UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Escola de Ciências Sociais

Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica

A demonstração matemática com recurso a um ambiente de geometria dinâmica – Um estudo de caso com alunos de 10.º ano de escolaridade

Zita da Conceição Russo Paulino

Orientador: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2012

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Escola de Ciências Sociais

Mestrado em Ciências da Educação – Supervisão Pedagógica

A demonstração matemática com recurso a um ambiente de geometria dinâmica – Um estudo de caso com alunos de 10.º ano de escolaridade

Zita da Conceição Russo Paulino

Orientador: Professora Doutora Ana Paula Canavarro

2012

aos meus filhos,

Luísa e Tomás

Resumo

Esta investigação analisa como um ambiente de geometria dinâmica, o *Geogebra*, influencia o processo de demonstração matemática desenvolvido por alunos de 10.º ano.

Constituindo uma dificuldade para muitos alunos, a demonstração impõe-se como um processo matemático essencial, realçado nas atuais orientações curriculares. Os ambientes de geometria dinâmica, com tarefas adequadas, podem apoiar os alunos desde a formulação de conjeturas à sua demonstração.

Optou-se por uma abordagem interpretativa e qualitativa, concretizada através de um estudo de caso de uma turma, sujeita a uma intervenção didática focada na resolução de tarefas que requeriam demonstração.

Concluiu-se que a demonstração pode estar viva na aula de Matemática, e ser vista como o culminar do processo investigativo que é facilitado pelo *Geogebra*. O alcance deste ultrapassa o estímulo à formulação e testes de conjeturas, auxiliando também a realização das próprias demonstrações, dado que as construções produzidas podem constituir, em muitos casos, a base das demonstrações.

Palavras-chave: Formulação de conjeturas; Teste de conjeturas; Demonstração matemática; *Geogebra*.

Mathematical demonstration using a dynamic geometry environment – A case study with students of the 10th grade

Abstract

This research analyzes how a dynamic geometry environment, *Geogebra*, influences the process of mathematical demonstration developed by students of the 10th grade.

Representing a difficulty for many students, the demonstration is a key mathematical process, highlighted in the current curriculum guidelines. With appropriate tasks, dynamic geometry environments can support students from the formulation of conjectures to their demonstration.

A qualitative and interpretative approach was chosen, implemented through a case study of a class undergoing a didactic intervention focused on solving tasks requiring demonstration.

The conclusion is that the demonstration can be alive in math class and it is the high point of the investigative process enabled by *Geogebra*, whose scope goes beyond stimulating the formulation of conjectures and their test. *Geogebra* also contributes to perform the demonstrations themselves, as the constructions produced often constitute the basis of the demonstrations.

Keywords: Conjecture formulation; Conjecture test; Mathematical demonstration; *Geogebra*.

Agradecimentos

Devo uma primeira palavra de agradecimento à minha orientadora, Professora Doutora Ana Paula Canavarro, pela forma como me orientou ao longo da tese, nomeadamente pelo seu incentivo, pela maneira agradável com que sempre fez os seus reparos e pela disponibilidade infindável que tornou possível a concretização deste trabalho.

Agradeço à escola onde realizei a presente investigação por me ter permitido realizá-la, bem como aos alunos da turma diretamente envolvida e aos seus encarregados de educação.

Agradeço também à minha colega Anabela pela sua amizade e companheirismo neste percurso.

Devo ainda uma palavra de agradecimento à minha irmã e aos meus pais, pelo constante incentivo e por último, um agradecimento muito especial ao Paulo pelo seu apoio incondicional e por me ter dado todas as condições que permitiram a realização deste trabalho. Agradeço igualmente o sentido crítico com que leu todos os capítulos.

Índice

Índice de anexos

Índice de quadros

Índice de figuras

Índice de gráficos

CAPÍTULO I

Introdução

Este capítulo encontra-se estruturado em três secções, sendo a primeira delas uma referência ao contexto do estudo, expondo breves considerações sobre a introdução das TIC (tecnologias de informação e comunicação) no ensino da Matemática. Na segunda abordam-se os objetivos e questões que dão corpo a esta investigação, terminando com a terceira secção onde se faz alusão à organização do estudo realizado.

O contexto do estudo

A demonstração detém, no mundo da educação matemática, uma importância indiscutível, como se pode ler nos documentos internacionais de orientação curricular, nomeadamente em NCTM (1991; 2007) e nos programas oficiais portugueses em vigor (DEB, 2001; ME, 2007; DES, 1997; DES, 2001a; DES, 2001b; DES, 2002a; DES, 2002b; DES, 2002c; DES, 2002d). Com efeito, "o raciocínio e a demonstração deverão constituir uma parte consistente das experiências matemáticas dos alunos, desde o pré-escolar ao 12.º ano" (NCTM, 2007, p. 61). A consideração do tema "Lógica e Raciocínio Matemático", que surge como tema transversal no programa de Matemática A, e prevê o apoio aos alunos na compreensão e desenvolvimento da demonstração, é prova evidente da importância da mesma nas orientações curriculares do nosso país. O atual programa de Matemática A (2001a) prevê assim que os alunos sejam levados a justificar os seus processos de resolução, a encadear raciocínios, formulando e testando conjeturas, chegando mesmo à demonstração de fórmulas e alguns teoremas.

É contudo certo que a demonstração é uma matéria de assumido insucesso para a maioria dos alunos (Barbin, 1993b; Boavida, 2001; Rodrigues, 2008; Mejía-Ramos & Inglis, 2009; Bar-Tikva, 2009; Ersoz, 2009; Kunimune, Fujita, & Jones 2009; Neto 2009; Cyr, 2011). Em NCTM (2007), pode mesmo ler-se que "a demonstração é um tema bastante difícil para os alunos do ensino básico e secundário" (p. 61).

A maneira como se tem feito o seu ensino, com pouco envolvimento dos alunos na construção do conhecimento, pode estar na base das dificuldades sentidas pelos mesmos, como aliás é posição defendida por vários autores (Schwartz & Yerushalmy, 1987; Barbin, 1993b; Boavida, 2001).

Parece todavia que as novas tecnologias trouxeram um novo brilho ao ensino da demonstração, revelando, particularmente, inúmeras potencialidades ao nível da formulação, teste e refutação de conjeturas. No entender de Oliveira e Domingos (2008), as TIC têm sido apontadas como motor de mudança no ensino da Matemática em geral, estando o seu uso amplamente reconhecido (Haciomeroglu, Bu, Schoen, & Hohenwarter, 2009).

Canavarro (1993) identificou três perspetivas diferentes de utilização do computador no ensino da Matemática por parte dos professores: a) como instrumento de animação, permitindo melhorar o ambiente da sala de aula; b) como instrumento facilitador, permitindo realizar tarefas habitualmente realizadas à mão e c) como instrumento de possibilidade, permitindo realizar atividades que seriam difíceis de fazer de outra maneira. Com efeito, as novas tecnologias vêm libertar-nos de um trabalho rotineiro e monótono, permitindo abordagens diferentes dos conteúdos e de nível intelectual superior. A presente dissertação, embora centrada no trabalho do aluno e não no do professor prevê uma abordagem do computador que se aproxima da terceira perspetiva apontada por Canavarro (1993).

Nas últimas décadas e sobretudo nos últimos anos tem crescido o número de investigadores que têm estudado a utilidade das TIC na aprendizagem da Matemática (Oliveira & Domingos, 2008; Garcia-López, 2011).

Garcia-López (2011) refere os estudos de Pellegrino, Hickey, Heath, Rewey e Vye (1991), Beeland (2002) e Weaver (2000), onde se observa que a tecnologia tem demonstrado ter efeitos positivos, tanto no rendimento como nas atitudes dos alunos face às matemáticas. Aponta também Lagrange, Artigue, Laborde e Trouche (2001) que, seguindo a mesma linha de pensamento, salientam a crença instalada de que, se os estudantes usam as TIC, há melhoria no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Amado e Carreira (2008) referem que a tecnologia muda a forma como um problema de Matemática é resolvido e ensinado. Com efeito, a vantagem da tecnologia, ao proporcionar uma visualização "com grande prontidão" (p. 286) reduz a necessidade de abstração e de idealização tornando as ideias mais percetíveis. Efetivamente, com o uso de ferramentas tecnológicas, os alunos não só aprendem Matemática "como também aprendem novas formas de pensar e encontram novos caminhos para desenvolverem a sua própria Matemática" (p. 287).

De acordo com Garcia López (2011) o *software* de geometria dinâmica encontra-se entre as ferramentas tecnológicas mais usadas na educação matemática, sendo que, na perspetiva de Oliveira e Domingos (2008), o seu uso na Matemática escolar constitui mesmo uma recomendação curricular importante, tanto nacional como internacionalmente, e é "encarada como uma contribuição significativa no sentido de promover a compreensão dos conceitos" (p. 280).

Apesar de já terem sido desenvolvidos em Portugal alguns estudos que procuraram investigar as potencialidades destes programas na sala de aula, não pareceu excessivo realizar mais um estudo neste âmbito, pretendendo, desta vez averiguar como é que o uso de um programa de geometria dinâmica, mais concretamente o *Geogebra*, vem apoiar o processo de demonstração matemática. Efetivamente, a "introdução das TIC no processo de ensino e aprendizagem precisa ser acompanhada por investigação sustentada que nos permita perceber como professores e alunos se apropriam desses recursos" (Oliveira & Domingos, 2008, p. 285).

Area (2005) apresenta uma classificação das diferentes perspetivas de investigação que têm analisado e avaliado os fenómenos inerentes à incorporação das TIC em sala de aula. O autor identifica quatro grandes linhas de investigação: a) estudos sobre indicadores quantitativos do grau de presença das TIC nos sistemas escolares; b) estudos sobre os efeitos dos computadores na aprendizagem escolar; c) estudos sobre as perspetivas, opiniões e atitudes dos agentes educativos face às TIC e d) estudos sobre as práticas de uso de computadores em contexto escolar.

De acordo com o autor, na primeira linha de observação incluem-se os trabalhos que costumam ser elaborados por organismos administrativos e governamentais e que permitem comparar a situação de um determinado sistema escolar ao longo do tempo, ou de um sistema escolar com os de outros países. Os estudos que integram a segunda linha de investigação têm como centro de interesse a medição da eficácia do uso de computadores no processo de ensino aprendizagem. Averiguam em que medida os computadores melhoram e/ou aumentam a qualidade e a quantidade de aprendizagem comparativamente a outros métodos didáticos. Assim, pressupõem a existência de um grupo de controlo e um grupo experimental. A necessidade da terceira linha de investigação apresentada nesta categorização está justificada na suposição de que a prática de ensino com computadores está dependente, entre outros fatores, das ideias que os professores apresentam sobre este tipo de tecnologia. Por último, a quarta linha de investigação inclui trabalhos onde se observam os fenómenos que rodeiam e acompanham o uso de computadores na prática educativa, levada a cabo nas aulas. Envolvendo estudos de caso, as técnicas de investigação mais usadas nestes estudos são as entrevistas, as discussões em grupo, as observações, os diários de campo e as análises documentais.

Pelo exposto, a presente dissertação poderá incluir-se nesta última linha de investigação. Com efeito, tal como esta perspetiva de investigação prevê, as conclusões a que se chegar não serão generalizadas, podendo as experiências ser transferidas para outro grupo de alunos.

A opção pelo *Geogebra* como recurso para este estudo, deve-se ao facto de se estar perante um *software* livre e assim haver a possibilidade de todos os alunos poderem ter em sua posse o referido programa sem quaisquer gastos. Acresce ainda o facto de ser em português e extremamente intuitivo e por isto se prevê que estas características poderão constituir vantagens no desenrolar do estudo.

Na realidade, entre os diferentes *softwares* de geometria dinâmica usados pelos professores em sala de aula, tem ganho particular relevância o *Geogebra*. Uma prova desta incrementação é o visível acréscimo do número de institutos *Geogebra* que têm aparecido em todo o mundo. Contam-se na Europa 42 institutos, sendo que também Portugal está nesta lista com o Instituto *GeoGebra* - Portugal (http://geogebra.ese.ipp.pt/). Estes institutos são parte da rede internacional denominada "The Internacional GeoGebra Institute" que, entre outros objetivos, têm como propósito divulgar e ensinar a usar o *software*, disponibilizar materiais para uso em sala de aula, promover um apoio *online* aos professores e divulgar conferências sobre o tema.

O *Geogebra* é também apresentado, por diversos investigadores, como contendo um enorme potencial para melhorar o currículo de Matemática e a dinâmica na sala de aula (Haciomeroglu, Bu, Schoen, & Hohenwarter, 2009; Garcia López, 2011). Todas estas considerações estiveram na base da escolha do *software*.

A opção pelo 10.º ano de escolaridade deve-se ao facto de se ter observado a existência de mais estudos desta natureza com alunos do ensino básico e este estudo poder vir a constituir uma mais-valia dentro de um nível de ensino onde tem sido menos abordado este aspeto, colaborando assim para uma melhoria na compreensão da temática em causa.

Objetivo e questões do estudo

O presente estudo centra-se na demonstração matemática, com recurso a um ambiente de geometria dinâmica, mais propriamente o *Geogebra*. Assim, deseja-se contribuir para a compreensão de como se desenrola o processo de demonstração matemática desenvolvido por alunos do 10.º ano de escolaridade, num contexto de utilização de um *software* de geometria dinâmica. Neste sentido, pretende dar-se resposta às seguintes questões:

- Como lidam os alunos com a construção dinâmica usando o *Geogebra*?
- Como lidam os alunos com o processo de investigação usando o *Geogebra*?
- Que tipos de demonstração matemática realizam os alunos sem o *Geogebra*?
- Que funções atribuem os alunos à demonstração matemática?

Tentará investigar-se em que medida os alunos progridem no uso do recurso utilizado, nomeadamente no domínio dos comandos do *Geogebra* e na consequente elaboração das suas construções. Detêm-se nos desenhos fixos, ou, pelo contrário desenvolvem construções dinâmicas? Observar-se-á o processo de formulação e testagem das conjeturas, tentando vislumbrar em que medida os alunos sentem necessidade de demonstrar as mesmas. Com efeito, variadíssimos autores (Boavida, 2005; Machado, 2005; Ferreira, 2005; Rodrigues, 2008; Ersoz, 2009; Kunimune, Fujita, & Jones, 2009) referem nos seus estudos que muitos alunos não sentem necessidade de provar as suas conjeturas, aceitando que as mesmas são válidas quando verificadas para um número reduzido de casos. Pretende-se também perceber que demonstrações realizam os alunos fora do *Geogebra*, no processo de prova das suas conjeturas, tentando neste âmbito, entender quais as funções que os mesmos atribuem às demonstrações então produzidas.

Organização do estudo

Este estudo encontra-se estruturado em sete capítulos, sendo o primeiro deles a introdução, no qual se refere a contextualização do estudo, o objetivo e questões do mesmo, bem como a sua organização. A revisão de literatura é constituída por três capítulos. O segundo capítulo focaliza-se na demonstração em matemática, onde se aborda o conceito de demonstração, as funções da mesma em matemática e os tipos de demonstração mais usados. A demonstração no ensino e aprendizagem da Matemática dão corpo ao terceiro capítulo, onde se faz referência à demonstração no currículo de Matemática, enfatizando a importância desta no currículo da disciplina em causa e a evolução das tendências curriculares da demonstração. Abordam-se também as funções da demonstração direcionadas para o contexto educativo. As práticas de ensino da demonstração, onde se destaca por um lado o ensino tradicional da mesma e por outro as perspetivas atuais sobre o ensino/aprendizagem da demonstração, também são focadas. Dá-se ainda destaque às investigações sobre o ensino da demonstração, onde as atividades facilitadoras da mesma e alguns estudos realizados no estrangeiro e em Portugal têm lugar. O modo como os ambientes de geometria dinâmica favorecem a demonstração nesta disciplina está evidenciada no último capítulo da revisão da literatura, onde a ênfase é colocada nas novas tecnologias da educação, mais concretamente nos ambientes de geometria dinâmica (AGD´s). Procede-se a uma breve caracterização do *Geogebra*, contemplando as potencialidades dos AGD´s para o ensino da Matemática e referindo-se as potencialidades e desafios dos mesmos no processo de formulação de conjeturas e na demonstração. Por último referem-se alguns estudos sobre o ensino e aprendizagem da demonstração envolvendo AGD´s, realizados no estrangeiro e em Portugal.

As opções metodológicas são explicadas no Capítulo 5, onde se justifica a escolha por uma abordagem qualitativa interpretativa. É explicado o percurso investigativo, focalizada a intervenção didática e referidos os instrumentos usados para recolha e análise dos dados.

Os dados empíricos relativos ao caso turma são apresentados no Capítulo 6. Optou-se por apresentar separadamente cada uma das tarefas implementadas nas quais se procura abordar os seguintes aspetos: (a) grau de construção dinâmica no *Geogebra*, (b) processo de investigação e formulação de conjeturas com recurso ao *Geogebra*, (c) realização de demonstrações matemáticas e (d) funções que a demonstração matemática desempenha para os alunos, de modo a ir ao encontro dos focos de análise do estudo.

As principais conclusões a que este estudo conduziu dão corpo ao Capítulo 7, onde se apresenta também uma síntese do estudo, algumas considerações finais e sugestões de questões para futuras investigações.

CAPÍTULO II

A demonstração em matemática

Este capítulo, organizado em quatro secções, pretende abordar alguns conceitos que foram usados nesta investigação. Inicia-se pelo conceito de demonstrar, onde se aclara a noção de conjetura e a relação existente entre argumentação e demonstração. Posteriormente faz-se referência às funções da demonstração em matemática, seguindo-se uma pequena abordagem aos tipos de demonstração. Termina-se com uma síntese das principais ideias que foram apresentadas ao longo do capítulo.

O conceito de demonstrar

Há quem afirme que a característica que distingue a matemática das outras ciências é alguma coisa a que se chama demonstração (Santos & Rodrigues, 2009; Davis & Hersh, 1995), de tal forma que, sem demonstração não pode haver matemática (Davis & Hersh, 1995). A seguinte afirmação de Bourbaki, presente em Barbin (1993a), evidencia esta posição: “depois dos gregos, quem diz Matemática diz demonstração” (p. 21). Com efeito, “a demonstração marca de forma essencial a natureza da matemática” (Rodrigues, 2008, p. 752), estando no cerne desta ciência (Hanna, De Villiers, Arzarello, Dreyfus, Durand-Guerrier, Jahnke, Fou-Lai Lin, Selden, Tall, & Yevdokimov, 2009; Sun, 2009). Segundo APM (2009, p. 47) ela é “o ‘selo da Matemática’ (…)”.

"Nas matemáticas orientais não se encontram tentativas daquilo a que se chama uma 'demonstração' " (Struik, 1992, p. 63), não havendo registo de nenhuma argumentação nem da maneira como os teoremas eram encontrados (Struik, 1992). A primeira demonstração em matemática, com características dedutivas, data de 600 a.C. e deve-se a Tales de Mileto (Davis & Hersh, 1995).

Este matemático demonstrou que o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. Sendo o valor da sua descoberta claramente nulo, por ser uma afirmação bastante óbvia, a descoberta reside no facto de este se ter apercebido que demonstrar é possível e necessário (Davis & Hersh, 1995). Nasciam nesta época um pensamento racional e geométrico, e a exigência de uma ciência demonstrativa (Barbin, 1993a).

O que é então demonstrar?

Davis e Hersh (1995) referem existir acordo entre os matemáticos relativamente ao conceito de demonstração, sendo entendido como "um procedimento pelo qual uma proposição acerca de uma realidade não observada pode ser irrevogavelmente estabelecida e aceite por todos os aderentes" (p. 116). Para estes autores, uma demonstração "é uma sequência de proposições, escritas numa linguagem inequívoca e estritamente formal, que procedem dos axiomas para a conclusão por meio de transformações lógicas válidas e formalizadas" (Davis & Hersh, 1997, p. 84).

Para Hanna *et al.* (2009) uma demonstração consiste numa cadeia de inferências explícitas, seguindo regras de dedução aceites universalmente, sendo frequentemente caracterizada pelo uso de notação formal, sintaxe e regras de manipulação.

De acordo com Rodrigues (2008), a demonstração é vista como um "encadeamento de argumentos gerais e resistentes, pelo qual uma ou mais conclusões são alcançadas, por meio de raciocínios lógico-dedutivos, a partir de uma hipótese, constituída ou por axiomas, ou por teoremas anteriormente já demonstrados e aceites como verdadeiros" (p. 21).

Na literatura em inglês usa-se com frequência o termo *proof* que, apesar de nem sempre ter o significado de demonstração é, na maior parte das vezes, usado com esse sentido (Rodrigues, 2008). A autora socorre-se de Balacheff (1987) para estabelecer a distinção entre *prova* e *demonstração*, sendo referenciado ainda um outro termo: a *explicação*.

Estes conceitos aparecem aqui de uma forma inclusiva sendo que as demonstrações se encontram incluídas nas provas, e estas, por sua vez, estão incluídas nas explicações.

A explicação pretende clarificar a verdade inerente a uma proposição ou resultado enquanto a prova, é uma explicação aceite por uma comunidade, sendo, reconhecida pela mesma como convincente, independentemente da proposição ser efetivamente verdadeira ou não. Deste modo, uma determinada explicação pode deter o estatuto de prova para um grupo social, mas não para outro. A demonstração é uma prova particular, sendo o único tipo de prova que é aceite pelos matemáticos, respeitando as regras dedutivas e que utiliza objetos matemáticos teóricos (Rodrigues, 2008).

Sendo claro que alguns autores fazem a distinção entre prova e demonstração, a mesma não é consensual. Neste trabalho será feito uso indistinto destes dois conceitos.

Muitos investigadores referidos por Fernandes e Fonseca (2004) veem a demonstração, no seio da teoria matemática, relacionada com "uma sequência finita de afirmações interligadas por raciocínios lógicos válidos que, partindo das hipóteses, termina na proposição que se pretende demonstrar, construindo assim um argumento válido de que a proposição é verdadeira" (Fernandes & Fonseca, 2004, para. 8). Sublinho também a ideia defendida por Boavida (2005), segundo a qual a demonstração também pode ser usada como meio de iluminar o porquê da não validade de uma dada propriedade.

Características do método demonstrativo

Nas definições atrás referidas é feita alusão ao método demonstrativo. Com efeito para Davis e Hersh (1995), uma característica deste método é a utilização de resultados anteriores num processo que não é interminável, acabando "com os chamados *axiomas* e *definições*" (p. 148). Para os autores as definições são "simples convenções linguísticas" (idem), sendo que, "sem definições não existe matemática, nem é possível a comunicação matemática" (Veloso, 1998, p. 375). Os axiomas são "factos fundamentais e manifestamente evidentes sobre os quais está firmada toda a estrutura, erguida e sustentada pelos parafusos da lógica" (Davis & Hersh, 1995, p. 148). Deste modo a axiomatização aparece também, como sendo outra característica do método demonstrativo.

Com efeito, a obtenção da demonstração envolve um argumento de natureza dedutiva, baseado num sistema de referência axiomático através do qual a afirmação pode ser comprovada (Perry, Camargo, Samper, Molina, & Eccheverry, 2009).

Para além das duas características atrás mencionadas (dedução e axiomatização), Davis e Hersh (1995) indicam como "ingredientes mágicos da demonstração" (p. 148) a abstração e a formalização. No que diz respeito à abstração, são apresentadas duas vertentes consideradas pelos autores como interligadas, surgindo assim a abstração como idealização e a abstração como extração. Deste modo, o primeiro sentido de abstração focaliza a idealização dos objetos matemáticos. Por exemplo, "contrastando com a linha reta real e concreta, existe o conceito mental da abstração matemática de linha reta ideal" (p. 127), donde, "milagrosamente" (idem) desaparecem "todos os acidentes e imperfeições da sua concretização física" (idem). O segundo aspeto prende-se com a extração de um objeto do seu contexto real. Por exemplo, estão "quatro pássaros a comer migalhas no meu jardim. Há quatro laranjas sobre a minha mesa da cozinha" (p. 130). Nota-se um processo de abstração no uso da palavra quatro, onde por um lado temos migalhas e laranjas e, por outro, números que existem independentemente dos objetos. A formalização aparece para os autores como "o processo pelo qual se prepara a matemática para o processamento mecânico" (p. 135). Salientam que os textos matemáticos que em geral encontramos não estão completamente formalizados, mas que é possível fazê-lo recorrendo à linguagem da teoria formal de conjuntos. No entender de Veloso (1998) "as demonstrações inteiramente formalizadas não existem e seriam, de certo modo, ilegíveis" (p. 369).

Para os formalistas[1] as demonstrações são rigorosas (Davis & Hersh, 1995), sendo que qualquer demonstração lógica tem como pontos de partida hipóteses e axiomas, donde se deduzem logicamente os teoremas. Deste modo, em "matemática apenas podemos dizer que os teoremas são deduzidos dos axiomas" (p. 318), não sendo possível tecer considerações sobre a sua validade ou falsidade. Com efeito, "segundo o formalista, eles estão isentos de qualquer dúvida ou erro possível, porque o processo de demonstração rigorosa e dedução não tem falhas nem vícios de raciocínio" (idem).

Para o filósofo Lakatos, a matemática é falível, desenvolvendo-se pela crítica e correção de teorias. Assim, partindo "de um problema ou de uma conjetura, existe uma pesquisa

[1] O formalismo, tal como o logicismo e o construtivismo foram três escolas de pensamento que tentaram encontrar bases seguras para a matemática (Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997). "A escola formalista, criada por volta de 1910 por David Hilbert, tinha por grande objetivo encontrar uma técnica matemática por meio da qual se pudesse demonstrar, de uma vez por todas que a Matemática está livre de contradições" (Ponte *et al.,* 1997, p. 27).

simultânea de demonstrações e contraexemplos. Novas demonstrações explicam contraexemplos antigos e novos contraexemplos ameaçam demonstrações antigas" (idem).

O conceito de conjetura

Na citação atrás referida surge o conceito de conjetura que, pela sua relevância nesta dissertação, interessa clarificar.

De acordo com Baruk (2005), "as conjeturas marcam a história da matemática" (p. 243) e são "a 'convicção íntima' do que é a resposta a uma dada questão" (idem), sem se dispor provisoriamente da "prova da sua veracidade" (idem).

Seguindo a linha de pensamento de Lakatos, aceitam-se hoje conceções de conjetura "despidas do formalismo tradicional" (Junqueira & Valente, 1993, p. 72). Uma conjetura pode ser o resultado da generalização de uma regularidade verificada, por meio de observações, em casos particulares (Junqueira & Valente, 1993; Fernandes & Fonseca, 2004). É uma "suposição informada" (NCTM, 2007, p. 62). Como observam Larios-Osorio e Acuña-Soto (2009) "a verdade de uma conjetura, baseada na sua pertinência e 'força', contém na realidade um elevado grau de convicção intuitiva (…), não passando apenas da aceitação de que 'isso pode ser verdade' " (p. 62).

Segundo Lakatos, a sua validade pode ser obtida através de provas informais, isto é, "explicações, justificações, elaborações que tornem a conjetura mais plausível, mais convincente, ao mesmo tempo que a tornam mais detalhada e exata pela pressão exercida pelos contraexemplos" (Davis & Hersh, 1995, p. 324). O teste da conjetura prevê a concretização de casos particulares e, à medida que a conjetura vai resistindo a esses testes, torna-se naturalmente mais credível (Oliveira, 2002).

Se a conjetura não for confirmada por um caso particular, rejeita-se por ser falsa e já não se tenta a sua demonstração, caso contrário começa a tentar-se a procura da mesma (De Villiers, 2003a). Se passado algum tempo a demonstração não se tiver encontrado, "podemos começar a duvidar da validade da conjetura (…) e passar a considerar alguns outros casos, após o que todo o processo se repete" (p. 38). De Villiers (2003a) ilustra no esquema da figura 1 os ciclos pelo qual o processo de conjeturar, testar, refutar, demonstrar e reformular pode, por vezes, ter de passar.

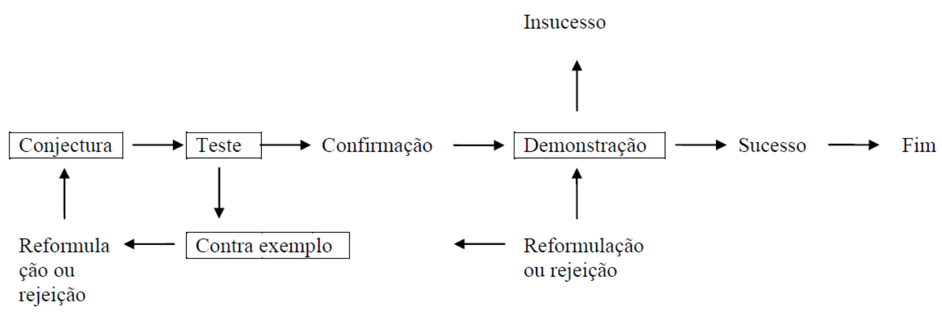


Figura 1 - Ciclo do processo de demonstrar
(Adaptação de De Villiers, 2003a, p. 38)

Observa-se que a reformulação ou rejeição da conjetura pode surgir no momento do teste ou já no momento da demonstração. A uma conjetura que foi provada, chama-se teorema (Velleman, 2006). " 'Teorema' deriva de 'teoria'. Em grego, significa 'visão', como no 'teatro': um teorema *mostra*, através da construção" (Longo, p. 14, 2009).

Na formulação de uma conjetura por generalização de uma regularidade, verificada em observações realizadas em casos particulares, usa-se o raciocínio indutivo, ao passo que no teste da conjetura formulada, quer através de um contraexemplo, quer utilizando a demonstração lógica, aplica-se o raciocínio dedutivo (NCTM, 1991).

Para Cardoso (2010), estes dois tipos de raciocínio são complementares, havendo autores que introduzem um outro: o raciocínio abdutivo. Segundo Baccaglini-Frank (2011), Peirce foi o primeiro autor a introduzir a noção de abdução. Para Peirce, a abdução olha factos e procura uma teoria para os explicar, afirmando apenas, que os mesmos poderão ser verdadeiros. Para este autor, um raciocínio abdutivo é da forma: um facto A é observado; se C era verdade, então A seria certamente verdade; por isso, é razoável assumir C como verdadeira.

A abdução e a indução são criativas, por partirem de "conhecimento incompleto" (Cardoso, 2010, p. 127). A dedução, por não se basear no conhecimento inacabado, não dá lugar à descoberta. Por outro lado, o raciocínio abdutivo pressupõe a escolha de uma hipótese, enquanto a indução envolve já a sua testagem (Cardoso, 2010). Assim, "a abdução é o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjetura; a indução corresponde à etapa seguinte, a de testar a conjetura em mais dados" (idem).

Polya defende que uma demonstração matemática envolve o raciocínio dedutivo, todavia este autor destaca o raciocínio plausível[2], sendo este, na opinião do autor, aquele que os matemáticos usam quando fazem descobertas (Oliveira, 2002). Para o autor, o raciocínio de tipo indutivo aparece como um caso particular do raciocínio plausível, estando associado a uma experiência (Oliveira, 2002).

Referiu-se que conjeturar é parte essencial da experiência matemática. Os seus "prolongamentos e complementos são a argumentação e a demonstração" (APM, 2009). Na realidade, nos meios científicos há controvérsias e os cientistas recorrem frequentemente à argumentação para justificarem os seus resultados: novos conceitos, novas teorias, novas demonstrações. Estas últimas, sendo produto da invenção humana, requerem aceitação, sendo necessário convencer a comunidade do valor da conclusão que a mesma apresenta (Boavida, 2005). Com efeito, numa discussão matemática, os envolvidos vivenciam contradições. Tal não significa estar propriamente envolvido num debate contraditório, contudo é necessário estar consciente que os outros podem ter a certeza de ideias opostas, não podendo ser convencidos por argumentos de autoridade (Drouhard, Sackur, Maurel, Paquelier, & Assude, 1999).

Importa então compreender como é que o conceito de demonstração se liga à noção de argumentação.

Argumentação e demonstração

Uma demonstração "é um complexo de elementos formais e informais, de cálculos e de comentários fortuitos, de argumentos convincentes e de apelos à imaginação" (Davis & Hersh, 1997, p. 86). Para os autores, o "profissional competente" (idem) sabe quais são os pontos sobre os quais deve incidir a sua argumentação de modo a convencer a sua

---

[2] Polya apresenta grandes diferenças entre o raciocínio dedutivo e o plausível. Para o autor, o primeiro é seguro, enquanto o segundo é incerto (Oliveira, 2002). Fazendo um paralelismo entre estes dois tipos de raciocínio, observa-se que: "no caso do raciocínio dedutivo é necessário saber distinguir entre uma prova e uma conjetura (guess) e entre uma demonstração válida e uma tentativa inválida" (Oliveira, 2002, p. 41). Por outro lado, "no caso do raciocínio plausível, é essencial saber distinguir uma conjetura de outra conjetura e uma conjetura mais razoável de uma outra menos razoável" (idem).

audiência[3] – "grupo de profissionais com uma experiência e um modo de pensar análogos ao do autor" (p. 87).

Tal como defende Douek (2009), um argumento compõe-se das razões apresentadas a favor ou contra uma dada afirmação, consistindo uma argumentação na ligação lógica de um ou mais argumentos (Douek, 2009).

Para Hanna *et al.* (2009) a argumentação é um discurso fundamentado, que, não sendo necessariamente dedutivo, usa argumentos de plausibilidade.

Compreender a relação entre a argumentação e a demonstração matemática pode ser essencial na conceção de tarefas de aprendizagem que visam o ensino da mesma. Alguns investigadores veem a demonstração matemática separada da argumentação, enquanto outros, tais como Barrieri, Durand-Guerrierii e Blossie (2009), as entendem como partes de um contínuo e não como uma dicotomia (Hanna *et al.*, 2009). Também Garcia-López (2011) defende a continuidade entre argumentação e demonstração.

Estes diferentes pontos de vista têm importantes implicações didáticas. Enquanto o primeiro grupo se concentra principalmente na lógica organizacional de uma demonstração que teria como finalidade ensinar um quadro que se baseia na prova independente da resolução de problemas, para o segundo grupo o enfoque é colocado na produção de argumentos no contexto da resolução de problemas, experimentação e exploração, sendo de esperar que mais tarde, esses argumentos sejam organizados de forma lógica, de modo a permitir a elaboração de uma demonstração matemática válida (Hanna *et al.*, 2009).

Como observa Boero (2011), as regras de argumentação e prova não podem ser ensinadas como uma disciplina autónoma. Para o autor, a melhor escolha didática passa pela exploração de atividades matemáticas de argumentação e prova, e desenvolver nos alunos a consciência das regras de acordo com as ocasiões oferecidas por essas atividades.

---

[3] O conceito de auditório é referido com alguma frequência quando se fala de argumentação, uma vez que esta pressupõe diálogo, discussão e consequentemente escuta. Boavida (2005, p. 38) apresenta a definição de auditório dada por Perelman, filósofo que apresenta obra neste âmbito, como sendo "o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação".

Cramer (2011) realizou uma investigação onde mostra haver relação entre a construção do conhecimento e a argumentação. Segundo a autora a argumentação é um ponto de partida para o desenvolvimento de conjeturas matemáticas. Os esquemas lógicos podem transformar-se em estratégias para chegar às conjeturas e criar ideias de como justificá-las. A autora assume que argumentar é uma ação intencional para ganhar conhecimento. Com efeito, a construção de novos conhecimentos decorre do raciocínio ou da verificação da validade das alegações. Portanto, argumentar tem duas funções: a construção de novos conhecimentos e/ou convencer os outros da validade da hipótese da própria pessoa. Na função de convencer os outros um argumento é uma afirmação que faz uma hipótese mais ou menos provável.

A argumentação não pretende demonstrar a verdade de uma afirmação, mas sim obter concordância relativamente à sua validade, pelo que pressupõe convencimento, ao passo que o objetivo da demonstração se relaciona com a garantia de verdade (Fernandes & Fonseca, 2004). Nas palavras dos autores "na argumentação quaisquer meios, em princípio, são lícitos" (s.p.), contrariamente ao que acontece na demonstração, onde são utilizados conhecimentos e procedimentos declaradamente válidos e "aceites sem reservas pela comunidade científica" (idem).

Os argumentos apresentados em defesa das afirmações matemáticas devem ser completos e rigorosos (o que não implica necessariamente formalismo), de modo a que a cadeia de raciocínios construída não contenha falhas (Fernandes & Fonseca, 2004). É pertinente também que os argumentos sejam gerais, "não bastando a exibição de casos particulares" (s.p.). Fernandes e Fonseca (2004.) apontam a necessidade dos argumentos resistirem a sucessivas "provas de esforço" (s.p.), ou provas de contra-argumentação. Quando tal não se verificar, os mesmos devem ser reavaliados, sendo reformulados de modo a resistirem ou até mesmo serem abandonados.

Na realidade a exposição de uma demonstração "ao escrutínio e à análise de uma nova plateia" (Davis & Hersh, 1995, p. 149) conduz a mesma num processo constante de revalidação. Nas palavras destes autores a "exposição incessante esclarece erros, ambiguidades e equívocos" (idem) trazendo consigo respeitabilidade e garantia de autoridade. Contudo, Fernandes e Fonseca (2004) admitem ainda que, argumentos incorretos possam passar por provas de contra-argumentação sem que as suas fragilidades sejam detetadas.

Funções da demonstração

Nos Elementos de Euclides, encontramos as descobertas dos vários pensadores gregos do período clássico, apresentadas numa base axiomático-dedutiva. De acordo com Barbin (1993a) cada livro da obra de Euclides começa por definições e axiomas e continua com proposições, sendo cada proposição deduzida a partir dos axiomas e das proposições precedentes. Com efeito, para a autora, Euclides não indica como descobriu as suas demonstrações, apenas convence o leitor sobre o que pretende demonstrar usando a força de um raciocínio dedutivo que, partindo de premissas verdadeiras torna incontestável a conclusão. O descontentamento proveniente do diminuto esclarecimento do leitor é explicitado no século XVII, quando Arnould e Nicole criticaram os geómetras antigos por estes "terem mais preocupação com a certeza do que com a evidência, e com o convencimento do espírito do que com o seu esclarecimento" (Arnauld & Nicole, 1965, p. 326, citado por Barbin, 1993a, p. 23).

Já Clairaut quando escreve Élement de Géométrie em 1765, explica no prefácio da sua obra que o que pretende no seu tratado é interessar e esclarecer o leitor. A demonstração, para além de convencer, deverá produzir esclarecimento e "interessar para saber porque se sabe" (Barbin, 1993a, p. 25). Estão aqui explícitas duas funções para a demonstração. Assim, uma demonstração para além de convencer sobre a veracidade de um resultado tem de permitir a compreensão do porquê dessa declaração.

Neste sentido, Barbin (1993a) considera que para Clairaut demonstrar é saber porquê e saber como se sabe, implicando o processo pelo qual se sabe. "Porque é que um conhecimento se torna objeto de pesquisa de um geómetra? Como é que um geómetra chega à verdade? Como é que um geómetra inventa o seu saber?" (p. 24).

No que toca à função de convencimento, David e Hersh (1997) referem que "um artigo matemático cumpre duas funções: atesta que o autor se convenceu a si próprio e aos seus amigos de que certos 'resultados' são verdadeiros, e apresenta uma parte das provas nas quais essa convicção se baseia" (p. 79). Todavia, nas demonstrações apenas uma parte das provas é apresentada e não a totalidade, pelo que "todas as demonstrações estão incompletas do ponto de vista formal" (p. 80). Com efeito a inclusão integral de todos os detalhes lógicos num artigo de investigação matemática "não o tornariam mais compreensível, antes pelo contrário, torná-lo-ia ininteligível…" (idem). Ora, estando elas incompletas, como podem convencer? Segundo De Villiers (2001) os investigadores raramente analisam com minúcia todas as demonstrações, confiando "na autoridade reconhecida do seu autor" (p. 32). Na realidade, de acordo com um reconhecido especialista americano, procuram-se os pontos mais delicados da argumentação e verificam-se cuidadosamente, "se estiverem corretos, calculamos que provavelmente, a coisa toda deve estar certa" (David & Hersh, 1997, p. 81).

A este respeito, Durand-Guerrier e Arsac (2009) num estudo da Comissão Internacional de Educação Matemática (ICMI) apresentam aqueles que consideram ser os três principais aspetos para análise de uma demonstração. O primeiro, ligado ao objetivo principal dos lógicos desde o século XIX, prende-se com a validade da demonstração. O segundo relaciona-se com a compreensão da estratégia de demonstração do autor da mesma e, por fim, o último aspeto, diz respeito à compreensão que a demonstração em causa produz nos domínios a que se refere.

No que diz respeito à função de compreensão de uma demonstração, constata-se que na matemática encontramos várias demonstrações para um mesmo resultado. Por que razão os matemáticos veem mérito em demonstrar repetidamente o mesmo teorema? Uma resposta à questão anterior poderá estar relacionada com esta função da demonstração. Segundo Davis e Hersh (1995) "a demonstração aumenta o entendimento ao revelar o âmago da questão. A demonstração sugere nova matemática" (p. 150). A este respeito, Chaitin (2003) refere que "a única forma de compreender um resultado matemático é sermos nós próprios a demonstrá-lo, encontrarmos a nossa demonstração. Quando lutamos por ela, então compreendemo-la! Ler a demonstração de outra pessoa num livro não nos proporciona compreensão" (p. 56).

Neste sentido, para Chaitin (2003) a demonstração proporciona compreensão. Segundo o autor, "os matemáticos acreditam que, se uma coisa é verdadeira, então tem de ser verdadeira por uma determinada razão e a missão do matemático é descobrir a razão que faz com que uma coisa seja verdadeira e transformá-la numa demonstração" (p. 113).

Assim, Chaitin (2003) aclara que uma demonstração deve explicar porque é que uma determinada afirmação é verdadeira. Por outro lado, refere também que os matemáticos ao procurarem uma demonstração estão, à partida, convencidos da sua veracidade. De Villiers (2001; 2003a) partilha também desta opinião. Nas palavras do autor, se estes não estivessem convencidos, por que razão gastariam tantos meses a tentar provar determinadas conjeturas?

Na perspetiva de De Villiers (2001), a função de demonstração tem sido vista quase “exclusivamente como dizendo respeito à verificação” (p. 31), sendo usada para “remover a dúvida pessoal ou a de céticos” (idem). No entanto, ela pode todavia, desempenhar muitas outras funções para além desta.

Na perspetiva de Bell (1976), as três principais funções de demonstração são: verificação, iluminação e sistematização. A verificação preocupa-se com a verdade de uma proposição, a iluminação tem a ver com o facto de uma boa demonstração transmitir o porquê de ser verdadeira e por último, a sistematização relaciona-se com a organização dos resultados num sistema dedutivo.

De Villiers (2001) ampliando a distinção acima referida, apresenta um modelo que conta com seis funções para a demonstração:

- Verificação (está relacionada com a veracidade de uma afirmação)
- Explicação (fornece explicações do porquê da afirmação ser verdadeira)
- Sistematização (refere-se à organização de vários resultados no interior de um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)
- Descoberta (tem a ver com a descoberta ou invenção de novos resultados)
- Comunicação (refere-se à transmissão do conhecimento matemático)
- Desafio intelectual (está relacionado com a realização pessoal/ gratificação que são resultantes da construção de uma demonstração).

Note-se que, algumas destas funções, que serão agora objeto de análise, são apresentadas por De Villiers como processos.

Verificação/convencimento

O convencimento pode ser interpretado a vários níveis. Fernandes e Fonseca (2004) recorrem a Mason, Burton e Stacey (1985) para evidenciar que podemos convencer-nos a nós próprios, convencer um amigo e convencer um inimigo.

Como já foi referido, a convicção é muitas vezes anterior à demonstração. Segundo De Villiers (2001) "na investigação matemática real, a convicção pessoal depende de uma combinação de intuição, verificação quase-empírica e da existência de uma demonstração lógica" (p. 32) ainda que não necessariamente rigorosa. A convicção pode muitas vezes ser atingida na ausência de uma demonstração.

Com efeito, de acordo com De Villiers (2001), os matemáticos quando estão a investigar a validade de uma conjetura procuram contraexemplos "por meios de testes quase-empíricos" (p. 32), podendo estes testes revelar contradições ou hipóteses não assumidas. Este processo na procura da convicção tem uma função tão importante como o processo de justificação dedutiva. Paralelamente à demonstração dedutiva surge a necessidade de uma compreensão intuitiva. Tal facto não significa ignorar a demonstração como meio indispensável de verificação, especialmente no caso de resultados duvidosos ou surpreendentes, mas sim "colocar a demonstração numa perspetiva mais apropriada em oposição a uma idealização distorcida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convencimento" (De Villiers, 2001, p. 33).

O matemático Poincaré defende que a intuição é falível. Com efeito "uma súbita iluminação que esteja na base de uma descoberta matemática pode tornar-se falsa quando submetida a um exame lógico" (Neto, 2009, p. 65). Deste modo, intuição e lógica interatuam na construção das leis matemáticas, uma no processo de invenção e outra na sua verificação (Neto, 2009).

Explicação

Sendo claro que a convicção pode ser atingida por meio de verificações quase-empíricas, é também evidente que estes processos não fornecem uma explicação satisfatória da validade da conjetura. Torna-se assim necessária "a compreensão ou perceção de como a conjetura é consequência de outros resultados conhecidos" (De Villiers, 2001, p. 33).

Na realidade, para muitos matemáticos o aspeto da clarificação/explicação de uma demonstração tem mais importância do que o da verificação, sobretudo quando "os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente" (idem).

Descoberta

Na ótica de De Villiers (2001) "os teoremas são na maior parte das vezes descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações" (p. 33), havendo todavia, muitos exemplos na história da matemática, de novos resultados que foram descobertos por processos puramente dedutivos.

Este processo de descoberta conduz-nos inevitavelmente à invenção matemática. No entender de Poincaré (1996), "uma demonstração matemática não é uma simples justaposição de silogismos. Consiste em silogismos *colocados numa certa ordem*, e a ordem pela qual estes elementos são colocados é muito mais importante que os próprios elementos" (p. 8). Para o autor, é certo que esta intuição da ordem matemática que leva a adivinhar harmonias e relações escondidas não pertence a toda a gente, sendo certo que nem toda a gente é capaz de criar. Para o autor, este processo de criação está reservado aos que têm a intuição matemática num grau mais elevado de desenvolvimento. Observemos então como Poincaré (1996) descreve uma tentativa, que durava havia já quinze dias, de demonstrar uma conjetura referente à não existência de um determinado tipo de funções:

> sentava-me todos os dias à minha mesa de trabalho e ali permanecia uma ou duas horas ensaiando um grande número de combinações e não chegava a nenhum resultado. Uma tarde, contra meu costume, tomei um café e não consegui adormecer; as ideias surgiam em tropel, sentia como me escapavam até que duas delas, por assim dizer, se encaixaram formando uma combinação estável. De madrugada tinha estabelecido a existência de uma classe de funções fuchsianas, as que derivam da série hipergeométrica. Não tive mais, que redigir os resultados o que apenas me levou algumas horas. (p.9)

Poincaré refere que "estas inspirações súbitas não surgem (…) senão depois de alguns dias de esforços voluntários aparentemente estéreis, em que pensámos não estar a fazer nada de interessante e ter seguido um caminho totalmente falso" (p. 10). Com efeito, "este trabalho não é possível e, em todo o caso, não seria fecundo se, por um lado, não for precedido e, por outro, não se lhe seguir, um período de trabalho consciente" (idem).

Relativamente a este exemplo de Poincaré salientamos o facto de o criador ter acabado por demonstrar precisamente o contrário do que inicialmente havia conjeturado. Na verdade, os matemáticos fazem descobertas e formulam outras conjeturas quando estão a tentar demonstrar uma dada conjetura. Nesta perspetiva, De Villiers (2001) denota que a demonstração pode frequentemente conduzir a novos resultados.

Sistematização

Na demonstração, as relações lógicas entre as afirmações, são uma ferramenta que permite transformar um conjunto de resultados conhecidos num sistema dedutivo de axiomas e teoremas. De Villiers (1986) apresenta algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva:

- Contribuir para identificar inconsistências, hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas.
- Unificar e simplificar as teorias matemáticas integrando afirmações, teoremas e conceitos independentes, o que leva a uma apresentação económica dos resultados.
- Auxiliar na identificação de argumentos circulares ou não consistentes.
- Fornecer uma perspetiva global ou vista de conjunto de um tópico, expondo a estrutura axiomática subjacente ao tópico, a partir da qual, as outras propriedades podem ser derivadas.
- Utilidade para aplicações dentro e fora da matemática, sendo possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura no âmbito da área de investigação.
- Levar por vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspetivas que são mais económicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

De Villiers (2001) observa a respeito destas funções que, embora alguns elementos de verificação estejam aqui presentes, o principal objetivo é organizar a informação isolada num todo unificado e coerente.

Comunicação

Esta função da demonstração coloca a ênfase na disseminação do conhecimento matemático, sendo a filtragem social um meio de refinamento da própria demonstração. A demonstração é assim, um modo único de comunicar resultados matemáticos entre os matemáticos profissionais, entre professores e alunos e entre os estudantes (De Villiers, 2001).

Desafio intelectual

Segundo Davis e Hersh (1995), a demonstração constitui um desafio intelectual, sendo um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático. De Villiers (2001) compara o desafio que a demonstração constitui para os matemáticos com o desafio que os *puzzles* ou outro tipo de esforços constituem para outras pessoas. Nas palavras de Poincaré (1996) é

> aceite que nem toda a gente possa reter uma demonstração anteriormente aprendida. Mas o facto de que nem todos podem compreender um raciocínio matemático no momento em que ele é exposto, parece muito surpreendente (…). E, não obstante, os que conseguem seguir esse raciocínio, ainda que com bastante dificuldade, são a maioria (p. 7).

Segundo o autor, esta situação é inegável, pelo que a demonstração constituirá um desafio intelectual para muitos.

Tipos de demonstração

Dominique Gaud e Jean-Paul Guichard, dois investigadores do *Institut* de *Recherches en Enseignement des Mathématiques* (I.R.E.M.), atribuem também grande importância aos métodos de demonstração, privilegiando certas formas de raciocínio dedutivo (Barbin, 1993b). Para os investigadores, a explicação dos métodos na aula leva a fazer da demonstração um objeto de ensino. Barbin (1993b) apoia-se em Mesquita e Rauscher para evidenciar que a metodologia constitui uma ajuda para os alunos que já "compreenderam o sentido de uma demonstração e que têm um modo de conhecer os objetos geométricos capaz de um processo dedutivo" (p. 12).

Quando os matemáticos resolvem problemas, usam o raciocínio dedutivo para justificar as suas conclusões (Velleman, 2006). Segundo o autor, as demonstrações são muito parecidas com os quebra-cabeças, no sentido em que não há regras sobre como os quebra-cabeças devem ser resolvidos. A regra diz apenas respeito ao produto final: "as peças precisam encaixar" (p. 84). O mesmo é válido para as demonstrações. A este respeito Davis e Hersh (1995) entendem que não "há nenhum método infalível para descobrir demonstrações" (p. 149). A dedução constitui o método mais usado na demonstração sendo, como já se referiu, um dos "ingredientes mágicos" (p. 148) indicado pelos autores na caracterização da mesma. Na realidade, "a força de um raciocínio dedutivo que parte de premissas verdadeiras, está no facto de tornar irrefutável a conclusão" (Barbin, 1993a). Há, porém, demonstrações que utilizam outros métodos. Segue-se uma pequena referência às técnicas de demonstração mais usadas.

Demonstração direta (ou modus ponens) e demonstração por contrarrecíproco (ou modus tollens)

Estes tipos de demonstração utilizam-se quando a afirmação a demonstrar é da forma *se... então*. Na demonstração direta parte-se do pressuposto que a hipótese é verdadeira e, a partir desta, prova-se a tese (Velleman, 2006). A demonstração por contrarrecíproco, no original referido por "contrapositive" (Velleman, 2006, p. 378) consiste em tomar a negação da conclusão como verdadeira e, a partir desta, obter a negação da hipótese.

Demonstração por redução ao absurdo (ou indireta)

A demonstração por este método, parte do pressuposto que a afirmação S a ser demonstrada é falsa, "sendo então apresentados argumentos para demonstrar algo indubitavelmente falso, como 0 = 1" (Bowers, 1991, p. 85). A contradição a que se chega vem assim mostrar que a suposição de que se partiu é falsa, deste modo S é verdadeira (Bowers, 1991). Com este método, admitindo que a tese é falsa, pretende-se chegar a uma conclusão que contradiz uma das hipóteses do problema, ou uma afirmação que se sabe que é verdadeira (Alain, 1999).

Mariotti e Antonini (2009) evidenciam o papel das imagens nas demonstrações por contradição em geometria. Para as autoras, deverá existir "harmonia" (p. 82) entre a figura e o aspeto conceptual para que o raciocínio seja produtivo. Com efeito, nas demonstrações por contradição em geometria, a busca de uma imagem após a contradição parece ser crucial para apoiar a passagem do absurdo à validação da declaração original.

Demonstração por contraexemplo

Este método consiste em demonstrar a falsidade de uma conjetura por meio de um exemplo, para o qual a generalização é falsa (Rodrigues, 2008). Segundo Velleman (2006), um exemplo em que as hipóteses são verdadeiras e a conclusão é falsa é chamado um contraexemplo.

Demonstração pelo princípio de indução matemática

Indução matemática apresenta-se como uma parte importante do conhecimento sobre a construção de demonstrações (Yevdokimov, 2009). Segundo Apostol (1994) este método tem implícita a ideia de indução, que, o autor ilustra com um exemplo não matemático: "uma fila de soldados de chumbo numerados consecutivamente" (p. 40) e colocados "de tal modo que se um deles cai, por exemplo o assinalado com o símbolo k, ele choca com o seguinte, k+1" (idem).

O autor descreve este método do seguinte modo:

> Seja $A(n)$ uma afirmação referente a um inteiro n. Concluímos que $A(n)$ é verdadeira para cada $n \geq n_1$ se é possível:
>
> (a) Provar que $A(n_1)$ é verdadeira.
>
> (b) Provar que, suposta $\mathrm{A(k)}$ é verdadeira com k um inteiro positivo fixo$\geq n_1$, $A(k+1)$ é verdadeira. (p. 40)

Esta técnica de demonstração apresenta-se como a mais proeminente em matemática discreta (NCTM, 1991).

Demonstração geométrica

É aceite que estas provas têm um grande poder de convencimento (Kondratieva, 2009). Com efeito, o autor dá o exemplo da demonstração geométrica dos casos notáveis, nomeadamente o quadrado da soma.

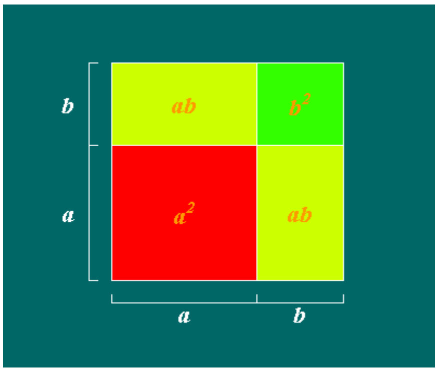


Figura 2 - Demonstração geométrica da soma do quadrado do binómio
(Retirado de http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.htm)

Nesta identidade algébrica, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, através da demonstração geométrica, é obtida a igualdade, usando uma partição de um quadrado de lado $a + b$ em quatro partes: dois quadrados, um de lado a e outro de lado b e dois retângulos $a \times b$.

A capacidade de construir provas requer certos conhecimentos e habilidades que devem ser dominadas pelo indivíduo. Num contexto geométrico, a existência da figura da situação problema suporta a construção de um modelo mental[4] que sustenta o raciocínio dedutivo. O modelo mental construído inclui, todavia, informações não-figurativas, (como a congruência de segmentos de determinada linha ou ângulos). "Uma primeira conclusão é derivada do modelo (na base do que poderia ser descrito como um processo de raciocínio indutivo em educação matemática)" (Ufer, Heinze, & Reiss, 2009, p. 240). Para concluir a demonstração, os argumentos usados têm de atender aos requisitos da comunidade matemática e assegurar que outro modelo semelhante não exista. Finalmente, a conclusão é incorporada no modelo mental da situação, como informação adicional e, se a demonstração não estiver terminada, o processo recomeça novamente (Ufer, Heinze, & Reiss, 2009).

[4] Um modelo mental não é igual a uma imagem mental gráfica simples como uma cópia de uma figura dada no problema geométrico. Normalmente, a figura dada é reestruturada com base no conhecimento dos indivíduos já num processo de perceção. A construção de um modelo mental é assim o primeiro passo para resolver um problema de demonstração (Ufer, Heinze, & Reiss, 2009).

Demonstração por exemplo generalizável

Este método de demonstração "consiste em demonstrar uma afirmação num caso particular, mas de tal modo que o leitor ficará convencido que essa prova será válida no caso geral" (Veloso, 1998, p. 371). Foi ainda usado por "ilustres matemáticos" (idem) no séc. XVII, por estes não possuírem "notações e linguagem matemática para tornar gerais as suas demonstrações" (p. 372).

Já fora da referência às técnicas de demonstração mais usadas, torna-se pertinente referir como Kondratieva (2009) distingue entre provas informais e formais. As primeiras envolvem uma grande quantidade de experimentação e intuição, as segundas tentam eliminar a intuição e enfatizam rigor. As primeiras refletem o processo de construção de um modelo mental, as segundas são uma manifestação da sua conclusão. Segundo Kondratieva (2009) na opinião de grandes matemáticos e professores tais como Klein, Poincaré, Polya, Halmos, antes da fase formal, tanto os alunos como investigadores experientes desenvolvem o seu trabalho em níveis informais e com base na intuição. Com efeito, no entender de Takáč (2009) o grau de formalismo da prova depende do grau de desenvolvimento dos alunos e das suas habilidades mentais.

Brunner, Reusser e Pauli (2011) referem a classificação de demonstrações sustentada por Wittmann e Muller (1988) diferenciando fundamentalmente três tipos de provas: formal-dedutiva; experimental e ilustrativa. A demonstração formal-dedutiva é baseada na dedução lógica de uma afirmação que resulta de uma anterior, passo por passo. Usa fórmulas matemáticas ou linguagem formal. Por conseguinte, as provas formais dedutivas não requerem apenas uma forma particular de pensar, exigem também um procedimento especial apoiado por uma terminologia técnica específica. A demonstração experimental contrasta com as do tipo formal-dedutiva e não são consideradas como provas em sentido estrito por permanecerem ligadas a exemplos. Mostram-se todavia extremamente eficazes no trabalho com estudantes mais jovens que revelam pouca competência neste âmbito. Para além disto, as abordagens experimentais são adequadas para gerar uma necessidade subjetiva de prova. A demonstração ilustrativa está relacionada com construções e operações que a tornam intuitivamente percetível.

Para os autores, estes três tipos de demonstração apresentam diferentes exigências para os alunos, ao mesmo tempo que oferecem diferentes abordagens, em função das competências apresentadas por estes. Um procedimento possível em termos didáticos pode começar por uma demonstração experimental ou ilustrativa e, em seguida, avançar para uma prova formal-dedutiva, impelindo portanto a um aumento no grau de abstração e simbolização.

Brunner, Reusser e Pauli (2011) apresentam as conclusões de um estudo suíço-alemão, onde o objetivo era descrever o apoio dos professores à demonstração matemática ao nível do ensino secundário. Este estudo que incidiu sobre 32 turmas veio mostrar que na grande maioria das turmas é implementada a prova formal-dedutiva. Para estes autores, os professores que integraram este estudo consideram este tipo de demonstração mais rigorosa e entendem que provar está necessariamente ligado a um procedimento estritamente formal-dedutivo.

Nas palavras de Hanna *et al.* (2009), as várias maneiras de provar, tais como a verbal, a visual ou a formal, podem constituir um fator de compreensão da demonstração em geral.

Síntese

É amplamente reconhecido que a demonstração é central na atividade dos matemáticos (Mejía-Ramos & Inglis, 2009; Bar-Tikva, 2009), sendo também aceite, para os autores consultados nesta revisão de literatura, que uma demonstração se apresenta como um encadeamento de proposições, onde se usa uma linguagem formalizada, carregada de rigor que, com princípios de raciocínio lógico-dedutivo universalmente aceites, permite alcançar a veracidade de uma afirmação.

Identificou-se claramente neste capítulo que a atividade de demonstrar inclui dois processos, não necessariamente independentes ou separados. O primeiro processo consiste em ações que sustentam a produção de uma conjetura. Essas ações começam geralmente com a exploração de uma situação de procura de regularidades, seguida pela formulação de conjeturas e a respetiva verificação de que o facto que se enuncia é verdadeiro. Num segundo processo, as ações estão concentradas na busca e organização de ideias do que virá a constituir uma demonstração, usando argumentos de natureza dedutiva (Perry *et al*., 2009).

Destacou-se a articulação entre demonstração e argumentação e o modo como a argumentação facilita a demonstração (Cramer, 2011; Barrieri, Durand-Guerrierii, & Blossie, 2009), devendo existir um contínuo entre estas duas atividades (Boero, 2011; Garcia López, 2011). Aceita-se como argumentos, tal como defende Douek (2009), os fundamentos apresentados a favor ou contra uma dada afirmação, consistindo uma argumentação na ligação lógica de um ou mais argumentos (Douek, 2009).

Relativamente às funções da demonstração em matemática, assume principal relevo o facto de os matemáticos terem sentido a necessidade, ao longo dos tempos, de que uma demonstração, para além de promover convencimento, tenha ainda a função mais importante de produzir esclarecimento.

Apresentou-se o modelo de De Villiers (2001), que expõe como principais funções da demonstração matemática, a verificação, a explicação, a sistematização, a descoberta, a comunicação e o desafio intelectual.

Relativamente ao terceiro tópico, foram referidos alguns tipos de demonstração. Com efeito, os diferentes tipos de demonstrações, ou técnicas de demonstrar, podem ter muitas funções pedagógicas e didáticas em educação matemática, devendo ser usados em função do desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Optou-se também por fazer a distinção entre demonstração formal e informal, bem como a diferenciação entre demonstração formal-dedutiva, experimental e ilustrativa, apresentada em Brunner, Reusser e Pauli (2011). Com efeito, numa primeira fase, as demonstrações que os alunos produzem são de natureza informal, devendo o grau de formalismo e abstração ir aumentando gradualmente.

CAPÍTULO III

A demonstração no ensino e aprendizagem da Matemática

Este capítulo encontra-se organizado em cinco secções, sendo a última uma síntese das principais ideias que foram apresentadas ao longo do mesmo. Inicia-se por uma referência à demonstração no currículo de Matemática, onde se destaca a sua importância no currículo da disciplina e a evolução das tendências curriculares da mesma. Na segunda secção faz-se uma abordagem sobre as funções da demonstração, mas agora no âmbito do contexto educativo, passando-se à terceira secção onde as práticas de ensino da demonstração são focadas. Destaca-se o ensino tradicional da demonstração, seguindo-se as perspetivas atuais sobre o ensino/aprendizagem da mesma. As investigações sobre o ensino da demonstração dão corpo à quarta secção, onde se focam as atividades facilitadoras da mesma, seguindo-se ainda algumas investigações sobre o ensino e a aprendizagem da demonstração, realizadas no estrangeiro e em Portugal.

A demonstração no currículo de Matemática

A importância da demonstração no currículo de Matemática

A demonstração constitui, para muitos alunos, uma dificuldade acrescida na disciplina de Matemática (Barbin, 1993b; Boavida, 2001; Rodrigues, 2008; Mejía-Ramos &

Inglis, 2009; Bar-Tikva, 2009; Ersoz, 2009; Kunimune, Fujita, & Jones 2009; Neto 2009; Cyr, 2011). Porque será então pertinente continuar a insistir no ensino da demonstração?

Segundo alguns autores (Veloso, 1998; Grabiner, 2009; Cyr, 2011) a prática de demonstrações desenvolve nos alunos o raciocínio. Nas palavras de Grabiner (2009), o processo de demonstrar ensina-nos a raciocinar logicamente, dado que a prova de um resultado matemático nos permite responder à pergunta: porque é que isso é verdade? As demonstrações permitem distinguir assim entre resultados verdadeiros e aqueles que parecem plausíveis, mas não são geralmente verdadeiros.

No entender de Cirillo (2009), nos últimos anos tem sido dada grande atenção à demonstração porque ela é fundamental para fazer e saber matemática e para comunicar o conhecimento matemático. Também para Veloso (1998) a prática da argumentação dos alunos, na defesa das conjeturas que formulam, apresenta-se como motor de desenvolvimento do discurso matemático e do modo de expressão do raciocínio. Todavia, quando os alunos entram no ensino básico

> já vêm dotados das estruturas básicas de raciocínio, as quais serão desenvolvidas naturalmente ao longo da escolaridade e sobretudo na vida. Não é necessário ter frequentado a escola e ter feito demonstrações na disciplina de Matemática para saber raciocinar perfeitamente. (Veloso, 1998, p. 360)

Assim, Veloso (1998) atribui a importância da prática das demonstrações matemáticas em geral e do raciocínio dedutivo em particular, aquilo que é um dos objetivos principais do ensino da Matemática, tanto no ensino básico como no secundário. Para o autor, o ensino da demonstração proporciona uma experiência matemática completa ao aluno no que há de mais essencial nesta ciência.

Assim, um dos propósitos do ensino da Matemática é "permitir aos alunos adquirir uma compreensão viva do que é a matemática, incluindo a sua relevância, evolução histórica e características no momento presente" (pp. 360 e 361). Também Santos e Rodrigues (2009) defendem ser desta forma que muitos autores justificam a importância de integrar a demonstração no currículo de Matemática. Na verdade,

> a matemática distingue-se de todas as outras ciências, em especial no modo como encara a generalização e a demonstração e como combina o trabalho experimental com os raciocínios indutivo e dedutivo, oferecendo um contributo único como meio de pensar, de aceder ao conhecimento e de comunicar (DEB, 2001, p. 59).

Evolução das tendências curriculares sobre demonstração

As *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar* (NCTM, 1991) perspetivam o ensino da Matemática baseado na resolução de situações problemáticas. "A resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de Matemática" (NCTM, 1991, p. 29).

Salientam também que fazer conjeturas e validá-las "é a essência do ato criativo que é fazer matemática" (NCTM, 1991, p. 97). Assim, colocar os alunos a fazer e testar conjeturas, sendo ou não encorajados pela tecnologia, promove o desenvolvimento do raciocínio matemático (NCTM, 1991). Apresentam o termo «*poder matemático*», como estando ligado a este tipo de capacidades.

Estas normas referem ainda a "Matemática como raciocínio", sendo este um dos cinco grandes objetivos para todos os alunos de todos os níveis de ensino. Segundo estas normas, "Matemática *é* raciocínio" (p. 37), devendo esta capacidade ser desenvolvida com a "vivência de experiências" (p. 40). Assim, "à medida que a profundidade e complexidade do assunto aumenta, deverá ser mantida a ênfase na relação entre a formulação de conjeturas e raciocínio indutivo, por um lado, e a importância da demonstração dedutiva, por outro" (NCTM, 1991, p. 172).

Na versão mais recente, Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), em substituição de "Matemática como raciocínio", presente em NCTM (1991), surge a norma "Raciocínio e Demonstração".

A mesma salienta quatro tópicos, os quais devem contribuir para que todos os alunos sejam capazes de: "reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da matemática; formular e investigar conjeturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticas; selecionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração" (p. 61). Concretamente, entre o 9.º e o 12.º ano de escolaridade, espera-se que os alunos apresentem um "repertório" (p. 407) alargado de técnicas de demonstração, que lhes permita formular argumentos diretos para a validação de uma conjetura. Os alunos deverão compreender que o facto de uma conjetura ser verificada para um número considerável de casos, não a torna sempre verdadeira assumindo o papel de prova, ao passo que a existência de um só contraexemplo conduz de imediato, à sua rejeição (NCTM, 2007).

Em Portugal, o programa de Matemática do 3.º ciclo homologado em 1991 (DGEBS, 1991), veicula como objetivo geral, o desenvolvimento do raciocínio, o que prevê, ao nível das capacidades/aptidões, "distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjeturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, factos conhecidos, propriedades e relações; discutir ideias e produzir argumentos convincentes" (p. 177). Nas orientações metodológicas, na parte relativa ao "Raciocínio", pode ler:

> Neste ciclo, continua a ser importante a exploração de situações que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio indutivo e são propostas outras em que o raciocínio dedutivo assume uma relevância cada vez maior: o aluno vai verificar conjeturas, justificar propriedades, fazer pequenas cadeias de raciocínio, defender um processo de resolução, eventualmente fazer uma demonstração, acedendo assim progressivamente a formas de pensamento rigoroso. (p. 195)

Este programa vigorou ainda conjuntamente com o Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001), no qual é explícita a importância dada à demonstração matemática. Com efeito, segundo este documento, ser matematicamente competente inclui, a "predisposição para (…) explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica" (p. 57) e inclui também "a conceção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior" (idem). Ser matematicamente competente, inclui ainda, entre outros aspetos, "a compreensão das noções de conjetura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições" (idem).

O atual programa de Matemática deste nível de ensino (ME, 2007) mais articulado com o DEB (2001) valoriza claramente o desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente e em particular a demonstração matemática.

No que diz respeito às "Finalidades do ensino da Matemática" são explicitadas duas, onde a primeira delas prevê o desenvolvimento nos alunos da "capacidade de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos" (ME, 2007, p. 2). No que diz respeito aos "Objetivos gerais da Matemática", observa-se que um deles, num conjunto de nove, aponta para que o ensino desta disciplina, nos três ciclos da escolaridade básica leve os alunos a ser capazes "de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos" (ME, 2007, p. 5). Deste modo espera-se que, os alunos sejam capazes de:

> -selecionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação;
>
> -reconhecer e apresentar generalizações matemáticas e exemplos e contraexemplos de uma afirmação;
>
> -justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam;
>
> -compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração;
>
> - desenvolver e discutir argumentos matemáticos;
>
> - formular e investigar conjeturas matemáticas. (ME, 2007, p. 5)

No desenvolvimento de "Temas matemáticos e Capacidades transversais", o programa destaca três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática, podendo ler-se:

> O raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjeturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas (…). (ME, 2007, p. 8)

Ainda em Portugal, no que diz respeito ao ensino secundário, uma das cinco finalidades da disciplina, presente no programa de Matemática publicado em 1997, passa por "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (DES, 1997, p. 3).

De acordo com as "Orientações metodológicas" prevê-se que neste nível de ensino, o aluno seja "solicitado com frequência a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjeturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (DES, 1997, p. 8). Na apresentação do programa, na parte dos "Objetivos gerais", dentro do tópico alusivo ao desenvolvimento do raciocínio e pensamento científico surge uma única referência à demonstração, sendo claro que, são objetivos gerais da disciplina "formular generalizações a partir de experiências e fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados" (p. 4).

A referência explícita à demonstração aparece no tema transversal - "Lógica e Raciocínio matemático". Assim, neste programa de Matemática, pode ler-se

> A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações corretas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). (DES, 1997, p. 36)

Emerge assim a distinção clara entre demonstrações matemáticas e demonstrações formalizadas, clarificando o modo como se encara a atividade de demonstrar neste nível de ensino.

No desenvolvimento deste tema surge a "Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração. Métodos de demonstração: método analítico, método sintético, método de redução ao absurdo, indução matemática. Contraexemplos" (idem). Nas correspondentes indicações metodológicas refere-se que estes métodos

> devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semidedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas. (idem)

Estas indicações metodológicas dão ainda ênfase ao hábito de pensar corretamente, que, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito. Refere-se ainda que "a indução matemática, como método de demonstração, deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo" (p. 36).

Neste tema geral, é ainda feita referência à demonstração no tópico "Reflexão sobre as heurísticas de Polya para a resolução de problemas" onde se refere que os temas do programa "são facilitadores de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjeturas e analisar contraexemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações" (DES, 1997, p. 37). O documento veicula ainda a importância de abordar a diferença entre raciocínio plausível e raciocínio demonstrativo.

Outras pontuais referências aparecem ainda neste programa. Na parte correspondente ao 12.º ano, no tema II, no âmbito das "Funções deriváveis. Regras de derivação" refere-se explicitamente a obrigatoriedade de proceder à "demonstração da regra da soma e do produto" (p. 33) e também é feita a referência à demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.

Atualmente, neste nível de ensino, encontram-se em vigor os programas de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, Matemática B e Matemática A homologados em 2001 e 2002. Observa-se que estes programas não atribuem igual relevo à demonstração. Com efeito, no programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (DES, 2001c), não se encontra qualquer referência à demonstração. No programa de Matemática B (DES, 2001b; 2002b; 2002d), tal como no programa de Matemática homologado em 1997, na apresentação do mesmo, em "Objetivos e competências gerais", no tópico alusivo ao desenvolvimento do raciocínio e pensamento científico surge uma única referência à demonstração. Assim, explicita-se a necessidade do aluno formular generalizações a partir de experiências, validar conjeturas e fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.

Esta referência aparece também no programa de Matemática A (DES, 2001a; 2002a, 2002c) mas além desta, este programa apresenta muitas outras referências, indicadoras de uma preocupação clara no desenvolvimento de capacidades de argumentar e demonstrar. Efetivamente, todas as referências presentes no programa de Matemática publicado em 1997, marcam presença neste novo programa. Continua a ser uma finalidade da disciplina "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (DES, 2001a, p. 3).

No tema transversal - "Lógica e Raciocínio", no que diz respeito aos métodos de demonstração, este programa acrescenta que "a abordagem de algumas demonstrações diretas e indiretas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) é inevitável" (p. 21). Assumem também grande importância as demonstrações utilizando contraexemplos.

No programa de Matemática A de 11.º ano (DES, 2002 a) no tópico "Limites de sucessões e convergência", surge também uma referência à demonstração, quando se pede explicitamente a demonstração do teorema da unicidade do limite, note-se que no programa publicado em 1997, tal referencia não era feita.

No programa de Matemática A de 12.º ano (DES, 2002 c), outras alusões aparecem ainda. Relativamente ao primeiro tema refere-se que as "Probabilidades" permitem aos estudantes uma "melhor compreensão do que é a atividade demonstrativa em Matemática" (p. 1). Por último, no tema III, "Trigonometria e números complexos", é feita a referência à demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos, aparecendo ainda a indicação de que "o recurso a programas de geometria dinâmica pode ser motivadora para a realização de demonstrações" (p. 8).

As funções da demonstração no contexto educativo

Tradicionalmente, do ponto de vista educativo, a função da demonstração incidia sobretudo na vertente de verificação, havendo mesmo alguns autores que definem demonstração à custa desta função (De Villiers, 2001).

Os resultados da investigação que Rodrigues (2008) realizou, apontam igualmente neste sentido, mostrando que "a certeza sentida pelos alunos proveniente da demonstração dedutiva evidencia que esta é encarada pelos mesmos na sua função verificativa" (p. 786).

Boavida (2001) partilha da mesma opinião, ao afirmar que a ação de demonstrar apareceu associada "à atividade de produção e validação de uma conjetura cuja validade não era de imediato, óbvia" (p. 13). Nas palavras da autora, para além da função de convencimento, uma boa demonstração deve ainda produzir compreensão, sendo este o "duplo papel da demonstração que hoje se valoriza" (idem). Também nas palavras de Hanna *et al.* (2009) a demonstração em matemática é mais usada na sala de aula para promover a compreensão.

Se as tarefas envolverem a formulação de conjeturas, "a principal função da demonstração na aula de Matemática é a de explicação, promovendo uma compreensão dos fundamentos matemáticos" (Rodrigues, 2008, p. 781).

Para esta investigadora, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, duas capacidades transversais a todo o currículo, conjugam-se no momento em que a demonstração assume a sua função explicativa, resultando desta conjugação maior compreensão matemática. Com efeito, "estas três vertentes – compreensão, demonstração explicativa e comunicação – estão intrinsecamente relacionadas e são mutuamente constitutivas" (idem).

As funções explicativa e comunicativa decorrem do trabalho desenvolvido numa única etapa, onde "os alunos (a) comunicam, explicam os raciocínios verificativos e de descoberta e depois registam algebricamente o discurso narrativo anterior (…); ou (b) descobrem, verificam, comunicam e explicam no decurso e na sequência da própria manipulação algébrica" (p. 787).

Para Davis e Hersh (1995), um dos objetivos principais da demonstração é "convencer os estudantes, através da razão, da psicologia e da intuição, sobre a verdade de certas afirmações" (p. 260). Com efeito, o interesse em possuir uma demonstração de uma determinada conjetura reside "em poder pôr a turma de acordo com um determinado resultado" (Barbin, 1993b, p. 13).

De Villiers (2001) defende que se deve iniciar os alunos nas várias funções da demonstração, numa sequência que se apresenta na figura 3.

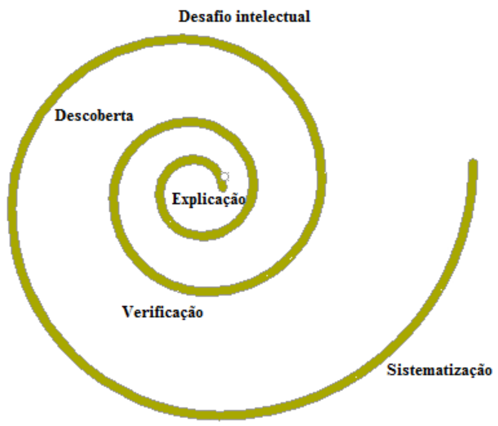


Figura 3 - Introdução das funções de demonstração
(Adaptado de De Villiers, 2001, p. 35)

No seu entender, as funções de demonstração anteriormente introduzidas devem ser retomadas e ampliadas, valorizando a função de descoberta, onde se deve dar ênfase aos aspetos relacionados com a comunicação.

A função de verificação deverá ficar restringida a resultados em que os alunos mostrem realmente ter dúvidas, sendo também claro que alguns alunos podem não sentir a demonstração como um desafio intelectual, embora admitam que tal pode acontecer para outros. A função de sistematização deve marcar presença num estádio avançado de prática da demonstração (De Villier, 2001).

De acordo com Hanna *et al.* (2009) a demonstração assume o seu papel de sistematizar quando os resultados não são descobertos através da experimentação e aí o raciocínio dedutivo pode muitas vezes levar diretamente a novas conclusões e novas descobertas por meio de generalização ou especialização. Neste contexto, a prova assume um papel de sistematizar, ligando definições, axiomas e teoremas numa cadeia dedutiva.

Práticas de ensino da demonstração

Ensino tradicional da demonstração

O problema dos alunos com a demonstração prende-se com o modo como tendencialmente se tem implementado o seu ensino (Barbin, 1993b; Boavida, 2001), sendo visível que as metodologias usadas tradicionalmente exercem ainda alguma influência nas atuais práticas escolares (Boavida, 2001). Na perspetiva de Barbin (1993b), no "ensino tradicional não há propriamente aprendizagem da demonstração" (p. 11), sendo o professor que, para mostrar aos alunos o que é uma demonstração, a escreve no quadro. Assim, quem faz as demonstrações é, na "maior parte das vezes, o professor, provando, quase sempre com recurso a um aparato estranho e misterioso aos olhos dos alunos" (Boavida, 2001, p. 11), o que é, frequentemente, óbvio para eles.

A demonstração aparece como um produto. "A racionalidade que pressupõe a produção de uma demonstração está já supostamente presente na cabeça dos alunos, visto que não se vê como ele a poderá adquirir por mimetismo, olhando o professor a escrever as demonstrações" (Barbin, 1993b, p. 11).

Sendo que é o professor a fazer as demonstrações, do aluno espera-se que as consiga reproduzir. Como nota Boavida (2001), as demonstrações que os alunos repetem, constituem apenas "uma prova do seu saber e não a prova da veracidade dos enunciados" (p. 11), dado que a verdade já está estabelecida. Os alunos não veem necessidade de demonstrar as proposições que se enunciam nem "viam a demonstração como um meio de progredir na compreensão de um problema" (idem).

De acordo com Schwartz e Yerushalmy (1987), os professores ensinam matemática como se os alunos nunca venham a ter a possibilidade de fazer matemática nova. A natureza deste ensino baseia-se na presunção de que, "quando um professor pede uma demonstração de um teorema, os alunos já assumem que o mesmo é verdadeiro e que é possível encontrar uma demonstração para ele" (p. 525). Esta postura vem assim ridicularizar a "natureza do pensamento matemático e o modo como a matemática é feita" (idem), onde a atividade central para criar matemática nova, reside na criação e demonstração de conjeturas. Na realidade, segundo Boavida (2001), no ensino tradicional "os aspetos ligados à observação, experimentação e formulação de conjeturas eram, na grande maioria dos casos, inexistentes" (pp. 11 e 12).

Nesta metodologia de ensino, muitos alunos não percebem qual o sentido que pode ter o texto apresentado pelo professor. Efetivamente, nem imaginam que, "para demonstrar é necessário pensar, experimentar, rasurar e enganar-se" (Barbin, 1993b, p. 11). Por não compreenderem o que é demonstrar, muitos alunos acabam por se desmotivar e "retiram-se deste jogo" (idem). Sendo certo que a demonstração convence os alunos que compreendem que se trata de estabelecer verdades, a maioria "não será esclarecida nem interessada" (idem).

Relativamente ao insucesso que os alunos experienciavam, Boavida (2001) refere ainda que, no ensino tradicional da demonstração, "tudo se passava como se por volta dos treze anos (…), se revelasse aos alunos que só a demonstração, em matemática, é portadora de certezas" (p. 12) e se obrigassem os alunos "a entrar num novo jogo" (idem). Estes passavam então a ser submetidos a uma nova racionalidade, "virando as costas" (idem) a um tipo de saber que lhes tinha permitido lidar com a Matemática até então.

De Villiers (2001) afirma que as dificuldades reveladas pelos alunos na elaboração de demonstrações residem na sua falta de motivação[5] e compreensão do papel da demonstração e não tanto na falta de competência para raciocinar logicamente. O autor fundamenta a sua posição, apoiando-se em "estudos recentes" (p. 31) que, contrariando Piaget, "mostram que crianças muito novas são inteiramente capazes de fazer raciocínios lógicos em situações reais e com significado para elas" (De Villiers, 2001, p. 31). Também Boavida (2001) refere a existência de estudos que mostram que os alunos, mesmo quando o seu pensamento se encontra ao nível das operações concretas, são capazes, usando materiais manipuláveis, de realizar ações, tendo por base o raciocínio dedutivo.

As experiências passadas dos professores, aos quais, enquanto alunos, poucas demonstrações lhes eram exigidas e os materiais curriculares, podem ainda constituir obstáculos ao ensino da demonstração. Com efeito, verifica-se que os manuais didáticos convencionais dão ênfase à aplicação de teoremas e não à sua demonstração, pelo que não direcionam o raciocínio dos alunos para o desenvolvimento destas competências (Cirillo, 2009).

[5] A motivação é uma parte necessária a qualquer atividade educativa. Isto ocorre também para a aprendizagem das provas. Os alunos têm de sentir a necessidade de demonstrar uma dada afirmação. Takáč (2009) fala de motivação intrínseca e extrínseca. A motivação intrínseca acontece quando o aluno se quer convencer da verdade de uma afirmação, ou quer convencer os outros. A motivação extrínseca acontece quando o professor exige que uma dada afirmação seja demonstrada. A motivação intrínseca representa a melhor condição para o desenvolvimento de habilidades nos alunos para pesquisar corretamente os argumentos. A motivação extrínseca é a melhor condição para o desenvolvimento de habilidades verbais.

Segundo Cyr (2011) as dificuldades encontradas com a produção de demonstrações são múltiplas. Entre os problemas observados, dois parecem preocupar os especialistas na investigação em educação matemática. O primeiro diz respeito à dificuldade dos estudantes para entender completamente o fundamental da estrutura dentro de raciocínio dedutivo, porque quando escrevem demonstrações, os alunos muitas vezes erram na sequência das inferências que constituem a demonstração. Todos veem nela um discurso, uma linha de argumentação, onde as proposições são simplesmente adicionadas e organizadas de acordo com a sua relevância.

O segundo problema, ligado ao primeiro, reside na forma como os alunos do ensino secundário percebem e utilizam as representações das formas geométricas para escrever provas. Ao nível da escola elementar, a validação formal de demonstrações geométricas implica trabalho empírico sobre figuras, enquanto, no ensino secundário esta baseia-se na teoria e em sistemas axiomáticos específicos. Assim, o modo como os alunos do ensino secundário são levados a raciocinar, onde a abordagem dedutiva exclui de todo qualquer conclusão gerada a partir de medições e observações geométricas de figuras, parece gerar dificuldades para os alunos. Segundo este autor, esta ideia é suportada por investigação de vários países tais como Canadá, Estados Unidos e França.

Perspetivas atuais sobre ensino/aprendizagem da demonstração

As orientações atualmente em vigor apontam caminhos diferentes para o ensino e aprendizagem da demonstração.

Barbin (1993b) refere a existência de investigações que se têm realizado no sentido de tentar ultrapassar as deficiências detetadas no ensino tradicional da demonstração. Menciona especificamente o I.R.E.M. de Paris-Nord, onde as investigações efetuadas a este propósito questionam também como deve ser a aprendizagem da demonstração. Segundo a autora, o objetivo é claro: deve ensinar-se os alunos a demonstrar. Destaca também os trabalhos de Dominique Gaud e Jean-Paul Guichard (investigadores no I.R.E.M., como já se referiu) que se encontram nesta linha de pensamento para os quais os alunos aprendem a demonstrar demonstrando, e não apenas vendo como se faz.

Com efeito é indispensável notar que, em termos educativos, é mais significativo para o aluno levá-lo a argumentar e tentar provar uma conjetura que o próprio formulou sozinho ou em grupo, do que propor-lhe a memorização de demonstrações de teoremas que lhe são completamente alheios (APM, 2009).

Durante muitos anos a aprendizagem da demonstração aparece associada ao ensino secundário ou à parte final do terceiro ciclo do ensino básico (Boavida, 2001), continuando presente a ideia de que, a aprendizagem da demonstração

> se pode iniciar, de repente, como uma nova forma de racionalidade que apenas é acessível a alunos, mais velhos, que já adquiriram a maturidade lógica necessária para compreenderem definições abstratas, usarem o simbolismo matemático distinguirem condições necessária de condições suficientes ou hipótese de tese, axioma, teorema ou corolário. (Boavida, 2001, p. 14)

Na perspetiva da autora, esta via não é a mais adequada "para que todos os alunos possam aprender a demonstrar e sintam necessidade e gosto por esta atividade" (idem). De facto, os alunos deverão construir "ao longo da escolaridade uma ideia cada vez mais correta do que é uma demonstração – através da prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" (Veloso, 1998, p. 374).

A aprendizagem da demonstração deve ser transversal a todo o currículo, "não devendo ser tratada como tópico separado dos restantes conteúdos curriculares, já que constitui um instrumento importante para a compreensão da matemática" (Rodrigues, 2008, p. 258). Com efeito, "a capacidade de convencer os outros da validade das nossas asserções e conjeturas deve ser desenvolvida de forma permanente" (APM, 2009, p. 47). Deste modo a aprendizagem da demonstração "vai sendo feita por etapas, ao longo de um percurso" (Boavida, 2001, p. 14).

A argumentação e a prova assumem características diferentes ao longo de toda a escolaridade (APM, 2009), devendo as situações a explorar tornar-se progressivamente mais complexas (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Nos primeiros anos de escolaridade, o raciocínio que os alunos desenvolvem é muito informal, comparativamente com a "dedução lógica usada pelos matemáticos" (NCTM, 2007, p. 64).

No primeiro ciclo, colocando o aluno a fazer explorações sobre a multiplicação de diversos números, ele pode observar que, sempre que um dos fatores é par, também o produto é par. Com base nesta observação "pode fazer uma generalização a partir dos casos concretos que observou, estando deste modo a conjeturar uma regra" (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, para.4). Todavia, para

> ter a certeza ou para compreender por que razão as coisas se passam desse modo, precisa de encontrar uma explicação lógica: se um dos números é par, ele é um múltiplo de 2; então o seu produto por outro número qualquer será ainda um múltiplo de 2, logo par. (idem)

Surge assim uma justificação convincente para a aceitação da regra descoberta.

O aluno pode ainda ser conduzido para a testagem de conjeturas falsas: se pensar que o mesmo sucede com a soma de dois números e experimentar com vários casos, rapidamente surgirá um contraexemplo que o leva a rejeitar a hipótese que tinha formulado (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

Com efeito, os alunos conjeturam quando exprimem relações observadas e padrões identificados (Rodrigues, 2008), e generalizam quando preveem o que acontece para uma larga classe de casos, a partir de casos particulares (Rodrigues, 2008; Cardoso 2010), sendo esta uma atividade muito importante para a consolidação do conhecimento (Davis & Hersh, 1995).

Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), os exemplos acima apresentados abarcam aspetos fundamentais da atividade matemática, tais como explorar, procurar generalizações, fazer conjeturas, raciocinar logicamente. Assim, a

> ênfase nestes aspetos do raciocínio matemático, ao longo dos primeiros anos de aprendizagem, pode desempenhar um papel essencial para que a criança se torne matematicamente competente, a um nível apropriado à sua idade e grau de escolaridade, e ao mesmo tempo esteja melhor preparada para contactar com outros aspetos da Matemática. (para.8)

À medida que os alunos evoluem no domínio das técnicas da demonstração matemática e da justificação, tornam-se mais competentes na construção de argumentos dedutivos, esperando-se que, no final do ensino secundário, sejam capazes de compreender e produzir demonstrações matemáticas. Assim, neste nível de ensino, devem ser capazes de progredir na dedução rigorosa e lógica de conclusões, partindo de hipóteses iniciais (NCTM, 2007).

Nas palavras de Boavida (2005), levar os alunos a compreender o valor e a necessidade da prova, implica o seu sistemático envolvimento em atividades desta natureza, sendo que uma maneira de promover essa compreensão passa por:

> (a) tornar, persistentemente, visível para os alunos que uma conjetura não provada tem um caráter provisório; (b) acompanhar a apresentação de ideias matemáticas que podem ser provadas, mas que por alguma razão não o são, por uma explicação que permita destacar que a prova não foi feita e porque não o foi; (c) aproveitar as situações que surgem no decurso das interações da aula para salientar as limitações do raciocínio indutivo; e (d) pôr a ênfase no valor da prova enquanto meio de iluminar o porquê da validade ou não validade de uma conjetura, sem esquecer o seu papel como instrumento de validação que, nalguns casos, pode ser, aos olhos dos alunos, mais relevante. (Boavida, 2005, pp. 903 e 904)

Investigação sobre o ensino da demonstração

Atividades facilitadoras da demonstração

A investigação tem demonstrado que os alunos apresentam dificuldades na demonstração e os seus pontos de vista sobre a finalidade e o papel de provar são muito limitados (Ersoz, 2009). Bieda (2009) apresenta resultados de um estudo revelador de que os estudantes do ensino médio produziram em geral poucos argumentos em resposta a tarefas relacionadas com a prova. Também Brunner, Reusser e Pauli (2011) referem vários estudos empíricos (cf. Healy & Hoyles, 1998; Reiss, Klieme, & Heinze, 2001) onde se montra que poucos alunos são capazes de dar razões matemáticas para provar um determinado facto.

Com efeito, em termos educativos, podem ser implementados alguns tipos de tarefas que venham facilitar a aprendizagem da demonstração por parte dos alunos.

Nas palavras de Boavida (2001),

> a realização de experiências e a análise de casos particulares, a procura de invariantes com vista à generalização, a formulação e exploração de conjeturas, (…), a análise de exemplos e contraexemplos, a revisitação de conjeturas formuladas para analisar se se mantêm noutros contextos e as tentativas de avaliação e validação das conjeturas que se produzem" (pp. 14 e 15),

constituem atividades promotoras da demonstração.

Whiteley (2009) defende a importância dos alunos trabalharem com exemplos e contraexemplos, devendo ser treinados a verificar se um determinado caso particular faz uma afirmação verdadeira ou falsa. Sem este treino, trabalhar com provas formais torna-se um exercício estranho no formalismo carregado de abstração, em vez de ser um suporte para trazer sentido às conexões matemáticas. Com efeito, os contraexemplos provocam o refinamento de uma conjetura e ampliam o raciocínio.

Takáč (2009) enuncia três tipos de tarefas que desenvolvem o espírito crítico nos alunos e consequentemente ajudam a sentir a necessidade de demonstrar: tarefas que parecem ter uma solução fácil, mas depois de lidar com o problema de forma exaustiva, têm uma solução diferente, talvez, surpreendente; tarefas que podem ser resolvidas de forma intuitiva, mas os alunos não têm a certeza da solução correta e tarefa que apresentam várias soluções possíveis e os alunos têm de decidir (e confirmar), qual é a correta.

Por outro lado, Perry *et al.* (2009) apresentam também um conjunto de tarefas que, segundo os autores, têm igual objetivo: (a) determinar se um conjunto específico de postulados, definições ou teoremas permite a validação de uma dada proposição; (b) partindo de uma sequência ou plano ordenado de afirmações para provar uma dada proposição, escrever uma prova completa da proposição; (c) produzir uma sequência ordenada de afirmações que delineiam um caminho possível para a demonstração de uma proposição e (d) analisar criticamente uma prova escrita no quadro por um ou dois estudantes.

Em relação à análise crítica de uma demonstração, Durand-Guerrier e Arsac (2009) salientam que este tipo de tarefa é parte do trabalho dos matemáticos, mas também de professores e alunos. Na implementação de uma tal análise, de acordo com as três principais funções apresentadas por estes autores e já referidas no ponto dois do segundo capítulo, importa perceber entre outros aspetos, quais são as relações entre os dados e as hipóteses; quais os objetos que são introduzidos ao longo da prova e qual o seu papel; qual o processo que permite a passagem do que se quer provar para os dados e as hipóteses. Segundo estes autores o desenvolvimento da capacidade de analisar as provas poderá ajudar os alunos no processo de provar.

No entender de Alcock (2009) a construção de uma demonstração é dificultada pelo facto de os alunos não compreenderem bem o teorema ou a propriedade que querem demonstrar. Com efeito, incutir nos alunos o hábito de em primeiro lugar perceberem exatamente o que se pretende provar, facilita este processo.

Veloso (1998) aponta a realização de atividades de investigação como sendo um contexto fértil para a formulação de conjeturas e desenvolvimento de argumentações. Com efeito, "para que a experiência matemática dos alunos englobe a prática da demonstração, no que tem de mais significativo, é essencial que empreendam investigações" (Veloso, 1998, p. 370). Destaca-se que, para Brocardo (2001) o processo investigativo envolve características próprias que compreendem diversas fases: (a) exploração inicial de modo a explicitar a situação proposta e clarificar o foco da investigação; (b) formulação de questões produtivas e interessantes; (c) formulação e teste de conjeturas; (d) desenvolvimento de uma atividade não linear e for fim (e) prova de conjeturas que parecem ser verdadeiras. Ambientes ricos em questões do tipo "por que é que pensas que isto é verdade?" e "porquê?" ajudarão os alunos a compreender a necessidade de justificar as suas afirmações (NCTM, 2007, p. 61).

Com efeito, estratégias de ensino baseadas na exploração, ajudam os alunos a desenvolver competências no âmbito das demonstrações (Bar-Tikva, 2009). Também Boavida (2001) segue esta linha de pensamento. Atividades como explorar, investigar, generalizar, conjeturar e argumentar, intimamente relacionadas com a atividade de demonstrar, devem ser experienciadas de forma articulada pelos alunos (Boavida, 2001).

Nas palavras de Dominique Gaud e Jean-Paul Guichard, também facilita a aprendizagem da demonstração a separação destes dois momentos: "o da investigação e o da redação da demonstração" (Barbin, 1993b, p. 12), conseguindo reduzir-se aquilo que os investigadores consideram ser uma dupla dificuldade da demonstração: a lógica e a redação.

Não existe todavia unanimidade relativamente a este aspeto. Contrariando esta linha de pensamento, Barbin (1993b) apresenta a posição de Nicolas Balacheff, investigador do Institut d´Informatuque et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), para o qual não se reveste de pertinência o facto de separar o momento da redação da solução de um problema da própria resolução.

Dando ênfase à dificuldade sentida pelos alunos na redação das suas demonstrações, Rodrigues (2008) apresenta a forma narrativa como sendo aquela "com que naturalmente os alunos argumentam (…), parecendo existir uma continuidade entre as formas como pensam, como falam entre si e como registam, por escrito, as suas demonstrações" (p. 765). Ainda de acordo com a autora,

> o registo de uma demonstração narrativa correta implica algum grau de rigor no uso do vocabulário específico da matemática, e os alunos têm alguma dificuldade em explicitar com os termos adequados o que estão a pensar. Isto é, os alunos podem desenvolver um raciocínio dedutivo completamente correto e apresentar um registo escrito com falhas e imprecisões relativamente às expressões e aos termos usados. (p. 767)

Nicolas Balacheff enfatizando o momento da redação, salienta que, "redigir a solução de um problema conduz à sua análise e portanto a um eventual pôr em causa (…)" (Barbin, 1993b, p. 12), surgindo também esta atividade como facilitadora da demonstração. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) observam que o registo escrito ajuda a clarificar as ideias e a estabelecer consensos quanto ao trabalho desenvolvido, facilitando também o momento de discussão do trabalho.

Com efeito deverá existir um momento de discussão do trabalho desenvolvido. Em contexto da sala de aula, é extremamente pertinente que os alunos comuniquem as conjeturas que formulam e o processo que acompanha a refutação ou demonstração das mesmas. Segundo Cardoso (2010), o ato de descreverem em pormenor as suas estratégias e porque é que elas funcionam, promove nos alunos a compreensão e, neste ato, os alunos oradores fornecem aos colegas um modelo de pensar, o que se revela também igualmente importante.

As discussões coletivas são um momento importante no estabelecimento do conhecimento matemático na turma (Ponte & Canavarro, 1997; Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003). As "discussões podem servir para criar consensos e construir generalizações a partir de trabalhos realizados pelos diversos grupos. (…) E podem, naturalmente, envolver toda a turma no aprofundamento de alguma ideia ou noção que o professor quer esclarecer" (Ponte & Canavarro, 1997, p. 109).

Assim, evidenciando "o caráter social da demonstração" (Veloso, 1998, p. 372), os alunos tentam, como matemáticos, demonstrar para os seus pares e para o professor a validade das suas afirmações (Veloso, 1998). Em NCTM (2007) é explícito que "os alunos necessitam de oportunidades para testar as suas ideias com base no conhecimento compartilhado na comunidade matemática da sala de aula, de modo a verificarem se são compreendidos e se são suficientemente convincentes" (p. 67). Devendo os professores "criar uma comunidade na qual os alunos se sintam livres de expressar as suas ideias" (idem). Assim, na perspetiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003),

> a fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos (…) desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (p. 41)

Nesta fase da discussão, acontece por vezes que, "o aluno convence os seus colegas, mas não o professor" (Veloso, 1998, p. 372), donde, o autor destaca a importância dos alunos compreenderem "que a 'autoridade matemática' na sala de aula não é a autoridade pessoal do professor mas a habitual em matemática – a demonstração" (p. 372).

Pode por vezes acontecer que o aluno formule uma conjetura que não consegue demonstrar com os conhecimentos de que dispõe (Boavida, 2001). Neste sentido, Veloso (1998) refere que o esforço que os alunos desenvolvem para demonstrar as conjeturas que formulam, por vezes resulta em " 'verdadeiras' demonstrações" (p. 370), noutros casos, "apenas se compreenderão as ideias que estão por trás de possíveis demonstrações, mas as capacidades dos alunos e do professor não são suficientes para as organizar efetivamente" (idem), podendo acontecer que, exista a "convicção 'experimental' dos resultados, mas nem os alunos nem o professor conseguem vislumbrar como poderiam ser demonstrados" (idem). Neste sentido é importante que os professores façam notar, que, por vezes, "uma demonstração rigorosa exige mais conhecimentos do que aqueles que a maioria dos alunos do secundário possui" (NCTM, 2007, p. 63).

Em qualquer dos casos, esta situação continua a ter valor educativo em si mesma, pois permite que os alunos conheçam melhor a atividade dos matemáticos (Veloso, 1998; Boavida, 2001), para além de permitir mostrar aos alunos que também no trabalho dos matemáticos, a formulação de conjeturas e a sua demonstração, não andam a par e passo (Boavida, 2001). A este respeito temos como exemplo o "Teorema das Quatro Cores", que foi enunciado pela primeira vez em 1852, tendo a comunidade matemática assistido à sua demonstração em 1976.

Veloso (1998) salienta ainda que o importante é que não se deixe de abordar determinadas investigações, pelo facto de não se poderem demonstrar os seus resultados. Destaca que, a par das demonstrações realizadas pelos alunos, lhes devem ser apresentadas, pelo professor, demonstrações de resultados importantes e com relevo na história da matemática e aponta duas finalidades para esta apresentação: (i) "contribuir para a compreensão da natureza da matemática" (p. 373) devendo ser escolhidas demonstrações de afirmações não evidentes que conduzam à aquisição de novo conhecimento ou novas explicações para esse conhecimento; e (ii) "analisar processos de prova não habituais na linguagem corrente e característicos da demonstração matemática – por exemplo, a redução ao absurdo" (p. 373).

O autor salienta ainda a importância de serem apresentadas pelo professor mais do que uma demonstração do mesmo teorema. Esta prática permite que os alunos fiquem com uma melhor perceção da criatividade própria da investigação matemática e da sua evolução histórica. Veloso (1998) apresenta como exemplo a demonstração de Euclides do teorema de Pitágoras e a demonstração moderna desse mesmo teorema feita no *Geometer's Sketchpad*, utilizando transformações geométricas.

Estudos sobre o ensino e a aprendizagem da demonstração em Matemática

Muitas investigações se têm debruçado sobre o ensino e a aprendizagem da demonstração em Matemática, referenciando as dificuldades experienciadas pelos alunos na produção das mesmas. De seguida daremos conta de algumas dessas investigações, realizadas tanto em Portugal como no estrangeiro.

Boavida (2005) realiza uma investigação onde um dos objetivos consiste em analisar o trabalho de duas professoras, orientado para o envolvimento dos seus alunos em atividades de argumentação em matemática. A este respeito, refere a investigadora que, no início do estudo, os alunos não compreendiam a importância da prova. Assim, para inverter esta realidade e com vista a desenvolver nos alunos capacidades de argumentação, as professoras das turmas envolvidas, estabelecendo os significados de conjetura, contraexemplo e prova, conduziram os seus alunos para atividades de formulação, prova de conjeturas e análise coletiva das mesmas. Este estudo mostrou haver dificuldades em fazer emergir nos alunos o sentido de que a verificação de uma conjetura por alguns casos não é uma prova, que é necessário provar todas as conjeturas, inclusivamente aquelas que parecem ser verdadeiras e "resistiram a tentativas de refutação" (p. 903), pese embora esta dificuldade tenha sido atenuada à medida que o estudo avançava. No decorrer do estudo notou-se mesmo haver uma melhoria, por parte dos alunos, na produção de provas. Assim, o presente estudo refere que "o envolvimento dos alunos em atividades argumentativas associadas à formulação de conjeturas e à avaliação da sua plausibilidade, pode favorecer a aprendizagem da prova" (p. 906).

Rodrigues (2008) apresenta um estudo onde o objetivo principal é identificar as formas como os alunos validam os resultados matemáticos. Os resultados da presente investigação mostram que os alunos se apoiam em exemplos particulares, não só para formularem as suas conjeturas, mas também para as demonstrarem. Com efeito, na fase da formulação das conjeturas os exemplos permitem descobrir propriedades matemáticas, "sendo esta fase assumida pelos alunos como esquema demonstrativo empírico indutivo" (p. 763). Aquando da evolução para esquemas demonstrativos dedutivos, os exemplos permitem que "os objetos matemáticos se desliguem gradualmente da sua materialidade e se tornem abstratos" (idem). Verificou-se que, na produção das suas demonstrações, os alunos usaram predominantemente a forma narrativa e informal, onde experienciaram mais sucesso do que quando enveredavam pela forma algébrica de caráter formal.

Kunimune, Fujita e Jones (2009) relatam os resultados de um conjunto de projetos de investigação realizados no Japão sobre o ensino e aprendizagem da prova, especificamente em geometria, apresentando dados de 418 japoneses do ensino secundário inferior e sugestões de como incentivar os alunos na compreensão da prova dedutiva em geometria. Os autores pretendem compreender os alunos a respeito de dois aspetos da prova: generalidade da prova e sua construção. Por um lado os alunos devem compreender a generalidade da prova em geometria, a universalidade e generalidade dos teoremas geométricos, as funções das figuras, a diferença entre uma prova formal e uma verificação experimental. Por outro lado é importante também que os alunos aprendam como construir "argumentos dedutivos da geometria; definições, axiomas, hipóteses, provas, teoremas, circularidade lógica, sistemas axiomáticos e assim por diante, isto é que aprendam a construir provas em geometria" (Kunimune, Fujita, & Jones, 2009, p.

257). Considerando estes dois aspetos, os autores definiram três níveis de compreensão (Nível 1, 2 e 3), onde os alunos foram incluídos em função do seu grau de convencimento com as verificações experimentais. Assim o nível 1 inclui os alunos que consideram as verificações experimentais suficientes para provar a veracidade de uma afirmação geométrica. As descobertas indicam que uma larga percentagem dos alunos do "ensino secundário inferior" continuam a considerar que as verificações experimentais são suficientes para demonstrar que uma afirmação geométrica é verdadeira, situando-se assim no nível 1, mesmo depois de serem submetidos a um ensino intensivo de como proceder com a demonstração de propriedades geométricas. No entender destes autores, a questão chave é que os alunos não compreendem porque é que têm de demonstrar propriedades quando a verificação experimental lhes parece suficiente. Nestes casos, para eles, uma demonstração formal não é necessária. Segundo estes autores é necessário estabelecer em sala de aula discussões e perturbar as crenças dos estudantes sobre a verificação experimental fazendo com que a prova dedutiva ganhe significado para eles.

Ersoz (2009) baseando-se em vários estudos (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Harel & Sowder, 1998), evidencia que a pesquisa tem mostrado que as primeiras tentativas de demonstração por parte dos alunos são de natureza empírica. Refere um estudo de grande escala realizado por Senk (1985) onde se constatou que, durante um ano letivo, dos alunos a quem foi ensinada a demonstração, apenas 30% (aproximadamente) chegaram a um nível de domínio de 75% na prova escrita, enquanto 29% da amostra não poderia sequer escrever uma única prova válida. Ersoz (2009) refere ainda o estudo de Chazan (1993) e outro realizado fora dos EUA por Porteous (1990) onde se evidencia que os alunos atribuem o estatuto de conclusão às conjeturas que formulam, não sentindo necessidade de as demonstrar. Com efeito, este último concluiu que 85% dos estudantes desse estudo aceitam a verdade de uma declaração baseada em fundamentos empíricos.

Cyr (2011) apresenta os resultados de um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio dedutivo dos alunos, onde se salienta que o raciocínio dedutivo é um processo exigente que impõe tempo e experiência para ser exercido corretamente. Foi seguida uma sequência de oito lições, a fim de desenvolver as habilidades primárias da demonstração escrita no contexto geométrico. Esta sequência, ao longo de um período de quatro meses, foi testada com duas turmas de 26 alunos de onze e doze anos a partir de uma única escola no Quebec (Canadá). Os resultados apresentam um acréscimo importante na maioria dos alunos, entre o início e o fim da sequência, da sua capacidade de raciocinar dedutivamente e validar geometricamente as demonstrações, utilizando propriedades teóricas em vez de medições. "Após as primeiras quatro sessões, percebemos que os alunos tinham melhorado claramente os seus procedimentos de justificação" (p. 7). No final da experimentação, todos os alunos foram capazes de identificar espontaneamente os limites e falta de precisão de uma medição e observação. Esta afirmação não significa que todos os alunos adquiriram a habilidade de produzir simples provas ou argumentos baseados em propriedades usando raciocínio dedutivo de forma adequada.

Síntese

A revisão de literatura que foi efetuada permitiu verificar como o ensino da demonstração é importante no currículo de Matemática, ensinando os alunos a raciocinar logicamente (Veloso, 1998; Grabiner, 2009; Cirillo, 2009; Cyr, 2011) e permitindo dotá-los de uma visão mais alargada do que é a matemática (Veloso, 1998; Santos & Rodrigues, 2009).

Da análise feita às orientações curriculares (NCTM, 1991; DES, 1997; DEB, 2001; ME, 2007; NCTM, 2007), conclui-se que aprender a demonstrar é relevante na educação matemática, sendo clara a necessidade dos alunos saberem o que é uma conjetura e uma demonstração.

Embora seja reconhecido internacionalmente que é muito importante ensinar a demonstrar, é também aceite que tal não constitui tarefa fácil (Kunimune, Fujita, & Jones, 2009). Os alunos não entendem naturalmente o conceito de demonstração matemática e raciocínio dedutivo (Hanna *et al.*, 2009), revelando muitas dificuldades na produção de demonstrações (Ersoz, 2009; Bieda, 2009; Brunner, Reusser, & Pauli, 2011; Cyr, 2011).

Analisando a evolução do ensino da demonstração, constata-se que no ensino tradicional da demonstração, os alunos assumem um papel passivo (Schwartz & Yerushalmy, 1987; Barbin, 1993b; Boavida, 2001), sendo que as demonstrações aparecem como um produto e não como um meio de progredir no conhecimento, ignorando-se o papel da experimentação em Matemática (Boavida, 2001) e aparecendo a verificação como a única função da demonstração (De Villiers, 2001; Boavida, 2001).

Com efeito, para uma aprendizagem que desenvolva capacidades de nível cognitivo elevado, os modelos de ensino tradicionais mostram-se pouco pertinentes (Cardoso, 2010). Assim, nas últimas duas décadas, tentou-se uma aproximação entre as experiências dos alunos dentro da sala de aula e aquilo que é o trabalho dos matemáticos (Cirillo, 2009), dando ênfase à exploração e investigação.

A revisão de literatura realizada permitiu identificar formas de ação que facilitam a aprendizagem da demonstração pelos alunos. Assim, atividades de ensino baseadas na exploração e investigação mostram-se importantes para atingir este objetivo (Veloso, 1998; Boavida, 2001; Bar-Tikva, 2009). Whiteley (2009) enfatiza o papel da análise de exemplos e contraexemplos, enquanto Takáč (2009) apresenta tipos de tarefas que, ao suscitarem a curiosidade nos alunos, promovem o ensino da demonstração. Perry *et al*. (2009) e Durand-Guerrier e Arsac (2009) defendem tarefas mais relacionadas com a produção e análise crítica de demonstrações.

Na procura da demonstração de uma dada conjetura, o trabalho que o aluno desenvolve nas fases de formulação exploração e teste da mesma, deverá levar à produção de argumentos a encadear segundo um raciocínio lógico e dedutivo conducente à demonstração da conjetura em causa (Boavida, 2001). Os alunos deverão saber distinguir claramente o raciocínio indutivo do raciocínio dedutivo e deverão saber diferenciar a validade de uma afirmação verificada por um teorema, de uma afirmação verificada por estudos empíricos, compreendendo que as primeiras são válidas para todos os casos. É tornado explícito nos documentos de orientação curricular que os alunos deverão contactar com demonstrações de alguns teoremas e dominar alguns métodos e técnicas de demonstração.

Dos estudos analisados sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em Matemática, observa-se que os alunos evidenciam dificuldades em realizar demonstrações (Boavida 2005; Ersoz, 2009; Kunimune, Fujita, & Jones, 2009; Cyr, 2011), notando-se melhorias neste processo ao longo do desenvolvimento dos estudos (Boavida, 2005; Cyr, 2011). Verifica-se também que em muitos casos os alunos não sentem a necessidade de produzir uma demonstração, considerando as verificações experimentais como suficientes (Boavida, 2005; Rodrigues, 2008; Ersoz, 2009; Kunimune, Fujita, & Jones, 2009).

CAPÍTULO IV

Os ambientes de geometria dinâmica e a demonstração em Matemática

Este capítulo apresenta-se estruturado em cinco secções, sendo a última uma síntese das principais ideias apresentadas ao longo do mesmo. Na primeira secção, faz-se uma pequena abordagem sobre o que são ambientes de geometria dinâmica (AGD´s) apresentando-se seguidamente uma breve caracterização do *Geogebra*. A segunda contempla as potencialidades dos AGD´s para o ensino e aprendizagem da Matemática, referindo-se na terceira secção as potencialidades e desafios dos mesmos no processo de produção de conjeturas e na demonstração. Na quarta secção referem-se alguns estudos sobre o ensino da demonstração envolvendo AGD´s, realizados no estrangeiro e em Portugal.

Ambientes de geometria dinâmica: O que são?

Os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas computacionais que permitem construir e manipular objetos geométricos, onde "as figuras que outrora estavam estáticas ganharam vida" (Candeias, 2008, p. 115), tornando-se deste modo dinâmicas.

"*Dinâmico* é o contrário de estático. *Dinâmico* indica ação, energia, e mesmo vibração" (King & Schattschneider, 2003, p. 7).

A utilização de programas de geometria dinâmica em Portugal[6] começou no fim dos anos 80 e tem vindo a fortalecer-se desde então, embora muito lentamente. Na opinião de Oliveira e Domingos (2008), os AGD´s são "aparentemente" (p. 282) simples de integrar nas práticas dos professores e é com facilidade que se articulam com as orientações programáticas dos vários níveis de escolaridade.

Para Ponte e Canavarro (1997) a grande vantagem dos AGD´s prende-se com o facto de trabalharem com imagens. Com efeito, uma figura contém efetivamente grande poder e, com frequência, um esboço ou um diagrama tornam tudo clarividente (King & Schattschneider, 2003; Neto, 2009). King e Schattschneider (2003) chegam mesmo a salientar que a expressão "*estou a ver*" (p. 7) é muitas vezes usada no sentido de "*vejo* e *compreendo*" (p. 7). No entender de Amado e Carreira (2008), a visualização matemática é, assim, um processo importante e mesmo fundamental do raciocínio matemático" (p. 287).

As imagens dão grande confiança aos alunos e, com base nelas, estes produzem pequenas explicações. Tal verifica-se não apenas nos alunos com idades mais jovens, mas também nos adultos. Uma imagem muito bem desenhada pode servir simultaneamente como motivação, ilustração e explicação. Todavia elas não podem substituir as provas rigorosas (Kondratieva, 2009). Ainda assim, de acordo com Alcock (2009, p. 31) "as imagens têm uma correspondência direta com as demonstrações que se escrevem."

Bennett (2003), para demonstrar uma proposição que foi apresentada pela primeira vez em 1953, usou um AGD e afirma que o principal uso que fez da geometria dinâmica "foi criar a figura em primeiro lugar e depois manipulá-la até conseguir ver tudo" (p. 47). A manipulação de imagens vem, sem dúvida, proporcionar uma nova abordagem

---

[6] No ProfMat2001, o Grupo de Trabalho de Geometria da Associação de Professores de Matemática, aplicou um inquérito relacionado com o uso destes programas na sala de aula. Neste inquérito participaram 228 professores, de entre os quais 75% responderam já ter participado em pelo menos uma ação de formação relacionada com *software* de geometria dinâmica; todavia, 66% dos inquiridos declararam não ter usado nenhum *software* desta natureza em sala de aula no ano letivo 2000/2001 (Veloso & Candeias, 2003). Segundo os autores, estes dados são pouco animadores, por se referirem a um conjunto de professores interessados no seu desenvolvimento profissional, e mostram claramente a dificuldade que tem existido na introdução deste tipo de *software* na sala de aula.

do ensino da geometria (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Ponte & Canavarro, 1997).

A interatividade existente quando se utiliza um AGD, que se traduz pela possibilidade de interagir com os objetos geométricos, operando sobre eles e observando em tempo real as consequências da operação efetuada (Ponte & Canavarro, 1997), é também uma característica muito interessante deste tipo de programas.

Os AGD´s apresentam ferramentas para a realização de construções rigorosas, possibilitando economia de tempo na construção de figuras complicadas e permitindo a existência de vários casos de uma configuração geométrica, traçados com rigor. Com efeito, o computador, através do uso de *software* adequado, "é um instrumento de desenho mais poderoso que qualquer das pranchetas e escantilhões da sala de desenho tradicional" (Davis & Hersh, 1995, p. 33). Na realidade, até construções feitas com muito cuidado podem não ser corretas – se, por exemplo, se dispuser de um compasso mal apertado ou um lápis mal afiado (King & Schattschneider, 2003). Os AGD's permitem igualmente medições exatas de configurações geométricas, possibilitando a realização de cálculos com essas medidas (Candeias, 2008). Detêm também a capacidade de repetir uma construção. Neste tipo de *software*, objetos livres (que não dependem de qualquer outro objeto) podem mover-se por todo o plano, quando agarrados com um cursor, e serem esticados ou arrastados (King & Schattschneider, 2003)

> e quando se movem, todos os outros objetos da configuração ajustam-se automaticamente, preservando todas as relações de dependência e condições da construção inicial. Quando isto acontece, uma sequência sem saltos bruscos de concretizações da configuração é visionada, mostrando uma mudança contínua desde o primeiro desenho até ao desenho final. (p. 9)

Estes programas permitem efetuar transformações geométricas sobre os objetos, tais como translações, reflexões, rotações e dilatações, sendo estas transformações definidas a partir de dados *fixos* – como, por exemplo, uma rotação de amplitude fixa – ou *dinâmicos* – como, por exemplo, a amplitude de um ângulo interno de um triângulo já construído (King & Schattschneider, 2003).

Neste tipo de *software* é possível a gravação da sequência de passos que levaram a uma dada construção, havendo a possibilidade de usar a mesma, posteriormente, na construção de novas configurações.

Os AGD´s enquadram-se assim numa categoria de programas construídos especificamente com fins educativos, sendo uma ferramenta de trabalho ou de contextos de aprendizagens para o aluno (Ponte & Canavarro, 1997). Os mais utilizados são o *Geometer´s Sketchpad* (GSP), o *Cabri-Geometry II*, o *Geometry Inventor* e o *Geometry SuperSupposer* (King & Schattschneider, 2003). A estes, veio juntar-se mais recentemente o *Geogebra* que, por ser objeto de estudo desta dissertação, caracterizamos de seguida, sem pretendermos ser exaustivos.

O *Geogebra*

É um *software* de geometria dinâmica que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg e é usado para o ensino da Matemática nas escolas (Hohenwarter, 2007). É um *software* livre, com uma versão em português, pelo que se afigura como mais um contributo para integrar as práticas dos professores no nosso país. Para além destas mais-valias, o *Geogebra* pode também apresentar-se como uma nova realidade na utilização de AGD´s, na medida em que é *open-source* e por isto permitir ser enriquecido por qualquer anónimo com conhecimentos nesta área de programação.

Procede-se de seguida a uma breve caracterização deste programa, expondo neste âmbito, na figura seguinte, a janela de abertura do mesmo.

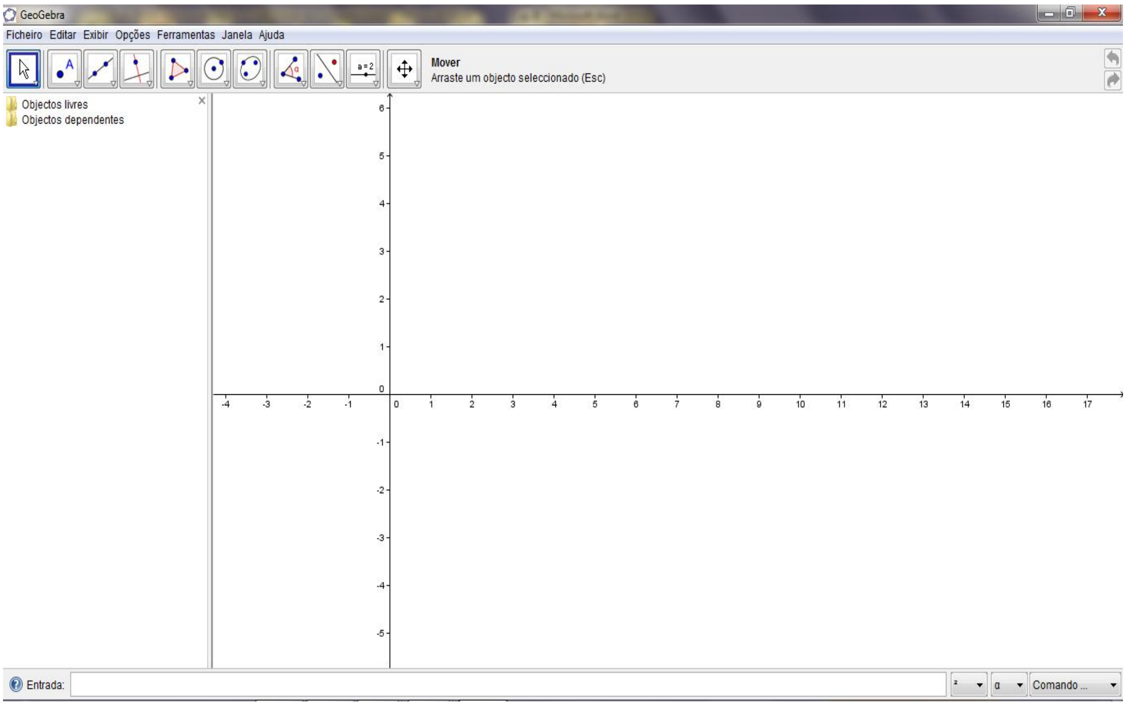


Figura 4 - Ecrã de abertura do *Geogebra*

O *Geogebra* contém a barra de menus, a barra de ferramentas, duas janelas - janela de geometria/gráficos e janela algébrica - e o campo de entrada. A barra superior horizontal é constituída por sete menus: Ficheiro, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. O menu “Ficheiro” permite fazer a gestão dos ficheiros. Para além da opção de impressão, encontra-se também aqui a opção que permite exportar o documento para outra área. Este item permite copiar uma figura da área de trabalho para o *clipboard* do sistema, com extensão PNG. Essa figura fica assim disponível para ser usada por outro programa. No menu “Editar” pode desfazer-se ou refazer-se uma ação, apagar e selecionar objetos, copiar a zona gráfica para área de transferência e aceder às propriedades dos objetos. Em “Exibir” o utilizador pode escolher como quer ver a sua área de trabalho. Assim, pode decidir, sobre a presença dos eixos coordenados, da janela algébrica, etc. Neste menu pode ainda chamar-se o protocolo de construção. Este protocolo é uma tabela que mostra todas as etapas da construção. Inclusivamente é possível introduzir novos passos no meio de uma construção existente e modificar assim a sequência inicial. O menu “Opções”, permite alterar e consequentemente gravar as configurações existentes, assim como restaurar as configurações padrão. Com o menu “Ferramentas”, é possível criar e gerir ferramentas, bem como personalizar a barra de ferramentas, apresentando também a possibilidade de restaurar a barra padrão. O menu

"Janela", abre uma nova janela no programa. Por último, o *Geogebra* dispõe de um menu "Ajuda", com *links* para o *site* oficial do programa e para o *Geogebra Forum* e *Geogebra Wiki*.

Na barra de ferramentas, o trabalho é desenvolvido somente com o rato. Assim, passando o cursor por cada uma das ferramentas disponíveis, abre-se uma cortina vertical com as diversas opções que a mesma oferece. Clicando na opção pretendida, surge ao lado da barra de ferramentas, uma indicação de como proceder e aparece a construção na janela geométrica. Simultameamente as coordenadas dos pontos, as equações, etc., vão surgindo na janela de álgebra.

Às potencialidades de um *software* de geometria dinâmica, o *Geogebra* vem juntar as funcionalidades de um sistema algébrico computacional. Estas duas características são explicitadas nas duas janelas de visualização de que o programa dispõe: "Janela de geometria/gráficos" e "Janela de álgebra". Assim, existe uma correspondência entre as representações analítica e geométrica do mesmo objeto.

O *Geogebra* dispõe ainda de um "Campo de Entrada", no qual é requerido o uso do teclado, para chamar os comandos disponíveis. Nesta funcionalidade está igualmente presente a vertente algébrica do *software*, que pemite também deste modo a representação do mesmo objeto de duas maneiras diferentes: a algébrica e a geométrica.

Potencialidades dos AGD´s para o ensino e aprendizagem da Matemática

As novas tecnologias têm sido apontadas como motor de mudança no ensino da Matemática (Veloso, 1998; Oliveira & Domingos, 2008), "assumidas quer como uma certa inevitabilidade decorrente da informatização da sociedade, quer como parte integrante de novas perspetivas sobre a natureza da matemática escolar e da aprendizagem na disciplina" (Oliveira & Domingos, 2008, p. 279). Também De Villiers (2003b) vê a chegada do computador moderno como uma ferramenta extremamente poderosa, revolucionando a pesquisa em diversas áreas da matemática.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referindo-se em particular às investigações geométricas, entendem que o "desenho, a manipulação e a construção no computador de objetos geométricos permitem a exploração de conjeturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal” (s.p.). Defendem ainda que os AGD´s “permitem a construção e manipulação de objetos geométricos e a descoberta de novas propriedades desses objetos, através da investigação das relações ou medidas que se mantêm invariantes” (idem).

Potencialidades dos AGD´s no desenvolvimento de capacidades transversais

Garry (2003), referindo-se a alguns exemplos retirados da sua experiência com alunos do ensino secundário a propósito de várias tarefas de natureza exploratória e investigativa, expõe as capacidades dinâmicas deste *software* e admite vantagens, para alunos e professores. Referindo-se particularmente ao *Geometer´s Sktechpad*, reconhece que este *software* vem proporcionar maior envolvimento dos alunos no pensamento matemático.

> A natureza interativa e qualidades dinâmicas do *software* levaram os alunos a formular as suas próprias conjeturas e a testá-las de uma forma eficaz. O *feedback* que os alunos podem obter da utilização do *software* de geometria dinâmica é entusiasmante e eficiente. Os alunos ganham uma maior compreensão e visualização da matemática que estão a investigar e os professores têm uma ferramenta que oferece possibilidades ilimitadas para envolver mais os alunos na sua própria aprendizagem e no pensamento matemático. (p. 76)

A manipulação de figuras, permitida pelo uso de *software*, beneficia a formação de imagens mentais, ajudando no desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999). Posição idêntica defendem Ufer, Heinze e Reiss (2009) ao admitirem que os AGD´s são ferramentas úteis para desenvolver nos alunos a capacidade de construir modelos mentais genéricos.

Os ambientes de geometria dinâmica favorecem igualmente a discussão matemática. Tal asserção é sustentada no “Princípio da Tecnologia” do documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007). Segundo este documento “a tecnologia constitui ainda um contexto para as discussões entre os alunos e o professor acerca dos objetos visualizados no ecrã e dos efeitos das diversas transformações dinâmicas que a tecnologia permite” (p. 27).

Ponte e Canavarro (1997) consideram que a utilização do computador proporciona um ambiente de trabalho estimulador da discussão, tanto sendo utilizado entre alunos num grupo de trabalho, como entre os diferentes grupos da turma, ou entre toda a turma e o professor.

Os AGD´s beneficiam também a resolução de problemas. Segundo Veloso (1998) o *software* de geometria dinâmica "tem potencialidades para revolucionar profundamente os modos de resolução de problemas e de exploração de situações (…)" (p. 60), sendo, segundo este autor, as explorações e investigações, o tipo de atividades mais apropriadas para este tipo de programas.

Com efeito, este tipo de *software* pode ser usado na sala de aula de três formas diferentes: pelo aluno, para exploração e descoberta; para a resolução de um problema ou realização de uma investigação; e pelo professor, como ferramenta de apresentação (King & Schattschneider, 2003).

Ao ser usado pelos alunos, para exploração e descoberta consente maior envolvimento dos mesmos no seu processo de aprendizagem, permitindo-lhes "testar as suas conjeturas e ideias matemáticas de uma forma visual, eficiente e dinâmica" (Garry, 2003, p. 67). Deste modo, os alunos têm a possibilidade de descobrir por si, muitas das propriedades geométricas que lhes têm sido ensinadas pelo método expositivo (Ponte & Canavarro, 1997).

Na resolução de um problema ou realização de uma investigação, em que se pretende dar resposta a um problema, ou procurar propriedades e relações entre figuras, os alunos realizam "descobertas de forma autónoma" (Keyton, 2003, p. 79), pois são auxiliados "pela constatação de um facto geométrico antes mesmo da sua demonstração" (p. 79). O uso deste tipo de *software* permite a realização de experiências diversificadas, onde os alunos dão largas ao seu espírito criador e podem mesmo chegar a conclusões desconhecidas pelo professor (Ponte & Canavarro, 1997; King & Schattschneider, 2003).

Ao ser usado pelo professor como ferramenta de apresentação, este tipo de *software* "ajuda os alunos a *ver* o que significa um facto verdadeiro em geral" (King & Schattschneider, 2003, p. 10). Por permitir animações, ajuda na compreensão de conteúdos. Com efeito, "qualquer aluno compreenderá melhor a função seno vendo-a a *desenrolar-se* quando um ponto se move sobre uma circunferência" (Garry, 2003, p.

74). Este tipo de programas permite assim a introdução de um conceito de forma “dinâmica, eficaz e significativa” (Garry, 2003, pp.73 e 74), salienta o autor fazendo referência ao uso do *Sketchpad*.

Potencialidades dos AGD´s no ensino de temas específicos

No princípio dedicado à tecnologia, o NCTM (2007) defende que esta é essencial no ensino da Matemática, contribuindo para a melhoria da aprendizagem dos alunos e influenciando a Matemática que é ensinada. Com efeito, o uso de “ (…) programas de geometria dinâmica (…) constituem ferramentas úteis na formulação de problemas significativos” (NCTM, 2007, p. 28). Quando se disponibilizam ferramentas eletrónicas aos alunos, estes “podem concentrar-se nas decisões a tomar, na reflexão, no raciocínio, e na resolução de problemas” (p. 26). A tecnologia permite que os alunos trabalhem num nível “mais elevado de generalização e abstração” (p. 29), o que conduz a uma maior compreensão (NCTM, 2007; De Villiers, 2003b). As tecnologias eletrónicas proporcionam assim imagens visuais das ideias matemáticas (NCTM, 2007; De Villiers, 2003b), podendo servir de apoio a investigações em qualquer área da matemática (NCTM, 2007).

No atual programa de Matemática A de 10.º ano (DES, 2001a) é dado ênfase à tecnologia e é tornado explícito que “os programas de Geometria Dinâmica (…) fornecem diferentes tipos de perspetivas tanto a professores como a estudantes” (p. 16). Também em “A Matemática na Educação Básica” (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999), se refere claramente que os programas de geometria dinâmica deverão constituir um recurso a utilizar por todos os alunos. Assim, recomendando-se enfaticamente o uso de computadores, é tornado evidente que “a exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a perceção dos objetos do plano e do espaço e a fazer conjeturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objetos geométricos” (DES, 2001a, p. 24). O computador trouxe a possibilidade de incluir matemática experimental na investigação e na educação. Assim, a linha que separa a experiência e a prova parece ficar mais ténue, “contrariando o tradicional aviso: ‘Não baseie a sua demonstração no desenho’ ” (Zehavi & Mann, 2009, p. 287).

Deste modo, em termos curriculares, o uso dos AGD´s beneficia claramente “a abordagem de grande parte da geometria” (Ponte & Canavarro, 1997, p. 105).

Efetivamente, “a aprendizagem da geometria pode tornar-se mais ativa e interessante, e realizar-se num ambiente experimental e investigativo, onde os alunos tenham possibilidade de testar e formular conjeturas, em especial quando apoiados por *software* que funcione como ambiente geométrico dinâmico” (idem). Um *software* é assim “uma das ferramentas imprescindíveis ao estudo da geometria” (Candeias, 2008, p. 115).

Segundo Veloso (1998) o *software* de geometria dinâmica ao permitir “investigar e descobrir novas propriedades das figuras” (p. 96), “é particularmente apropriado para apoiar um ensino renovado da geometria” (p. 96), no sentido das recomendações apresentadas no seminário realizado em março de 1990, nos Estados Unidos, sobre o “O futuro da geometria”. Entre outras recomendações, este seminário sugeriu que: “os conceitos e objetos geométricos devem ser estudados mais de um ponto de vista experimental e indutivo do que axiomático; uma ampla variedade de programas de computador devem ser utilizados (*Mathematica*, LOGO, etc.), tanto como ferramentas para investigações como para a construção de conceitos” (Veloso, 1998, pp. 17 e 18).

Também o ensino das transformações geométricas sai beneficiado do uso dos AGD´s. Nas palavras de Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) “o uso de *software* pode também contribuir para a ampliação das representações com que os alunos trabalham quando, por exemplo, deslizam, rodam, ampliam ou reduzem uma dada construção geométrica” (s.p.). King (2003) refere que “os programas de geometria dinâmica tornam possível trabalhar com as transformações geométricas de uma maneira concreta, interativa que as torna mais acessíveis do que nunca” (p. 121).

Estes programas vêm assim enriquecer o estudo deste tópico, contudo, apresentam-se como sendo muito mais do que “uma vitamina para a geometria de Euclides” (Cuoco & Goldenberg, 2003, p. 55). Com efeito, os AGD´s podem tornar-se bastante úteis noutras áreas da matemática, nomeadamente no cálculo infinitesimal e na análise (Cuoco & Goldenberg, 2003). Também Veloso (1998) refere que os programas de geometria dinâmica permitem “a conexão da geometria com a álgebra e com as funções” (Veloso, 1998, p. 91).

Usando um programa de geometria dinâmica os alunos podem modelar uma situação e depois observar de forma contínua “como ela se vai alterando à medida que algumas das suas componentes é arrastada suavemente no ecrã do computador” (Cuoco & Goldenberg, 2003, p. 55). Segundo os autores, esta atividade de investigação da variação contínua traduz-se, num ganho potencial em termos de pensamento analítico. Por outro lado, os AGD´s, ao introduzirem novas técnicas para a visualização da variação contínua e do comportamento de funções (função claramente desempenhada, no atual currículo, pelas funções reais de variável real e os seus gráficos cartesianos), produzem imagens mentais que favorecem a perceção dos conceitos de análise (Cuoco & Goldenberg, 2003).

Estes autores reforçam ainda que a utilização de *software* de geometria dinâmica permite "aos professores e aos alunos, desenvolver técnicas para investigar situações que têm até agora exigido métodos matemáticos avançados" (p. 59). E referem especificamente duas categorias: lugar geométrico de um ponto e otimização.

Com efeito, os AGD´s "podem ser usados para construir e manipular lugares geométricos" (p. 61). Cuoco e Goldenberg (2003) referindo-se a um exemplo de um "problema da *nova* geometria" (p. 61), em que se considera uma vara de comprimento fixo que pode deslizar numa guia-*pivot* fixa na parede, e se investiga qual o lugar geométrico que descreverá uma das extremidades da vara quando a outra descreve uma circunferência, refere que o lugar geométrico construído

> é uma função (contínua quase por toda a parte) de vários parâmetros: o comprimento da vara, a posição do *pivot* e o tamanho da circunferência. O *software* de geometria dinâmica permite aos alunos alterar esses parâmetros e estudar os efeitos que essas alterações produzem sobre o lugar geométrico resultante. (p. 62)

A geometria dinâmica dá nova vida ao tema da otimização geométrica ao permitir "o desenvolvimento de alguns princípios e hábitos de pensamento coerentes, com os quais os alunos podem abordar os problemas de otimização antes do cálculo" (p. 63).

Veloso (1998) apresenta neste âmbito a resolução de um problema clássico de otimização, usando um ambiente de geometria dinâmico, onde são visíveis as vantagens da utilização deste tipo de *software*. Trata-se de investigar de entre todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual é o que tem a área máxima. Com efeito, usando um AGD os alunos facilmente observam as modificações ocorridas num retângulo, ao vê-lo passar de alto e estreito, para baixo e comprido conforme vai perdendo altura. Concomitantemente observam também o desenvolvimento dinâmico do gráfico que relaciona a área do retângulo em função da medida de um dos seus lados e concluirão perfeitamente para que medida do retângulo surge a área máxima.

Potencialidades e desafios dos AGD´s no processo de conjeturar e na demonstração

Ponte (1992), referindo-se à utilização do computador na sala de aula, defende que o uso frequente do mesmo com *software* adequado, pode ajudar os alunos a desenvolver de forma mais profunda certo tipo de compreensão matemática, facilitando o processo de conjeturar/ verificar/ testar e construir generalizações.

Também De Villiers (2003b) defende que o computador oferece uma oportunidade única para a formulação de um grande número de conjeturas procedendo-se rapidamente à sua testagem, variando apenas alguns parâmetros de uma situação particular. Segundo o NCTM (2007), a formulação de conjeturas é facilitada pelo facto dos alunos poderem analisar mais exemplos e diferentes formas de representação.

Keyton (2003), referindo-se particularmente ao uso do *Geometer´s Sketchpad*, e focando uma experiência com alunos do 9.º ano, salienta a importância deste AGD para a formulação de conjeturas. Nas palavras do autor "o número de conjeturas e novas ideias a que os alunos foram capazes de chegar quando começaram a utilizar o *Sketchpad* foi, para mim, uma surpresa" (p. 80).

Também Parks (2003) evidencia o poder dos AGD´s na fase de formulação de conjeturas, referindo que o seu uso encoraja os alunos a "estruturar o pensamento matemático e a descobrir padrões através de exemplos" (p. 119), levando-os a "formular conjeturas sobre os resultados" (idem).

Para Hofstadter (2003), um programa de geometria dinâmica oferece certeza e confiança na testagem das conjeturas. Esta observação, baseada no monitor não é de todo uma demonstração, "mas de certo modo, diria eu, este tipo de contacto direto com o fenómeno é ainda mais convincente do que uma demonstração" (p. 25). A afirmação atrás transcrita não significa que o autor despreze as demonstrações. Efetivamente o autor revela que precisava de as produzir, sendo claro que o uso de um AGD facilitou esse trabalho. Não fazendo demonstrações, um AGD fornece evidência experimental que impele o desejo de uma demonstração (King & Schattschneider, 2003), sendo extremamente útil na construção de contraexemplos para conjeturas falsas (De Villiers, 2003a).

Tal como Hofstadter (2003), também De Villiers (2003a) usa os ambientes de geometria dinâmica para se convencer quanto à veracidade das suas conjeturas. Investigando a respeito de generalizações nos "quadriláteros equílicos" de Ross Honsberger, afirma que o que o motivou "para começar a tentar encontrar uma demonstração dedutiva" (p. 36) foi a "confirmação contínua dos resultados ao longo desta experimentação" (p. 36) bem como a inexistência de contraexemplos. O autor salienta que "dificilmente teria embarcado [nessa atividade] caso duvidasse do resultado" (idem).

Os AGD´s possibilitam a criação de "micro mundos que permitem conjeturar" (Garcia López, 2011, p. 54), facultando uma exploração livre e flexível, com retro alimentação imediata que permite a tomada de consciência do erro. Captam a ação e atenção do aprendiz e facilitam a busca de diferentes estratégias de solução envolvendo construções com rigor (Garcia López, 2011).

É ponto assente que os computadores vieram influenciar a demonstração em matemática, alterando o seu papel. Em termos educativos, vários autores (Junqueira & Valente, 1993; De Villiers, 2001; De Villiers 2003a; Larios-Osorio & Acuña-Soto, 2009) reconhecem que o uso de um ambiente de geometria dinâmico pode desmotivar os alunos na procura de uma justificação para as suas conjeturas, no sentido em que, para muitos, a clarividência das imagens mostra-se suficiente. De acordo com De Villiers (2001) por vezes, os alunos têm dificuldade em compreender a necessidade de uma demonstração, sendo tal posição depreendida na seguinte afirmação de Gonobolin (1954): " (…) os alunos (…) não (…) reconhecem a necessidade de demonstração lógica dos teoremas de geometria, especialmente quando estas demonstrações têm visualmente um caráter óbvio (…) " (De Villiers, 2001, p. 31). Nas palavras de Junqueira e Valente (1993) "a força das evidências das imagens [de um AGD] constitui um obstáculo à necessidade de feitura de uma prova para validar uma conjetura" (p. 45). Para Larios-Osorio e Acuña-Soto (2009) o facto de as imagens assumirem o valor de prova, anulando nos alunos o interesse em encontrar uma demonstração, está relacionado com as funções da demonstração dentro da sala de aula. Nas palavras do autor, se se entender que a sua única função é explicar e convencer, independentemente dos argumentos, então torna-se suficiente a simples observação no computador e a utilização das ferramentas fornecidas pelo *software*.

Com efeito, os alunos deverão compreender que a única maneira de se assegurarem que o que observam é verdadeiro, passa pela construção de uma demonstração, ainda que a propriedade tenha sido verificada para muitos casos. De Villiers (2003a) sugere que se desperte nos alunos a curiosidade, desafiando-os "a tentar *explicar* o porquê da veracidade" (p. 41) de um resultado. Na realidade, não sendo a matemática uma ciência experimental, "as suas teorias e as 'verdades' que elas afirmam – que têm sempre um caráter relativo – não se constroem, nem se comprovam pela repetição de experiências, mas pela demonstração" (Veloso, 1998, p. 361).

Usando um ambiente de geometria dinâmica, a demonstração não "vai servir, como tantas vezes tradicionalmente, para nos convencermos que a propriedade é verdadeira. O seu estatuto e finalidade estão alterados. Porventura a sua finalidade principal é agora ajudar-nos a compreender *porque razão é verdadeira a proposição*" (Veloso, 1998, p. 95), assumindo a demonstração o papel de explicação (De Villiers, 2003a). Já no entender de Bennet (2003) esta assume um papel de desafio e gratificação, que resulta da descoberta. Os AGD´s são assim responsáveis por alterações profundas no papel da demonstração em matemática. Não anulando o seu interesse, proporcionam formas de discernimento sobre o problema que facilita a procura da mesma (Bennet, 2003).

Estudos sobre ensino e aprendizagem da demonstração em Matemática envolvendo AGD´s

Várias investigações têm sido levadas a cabo, no estrangeiro e em Portugal, sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em contexto de AGD´s. Algumas delas serão referidas de seguida, por mostrarem resultados interessantes dentro desta temática.

A investigação de Brocardo (2001) aborda o modo de entender uma investigação matemática e a consequente formulação e teste de conjeturas, usando em algumas tarefas um ambiente de geometria dinâmica, o *Geometer´s Sketchpad* (GSP). Nas suas conclusões refere, relativamente a uma tarefa onde se usou este ambiente de geometria dinâmico, que a organização dos dados, necessária à formulação das conjeturas por parte dos alunos, foi bastante facilitada pelas potencialidades oferecidas pelo GSP. Os alunos revelaram evolução visível relativamente à procura de argumentos para validar as conjeturas formuladas, sendo o computador "um recurso que facilita a exploração deste tipo de tarefas" (p. 288). A análise dos dados sugere ainda revestir-se de alguma dificuldade para os alunos, a perceção da importância e do significado de estabelecer uma prova para as conjeturas que resistem a sucessivos testes, nomeadamente quando se utiliza o GSP "que permite a realização de muitos testes, dando claramente a ideia que se estudaram todos os casos possíveis" (p. 546).

Machado (2005) tem como objetivo principal compreender como é que alunos do 8.º ano desenvolvem a capacidade de demonstração matemática com a utilização de um AGD, mais precisamente o GSP. Nas suas conclusões é explícito que o GSP permitiu aos alunos a formulação de um grande número de conjeturas, permitindo a realização de muitas experiências rapidamente, havendo facilidade e rigor nas construções. Verificava-se que, no início alguns alunos apresentavam a tendência para formularem conjeturas "à primeira observação" (p. 240), sendo que, tal aspeto já não se observou no fim do estudo, onde todos os alunos procuravam relações invariantes para a formulação das mesmas. Este estudo mostrou-se também importante para despertar nos alunos a necessidade de proceder à justificação das conjeturas. Com efeito, ao longo do estudo os alunos atribuem à conjetura o seu caráter de incerteza, mas, no final do mesmo "fazem depender a sua manutenção da demonstração, ou seja, referem-no como algo que se pensa verdadeiro, mas que só pode assim ser considerado após a sua demonstração" (p. 241). Na realidade, no início "a maioria dos alunos da turma tomava como verdadeiras as conjeturas que formulava no *GSP* a partir das experiências aí realizadas" (p. 244), sendo visível no decorrer do estudo a necessidade de existir uma demonstração para validação das mesmas e uma evolução clara do que é aceite como uma demonstração. Todavia, no final do estudo, verificou-se ainda existir uma pequena minoria de alunos que consideram as suas experiências no *GSP* como demonstrações. É ainda de salientar o interesse revelado pelos alunos na realização das demonstrações, a par da dificuldade sentida sobretudo no momento de as iniciar.

Ferreira (2005) com alunos de uma turma de 9.º ano estudou as potencialidades dos AGD´s como mediadores no processo de ensino/aprendizagem da Geometria, tentando analisar como é que estes podem aproximar os alunos da prática da demonstração em matemática. Propôs-se então aos alunos a exploração de pequenas construções, a formulação e a justificação de conjeturas e a realização de demonstrações. Com o desenrolar da experiência, verificou-se que os alunos conseguiram, usando o GSP e, sob orientação da professora e da investigadora, resolver com sucesso algumas tarefas.

Passaram a estabelecer conclusões de forma espontânea, e, alguns alunos chegaram mesmo a produzir algumas demonstrações. Todavia, a maioria dos alunos contentava-se em validar a conjetura para um número reduzido de casos, não sentindo a necessidade de produzir uma construção lógica ou elaborar uma demonstração. Na tarefa de despertar nos alunos esta necessidade, mostrou-se muito importante o computador, "pois ajudou-os a pensar sobre o que tinham estado a concluir, permitiu-lhes visualizar melhor as relações estabelecidas e, consequentemente, construir algum raciocínio lógico" (p. 181). Nas palavras da autora, o GSP teve um papel muito importante ao proporcionar desafio intelectual e gosto pela descoberta. Efetivamente, os alunos prontamente "visualizavam as transformações obtidas, confirmavam ideias e verificavam relações para mais facilmente poderem estabelecer conjeturas e procederem à manipulação para as validarem e explicarem" (p. 182).

Para Neto (2009) o principal objetivo é analisar ambientes de aprendizagem em que os alunos sejam solicitados a resolver problemas de prova em contextos diversificados, promovendo o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Os resultados mostram que "o recurso a ambientes de geometria dinâmica permitiu: elaborar construções geométricas com precisão; identificar o significado de proposições geométricas; elaborar e testar conjeturas; explorar propriedades; 'descobrir' novas propriedades" (p. 137). A autora refere conhecer à partida as dificuldades sentidas pelos alunos do ensino secundário na resolução de problemas com prova e na elaboração de raciocínios de natureza dedutiva. No decorrer do estudo foram propostas situações para promover o raciocínio dedutivo, nas quais os alunos "seguiram a sequência cognitiva, *construção – visualização – raciocínio"* (p. 138). Nas palavras da autora

> o raciocínio visual mostrou ser mais do que uma etapa preliminar intuitiva dos processos de raciocínio. O recurso a modelos físicos em combinação com modelos virtuais contribuiu para a compreensão do significado das situações-problema e alguma compreensão do papel da prova matemática". (idem)

É ainda de salientar que "a prova das conjeturas estabelecidas foi sempre feita por 'imposição' externa e não por uma necessidade sentida pelos alunos" (p. 137). Todavia, a autora refere ter havido "melhorias significativas ao nível dos procedimentos adotados na resolução de problemas de prova" (idem).

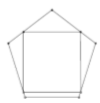
Leung (2009) faz sentir a necessidade da existência de um sistema semântico para falar e escrever sobre experiências realizadas em ambientes de geometria dinâmica. Tal existência pode abrir um caminho para aliviar a tensão que muitas vezes existe entre aspetos teóricos e experimentais de explorações usando AGD´s. Leung (2009) refere o modo de reescrever a demonstração feita por um aluno de Hong Kong sobre a solução de um problema de construção no *Sketchpad*[7].

Após a resolução da tarefa solicitada, o aluno escreveu sobre a sua estratégia de resolução produzindo "uma intrigante prova formal" (p. 17). A prova foi escrita num formato de uma prova de geometria euclidiana, usando o método dedutivo e referenciando muito pouco o AGD usado. Houve um diagrama mostrando um instante estático da sequência de quadrados usados com uma linha reta passando por dois pontos. Ao lado do diagrama havia uma declaração: G é móvel. Junto ao diagrama as declarações formaram uma premissa sobre a qual os argumentos subsequentes poderiam ser derivados.

Na escrita da sua demonstração o aluno usou um formalismo simbólico típico de uma prova dedutiva e um "AGD interpretado" (p. 17). Salienta-se que o uso que o aluno fez da palavra "constante" teve um significado mais profundo do que ser apenas um valor numérico, tal significava invariante sob variação do arrastamento. Esta justaposição de símbolos típicos das demonstrações formais e o uso do AGD interpretado transformam a prova do aluno numa ponte entre o domínio da geometria experimental e a geometria dedutiva (axiomática dedutiva).

Perante esta análise, o autor apresenta algumas ideias que podem tornar-se significativas quando se estudam provas usando AGD´s. Assim salientam-se que: (a) palavras como "móvel", "sempre", "constante" que conotam movimento, transição, invariância devem ser proeminentes num discurso de AGD. Estas palavras devem ser interpretadas sob o modo de arrastar ou qualquer outra função no AGD que induz variações; (b) escrever uma prova formal quando se usou um AGD pode envolver a utilização de símbolos

[7] A tarefa que foi dada ao aluno foi a seguinte: "Investigar como construir um quadrado com quatro vértices sobre os lados de um pentágono regular como mostrado na figura à direita. Anote o seu método de construção e explique o seu método de resolução."



matemáticos ou expressões que transcendem a semântica usual de uma tradicional representação simbólica matemática. Efetivamente o conceito de "um todo" pode ser o conceito de sequência contínua de casos sob arrastamento, e um singular "este" pode representar muitos.

Neste estudo o autor apresenta representações simbólicas para capturar as características dos objetos presentes nas construções, assim, a título de exemplo, na nomenclatura que define, o símbolo $\overleftrightarrow{d}(Object)$ representa a sequência dinâmica de um objeto arrastado.

Garcia López (2011) realizou uma investigação sobre a evolução das atitudes e competências dos alunos do ensino secundário, ao introduzir o *Geogebra* em sala de aula. Os principais objetivos são desenhar, pôr em prática e avaliar uma sequência de tarefas baseadas no uso do *Geogebra*; analisar as transformações que essa sequência provoca nas atitudes relacionadas com a matemática do secundário; identificar as características do *Geogebra* que podem influenciar a transformação de atitudes relacionadas com a matemática; descrever o desenvolvimento das competências matemáticas que se produzem nos alunos do ensino secundário ao implementar a sequência anteriormente descrita.

As suas conclusões mostram que o trabalho com o *Geogebra* favoreceu o desenvolvimento de todas as competências analisadas: cognitiva, afetiva e comportamental. É tornado explícito que os alunos mostraram atitudes muito positivas face ao *Geogebra*, ao longo do seu uso. A autora destaca como maior potencialidade do programa o favorecimento na melhoria das componentes afetivas e comportamental, ao revelar que os alunos manifestam muito gosto e interesse nas tarefas com o *Geogebra*, tendo sido a componente cognitiva (perceção e crença sobre a possibilidade de êxito em Matemática, como a autoconfiança) aquela que menos evoluiu. Durante as tarefas com *Geogebra*, a grande maioria dos alunos evidenciaram espírito crítico, perseverança, precisão e rigor, autonomia e sistematização. A autora investigou também a evolução das seguintes competências: uso de ferramentas e recurso; representar; modelar; pensar e raciocinar; argumentar e demonstrar; comunicar e resolver problemas. Observou que as primeiras três evoluíram de forma homogénea, o mesmo não se verificando com as restantes. Com efeito, ao nível do desenvolvimento das competências pensar e raciocinar e argumentar e demonstrar, os alunos mostraram maiores dificuldades.

Baccaglini-Frank (2011) apresenta um estudo realizado com alunos provenientes de três escolas de ensino médio italiano, onde relata a produção de conjeturas em ambientes de geometria dinâmica. Os resultados recolhidos neste estudo permitiram perceber que estes alunos usaram de duas maneiras diferentes a função de arrastamento, havendo assim consequências diferentes na formulação de conjeturas. Com efeito, o uso automático da função de arrastamento não parece produzir argumentos abdutivos durante a exploração conducente a uma conjetura, pelo contrário, parece condensar-se e subordinar o processo abdutivo. Neste caso a premissa e a conclusão final da conjetura de uma dada afirmação parecem ser distantes. Ou seja, essas conjeturas parecem exibir um "fosso" entre a premissa e a conclusão, porque não há uma ponte entre os argumentos que tendem a emergir da exploração. Por outro lado, quando esta ferramenta é interiorizada e usada como uma ferramenta psicológica, as conjeturas produzidas são acompanhadas por argumentos que podem ser usados para aproximar a premissa e a conclusão. Neste caso as conjeturas constituem um elo de ligação entre a premissa e a conclusão. Este segundo modo de utilização da função de arrastamento pode contudo favorecer o processo de construção de uma prova.

Síntese

De acordo com os autores revisitados (Ponte & Canavarro, 1997; Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; King & Schattschneider, 2003; Garry, 2003; Neto, 2009; Garcia López, 2011), observam-se as enormes vantagens e potencialidades dos AGD´s. Ponte e Canavarro (1997) destacam a vantagem destes programas trabalharem com imagens passíveis de manipulação. Já King e Schattschneider (2003) apresentam os benefícios ao nível da construção rigorosa de figuras, do dinamismo inerente a este tipo de *software* e dos diferentes modos como podem ser usados na sala de aula. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam a manipulação de objetos e a descoberta de novas propriedades através da procura de invariantes.

De acordo com a bibliografia consultada, os AGD´s apresentam muitas potencialidades no ensino e aprendizagem da Matemática. Garry (2003) realça o maior envolvimento dos alunos no pensamento matemático, dada a natureza interativa e o *feedback* que estes programas proporcionam. Por outro lado, Efer, Heinze e Reiss (2009) assinalam a importância dos AGD´s na formação de modelos mentais genéricos. Com efeito, estes programas favorecem não só o desenvolvimento de capacidades transversais, tais como o raciocínio (Garry, 2003), a discussão matemática (NCTM, 2007; Ponte & Canavarro, 1997) e a resolução de problemas (Veloso, 1998), bem como o ensino e aprendizagens de temas específicos da matemática nomeadamente a geometria (Ponte & Canavarro, 1997; Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Veloso, 1998; De Villiers, 2003b; King, 2003; Cuoco & Goldenberg, 2003). Os AGD´s revelam-se também muito profícuos noutras áreas da Matemática, designadamente no cálculo infinitesimal e na análise, (Cuoco & Goldenberg, 2003), bem como na resolução de problemas de otimização (Veloso, 1998; Cuoco & Goldenberg, 2003).

Relativamente aos desafios e potencialidades dos AGD´s na demonstração e na formulação de conjeturas em Matemática, muitos autores colocam a ênfase na facilitação do processo de conjeturar (Ponte, 1992; De Villiers, 2003b; Keyton, 2003; Parks, 2003; NCTM, 2007), no processo de testar as conjeturas (Ponte, 1992; Hofstadter, 2003), bem como na procura de contraexemplos para conjeturas falsas (De Villiers, 2003a).

É assim ponto assente que o computador veio influenciar a demonstração em Matemática. Para alguns autores (Junqueira & Valente, 1993; De Villiers, 2001; De Villiers 2003a; Larios-Osorio & Acuña-Soto, 2009) os AGD´s desmotivam os alunos na procura de justificações para as suas conjeturas, ao passo que para outros (King & Schattschneider, 2003) a evidência experimental impele o desejo da demonstração. Nesta dualidade de opiniões, destaca-se a função que a demonstração deve ter para os alunos quando se trabalha num ambiente de geometria dinâmica. Assim, ela deverá servir para explicar o porquê da veracidade da afirmação (Veloso, 1998; De Villiers, 2003a).

Dos estudos analisados no âmbito da revisão da literatura sobre o ensino e aprendizagem da demonstração em Matemática usando AGD´s, observa-se que ao longo da implementação das diferentes investigações os alunos evoluem positivamente ao nível da sua capacidade de raciocinar dedutivamente (Machado, 2005; Neto, 2009; Garcia López, 2011), mostrando ainda assim dificuldades em realizar demonstrações (Machado, 2005; Neto, 2009; Garcia López, 2011). É todavia ponto assente que o uso de AGD´s favorece visivelmente o processo de formulação de conjeturas (Brocardo, 2001; Machado 2005; Ferreira, 2005; Neto, 2009; Garcia López, 2011).

CAPÍTULO V

Metodologia

Este capítulo encontra-se estruturado em cinco secções, pretendendo realçar o modo como se desenrolou a presente investigação. Apresenta-se a metodologia seguida, justificando a escolha por uma abordagem qualitativa interpretativa. São apresentados os participantes do estudo e focalizados princípios éticos tidos em consideração. É explicada a intervenção didática e por último apresentados os instrumentos usados para recolha dos dados, bem como o modo como se procedeu à sua análise.

Opção metodológica do estudo

Pretende-se com este estudo, contribuir para a compreensão de como é que o recurso a um ambiente de geometria dinâmica (*Geogebra*) pode influenciar o processo de demonstração matemática desenvolvido pelos alunos. De um modo particular, pretende-se identificar as principais potencialidades e os principais desafios que se colocam com o uso de um recurso desta natureza. Neste sentido, ambiciona-se dar resposta a quatro questões: (a) Como lidam os alunos com a construção dinâmica usando o *Geogebra*? (b) Como lidam os alunos com o processo de investigação matemática usando o *Geogebra*?

(c) Que tipos de demonstração matemática realizam os alunos sem o *Geogebra*? (d) Que funções atribuem os alunos à demonstração matemática?

Sendo um objetivo deste estudo procurar compreender o modo como os alunos utilizam o *Geogebra* e como, posteriormente, procedem à elaboração de demonstrações matemáticas, esta investigação terá de ser levada a cabo no contexto em que a mesma decorre, exigindo naturalmente algum tempo. Assim, torna-se evidente a necessidade de um envolvimento continuado entre a investigadora e os alunos, sendo a procura desta compreensão facilitada pela observação direta das situações, pela interação com os seus intervenientes e busca de interpretações.

Deste modo, optou-se por uma metodologia de natureza interpretativa e qualitativa. A investigação qualitativa privilegia a "compreensão das complexas inter-relações entre tudo o que existe" (Stake, 2009, p. 53), enfatizando a singularidade dos contextos como essenciais para promover a compreensão. Bogdan e Biklen (1994) apresentam cinco características dos estudos qualitativos, também visíveis nesta investigação: (1) Os dados são obtidos diretamente do ambiente natural, onde o investigador é o instrumento principal. Observa-se efetivamente grande preocupação com o contexto, pois os investigadores qualitativos entendem que "as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente natural" (p. 48). (2) A investigação é de natureza descritiva. A recolha dos dados é em forma de palavras ou imagens e não de números. Deste modo, também os resultados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, etc. Procede-se à análise dos dados tentando conservar o mais possível "a forma em que estes foram registados ou transcritos" (idem). (3) No desenrolar da investigação, o foco central é colocado nos processos e não nos resultados ou produtos. Destaca-se o modo como "as expectativas se traduzem nas atividades, procedimentos e interações diárias" (p. 49). (4) Os dados são analisados de forma indutiva, não havendo a recolha de elementos com o objetivo de confirmar hipóteses anteriormente formuladas. "O processo de análise de dados é como um funil: as coisas estão abertas de início (no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no final" (p. 50). O investigador determina no desenrolar do estudo quais as questões mais importantes, não havendo a presunção de que esse conhecimento existe no início do estudo. (5) É atribuída extrema importância ao significado imposto pelos participantes no estudo. Com efeito, os investigadores interessam-se profundamente pelas vivências dos mesmos.

O desenho metodológico configura, em concreto, uma opção pelo estudo de caso, sendo o mesmo constituído por uma turma de alunos do 10.º ano de escolaridade de Matemática A, na qual a intervenção didática é desenvolvida. Com efeito, um estudo de caso consiste na observação pormenorizada (Bogdan & Biklen, 1994; Ponte, 2006) de uma entidade bem definida (Coutinho & Chaves, 2002; Ponte, 2006), cujo objetivo é compreender profundamente "o 'como' e os 'porquês' dessa entidade" (p. 2). Ponte (2006) considera que:

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse. (p. 2)

Para o autor, os estudos de caso podem considerar-se exploratórios, descritivos ou analíticos: os exploratórios obtêm informação preliminar relativamente ao objeto em estudo; os descritivos têm como intenção principal caracterizar a situação em causa e os analíticos problematizam o caso, construindo ou desenvolvendo uma nova teoria, ou confrontando-a com teoria já existente. Observa-se que a presente investigação se enquadra num estudo de caso analítico.

Coutinho e Chaves (2002) descrevem um estudo de caso referenciando a particularidade de se estar perante um sistema que apresenta "fronteiras em termos de tempo, eventos ou processos" (p. 224), requerendo a identificação clara do objeto em estudo, onde é necessária a preservação do seu caráter de unicidade, que, decorrendo em ambiente natural, prevê que o investigador se socorra de fontes múltiplas de dados e de métodos diversificados, tais como observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registos de áudio e vídeo, diários, cartas e outros documentos.

Nas palavras de Ponte (2006), um estudo de caso apresenta natureza empírica, apoiando-se em trabalho de campo ou em análise documental. Sendo descritivo, pode, como já se referiu ter profundo poder analítico, podendo contribuir claramente para "ajudar a gerar novas teorias e novas questões de investigação" (p. 8).

Esta investigação insere-se dentro de um estudo de caso qualitativo interpretativo, pois, nas palavras de Stake (2009), procura-se um melhor entendimento do caso, havendo a intenção de avaliar a singularidade e a complexidade do mesmo. Produz-se, segundo Ponte (2006) "um conhecimento de tipo particularístico" (p. 12), não sendo possível a generalização, que evidentemente, não é objetivo deste tipo de pesquisas. Com efeito, segundo o mesmo autor

> os estudos de caso não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias. O seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa. (p. 16)

Observa-se que na presente investigação o professor é o investigador. Efetivamente, quando um investigador trabalha num ambiente da sua proximidade pessoal existirá necessariamente um envolvimento emocional e consequentemente as suas interpretações são influenciadas por esse envolvimento. Neste contexto, o investigador deve procurar distanciar-se de modo a minimizar o efeito da sua personalidade e do ambiente que o circunda na tomada das suas interpretações. A este respeito, Ponte (2006) refere que se pode usar como técnica de distanciamento um potente referencial teórico e que, desde que o investigador "consiga gerar um *corpus* de material empírico que permita estudar essa situação e fazê-lo de modo descomprometido, com o necessário distanciamento, não há motivo para que o investigador não possa realizar alguns estudos de caso" (p. 9). Serrazina e Oliveira (2001) referem que os professores são aqueles que "estão na melhor posição para colocar questões acerca da aprendizagem, para recolher dados e interpretá-los e tomar decisões relativamente ao ensino. É importante que as salas de aula sejam investigadas e que sejam investigadas por professores" (p. 32). Bogdan e Biklen (1994) defendem ainda que, pese embora todos os investigadores educacionais tenham como objetivo a melhoria da prática de ensino

> raramente sabem o que pensam as pessoas envolvidas no processo. (…) Caso desejemos que a mudança seja efetiva, temos que compreender a forma como os indivíduos envolvidos entendem a sua situação, pois são eles que terão de viver com as mudanças. (p. 265)

Assim, a investigação realizada por professores ganha relevo no sentido em que "os seus resultados são imediatamente transformados no mesmo cenário em que a investigação foi realizada" (Serrazina & Oliveira, 2001).

Os participantes no estudo

A escola

A escola onde se realizou esta investigação situa-se numa vila do Alentejo Central, sede de concelho, que possui cerca de 5% do total da população desta zona do Alentejo. A escola serve uma população escolar que abrange um raio de aproximadamente trinta quilómetros, incluindo alunos provenientes de três concelhos limítrofes, recebendo pontualmente alunos de outros concelhos.

No ano letivo de 2011/2012, altura em que se procedeu à recolha dos dados, a escola apresenta 776 alunos, pertencendo 287 ao 3.º ciclo do ensino básico e 489 ao ensino secundário.

Atendendo às diferenças quer económicas quer culturais das muitas freguesias dos três concelhos que constituem a quase totalidade da proveniência dos alunos desta escola, as turmas apresentam, como é natural, grande heterogeneidade. Observa-se um número alargado de alunos com expectativas elevadas para o seu futuro, contrastando com outros que não têm grande ambição.

A escola apresenta um projeto educativo, apontando estratégias de atuação a diferentes níveis: (1) promoção da qualidade do processo educativo; (2) desenvolvimento da motivação e interesse dos alunos pelo seu percurso escolar e pela sua participação na vida da escola; (3) sistematização de uma prática reflexiva consequente sobre os resultados escolares dos alunos; (4) mobilização de toda a comunidade educativa no combate à indisciplina; (5) implementação de um processo de autoavaliação de escola; (6) consolidação de uma cultura de parcerias na escola e entre esta e a comunidade; (7) incrementação da participação dos pais na vida da escola e no percurso escolar dos seus educandos; (8) promoção da formação do pessoal docente e não docente visando a melhoria das suas competências profissionais e pessoais bem como as necessidades da escola; (9) promoção do domínio da Língua Portuguesa como elemento facilitador da aprendizagem noutras áreas do saber e (10) promoção de uma cultura de segurança, saúde e higiene no trabalho.

É uma escola com instalações novas, boas e modernas, pois foi sujeita recentemente a uma intervenção da "Parque Escolar". Encontra-se neste momento em fase de equipamento, havendo desde já condições ótimas para o desenrolar de atividades inovadoras, com recurso às novas tecnologias. Em todas as salas existe um vídeo projetor e estão a ser colocados quadros interativos, sendo que praticamente todas as salas dispõem já deste equipamento. Para além das salas destinadas ao grupo 550 (Informática), a escola apresenta uma sala equipada com computadores e que se destina a ser usada por professores de outras áreas disciplinares, tendo sido nesta sala que decorreu a presente investigação.

A turma

A turma onde se desenvolveu a investigação foi, no ano letivo em que se procedeu à recolha dos dados, a única turma de 10.º ano da professora investigadora. Por este motivo foi esta a turma escolhida para desenvolver o estudo, dado que esta intervenção didática estava programada para este ano de escolaridade.

Com uma média de idades de quinze anos, a turma é constituída por 27 alunos, sendo dezasseis do sexo feminino e onze do sexo masculino.

Em termos de resultados escolares, na disciplina de Matemática, a turma é considerada boa, sendo que, ao nível de 9.º ano a média das classificações foi de 3,6, havendo apenas 4% dos alunos com nível dois (o que corresponde exatamente a um aluno), 48% com nível três (o que corresponde a treze alunos), 33% com nível quatro (correspondendo a nove alunos) e 15% com nível cinco (o que corresponde a quatro alunos).

São alunos com expectativas elevadas, sendo que todos eles ambicionam entrar no ensino superior. Os pais preocupam-se com a vida escolar dos seus educandos sendo, em todos os casos, os encarregados de educação, e também estes têm expectativas elevadas para os seus filhos. Observa-se que 37% das mães e 19% dos pais têm curso superior.

No desenrolar da investigação foi necessário proceder à constituição de grupos de trabalho, tendo a turma sido dividida em nove grupos, com três alunos cada um. A constituição dos mesmos ocorreu ainda no mês de setembro, e, em termos gerais, foram seguidas as sugestões dos alunos na sua constituição, privilegiando como critérios a afinidade entre os alunos e o comportamento. Houve a preocupação de não juntar no mesmo grupo alunos com um comportamento menos exemplar. A distribuição dos níveis de classificação dos alunos pelos diferentes grupos, relativamente ao desempenho na disciplina e tendo por referência os resultados finais de 9.º ano, consta no quadro 1:

Quadro 1 - Distribuição dos níveis de classificação dos alunos pelos grupos de trabalho

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Um aluno com nível dois				x					
Um aluno com nível três		x		x					
Dois alunos com nível três									x
Três alunos com nível três			x		x			x	
Um aluno com nível quatro				x		x			x
Dois alunos com nível quatro									
Três alunos com nível quatro	x						x		
Um aluno com nível cinco									
Dois alunos com nível cinco		x				x			

O grupo 1 era constituído por três alunas com um bom desempenho na disciplina de Matemática A, constituindo um grupo homogéneo em termos de resultados. Revelaram-se sempre muito empenhadas e com uma participação muito ativa no desenrolar das tarefas propostas, sendo alunas com facilidade em aplicar os seus conhecimentos a novas situações.

O grupo 2, constituído por três alunos, todos do sexo masculino, era um grupo mais heterogéneo do que o primeiro, havendo um aluno que se distanciava dos outros por revelar menos facilidade na disciplina. Mostraram-se sempre muito empenhados na realização das tarefas.

O grupo 3 era formado por três alunas, encontrando-se uma delas a repetir o 10.º ano de escolaridade. Revelaram-se empenhadas na resolução das tarefas, sendo um grupo homogéneo, com um desempenho suficiente em termos de resultados.

O grupo 4, composto por três alunos do sexo masculino, era um grupo muito heterogéneo em termos de resultados na disciplina, havendo um deles que no final do 9.º ano obteve nível negativo na disciplina. Um dos alunos que integra o grupo destaca-se dos restantes por, deste o início do ano se revelar bastante crítico e interventivo.

O grupo 5, também homogéneo em termos de resultados na disciplina era formado por três alunas. As mesmas caminhavam a par e passo na resolução das tarefas propostas, não havendo nenhuma que se distanciasse das outras. Revelaram sempre empenho e interesse, todavia, apresentavam também algumas dificuldades na aplicação dos seus conhecimentos em situações novas.

O grupo 6 era constituído por três alunas de um desempenho homogéneo em termos de resultados, extremamente responsáveis e empenhadas na resolução das tarefas propostas. Mostraram facilidade na aplicação dos seus conhecimentos a novas situações.

No grupo 7, composto por três alunas de um desempenho homogéneo, havia uma delas que se distinguia das outras, por apresentar um raciocínio menos rápido e mais dificuldade na aplicação dos seus conhecimentos em novas situações. As três eram muito empenhadas e responsáveis na realização das tarefas.

O grupo 8 era formado por três alunos de um desempenho homogéneo. Revelaram empenho na realização das atividades, todavia notou-se que se apoiaram no grupo 7 para resolução de algumas tarefas. Revelaram sempre alguma dificuldade na aplicação dos seus conhecimentos em novas situações, ainda assim o grupo integrava um aluno que se distanciava um pouco dos outros dois pela sua capacidade de liderança.

Por último o grupo 9 era formado por dois rapazes e uma rapariga apresentando-se como um grupo heterogéneo em termos de resultados. Na resolução das tarefas mostraram sempre empenho, tendo alguma facilidade na aplicação dos seus conhecimentos a novas situações.

Em termos gerais, o trabalho desenvolvido pelos grupos foi ao encontro do que se pretendia. As sessões decorreram num ambiente calmo, onde todos os grupos mostraram interesse e responsabilidade pela consecução das tarefas.

Todos os alunos já conheciam o *Geogebra*, contudo nunca tinham trabalhado com o mesmo de uma forma autónoma e continuada como se veio a verificar nesta intervenção didática.

A sala onde teve lugar a intervenção didática dispunha de 28 computadores. Os alunos trabalharam continuamente nos mesmos computadores, conservando-se sempre a mesma disposição dos grupos. No anexo 1 encontra-se uma planta da sala, onde se pode analisar a disposição dos mesmos. Pelo facto de a turma ser muito grande, alguns grupos trabalharam sempre próximos de outros.

A ética

Na apresentação deste estudo de caso importa mencionar um aspeto bastante importante a ser considerado em qualquer investigação – a ética. No que se refere a investigações qualitativas, que envolvem seres humanos, torna-se fundamental verificar um conjunto de normas que protejam todos os intervenientes. Assim, de acordo com Bogdan e Biklen (1994) essas normas preveem: a voluntariedade de aderência ao projeto de investigação, bem como o conhecimento prévio da natureza do estudo e dos perigos e obrigações intrínsecas ao mesmo; a certeza de que os sujeitos envolvidos experienciarão obrigatoriamente um ganho relativamente aos riscos que possam advir da investigação.

Estes autores explicitam um conjunto de princípios inerentes a estas normas, que asseguram a proteção das identidades dos intervenientes, bem como do anonimato das suas declarações, a existência de relações baseadas na lealdade e respeitabilidade, a negociação e autorização para divulgação dos resultados e a autenticidade na divulgação dos mesmos.

No caso particular da presente investigação, solicitei ao Diretor da escola a devida permissão para a implementação do estudo, tendo dado a conhecer os objetivos do mesmo, bem como o tipo de dados que tencionava recolher e a forma como iria processar essa recolha. Da mesma forma solicitei aos Encarregados de Educação dos alunos da turma envolvida (anexo 10), autorização para efetuar os registos em vídeo, por intermédio do Diretor de Turma, explicando igualmente todos os aspetos que apontavam para o envolvimento dos seus educandos e finalidades da investigação.

A intervenção didática

O tema

O tema escolhido para desenvolver este estudo foi o módulo inicial do 10.º ano: "Resolução de problemas". Sendo o tema "Lógica e Raciocínio Matemático" transversal ao programa de Matemática A, entendeu-se ser esta a parte do programa onde melhor se articula o trabalho com um AGD e o propósito da investigação. Pareceu também ser na articulação com este tema que se obtém maior benefício para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A escolha esteve também sujeita ao fator tempo pois para implementar uma intervenção didática desta natureza é necessário despender horas e, no conjunto global dos três anos, aqui é onde melhor se articula o propósito da investigação com os conteúdos programáticos, dando cumprimento ao programa e permitindo uma abordagem deste tema transversal de uma forma gratificante e motivadora para os alunos, potenciando o tratamento do mesmo.

Organização da intervenção didática

A intervenção didática consistiu na aplicação de seis tarefas aos alunos, durante seis aulas de 90 minutos de Matemática A da turma em causa, durante o primeiro período letivo. Seguiu-se a calendarização que consta no quadro número 2:

Quadro 2 - Calendarização das atividades

Tarefa	Referência	Tempo	Data
Tarefa 0- Relacionando áreas	Adaptado do manual de texto	90'	23 setembro
Tarefa 1 - Pontos médios de um quadrilátero	Adaptado do manual de texto	90'	27 setembro
Tarefa 2 - A ilha	Adaptado dos materiais da unidade curricular Metodologias da Especialidade II	90'	28 setembro
Tarefa 3 - O cão do jardim	Adaptado de NCTM (2007)	90'	30 setembro
Tarefa 4 - Área do retângulo	Adaptado dos materiais disponibilizados no âmbito do Plano de Ação para a Matemática	90'	04 outubro

	II		
Tarefa 5 - Um painel com circunferências	Adaptado de Garry (2003)	90’	11 outubro

O horário da turma distribui a disciplina de Matemática A por três blocos semanais, vinculados às terças, quartas e sextas-feiras. As tarefas distribuíram-se assim por um período de três semanas, como se pode observar no quadro número 3:

Quadro 3 - Distribuição das tarefas pelas semanas em que decorreu o estudo

Semana	2.ªfeira	3.ªfeira	4.ªfeira	5.ªfeira	6.ªfeira
19-23 setembro					T0
26-30 setembro		T1	T2		T3
03-07 outubro		T4	Feriado		Sólidos Platónicos
10-14 outubro		T5			

Cinco tarefas decorreram em aulas consecutivas, havendo um distanciamento relativamente à aplicação da última tarefa. Tal situação deve-se ao facto de eu ter decidido aplicar a tarefa 5 depois de trabalhar com os alunos a construção dos sólidos platónicos.

Previamente às aulas que deram corpo a esta investigação, foram introduzidos aos alunos alguns conceitos importantes, nomeadamente o conceito de conjetura e demonstração. Assim, a aula do dia dezasseis de setembro começou com a apresentação do *PowerPoint* “Dar sentido à demonstração matemática” (anexo 2). Pronunciei-me sobre os tipos de tarefas que os professores podem propor aos seus alunos, focando as principais diferenças existentes entre elas, recorrendo para isso, ao esquema apresentado por Ponte (2003) e que se expõe na figura seguinte:

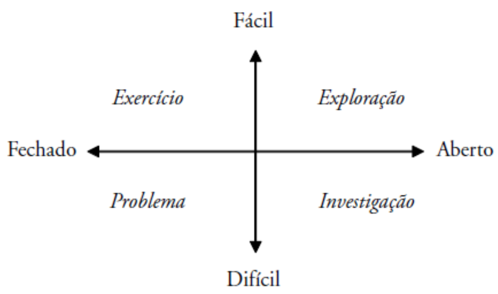


Figura 5 - Os diversos tipos de tarefas, em termos de grau de dificuldade e abertura (Retirado de Ponte, 2003, p. 27)

Posteriormente apresentei aos alunos orientações para a resolução de problemas, focando as seguintes fases: (1) compreensão do problema, (2) estabelecer um plano, (3) executar o plano e (4) reflexão e análise do resultado obtido.

Com o intuito de introduzir a noção de conjetura, propus então que resolvessem um problema do livro de texto (anexo 3) que referia quatro conjuntos de frascos cilíndricos, posicionados de diferentes formas e que se encontram envoltos por uma fita, de acordo com a figura seguinte:

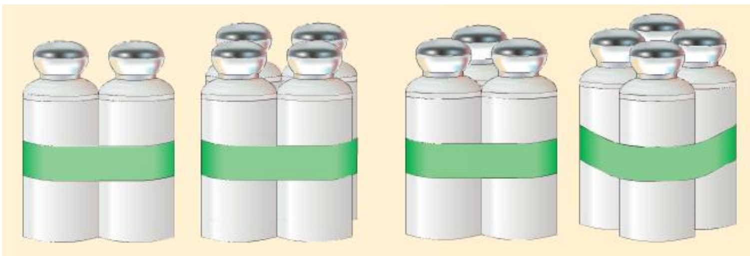


Figura 6 - Ilustração inerente ao problema proposto no dia 16 de setembro

No corpo do problema, era também apresentada a figura 7, focando quatro situações em análise.

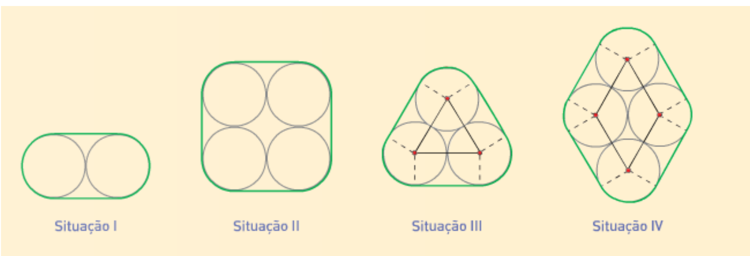


Figura 7 - Ilustração inerente ao problema proposto no dia 16 de setembro

Após uma análise das figuras 6 e 7 bem como dos restantes dados do problema, solicitei aos alunos que estimassem em qual conjunto de frascos, a fita que os envolve completamente sem sobreposição apresenta maior comprimento. Para tal coloquei as seguintes questões: qual é o conjunto que gasta mais fita? O conjunto referente à situação II, III ou IV? E entre os conjuntos II e IV? Qual gastará mais fita?

Depois de um olhar mais atento e profundo sobre a situação, introduzi a noção de conjetura, referindo a definição apresentada em Baruk (2005) e, segundo a qual, uma conjetura é "a 'convicção íntima' do que é a resposta a uma dada questão" (p. 243), sem se dispor provisoriamente da "prova da sua veracidade" (idem).

Solicitei então aos alunos que, analisando atentamente a figura 7 e fazendo uso dos seus conhecimentos, procedessem à formulação de conjeturas sobre a situação em causa. Surgiram duas conjeturas que foram registadas no quadro: conjetura A – *O comprimento da fita na situação IV é inferior ao comprimento da fita na situação II*, e, conjetura B – *A situação II e IV têm igual perímetro*. Observou-se que sete alunos foram adeptos da conjetura A e seis adeptos da conjetura B. Os restantes alunos da turma não se quiseram comprometer com estas conjeturas, nem apresentaram mais nenhuma.

Impôs-se posteriormente a necessidade de verificar qual das conjeturas era a verdadeira, pelo que conduzi o meu discurso no sentido de referir que a prova da veracidade em matemática tem o nome de demonstração. Adotei junto dos alunos uma definição de demonstração apoiada em Lakatos, no sentido em que a validade de uma conjetura pode ser obtida através de provas informais que dispensam o uso da linguagem simbólica formal específica da matemática, valorizando o encadeamento de proposições que respeita princípios de raciocínio lógico-dedutivo rigoroso e universalmente aceites. Esta definição foi também a adotada para efeitos de análise empírica.

Seguiram-se então um conjunto de cálculos matemáticos que provaram a veracidade da conjetura B.

Nas duas aulas seguintes resolveram-se exercícios e problemas variados, referenciando sempre que possível as noções de conjetura e demonstração.

Na aula do dia 23 de setembro os alunos iniciaram o seu trabalho com o *Geogebra*, organizando-se em grupos de dois, três ou quatro elementos. Constituíram-se assim treze grupos de trabalho. No final desta aula procedeu-se à constituição dos grupos de trabalho definitivos.

Propus aos alunos a realização de uma tarefa (denominada tarefa 0, anexo 4) que detinha uma estrutura igual às restantes cinco que estavam previstas para a intervenção didática. No primeiro item desta tarefa foi apresentada uma figura, na qual estavam representados um retângulo [ABCD] e um triângulo [PBD] – figura 8.

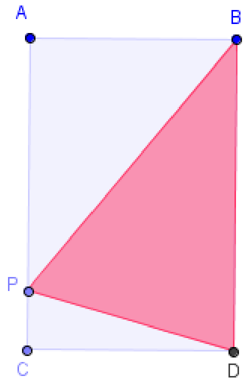


Figura 8 - Polígonos apresentados na tarefa0

Neste item solicitava-se aos alunos que formulassem uma hipótese sobre como as áreas dos dois polígonos se relacionam entre si, solicitando-se também que procedessem ao registo dessas hipóteses.

No registo dessas hipóteses todos os grupos referiram que a área do triângulo é menor do que a área do retângulo, havendo dois grupos que acrescentaram ainda que a área do triângulo é metade da área do retângulo.

No item dois desta tarefa, os alunos iniciaram o seu trabalho com o *Geogebra* construindo a figura para resolução do problema proposto. Como era a primeira construção que os alunos iam fazer no *Geogebra*, comecei por fazer uma apresentação do programa, referindo os principais comandos. A tarefa apresentava também ajudas de construção de um retângulo, de um ponto móvel sobre um segmento, de um polígono e de como medir as áreas dos polígonos. Ainda assim, nem todos os grupos construíram corretamente a figura solicitada. Dos treze grupos, um não construiu corretamente o retângulo e o ponto móvel sobre o segmento de reta AC, dois deles não construíram corretamente o retângulo e outro não construiu corretamente o ponto móvel sobre o segmento de reta AC.

Após o trabalho no *Geogebra* para construção da figura e resolução do problema proposto, seguiu-se a fase de formulação de conjeturas. Assim, no item três é solicitado claramente aos alunos que investiguem e conjeturem sobre a relação das áreas dos dois polígonos, não deixando de proceder ao registo das mesmas.

Neste processo, todos os grupos conjeturaram que a área do triângulo é metade da área do retângulo.

Passou-se de seguida à fase de realização de demonstrações matemáticas, justificada pelo propósito de que os alunos verificassem se as suas conjeturas eram ou não verdadeiras. Solicitei-lhes claramente, através da questão 4 para fazerem as demonstrações das mesmas.

É importante referir que os alunos não sentiam necessidade de realizar a demonstração, uma vez que já todos tinham "visto" que a área do triângulo é metade da área do retângulo. O trabalho com o *Geogebra* tinha-se revelado suficiente na constituição da prova. Assim, voltei novamente ao *PowerPoint* "Dar sentido à demonstração matemática" e referi novamente a importância de realizar uma demonstração matemática para provar a veracidade de uma afirmação. Os alunos aceitaram o que eu lhes estava a dizer, colocando-se então o problema de não saberem como começar a demonstração solicitada.

Dado que nenhum grupo conseguiu iniciar sozinho a demonstração, referi, em grande grupo, que podiam escrever as fórmulas das áreas dos dois polígonos e prosseguir com a comparação dessas expressões. Assim fizeram, todavia, todos os grupos mostraram muitas dificuldades em avançar sozinhos. Revelaram em termos gerais pouca autonomia, necessitando a cada passo de obter um reforço positivo da minha parte, para que prosseguissem, pelo que circulei por todos os grupos, ajudando-os na elaboração da demonstração.

Na elaboração da demonstração, os grupos contemplaram os seguintes tópicos: (a) escrever a fórmula da área do retângulo; (b) escrever a fórmula da área do triângulo; (c) identificar a base e a altura do retângulo e (d) identificar a base e a altura do triângulo. O encadeamento destes tópicos de forma organizada e clara, usando princípios de raciocínio lógico-dedutivo, devia então permitir aos grupos a elaboração da sua demonstração.

Observa-se que a principal dificuldade se prendeu com a identificação da altura do triângulo. Ultrapassada essa dificuldade com as minhas ajudas, todos os grupos acabaram por conseguir demonstrar o solicitado, sendo todas as demonstrações extremamente parecidas. Na figura 9 apresenta-se a demonstração realizada por um dos grupos de trabalho.

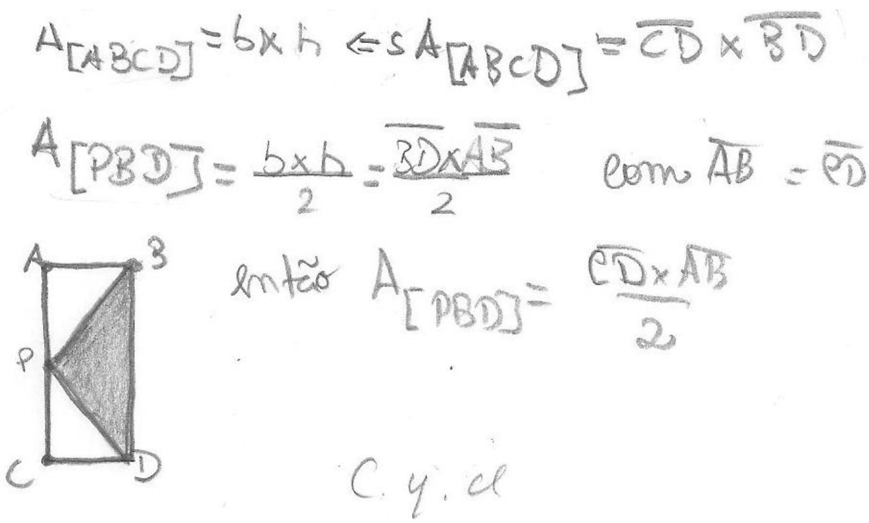


Figura 9 - Demonstração realizada por um grupo, no desenvolvimento da tarefa0

Na continuação da resolução da tarefa 0, e já no item cinco, é pedido aos alunos que comparem as suas demonstrações com as dos grupos vizinhos. Nesta tarefa tal comparação não se realizou, uma vez que as demonstrações eram extremamente idênticas, como já referi. Assim, os alunos passaram ao último item, onde refletiram sobre as funções que atribuem à demonstração matemática. Nas respostas dos alunos é possível identificar ideias que apontam para as funções de verificação e explicação da demonstração, havendo sete referências ao poder verificativo da demonstração e seis referências ao poder explicativo.

As tarefas

Todas as tarefas aplicadas depois da tarefa 0 apresentaram estrutura idêntica a esta, havendo nitidamente em todas elas, seis fases distintas e bem separadas entre si: (a) análise da situação e formulação de hipóteses; (b) trabalho no *Geogebra* para a construção dinâmica ligada ao problema; (c) manipulação da construção com vista à formulação de conjeturas; (d) realização da demonstração matemática; (e) comparação das demonstrações com as dos grupos vizinhos e (f) reflexão sobre as funções da demonstração matemática.

Na fase da análise da situação e formulação de hipóteses, optou-se por introduzir a formulação de estimativas. Esta fase serviu para despertar nos alunos a curiosidade e estimulo no desenrolar do processo investigativo. Assim, levando os alunos a comprometerem-se com uma determinada solução, os próprios sentiam-se incitados a prosseguir com as fases seguintes, no sentido de perceberem se a sua estimativa estava ou não correta. As duas fases seguintes, trabalho no *Geogebra* para a construção dinâmica ligada ao problema e manipulação da construção com vista à formulação de conjeturas apareciam naturalmente, na tentativa de perceber a veracidade da estimativa inicialmente apontada.

Na implementação da fase de realização da demonstração matemática foi necessário desenvolver com os alunos um trabalho possante de motivação no sentido de lhes mostrar a importância da realização da mesma na justificação das nossas conjeturas. Finda esta fase, os grupos compararam a sua demonstração com a dos grupos vizinhos. Efetivamente não quis deixar de proporcionar um momento que permitisse a troca de ideias entre os grupos e que pudesse constituir mais uma oportunidade de enriquecimento para os alunos.

As tarefas terminaram com uma reflexão sobre as funções da demonstração matemática. Após todo este processo impunha-se o registo escrito daquilo que os diferentes grupos entendiam ter ganho com a realização da demonstração matemática. Este momento revestiu-se de extrema importância. Efetivamente a redação obriga a uma organização das ideias na procura da compreensão da atividade experimentada.

Cada uma das tarefas implementadas teve a duração de noventa minutos. Não havendo uma distribuição rígida do tempo, nos primeiros 45 minutos os alunos debruçavam-se sobre as fases (a), (b) e (c) e no restante tempo sobre as fases (d), (e) e (f). No final de cada uma das tarefas foi sempre levado a cabo um momento de discussão conjunta da tarefa realizada, mais concretamente direcionada para a fase de produção de demonstrações matemáticas. Assim, coube-me escolher em cada aula o grupo ou os grupos que deviam apresentar à turma a demonstração matemática realizada. O critério que presidiu a esta escolha estava direcionado para o grau de completude da demonstração produzida, sendo apresentadas à turma todas as demonstrações diferentes que entretanto tivessem surgido. Esta fase mostrou-se muito importante para os alunos, pois, como sustentam vários autores (Ponte e Canavarro,1997; Ponte Brocardo e Oliveira, 2003) as discussões coletivas são um momento importante no estabelecimento do conhecimento matemático da turma, para além de permitirem o desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente e do poder de argumentação dos alunos, como sustentam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

Quanto à sua natureza, todas as tarefas apresentadas são classificadas como tarefas de resolução de problemas.

A tarefa 1 (anexo 5), "Pontos médios de um quadrilátero", pretendia levar os alunos a investigar qual o tipo de quadrilátero que surge no interior de um quadrilátero qualquer, quando se procede à união dos pontos médios consecutivos do quadrilátero exterior. Assim, a tarefa proposta apresentava a figura 10 que continha um quadrilátero convexo, com os seus pontos médios já marcados, figura essa que era o ponto de partida para a resolução da atividade.

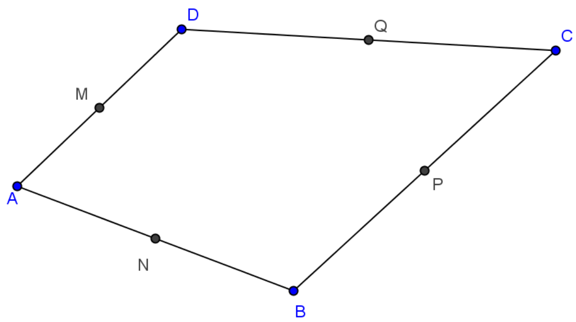


Figura 10 - Quadrilátero apresentado na tarefa1

Esta tarefa obrigava a que os alunos tivessem presente a classificação dos quadriláteros, e, embora seja uma tarefa de resolução fácil e intuitiva, estimula a necessidade da demonstração matemática no sentido da mesma se apresentar como uma prova explicativa da situação em causa.

A tarefa 2 (anexo 6), "A ilha", baseada num problema da vida real, explorava a soma das distâncias de um ponto móvel aos lados de um triângulo equilátero. É uma tarefa atrativa e surpreendente em termos de solução final. No entender de Takáč (2009), este tipo de tarefas, pela surpresa da solução, desenvolvem o espírito crítico nos alunos e consequentemente ajudam a sentir a necessidade de demonstrar.

A tarefa 3 (anexo 7), "O cão do jardim" volta a ser um problema da vida real. Os alunos encontraram-se perante um triângulo retângulo e deviam encontrar um ponto desse lugar geométrico equidistante dos três vértices e cujo segmento resultante da união desse ponto com os vértices do triângulo apresentasse o menor comprimento possível.

Nesta tarefa o trabalho no *Geogebra* pode já abrir caminho para a elaboração da demonstração, sendo facilitador desse processo. A este respeito sublinha-se novamente a ideia de Alcock (2009), segundo a qual, as imagens se correspondem diretamente com as demonstrações que se escrevem.

A tarefa 4 (anexo 8), "Área do retângulo", começava por apresentar aos alunos a figura 11, na qual constava um retângulo [ABCD] com uma das suas diagonais assinalada, estando também representados a sombreado, dois retângulos no interior do primeiro.

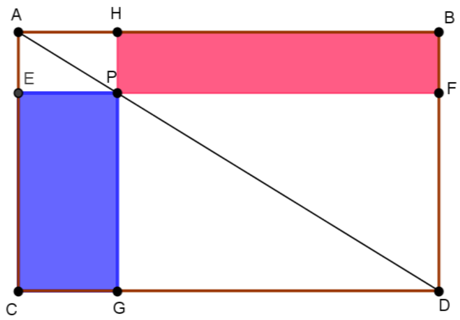


Figura 11 - Retângulo apresentado na tarefa4

Os alunos deveriam então debruçar-se sobre a comparação das áreas dos retângulos [EPGC] e [HBFP].

A demonstração pretendida nesta tarefa não requer um grande conjunto de proposições a encadear logicamente, residindo a sua beleza na simplicidade que a mesma detém. Esta demonstração mostrará aos alunos que é possível a justificação de uma conjetura sem recorrer a grande formalismo matemático.

A tarefa 5 (anexo 9), “Um painel com circunferências”, compreende mais uma situação da vida real, onde os alunos foram levados a investigar quantas circunferências se podem dispor à volta de uma primeira, sendo todas tangentes e congruentes entre si. Esta tarefa, sendo implementada após a construção dos sólidos platónicos, aparece como uma atividade de consolidação. Observa-se que o trabalho no *Geogebra* pode uma vez mais orientar a elaboração da demonstração matemática.

As tarefas implementadas permitiram trabalhar objetivos gerais e específicos do programa de Matemática. Assim, permitiram desenvolver os seguintes objetivos gerais de aprendizagem:

Valores/atitudes

OG1 – Desenvolver a confiança em si próprio (exprimir e fundamentar as suas opiniões; revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios; abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade).

OG2 – Desenvolver hábitos de trabalho e persistência (elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada; manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova).

OG3 – Desenvolver o sentido da responsabilidade (responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas; avaliar situações e tomar decisões).

OG4 – Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação (colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades; respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças).

Capacidades/ aptidões

OG5 – Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (selecionar estratégias de resolução de problemas; formular hipóteses e prever resultados; interpretar e criticar resultados no contexto do problema; resolver problemas nos domínios da Matemática).

OG6 – Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico (descobrir relações entre conceitos de Matemática; formular generalizações a partir de experiências; validar conjeturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados).

OG7 – Desenvolver a capacidade de comunicar (comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico; interpretar textos de Matemática; exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens; usar corretamente o vocabulário específico da Matemática; usar a simbologia da Matemática; apresentar os textos de forma clara e organizada).

Conhecimentos

OG8 – Ampliar conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço (Resolver problemas usando modelos físicos e geométricos).

As tarefas implementadas trabalham também os seguintes objetivos específicos de aprendizagem:

OE1 – Aplicar estratégias na resolução de problemas geométricos.

OE2 – Resolver problemas usando fórmulas de áreas.

OE3 – Resolver problemas envolvendo polígonos.

OE4 – Classificar quadriláteros.

OE5 – Compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas.

OE6 – Decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.

OE7 – Conhecer o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

OE8 – Resolver problemas envolvendo a circunferência.

OE9 – Reconhecer uma pavimentação.

OE10 – Construir simetrias de figuras.

No quadro 4, observam-se quais os objetivos gerais e específicos que surgem ligados a cada uma das tarefas realizadas:

Quadro 4 - Caracterização das tarefas usando os objetivos gerais e específicos que as mesmas trabalham

Tarefas		Objetivos	
		Gerais	Específicos
0	Relacionando áreas	OG;OG2;OG3;OG4; OG5;OG6;OG7;OG8	OE1;OE2;OE3
1	Pontos médios de um quadrilátero	OG;OG2;OG3;OG4;	OE1;OE2;OE3; OE4;OE5;OE6

		OG5;OG6;OG7;OG8	
2	A ilha	OG1;OG2;OG3;OG4; OG5;OG6;OG7;OG8	OE1;OE2;OE3;OE5;
3	O cão do jardim	OG1;OG2;OG3;OG4; OG5;OG6;OG7;OG8	OE1;OE2;OE3;OE5; OE8;OE10
4	Área do retângulo	OG1;OG2;OG3;OG4; OG5;OG6;OG7;OG8	OE1;OE2;OE3
5	Um painel com circunferências	OG1;OG2;OG3;OG4; OG5;OG6;OG7;OG8	OE1;OE2;OE3; OE7;OE8; OE9

Na seleção cuidada das atividades nunca se esqueceu o objetivo central desta investigação: analisar como é que os alunos constroem dinamicamente figuras e posteriormente como conjeturam e procedem à elaboração de demonstrações matemáticas. Houve a preocupação de escolher tarefas diversificadas e que trabalhassem conteúdos já lecionados de modo a que estes pudessem ser mobilizados para a construção das demonstrações, funcionando como elementos motivadores para os alunos e facilitadores deste processo.

Na seleção das demonstrações houve também a preocupação de optar por tarefas que aguçassem o espírito crítico dos alunos e que só por si, funcionassem como estímulo à realização de demonstrações matemáticas. Assim, algumas das tarefas implementadas apresentam uma riqueza tal, que inicialmente parecem ter uma solução mas depois de se trabalhar com elas apresentam uma solução diferente.

Recolha e análise de dados

Na tentativa de conseguir uma adequada consecução dos objetivos propostos nesta investigação, apelou-se a uma variedade de instrumentos de recolha de informação: observação, relatórios, as tarefas e ficheiros digitais de *Geogebra* produzidos pelos alunos e registo vídeo de alguns momentos das aulas, de acordo com as diversas dimensões dos fenómenos a observar. Com estes instrumentos, concebidos em função dos objetivos do estudo e determinados pelo evoluir da dinâmica da investigação, procurará responder-se à natureza interpretativa da mesma, permitindo uma caracterização multifacetada da experiência efetuada. No decurso da investigação procurar-se-á, sempre que possível, recorrer a procedimentos de triangulação, como forma de garantir um cruzamento de fontes múltiplas de evidência e, assim, elevar a qualidade da informação obtida, garantindo-se uma maior fiabilidade e validade ao estudo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) num estudo qualitativo os dados dão corpo à base de análise e incluem todos os materiais recolhidos pelo investigador, tais como notas de campo relativas às observações efetuadas e transcrições de entrevistas, ou ainda, documentos criados por outros e considerados importantes para o estudo. “Os dados são simultaneamente as provas e as pistas” (p. 149). Os dados fazem a ligação “ao mundo empírico e, quando sistemática e rigorosamente recolhidos, ligam a investigação qualitativa a outras formas de ciência. Os dados incluem os elementos necessários para pensar de forma adequada e profunda” (idem) acerca dos aspetos que se pretendem investigar.

No entender de Stake (2009) o estudo qualitativo beneficia nas “formas triviais de familiarização com as coisas” (p. 65), sendo que muito não é registado, mas sim conhecimento cerebral. Com efeito, “todos os investigadores têm um grande privilégio e uma grande obrigação: o privilégio é prestar atenção ao que consideram digno de atenção e a obrigação de tirar conclusões retiradas das escolhas mais significativas para colegas e clientes” (idem).

Este autor prevê a existência de um plano, para facilitar a tarefa de recolha dos dados. Assim, esse plano deverá incluir a definição do caso, uma lista de perguntas de investigação, a identificação dos ajudantes, a definição das fontes de dados, a distribuição do tempo, as despesas previstas e o relatório pretendido. Tal plano foi concebido na presente investigação, seguindo todas essas fases, à exceção da identificação das despesas previstas, por as mesmas serem pouco expressivas.

A observação participante foi de facto uma técnica seguida nesta investigação. Segundo Rodrigues (2008) “a designação de observação participante reporta-se a um método de investigação em que o investigador assume um papel de participante nas atividades dos elementos da comunidade alvo da observação” (p. 467). Para a autora, é um método especialmente indicado para as investigações dos acontecimentos ocorridos numa situação particular.

Na presente investigação, as observações decorreram durante a intervenção didática. Assim, após cada aula em que decorreu a implementação do estudo, efetuei um registo dos acontecimentos vivenciados, não usando para tal tarefa, qualquer formulário previamente elaborado. Estes registos revelaram-se muito úteis na compreensão e descrição do caso.

Segui criteriosamente o método de, após cada aula observada, redigir um conjunto de notas soltas que descrevesse os aspetos decorridos nessa aula e por mim vivenciados. Esse relato escrito daquilo que vi e ouvi mostrou-se importantíssimo e permitiu guardar pormenores, que, de outro modo seriam facilmente esquecidos. Para tal, foram também importantes os registos vídeo que permitiram igualmente a recuperação de pequenos detalhes. O recurso a este tipo de técnica (registo vídeo) foi usado invariavelmente no final da realização das tarefas, mais precisamente na altura em que se procedia a uma discussão coletiva e consequente apresentação à turma do trabalho produzido pelos diferentes grupos.

Para a análise documental, outra técnica também seguida nesta investigação, foram usados os seguintes documentos: trabalhos de todos os alunos da turma, entregues em suporte de papel e respetivos ficheiros de *Geogebra*, correspondentes à realização das tarefas propostas; registos vídeo obtidos nas aulas observadas, conforme atrás se clarifica e notas de campo retiradas por mim no final de cada aula observada.

A análise dos dados, segundo Bogdan e Biklen (1994), envolve a organização da informação extraída dos documentos que foram sendo acumulados, apontando para um aumento da compreensão desses mesmos materiais e consequente apresentação aos outros das conclusões a que se chegou.

Na presente investigação, a análise de dados foi levada a cabo essencialmente em duas fases: uma primeira fase em que se procede à organização dos dados de forma a facilmente proceder à sua exploração e uma segunda onde se efetua uma análise baseada numa leitura transversal dos dados obtidos, focada nos objetivos relativos a cada questão orientadora do estudo.

A primeira fase de análise centra-se em cinco tarefas integradas no tema de resolução de problemas de 10.º ano: *Pontos médios de um quadrilátero*; *A ilha*; *O cão do jardim*; *Área do retângulo*; e *Um painel com circunferências*.

Começasse por fazer a compilação dos dados referentes a cada uma das tarefas, havendo a preocupação de os organizar em seis categorias diferentes e alusivas ao trabalho proposto aos diferentes grupos: (a) formulação de hipóteses; (b) trabalho no *Geogebra* para construção da figura dinâmica ligada ao problema; (c) formulação de conjeturas; (d) realização da demonstração matemática; (e) comparação das demonstrações com as dos grupos vizinhos e (f) reflexão sobre as funções da demonstração matemática.

Nesta fase ganham relevo todos os documentos de que disponho, tais como, registos escritos produzidos pelos alunos, notas de campo e registos vídeo.

Numa segunda fase, realiza-se uma leitura transversal, por categorias, e de acordo com as questões do estudo previstas na presente investigação, cruzando os factos observados, de forma a produzir conclusões. Nesta fase ganha relevo o enquadramento teórico, pois, como refere Rodrigues (2008)

> o enquadramento teórico tem um lugar primacial na investigação e, em particular, na fase de análise de dados. A relação entre a teoria e os dados empíricos conduz a uma forte interação entre dedução e indução numa investigação. A teoria ajuda a entender os dados e a análise de dados ajuda a entender os conceitos teóricos. (pp. 485 e 486)

Saliento de novo que uma investigação qualitativa está carregada de subjetividade, pelo que a análise dos dados por mim efetuada será necessariamente diferente da análise produzida por qualquer outro investigador. Deste modo as conclusões apresentadas serão uma interpretação da realidade por mim vivenciada.

CAPÍTULO VI

A turma e a demonstração matemática

Este capítulo apresenta-se estruturado em cinco secções, constituindo no seu todo a apresentação do estudo de caso da turma que participou nesta intervenção didática. Apresenta-se separadamente cada uma das tarefas implementadas, recaindo o foco principal de observação, no modo como os grupos conjeturam e procedem à demonstração das conjeturas estabelecidas. Assim, em cada uma das tarefas, procura-se abordar os seguintes aspetos: (a) grau de construção dinâmica no *Geogebra*, (b) processo de investigação e formulação de conjeturas com recurso ao *Geogebra*, (c) realização de demonstrações matemáticas e (d) as funções da demonstração matemática para os alunos. Esta estrutura procura apresentar o caso com uma intenção analítica tendo em conta as questões da investigação.

Pontos médios de um quadrilátero

Na tarefa 1 (anexo 5) pretende-se que os alunos investiguem qual é o tipo de quadrilátero que surge quando se unem os pontos médios consecutivos de um quadrilátero qualquer.

Dando início à tarefa, os alunos começaram por analisar a figura 12, que continha um quadrilátero convexo, com os seus pontos médios já marcados.

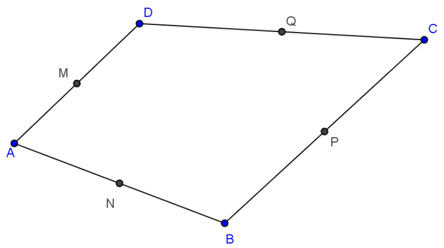


Figura 12 - Quadrilátero apresentado na tarefa1

Foram então convidados a unir, usando material de escrita, esses pontos médios e lançar uma hipótese sobre o tipo de quadrilátero que surgia no interior do quadrilátero dado.

No registo dessas hipóteses observaram-se essencialmente a identificação de dois tipos de respostas: o paralelogramo e o retângulo, como se torna visível olhando as suas respostas organizadas nas figuras 13 e 14.

A fig. que surge é um quadrilátero trapézio e paralelogramo. G1	Surge um trapézio paralelogramo. G2
O quadrilátero que surge no interior de [ABCD] é um trapézio paralelogramo. (retângulo) G3	Paralelogramo G4

Figura 13 - Respostas dos grupos 1, 2, 3 e 4 à questão 1 da tarefa1

Rectângulo. G5	Rectângulo. G6	R.: os pontos médios, unidos, formam um rectangulo.
Rectângulo G8	O quadrilátero que surge no interior é um rectângulo. G9	G7

Figura 14 - Respostas dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 à questão 1 da tarefa 1

Ao fazer o percurso pelos grupos, e após observação das respostas dadas, solicitei aos alunos que não alterassem essa sua primeira resposta, mesmo que o trabalho no *Geogebra* lhes trouxesse uma interpretação diferente. Seria de todo importante ficar com o registo rigoroso de qual tinha sido a primeira impressão do grupo relativamente ao tipo de quadrilátero.

Os alunos iniciaram então o seu trabalho com o *Geogebra*. A construção não se mostrou complicada para a generalidade dos grupos, dada a simplicidade inerente à construção solicitada e também devido ao facto de toda a turma ter tido como treino a tarefa 0. Ainda assim, nem todos os grupos apresentaram uma construção perfeita. Observa-se que considero uma construção perfeita quando a mesma contempla corretamente todos os aspetos que envolvem a sua construção. Todos os grupos apresentaram construções dinâmicas, sendo possível em todas elas proceder ao arrastamento dos seus pontos móveis permitindo a já expectável manipulação, pese embora algumas não mantenham as mesmas propriedades e por isso não sejam consideradas robustas (consistentes). Com efeito, toda a turma construiu o quadrilátero, recorrendo ao comando de construção de segmentos, usando dois pontos e posteriormente o ponto médio de cada um dos lados consecutivos do quadrilátero exterior, notando-se que houve a preocupação de construírem exatamente a figura como aparece exposta na ficha de trabalho, usando inclusivamente as mesmas letras. Todavia, observou-se a existência de um grupo que não determinou os pontos médios dos segmentos, pelo que a sua construção foi considerada imperfeita.

No quadro 5, observam-se então algumas diferenças ao nível das construções dos diferentes grupos.

Quadro 5 - Aspetos contemplados pelos grupos na construção da figura inerente à tarefa 1

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Construção do quadrilátero usando segmentos	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção do ponto médio dos segmentos que constituem o quadrilátero exterior		x	x	x	x	x	x	x	x
Medição da amplitude dos ângulos internos do quadrilátero interior		x		x		x		x	x
Medição do comprimento dos lados do quadrilátero interior		x		x		x			

Na construção da figura solicitada, alguns grupos sentiram necessidade de proceder às medidas das amplitudes dos ângulos internos e dos comprimentos dos lados do quadrilátero interior. Outros, porém, ficaram apenas pela medida das amplitudes dos ângulos internos deste quadrilátero. Observa-se ainda que os grupos 1, 3, 5 e 7 não executaram quaisquer medidas.

A construção menos perfeita foi a do grupo 1, não chegando sequer à construção dos pontos médios dos lados do quadrilátero exterior. Quando confrontados com esta falha de construção, referiram não ter sentido essa necessidade, sendo suficiente para estas alunas, o deslocamento do ponto móvel que construíram em cada segmento dos lados consecutivos do quadrilátero, para aquele que visualmente seria, mais ou menos, o ponto médio do mesmo.

No processo de formulação de conjeturas sobre o que se obtém quando se unem os pontos médios do quadrilátero exterior, os grupos registaram conjeturas diversas, como se pode observar nas figuras 15 e 16, revelando alguns deles, falhas no domínio de conceitos relativamente às propriedades de alguns quadriláteros.

Unindo esses pontos observamos que a figura continua a ser um paralelogramo ~~pois~~, e trapézio pois, têm os lados opostos paralelos.	G1
A nossa conjectura mantém-se constante, continuamos a achar que surge um trapézio paralelogramo	G2
As nossas conjecturas é que o quadrilátero continua a ser um rectângulo.	G3
No interior do quadrilátero [ABCD], unindo os pontos médios de cada recta, pontos M, N, P, Q, forma um paralelogramo, pois os lados opostos são ~~se~~ paralelo	G4

Figura 15 - Respostas dos grupos 1, 2, 3 e 4 à questão 3 da tarefa1

No interior surge um rectângulo.	G5
No interior surge um rectângulo.	G6
No interior do ~~[illegible]~~ Trapézio [ABCD], forma-se um rectangulo ligado pelos pontos médios M, N, O, P.	G7
No interior surge um rectângulo formado pelos pontos [MNPO].	G8
Verificámos que unindo os pontos médios, surge um rectângulo.	G9

Figura 16 - Respostas dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 à questão 3 da tarefa1

Com efeito, todos os grupos mantiveram como conjeturas as hipóteses que tinham inicialmente estabelecido, à exceção do grupo 3, que acabou por clarificar a visualização do retângulo, em detrimento do paralelogramo. É a passagem à questão 4, onde se solicita mais especificamente que se modifique o quadrilátero exterior por arrastamento dos seus vértices, que leva a maior parte dos grupos a clarificar qual é o tipo de quadrilátero que surge por união dos pontos médios do quadrilátero exterior.

Efetivamente todos os grupos procederam ao arrastamento dos vértices, tal como solicitado. Começaram por explorar quadriláteros convexos e de seguida foram levados por mim a explorar também quadriláteros côncavos.

Neste processo de investigação começaram então a surgir pelos diversos grupos vários tipos de quadriláteros.

Notando que havia dúvidas sobre a classificação dos mesmos, foi feita uma discussão coletiva, onde se procedeu à distinção entre trapézios e não trapézios e, dentro dos trapézios, entre trapézios propriamente ditos e paralelogramos. Com o objetivo de esclarecer algumas dúvidas que foram surgindo sobre a diferença entre os vários tipos de paralelogramos, estabeleceu-se uma discussão conjunta sobre as principais características dos retângulos, quadrados, losangos e paralelogramos propriamente ditos, tendo as conclusões sido registadas por mim no quadro.

Esta discussão mostrou-se fundamental para ajudar os diversos grupos a registar com mais propriedade as conjeturas que tinham formulado.

Todos os grupos conjeturaram que da união dos pontos médios consecutivos de um quadrilátero surge sempre um paralelogramo. Procederam ao registo das conjeturas, sendo que alguns dos grupos mencionaram os vários paralelogramos que viram, como se pode observar na figura 17.

Arrastando os vértices da figura do
quadrilátero exterior verificamos que a figura
interior constitui sempre um trapézio mas, sempre
diferentes tipos de paralelogramos.

G1

O quadrilátero interior pode tornar-se um paralelogramo, um rectângulo e até um quadrado.
Todos as figuras que formámos são trapézios paralelogramos, apesar de aparecerem os mais diversos quadriláteros, mas em todos têm os lados opostos paralelos

V.S.F.F.

G2

Ao mover-mos um vértice observamos a mesma um trapézio mas as figuras vão-se alterando. Podemos obter um quadrado, um losango, um paralelogramo, ou seja, sempre um paralelogramo.

G3

Por mais que afastemos os pontos do quadrilátero no Geogebra, a figura formada pelos pontos médios será sempre um paralelogramo.

G4

Ao modificarmos o quadrilátero exterior observarmos que no quadrilátero interior podemos observar um Rectângulo, paralelogramo, quadrado e um losango.

G5

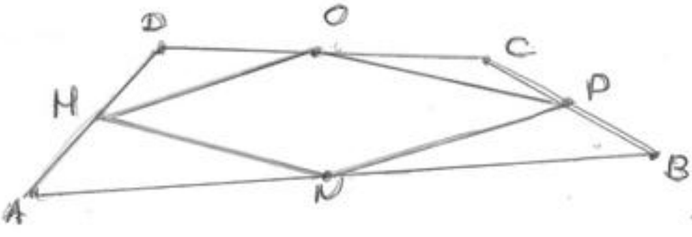
Ao mexermos nos seus vértices exteriores, o quadrilátero interior pode continuar um rectângulo, mas também pode variar entre um quadrado, um paralelogramo e um losango.

G6

No interior do quadrilátero pode aparecer:

- Paralelogramo
- Quadrado
- Losângulo
- Rectângulo

G7



No interior aparece um losangulo como também aparece um paralelogramo, um quadrado e um rectângulo.

G8

Quando arrastamos os vértices, aparece sempre paralelogramos.	G9

Figura 17 - Respostas dos grupos à questão 4 da tarefa1

Na fase de realização de demonstrações matemáticas, os alunos verificaram então se as suas conjeturas eram ou não verdadeiras, sendo-lhes solicitado explicitamente, através da questão 5, para fazerem as demonstrações das mesmas.

Esta foi a parte onde se fizeram sentir mais dúvidas. Na realidade, os grupos percebiam o que lhes era solicitado, dada a semelhança de estrutura existente entre esta ficha e a ficha de trabalho 0, embora não sentissem essa necessidade. Sabiam que tinham de desenvolver um procedimento matemático para provar o solicitado, mas nenhum grupo foi capaz de iniciar sozinho a sua demonstração. O primeiro grupo a mostrar a sua dificuldade neste âmbito foi o grupo 3, ao qual se seguiram os outros. Pela perceção imediata do cariz geral desta dificuldade, foi feita uma segunda discussão coletiva, na qual comecei por questionar os grupos em particular, se tinham a ideia clara do que queriam demonstrar. Perante a resposta afirmativa dos mesmos, questionei se havia alguma ideia de como começar essa demonstração. Como nenhum aluno teceu qualquer consideração, dei a sugestão de dividirem o quadrilátero em dois triângulos. Após os alunos perceberem que essa divisão fazia sentido usando uma das diagonais, voltaram ao trabalho nos grupos, tendo sido ainda necessário referir que deviam prosseguir pela semelhança de triângulos. Os diferentes grupos conseguiram então desenvolver as suas demonstrações, mostrando pouca autonomia e necessitando a cada passo de um sinal de confirmação para avançarem.

Na elaboração da demonstração, os grupos contemplaram os seguintes tópicos: (a) divisão do quadrilátero pela diagonal, em dois triângulos; (b) semelhança de triângulos e (c) a definição de paralelogramo. O encadeamento destes tópicos de forma organizada e clara, usando princípios de raciocínio lógico-dedutivo, devia então permitir aos grupos a elaboração da sua demonstração.

O quadro 6 apresenta o desempenho dos grupos relativamente à produção da demonstração.

Quadro 6 - Tópicos usados pelos grupos de trabalho na elaboração da demonstração da tarefa 1 e grau de completude na consequente obtenção de conclusões

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Divisão do quadrilátero pela diagonal em dois triângulos	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Semelhança de triângulos	c	a	b	a	b	a	b	b	b
Noção de paralelogramo	d	a	d	b	b	a	b		a

Legenda:

a – utiliza o tópico em questão de forma completa e explicitada, seguindo-se a produção de conclusões.

b – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com alguma incorreção, permitindo a produção de conclusões.

c – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com incorreção tal que não permite a produção de conclusões.

d – utiliza o tópico em questão de forma muito incompleta.

Com efeito, o grupo 1 produz uma demonstração muito baralhada. Recorrendo à figura abaixo representada,

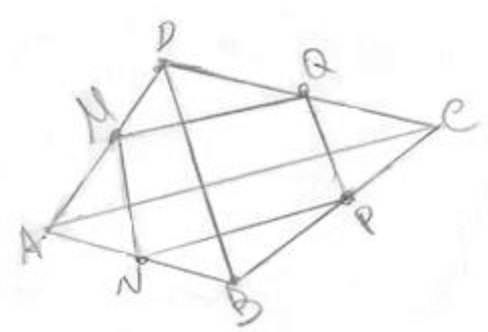


Figura 18 - Esquema do grupo 1 existente na resposta à questão 5 da tarefa 1

faz alusão a que os triângulos [DAB] e [MAN] são semelhantes justificando corretamente tal semelhança. Refere também que MN e DB são proporcionais mas não consegue desenvolver um raciocínio que demonstre claramente o solicitado.

Apresentam-se de seguida as respostas dos restantes grupos.

O grupo 2, na sua demonstração socorre-se do ficheiro *Geogebra*, pelo que se apresenta de seguida a figura 19 resultante desse ficheiro.

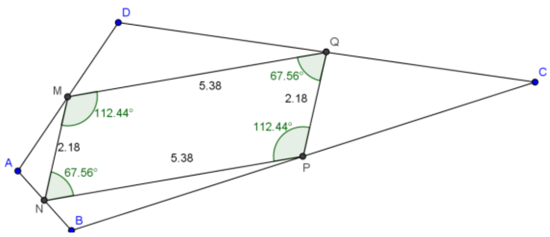
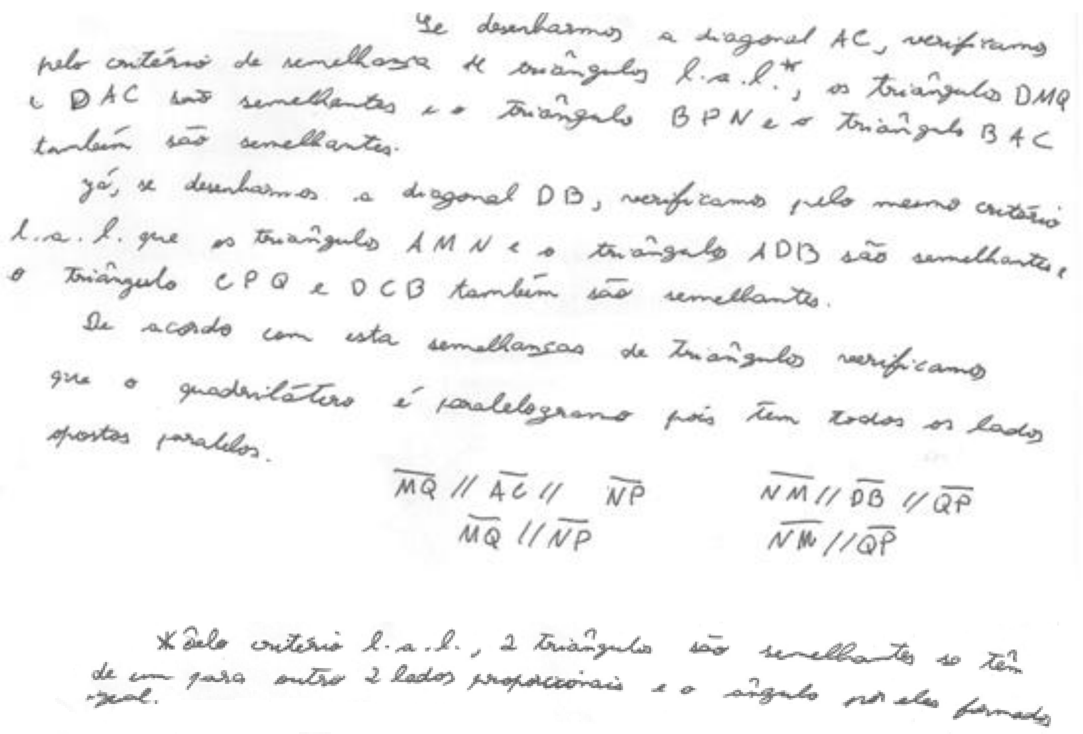


Figura 19 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 2, referente à tarefa1



Se desenharmos a diagonal AC, verificamos pelo critério de semelhança de triângulos l.a.l.*, os triângulos DMQ e DAC são semelhantes e o triângulo BPN e o triângulo BAC também são semelhantes.

Já, se desenharmos a diagonal DB, verificamos pelo mesmo critério l.a.l. que os triângulos AMN e o triângulo ADB são semelhantes, o triângulo CPQ e DCB também são semelhantes.

De acordo com esta semelhanças de triângulos verificamos que o quadrilátero é paralelogramo pois tem todos os lados opostos paralelos.

$\overline{MQ} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{NP}$ $\overline{NM} \parallel \overline{DB} \parallel \overline{QP}$

$\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ $\overline{NM} \parallel \overline{QP}$

*Pelo critério l.a.l., 2 triângulos são semelhantes se têm de um para outro 2 lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

Figura 20 - Resposta do grupo 2 à questão 5 da tarefa1

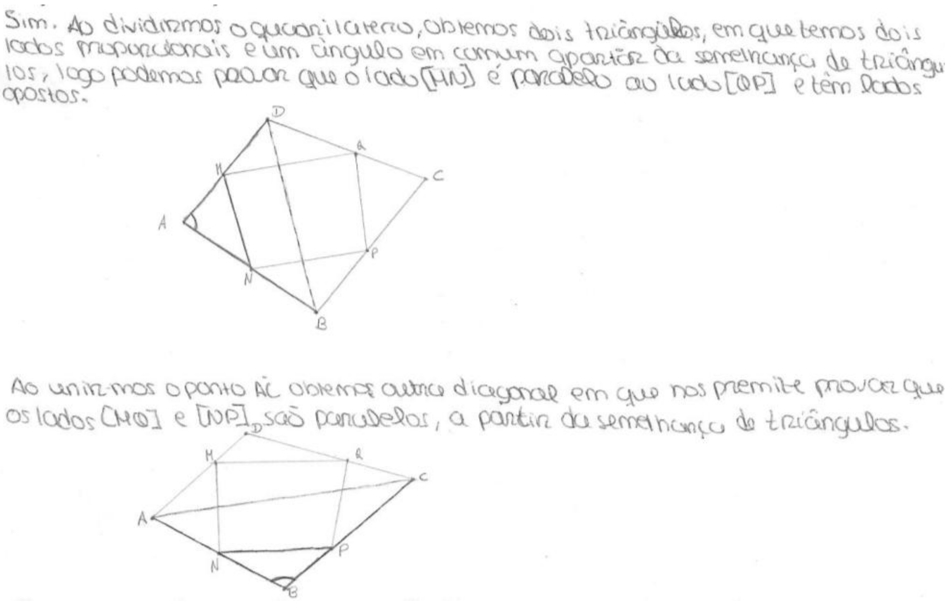


Figura 21 - Resposta do grupo 3 à questão 5 da tarefa1

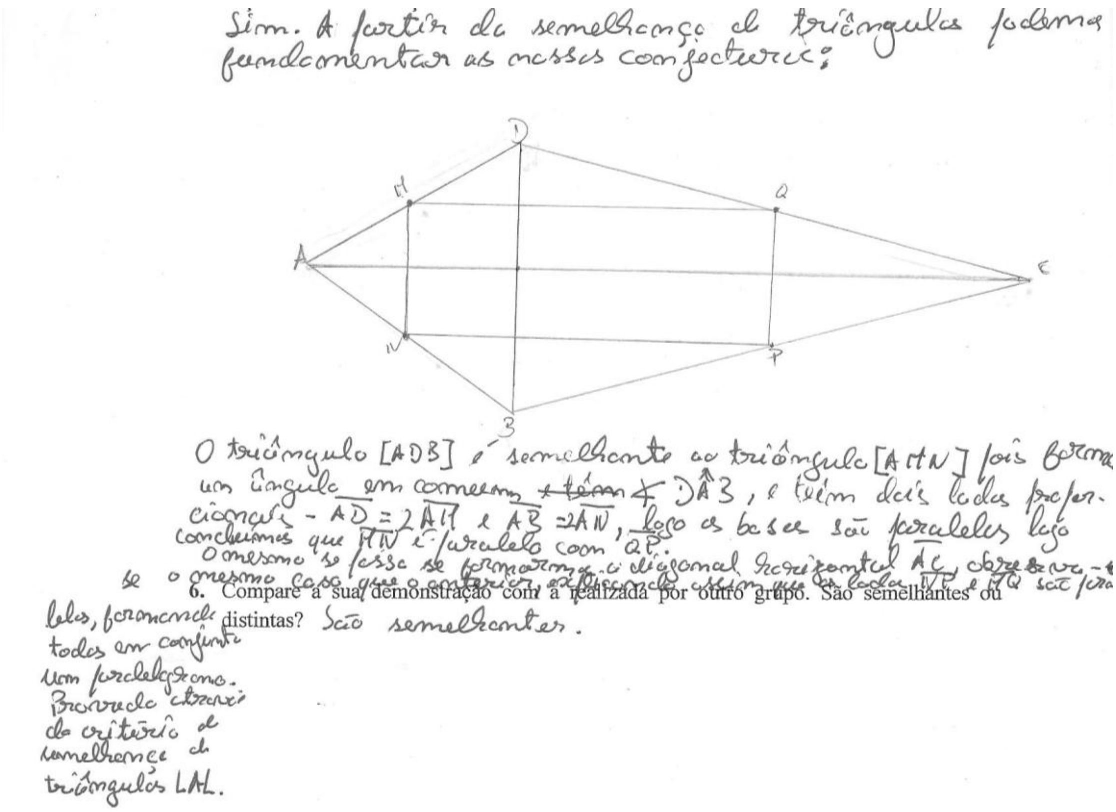


Figura 22 - Resposta do grupo 4 à questão 5 da tarefa1

O grupo 5, na sua demonstração faz alusão ao ficheiro de *Geogebra*, pelo que a figura resultante do mesmo é apresentado na figura 23.

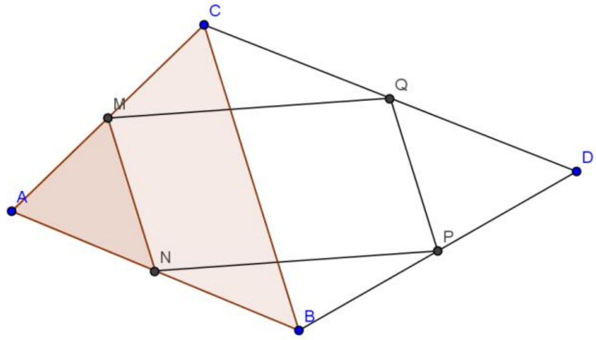
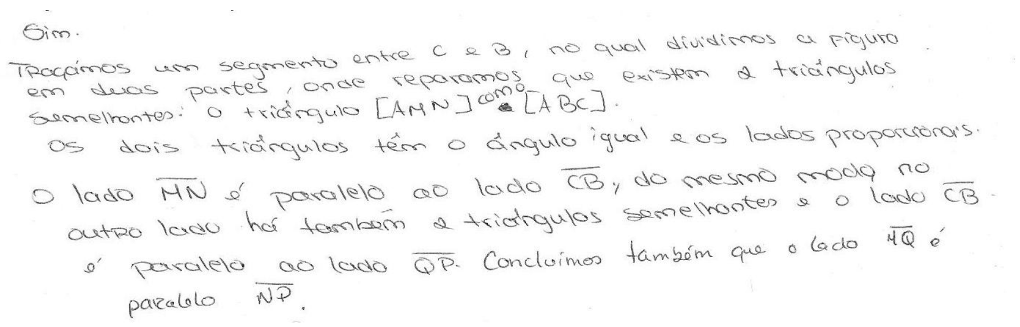


Figura 23 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 5, referente à tarefa1



Sim.
Traçámos um segmento entre C e B, no qual dividimos a figura em duas partes, onde reparamos que existem 2 triângulos semelhantes: o triângulo [AMN] como [ABC].
Os dois triângulos têm o ângulo igual e os lados proporcionais.
O lado $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{CB}$, do mesmo modo no outro lado há também 2 triângulos semelhantes e o lado $\overline{CB}$ é paralelo ao lado $\overline{QP}$. Concluímos também que o lado $\overline{MQ}$ é paralelo $\overline{NP}$.

Figura 24 - Resposta do grupo 5 à questão 5 da tarefa1

Também o grupo 6, no desenvolvimento da sua demonstração se socorre do ficheiro *Geogebra*, pelo que a figura resultante do mesmo é apresentado de seguida.

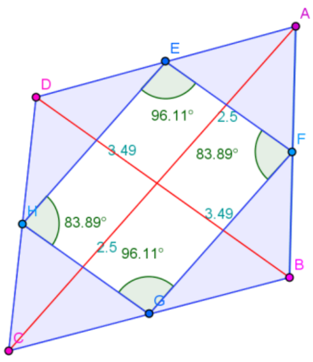


Figura 25 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 6, referente à tarefa1

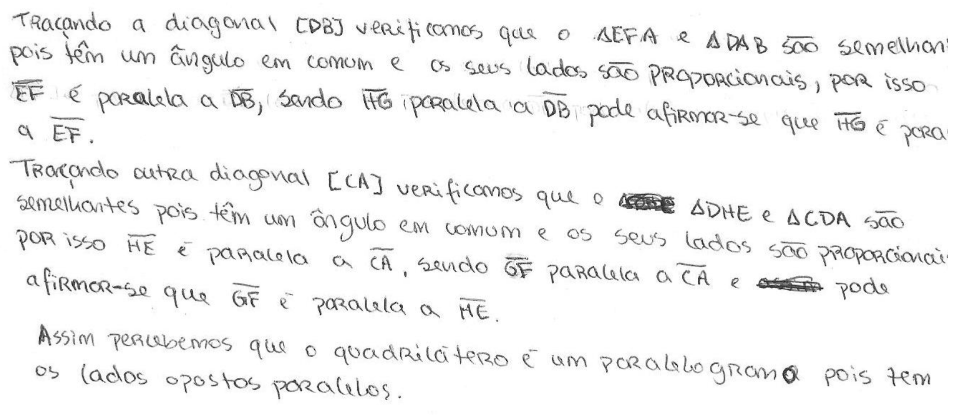

Traçando a diagonal [DB] verificamos que o ΔEFA e ΔDAB são semelhan-
pois têm um ângulo em comum e os seus lados são proporcionais, por isso
$\overline{EF}$ é paralela a $\overline{DB}$, sendo $\overline{HG}$ paralela a $\overline{DB}$ pode afirmar-se que $\overline{HG}$ é para
a $\overline{EF}$.
Traçando outra diagonal [CA] verificamos que o ΔDHE e ΔCDA são
semelhantes pois têm um ângulo em comum e os seus lados são proporcionai
por isso $\overline{HE}$ é paralela a $\overline{CA}$, sendo $\overline{GF}$ paralela a $\overline{CA}$ e pode
afirmar-se que $\overline{GF}$ é paralela a $\overline{HE}$.
Assim percebemos que o quadrilátero é um paralelogramo pois tem
os lados opostos paralelos.

Figura 26 - Resposta do grupo 6 à questão 5 da tarefa1

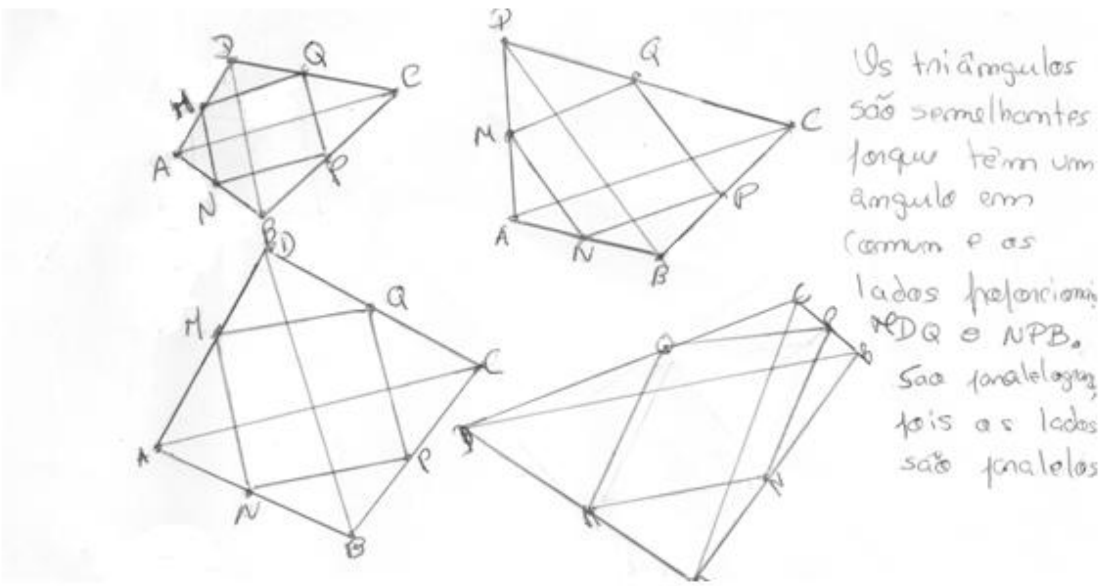


Figura 27 - Resposta do grupo 7 à questão 5 da tarefa1

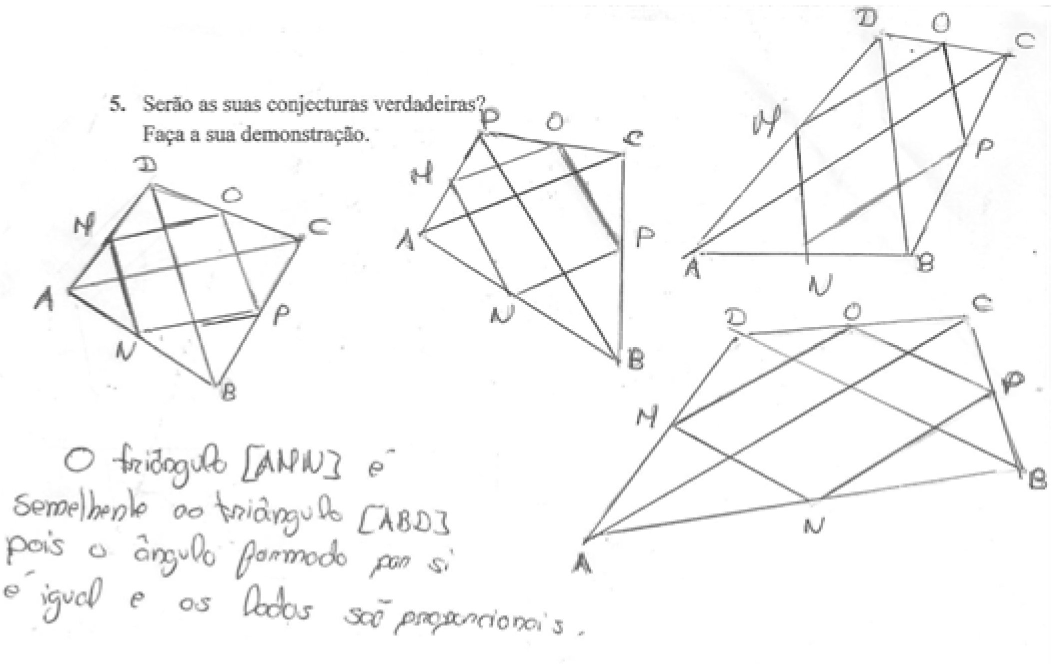


Figura 28 - Resposta do grupo 8 à questão 5 da tarefa1

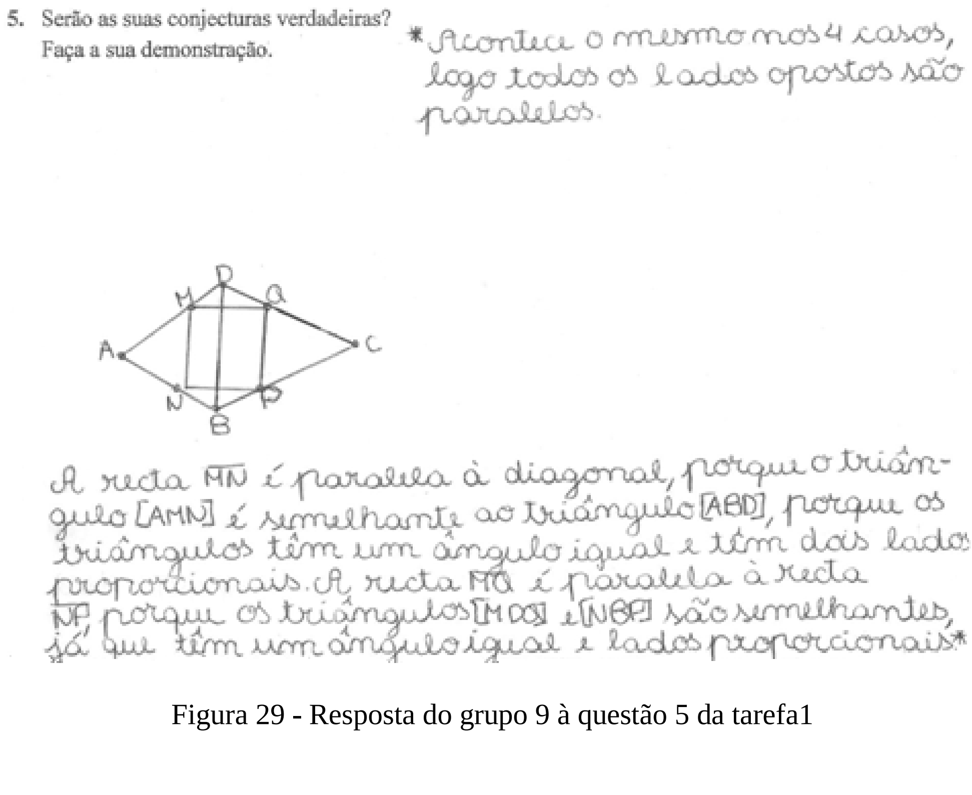


Figura 29 - Resposta do grupo 9 à questão 5 da tarefa1

Nem todos os grupos conseguiram demonstrar a propriedade solicitada como se observa no quadro seguinte:

Quadro 7 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar a propriedade pedida na tarefa 1

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Demonstra o pretendido		x	x	x	x	x			x
Não demonstra o pretendido	x						x	x	

Com efeito o grupo 1 fica muito aquém da demonstração, como já se referiu atrás e os grupos 7 e 8 prendem-se com casos particulares, não conseguindo desenvolver uma generalização.

Os grupos compararam então a sua demonstração com a demonstração do grupo vizinho, ao que todos responderam ser semelhante.

Refletindo agora sobre as funções que os alunos atribuem à demonstração, os grupos responderam à questão 7, referindo o que a demonstração lhes acrescentou relativamente à conjetura que tinham inicialmente formulado. No quadro 8 observam-se então as funções que os diferentes grupos atribuíram à demonstração que realizaram.

Quadro 8 - Funções da demonstração matemática explicitadas pelos grupos de trabalho na realização da tarefa 1

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Verificação	x				x	x			
Explicação		x	x	x			x	x	x

Com efeito, da análise realizada às respostas dos grupos de trabalho é possível subentender que os grupos 1, 5 e 6 atribuem à demonstração a sua função verificativa, sendo que, com a demonstração estes alunos ganham "mais certezas" sobre a propriedade em causa. A função explicativa é percecionada pelos grupos 2, 3, 4, 7, 8 e 9. Para o grupo 2, a sua demonstração "explicou e completou a conjetura que inicialmente tinha formulado". Nas palavras destes alunos, foi no *Geogebra* que "ganhamos mais certeza". Para o grupo 7 a realização da demonstração, consente que percebam "melhor como se faz" e para o grupo 8 "a demonstração acrescentou algum conhecimento, porque nos deu mais certezas". Depreendo que, para estes alunos, a demonstração explicou o porquê.

A ilha

A tarefa 2 (anexo 6) considera uma ilha em forma de triângulo equilátero e um náufrago, que, tendo ido parar a essa ilha, decide construir nela a sua casa para passar uns tempos e poder usufruir da boa qualidade das três praias que existem em cada um dos lados da ilha. Assim, para o náufrago ter o menor trabalho possível na construção da sua casa, decidiu construí-la num ponto tal que a soma das distâncias às três praias fosse a menor possível.

Com esta tarefa pretende-se então que os alunos investiguem qual é o melhor sítio para a construção da casa, ou seja, pretende-se levar os alunos a investigar sobre a soma das distâncias de um ponto móvel aos lados de um triângulo equilátero.

Dando início à tarefa, os alunos começaram por formular uma hipótese sobre qual seria o melhor sítio para a casa do náufrago. Assim, na resposta à questão 1, todos os grupos, à exceção do 6 e 8 referiram que a casa devia ser construída no centro da ilha. Os dois grupos supracitados colocaram a casa numa das alturas do triângulo, sem ser na posição central.

Os alunos iniciaram então o seu trabalho com o *Geogebra*. Construíram com facilidade o triângulo equilátero, tendo eu começado por relembrá-los da ferramenta que permite a rotação de um objeto dado o centro de rotação e a amplitude da mesma. Alguns grupos usaram esta ferramenta, outros porém usaram a ferramenta de rotação de ângulo. Prosseguiram então com a construção a fim de explorarem o problema.

Desenvolveram-se pequenas discussões dentro dos grupos, sobre a forma de construção da figura, de modo a chegarem ao cálculo da soma das distâncias do ponto móvel aos lados do triângulo, tal como era solicitado no enunciado.

Nem todos os grupos apresentaram uma construção perfeita, embora todos tenham produzido uma construção dinâmica. No quadro 9, observam-se então algumas diferenças ao nível das construções elaboradas.

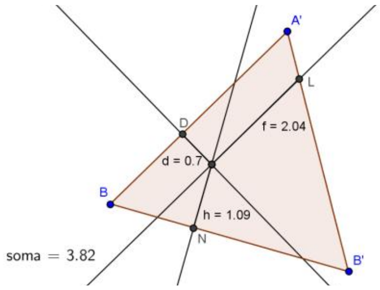
Quadro 9 - Aspetos contemplados pelos grupos na construção da figura inerente à tarefa 2

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Construção correta do triângulo equilátero	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Definição do polígono	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção de um ponto móvel	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção de um ponto móvel no interior desse polígono	x		x		x	x		x	x
Construção correta de todas as retas perpendiculares aos lados do triângulo passando pelo ponto móvel	x	x		x	x	x	x	x	x
Construção do ponto de interseção dessas retas com os lados do triângulo	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção dos segmentos de reta que ligam o ponto móvel ao ponto de interseção do lado do triângulo com a reta perpendicular ao mesmo	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo da medida do comprimento dos segmentos construídos	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo da soma das três medidas	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Na construção solicitada, o grupo 7 sentiu ainda a necessidade de se certificar que o triângulo era de facto equilátero e procedeu à medida dos ângulos internos do triângulo.

Observa-se que alguns grupos (grupo 1, 3 e 6) começaram por calcular a soma das três distâncias do ponto móvel aos lados do triângulo, usando a sua máquina de calcular, tendo depois todos os grupos passado a usar o campo de entrada no *Geogebra* por indicação minha.

No processo de formulação de conjeturas sobre o melhor local para a casa do náufrago, os grupos registaram as suas conjeturas, sendo que todos conjeturaram que a casa podia ser construída em qualquer ponto da ilha. Todos os grupos viram a sua hipótese de resposta ao problema alterada, o que produziu grande surpresa entre os alunos. O grupo 3 conjeturou corretamente mesmo não tendo apresentado uma construção perfeita e a soma das distâncias do ponto móvel aos três lados não ser sempre constante. Quando os confrontei com esta situação os elementos do grupo referiram que a soma das distâncias "dá sempre 4", com aproximação às unidades. Tal facto pode observar-se em duas concretizações do ficheiro *Geogebra* apresentado por este grupo.



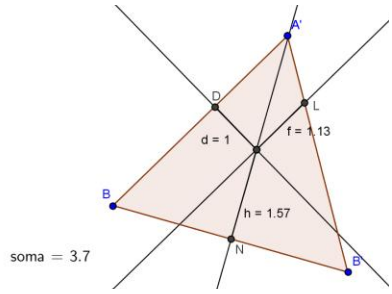


Figura 30 - Duas concretizações do ficheiro *Geogebra* referentes ao grupo 3 e relativas à tarefa2

Na fase de realização de demonstrações matemáticas, os alunos averiguaram então se a conjetura estabelecida era ou não verdadeira, sendo-lhes solicitado claramente, através da questão 4 para fazerem uma demonstração.

Efetivamente este momento revestiu-se de grande dificuldade para os alunos. Os grupos não sabiam por onde começar, embora todos percebessem muito bem o que tinham pela frente: provar que a soma das distâncias de um ponto móvel aos lados do triângulo é constante.

Nenhum grupo conseguia avançar. Os alunos reportaram-se às tarefas anteriores e não viam como encaixar aqui, qualquer conhecimento que tivessem ganho com a realização das tarefas 0 ou 1. Assim, sugeri aos alunos que elaborassem no papel um esboço da situação, fixando o ponto correspondente à casa do náufrago num determinado ponto. Sugeri então que prosseguissem com o cálculo da área do triângulo grande e com o cálculo das áreas dos três triângulos que surgem no interior (por união do ponto que corresponde à casa do náufrago e os vértices do triângulo exterior) e que, posteriormente comparassem essas áreas. Debruçaram-se sobre estas ideias, mas alguns grupos (especificamente os grupos 1 e 2) logo começaram por dizer que não percebiam porque é que íamos recorrer ao cálculo das áreas dos triângulos, sendo que esta situação não envolvia o cálculo de áreas, mas sim o cálculo de comprimentos. Desenvolveu-se então uma discussão em grande grupo, tendo eu explicado que o cálculo das áreas aparecia como um recurso, para podermos demonstrar que a soma das distâncias de um ponto aos três lados do triângulo é constante. Na realidade, ao calcularmos as áreas, iríamos fazer referência à soma destas três distâncias.

Ainda dentro da discussão coletiva, levei os alunos a considerar letras que representassem as bases e as alturas dos triângulos, ao que os grupos estabeleceram a expressão que permite calcular a área de cada um dos triângulos que solicitei.

Numa fase seguinte, e após o cálculo das áreas, solicitei aos alunos que, em grupo, comparassem a área do triângulo maior com a soma das áreas dos três triângulos que surgem no interior. Alguns grupos, nomeadamente os grupos 1, 2 e 6 referiram que a área do triângulo grande é igual à soma das áreas dos três triângulos que surgem no seu interior. Tentei, em grande grupo, já que nos grupos de trabalho não foram capazes, levá-los a tirar conclusões a partir deste facto, na demonstração daquilo que era o propósito da tarefa. Alguns alunos pertencentes aos grupos 1, 2 e 6 concluíram então que a soma das alturas dos triângulos menores é igual à altura do triângulo maior, ou seja é constante. Relacionaram então essa constante com o valor da soma das distâncias dos três segmentos que tinham construído no *Geogebra*. Foi necessário voltar a explicar a demonstração na sua totalidade, e mais do que uma vez, para que todos os grupos compreendessem o modo como se estava a demonstrar a conjetura e para poderem registar por palavras suas, a demonstração efetuada em grande grupo.

Na elaboração da demonstração, contemplaram-se os seguintes tópicos: (a) cálculo da área do triângulo exterior; (b) cálculo da área dos três triângulos que surgem dentro do triângulo equilátero e (c) comparação da área do triângulo exterior com a soma das áreas dos três triângulos que surgem no interior. Estes tópicos, encadeados de forma organizada e clara, com recurso a princípios de raciocínio lógico-dedutivo, deviam então colocar os grupos numa posição de poderem produzir a sua demonstração.

O quadro 10 apresenta o desempenho dos grupos relativamente à produção desta demonstração.

Quadro 10 - Tópicos usados pelos grupos de trabalho na elaboração da demonstração da tarefa 2 e grau de completude na consequente obtenção de conclusões

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Cálculo da área do triângulo exterior	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Cálculo da área dos três triângulos que surgem dentro do triângulo equilátero	a	a	b	b	b	a	b	b	b
Comparação da área do triângulo exterior com a soma das áreas dos três triângulos que surgem no interior	a	a	c	c	c	a	c	c	c

Legenda:

a – utiliza o tópico em questão de forma completa e explicitada, seguindo-se a produção de conclusões.

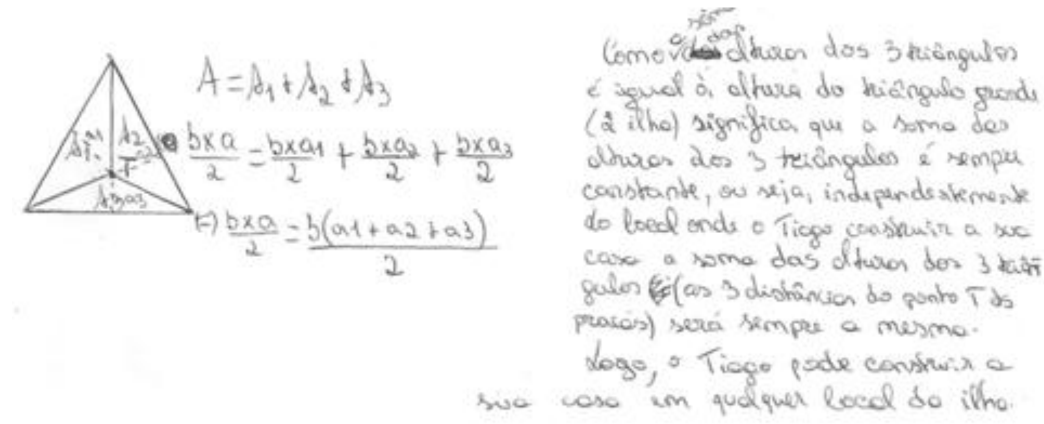
b – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com alguma incorreção, permitindo a produção de conclusões.

c – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com incorreção tal que não permite a produção de conclusões.

d – utiliza o tópico em questão de forma muito incompleta.

Dada a dificuldade sentida pelos grupos a cada passo, a demonstração desta conjetura foi, em grande parte, conduzida por mim até ao final, como aliás já se percebeu.

Apresentam-se de seguida as respostas dos grupos, sendo claro que, pese embora não tenham conseguido estabelecer sozinhos a demonstração da conjetura, todos acabaram por compreender a demonstração da mesma.



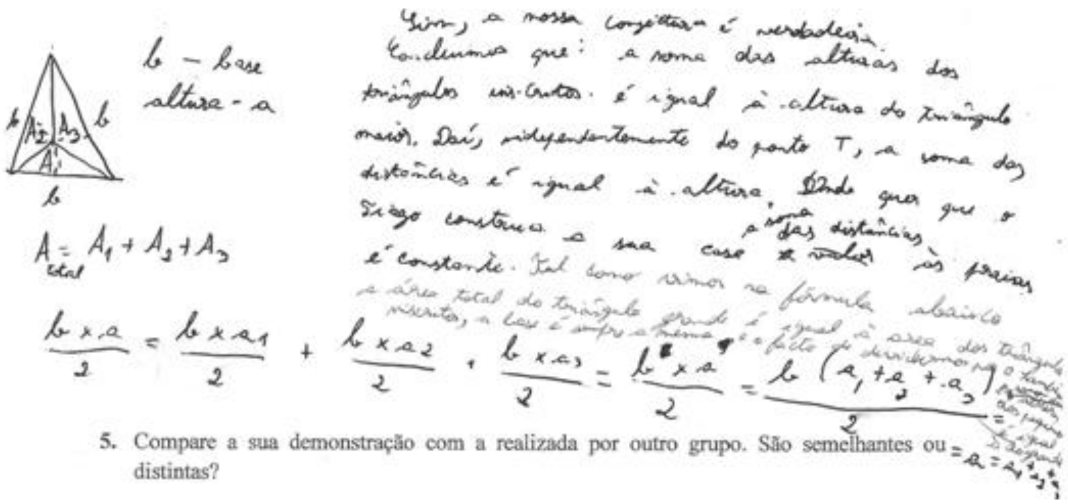
$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$

Como a soma das alturas dos 3 triângulos é igual à altura do triângulo grande (à ilha) significa que a soma das alturas dos 3 triângulos é sempre constante, ou seja, independentemente do local onde o Tiago construir a sua casa a soma das alturas dos 3 triângulos (as 3 distâncias do ponto T às praias) será sempre a mesma.
Logo, o Tiago pode construir a sua casa em qualquer local da ilha.

Figura 31 - Resposta do grupo 1 à questão 4 da tarefa2



b – base
altura – a

$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3$

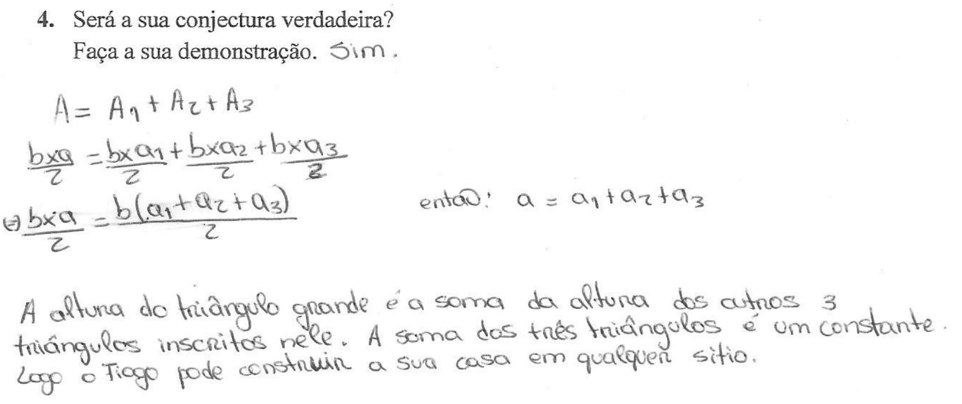
Sim, a nossa conjectura é verdadeira.
Concluímos que: a soma das alturas dos triângulos inscritos é igual à altura do triângulo maior. Daí, independentemente do ponto T, a soma das distâncias é igual à altura. Donde quer que o Tiago construa a sua casa a soma das distâncias às praias é constante. Tal como vimos na fórmula abaixo a área total do triângulo grande é igual à área dos triângulos inscritos, a base é sempre a mesma e o facto de dividirmos o ...

$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2} = \frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$

$= a = a_1 + a_2 + a_3$

5. Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

Figura 32 - Resposta do grupo 2 à questão 4 da tarefa2



4. Será a sua conjectura verdadeira?
Faça a sua demonstração. Sim.

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$ então: $a = a_1 + a_2 + a_3$

A altura do triângulo grande é a soma da altura dos outros 3 triângulos inscritos nele. A soma dos três triângulos é um constante. Logo o Tiago pode construir a sua casa em qualquer sítio.

Figura 33 - Resposta do grupo 3 à questão 4 da tarefa2

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$$

Portanto

$a = a_1 + a_2 + a_3$

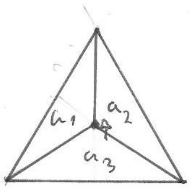
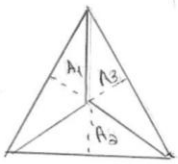


Figura 34 - Resposta do grupo 4 à questão 4 da tarefa2

4. Será a sua conjectura verdadeira?
Faça a sua demonstração.



base - b
altura - a

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2} \Leftrightarrow \frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$$

então a soma das três [redacted] distâncias são constantes.

$a = a_1 + a_2 + a_3$

Com a nossa conjectura concluimos que a soma dos três distâncias vão dar a altura do triângulo.

Figura 35 - Resposta do grupo 5 à questão 4 da tarefa2

$A = A_1 + A_2 + A_3$

base = b
altura = a

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{b \times a_1}{2} + \frac{b \times a_2}{2} + \frac{b \times a_3}{2}$$

$$\frac{b \times a}{2} = \frac{b(a_1 + a_2 + a_3)}{2}$$

Então, a soma das três distâncias é constante, pois, $a_1 + a_2 + a_3$ é sempre igual a **a**.

Concluímos assim que a soma das três distâncias é sempre igual à altura do triângulo. (mesmo que as distâncias variem.)

Figura 36 - Resposta do grupo 6 à questão 4 da tarefa2

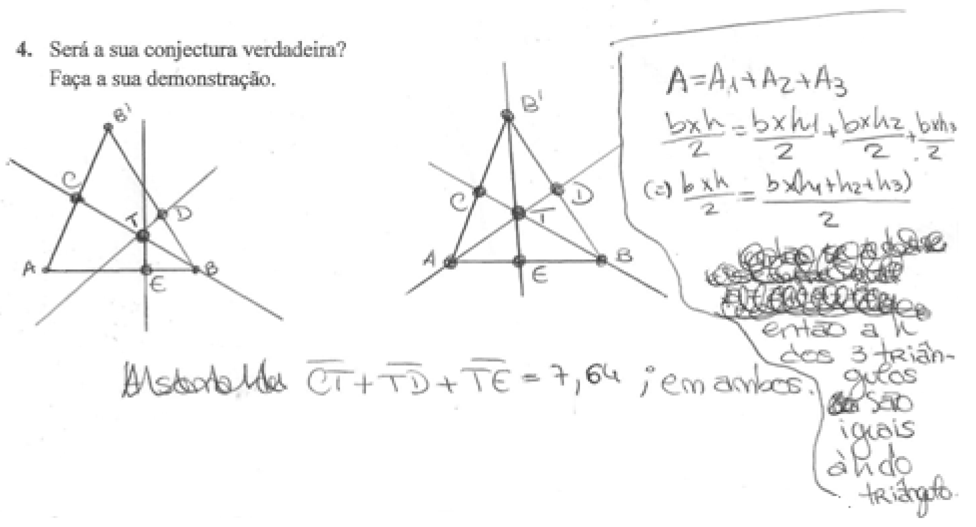


Figura 37 - Resposta do grupo 7 à questão 4 da tarefa2

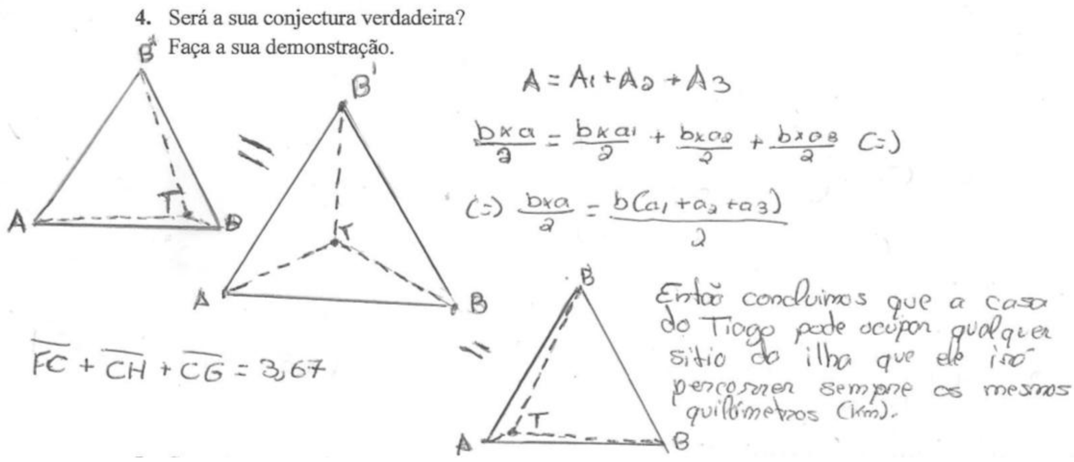


Figura 38 - Resposta do grupo 8 à questão 4 da tarefa2

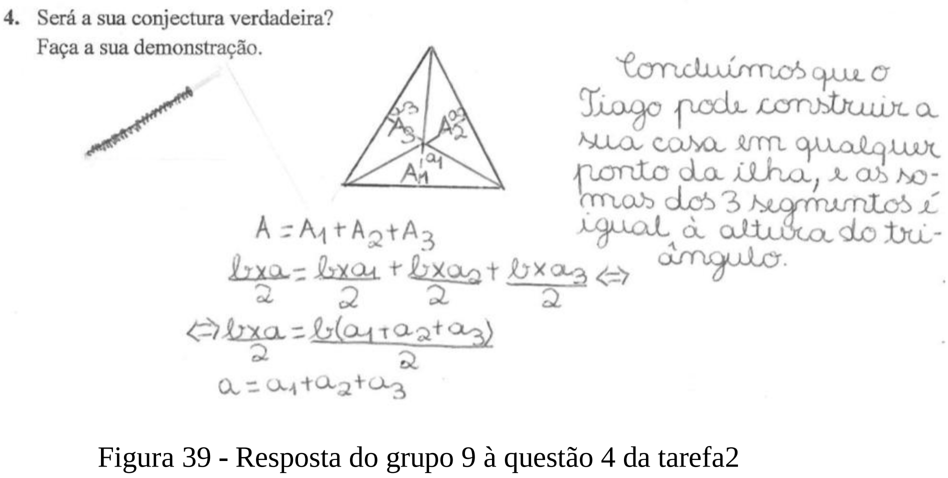


Figura 39 - Resposta do grupo 9 à questão 4 da tarefa2

Das demonstrações apresentadas, umas apresentam-se mais completas do que outras, sendo claro que os grupos 7 e 8 se agarram a casos particulares que retiram do *Geogebra* na produção das suas demonstrações.

Como se observa no quadro 11, considerei que nem todos os grupos conseguiram demonstrar a propriedade solicitada, mesmo dispondo da minha constante ajuda, tendo entendido que apenas os grupos 1, 2 e 6 o conseguiram. Tal consideração deve-se ao facto destes grupos terem revelado um papel ativo na produção da demonstração, que, como já referi, foi feita em grande grupo, ao passo que os restantes tiveram um papel passivo, aceitando as ideias apresentadas pelos colegas.

Quadro 11 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar a propriedade pedida relativa à tarefa 2

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Demonstra o pretendido	x	x				x			
Não demonstra o pretendido			x	x	x		x	x	x

Os grupos compararam então a sua demonstração com a demonstração do grupo vizinho, ao que, obviamente, todos responderam ser semelhante.

Na reflexão sobre as funções que os alunos atribuem à demonstração, os grupos responderam à questão 6, referindo o que esta lhes acrescentou relativamente à conjetura que tinham inicialmente formulado. No quadro 12 observam-se então as funções que os diferentes grupos percecionaram em relação à demonstração que realizaram.

Quadro 12 - Funções da demonstração matemática explicitadas pelos grupos de trabalho na realização da tarefa 2

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Verificação				x					x
Explicação	x	x	x	x	x	x	x	x	
Desafio intelectual		x							

Os grupos aparecem divididos em relação à função de verificação e explicação, havendo preponderância da explicitação da função de explicação. Na realidade para o grupo 1, a demonstração permite “obter provas” de que a conjetura estabelecida está correta, mas também permite “adquirir uma outra perspetiva em relação ao problema”, donde ganha relevo a função de explicação. Para o grupo 2, é o *Geogebra* que fornece mais certezas, sendo que também o exercício da demonstração se revela importante para ganhar “confianças”, donde depreendo que, com a demonstração, este grupo ganhou realização pessoal. Para o grupo 3 é a demonstração que mostra que o Tiago pode construir a sua casa em qualquer lugar da ilha, dado o erro de construção no *Geogebra* que este grupo experienciou, ganha relevo mais uma vez a função explicativa da demonstração. Na análise produzida à resposta do grupo 4 é possível subentender a presença de duas funções da demonstração, num texto que se pode observar na figura 40.

A demonstração consoante à conjectura reforça
e fundamenta de uma maneira mais clara
a conjectura inicialmente formada, fazendo
chegar a novas teorias que e formas de selecionar
o problema apresentado

Figura 40 - Resposta do grupo 4 à questão 6 da tarefa2

O grupo 5 explicita a função explicativa da demonstração, ao admitir que a demonstração permite entender melhor a resposta ao problema. Salienta-se na figura 41 a resposta do grupo 6 a esta questão, onde é percetível a função explicativa.

Nós na conjectura inicialmente formulada pensávamos que havia um ponto
específico para a construção da casa do Tiago, mas com a construção
no Geogebra vimos que é possível construir a casa do Tiago em
qualquer local da Ilha e ao fazer a demonstração ~~tive~~ percebemos
~~ainda~~
ainda melhor e ajudou-nos a ter mais certezas pois provámos
que mesmo que as distâncias à praia variem, a sua soma
é sempre igual, logo é constante.

Figura 41 - Resposta do grupo 6 à questão 6 da tarefa2

Os grupos 7 e 8 explicitam também a função explicativa da demonstração. Com efeito, para estes grupos a demonstração permitiu perceber melhor porque é que o Tiago pode construir a casa em qualquer ponto da ilha. O grupo 7 refere ainda que a demonstração acrescentou que a soma das alturas dos três triângulos pequenos é igual à altura do triângulo grande. Por último o grupo 9 explicita a função verificativa, ao admitir que "com esta demonstração ficámos com mais certezas acerca das conjeturas" (p. 2).

O cão do jardim

A tarefa 3 (anexo 7) considera um jardim em forma de triângulo retângulo e um cão, que se deverá prender num ponto do jardim, com a menor trela possível, de modo a que possa chegar a qualquer ponto do mesmo.

Os alunos deram início à tarefa, começando por fazer um esboço do problema e procurando estimar a resposta, procedendo ao registo das suas estimativas. Os grupos 1, 6, 8 e 9 estimaram que o cão devia ser preso no meio do triângulo, não fazendo qualquer alusão ao modo como se encontra esse "meio". O grupo 2, no seu esboço, desenha as três medianas do triângulo encontrando assim o baricentro do mesmo, e, refere que o cão deverá ficar preso nesse ponto. O grupo 3 apresenta uma estimativa próxima daquilo que será a solução do problema e o grupo 4 apresenta mesmo como estimativa, aquilo que será a sua conjetura depois de trabalhar no *Geogebra*. Na figura 42 encontram-se as respostas dos grupos 3 e 4 à questão 1.

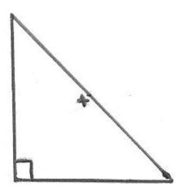
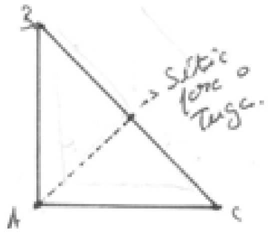
	O Vasco terá de prender o Tuga no ponto x, pois é a única forma de o Tuga poder chegar aos 3 cantos do triângulo com o menor comprimento de trela possível	G3
	2.: Se o Tuga ficar no ponto médio de ~~??~~ recta BC ficará à mesma distância de todos os cantos do relvado.	G4

Figura 42 - Respostas dos grupos 3 e 4 à questão 1 da tarefa3

O grupo 5 refere que o cão deverá ficar preso no canto correspondente ao ângulo reto do triângulo. Por último o grupo 7 assinala um ponto perto da hipotenusa do triângulo para marcar o sítio onde o Tuga deve ficar preso, não apresentando qualquer justificação para a escolha desse sítio.

Os alunos iniciaram seguidamente o seu trabalho no *Geogebra* com o objetivo de procederem à elaboração de conjeturas. Começaram por construir o triângulo retângulo, observando-se que três grupos não o construíram corretamente. Observa-se ainda que sete dos nove grupos o construíram isósceles. Tal circunstância deve-se ao facto de tomarem como exemplo a tarefa anterior, assim, procederam à construção de um segmento de reta que depois foi alvo de uma rotação, nesta tarefa de 90 graus. Nota-se porém que dois grupos recorrem ao comando da construção de uma reta perpendicular para a construção do segundo lado do triângulo, mas ao construírem um ponto sobre este segundo lado com vista a prosseguirem para a construção da hipotenusa, tentam que o triângulo fique isósceles. Salienta-se por último que todos os grupos apresentaram uma construção dinâmica e todos eles trabalharam com um ponto móvel no interior do triângulo, na pesquisa do sítio para prenderem o cão.

No quadro 13, observam-se então algumas diferenças ao nível das construções dos diferentes grupos.

Quadro 13 - Aspetos contemplados pelos grupos na construção da figura inerente à tarefa 3

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Construção correta do triângulo retângulo isósceles	x	x				x		x	
Construção correta do triângulo retângulo escaleno			x				x		
Definição do polígono	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção de um ponto móvel	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Construção de um ponto móvel no interior desse polígono	x	x	x		x	x	x	x	x
Construção correta do ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo	x	x	x	x	x	x	x	x	
Construção correta dos segmentos que unem o ponto médio da hipotenusa do	x	x	x		x	x	x	x	

triângulo retângulo aos vértices do mesmo									
Medição dos segmentos citados no ponto anterior	x	x	x		x	x	x	x	
Construção da circunferência de centro no ponto médio da hipotenusa e que passa nos vértices do triângulo retângulo		x		x	x				x

Na construção solicitada, alguns grupos (2, 5, 6) sentiram ainda a necessidade de se certificarem que o triângulo era de facto retângulo e procederam à medida dos ângulos internos do mesmo.

No processo de formulação de conjeturas sobre o melhor local para prender o cão, os grupos registaram as suas conjeturas, sendo que, todos conjeturaram que o cão devia ser preso no ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo. Deste modo, todos os grupos à exceção do 4 viram a sua estimativa de resposta ao problema alterada, o que produziu grande surpresa entre os mesmos.

Na fase de realização de demonstrações matemáticas, os alunos debruçaram-se então sobre a validade ou não da conjetura estabelecida, sendo-lhes solicitado, à semelhança das tarefas anteriores, para fazerem uma demonstração.

Para elaborarem a demonstração, os grupos enveredaram por diferentes caminhos, identificando-se em termos gerais os seguintes tópicos: (a) simetria do triângulo sobre um dos seus catetos; (b) semelhança de triângulos; (c) construção da circunferência de centro no ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo; (d) decomposição da figura inicial em triângulos isósceles; (e) construção de um quadrado usando os três vértices do triângulo; e (f) propriedades das diagonais de um quadrado. O encadeamento dos tópicos de forma organizada e clara, usando princípios de raciocínio lógico-dedutivo, devia então permitir aos grupos a elaboração da demonstração.

O quadro 14 apresenta o desempenho dos grupos relativamente à produção da demonstração solicitada.

Quadro 14 - Tópicos usados pelos grupos de trabalho na elaboração da demonstração da tarefa 3 e grau de completude na consequente obtenção de conclusões

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Simetria do triângulo sobre um dos seus catetos	a								
Semelhança de triângulos	a	a		a		a			
Construção da circunferência de centro no ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo		a	a		a				a
Decomposição da figura inicial em triângulos isósceles		a		a	a				
Construção de um quadrado usando os três vértices do triângulo						a	a	a	
Propriedades das diagonais de um quadrado						a	a	a	

Legenda:

a – utiliza o tópico em questão de forma completa e explicitada, seguindo-se a produção de conclusões.

b – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com alguma incorreção, permitindo a produção de conclusões.

c – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com incorreção tal que não permite a produção de conclusões.

d – utiliza o tópico em questão de forma muito incompleta.

Observa-se que em todos os casos, os tópicos usados pelos grupos de trabalho foram utilizados de forma completa e explícita, permitindo a consequente produção de conclusões.

O grupo 1 produz uma demonstração tendo por base a semelhança de triângulos, que se apresenta na figura 43.

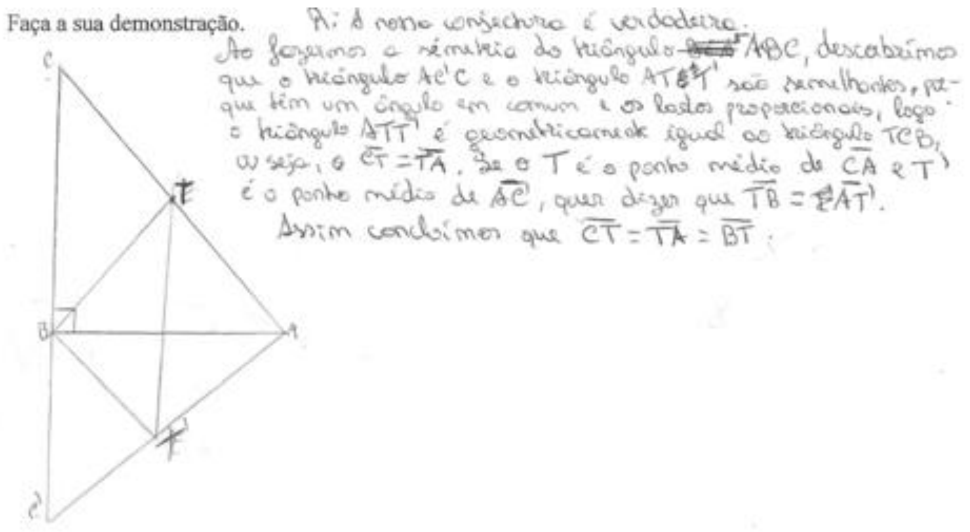


Figura 43 - Resposta do grupo 1 à questão 4 da tarefa3

Também o grupo 4 recorre à semelhança de triângulos, todavia vê a sua demonstração facilitada por considerar um triângulo retângulo isósceles. Na figura 44 observa-se então aquilo que foi a resposta deste grupo.

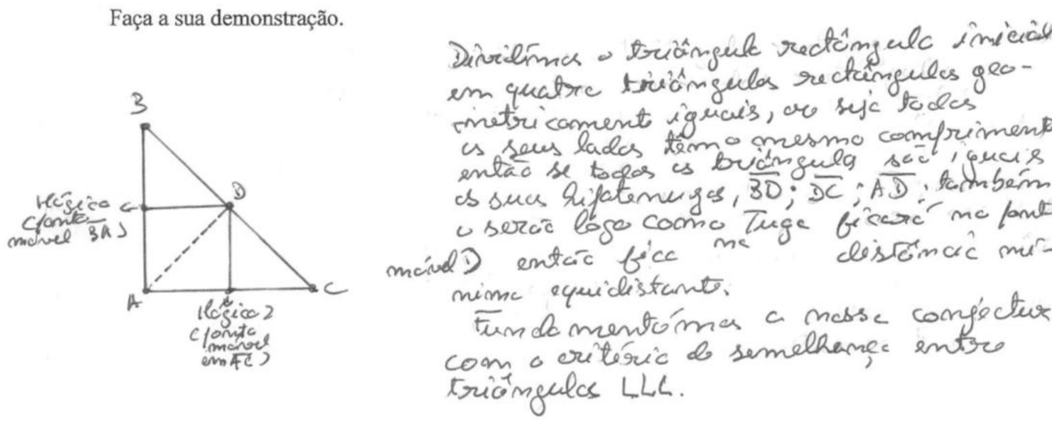


Figura 44 - Resposta do grupo 4 à questão 4 da tarefa3

Os grupos 2, 3, 5, 6 e 9 seguem um caminho diferente, recorrendo a uma circunferência de centro no ponto médio da hipotenusa e que passa pelos três vértices do triângulo. As figuras 45, 46, 47, 48, 49, 50 e 51 mostram aquilo que foram as respostas destes cinco grupos, observando-se naturalmente diferentes graus de completude.

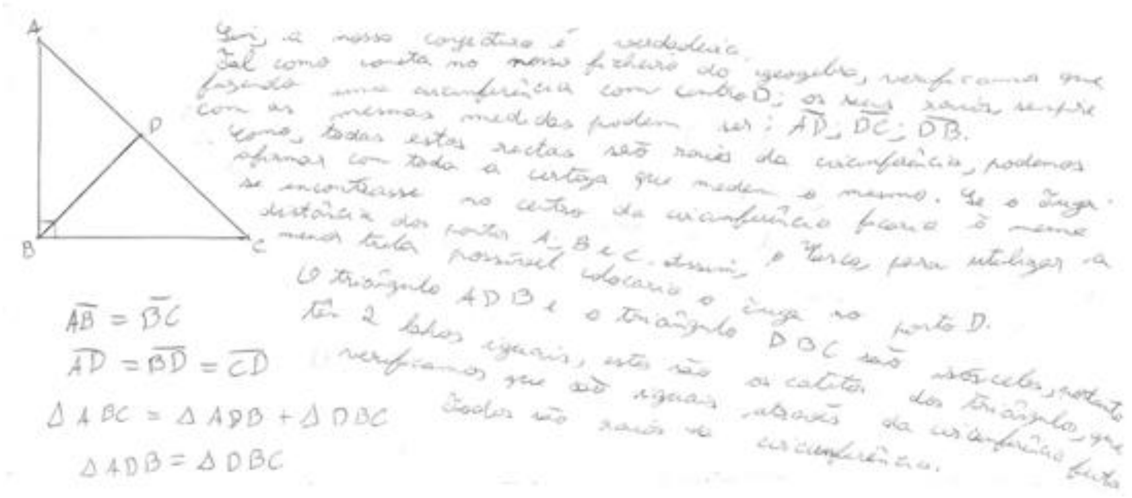


Figura 45 - Resposta do grupo 2 à questão 4 da tarefa3

O grupo 3, na sua resposta socorre-se do ficheiro do *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo é apresentado na figura que se segue:

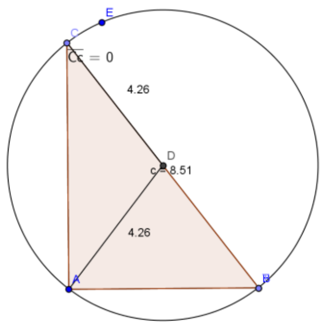


Figura 46 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 3, referente à tarefa3

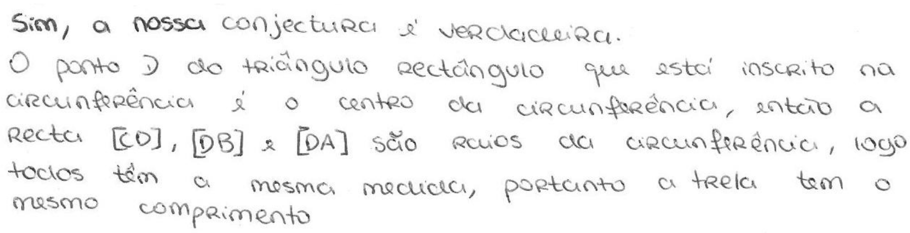

Sim, a nossa conjectura é verdadeira.
O ponto D do triângulo rectângulo que está inscrito na circunferência é o centro da circunferência, então a recta [CD], [DB] e [DA] são raios da circunferência, logo todos têm a mesma medida, portanto a treta têm o mesmo comprimento

Figura 47 - Resposta do grupo 3 à questão 4 da tarefa3

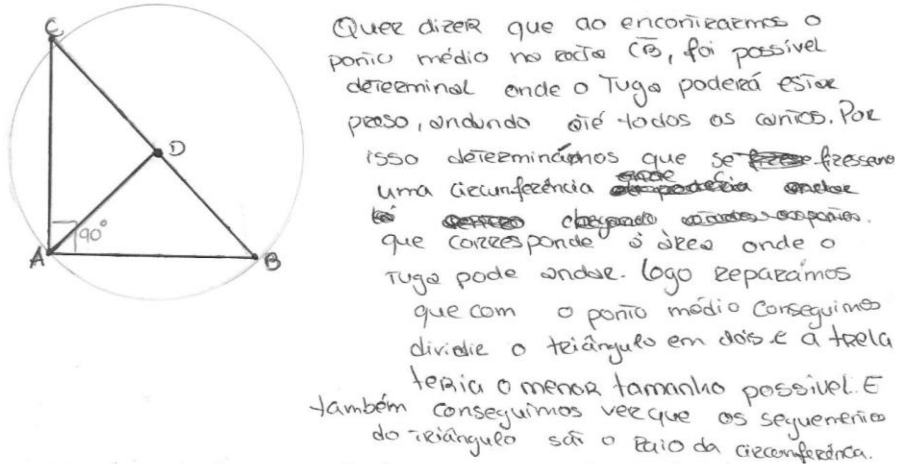


Figura 48 - Resposta do grupo 5 à questão 4 da tarefa3

O grupo 6, na sua resposta socorre-se do ficheiro do *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo é apresentado na figura que se segue:

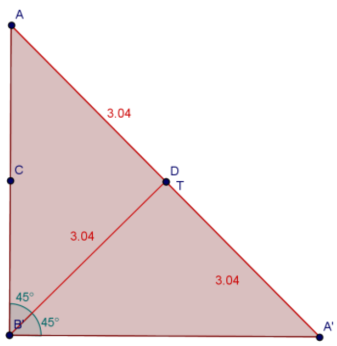


Figura 49 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 6, referente à tarefa3

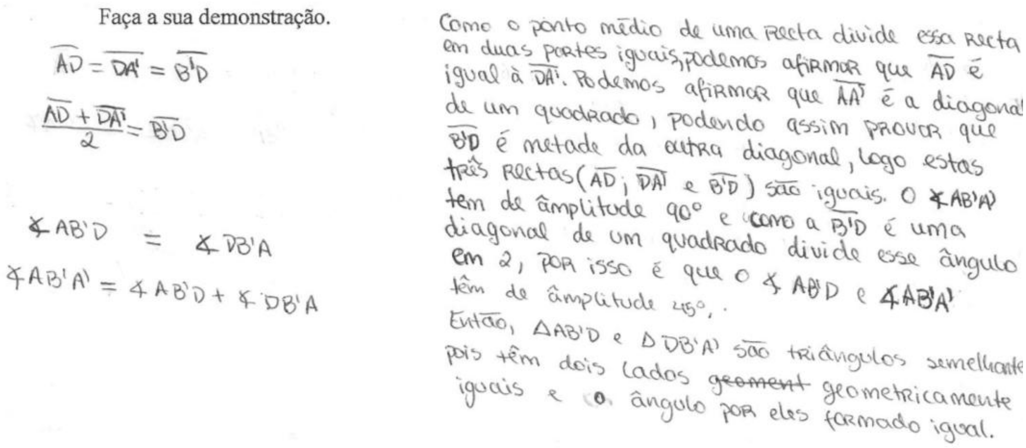


Figura 50 - Resposta do grupo 6 à questão 4 da tarefa3

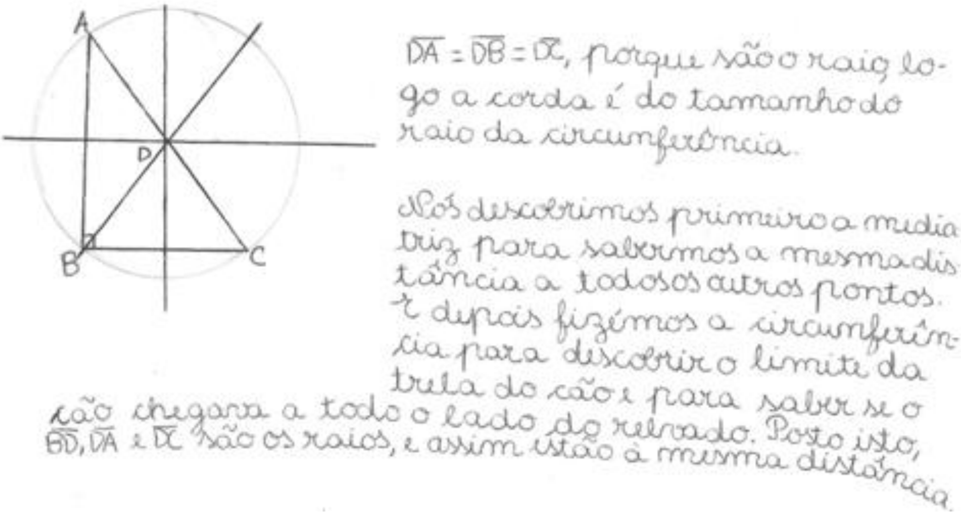


Figura 51 - Resposta do grupo 9 à questão 4 da tarefa3

Os grupos 7 e 8 produzem uma demonstração baseada nas propriedades das diagonais de um quadrado por trabalharem com triângulos isósceles. Observam-se nas figuras 52 e 53 as suas respostas.

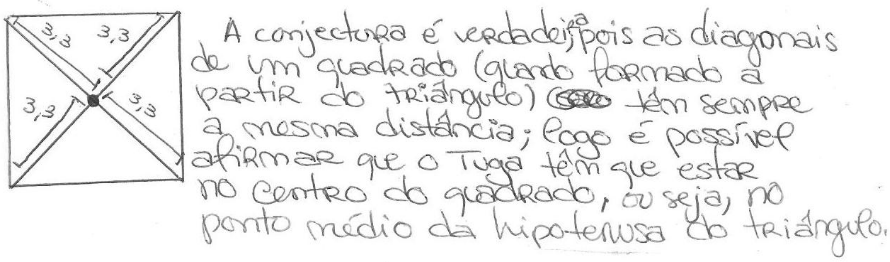


Figura 52 - Resposta do grupo 7 à questão 4 da tarefa3

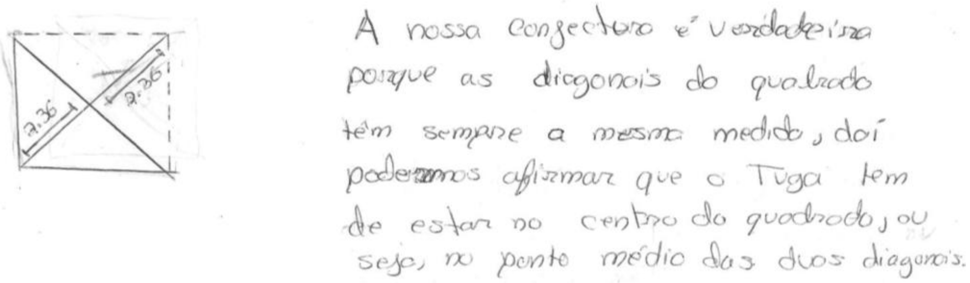


Figura 53 - Resposta do grupo 8 à questão 4 da tarefa3

Analisando o desempenho dos grupos relativamente à produção da demonstração, constata-se que os grupos 7 e 8 se prendem a casos particulares obtidos no *Geogebra* através do uso de ferramentas de cálculo, todavia considero que conseguiram demonstrar a propriedade pedida, por esses casos particulares se encontrarem acompanhados de um pequeno texto justificativo. O quadro seguinte reforça então que todos os grupos conseguiram demonstrar o solicitado.

Quadro 15 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar a propriedade pedida relativa à tarefa 3

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Demonstra o pretendido	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Não demonstra o pretendido									

Os grupos compararam a sua demonstração com a demonstração do grupo vizinho, havendo apenas dois grupos (7 e 8) que consideram as suas demonstrações semelhantes.

Refletindo sobre as funções que os alunos atribuem à demonstração, os grupos responderam à questão 6, referindo o que a mesma lhes acrescentou relativamente à conjetura que tinham inicialmente formulado. No quadro 16 observam-se então as funções que os diferentes grupos percecionaram relativamente à demonstração que realizaram.

Quadro 16 - Funções da demonstração matemática explicitadas pelos grupos de trabalho na realização da tarefa 3

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Verificação		x		x					
Explicação	x	x		x	x	x	x	x	
Desafio intelectual		x							
Comunicação				x					

Observa-se a existência de dois grupos (2 e 4) que contemplam simultaneamente as funções verificativa e explicativa da demonstração. Com efeito para estes grupos a demonstração explica a conjetura e dá mais certezas sobre a mesma. Destaca-se a resposta do grupo 2 na figura seguinte:

A demonstração explicou a conjectura que tínhamos formulado
A demonstração confirmou a nossa conjectura, dando-nos mais certezas
sobre triângulos rectângulos e mais auto-confiança para problemas
futuros.

Figura 54 - Resposta do grupo 2 à questão 6 da tarefa3

Salienta-se também na figura 55 a resposta dada pelo grupo 4, pois a mesma vai de encontro ao convencimento não do próprio mas sim de uma terceira pessoa, estando também subjacente a função comunicativa de De Villier (2001), para além das funções de verificação e explicação.

A demonstração ajudou-nos a ter uma ideia
mais clara e fundamentada da nossa conjectura,
também para demonstrar de uma forma fácil
de entender ao nosso avaliador.

Figura 55 - Resposta do grupo 4 à questão 6 da tarefa3

O grupo 1, 5 e 7 evidenciam a função explicativa da demonstração. Para o grupo 1, a demonstração dá “certezas de que o cão Tuga tem de estar no ponto médio da hipotenusa para as medidas do ponto T aos cantos serem iguais”.

Na figura 56, apresenta-se a resposta dada pelo grupo 6 ao item 6, onde também é explícita a função explicativa da demonstração:

Concluimos após a demonstração do Geogebra que a nossa ideia
inicial estava errada e de seguida com a demonstração conseguimos
provar e perceber ~~onde estava o~~ no o porquê de ~~o~~ o cão não
poder estar no meio do triângulo, mas sim no ponto médio
da recta $\overline{AA'}$.

Figura 56 - Resposta do grupo 6 à questão 6 da tarefa3

O grupo 8 evidencia ainda a função explicativa da demonstração, pois para este grupo:

A demonstraçoõ acrescentounos que, se acrescen-
tarmos outro triângulo, fazemos um quadrado,
esse quadrado que faz duas diagoneis que têm
o mesmo comprimento, ao contrário do que inicialmente
pensamos

Figura 57 - Resposta do grupo 8 à questão 6 da tarefa3

Salienta-se por fim a existência de dois grupos (3 e 9) para os quais esta demonstração não sugeriu nenhuma função.

Área do retângulo

Na tarefa 4 “Área do retângulo” (anexo 8) é apresentado um retângulo [ABCD] com uma das suas diagonais já assinalada. Estão também representados a sombreado, dois retângulos no interior do primeiro, como mostra a figura 58.

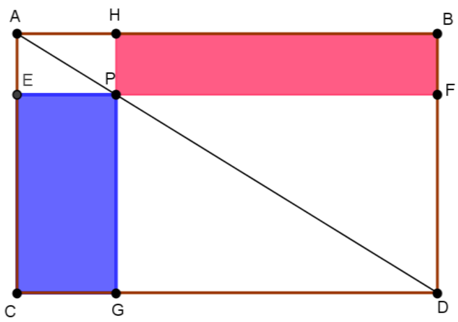


Figura 58 - Retângulo apresentado na tarefa4

Solicita-se aos alunos que analisem cuidadosamente a figura e que comparem as áreas dos retângulos [EPGC] e [HBFP], registando os resultados dessa comparação. Observando o registo destas hipóteses, verifica-se a existência de grupos que afirmam logo à partida terem a certeza de que estas áreas são iguais, outros que admitem essa possibilidade, havendo ainda grupos para os quais os retângulos supracitados têm área diferente, como se aponta nas figuras 59, 60 e 61.

As áreas são iguais, pois pensamos que $\overline{HP}+\overline{PF}$ é semelhante a $\overline{EP}+\overline{GC}$.	G2
As áreas dos rectângulos [EPGC] e [HBFP] são iguais	G4

Figura 59 - Respostas dos grupos 2 e 4 ao primeiro item da tarefa4

R: As áreas dos rectângulos [EPGC] e [HBFP] podem ser iguais.	G1
Temos quase a certeza que a área dos retângulos é igual.	G3
Achamos que as áreas são iguais.	G6
Achamos que as áreas são iguais.	G7

Figura 60 - Respostas dos grupos 1, 3, 6 e 7 ao primeiro item da tarefa4

Que as áreas dos triângulos são diferentes.	G5
Os rectângulos [EPGC] e [HBFP], juntos, formam o rectângulo [PFDG]. A área do rectângulo [EPGC] parece ser maior que a área do rectângulo [HBFP].	G9

Figura 61 - Respostas dos grupos 5 e 9 ao primeiro item da tarefa4

Observa-se ainda a existência de um grupo que entendeu não responder (grupo 8), por não ter a certeza na resposta.

Dando resposta ao item 2 da ficha de trabalho, os alunos iniciaram o seu trabalho com o *Geogebra* onde procederam à construção do ficheiro que lhes permitiu a formulação de conjeturas.

Os alunos começaram por construir o retângulo [ABCD] observando-se a existência de um grupo (grupo 5) que não o construiu corretamente. Os grupos construíram uma das diagonais do retângulo e sobre ela destacaram um ponto móvel, tendo-se seguido a construção dos dois retângulos no interior e a posterior comparação das áreas, como era solicitado. Todos construíram figuras dinâmicas. No quadro 17, observam-se então algumas diferenças ao nível das construções.

Quadro 17 - Aspetos contemplados pelos grupos na construção da figura inerente à tarefa 4

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Construção correta do retângulo	x	x	x	x		x	x	x	x
Construção correta da diagonal	x	x	x	x	x	x	x	x	
Construção de um ponto móvel na diagonal	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Definição dos polígonos	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Medição das áreas dos retângulos do interior	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Na construção solicitada, o grupo 4 sentiu necessidade de encontrar o ponto médio da diagonal, aspeto que virá a usar na sua demonstração, e, sentiu ainda a necessidade de se certificar se o retângulo era de facto retângulo tendo procedido à medida dos ângulos internos do mesmo. O grupo 8 procedeu ainda à definição do triângulo [ACD], aspeto que virá também a usar na sua demonstração.

No processo de formulação de conjeturas sobre a comparação das áreas, os grupos registaram as suas conjeturas, sendo que, todos os grupos à exceção do 9, conjeturaram que as áreas dos retângulos [EPGC] e [HBFP] são iguais. Evidencia-se, na figura 62, a resposta do grupo 1, por salientar a importância do AGD e na figura 63 as respostas dos grupos 7 e 8, por destacarem o aspeto dinâmico da figura.

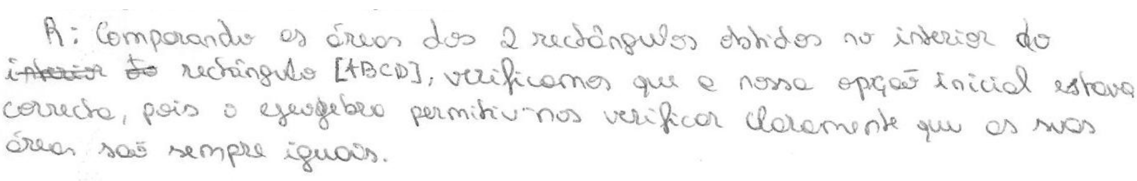

R: Comparando as áreas dos 2 rectângulos obtidos no interior do ~~interior do~~ rectângulo [ABCD], verificamos que a nossa opção inicial estava correcta, pois o geogebra permitiu-nos verificar claramente que as suas áreas são sempre iguais.

Figura 62 - Resposta do grupo 1 ao item 3 da tarefa4

As áreas são iguais, e por mais que moveramos o ponto "P" ou outro qualquer ponto, de modo a manter o rectângulo, as áreas de [EPGC] e de [HBFP] são sempre iguais.	G7
As áreas destes dois rectângulos são ~~semelhantes~~ iguais, esteja o ponto P, o ponto móvel onde estiver.	G8

Figura 63 - Respostas dos grupos 7 e 8 ao item 3 da tarefa4

Relativamente aos dois grupos que não alcançaram uma construção correta no *Geogebra* (5 e 9), observa-se no caso do grupo 5 que acabaram por conjeturar que “as áreas são iguais”, uma vez que compuseram com cuidado a figura, de modo a observarem sempre retângulos. No caso do grupo 9, o erro na construção da diagonal, levou a que as áreas dos retângulos [EPGC] e [HBFP] diferissem apenas em algumas décimas, deste modo o grupo foi coerente com o que observava no *Geogebra* e conjeturou que “estes dois retângulos têm, praticamente, as áreas iguais”.

Na fase de realização de demonstrações matemáticas, os alunos examinaram então se a conjetura estabelecida era ou não verdadeira, sendo-lhes solicitado, à semelhança de todas as tarefas anteriores, que fizessem uma demonstração matemática. Nesta tarefa em particular, este momento não se revestiu de grande dificuldade para os alunos. Eles sabiam claramente o que tinham de demonstrar e desenvolveram dentro dos grupos discussões que os conduziram à obtenção da demonstração, recorrendo a mim para se certificarem se o caminho a seguir estava ou não correto.

Na elaboração desta demonstração, os grupos contemplaram os seguintes tópicos: (a) divisão do quadrilátero pela diagonal, em dois triângulos; (b) semelhança de triângulos e (c) definição de paralelogramo. O encadeamento destes tópicos de forma organizada e clara, usando princípios de raciocínio lógico-dedutivo, devia então permitir aos grupos a elaboração da sua demonstração.

O quadro 18 apresenta o desempenho dos grupos relativamente à produção da demonstração.

Quadro 18 - Tópicos usados pelos grupos de trabalho na elaboração da demonstração da tarefa 4 e grau de completude na consequente obtenção de conclusões

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Divisão do retângulo pela diagonal em dois triângulos	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Justificação de que os triângulos citados no ponto anterior têm a mesma área	a	a	a	a	b	a	a	b	b
Comparação de áreas	a	a	b	a	b	a	b	a	a

Legenda:

a – utiliza o tópico em questão de forma completa e explicitada, seguindo-se a produção de conclusões.

b – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com alguma incorreção, permitindo a produção de conclusões.

c – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com incorreção tal que não permite a produção de conclusões.

d – utiliza o tópico em questão de forma muito incompleta.

Apresentam-se de seguida as demonstrações produzidas pelos diferentes grupos de trabalho.

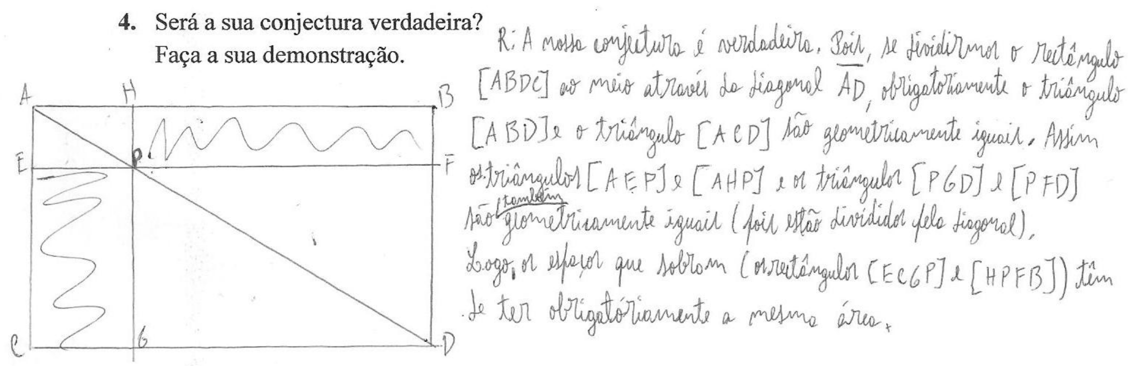


Figura 64 - Resposta do grupo 1 à questão 4 da tarefa4

O grupo 2, na sua resposta socorre-se do ficheiro do *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo é apresentado na figura que se segue:

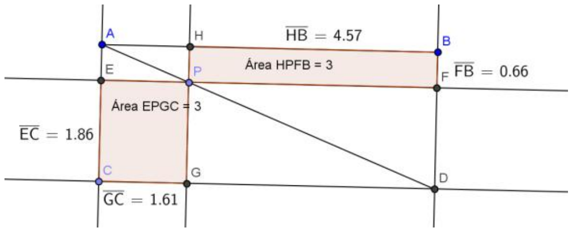
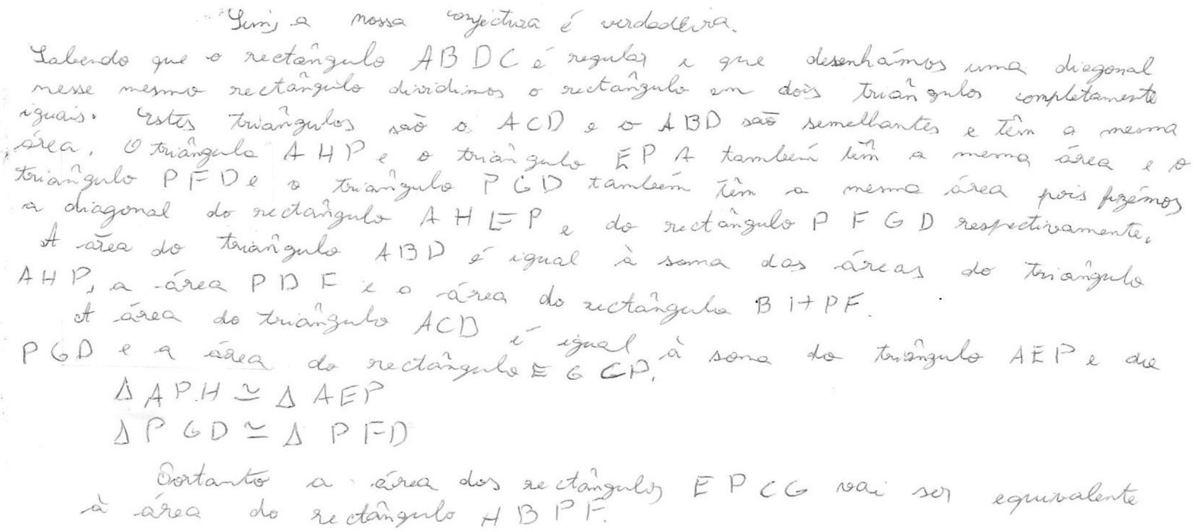


Figura 65 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 2, referente à tarefa4



Sim, a nossa conjectura é verdadeira.
Sabendo que o rectângulo ABDC é regular e que desenhámos uma diagonal nesse mesmo rectângulo dividimos o rectângulo em dois triângulos completamente iguais. Estes triângulos são o ACD e o ABD são semelhantes e têm a mesma área. O triângulo AHP e o triângulo EPA também têm a mesma área e o triângulo PFD e o triângulo PGD também têm a mesma área pois fizemos a diagonal do rectângulo AHEP e do rectângulo PFGD respectivamente.
A área do triângulo ABD é igual à soma das áreas do triângulo AHP, a área PDF e a área do rectângulo BHPF.
A área do triângulo ACD é igual à soma do triângulo AEP e do PGD e a área do rectângulo EGCP.

$\Delta APH \simeq \Delta AEP$
$\Delta PGD \simeq \Delta PFD$

Portanto a área dos rectângulos EPCG vai ser equivalente à área do rectângulo HBPF.

Figura 66 - Resposta do grupo 2 à questão 4 da tarefa4

Também o grupo 3 se socorre do ficheiro *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo se apresenta na figura seguinte:

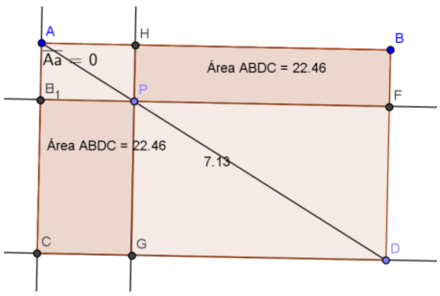


Figura 67 - Figura resultante do ficheiro de Geogebra elaborado pelo grupo 3, referente à tarefa4

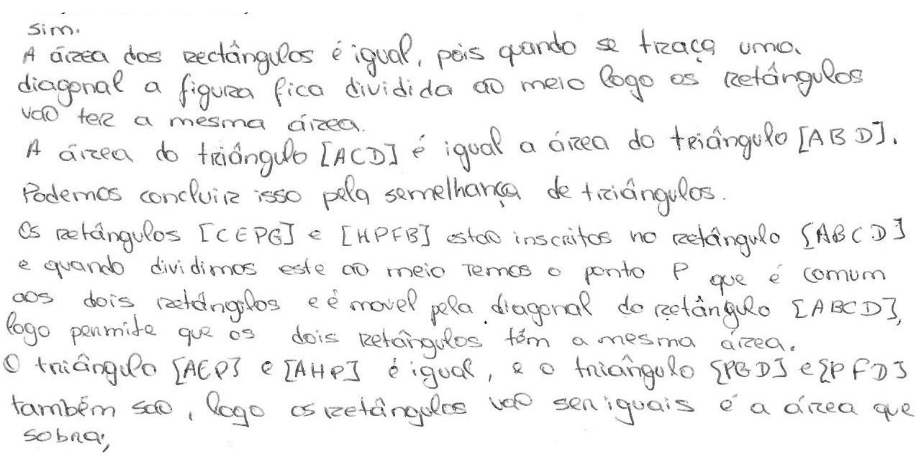


Figura 68 - Resposta do grupo 3 à questão 4 da tarefa4

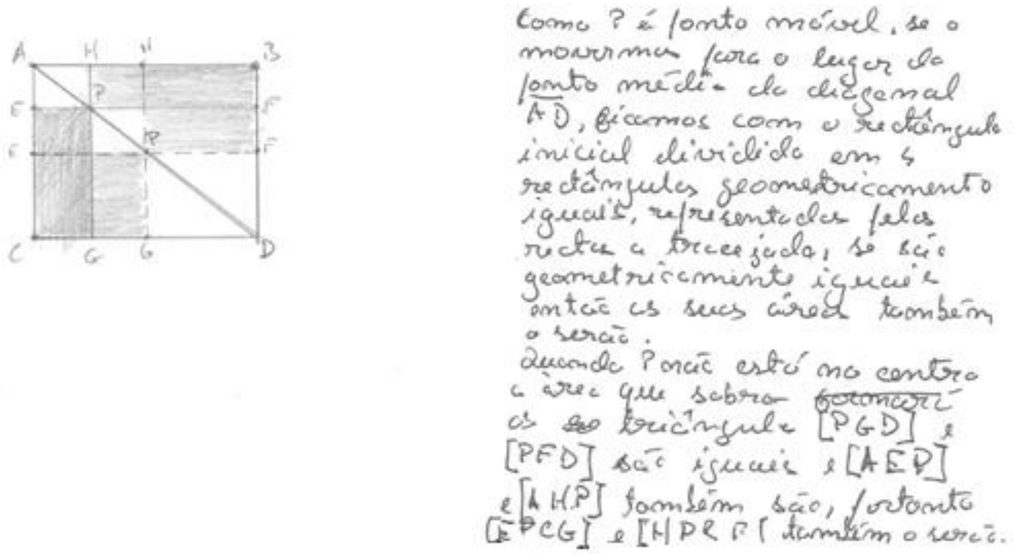


Figura 69 - Resposta do grupo 4 à questão 4 da tarefa4

O grupo 5 socorre-se igualmente do ficheiro *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo se apresenta seguidamente:

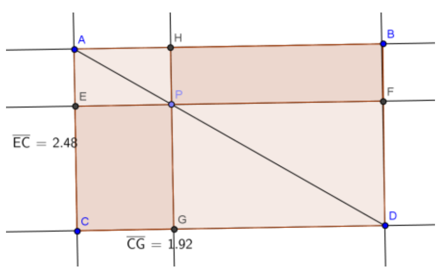
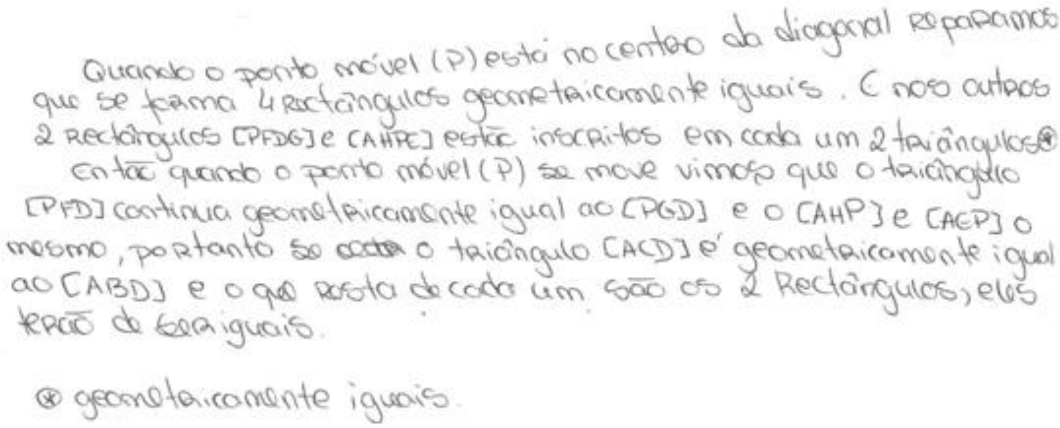


Figura 70 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 5, referente à tarefa4



Quando o ponto móvel (P) está no centro da diagonal reparamos que se forma 4 Rectângulos geometricamente iguais. E nos outros 2 Rectângulos [PFDG] e [AHPE] estão inscritos em cada um 2 triângulos⊛ então quando o ponto móvel (P) se move vimos que o triângulo [PFD] continua geometricamente igual ao [PGD] e o [AHP] e [AEP] o mesmo, portanto se ~~cada~~ o triângulo [ACD] é geometricamente igual ao [ABD] e o que resta de cada um são os 2 Rectângulos, eles terão de ser iguais.

⊛ geometricamente iguais.

Figura 71 - Resposta do grupo 5 à questão 4 da tarefa4

Também o grupo 6 se socorre do ficheiro *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo se apresenta na figura seguinte:

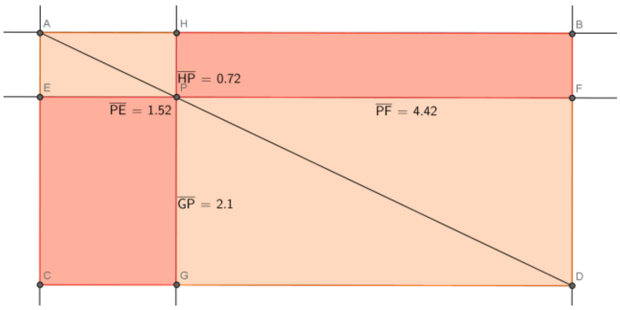
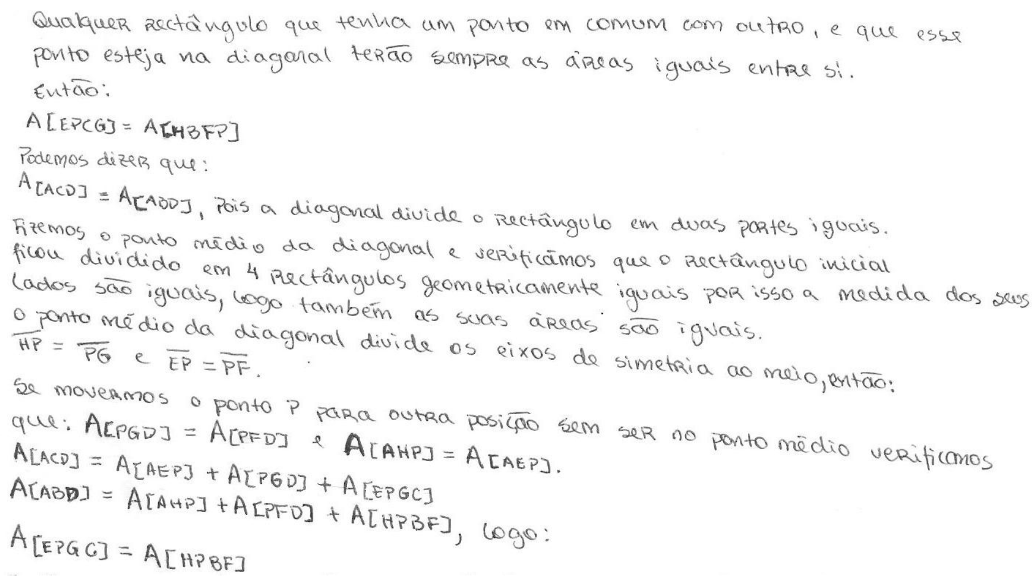


Figura 72 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 6, referente à tarefa4



Qualquer rectângulo que tenha um ponto em comum com outro, e que esse ponto esteja na diagonal terão sempre as áreas iguais entre si.
Então:
A[EPCG] = A[HBFP]
Podemos dizer que:
A[ACD] = A[ABD], Pois a diagonal divide o rectângulo em duas partes iguais.
Fizemos o ponto médio da diagonal e verificámos que o rectângulo inicial ficou dividido em 4 rectângulos geometricamente iguais por isso a medida dos seus lados são iguais, logo também as suas áreas são iguais.
O ponto médio da diagonal divide os eixos de simetria ao meio, então:
$\overline{HP} = \overline{PG}$ e $\overline{EP} = \overline{PF}$.
Se movermos o ponto P para outra posição sem ser no ponto médio verificamos que: A[PGD] = A[PFD] e A[AHP] = A[AEP].
A[ACD] = A[AEP] + A[PGD] + A[EPGC]
A[ABD] = A[AHP] + A[PFD] + A[HPBF], logo:
A[EPGC] = A[HPBF]

Figura 73 - Resposta do grupo 6 à questão 4 da tarefa4

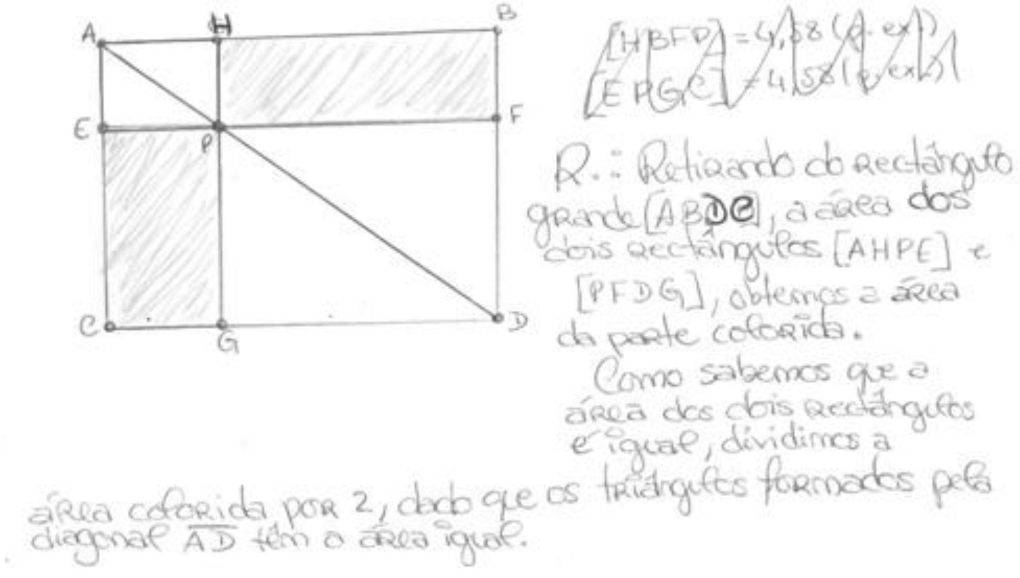


Figura 74 - Resposta do grupo 7 à questão 4 da tarefa4

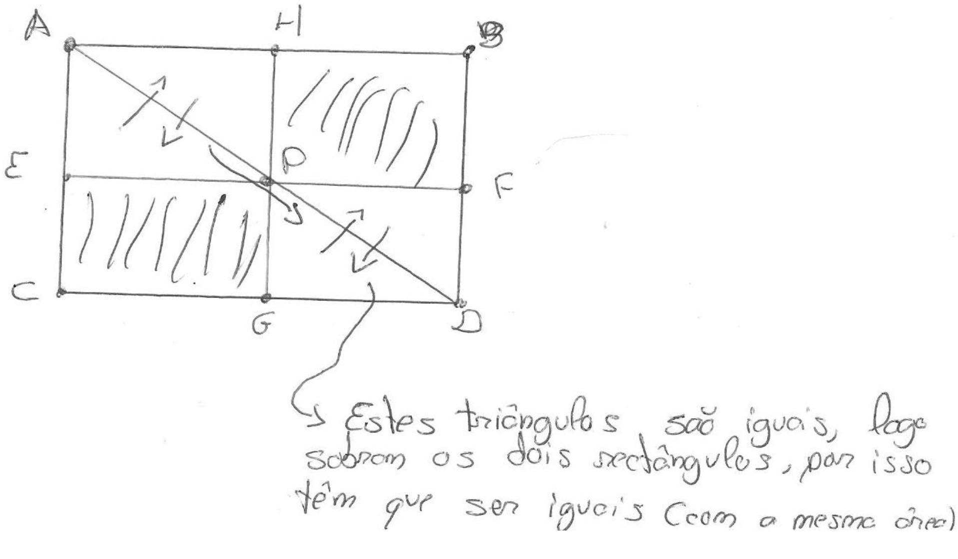


Figura 75 - Resposta do grupo 8 à questão 4 da tarefa4

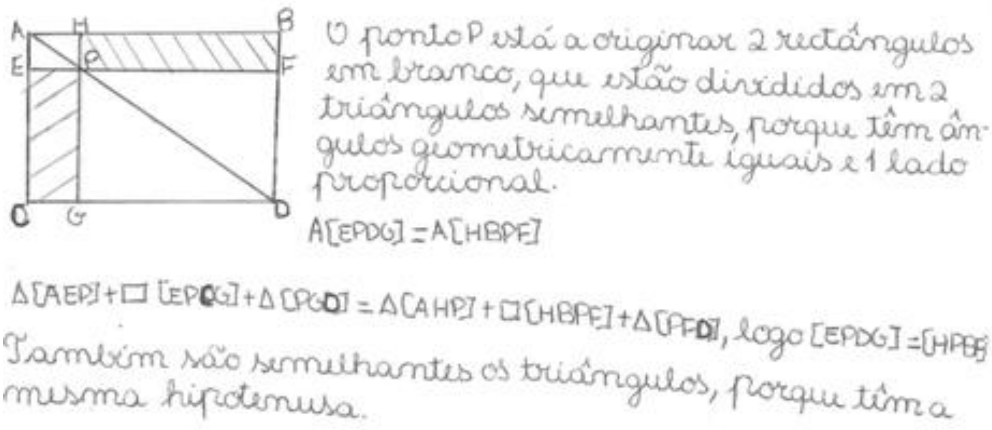


Figura 76 - Resposta do grupo 9 à questão 4 da tarefa4

Observa-se assim a existência de um grupo que não conseguiu demonstrar o solicitado, como se reforça no quadro 19. Há contudo diferenças entre os diversos grupos relativamente ao grau de completude das demonstrações. Com efeito, no caso do grupo 5, a demonstração apresenta um texto baralhado, mas é percetível a presença de um raciocínio lógico que permite ao grupo chegar à conclusão pretendida.

Quadro 19 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar a propriedade pedida relativa à tarefa 4

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Demonstra o pretendido	x	x	x	x	x	x		x	x
Não demonstra o pretendido							x		

Observa-se ainda que o grupo 7 produziu uma demonstração oral correta, não tendo sido capaz de a registar por escrito. O registo que produziu apresenta-se confuso não permitindo concluir o pretendido.

Os grupos compararam a sua demonstração com a demonstração do grupo vizinho, observando-se que o grupo 8 considera a sua demonstração diferente da realizada pelo grupo 7, todavia, o grupo 7 considera-as semelhantes.

Na reflexão sobre as funções que os alunos atribuem à demonstração, os grupos responderam à questão 6, referindo o que esta lhes acrescentou relativamente à conjetura que tinham inicialmente formulado. No quadro 20 observam-se então as funções que os diferentes grupos percecionaram relativamente à demonstração que realizaram.

Quadro 20 - Funções da demonstração matemática explicitadas pelos grupos de trabalho na realização da tarefa 4

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Verificação	x		x						x
Explicação	x	x		x		x	x	x	
Desafio intelectual	x	x							
Sistematização				x					

A análise produzida às respostas dos grupos permite deduzir três referências à função verificativa da demonstração. Os alunos dos grupos 1, 3 e 9 veem na demonstração uma forma de se ganhar certeza relativamente à propriedade que se pretende demonstrar.

Seis grupos, nomeadamente os grupos 1, 2, 4, 6, 7 e 8 salientam a função explicativa da demonstração, enquanto a função de desafio intelectual é referenciada por dois grupos (1 e 2). Nota-se ainda a referência à função de sistematização uma única vez pelo grupo 4.

Como se observa no quadro 20 o grupo 1 refere três propriedades, sendo a sua resposta a que consta na figura 77.

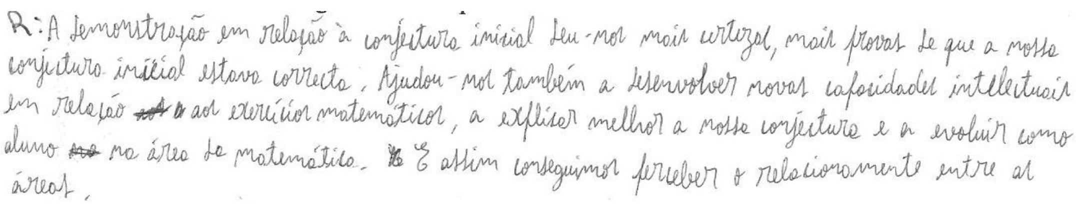

R: A demonstração em relação à conjectura inicial deu-nos mais certezas, mais provas de que a nossa conjectura inicial estava correcta. Ajudou-nos também a desenvolver novas capacidades intelectuais em relação ~~ao~~ aos exercícios matemáticos, a explicar melhor a nossa conjectura e a evoluir como alunos ~~na~~ na área da matemática. ~~E~~ E assim conseguimos perceber o relacionamento entre as áreas.

Figura 77 - Resposta do grupo 1 à questão 6 da tarefa4

Ressalta que o momento de demonstrar se revestiu de particular interesse para este grupo de alunas, sendo a função de desafio intelectual identificada no momento em que o grupo refere o desenvolvimento de novas capacidades intelectuais.

O grupo 2 enfatiza também a função de desafio intelectual, pois para estes alunos a demonstração produziu um ganho ao nível do desenvolvimento de capacidades na resolução de problemas de áreas, como se torna claro na figura 78.

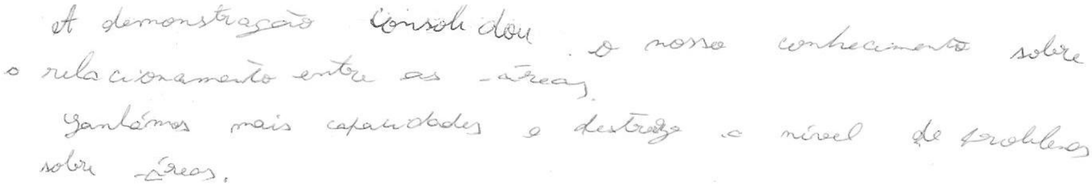

A demonstração consolidou o nosso conhecimento sobre o relacionamento entre as áreas.
Ganhámos mais capacidades e destreza a nível de problemas sobre áreas.

Figura 78 - Resposta do grupo 2 à questão 6 da tarefa4

A função de sistematização é explicitada pelo grupo 4, que, responde ao item 6 do seguinte modo:

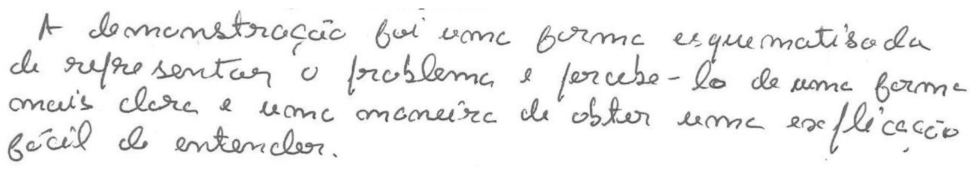

A demonstração foi uma forma esquematisada de representar o problema e percebe-lo de uma forma mais clara e uma maneira de obter uma explicação fácil de entender.

Figura 79 - Resposta do grupo 4 à questão 6 da tarefa4

Um painel com circunferências

Em “Um painel com circunferências” (anexo 9) é apresentada aos alunos a imagem que se segue:

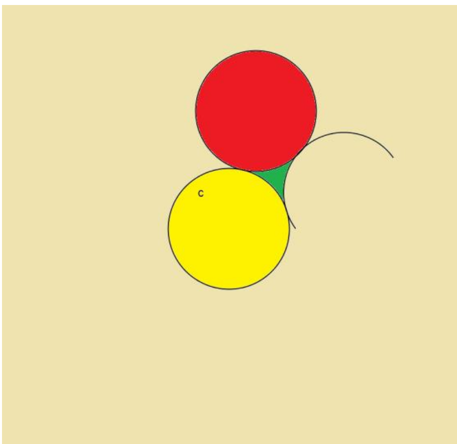


Figura 80 - Figura apresentada na introdução da tarefa5

Sendo dada uma circunferência, questiona-se quantas circunferências congruentes podem ser colocadas à sua volta, tal que cada uma delas seja tangente à circunferência dada e às circunferências colocadas a seu lado. Os grupos dividem-se nas suas respostas, surgindo uns grupos mais seguros do que outros no registo das suas hipóteses: para um grupo é possível dispor cinco circunferências nestas condições, enquanto para outros é possível dispor seis. Observa-se ainda um grupo que se encontra dividido entre quatro ou cinco circunferências. Nas figuras 81, 82 e 83 encontram-se as respostas dos diferentes grupos ao item 1 desta tarefa.

Nestas condições conseguem-se dispor 5 circunferências.	G1

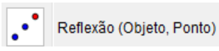
Figura 81 - Resposta do grupo 1 ao primeiro item da tarefa5

O número de circunferência que consegue dispor nestas condições são 6.	G2
Nestas condições conseguem-se dispor 6 circunferências.	G3
O número de circunferências que se conseguem dispor à volta daquela que fica no meio V.S.F.F. são 6 circunferências.	G4
São 6 circunferências	G5
Talvez 6.	G7
Pensamos que se podem construir 6 circunferências.	G8
O nº de circunferências é 6.	G9

Figura 82 - Respostas dos grupos 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9 ao primeiro item da tarefa5

4 ou 5 circunferências.	G6

Figura 83 - Resposta do grupo 6 ao primeiro item da tarefa5

Ao iniciarem o seu trabalho no *Geogebra*, os alunos construíram o ficheiro que lhes permitiu a formulação de conjeturas. Dada a complexidade da figura a construir, o enunciado explicitava claramente quais os passos que os alunos deviam seguir. Assim, solicitei aos alunos que começassem por construir um segmento AB, segmento este que passaria a ser o raio da circunferência, e que de seguida construíssem uma circunferência, dados o centro e o raio AB. Posteriormente deviam construir um ponto móvel sobre a circunferência e usando o menu 

deviam então prosseguir na construção.

No seguimento destas instruções, todos os grupos construíram corretamente os seus ficheiros, sendo todos eles construções dinâmicas.

No processo que envolve a formulação de conjeturas sobre o número de circunferências congruentes que se poderiam dispor em torno de uma central, todos os grupos conjeturaram ser exatamente seis.

No momento destinado à realização de demonstrações matemáticas, os alunos aclararam então se a conjetura estabelecida era ou não verdadeira, sendo-lhes solicitado, à semelhança das tarefas anteriores, que fizessem uma demonstração matemática. Este momento não se revestiu de grande dificuldade para os alunos. Eles sabiam o que tinham de demonstrar, até porque na aula anterior os alunos desenvolveram dentro da sala de aula uma tarefa prática sobre o número e construção dos sólidos platónicos, tarefa essa, que se mostrou muito útil no desenvolvimento desta demonstração. Todos os grupos mostraram segurança e solidez da realização demonstração, todavia as demonstrações realizadas apresentam diferentes graus de completude. Alguns dos grupos voltaram ao *Geogebra* para acrescentar no seu ficheiro, o hexágono que surge unindo os centros das circunferências que ficam em redor da circunferência central, bem como outros pormenores, relacionados com a decomposição do hexágono em triângulos equiláteros e a medição de ângulos. No quadro 21 mostra-se a distribuição desses detalhes pelos diferentes grupos.

Quadro 21 - Aspetos contemplados pelos grupos na construção da figura inerente à tarefa 5

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Construção do hexágono unindo os centros das circunferências em redor da circunferência central		x	x	x	x	x			x
Decomposição do hexágono em seis triângulos equiláteros		x							x
Medição dos ângulos	x	x							

Na elaboração desta demonstração, os grupos contemplaram os seguintes tópicos: (a) união do centro da circunferência central aos centros das seis circunferências colocadas em redor da primeira; (b) construção do hexágono formado pelos pontos supracitados e (c) soma das amplitudes dos ângulos que coincidem com o centro da circunferência central. O encadeamento destes tópicos de forma organizada e clara, usando princípios de raciocínio lógico-dedutivo, devia então permitir aos grupos a elaboração da sua demonstração.

O quadro 22 apresenta o desempenho dos grupos relativamente à produção da demonstração.

Quadro 22 - Tópicos usados pelos grupos de trabalho na elaboração da demonstração da tarefa 5 e grau de completude na consequente obtenção de conclusões

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
União do centro da circunferência central aos centros das seis circunferências colocadas em redor da primeira	a	a	a	a	a	a	a	a	a
Construção do hexágono formado pelos pontos supracitados		a	a	a	a	a			a
Soma das amplitudes dos ângulos que coincidem com o centro da circunferência central	a	a		a	a	a	a	a	a

Legenda:

a – utiliza o tópico em questão de forma completa e explicitada, seguindo-se a produção de conclusões.

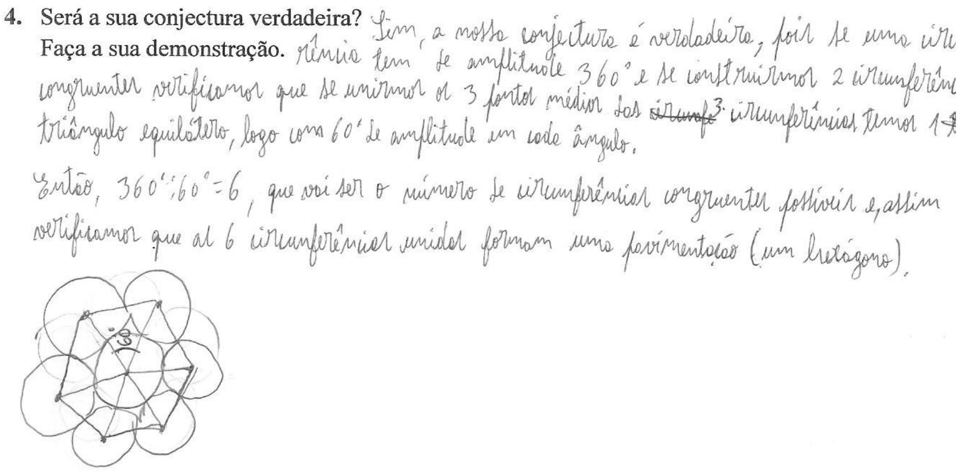
b – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com alguma incorreção, permitindo a produção de conclusões.

c – utiliza o tópico em questão de forma incompleta, ou com incorreção tal que não permite a produção de conclusões.

d – utiliza o tópico em questão de forma muito incompleta.

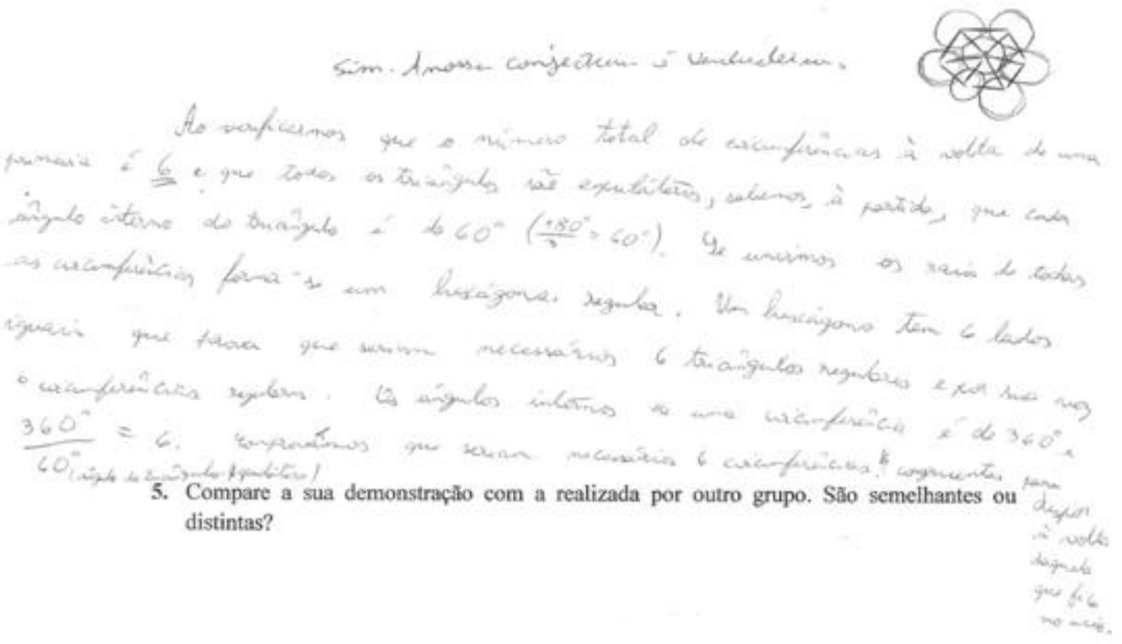
Todos os grupos usaram todos os tópicos de forma completa e explícita, por forma a progredirem na produção de conclusões.

Apresentam-se de seguida as demonstrações produzidas pelos diferentes grupos de trabalho.



4. **Será a sua conjectura verdadeira?** Sim, a nossa conjectura é verdadeira, pois se uma circ
Faça a sua demonstração. rênica tem de amplitude 360° e se construirmos 2 circunferênc
congruentes verificamos que se unirmos os 3 pontos médios das ~~circunf~~ 3 circunferências temos 1
triângulo equilátero, logo com 60° de amplitude em cada ângulo.
Então, 360°:60°=6, que vai ser o número de circunferências congruentes possíveis e, assim verificamos que as 6 circunferências unidas formam uma pavimentação (um hexágono).

Figura 84 - Resposta do grupo 1 à questão 4 da tarefa5


Sim. A nossa conjectura é verdadeira.

Ao verificarmos que o número total de circunferências à volta de uma primária é 6 e que todos os triângulos são equiláteros, sabemos, à partida, que cada ângulo interno do triângulo é de 60° ($\frac{180°}{3} = 60°$). Se unirmos os raios de todas as circunferências forma-se um hexágono regular. Um hexágono tem 6 lados iguais que fazem que sejam necessários 6 triângulos regulares e por sua vez 6 circunferências regulares. Os ângulos internos de uma circunferência é de 360° e $\frac{360°}{60°}$ (ângulo do triângulo equilátero) $= 6$. Comprovámos que seriam necessárias 6 circunferências congruentes para dispor à volta daquela que fica no meio.

5. Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

Figura 85 - Resposta do grupo 2 à questão 4 da tarefa5

O grupo 3, na sua resposta socorre-se do ficheiro do *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo é apresentado na figura que se segue:

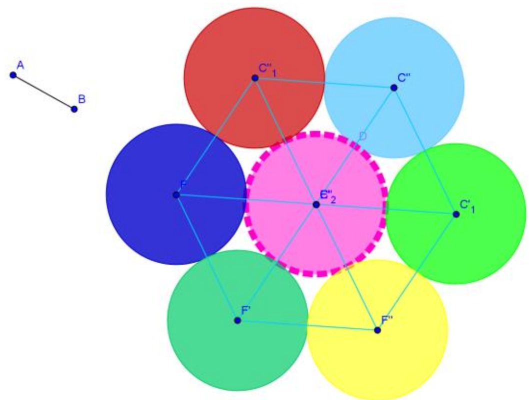
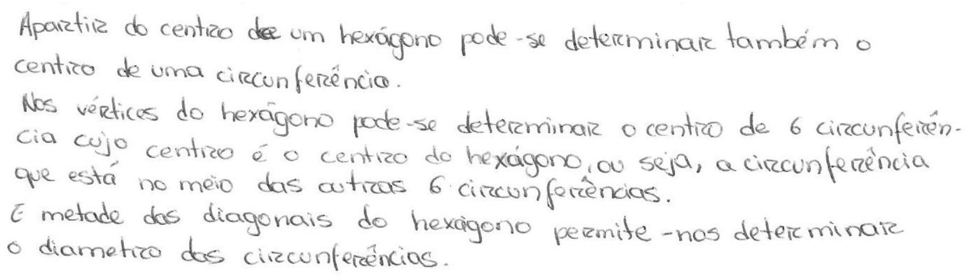


Figura 86 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 3, referente à tarefa5



Apartir do centro ~~de~~ um hexágono pode-se determinar também o centro de uma circunferência.
Nos vértices do hexágono pode-se determinar o centro de 6 circunferên-cia cujo centro é o centro do hexágono, ou seja, a circunferência que está no meio das outras 6 circunferências.
E metade das diagonais do hexágono permite-nos determinar o diametro das circunferências.

Figura 87 - Resposta do grupo 3 à questão 4 da tarefa5

Da mesma maneira, o grupo 4, na sua resposta socorre-se do ficheiro do *Geogebra* que produziu, sendo o mesmo apresentado na figura seguinte:

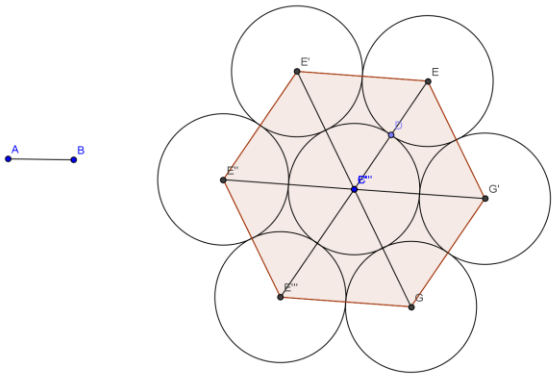
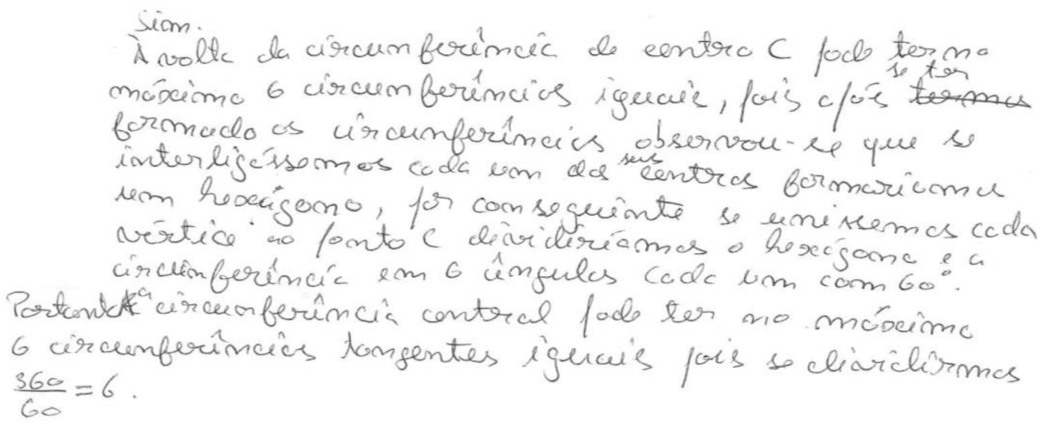


Figura 88 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 4, referente à tarefa5



Sim.
À volta da circunferência de centro C pode ter no máximo 6 circunferências iguais, pois c/ os se ter ~~termos~~ formado as circunferências observou-se que se interligássemos cada um dos seus centros formaria um hexágono, por conseguinte se uníssemos cada vértice ao ponto C dividiríamos o hexágono e a circunferência em 6 ângulos cada um com 60°.
Portanto a circunferência central pode ter no máximo 6 circunferências tangentes iguais pois se dividirmos $\frac{360}{60} = 6$.

Figura 89 - Resposta do grupo 4 à questão 4 da tarefa5

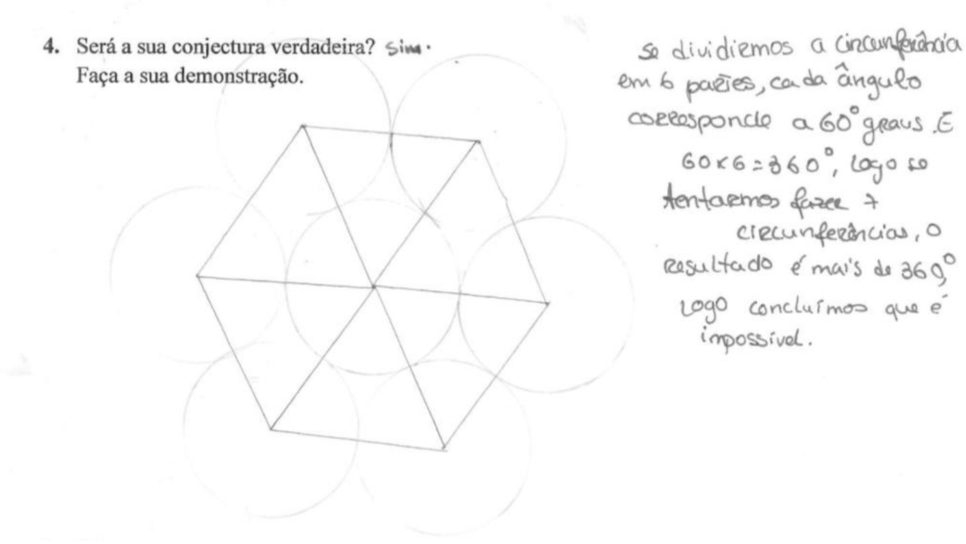


Figura 90 - Resposta do grupo 5 à questão 4 da tarefa5

Também o grupo 6, na sua resposta se socorre do ficheiro do *Geogebra* que produziu, pelo que o mesmo é apresentado na figura que se segue:

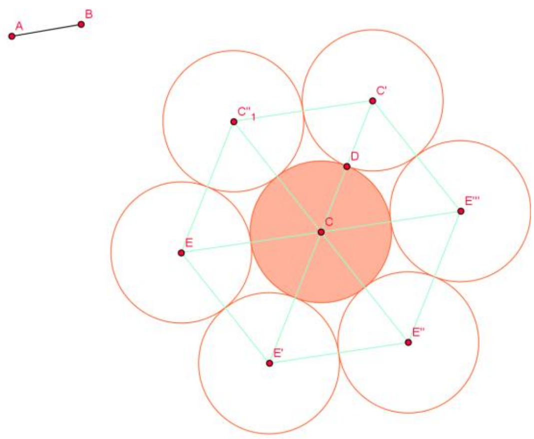


Figura 91 - Figura resultante do ficheiro de *Geogebra* elaborado pelo grupo 6, referente à tarefa5

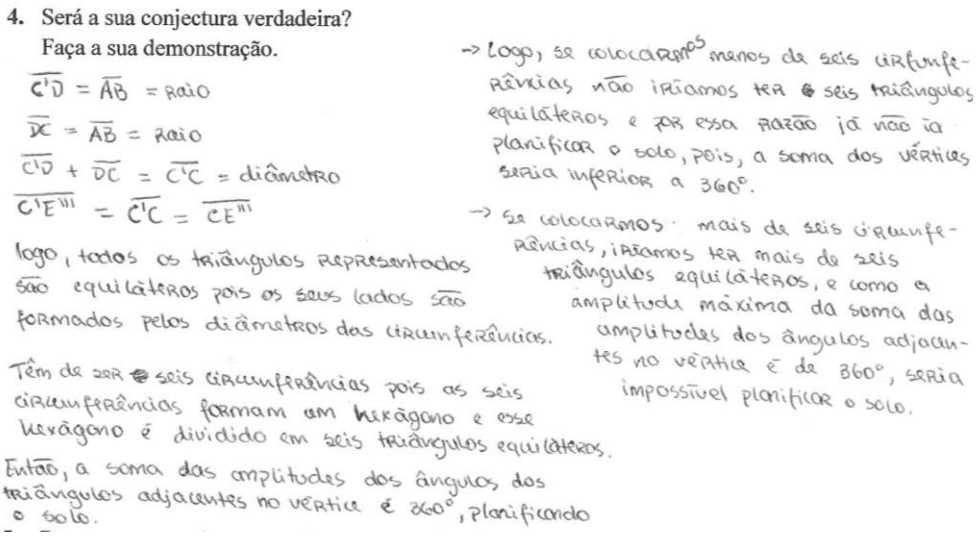


Figura 92 - Resposta do grupo 6 à questão 4 da tarefa5

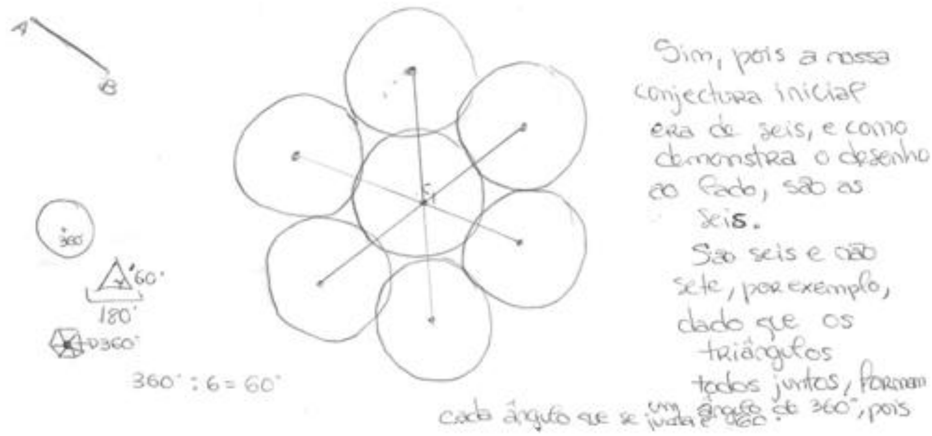


Figura 93 - Resposta do grupo 7 à questão 4 da tarefa5

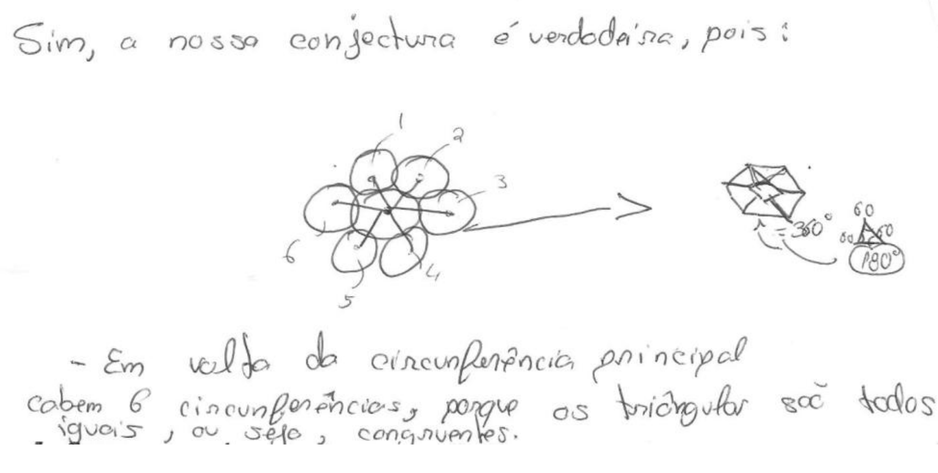


Figura 94 - Resposta do grupo 8 à questão 4 da tarefa5

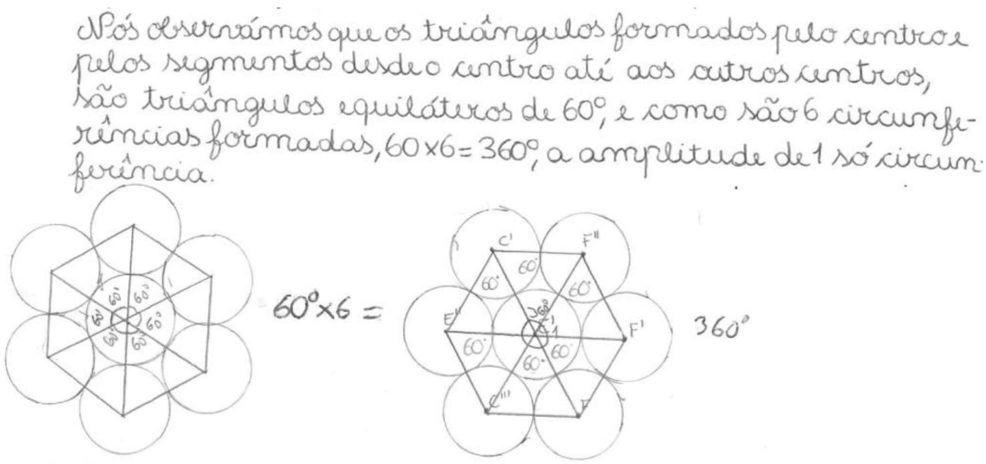


Figura 95 - Resposta do grupo 9 à questão 4 da tarefa5

Observa-se assim a existência de um grupo (grupo 3) que não conseguiu demonstrar o solicitado. Todos os outros grupos, com mais ou menos rigor conseguiram produzir uma demonstração que permitiu provar a existência de seis circunferências congruentes em torno de uma central, como se torna explícito no quadro 23.

Efetivamente o registo escrito produzido pelo grupo 3 não se encontra estruturado de forma a permitir concluir o pretendido estando apenas a clarificar a construção feita no *Geogebra*.

Quadro 23 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar a propriedade pedida relativa à tarefa 5

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Demonstra o pretendido	x	x		x	x	x	x	x	x
Não demonstra o pretendido			x						

Na comparação das demonstrações com os grupos vizinhos, observa-se que todos consideraram as demonstrações semelhantes.

Refletindo sobre as funções que os alunos atribuem à demonstração, os grupos responderam à questão 6, referindo o que a mesma lhes acrescentou relativamente à conjetura que tinham inicialmente formulado. No quadro 24 observam-se então as funções que os diferentes grupos percecionaram relativamente à demonstração que realizaram.

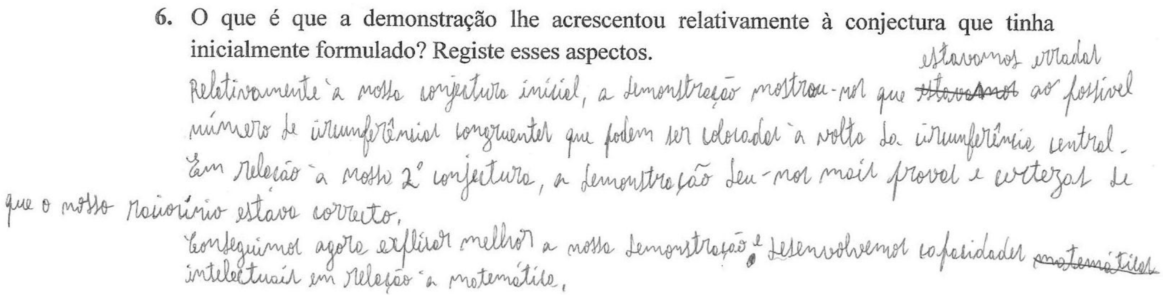
Quadro 24 - Funções da demonstração matemática explicitadas pelos grupos de trabalho na realização da tarefa 5

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Verificação	x				x				x
Explicação	x	x	x	x		x	x	x	
Desafio intelectual	x	x							

Da análise produzida às respostas dos alunos, observa-se que todos os grupos exceto o 5 e 9 percecionam a função explicativa da demonstração. Efetivamente a demonstração realizada veio explicar aos alunos o porquê. Subentende-se também nas respostas de três grupos a presença da função de verificação. Com efeito, sendo a certeza de serem seis circunferências obtidas no *Geogebra*, estes grupos reforçam o ganho de “mais certezas” (expressão usada pelos grupos 1, 5 e 9).

A presença da função de desafio intelectual é detetada nas respostas de dois grupos (1 e 2), pois para os alunos destes grupos de trabalho a mesma revelou-se importante no desenvolvimento de capacidades intelectuais.

Destacam-se de seguida nas figuras 96 e 97 as respostas dos grupos 1 e 4 ao item 6.


6. O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjectura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspectos.

Relativamente à nossa conjectura inicial, a demonstração mostrou-nos que ~~estávamos~~ estávamos errados ao possível número de circunferências congruentes que podem ser colocadas à volta da circunferência central.
Em relação à nossa 2ª conjectura, a demonstração deu-nos mais provas e certezas de que o nosso raciocínio estava correcto.
Conseguimos agora explicar melhor a nossa demonstração e desenvolvemos capacidades ~~matemáticas~~ intelectuais em relação à matemática.

Figura 96 - Resposta do grupo 1 à questão 6 da tarefa5

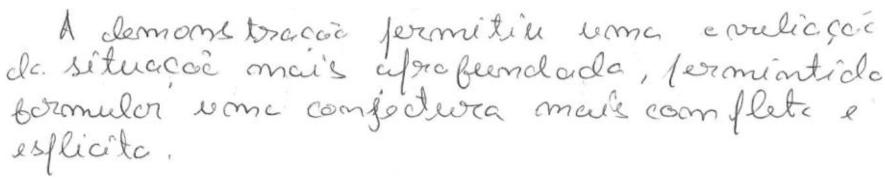

A demonstração permitiu uma avaliação da situação mais aprofundada, permitindo formular uma conjectura mais completa e explícita.

Figura 97 - Resposta do grupo 4 à questão 6 da tarefa5

Entendo com estas respostas que a demonstração serviu para validar a conjetura inicialmente definida, explicando o porquê de serem seis circunferências e potenciou, no caso do grupo 1 o desenvolvimento intelectual.

Salienta-se por fim na figura 98, a resposta dada pelo grupo 2 ao item 6.

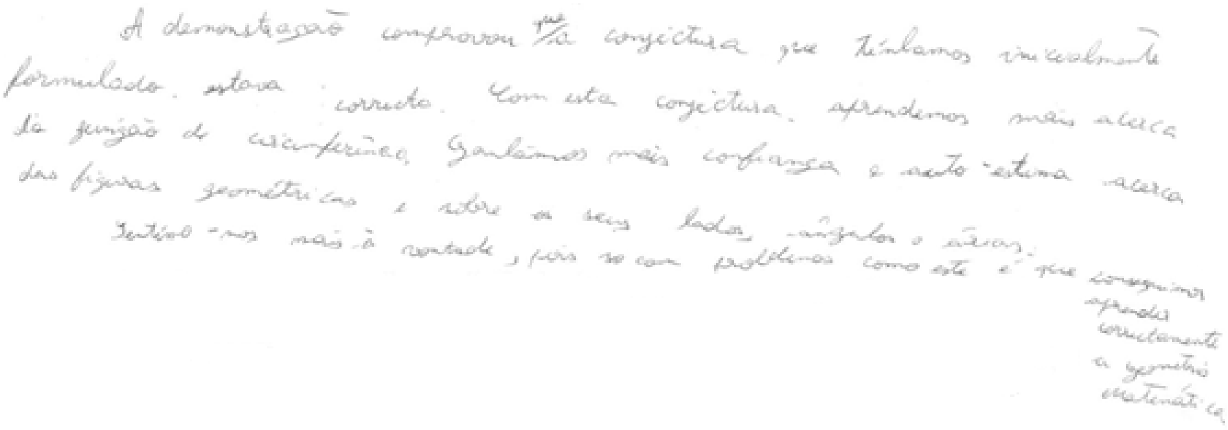

A demonstração comprovou que a conjectura que tínhamos inicialmente formulado estava correcta. Com esta conjectura aprendemos mais acerca da função de circunferência. Ganhámos mais confiança e auto-estima acerca das figuras geométricas e sobre os seus lados, ângulos e áreas. Sentimo-nos mais à vontade, pois só com problemas como este é que conseguimos aprender correctamente a geometria matemática.

Figura 98 - Resposta do grupo 2 à questão 6 da tarefa5

Com efeito, este grupo destaca para além da função de explicação inerente a esta demonstração, a importância deste tipo de tarefas para promover a aprendizagem da geometria bem como no desenvolvimento de capacidades comportamentais, indo de encontro ao explicitado por Garcia López (2011).

CAPÍTULO VII

Conclusão

Este capítulo apresenta-se estruturado em quatro secções, sendo a primeira uma síntese do estudo. Seguem-se as conclusões direcionadas para as questões formuladas com vista a concretizar o objetivo da investigação, as considerações finais e, por fim, a apresentação como sugestão de algumas questões para futuras investigações.

Síntese do estudo

O presente estudo pretendeu investigar como é que os alunos de 10.º ano de escolaridade desenvolvem a capacidade de demonstração matemática, sendo este processo sustentado por um ambiente de geometria dinâmica, mais concretamente o *Geogebra*. Assim, pretendeu responder-se de um modo particular às seguintes questões:

(a) Como lidam os alunos com a construção dinâmica usando o *Geogebra*?

(b) Como lidam os alunos com o processo de investigação matemática usando o *Geogebra*?

(c) Que tipos de demonstração matemática realizam sem o *Geogebra*?

(d) Que funções atribuem os alunos à demonstração matemática?

A revisão de literatura realizada viu a sua ênfase direcionada para a problemática em causa, tendo sido organizada em três capítulos: a demonstração em matemática; a demonstração no ensino e aprendizagem da Matemática; os ambientes de geometria dinâmica e a demonstração em Matemática. No capítulo “A demonstração em matemática” abordou-se o conceito de demonstração, onde se expôs a noção de conjetura e a relação existente entre argumentação e demonstração. Abordaram-se ainda as funções da demonstração em matemática e os tipos de demonstração. No capítulo “A demonstração no ensino e aprendizagem da Matemática” faz-se referência à demonstração no currículo de Matemática, enfatizando a importância desta no currículo da disciplina em causa e a evolução das tendências curriculares da demonstração. Abordam-se as funções da demonstração direcionadas para o contexto educativo. As práticas de ensino da demonstração, onde se destaca por um lado o ensino tradicional da mesma e por outro as perspetivas atuais sobre o ensino/aprendizagem da demonstração, também são focadas. Dá-se ainda destaque às investigações sobre o ensino da demonstração, onde as atividades facilitadoras da mesma e alguns estudos realizados no estrangeiro e em Portugal têm lugar. No capítulo “Os ambientes de geometria dinâmica e a demonstração em Matemática” procurou-se fazer uma pequena abordagem sobre o que são ambientes de geometria dinâmica (AGD´s), tendo sido apresentada uma breve caracterização do *Geogebra*. Contemplaram-se também as potencialidades dos AGD´s para o ensino da Matemática e referiram-se as potencialidades e desafios dos mesmos na formulação de conjeturas e na demonstração. Por último referiram-se alguns estudos sobre o ensino e aprendizagem da demonstração envolvendo AGD´s, realizados no estrangeiro e em Portugal.

Neste estudo optou-se por uma abordagem interpretativa e qualitativa, concretizada através de um estudo de caso de uma turma de 10.º ano, ganhando relevo a particularidade do contexto onde decorre a investigação, como meio de proporcionar a compreensão do caso.

A recolha dos dados teve lugar no primeiro período do ano letivo de 2011/2012, detendo particular importância a professora que, na presente investigação, assumiu simultaneamente a função de investigadora. A recolha foi feita através da observação direta do desempenho dos alunos durante as aulas em que decorreu o estudo, a qual foi retida com o registo vídeo de alguns momentos das aulas e de notas de campo retiradas pela professora/investigadora, e ainda da recolha de documentos, registos escritos e ficheiros *Geogebra* produzidos pelos alunos em resposta às tarefas.

A análise dos dados envolveu duas fases, tendo a primeira sido constituída pelo estudo detalhado de cada uma das cinco tarefas aplicada: *Pontos médios de um quadrilátero*; *A ilha*; *O cão do jardim*; *Área do retângulo*; e *Um painel com circunferências*. A segunda fase de análise, resultante de uma leitura transversal das cinco tarefas, permitiu a elaboração das conclusões do presente estudo, que de seguida se apontam.

Conclusões

A construção dinâmica no *Geogebra*

Tal como aconteceu com Garcia López (2011), os alunos revelaram sempre uma atitude muito positiva face ao trabalho com o *Geogebra* e evoluíram positivamente no uso das suas ferramentas, revelando cada vez mais autonomia na elaboração das construções. Para isto poderá contribuir o facto de o *Geogebra* ser um AGD intuitivo e que apresenta os comandos em português.

A generalidade dos grupos de alunos não revelou grandes dificuldades em trabalhar com o *Geogebra* na construção das figuras requeridas pelas tarefas, apresentando construções perfeitas em quase todas as situações. Saliento que uma construção é por mim considerada perfeita quando contempla corretamente todos os aspetos que envolvem a sua construção. Realço todavia que apareceram quase até ao final construções com algumas imperfeições. No conjunto de todas as figuras construídas, 78% delas estão perfeitas.

As imperfeições nas construções levam por vezes a que a figura não apresente consistência, ou seja, que ao deslocar os seus pontos móveis, ela não mantenha as mesmas propriedades.

No que concerne à consistência das figuras apresentadas, o quadro 25 apresenta uma leitura cruzada das informações recolhidas nas diferentes tarefas, onde se pode observar quais os grupos que apresentaram construções robustas.

Quadro 25 - Construções consistentes por tarefa dos diferentes grupos de trabalho

Apresentação de uma construção consistente por grupo e tarefa	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1		x	x	x	x	x	x	x	x
Tarefa 2	x	x		x	x	x	x	x	x
Tarefa 3	x	x	x			x	x	x	
Tarefa 4	x	x	x	x		x	x	x	
Tarefa 5	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Assim, 84% das construções foram por mim consideradas consistentes. Observa-se que a tarefa 3 foi aquela onde apareceram mais construções sem robustez, seguida da tarefa 4 e por fim das tarefas 2 e 1, estas duas com uma só construção não consistente.

A análise dos dados evidencia a tendência dos alunos tentarem reproduzir no *Geogebra* as figuras que lhes eram apresentadas nas fichas de trabalho, usando inclusivamente as mesmas letras. Na realidade, todos os grupos tiveram a preocupação de reproduzir no *Geogebra* a figura como se fosse uma fotografia. Observou-se também que na construção de uma nova figura tentavam apoiar-se nas tarefas anteriores e, se possível, usar os mesmos comandos. Tal facto levou a que na construção da figura inerente à tarefa 3, "O cão do jardim", sete dos nove grupos tenham construído o triângulo retângulo isósceles, por usarem o comando de rotação de um objeto dado o centro de rotação e a amplitude pretendida, comando este que tinha sido usado na tarefa anterior para construção do triângulo equilátero.

Todas as construções efetuadas são detentoras de características dinâmicas. A totalidade das construções permitiu, em todos os casos a manipulação das figuras, embora algumas não mantivessem as suas características, não sendo por isso consideradas consistentes e obrigassem a uma manipulação seguida de um "arrumar" da figura. Salienta-se que em todos os casos em que as figuras não ficaram bem construídas, no ficheiro que foi entregue, as mesmas estavam de tal maneira arrumadas que aparentavam uma construção perfeita.

A construção dos pontos móveis previstos nas tarefas 2, 3 e 4 foi efetuada adequadamente por todos os grupos, sendo que, por vezes, os mesmos não ficaram restritos aos objetos sobre os quais deveriam ser construídos. Observa-se a este nível uma evolução notória, pois na primeira tarefa em que foi necessária a construção de um ponto móvel, o mesmo não ficou restrito ao interior do polígono em quatro grupos. Este cenário evoluiu positivamente de tal modo que, nas construções das tarefas 3 e 4 apenas um grupo em cada uma destas tarefas não fez o ponto móvel restrito ao objeto onde o mesmo devia ser construído.

Comparando agora os grupos entre si, relativamente à consistência das construções apresentadas, observa-se que os grupos 2, 6, 7 e 8 construíram sempre consistentemente as suas figuras. Os grupos 1, 3 e 4 não construíram consistentemente uma das suas figuras e os grupos 5 e 9 foram aqueles que apresentaram mais construções sem robustez, como se pode observar no gráfico 1

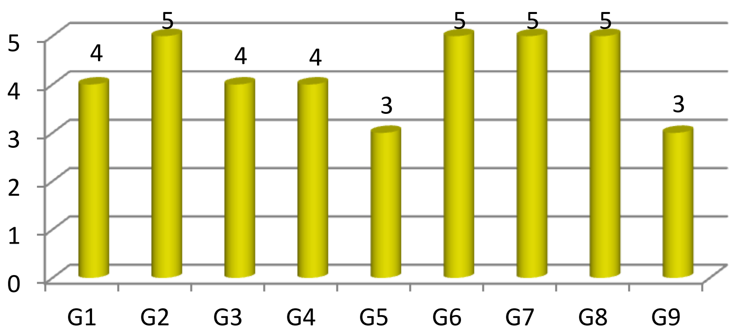


Gráfico 1 – N.º de construções consistentes por grupo

Relativamente à construção dos pontos móveis, observa-se uma evolução positiva dos grupos 2, 3 e 7 dado que progrediram na correção da sua construção, respeitando os objetos aos quais os mesmos deveriam ficar restritos.

De seguida é apresentada uma síntese das principais conclusões obtidas para esta questão:

- Observa-se uma tendência generalizada dos grupos para construírem a figura no *Geogebra* o mais parecida possível com as figuras apresentadas nas diferentes fichas de trabalho;
- Há uma tendência generalizada dos grupos em se apoiarem nos procedimentos usados em tarefas anteriores aquando das novas construções;

- Perante construções mal feitas, assiste-se a uma tendência generalizada dos grupos para arrumarem as figuras mal construídas de modo a aparentarem uma construção perfeita;
- Nota-se uma evolução positiva no uso das ferramentas do *Geogebra* e da autoconfiança revelada na construção das figuras;
- Nota-se uma evolução positiva na construção de pontos móveis restritos aos objetos onde devem ser construídos.

O desenrolar do processo de investigação por parte dos alunos

Relativamente às fases seguidas no desenrolar do processo investigativo, o presente estudo aproxima-se do explicitado por Brocardo (2001), não tendo sido contemplada a fase de formulação de questões.

Com efeito, em todas as tarefas os alunos começaram por estimar uma resposta para a situação em causa, iniciando desta maneira o processo investigativo. Esta fase foi considerada necessária, para que existisse uma primeira análise da situação conducente a uma sensibilização e apropriação por parte dos alunos da situação problemática e ao seu envolvimento e desejo de verificar a correção dessa estimativa. Este momento do processo investigativo revelou-se importante no desenvolvimento de valores e atitudes, nomeadamente o espírito crítico, o espírito de tolerância e de cooperação dentro do grupo de trabalho, bem como o desenvolvimento da capacidade de expressão e fundamentação das diversas opiniões. Esta fase mostrou-se também relevante para que os alunos se apercebessem de que esta primeira fase se distingue do processo de realização de conjeturas mais sustentado, consistindo apenas numa primeira impressão desprovida de fundamento relativa ao problema em causa.

Todos os grupos, em todas as tarefas, procuraram estimar uma solução para o problema, à exceção de um grupo que uma única vez se recusou a fazê-la, situação que se refere de seguida. Notou-se que nas primeiras tarefas os grupos estimavam com alguma ligeireza e celeridade, mas à medida que o estudo foi evoluindo, passou a existir um maior cuidado na análise das situações propostas e posterior redação da estimativa. Salienta-se que o grupo 8, na tarefa 4, decidiu não fazer nenhuma estimativa por se encontrar muito indeciso relativamente à solução do problema. Os grupos mostravam contentamento por estimarem corretamente, sendo motivo de orgulho conseguir apontar à partida aquela que viria a constituir a solução final. No quadro seguinte observam-se os grupos que realizaram estimativas certas e seguras nas diferentes tarefas.

Quadro 26 - Estimativas certas e seguras da solução de cada tarefa apresentadas pelos grupos

Apresentação de uma estimativa segura e que não foi alterada após trabalho no *Geogebra*, por tarefa	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1	x	x	x	x					
Tarefa 2									
Tarefa 3				x					
Tarefa 4		x		x					
Tarefa 5		x	x	x	x				x

Assim, 27% das estimativas apresentadas foram de encontro à solução final do problema. Nota-se que foi a tarefa 5, aquela onde mais estimativas corretas apareceram, seguida imediatamente da tarefa 1. Ressalta também o facto de na tarefa 2 não aparecer nenhuma estimativa correta e, na tarefa 3 apenas uma.

O registo das estimativas feitas promoveu um compromisso com esta primeira abordagem, permitindo no final da atividade uma comparação com a ideia inicialmente defendida.

O processo de formulação de conjeturas que se seguiu no desenrolar do processo investigativo foi em todas as tarefas apoiado pela exploração com o *Geogebra*. Com efeito, cenários em ambientes de geometria dinâmica favorecem de todo a produção de conjeturas, como é amplamente sustentado por vários autores (Ponte, 1992; De Villiers, 2003b; NCTM 2007; Keyton, 2003; Parks, 2003). Todavia, a natureza fechada das tarefas implementadas não suscitou o aparecimento de diferentes conjeturas pelos grupos, como aliás prevê De Villiers (2003b).

O conceito de conjeturar foi novo para todos estes alunos, tendo sido introduzido na turma com o devido ênfase, alguns dias (nove) antes da implementação da atividade 0, como se explica no capítulo da metodologia. Observa-se que em 67% dos grupos assistiu-se a uma apropriação correta deste termo desde o início do estudo. Os outros

33% dos grupos confundiram até ao final a noção de estimativa com a noção de conjetura.

Todos os grupos conjeturaram corretamente desde o início do estudo. Observou-se no início a tendência para uma formulação de conjeturas desprovida de uma manipulação exaustiva da figura, situação não verificada no final do estudo. Na realidade, na fase final os grupos detinham mais atenção a este aspeto procurando explorar todos os casos e encontrando relações de invariância com o objetivo de darem continuidade ao processo de formulação de conjeturas, aspeto que aponta conformidade com o referido por Machado (2005).

A análise dos dados permite também verificar que as construções sem consistência não vieram limitar ou impedir o processo de formulação de conjeturas. Com efeito, os grupos detentores de figuras sem robustez, sempre que procediam ao arrastamento de um ponto móvel, procediam a uma arrumação posterior da figura de modo a poderem procurar as relações de invariância e seguidamente estabelecerem as conjeturas.

A formulação de conjeturas decorreu sem dificuldade para os grupos, sendo que todos utilizaram as potencialidades do *Geogebra* para apoiar a sua formulação, nomeadamente a manipulação das figuras e a utilização das ferramentas de medição e cálculo. Salienta-se a resposta dada ao item seis, pelo grupo 1, na resolução da tarefa 3: "conseguimos descobrir esta nova conjetura porque no *Geogebra* conseguimos medir lados, mover o ponto T".

A fase do teste das conjeturas foi feita em grande proximidade da fase da formulação. Com efeito, os grupos formularam as suas conjeturas e procederam ao seu teste utilizando as mesmas ferramentas do *Geogebra*, isto é, a manipulação de figuras e a utilização das ferramentas de cálculo. Usaram também aqui, o mesmo processo usado na fase de formulação de conjeturas, ou seja, a procura de relações de invariância.

Nas palavras de Holfstadter (2003) o trabalho no *Geogebra* oferece certeza e confiança na testagem das conjeturas. Nesta investigação, este aspeto é referido pelo grupo 2, no decorrer da segunda tarefa, ao escrever na resposta ao item seis que "com a ajuda do programa informático *Geogebra*, tivemos mais certezas (…) ganhamos mais certezas e confianças".

Seguem-se agora aspetos relativos à formulação de conjeturas em algumas tarefas. Na primeira tarefa este processo começou por ser comprometido pela falta de prérequisitos. Com efeito, os alunos não dominavam a classificação dos quadriláteros; assim, observavam determinados quadriláteros no *Geogebra* e posteriormente atribuíam-lhe nomes diferentes. Após discussão em grande grupo com o objetivo de elucidar os alunos relativamente a esta classificação este processo prosseguiu sem dificuldades.

A formulação de conjeturas na segunda e terceira tarefas foi marcada pela surpresa dos resultados. Na segunda tarefa todos os grupos apresentaram uma estimativa diferente daquilo que viria a constituir a solução final e na terceira tarefa, todos os grupos exceto o quarto voltaram a estimar erradamente. Tal facto já se esperava e destaca-se que a escolha destas tarefas foi propositada, pois, segundo Takáč (2009), tarefas que parecem ter uma solução e depois de lidar com elas apresentam uma solução completamente diferente e surpreendente, são tarefas que, no entender do autor, desenvolvem o espírito crítico nos alunos e ajudam também a sentir a necessidade de demonstrar.

Comparando agora os grupos entre si, observa-se, relativamente ao processo de estimar que os grupos 4 e 2 foram aqueles que mais vezes estimaram corretamente. Com efeito, o grupo 4 apresentou quatro estimativas corretas e o grupo 2, três, como se pode observar no gráfico 2 que abaixo se apresenta. Neste gráfico é também possível fazer uma leitura conjunta relativa à prestação dos diferentes grupos, no que concerne às construções no *Geogebra*, produção de estimativas e de conjeturas corretas.

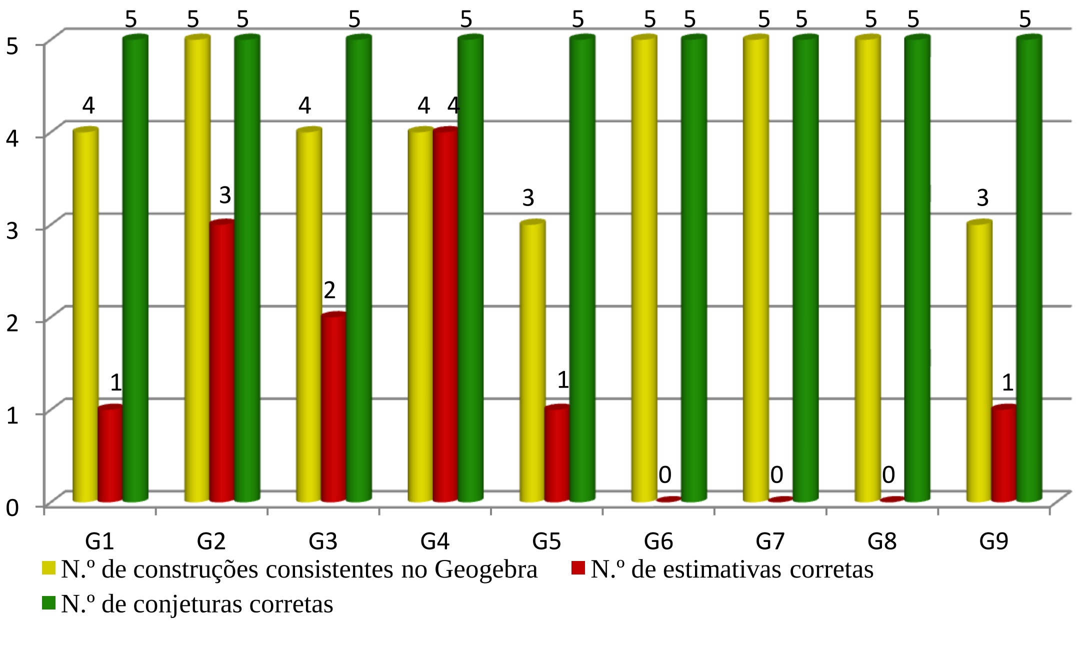


Gráfico 2 – N.º de construções consistentes, estimativas e conjeturas certas por grupo

Observa-se que os grupos tiveram mais sucesso nas construções do *Geogebra* e na produção de conjeturas corretas do que a descobrir estimativas certas. Ressaltam três grupos que nunca estimaram corretamente, todavia apresentaram sempre construções rigorosas e conjeturaram corretamente em todas as tarefas.

Relativamente à compreensão do que é uma conjetura, verificou-se a existência de grupos que não conseguiram fazer uma apropriação correta deste conceito ao longo de toda a investigação. Tal verificou-se com os grupos 1, 6 e 9. Nos documentos escritos por estes grupos pode observar-se a confusão existente entre a noção de estimativa e de conjetura. Com efeito, nas suas respostas é referido muitas vezes que o *Geogebra* vem alterar a primeira conjetura, ficando sempre claro que se estão a referir à estimativa anotada no início da realização da tarefa.

De seguida é apresentada uma síntese das principais conclusões obtidas para esta questão:

- Existe uma tendência generalizada dos grupos para apresentarem estimativas sem grandes dificuldades, embora nem sempre corretas;
- Assiste-se a uma tendência generalizada dos grupos para uma apropriação correta do conceito de conjetura;
- Presencia-se a utilização das ferramentas do *Geogebra* para apoiar a formulação de conjeturas, mais precisamente as ferramentas de medição e cálculo;
- Assiste-se à utilização do processo de procura de invariantes na fase de formulação de conjeturas, revelando entendimento do que é o conteúdo da conjetura;
- Verifica-se uma fusão das fases de formulação e teste de conjeturas;
- Observa-se que construções sem consistência não atrapalham nem limitam o processo de formulação de conjeturas;
- Aponta-se uma evolução no processo de reflexão anterior à formulação de estimativas;
- Nota-se uma evolução na manipulação das figuras para sustentação do processo de formulação de conjeturas, sendo claro que no final do estudo os alunos

despendem mais tempo na manipulação das figuras para posteriormente formularem as suas conjeturas com mais segurança.

Tipos de demonstração matemática realizadas sem o *Geogebra*

À semelhança de muitos estudos (Brocardo, 2001; Ferreira, 2005; Machado 2005) os grupos começaram por considerar a conjetura como uma conclusão, sendo a fase da formulação de conjeturas para estes alunos, o culminar do processo investigativo. Com efeito, tal como em Brocardo (2001), a prova das conjeturas é vista como desnecessária para a maioria dos grupos. Na realidade, no início do presente estudo os alunos não sentiam a necessidade de provar as suas conjeturas, nem estavam despertos para a necessidade de realizar demonstrações matemáticas, sendo que o trabalho desenvolvido no *Geogebra* apresentava caráter de prova. Saliento a este respeito, parte de uma resposta dada pelo grupo 6 ao item 6, no decorrer da tarefa 3: "concluímos após a demonstração do *Geogebra* que a nossa ideia inicial estava errada (…) ". Larios-Osorio e Acuña-Soto (2009) justificam esta postura com a força da evidência das imagens que se impõe como prova e desvirtua a necessidade de procura de uma demonstração, como já se destacou na revisão de literatura.

Envolvidos por uma motivação extrínseca, os alunos iniciaram as suas demonstrações matemáticas apresentando em termos gerais muitas dificuldades, incertezas e falta de autonomia quanto ao processo a desenvolver. Com o evoluir do estudo todos os alunos perceberam que era necessária a fase da realização de demonstrações matemáticas e foi aparecendo naturalmente a motivação intrínseca referida em Takáč (2009). Os alunos começaram a apresentar uma postura menos negativa face à fase da realização das demonstrações matemáticas, revelando curiosidade relativamente à forma como se provava matematicamente a veracidade das conjeturas encontradas.

É amplamente abordada na revisão da literatura a enorme dificuldade que os alunos apresentam em produzir demonstrações matemáticas. Variadíssimos autores apontam nesse sentido (Ersoz, 2009; Bieda, 2009; Bruner, Reusser, & Pauli, 2011; Cyr, 2011) e esta investigação é consistente com esses resultados. A presente investigação vai também ao encontro do estudo de Machado (2005), observando-se que os grupos revelaram dificuldade em iniciar as suas demonstrações. Embora tivessem mostrado evolução positiva e melhorassem neste sentido, a minha presença foi sempre fundamental no sentido de lhes dar reforço positivo no início da realização das demonstrações. Nas últimas três tarefas observou-se a existência de 44% dos grupos que conseguiram iniciar a demonstração sem a minha ajuda.

No quadro 27 pode observar-se quais os grupos que, em cada tarefa conseguiram demonstrar o solicitado.

Quadro 27 - Relação dos grupos que conseguiram demonstrar o solicitado por tarefa

Grupos que conseguiram demonstrar o solicitado por tarefa	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1		x	x	x	x	x			x
Tarefa 2	x	x				x			
Tarefa 3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Tarefa 4	x	x	x	x	x	x		x	x
Tarefa 5	x	x		x	x	x	x	x	x

Assim observa-se que 76% das demonstrações foram realizadas corretamente. Ressalta que na tarefa 3 todos os grupos conseguiram demonstrar o solicitado e nas tarefas 4 e 5 apenas um grupo ficou aquém do pretendido, os grupos 7 e 3 respetivamente. Observa-se ainda que na tarefa 1 três grupos não conseguiram efetuar a demonstração solicitada. Sublinho por fim que a tarefa 2 foi aquela que mais dificuldades causou à maioria dos grupos.

Relativamente aos tipos de demonstrações realizadas pelos grupos de trabalho, observa-se o uso predominante do raciocínio dedutivo aparecendo o método de demonstração direta e o método de demonstração geométrica.

No quadro 28, pode então observar-se quais os métodos de demonstração usados pelos grupos, nas diferentes tarefas.

Quadro 28 - Tipos de demonstração usados por tarefa e grupo de trabalho

Tipos de demonstração usados por tarefa e grupo de trabalho		G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1	Demonstração direta		x	x	x	x	x			x
	Demonstração geométrica									
Tarefa 2	Demonstração direta	x	x				x			
	Demonstração geométrica									
Tarefa 3	Demonstração direta	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Demonstração geométrica	x					x	x	x	
Tarefa 4	Demonstração direta	x	x	x	x		x		x	x
	Demonstração geométrica									
Tarefa 5	Demonstração direta	x	x		x	x	x	x	x	x
	Demonstração geométrica	x	x		x	x	x	x	x	x

Observa-se que a demonstração direta surge em 100% das demonstrações feitas corretamente, havendo em 36% dos casos uma associação com o método de demonstração geométrico.

Os resultados da presente investigação sugerem a utilização de uma forma narrativa e informal, no registo das demonstrações matemáticas, estando este estudo em conformidade com o explicitado por Rodrigues (2008). Com efeito os alunos tentam, na sua generalidade, usar algum rigor no vocabulário específico da matemática que aplicam, mas escrevem de uma forma que se aproxima da maneira como pensam e falam uns com os outros desprezando grandes formalismos.

A análise dos dados do presente estudo permite também identificar uma aproximação à ideia sustentada por Rodrigues (2008), de que existe uma dificuldade generalizada em passar para o papel a demonstração produzida. Saliento a dificuldade sentida pelo grupo 1 na realização da demonstração associada à tarefa 1, como expoente máximo desta situação. Com efeito, o grupo conseguiu produzir oralmente a demonstração da propriedade em causa, mas teve uma enorme dificuldade em registá-la no papel, apresentando um texto sem coerência, muito baralhado e que não provava de maneira nenhuma o pretendido.

Da leitura cruzada das diferentes tarefas pode também concluir-se que alguns grupos prendem-se com concretizações particulares do *Geogebra* em termos de medidas para sustentarem as suas demonstrações. Tal verificou-se com 22% dos grupos, na realização de três das tarefas propostas, sendo que nas três tarefas foram os mesmos grupos que ocorreram no mesmo erro.

Substancialmente diferente do exposto anteriormente, a análise de dados permite concluir que na realização das demonstrações, alguns grupos começam por trabalhar com casos particulares das figuras que são obtidas usando posicionamentos estratégicos dos pontos móveis. Notou-se este aspeto na realização da tarefa 4 “Área do quadrilátero”, onde 33% dos grupos deslocaram o ponto móvel para o meio da diagonal do retângulo, ficando o retângulo inicial dividido em quatro retângulos de área igual. De seguida prosseguiram com a demonstração para outras posições do ponto móvel. Tal facto permite concluir que os alunos se inspiraram no *Geogebra* e começaram por fixar casos particulares que demonstraram.

A análise dos dados permite também concluir que os alunos revelam dificuldades extremas em produzir demonstrações, quando é necessário desenvolver um raciocínio em que se verifique um acréscimo no grau de abstração e simbolização e onde os argumentos a usar não são óbvios. Tal verificou-se na realização da demonstração inerente à segunda tarefa, “A ilha”. Como recurso, os alunos tinham de recorrer ao cálculo das áreas dos triângulos que surgem no interior do triângulo inicial. Tal necessidade revelou-se muito difícil de entender para a maioria dos grupos, pois a demonstração tinha a ver com o cálculo de distâncias e não com o cálculo de áreas. Efetivamente, a demonstração acabou por ter sido feita em grande grupo, conduzida por mim e sempre com a intervenção de alguns alunos dos grupos 1, 2 e 6.

Seguem-se agora alguns aspetos relativos ao processo de demonstração nas diferentes tarefas. A principal dificuldade associada à demonstração da tarefa 1 teve a ver com o facto de a mesma obrigar a uma repetição do texto para provar que os lados opostos são paralelos. Verificou-se que os alunos manifestaram grande dificuldade em traduzir essa informação para o papel, quando na realidade todos perceberam muito bem o que estavam a demonstrar e o consideravam relativamente fácil. No que concerne à tarefa 2 a principal dificuldade prendeu-se com a exigência de abstração e simbolização que atrás se refere, tendo sido esta a demonstração em que os alunos mais se perderam. Na tarefa 3, “O cão do jardim”, os alunos sentiram-se mais à vontade e foi aquela em que os grupos apresentaram maior variedade de demonstrações, também porque a tarefa assim o suscitava. Relativamente à tarefa 4, “Área do retângulo”, os alunos mostraram-se bastante surpreendidos com a simplicidade da demonstração, não requerendo a mesma qualquer formalismo. Os alunos mostraram espanto por uma demonstração matemática se mostrar completamente desprovida de sobrecarga formal, baseando-se apenas na comparação de áreas. Na demonstração associada à tarefa 5, a satisfação dos alunos prendeu-se com o facto de o trabalho no *Geogebra* ter constituído tão claramente suporte para a realização da demonstração matemática.

Comparando agora os grupos entre si, relativamente à construção de demonstrações matemáticas sem o *Geogebra*, observa-se que os grupos 2 e 6 conseguiram realizar todas as demonstrações e o grupo 7 foi aquele que produziu menos demonstrações consideradas corretas, como se pode observar no gráfico 3. Neste gráfico é também possível observar conjuntamente a prestação dos diferentes grupos relativamente às construções no *Geogebra*, produção de estimativas e conjeturas e ainda a prestação relativamente à realização das demonstrações matemáticas.

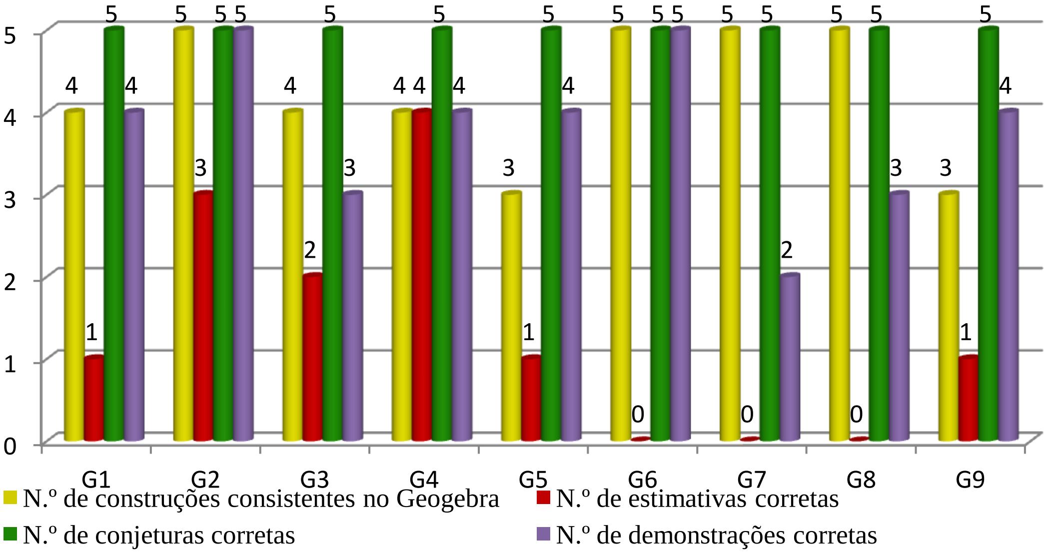


Gráfico 3 – N.º de construções consistentes, estimativas e conjeturas certas e demonstrações corretas por grupo

Observa-se assim que o processo inerente à formulação de conjeturas e às construções no *Geogebra* mostrou-se mais acessível para a grande maioria dos grupos de trabalho do que o processo que envolve a produção de demonstrações matemáticas e a produção de estimativas.

Este estudo permite verificar uma evolução nos grupos de trabalho no que respeita à realização de demonstrações matemáticas, todavia aparecem até ao final grupos que revelam grandes dificuldades em produzir as suas demonstrações. Tal acontece exatamente com os grupos 3, 5, 7 e 8. Saliento novamente que tal dificuldade está, particularmente para o grupo 7, inerente ao processo de redação da demonstração. Para os outros três grupos as dificuldades prendem-se também com o domínio de conteúdos da disciplina.

Os restantes grupos revelaram uma evolução positiva, sendo os grupos 1, 2, 4 e 6, aqueles que mais autonomia mostraram no desenrolar deste processo.

Relativamente ao uso de casos concretos do *Geogebra* para fundamentar as demonstrações matemáticas, como atrás referi terem existido, observou-se, no que concerne à tarefa 1, que os grupos 7 e 8, não conseguiram produzir nenhum texto e recorreram a casos concretos do *Geogebra* para demonstrar o solicitado. Assim, registaram na folha de respostas o desenho de quatro quadriláteros diferentes, mostrando através de um sistema de cores para cada figura, que os lados opostos dos quadriláteros desenhados eram paralelos. Estes grupos não produziram qualquer generalização não tendo por isso conseguido demonstrar o solicitado, sendo porém visível a existência de um raciocínio dedutivo. Estes dois grupos voltaram a usar novamente casos particulares do *Geogebra* nas demonstrações inerentes às tarefas 2 e 3. Na tarefa 2, representaram vários casos com diferentes posições de um ponto móvel e na tarefa 3, registaram casos particulares fazendo uso do comando de medição de um segmento de reta.

Os restantes grupos de trabalho conseguiram afastar-se do *Geogebra* e produzir demonstrações matemáticas fazendo uso de uma abstração necessária a este processo e considerada por Davis e Hersh (1995) como um dos “ingredientes mágicos da demonstração” (p. 148).

De seguida é apresentada uma síntese das principais conclusões obtidas para esta questão:

- Assiste-se a uma dificuldade em iniciar as demonstrações matemáticas;
- Observam-se dificuldades acrescidas para as demonstrações que envolvem maior grau de abstração e simbolização e para as quais é necessário recorrer a argumentos menos óbvios;
- Nota-se o recurso predominante ao raciocínio dedutivo de demonstração, aparecendo o método de demonstração direta e o método de demonstração geométrica;
- Presencia-se uma predominância do uso da forma narrativa informal no registo das demonstrações;
- Assiste-se ao recurso a casos particulares das figuras, com o posicionamento dos pontos móveis em sítios estratégicos do lugar geométrico, com o objetivo de facilitar, numa primeira fase, a realização da demonstração;
- Observa-se um acréscimo na necessidade da demonstração para validação da conjetura;
- Nota-se uma evolução positiva face à realização de demonstrações;
- Sobressai uma evolução positiva na curiosidade de perceber a forma de demonstrar a veracidade de uma conjetura.

Funções que os alunos atribuem à demonstração matemática

Os grupos, no seu global ainda que com grandes diferenças, percecionaram múltiplas funções da demonstração: verificação; explicação; desafio intelectual; comunicação e sistematização. Nos quadros 29, 30, e 31 pode observar-se quais foram as funções enfatizadas por tarefa e grupo.

Quadro 29 - Explicitação da função de verificação por tarefa e grupo de trabalho

Função de verificação	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1	x				x	x			
Tarefa 2				x					x
Tarefa 3		x		x					
Tarefa 4	x		x						x
Tarefa 5	x				x				x

Da análise documental efetuada aos trabalhos escritos pelos grupos é possível subentender a presença da função de verificação em 29% das respostas. Observa-se que as tarefas onde mais se observou a presença desta função foram as 1, 4 e 5, com três referências e nas restantes duas tarefas apenas duas referências em cada uma delas.

Quadro 30 - Explicitação da função de explicação por tarefa e grupo de trabalho

Função de explicação	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1		x	x	x			x	x	x
Tarefa 2	x	x	x	x	x	x	x	x	
Tarefa 3	x	x		x	x	x	x	x	
Tarefa 4	x	x		x		x	x	x	
Tarefa 5	x	x	x	x		x	x	x	

A análise documental efetuada permite deduzir a presença da função de explicação em 76% das respostas. Observa-se que a tarefa onde mais se verificou a presença desta função foi na 2, com oito referências, seguida das tarefas 3 e 5, onde se observam sete referências e por último as tarefas 1 e 4, onde se constatam exatamente seis referências a esta função.

Sublinho que quando os grupos referiram apenas que com a demonstração ganharam mais certezas, subentendi nesta expressão a função de verificação. Aconteceu porém que algumas vezes, os alunos referiram esta expressão acompanhada de mais informação que me levou a encontrar a função explicativa da demonstração.

Quadro 31 - Explicitação da função de desafio intelectual por tarefa e grupo de trabalho

Explicitação da função de desafio intelectual	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
Tarefa 1									
Tarefa 2		x							
Tarefa 3		x							
Tarefa 4	x	x							
Tarefa 5	x	x							

A análise documental realizada permite vislumbrar a referência à função de desafio intelectual em 13% das respostas produzidas pelos grupos de trabalho, e as mesmas ocorreram nas tarefas 2, 3, 4 e 5. Com efeito, foi referido por dois grupos de trabalho que a demonstração realizada permitiu o desenvolvimento de novas capacidades intelectuais em relação à resolução de exercícios de matemática, havendo ainda um grupo que refere por várias vezes ter ganho mais destreza e autoconfiança.

Observa-se também a referência à função de comunicação e a mesma ocorre em apenas 2% das respostas produzidas pelos grupos de trabalho, o que corresponde a uma vez, sendo que a mesma teve lugar na tarefa 3. Com efeito, o respetivo grupo referiu que a realização da demonstração serviu também para "demonstrar de uma forma fácil de entender ao nosso avaliador".

Nesta investigação surgiu ainda a referência à função de sistematização, sendo que a mesma ocorre em 2% das respostas, o correspondente a uma resposta. Tal verificou-se na tarefa 4, tendo o respetivo grupo de trabalho referido que a demonstração se mostrou como "uma forma esquematizada de representar o problema (…) ".

Pelo exposto anteriormente, assiste-se a uma predominância das funções de verificação e explicação sendo notória a preponderância da função de explicação. A função de desafio intelectual é mencionada seis vezes e as funções de comunicação e sistematização, apenas uma única vez.

A tarefa 2 foi aquela onde a função de explicação foi mais referenciada pelos grupos de trabalho, como se pode observar no gráfico 4, sendo que todos os grupos exceto um a referiram.

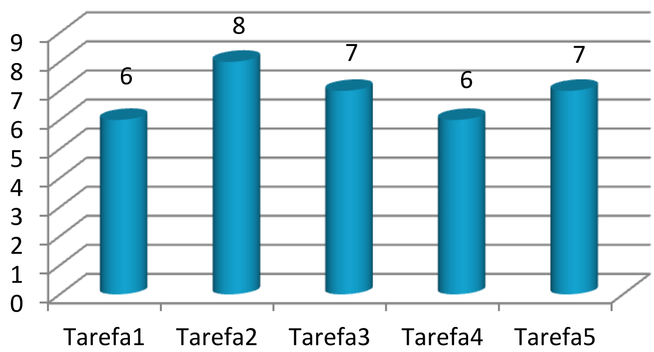


Gráfico 4 - Referência à função de explicação por tarefa

Com efeito, nas diferentes tarefas surge mais do que uma função da demonstração. No quadro 32 faz-se uma leitura cruzada dos dados onde se pode observar quais as funções da demonstração que foram explicitadas por tarefa, bem como o número de vezes que essa explicitação ocorreu.

Quadro 32 - Explicitação das funções da demonstração por tarefa

Explicitação das funções da demonstração	Explicação	Verificação	Desafio intelectual	Sistemati-zação	Comunica-ção
Tarefa 1	6	3			
Tarefa 2	8	2	1		
Tarefa 3	7	2	1		1
Tarefa 4	6	3	2	1	
Tarefa 5	7	3	2		

É claro que as tarefas 3 e 4 foram aquelas que mais funções suscitaram aos grupos de trabalho, tendo aparecido a referência a quatro funções da demonstração. Nas tarefas 2 e 5 apareceram exatamente três funções da demonstração e na tarefa 1 apenas duas.

Sendo a função de explicação a principal função da demonstração apontada pelos grupos de trabalho, torna-se claro que a mesma é entendida para estes alunos como um meio para promover uma compreensão da propriedade em causa. Este estudo aproxima-se assim da ideia defendida por Chaitin (2003) de que uma demonstração deve explicar porque é que uma dada afirmação é verdadeira.

Verifica-se ainda concordância com o estudo de Machado (2005), no qual os alunos demonstram essencialmente para explicar e validar uma conjetura, estando presentes as funções de explicação e verificação da demonstração, como acontece também neste estudo.

O facto de no presente estudo os alunos conjeturarem usando o *Geogebra*, justifica o facto da função mais referenciada ser a explicação. Com efeito, os alunos ganham convencimento no AGD, sendo este anterior à demonstração como alguns autores afirmam poder acontecer (Chaitin, 2003; De Villiers, 2001,2003a).

Comparando agora os diferentes grupos de trabalho, observa-se que os grupos 2, 4, 7 e 8 referiram em todas as tarefas a função de explicação, notando-se um menor número de referências pelos grupos 1 e 6, 3, 5 e por fim o 9 respetivamente.

Observa-se ainda que os grupos 1 e 2 referem as funções de verificação, explicação e desafio intelectual e o grupo 4 refere as funções de verificação, explicação, comunicação e sistematização. Os grupos 3, 5, 6, e 9 referem as funções de verificação e explicação e por último os grupos 7 e 8 referem apenas a função de explicação. Com efeito, os grupos 1, 2 e 4 são aqueles para os quais a demonstração apresenta mais multiplicidade de funções, como é possível verificar no gráfico 5.

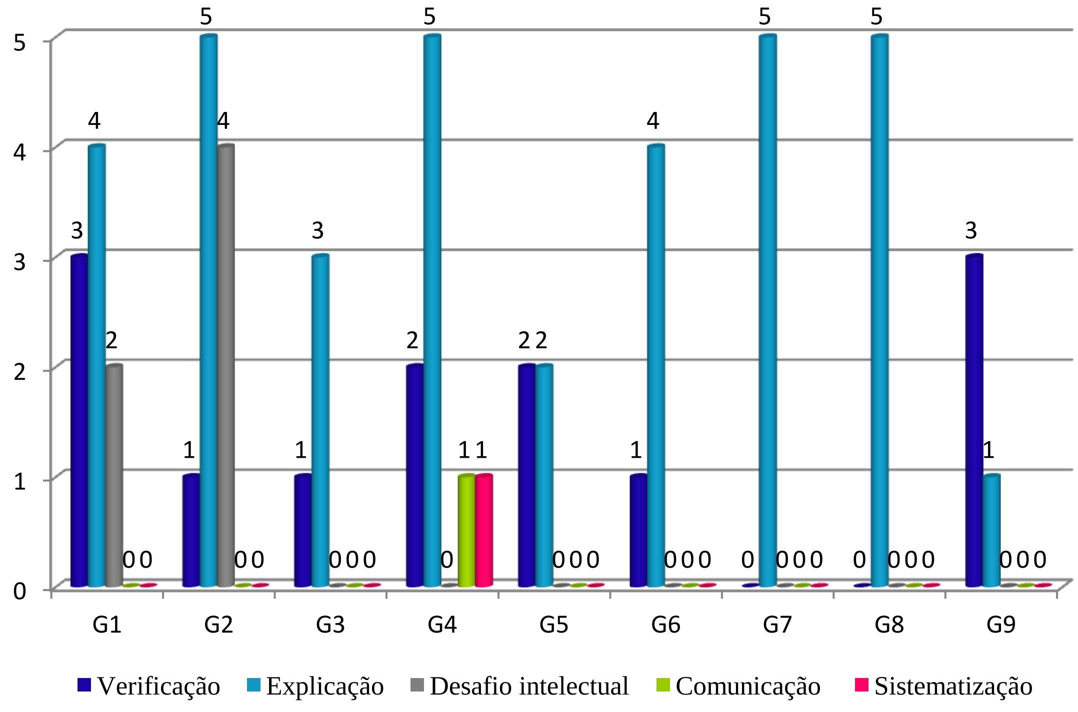


Gráfico 5 - Funções da demonstração apontadas por grupo de trabalho

Para todos os grupos de trabalho a função explicativa da demonstração é substancialmente mais relevante, exceto para os grupos 5 e 9. Efetivamente para o grupo 5, esta função aparece empatada com a função de verificação, e para o grupo 9 assume mais importância a função de verificação.

De seguida é apresentada uma síntese das principais conclusões obtidas para esta questão:

- Os grupos evidenciam a presença de cinco funções da demonstração: explicação; verificação; desafio intelectual; sistematização e comunicação, nesta ordem de desvalorização, sendo que a referência à função de sistematização e comunicação surgem uma única vez em toda a investigação;
- Assiste-se a uma tendência generalizada na referência das funções de verificação e explicação, havendo notoriamente preponderância da função de explicação.

Considerações finais

O objetivo global desta investigação apontou no sentido de apresentar algumas contribuições para a compreensão de como é que o recurso a um ambiente de geometria dinâmica, mais concretamente o *Geogebra*, pode influenciar o processo de demonstração matemática desenvolvido pelos alunos. De um modo particular, pretendeu-se identificar as principais potencialidades e os principais desafios que se colocam com o uso de um recurso desta natureza.

Sendo a realização de demonstrações matemáticas uma dificuldade evidente para muitos alunos e o tema "Lógica e raciocínio" transversal ao currículo de Matemática A, a demonstração fica muitas vezes esquecida na aula de Matemática, sendo relegada para segundo plano. Penso que este estudo mostrou ser possível trabalhar este tema de uma forma interessante e revestida de um sentimento de pertença para os alunos. Embora alguns tenham chegado ao final do estudo revelando grandes dificuldades em elaborar demonstrações, é certo que todos ficaram despertos para a importância que a demonstração assume dentro da matemática. Deste modo, os alunos ganharam uma nova perspetiva em relação a esta ciência e àquilo que é fazer matemática. Na realidade a demonstração marca de forma fundamental a natureza da matemática, como sustentam variadíssimos autores (Barbin, 1993a; Davis & Hersh, 1995; Rodrigues, 2008; Hanna *et al.*, 2009; Sun, 2009) e, o que acontece na maior parte das vezes em sala de aula, é que os alunos não vivenciam experiências conducentes à produção de demonstrações de conjeturas, sendo que a demonstração lhes aparece sempre como um produto e não como meio de progressão na compreensão de um determinado problema.

Mostra-se com este estudo que a demonstração pode ser viva na aula de Matemática e pode ser positivamente auxiliada pelas novas tecnologias. Com efeito, o facto de os alunos terem trabalhado com o *Geogebra* facilitou de todo este processo. O facto de terem manipulado imagens relativas ao que pretendiam demonstrar, mostrou-se importante no sentido em que as imagens se correspondem diretamente com as demonstrações que se escrevem, como sustenta Alcock (2009). No presente estudo as figuras elaboradas no *Geogebra* para a realização da tarefa 3 foram, para alguns grupos, ponto de partida para a realização da demonstração matemática. O mesmo se verificou na tarefa 5, onde todos os grupos apoiaram a sua demonstração matemática na figura que construíram no *Geogebra*. Assim, o *Geogebra*, para além das enormes potencialidades que apresenta ao nível da construção rigorosa, possibilitando também economia de tempo, no trabalho que permite desenvolver ao nível da formulação e teste de conjeturas, mostra-se ainda como uma ferramenta muito importante no auxílio à produção da demonstração matemática, havendo a possibilidade de as construções produzidas constituírem ponto de partida para a realização dessa demonstração. É claro que, sem o *Geogebra* a demonstração matemática representaria certamente uma sobrecarga muito mais confusa para a generalidade dos alunos, tendo o *Geogebra* vindo aliviar e facilitar o processo de demonstração tornando-o mais significativo para os alunos.

O *Geogebra*, possibilitando em todas as tarefas uma interação com os objetos geométricos e a imediata visualização das transformações ocorridas, estabelece uma grande proximidade e envolvimento com a situação em causa que pode ser aproveitada no sentido de potenciar nos alunos a necessidade de prosseguir com as fases que envolvem o desenrolar do processo investigativo e, consequentemente, a realização da demonstração matemática. Com efeito, para aguçar nos alunos a necessidade de formular conjeturas e proceder ao seu teste no *Geogebra*, teve particular importância a fase da formulação das estimativas. Na realidade os alunos sentiram que uma estimativa não era mais do que uma primeira impressão desprovida de fundamento relativa ao problema em causa, sendo que o *Geogebra* lhes veio mostrar, na maior parte dos casos, que essa primeira impressão estava errada, não correspondendo de todo ao que viria a constituir a solução da situação em causa.

Para que tal se verificasse, teve também especial relevância a escolha das tarefas, pois nesta investigação deu-se particular destaque a tarefas que parecem ter uma solução e que, depois de serem resolvidas, apresentam uma solução completamente diferente da esperada, causando por isso surpresa e despertando para o necessário desenvolvimento do espírito crítico e do processo investigativo.

Numa fase posterior à formulação e teste de conjeturas foi necessário estimular os alunos para a realização da demonstração matemática. Assim, foi de todo importante o desenrolar das tarefas em ambientes vivos de aprendizagem, estimulantes e ricos em questões do tipo "Porque é que isto é verdade? Porque é que é assim?", que segundo NCTM (2007) levam os alunos a sentir a necessidade de produzir justificações.

Foi de facto desafiante a implementação de tarefas desta natureza, sendo que os alunos não estavam despertos para a necessidade de realizarem demonstrações matemáticas como prova das suas conjeturas e assistiram a uma alteração da sua visão sobre a necessidade de proceder à elaboração das mesmas no decorrer da investigação. Foi uma experiência extremamente gratificante para a professora enquanto investigadora e para os alunos que, claramente recolheram igualmente muitos frutos desta investigação.

Questões para futura investigação

As atuais orientações curriculares para a disciplina de Matemática A valorizam claramente o desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente e, em particular, de desenvolver a capacidade de produzir a demonstração matemática, como aliás se referiu no capítulo III. Nas orientações curriculares para os testes intermédios do ensino secundário do ano letivo 2011/2012 é expresso claramente que "o teste pode incluir uma demonstração (…)" (GAVE, 2012, p. 1), indicação direcionada para os testes intermédios de 10.º, 11.º e 12.º anos. Também na informação n.º 20 de 2012 do GAVE, de orientação do exame final de 12.º ano, essa indicação aparece, sendo expresso que a prova inclui um item de construção que envolve o raciocínio demonstrativo.

Pelo exposto, penso que seria de toda a pertinência realizar outros estudos desta natureza e, se possível, noutros anos do ensino secundário, permitindo analisar a evolução da maturidade dos alunos para a realização de demonstrações.

Seria também de todo o interesse acompanhar um grupo de alunos pelos vários níveis do ensino secundário, com o objetivo de analisar a sua evolução no desenvolvimento do processo de investigação, solicitando a cada passo demonstrações com maior grau de abstração e formalismo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A.P. Canavarro, D. Moreira, & I. Rocha, (Org.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 286-299). Lisboa: SPCE.

Alain, G. (1999). *Dicionário prático de Matemática*. Lisboa: Terramar.

Alcock, L. (2009). Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntactic Approaches. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 29-34). Taipei: National Taiwan Normal University.

APM (2009). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Apostol, T. M. (1994). *Cálculos. Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à álgebra linear* (Tomo I). Barcelona: Editorial Reverté.

Area, M. (2005). Tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Relieve, 11*(1), 3-25 (retirado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/916/91611101.pdf, em 10 de agosto de 2011)

Baccaglini-Frank, A. (2011). Abduction in generating conjectures in dynamic geometry through maintaining dragging. in M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (retirado de http://www.sciencecentral.com/site/491875, em 20 de abril de 2011)

Barbin, E. (1993a). Que conceções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (I). *Educação e Matemática, 27*, 21-25.

Barbin, E. (1993b). Que conceções epistemológicas da demonstração? Para que aprendizagens? (II). *Educação e Matemática, 28*, 11-14.

Barrier, Th., Durand-Guerrier, V., & Blossier, Th. (2009). Semantic and Game-Theoretical Insight into Argumentation and Proof. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 77-82). Taipei: National Taiwan Normal University.

Bar-Tikva, J. (2009). Old meta-discursive rules die hard. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference:*

Proof and proving in mathematics education (Tomo I) (pp. 89-93). Taipei: National Taiwan Normal University.

Baruk, S. (2005). *Dicionário de matemática elementar* (Tomo I). Porto: Afrontamento.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40 (retirado de http://www.springerlink.com/content/g68v76300rl36k00/fulltext.pdf, em 31 de dezembro de 2010)

Bennett, D. (2003). A geometria dinâmica renova o interesse num velho problema. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 45-49). Lisboa: APM.

Bieda, K. (2009). Enacting proof in middle school mathematics. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 65-70). Taipei: National Taiwan Normal University.

Boavida, A. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, *63*, 11-15.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Boero, P. (2011). *Argumentation and proof: discussing a "successful" classroom discussion*. in M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (retirado de http://www.sciencecentral.com/site/491875, em 20 de abril de 2011)

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bowers, J. (1991). *Convite à Matemática*. Lisboa: Edições Sílabo.

Brocado, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projeto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Brunner, E., Reusser, K. & Pauli, C. (2011). Mathematical proving on secondary school level I: supporting student understanding through different types of proof. A video analysis. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (retirado de http://www.sciencecentral.com/site/491875, em 20 de abril de 2011)

Canavarro, A.P. (1993). *Concepções e práticas de professores de Matemática. Três estudos de caso* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Candeias, N. (2008). Geometria no ensino da Matemática. In A. P. Canavarro (Org.), *20 anos de temas na EM* (pp. 114-125). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cardoso, M. (2010). *O conhecimento matemático e didático, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho).

Chaitin, G. (2003). *Conversas com um matemático: Matemática, arte, ciência e os limites da razão*. Lisboa: Gradiva.

Cramer, J. (2011). Everyday argumentation and knowledge construction in mathematical tasks. in M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (retirado de http://www.sciencecentral.com/site/491875, em 20 de abril de 2011)

Cirillo, M. (2009). Challenges to teaching authentic mathematical proof in school mathematics. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 130-135). Taipei: National Taiwan Normal University.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2010). *Matemática A 10.º ano* (Tomo I). Porto: Porto Editora.

Coutinho, C., & Chaves, J. (2002). *O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. Revista Portuguesa de Educação,15(1),* 221-244. (retirado de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/374/37415111.pdf, acedido em 26 de dezembro de 2011)

Cuoco, A., & Goldenberg, P. (2003). Geometria dinâmica: Uma ponte entre a geometria euclidiana e a análise. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 55-68). Lisboa: APM.

Cyr, S. (2011). Development of beginning skills in proving and proof-writing by elementary school students. in M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (retirado de http://www.sciencecentral.com/site/491875, em 20 de abril de 2011)

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A Experiência Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1997). *O sonho de Descartes. O mundo segundo a Matemática*. Lisboa: Gradiva.

DEB (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação. (Retirado de http://www.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/84/Curriculo_Nacional.pdf, em 14 de janeiro de 2011)

DES (1997). *Matemática. Programas 10.º, 11.º e 12.º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DES (2001a). *Programa de Matemática A, 10.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf, em 26 de agosto de 2010)

DES (2001b). *Programa de Matemática B, 10.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://www.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/260/matematica_B_10.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DES (2001c). *Programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://area.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/mac_homologacao.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DES (2002a). *Programa de Matemática A, 11.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DES (2002b). *Programa de Matemática B, 11.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/261/matematica_B_11.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DES (2002c). *Programa de Matemática A, 12.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/259/matematica_A_12.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DES (2002d). *Programa de Matemática B, 12.º ano*. Lisboa: ME, DES (retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/262/matematica_B_12.pdf, em 20 de novembro de 2010)

DGEBS (1991). *Organização curricular e programas, Ensino Básico. 3.ºciclo* (I). Lisboa: Ministério da Educação.

De Villiers, M. (1986). *The Role of Axiomatisation in Mathematics and Mathematics Teaching* (retirado de http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf, em 31 de dezembro de 2010)

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *62*, 31-36.

De Villiers, M. (2003a). O papel da demonstração na investigação em Geometria realizada em computador: algumas reflexões pessoais. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 31-43). Lisboa: APM.

De Villiers, M. (2003b). The value of experimentation in mathematics. *Proceedings of 9th National congress of AMESA* (pp. 174-185). South Africa. (Retirado de http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html, em 04 de fevereiro de 2011)

Douek, N. (2009). Approaching Proof in School: From Guided Conjecturing and Proving to a Story of Proof Construction. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 142-147). Taipei: National Taiwan Normal University.

Drouhard, J.P., Sackur, C., Maurel, M., Paquelier, Y., & Assude, T. (1999). *Necessary Mathematical Statements and aspects of Knowledge in the Classroom. Philosophy of Mathematics Education* (retirado de http://www.ex.ac.uk/~Pernest/pome11/art8.htm, em 14 de novembro de 2010)

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2009). Analysis of Mathematical proofs: some questions and first answers. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 148-153). Taipei: National Taiwan Normal University.

Ersoz, F. (2009). *Proof in Different Mathematical Domains*. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 160-165). Taipei: National Taiwan Normal University.

Fernandes, D., & Fonseca, L. (2004). A argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Eds.), *A Matemática na formação do professor* (pp. 249-272). Lisboa: SEM-SPCE

Ferreira, E. (2005). *Ensino e aprendizagem de geometria em ambientes geométricos dinâmicos: o tema de Geometria do Plano de 9.º ano de escolaridade* (Tese de mestrado, Universidade do Minho, retirado de http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/4920/1/dissertacao2.pdf, acedido em 12 de fevereiro de 2011)

García-López, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir geogebra en el aula* (Tese de Doutoramento, Departamento de Didáticas da Matemática e das Ciências Experimentais da Faculdade de Ciências e da Educação da Universidade de Almeria. Retirado de http://funes.uniandes.edu.co/1768/1/Garcia2011Evolucion.pdf, acedido em 27 de dezembro de 2011)

Garry, T. (2003). The Geometer´s Sketchpad na sala de aula. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 69-76). Lisboa: APM.

GAVE (2012). *Projeto testes intermédios 2011/2012 - Informação n.º2 Matemática A.* Gabinete de Avaliação Educacional. ME

GAVE (2012). *Prova de Exame nacional de Matemática A - Informação n.º20.12*. Gabinete de Avaliação Educacional. ME (Retirado de http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=407&fileName=EX_Inf20_Nov2011_MatA635.pdf, acedido em 05 de janeiro de 2012)

Grabiner, J. (2009). Why Proof? Some Lessons from the History of Mathematic. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I), (p. 12). Taipei: National Taiwan Normal University.

Haciomeroglu, E., Bu, L., Schoen, R., & Hohenwarter, M. (2009) *Learning to Develop Mathematics Lessons with GeoGebra.* (Retirado de http://mathstore.ac.uk/headocs/9224_haciomeroglu_e_etal_geogebramathlessons.pdf, em 15 agosto de 2011)

Hanna, G, De Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., Fou-Lai Lin, Selden. A, Tall, D., & Yevdokimov, O. (2009). Proof and proving in mathematics education: discussion document. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I), (pp. xix-xxx). Taipei: National Taiwan Normal University.

Hofstadter, D. (2003). Descobrindo e dissecando um cristal geométrico. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 15-30). Lisboa: APM.

Hohenwarter, M. (2007). *GeoGebra-Informações*. (retirado de http://www.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf, em 04 de fevereiro de 2011)

Junqueira, M., & Valente, S. (1993). Conjeturas e provas informais em Geometria com recurso a ferramentas computacionais. *Quadrante, 2(1)*, 63-78.

Keyton, M. (2003). Alunos descobrem a geometria usando *software* de geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 79-86). Lisboa: APM.

King, J. (2003). De olho nas transformações de semelhança. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 121-135). Lisboa: APM.

King, R. J., & Schattschneider, D. (2003). Tornar a geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Kondratieva, M. (2009). Geometrical sophisms and understanding of mathematical proofs. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 3-8). Taipei: *The Department of Mathematics*, National Taiwan Normal University.

Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2009). "Why do we have to prove this" fostering students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 256-261). Taipei: National Taiwan Normal University.

Larios-Osorio,V., & Acuña-Soto, A. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 59-63). Taipei: National Taiwan Normal University.

Leung, A. (2009). Written proof in dynamic geometry environment: inspiration from a student's work. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 15-20). Taipei: National Taiwan Normal University.

Longo, G. (2009). Theorems as constructive visions. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo I) (pp. 13-24). Taipei: National Taiwan Normal University.

Machado, S. (2005). A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Mariotti, M., & Antonini, S. (2009). Breakdown and reconstruction of figural concepts in proofs by contradiction in geometry. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 82-87). Taipei: National Taiwan Normal University.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* ME, DEB (retirado de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf, em 23 de novembro de 2010)

Mejía-Ramos, J., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 88-93). Taipei: National Taiwan Normal University.

Neto, M. (2009). *O Desenvolvimento do Raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas* (Tese de doutoramento, Universidade de Aveiro) (retirado de http://biblioteca.sinbad.ua.pt/Teses/2009000917, em 30 de novembro de 2010)

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (Trabalho original em inglês, publicado em 1989). Lisboa: APM & IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar* (Trabalho original em inglês, publicado em 2000). Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2002). Aprendemos a demonstrar, certamente, mas aprendemos também a conjeturar – O legado de Polya. *Educação e Matemática*, *69*, 41-43.

Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da matemática: algumas ideias para discussão. In A.P. Canavarro, D. Moreira, & I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 279-285). Lisboa: SPCE.

Parks, J. (2003). Identificar transformações pelas suas órbitas. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (pp. 115-119). Lisboa: APM.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, Ó., & Eccheverry, A. (2009). Assigning mathematics tasks versus providing pre-fabricated mathematics in order to support learning to prove. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 130-135). Taipei: National Taiwan Normal University.

Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 7-14). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*, 1-16.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Atas do ProfMat 2003* (pp. 25-39). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25,* 105-132. (retirado de http://hdl.handle.net/10451/3007, em 27 de dezembro de 2011)

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didática da Matemática.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade aberta.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). Investigações no currículo. In *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp. 13-142) Belo Horizonte: Autêntica**.**

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de matemática*. (Tomo I, II) (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) (retirado de http://repositorio.ul.pt/handle/10451/1593, em 14 de novembro de 2010)

Santos, E., & Rodrigues, M. (2009). Como desenvolver nos alunos a capacidade de demonstrar (retirado de http://www.apm.pt/files/_CO_Rodrigues_Santos_4a7188bae5506.pdf., 14 de novembro de 2010)

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2001). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em Educação Matemática. In Associação de Professores de Matemática (Ed), *Atas do XII Seminário de Investigação em Matemática* (pp. 29-55). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Schwartz, J. & Yerushalmy, M. (1987). The geometric supposer: using microcomputers to restore invention to the learning o Mathematics. In D. Perkins, J. Lochhead & J. Bishop (org), *Thinking. The second internacional conference* (pp. 525-536). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. (Retirado de http://books.google.pt/books?id=6KKpnpLevg4C&pg=PA525&lpg=PA525&dq

=Judah+l.+Schwartz+%22Using+Microcomputers+to+Restore+Invention+to+the+Learning+of+Mathematics%22&source=bl&ots=lSoWs52DjX&sig=a4ehGPbdUYU4sNOqzaGgXGWrzAc&hl=pt-PT&ei=7SMoTZ2TOI-p8QPmvuWwAg&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=1&ved=0CBcQ6AEwAA#v=onepage&q=Judah%20l.%20Schwartz%20%22Using%20Microcomputers%20to%20Restore%20Invention%20to%20the%20Learning%20of%20Mathematics%22&f=false, em 07 de janeiro de 2011)

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Struik, D. (1992). *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Sun, X. (2009). Renew the proving experiences: an experiment for enhancement trapezoid area formula proof constructions of student teachers by "one problem mutiple solutions". In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 178-183). Taipei: National Taiwan Normal University.

Takáč, Z. (2009). Influence of MRP tasks on students' willingness to reasoning and proving. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II), pp. 202-207. Taipei: National Taiwan Normal University.

Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2009). What happens in students' minds when constructing a geometric proof? A cognitive model based on mental models. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 239-244). Taipei: National Taiwan Normal University.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas atuais*. Lisboa: IIE.

Veloso, E., & Candeias, N. (2003). Prefácio. In E. Veloso & N. Candeias (Orgs.), *Geometria Dinâmica*: *Seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (p. 5). Lisboa: APM.

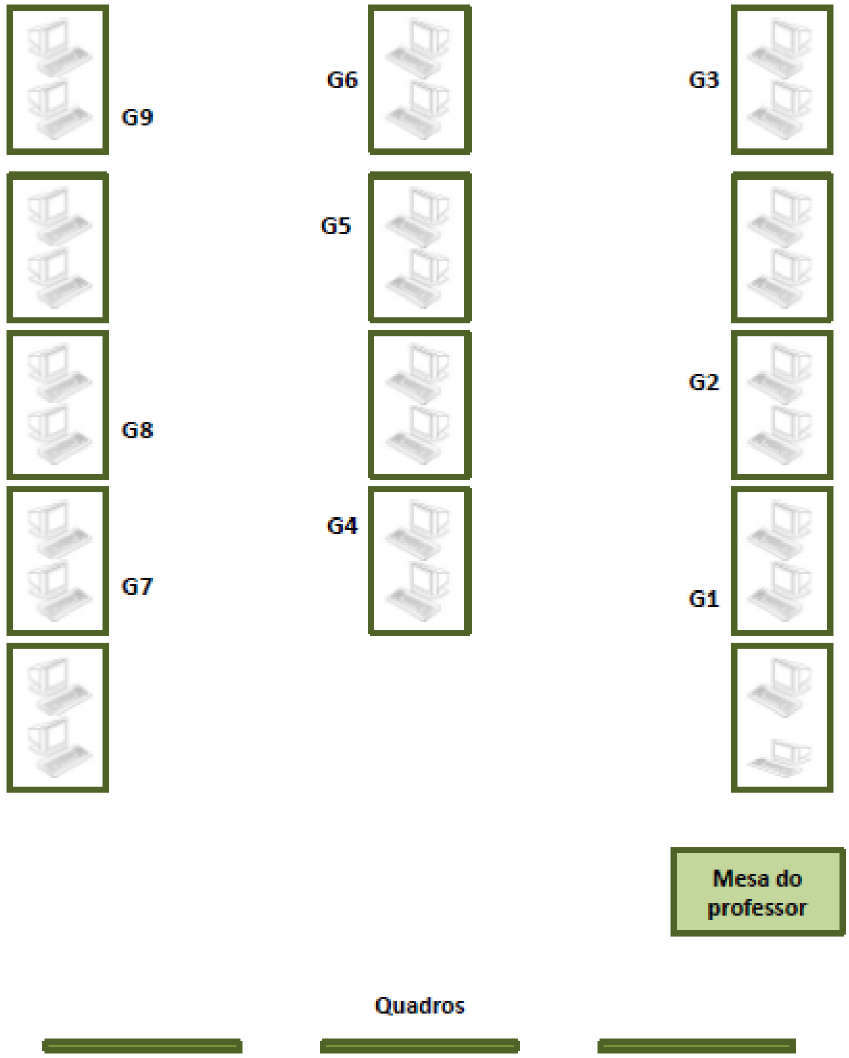
Velleman, D. (2006). *How to prove it*. Cambridge: Cambridge University Press. (Retirado de http://storage.worldispnetwork.com/books/How_to_Prove_It_A_Structured.pdf, 01 de janeiro de 2011)

Yevdokimov, O. (2009). Higher order reasoning produced in proof construction: how well do secondary school students explain and write mathematical proofs? In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 280-285). Taipei: National Taiwan Normal University.

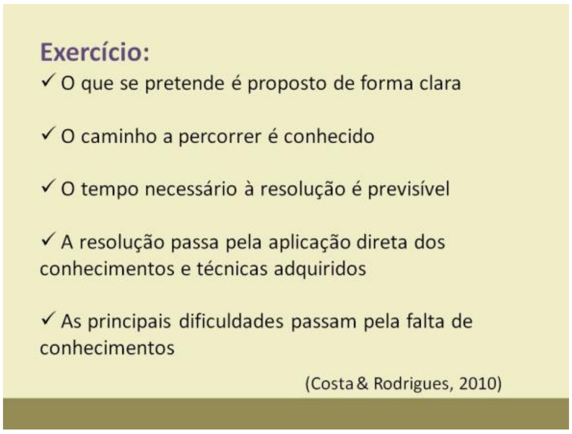
Zehavi, N., & Mann, G. (2009). Proof and experimentation: integrating elements of DGS and CAS. In F-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, M. de Villiers (Orgs.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Tomo II) (pp. 286-291). Taipei: National Taiwan Normal University.

ANEXOS

ANEXO 1 - **Planta da sala B1-13**



ANEXO 2 - **PowerPoint "Dar sentido à demonstração"**



Problema:

- ✓ O que se pretende nem sempre é claro
- ✓ Há necessidade de interpretar o enunciado
- ✓ O caminho a percorrer pode ser desconhecido
- ✓ Exige reflexão e persistência
- ✓ Tempo de resolução não previsível
- ✓ Além da aplicação de conhecimentos, é preciso relacioná-los
- ✓ Envolve muitas vezes várias tentativas de resolução

(Costa & Rodrigues, 2010)

Problema:

- ✓ O que se pretende nem sempre é claro
- ✓ **Há necessidade de interpretar o enunciado**
- ✓ O caminho a percorrer pode ser desconhecido
- ✓ Exige reflexão e persistência
- ✓ Tempo de resolução não previsível
- ✓ **Além da aplicação de conhecimentos, é preciso relacioná-los**
- ✓ Envolve muitas vezes várias tentativas de resolução

(Costa & Rodrigues, 2010)

Orientações para a resolução de problemas:

1.ª fase: Compreensão do problema (ler; registar os dados; identificar claramente o que é pedido).

2.ª fase: Estabelecer um plano, tentando responder às seguintes questões:

- Que relação existe entre os dados e o solicitado?
- Estamos a utilizar todos os dados?
- Já resolvemos problemas deste tipo?
- É possível subdividir o problema?

(Costa & Rodrigues, 2010)

Orientações para a resolução de problemas (continuação):

3.ªfase: Execução do plano.

4.ªfase: Reflexão e análise do resultado.

Refletir sobre:

- O método seguido, vendo se há possibilidade de o simplificar;
- A solução obtida no contexto do problema.

(Costa & Rodrigues, 2010)

Conjetura matemática:

Definição

"A 'convicção íntima' do que é a resposta a uma dada questão" (p. 243), sem se dispor provisoriamente da "prova da sua veracidade" (idem).

(Baruk, 2005)

Prova da veracidade

↓

DEMONSTRAÇÃO

↓

É um encadeamento de proposições, usando uma linguagem formalizada e rigorosa, que, com princípios de raciocínio lógico-dedutivo universalmente aceites, permite alcançar a veracidade de uma afirmação.

Bibliografia

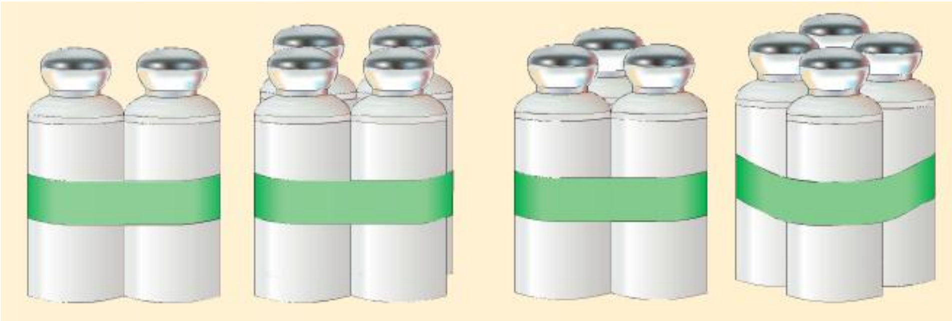
Baruk, S. (2005). *Dicionário de matemática elementar* (Tomo I) Porto: Afrontamento.

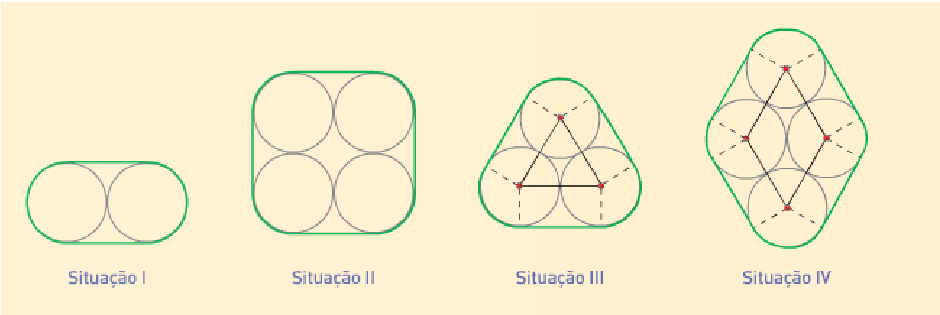
Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). Matemática A 10.º ano (Tomo I). Porto: Porto Editora.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Atas do ProfMat 2003 (pp. 25-39). Lisboa: Associação de* Professores de Matemática.

ANEXO 3 - **Exercício proposto aos alunos na aula de 16 de setembro para a introdução do termo conjetura**

Numa drogaria estão à venda frascos de champô com a forma de cilindro com 6 cm de diâmetro. O vendedor faz preços especiais para conjuntos de 2, 3 e 4 frascos. Cada conjunto é envolvido por uma fita, tal como é sugerido nas figuras abaixo.





Considera que, em cada caso, a fita envolve completamente os frascos sem haver sobreposição.

Formule e registe uma estima sobre qual das situações atrás apresentadas envolve maior gasto de fita. Será o conjunto referente a situação II, III ou IV? E entre os conjuntos II e IV? Qual gastará mais fita?

Prove a sua conjetura.

Professora: Zita Paulino

ANEXO 4 - **Tarefa 0**

Nomes: ____ Número do grupo: _____

***Software* de Geometria Dinâmica – "*Geogebra*"**

Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

1. Observe a figura 1, na qual está representado o retângulo [ABCD] e o triângulo [PBD].

Compare as áreas dos dois polígonos, formulando uma hipótese sobre como é que elas se relacionam entre si. Registe essa hipótese.

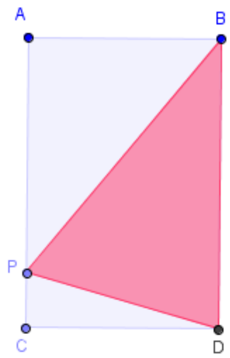
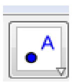
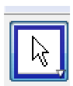


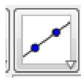
Figura 1

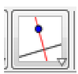
2. Use o *Geogebra* para construir esta figura e resolver o problema.

Maximize a janela do *Geogebra*; no menu Exibir, esconda os eixos coordenados.

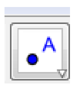
I Construção do retângulo

a) No comando 2 da barra de ferramenta, crie um novo ponto no ecrã (ponto A)  e volte a 

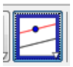
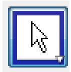
b) Na barra de ferramentas 3, crie a reta AB, clicando em  . Clique em A e escolha outra posição para o ponto B.

c) Na barra de ferramentas 4, desenhe uma reta perpendicular à reta AB, passando por A. Use o comando  e clique na reta AB e em A.

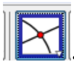
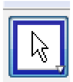
d) Com o mesmo comando, desenhe uma reta perpendicular a AB, passando por B.

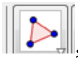
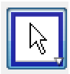
e) Construa um novo ponto sobre a reta perpendicular a AB, passando por A (será o ponto C). Use o comando 

V.S.F.F.

f) Construa uma reta paralela a AB, passando por C. Para tal, deve clicar no ponto C e na reta AB, usando o comando . Voltar a 

g) Determine o quarto vértice do retângulo (vértice D), encontrando o ponto de interseção da reta paralela a AC, passando por B e da reta paralela a AB, passando por C.

Use o 2º comando clique em . Volte a 

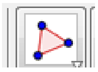
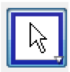
h) Crie o polígono [ABCD], clicando no comando 5 , e percorra os vértices do polígono. Volte a 

II Construção de um ponto móvel P sobre o segmento AC.

a) Clique no comando 2 (novo ponto), e clique seguidamente no segmento AC. O ponto móvel está criado.

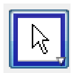
b) Deverá renomear esse ponto, clicando nele, com o botão direito do rato.

III Construção do triângulo [PBD].

a) Clique no comando 5 (polígono)  e crie o triângulo [PBD]. Volte a 

IV Comparação das áreas.

a) Use o comando 8, clicando em 

e no polígono [ABCD]. Volte a 

b) Faça o mesmo com o polígono [PBD], selecione o polígono 2 na folha algébrica.

3. Investigue e conjeture sobre a relação das áreas. Registe a conjetura.

V.S.F.F.

4. Faça a sua demonstração.

5. Compare a sua demonstração com a realizada por outros colegas. São semelhantes ou distintas?

6. O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha formulado?

(Adaptado de Costa & Rodrigues 2010)

ANEXO 5 - **Tarefa 1**

Nomes: ____ Número do grupo: ______

***Software* de Geometria Dinâmica – "*Geogebra*"**

Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

PONTOS MÉDIOS DE UM QUADRILÁTERO

1.Considere a figura1, onde se representa um quadrilátero **qualquer** $[ABCD]$, com os seus pontos médios M, N, O, P assinalados. Unindo os pontos médios, que tipo de quadrilátero surge no interior de $[ABCD]$? Registe a sua hipótese.

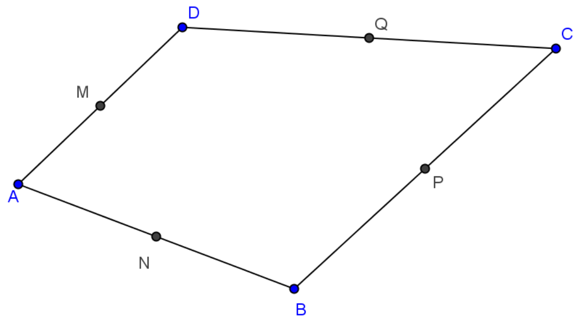


Figura 1

2.Usando agora o *Geogebra* construa então um quadrilátero $[ABCD]$, assinale os pontos médios dos seus respetivos lados, tal como sugere a figura 1 e una-os.

3.Investigue e conjeture sobre o que se obtém unindo esses pontos médios. Registe as suas conjeturas.

4.Modifique o seu quadrilátero exterior, arrastando os seus vértices, e verifique o que acontece ao quadrilátero interior. Formule e registe outras conjeturas que a investigação lhe sugere.

V.S.F.F.

5.Serão as suas conjeturas verdadeiras?

Faça a sua demonstração.

6.Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

7.O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspetos.

(Adaptado de Costa & Rodrigues, p. 35)

ANEXO 6 - **Tarefa 2**

Nomes: ____ Número do grupo: _____

***Software* de Geometria Dinâmica – “*Geogebra*”**

Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

A ILHA

Um náufrago, o Tiago, foi parar a uma ilha deserta em forma de triângulo equilátero.

Como gostava muito de praia decidiu passar uns tempos na ilha, que tinha três boas praias, cada uma correspondendo a um lado da ilha, resolveu então construir uma casa e começou a pensar qual seria o melhor local.

Como a ilha estava coberta de uma vegetação muito densa, tinha não só que construir a casa mas também abrir caminhos para se deslocar na ilha. Para ter o menor trabalho possível, decidiu construir a sua casa num ponto da ilha, tal que a soma das distâncias às três praias fosse a menor possível.

Em que local deveria o Tiago construir a sua casa?

1.Antes de iniciar o seu trabalho com o *Geogebra*, formule uma hipótese sobre o lugar da casa do Tiago.

2.Inicie agora o seu trabalho com o *Geogebra*, construindo a ilha (um triângulo equilátero) e um ponto **T** no seu interior, que represente a casa do Tiago. Explore o problema, calculando a soma das distâncias do ponto **T** aos lados do triângulo.

V.S.F.F.

3.Investigue, formule então a sua conjetura sobre o melhor local para a casa e registe essa conjetura.

4.Será a sua conjetura verdadeira?

Faça a sua demonstração.

5.Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

6.O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspetos.

(Adaptado de materiais da unidade curricular Metodologias da Especialidade II)

ANEXO 7 - **Tarefa 3**

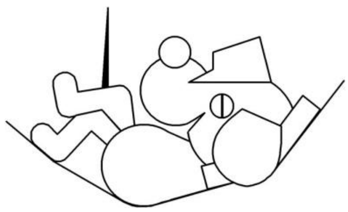
Nomes: ____ Número do grupo: _____

***Software* de Geometria Dinâmica – "*Geogebra*"**

Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

O CÃO DO JARDIM

O Vasco tem um cão e uma pequena área relvada em forma de triângulo retângulo. Quando se ausenta quer que o Tuga guarde bem toda a zona relvada do jardim. O Tuga não pode ficar à solta, então o Vasco tem de o prender com uma trela em algum lugar da zona relvada. Deseja também que a trela seja a mais curta possível, mas, onde quer que fique preso terá de garantir que chegue a todos os cantos da zona relvada. Investigue onde é que o Vasco deverá prender o Tuga.



1.Faça um esboço do problema, procurando estimar uma resposta para o problema e registe-a.

2.Inicie agora o seu trabalho no *Geogebra*, construindo a quinta (triângulo retângulo) e um ponto móvel, que represente o sítio onde se irá prender a trela.

V.S.F.F.

3.Investigue as diferentes possibilidades, formulando e registando a sua conjetura.

4.Será a sua conjetura verdadeira?

Faça a sua demonstração.

5.Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

6.O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspetos.

(Adaptado de NCTM, 2007, p. 416)

ANEXO 8 - **Tarefa 4**

Nomes: ____ Número do grupo: _____

***Software* de Geometria Dinâmica – "*Geogebra*"**

Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

ÁREA DO RECTÂNGULO

1.Considere a figura1, onde se representa um **retângulo qualquer** $[ABCD]$, com uma das suas diagonais assinaladas. **P** é um ponto móvel dessa diagonal. Estão também representados a sombreado, dois retângulos [EPGC] e [HBFP], cujos lados se encontram no retângulo exterior ou são paralelos aos lados deste.

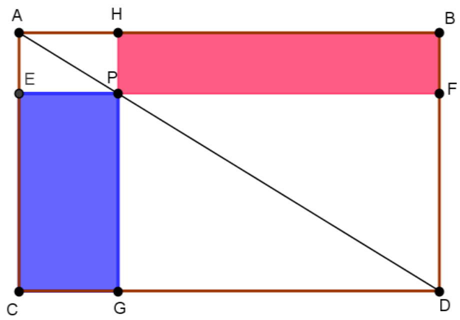


Figura 1

Compare as áreas dos retângulos [EPGC] e [HBFP] e registe a sua hipótese.

2.Inicie agora o seu trabalho no *Geogebra*. Construa um retângulo e trace uma das suas diagonais. Seguidamente construa um ponto móvel **P** sobre essa diagonal. Trace as duas retas paralelas aos lados do retângulo inicial que passem por P e posteriormente delimite os dois retângulos obtidos no interior do retângulo inicial que não são atravessados pela diagonal.

V.S.F.F.

3.Compare as áreas destes dois retângulos?

Investigue e formule uma conjetura.

4.Será a sua conjetura verdadeira?

Faça a sua demonstração.

5.Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

6.O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspetos.

(Adaptado dos materiais disponibilizados no âmbito do plano de ação para a Matemática II.)

ANEXO 9 - **Tarefa 5**

Nomes: ____ Número do grupo: _____

***Software* de Geometria Dinâmica – “*Geogebra*”**

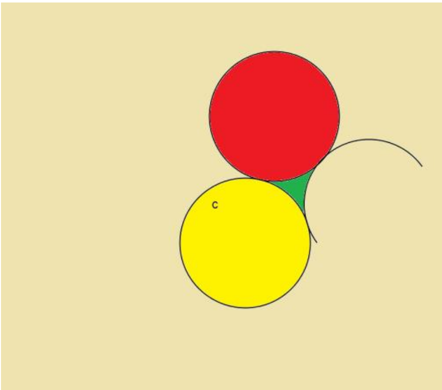
Tema Transversal: Lógica e raciocínio; Tecnologia matemática

UM PAINEL COM CIRCUNFÊRENCIAS

A Joana embora esteja no Agrupamento de Ciências e Tecnologias gosta imenso de artes. Decidiu pintar três telas de diferentes tamanhos para oferecer no Natal à sua mãe e às suas duas avós.

O objetivo da Joana é começar por desenhar uma circunferência, e à volta desta, desenhar circunferências sempre tangentes e congruentes com a primeira (ver figura). Numa segunda fase a Joana irá pintar o desenho construído.

Assim, dada uma circunferência, quantas circunferências congruentes podem ser colocadas à sua volta, tal que, cada uma delas seja tangente à circunferência dada e às circunferências colocadas a seu lado?



Recordar:
Em geometria duas figuras são congruentes se possuírem a mesma forma e o mesmo tamanho.

1.Qual o número de circunferência que consegue dispor nestas condições? Formule e registe uma hipótese sobre o número de circunferências que se conseguem dispor à volta daquela que fica no meio.

V.S.F.F.

2.Inicie então o seu trabalho com o *Geogebra* para resolver o problema. Comece por construir um segmento $\overline{AB}$, que passará a ser o raio da circunferência. De seguida construa uma circunferência, dado o centro e o raio $\overline{AB}$. Construa um ponto móvel sobre a circunferência e usando o menu Reflexão (Objeto, Ponto), prossiga na construção.

3.Investigue, formule e registe a sua conjetura.

4.Será a sua conjetura verdadeira?

Faça a sua demonstração.

5.Compare a sua demonstração com a realizada por outro grupo. São semelhantes ou distintas?

6.O que é que a demonstração lhe acrescentou relativamente à conjetura que tinha inicialmente formulado? Registe esses aspetos.

(Adaptado de Garry, T. (2003). The Geometer´s Sketchpad na sala de aula. In E. Veloso e N. Candeias (Orgs.), Geometria Dinâmica: selecção de textos do livro Geometry Turned On! (pp. 69-76). Lisboa: APM.)

ANEXO 10 - **Autorização para os encarregados de educação**

Informação

Durante o 1.º e 2.º período do presente ano letivo irá realizar-se uma investigação subordinada ao tema "A demonstração no ensino da matemática, suportada por um ambiente de geometria dinâmica – um estudo de caso com alunos de 10.º ano", em algumas aulas da disciplina de Matemática A do seu educando. Tal investigação encontra-se integrada no desenvolvimento do mestrado de Supervisão Pedagógica da Universidade de Évora. Para a recolha de dados é necessário gravar algumas aulas em vídeo, as quais não serão divulgadas. Destinando-se apenas ao fim acima mencionado, serão um suporte para a investigadora realizar a sua tese.

Para se poder gravar as aulas é necessária a autorização de todos os encarregados de educação dos alunos da turma, pelo que se pede que devolva a parte destacável desta informação.

A professora/investigadora

Zita Paulino

Obrigada.

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ____, declaro que tomei conhecimento e autorizo que se gravem as aulas necessárias à concretização da investigação subordinada ao tema "*A demonstração no ensino da Matemática, suportada por um ambiente de geometria dinâmica – um estudo de caso com alunos de 10.º ano*".

Assinatura do Encarregado de Educação: ____________________________________

Data: _____/ setembro/2011.