dado por

$$X_c = \left( 0, \frac{2b - a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2(1 + a - b)} \right). \quad (4.4)$$

Desta última igualdade resulta que, no limite, quando  $b$  tende para 0, o ponto crítico  $X_c$  percorre o eixo vertical aproximando-se do ponto  $(0, 0)$ , quando, voltamos a lembrar, a família das aplicações tenda no intervalo que surge das aplicações de Lozi quando fazemos  $b = 0$  tem como ponto crítico de todas as suas aplicações  $x_c = 0$ . Vemos assim que a generalização

introduzida resulta perfeitamente na situação limite, quando as aplicações de Lozi se reduzem a aplicações tenda no intervalo.

Segundo a ordem simbólica, o itinerário das duas primeiras iteradas do ponto crítico de uma aplicação tenda sujeita o itinerário de qualquer outro ponto. Este facto tem consequências topológicas muito profundas, como foi revelado pelo trabalho de Milnor e Thurston. No formalismo simbólico desenvolvido na teoria do amassamento, a sequência simbólica da primeira iterada do ponto crítico da aplicação vai assumir o papel de invariante topológico, sendo por isso tratada de uma forma especial, designando-se por sequência de amassamento da aplicação. Uma vez mais por analogia, depois de introduzirmos o conceito de ponto crítico de uma aplicação de Lozi, vamos dizer que o itinerário para o futuro da sua primeira iterada é a sequência de amassamento da aplicação  $\mathcal{L}$ .

**Definição 4.21.** *Seja  $X_c$  o ponto crítico de uma aplicação de Lozi  $\mathcal{L}$ . Vamos designar por sequência de amassamento de  $\mathcal{L}$  a sequência simbólica dada pelo itinerário para o futuro da primeira iterada do ponto crítico, ou seja,*

$$K(\mathcal{L}) = \varepsilon^s(\mathcal{L}(X_c)).$$

Tal como nas sequências de amassamento das aplicações no intervalo, é possível caracterizar combinatorialmente uma sequência de amassamento de uma aplicação de Lozi.

**Teorema 4.22.** *Uma sequência simbólica  $S \in \Sigma^{2b}$  com itinerário para o passado  $\varepsilon^u(S) = (\dots + 1 + 1)$  é uma sequência de amassamento para alguma aplicação  $\mathcal{L}$  se e só se*

$$\sigma(S) \preceq \sigma^k(S) \preceq S, \quad k = 0, 1, \dots.$$

**Dem.** Que uma sequência de amassamento de uma aplicação de Lozi satisfaz a dupla desigualdade apresentada é uma consequência directa de (4.3). Temos então que provar que uma sequência simbólica com o referido itinerário para o passado e satisfazendo a dupla desigualdade anterior é a sequência de amassamento de alguma aplicação de Lozi.

Como facilmente se observa, a sequência simbólica  $S$  é o itinerário de um ponto pertencente ao segmento de recta que une os pontos  $I$  e  $\mathcal{L}(I)$ . Ora, como pelo Teorema 2.11 sabemos que a órbita desse ponto é densa em  $\tilde{\mathcal{F}}$ , podemos concluir desde logo que a única forma de ser satisfeita a dupla desigualdade que admitimos por hipótese, é quando a sequência  $\varepsilon^s(S)$  corresponde ao itinerário para o futuro do ponto  $I$ , por outras palavras, é quando  $S$  é de facto a sequência de amassamento de alguma aplicação de Lozi.  $\square$

Ainda antes de apresentarmos as razões que justificam a introdução do conceito de sequência de amassamento de uma aplicação de Lozi, vamos mostrar que existe uma relação muito estreita entre as sequências de amassamento da família de aplicações tenda no intervalo e estes itinerários para o futuro definidos por uma aplicação de Lozi. Mas, ainda antes, gostaríamos de apresentar a generalização da árvore das sequências de amassamento da família das aplicações tenda no intervalo, construída por Sousa Ramos.

Como é conhecido, a árvore das sequências de amassamento das aplicações unimodais no intervalo, proposta por Sousa Ramos, tem por vértices sequências simbólicas periódicas. Querendo a generalização para a família das aplicações de Lozi desta estrutura em árvore, vemos desde logo que essa ideia terá necessariamente que ser abandonada, uma vez que, com uma única excepção sem qualquer interesse, nenhuma sequência de amassamento de uma aplicação de Lozi poderá ser periódica. A nossa proposta passa então pela seguinte construção:

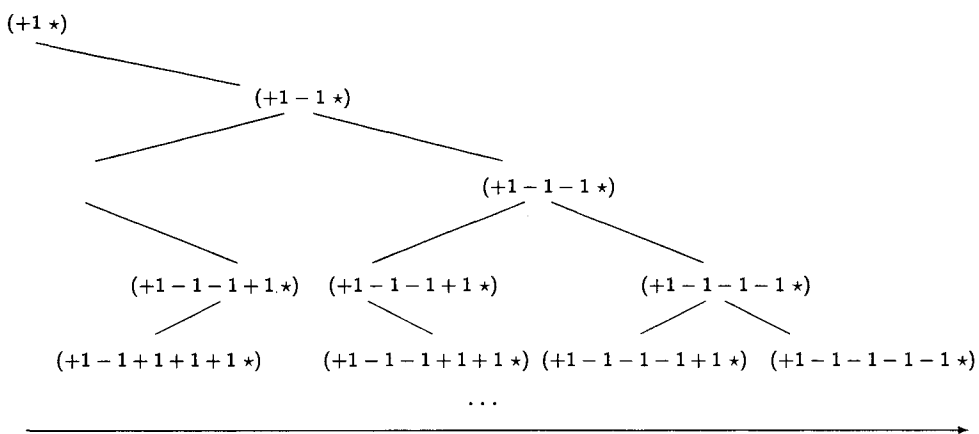


Figura 4.8: Pormenor da árvore das sequências de amassamento das aplicações de Lozi

O eixo ordenado é relativo à relação de ordem simbólica definida anteriormente. Por outro lado, a notação usada para as sequências de amassamento resulta de uma simplificação com o seguinte significado: por exemplo, quando escrevemos  $(+1-1-1-1*)$  devemos ter em mente que estamos a explicitar apenas os primeiros cinco endereços da órbita do ponto  $I$ , não nos interessando quais os símbolos que se seguem a  $*$ . Deste modo, temos que  $(+1-1-1-1*)$  representa não uma sequência de amassamento, mas toda uma colecção de sequências de amassamento, a saber, todas aquelas cujos primeiros cinco endereços coincidem exactamente com os cinco símbolos explicitados. Como se verifica facilmente, basta escrever os primeiros

símbolos do itinerário para o futuro para colocar a sequência de amassamento em causa na sua relação de ordem com todas as outras, excepto, como foi dito atrás, relativamente a todas aquelas com símbolos idênticos até ao primeiro símbolo  $\star$ . O propósito da construção desta estrutura é justificado com o seguinte resultado.

**Proposição 4.23.** *Denotemos por  $\mathcal{T}^*$  a árvore das sequências de amassamento da família das aplicações tenda no intervalo. Então, existe um isomorfismo entre  $\mathcal{T}^*$  e a árvore das sequências de amassamento da família das aplicações de Lozi acima apresentada.*

**Dem.** No contexto deste trabalho, apresentámos os itinerários dos pontos pela aplicação tenda como sequências infinitas dos símbolos  $-1$ ,  $+1$  e  $\star$ , correspondendo este último também a uma dualidade  $\pm 1$ . Contudo, enquanto uma sequência de amassamento  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{n-1} \star)$  das aplicações tenda representa a repetição infinita desta sequência, no caso das aplicações de Lozi esta representação significa apenas a passagem pelo eixo vertical ao fim de  $n$  iteradas do seu ponto crítico. Mas o isomorfismo é evidente, uma vez que estamos perante exactamente o mesmo conjunto de desigualdades que caracterizam as sequências em ambas as situações, ou seja, se uma dada sequência finita existe para a família de aplicações de Lozi, então temos a garantia que existe igualmente para a família de aplicações tenda e *vice versa*.  $\square$

Devido à impossibilidade das órbitas do ponto crítico  $X_c$  de uma aplicação de Lozi serem periódicas, fomos levados a olhar para as sequências de amassamento da família das aplicações de Lozi registando apenas a subsequência do itinerário para o futuro até ao primeiro símbolo  $\star$ . Por isso, temos que cada vértice da árvore descreve um conjunto de sequências de amassamento, correspondentes a aplicações de Lozi com escolhas dos parâmetros numa curva do espaço dos parâmetros.

**Definição 4.24.** *Seja  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{n-1} \star)$  um vértice da árvore das sequências de amassamento da família de aplicações de Lozi. Vamos chamar curva de amassamento  $\Gamma_\xi$  ao conjunto dos pontos do espaço dos parâmetros relativamente aos quais as correspondentes aplicações de Lozi têm sequência de amassamento com  $\xi$  como subsequência inicial, ou seja,*

$$\Gamma_\xi = \{(a, b) \in D_{\mathcal{L}} : K(\mathcal{L}_{ab}) = \xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{n-2} \star \cdots\},$$

onde por  $D_{\mathcal{L}}$  se denota a região do espaço dos parâmetros relativamente à qual as aplicações de Lozi tem um atractor estranho.

Uma vez que estamos a considerar a restrição das curvas à região do espaço dos parâmetros relativamente à qual as aplicações de Lozi apresentam um atractor estranho, não vamos ter a curva de amassamento  $\Gamma_{+1\star}$ , uma vez que, como veremos nas próximas secções, as aplicações com esse início do itinerário para o futuro tem entropia nula, logo sem qualquer atractor estranho.

**Exemplo 4.25.** Como se verifica facilmente com uma computação muito simples, a curva de amassamento correspondente à sequência de amassamento  $\xi = (+1 - 1\star)$  é descrita pela igualdade

$$2 + 4a - a^3 - ab - a^2\sqrt{a^2 + 4b} + b\sqrt{a^2 + 4b} = 0$$

a que corresponde a curva no domínio  $D_{\mathcal{L}}$  do espaço dos parâmetros que se desenha na seguinte figura:

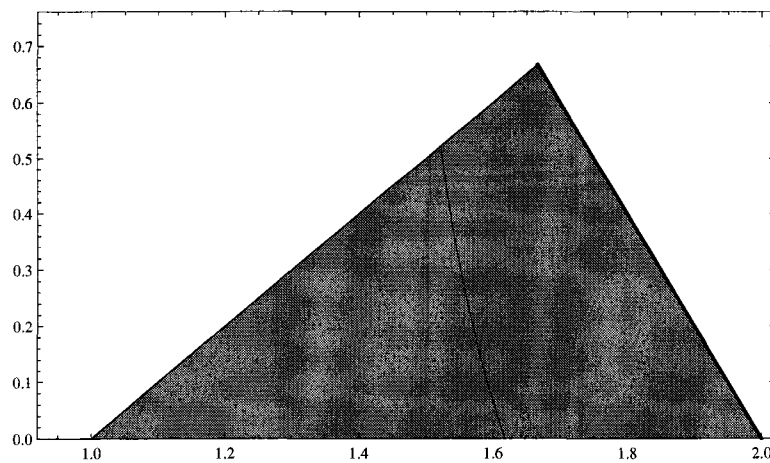


Figura 4.9: Curva de amassamento correspondente à sequência de amassamento  $\xi = (+1 - 1\star)$  no domínio  $D_{\mathcal{L}}$ .

Observando com alguma atenção o gráfico anterior, é possível constatar que a curva de amassamento  $\Gamma_{(+1-1\star)}$  parece tocar o eixo horizontal para valores da abcissa perto do número de ouro, ou seja, exactamente o valor do parâmetro para o qual a correspondente aplicação tenda tem  $RLC = \phi(+1 - 1\star)$  como sequência de amassamento. Não se trata de uma coincidência como vamos poder ver. Interessa saber o que se passa quando fazemos a passagem de  $b = 0$  para  $0 < b < 1$ . O trabalho até então realizado encontra-se descrito na secção 3.1, que



foi apresentado por Ishii em [IS98]. Neste trabalho, Ishii apenas provou que o invariante de amassamento era monotonamente crescente ao depender do parâmetro  $a$ , fixando um valor muito pequeno para o parâmetro  $b$ . No que segue apresentamos o que se passa, não só para valores muito pequenos do parâmetro  $b$ , mas para todos os valores que este parâmetro pode tomar.

Vamos considerar as curvas de amassamento para as aplicações de Lozi  $\Gamma_\xi$  para  $0 < b < 1$ , onde  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \dots \xi_{n-1}^*)$ . Consideramos também  $a_\xi$ , que representa o valor do parâmetro  $a$  para o qual a aplicação tenda tem uma órbita periódica de período  $n$  dada por  $(\xi_0 \xi_1 \dots \xi_{n-1}^*)$ .

**Proposição 4.26.** *A curva de amassamento  $\Gamma_\xi$  é o gráfico de uma função contínua a depender dos parâmetros  $a$  e  $b$ .*

**Dem.** Através da definição de sequência de amassamento, temos que a curva  $\Gamma_\xi$  é formada pelo par de parâmetros  $(a, b)$  definidos na região  $D_{\mathcal{L}}$  para os quais obtemos uma sequência de amassamento. Neste sentido, dizemos que esses pares de parâmetros podem ser dados pela condição  $p(\xi) - q(\xi) = 0$ . Através do trabalho de Ishii, [Ish97], temos que  $p(\xi) - q(\xi)$  define uma função contínua em termos dos parâmetros  $a$  e  $b$ .  $\square$

Seja

$$E(a, b, \xi) = \begin{cases} \Gamma_\xi & \text{se } 0 < b < 1 \\ a_\xi & \text{se } b = 0 \end{cases},$$

a função definida no espaço dos parâmetros, onde  $1 < a < 2$ .

**Lema 4.27.** *A função  $E(a, b, \xi)$  é contínua.*

**Dem.** Para  $b \neq 0$  o resultado já foi provado. Falta verificar a continuidade para  $b = 0$ , ou seja, temos que ter

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} E(a, b, \xi) = a_\xi.$$

Assim,

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} E(a, b, \xi) = \Gamma_\xi|_{b=0}$$

e deste modo temos que  $p(\xi) - q(\xi) = 0$ , quando  $b$  tende para zero, é dado por  $q(\xi) = 1$ , ou seja,  $\xi \in k_a$ .  $\square$

Com a introdução do conceito de sequência de amassamento de uma aplicação de Lozi, estamos em condições para apresentar o resultado fundamental deste capítulo.

#### 4.4 Partição de Markov para uma aplicação de Lozi

O que vai ser proposto nesta secção é um método para a construção de uma partição de Markov do triângulo  $\Delta_M$  que contém o atractor  $\tilde{\mathcal{F}}$ , para aplicações cujas sequências de amassamento passem pelo eixo vertical, ou seja, para os vértices da árvore de sequências apresentada anteriormente.

Seja  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_n \star)$  um vértice da árvore das sequências de amassamento da família de aplicações de Lozi. Vamos lembrar o que foi dito sobre as rectas estáveis e a sua construção sugerida por Ishii: se considerarmos um ponto pertencente a  $\tilde{\mathcal{F}}$  que não esteja no eixo vertical, nem ele, nem qualquer uma das suas iteradas para o futuro, sabemos que a recta estável é dada por

$$y = \frac{1}{r_0}(x - q),$$

onde os dois coeficientes,  $r_0$  e  $q$ , são dados por

$$r_0 = \frac{b}{a\varepsilon_0 + \frac{b}{a\varepsilon_1 + \frac{b}{a\varepsilon_2 + \ddots}}}$$

e

$$q = b^{-1}r_0 - b^{-2}r_0r_1 + b^{-3}r_0r_1r_2 - \cdots.$$

O problema que se coloca neste momento, é como obter uma recta estável ou algo que tenha a mesma função, mas para pontos que pertençam ao eixo vertical, ou cujas iteradas para o futuro pertençam a este eixo, como é o caso das órbitas do ponto crítico que estamos a considerar.

A questão é que considerando uma sequência para o futuro, se essa sequência não intersecta o eixo vertical, então esse ponto e suas iteradas têm a sua recta estável bem definida. O mesmo não acontece com os pontos que estão no eixo vertical nem com os pontos em que alguma iterada também cai nesse mesmo eixo vertical. Deste modo, encontrámos, não uma definição de recta estável, mas uma propriedade que caracteriza os pontos que caem no eixo vertical, ou seja, teremos apenas que considerar a recta definida através do eixo vertical e fazer a sua pré-imagem para obter a recta estável dos pontos que vão cair no eixo vertical.

Como temos uma segunda identificação com o eixo vertical quando a iterada de ordem  $n$  do ponto  $X_c$  está neste eixo, vamos considerar o eixo vertical como recta. Assim, precisamos

de saber quais são os pontos que continuam a pertencer ao atrator  $\tilde{\mathcal{F}}$  e que geram os declives das rectas necessárias para gerar a partição.

Como nas sequências de amassamento para as aplicações de Lozi, só estamos interessados no que acontece nas  $n$  primeiras iteradas, vai existir naturalmente uma limitação na criação destas rectas, pois só estamos interessados no que acontece até aos  $n - 1$  pontos.

**Definição 4.28.** Denotemos por  $S_k$  os segmentos de recta

$$S_k = \mathcal{L}^{-n+k+1}(\uparrow) \cap \Delta_M, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

onde  $\Delta_M$  é o triângulo que contém o atrator  $\tilde{\mathcal{F}}$  e onde, por  $\uparrow$ , se denota o conjunto dos pontos do eixo vertical.

Para facilitar, vamos começar por estabelecer dois resultados relativos a estes segmentos de recta que nos vão ser úteis adiante.

**Lema 4.29.** Os segmentos de recta  $S_k$ , com  $k = 0, \dots, n - 1$ , não se intersectam em  $\Delta_M$ .

**Dem.** Vamos supor que existe um ponto  $X_0 \in \tilde{\mathcal{F}}$  tal que existem dois segmentos de recta que se intersectam nesse ponto, ou seja,

$$X_0 = \mathcal{L}^{-i}(\uparrow) \cap \mathcal{L}^{-j}(\uparrow) \cap \Delta_M, \quad i \neq j.$$

Então, isto significa que existem pontos  $X'_0 \neq X''_0$  tais que

$$\mathcal{L}^i(X'_0) = \mathcal{L}^j(X''_0) = X_0,$$

o que não pode acontecer por causa da injectividade de qualquer aplicação de Lozi. Podemos assim concluir que quaisquer dois segmentos de recta nunca se intersectam.  $\square$

Nos casos particulares dos segmentos  $S_0$  e  $S_1$  é possível mostrar que cada um deles intersecta o triângulo  $\Delta_M$  num ponto apenas.

**Lema 4.30.** Ambos os segmentos de recta  $S_0$  e  $S_1$  intersectam o triângulo  $\Delta_M$  num único ponto, respectivamente, o ponto  $I$  e a sua imagem,  $\mathcal{L}(I)$ .

**Dem.** Pelo resultado anterior e recordando que  $I$  é o ponto mais à direita do atrator, no sentido da relação de ordem generalizada, e que  $\mathcal{L}(I)$  é o ponto mais à esquerda do atrator, a afirmação acima fica provada.  $\square$

São estes segmentos de recta que nos vão definir os *rectângulos*  $R_i$ , aqueles que iremos provar constituir uma partição de Markov do atractor de Lozi. Mas, para formarmos esses *rectângulos*, vamos necessitar de ordenar os diferentes segmentos, isto é, seja  $p$  a permutação de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que

$$\mathcal{L}^{p(0)}(I) \prec \mathcal{L}^{p(1)}(I) \prec \dots \prec \mathcal{L}^{p(n-1)}(I).$$

Contudo, pelo Lema 4.30, sabemos de antemão, e para qualquer aplicação de Lozi, que o primeiro e último destes pontos são, respectivamente,  $\mathcal{L}^1(I)$  e  $\mathcal{L}^0(I)$ , pelo que podemos escrever

$$\mathcal{L}^1(I) \prec \mathcal{L}^{p(1)}(I) \prec \dots \prec \mathcal{L}^{p(n-1)}(I) \prec \mathcal{L}^0(I).$$

Assim sendo, vamos poder definir as seguintes  $n$  regiões no triângulo  $\Delta_M$ , limitadas pelos segmentos de recta  $S_k$ , com  $k = 0, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} \check{F}_1 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}(I) \prec P \prec \mathcal{L}^{p(1)}(I)\}; \\ \check{F}_2 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^{p(1)}(I) \prec P \prec \mathcal{L}^{p(2)}(I)\}; \\ &\vdots \\ \check{F}_k &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^{p(k-1)}(I) \prec P \prec \mathcal{L}^{p(k)}(I)\}; \\ &\vdots \\ \check{F}_{n-1} &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^{p(n-1)}(I) \prec P \prec I\}. \end{aligned}$$

Com a construção acima descrita podemos garantir a validade da seguinte afirmação.

**Proposição 4.31.** *O conjunto formado por  $\mathcal{P} = \{\check{F}_1, \dots, \check{F}_{n-1}\}$  é uma partição topológica do triângulo  $\Delta_M$ .*

Esta é, sem qualquer dúvida, a parte mais fácil da construção: verificar que  $\mathcal{P}$  é uma partição topológica do triângulo  $\Delta_M$  e, conseqüentemente, do atractor de Lozi. Os resultados seguintes vão mostrar que a partição  $\mathcal{P}$  é bastante mais do que isso.

**Proposição 4.32.** *Seja  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \dots \xi_n \star)$  um vértice da árvore das sequências de amassamento da família de aplicações de Lozi e seja  $P$  um ponto de um dos rectângulos  $\check{F}_k$  construídos anteriormente. Então, temos que*

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k-1)}(I)) \prec \mathcal{L}(P) \prec \mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k)}(I))$$

se  $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k-1)}(I)) \prec \mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k)}(I))$ , ou, caso  $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k)}(I)) \prec \mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k-1)}(I))$ ,

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k)}(I)) \prec \mathcal{L}(P) \prec \mathcal{L}(\mathcal{L}^{p(k-1)}(I)).$$

**Dem.** Uma vez que os segmentos de recta não se intersectam em  $\Delta_M$  e que o eixo vertical é um dos segmentos, podemos estudar a veracidade das afirmações propostas através das aplicações lineares  $R$  e  $L$ , consideradas anteriormente e definidas como  $R = \mathcal{L}|_{x \geq 0}$  e  $L = \mathcal{L}|_{x \leq 0}$ . Consideremos um qualquer dos *rectângulos*,  $\check{F}_k$ , que vamos supor totalmente contido no semi-plano  $x < 0$ . Então, verifica-se facilmente que

$$L(\check{F}_k) \subseteq \left\{ P \in \Delta_M : L(\mathcal{L}^{p(k-1)}(I)) \prec L(P) \prec L(\mathcal{L}^{p(k)}(I)) \right\}.$$

Caso o rectângulo esteja totalmente contido no semi-plano  $x > 0$ , então o resultado vem de forma análoga, através da aplicação linear  $R$ .  $\square$

De seguida vamos construir uma matriz de transição entre os *rectângulos*,  $A = (a_{ij})$ , a partir da partição anterior e da aplicação de Lozi, dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathcal{L}(\check{F}_i) \cap \check{F}_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \mathcal{L}(\check{F}_i) \cap \check{F}_j = \emptyset \end{cases}.$$

Com o objectivo de mostrar que a partição topológica formada pelos *rectângulos*  $\check{F}_j$  fornece uma representação simbólica da dinâmica  $(\check{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$ , consideremos os conjuntos

$$\mathcal{C}_j^n = \bigcap_{k=-n}^n \mathcal{L}^k(\check{F}_j), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

e os conjuntos obtidos pelos limites, quando  $n$  cresce para infinito, dos conjuntos anteriores, isto é,

$$\tilde{\mathcal{C}}_j = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^n(\check{F}_j), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Como sabemos, agora é necessário mostrar que cada um dos conjuntos  $\tilde{\mathcal{C}}_j$  consiste exactamente num único ponto.

**Teorema 4.33.** *Para cada  $j = 1, \dots, n-1$ , o conjunto  $\tilde{\mathcal{C}}_j$  é um único ponto.*

**Dem.** Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_j^+ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^n(\check{F}_j) \\ \tilde{\mathcal{C}}_j^- &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-n}(\check{F}_j). \end{aligned}$$

Para começar, provemos que os conjuntos  $\tilde{\mathcal{C}}_j^+$  são, ou um segmento de recta, ou um ponto.

Ora, devido à linearidade da aplicação de Lozi, sabemos que cada um dos conjuntos  $\mathcal{C}_j^n$  é um polígono convexo e, deste modo, podemos afirmar que  $\tilde{\mathcal{C}}_j^+$  vai ser um conjunto convexo. Então, se admitirmos que  $\tilde{\mathcal{C}}_j^+$  contém pelo menos dois pontos e se um terceiro não está no segmento que une os dois primeiros pontos, temos que  $\tilde{\mathcal{C}}_j^+$  contém necessariamente um triângulo, por causa da sua convexidade. Mas isto não pode acontecer, por causa da propriedade de área nula que o atractor de Lozi tem. De modo análogo se prova que  $\tilde{\mathcal{C}}_j^-$  é um segmento de recta ou um ponto. Deste modo, se ambos os conjuntos  $\tilde{\mathcal{C}}_j^+$  e  $\tilde{\mathcal{C}}_j^-$  forem pontos, temos o resultado pretendido, mas se ambos forem segmentos de recta, então a sua intersecção,  $\tilde{\mathcal{C}}_j$ , consistirá também num único ponto.  $\square$

Assim, para aplicações de Lozi cujas sequências de amassamento sejam vértices da árvore apresentada, temos que a partição topológica  $\mathcal{P} = \{\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{n-1}\}$  definida pelos  $n$  segmentos de recta,  $S_k$ , fornece uma representação simbólica da dinâmica  $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{L})$  e assim uma partição de Markov para a aplicação de Lozi no seu atractor.

Para ilustrar a construção descrita, atentemos no seguinte exemplo.

**Exemplo 4.34.** *Vamos considerar uma aplicação de Lozi cuja sequência de amassamento é dada pela sequência simbólica  $\xi = (+1 - 1 + 1 + 1 \star)$ . Uma computação muito simples leva-nos a concluir que a aplicação  $\mathcal{L}_{ab}$  para valores dos parâmetros*

$$(a, b) \approx (1.51800, 0.185728),$$

*tem esse itinerário para o futuro do seu ponto crítico. A figura que se segue mostra, para o par de parâmetros dado, o atractor da aplicação de Lozi e os primeiros cinco pontos da órbita do ponto crítico. De acordo com a definição da relação de ordem no espaço simbólico, temos a seguinte cadeia de desigualdades:*

$$\sigma(\xi) \prec \sigma^4(\xi) \prec \sigma^2(\xi) \prec \sigma^3(\xi) \prec \xi.$$

*De seguida, vamos construir os segmentos de recta  $S_0, \dots, S_4$  e, deste modo, construir a nossa partição de Markov do triângulo  $\Delta_M$ . Assim, vamos ter Pela figura anterior podemos já*

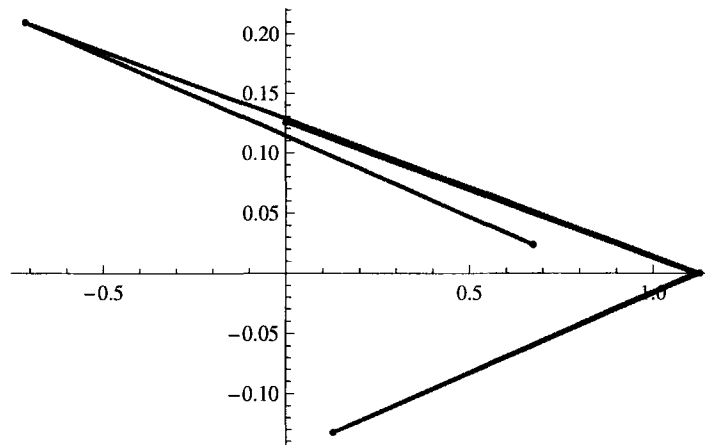


Figura 4.10: Atrator de Lozi e os primeiros cinco pontos da órbita do ponto crítico.

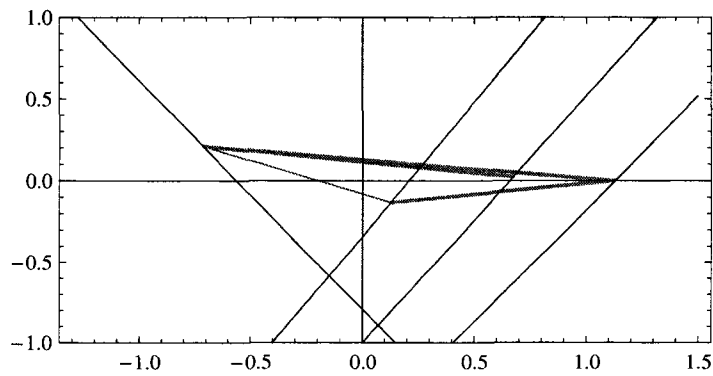


Figura 4.11: Atrator de Lozi e os segmentos de recta  $S_{p(k)}$ .

perceber quais vão ser os quatro rectângulos  $\check{F}_k$  que os segmentos de recta anteriores definem:

$$\begin{aligned}\check{F}_1 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}(I) \prec P \prec \mathcal{L}^4(I)\} \\ \check{F}_2 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^4(I) \prec P \prec \mathcal{L}^2(I)\} \\ \check{F}_3 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^2(I) \prec P \prec \mathcal{L}^3(I)\} \\ \check{F}_4 &= \{P \in \Delta_M : \mathcal{L}^3(I) \prec P \prec I\}.\end{aligned}$$

Da cadeia de desigualdades anterior, podemos também construir a matriz de transição dos

rectângulos da partição, vindo como

$$A_\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como se verifica facilmente, a matriz de transição  $A_\xi$  tem como valor próprio máximo  $\lambda = 1.51288$ . Assim, temos que a aplicação de Lozi correspondente ao par de valores dos parâmetros dado acima tem uma entropia topológica  $h_{top} = \log(1.51288) = 0.41402$ .

## 4.5 Invariantes topológicos para a família de aplicações de Lozi

A partir do teorema anterior, que garante que a partição do espaço de fases associada a uma sequência de amassamento finita de uma aplicação de Lozi é uma partição de Markov, podemos retirar imediatamente o seguinte.

**Teorema 4.35.** *As curvas de amassamento  $\Gamma_\xi$  associadas a cada um dos vértices  $\xi$  da árvore das sequências de amassamento das aplicações de Lozi são isentrópicas.*

Perante a importância que estas curvas do espaço dos parâmetros assumem, na Figura 4.12 apresentamos um gráfico com as curvas de amassamento,  $\Gamma_\xi$ , para todos os vértices  $\xi$  da árvore das sequências de amassamento das aplicações de Lozi de comprimento inferior a 9. Como podemos observar pelo gráfico, as curvas de amassamento apresentam algumas características que importam estudar. De alguma forma podemos mesmo afirmar que o estudo das dinâmicas de Lozi se resume agora ao estudo da estrutura das suas curvas de amassamento, uma vez que estas representam linhas no espaço dos parâmetros com igual invariante topológico, neste caso, com igual entropia topológica.

Uma primeira distinção que é possível fazer é que, enquanto algumas delas terminam na fronteira superior do domínio  $D_{\mathcal{L}}$ , muitas outras parecem ser limitadas por um *ponto de intersecção* com outras curvas de amassamento. Vamos designar as primeiras por curvas de amassamento primárias e as segundas por curvas de amassamento secundárias.



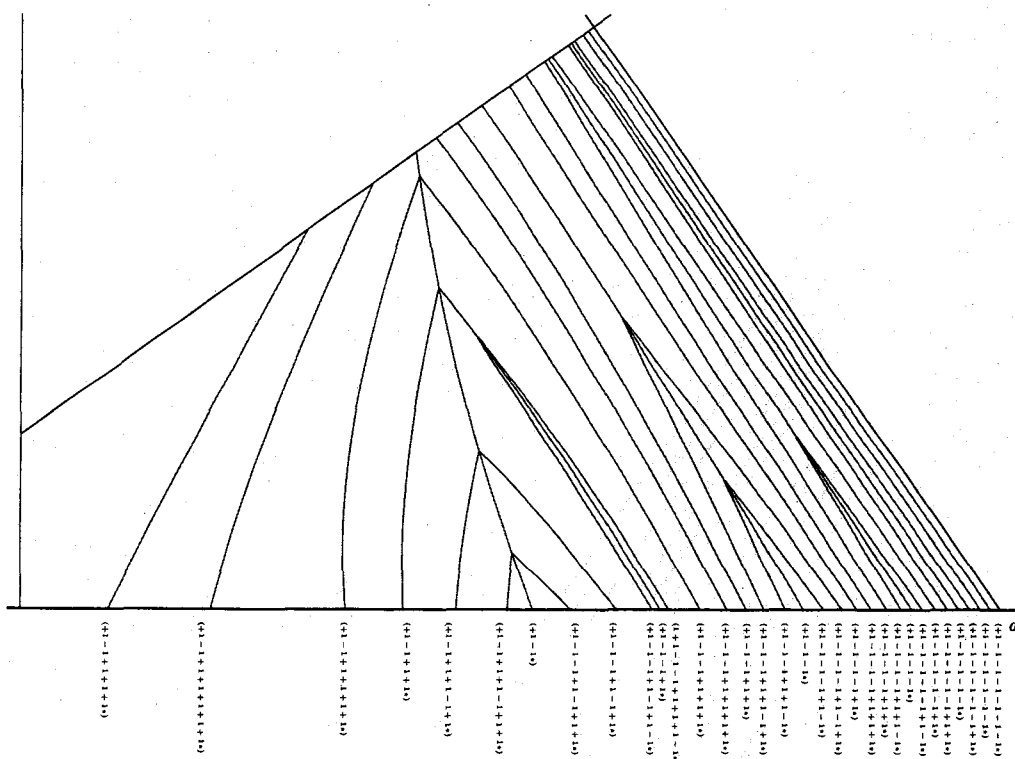


Figura 4.12: Algumas das curvas de amassamento.

**Definição 4.36.** Dado um vértice  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_n^*)$  da árvore das seqüências de amassamento das aplicações de Lozi tal que, para todo  $0 < k < N$ , a seqüência simbólica  $(\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{k-1}^*)$  não é um vértice da árvore das seqüências de amassamento das aplicações de Lozi, dizemos que  $\Gamma_\xi$  é uma curva de amassamento primária. Uma curva de amassamento que não seja primária será designada por curva de amassamento secundária.

Naturalmente que importa agora mostrar que esta classificação das curvas de amassamento corresponde a diferentes maneiras como estas são limitadas.

**Proposição 4.37.** Seja  $\Gamma_\xi$  uma curva de amassamento secundária. Então, temos que  $\Gamma_\xi$  vai ser limitada por uma outra curva de amassamento.

**Dem.** Dada uma curva de amassamento secundária  $\Gamma_\xi$ , com  $\xi = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_n^*)$ , sabemos que existe  $0 < k < n$  tal que  $(\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{k-1}^*)$  é também um vértice da árvore das seqüências de amassamento das aplicações de Lozi. Assim sendo, podemos garantir que existe um par de valores dos parâmetros,  $(a^*, b^*)$ , para os quais temos que o itinerário para o futuro do ponto

crítico é dado pela sequência simbólica

$$\varepsilon^s(X_c) = (\xi_0 \xi_1 \cdots \xi_{k-1} \star \xi_{k+1} \cdots \xi_n \star \cdots).$$

Trata-se, como é evidente, de um ponto de  $D_{\mathcal{L}}$  que, embora ainda satisfaça a equação algébrica que determina a curva  $\Gamma_{\xi}$ , já não pertence a essa curva uma vez que a iterada  $k$  do ponto crítico, com  $k < n$ , pertence já ao eixo vertical. Assim sendo, trata-se de um ponto da curva de amassamento  $\Gamma_{\xi'}$  correspondente ao vértice  $\xi' = (\pm 1 \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_{m-1} \star)$  da árvore das sequências de amassamento das aplicações de Lozi. É então esse o ponto de  $D_{\mathcal{L}}$  que limita a curva de amassamento secundária considerada.  $\square$

Os argumentos apresentados na prova desta última proposição leva-nos facilmente a concluir também o seguinte.

**Proposição 4.38.** *Seja  $\Gamma_{\xi}$  uma curva de amassamento primária. Então, temos que  $\Gamma_{\xi}$  vai ser limitada pela fronteira superior do domínio  $D_{\mathcal{L}}$ .*

Uma segunda característica da forma como as curvas isentrópicas das aplicações de Lozi aparecem desenhadas no espaço dos parâmetros é o facto dos pontos de intersecção referidos anteriormente limitarem sempre pares de curvas de amassamento.

**Proposição 4.39.** *Dada uma curva de amassamento secundária  $\Gamma_{\xi}$ , seja  $(a^*, b^*) \in \Gamma_{\xi'}$  o ponto do domínio  $D_{\mathcal{L}}$  que a limita. Então, temos que toda a vizinhança de  $(a^*, b^*)$  intersecta não apenas  $\Gamma_{\xi}$ , mas também a curva de amassamento correspondente à sequência de amassamento*

$$(\xi_0 \xi_1 \cdots \bar{\xi}_k \cdots \xi_n \star),$$

onde por  $\bar{\xi}_m$  se denota o simétrico do símbolo  $\xi_k$ .

**Dem.** Trata-se de uma consequência imediata do facto do itinerário para o futuro do ponto crítico tocar duas vezes no eixo vertical. De facto, se nesse ponto do espaço dos parâmetros tivermos  $(\xi_0 \xi_1 \cdots \star \xi_{k+1} \cdots \xi_n \star)$ , isto significa que ambas as sequências

$$(\xi_0 \xi_1 \cdots \pm 1 \xi_{k+1} \cdots \xi_n \star)$$

são admissíveis como itinerários para o futuro do ponto crítico, ficando assim provada a existência da curva de amassamento *simétrica* de  $\Gamma_{\xi}$ . Que esta é limitada pelo mesmo ponto  $(a^*, b^*)$  é trivialmente verdade.  $\square$

Naturalmente que este nosso estudo das curvas no espaço dos parâmetros correspondentes a aplicações de Lozi de igual entropia não encerra outros tipos de análise, sobretudo na introdução de um segundo invariante topológico, tal como foi feito por Sousa Ramos, a partir dos trabalhos de Milnor e Thurston, para as aplicações bimodais no intervalo. Neste caso, a interrogação mais forte surge da natural ligação entre a família das aplicações tenda no intervalo e a família de aplicações de Lozi, como acabámos de ver, e esta necessidade de um segundo invariante, certamente de natureza muito diferente do invariante de Sousa Ramos.



# Bibliografia

- [Adl98] R. L. Adler. Symbolic dynamics and Markov partitions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 35(1):1–56, 1998.
- [AY81] V. M. Alekseev and M. V. Yakobson. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems. *Phys. Rep.*, 75(5):287–325, 1981.
- [Bow70] Rufus Bowen. Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, 92:725–747, 1970.
- [Bow78] Rufus Bowen. *On Axiom A diffeomorphisms*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978. Regional Conference Series in Mathematics, No. 35.
- [Guc79] J. Guckenheimer. Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, 70:133–160, 1979.
- [IS98] Yutaka Ishii and Duncan Sands. Monotonicity of the Lozi family near the tent-maps. *Comm. Math. Phys.*, 198(2):397–406, 1998.
- [Ish97] Yutaka Ishii. Towards a kneading theory for Lozi mappings. I. A solution of the pruning front conjecture and the first tangency problem. *Nonlinearity*, 10(3):731–747, 1997.
- [LXZL92] Zeng Rong Liu, Hui Ming Xie, Zhao Xuan Zhu, and Qin He Lu. The strange attractor of the Lozi mapping. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2(4):831–839, 1992.
- [Mis80] Michał Misiurewicz. Strange attractors for the Lozi mappings. In *Nonlinear dynamics (Internat. Conf., New York, 1979)*, volume 357 of *Ann. New York Acad. Sci.*, pages 348–358. New York Acad. Sci., New York, 1980.
- [Ose68] V. I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 19:179–210, 1968.

- [Rob99] Clark Robinson. *Dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 1999. Stability, symbolic dynamics, and chaos.
- [Sou89] J. Sousa Ramos. *Hiperbolicidade e Bifurcação em Sistemas Simbólicos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 1989.
- [Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Wil73] R. F. Williams. Classification of subshifts of finite type. pages 281–285. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 318, 1973.