

UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

**POLÍTICAS DE INSPECÇÃO
DE SISTEMAS**



54 533

José Rodrigues Dias

DISSERTAÇÃO ELABORADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS, NA ESPECIALIDADE
DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA



ÉVORA
JAN. 1987

À memória do meu Pai

À minha Mãe

Ao meu Filho

AGRADECIMENTOS

Em Julho de 1977 tive o prazer de conhecer, por intermédio do Professor Santos Júnior da Universidade de Évora, a Professora Maria de Fátima Fontes de Sousa, da Faculdade de Ciências de Lisboa, que então se prontificou amavelmente a orientar e a acompanhar o meu trabalho de investigação científica. Desde então, ao longo de todos estes anos, no desempenho daquelas tarefas, sempre tem a Professora Fátima de Sousa manifestado tanta disponibilidade, tanto interesse e tanto saber que em muito contribuíram para que esta tese se tivesse concretizado. Por tudo, e também pela sua amizade, quero aqui deixar bem expresso o meu profundo e sincero agradecimento à Professora Fátima de Sousa.

Ao Professor Santos Júnior, por inicialmente se ter interessado pela minha progressão científica e universitária, e por sempre se ter preocupado com o andamento dos meus trabalhos, também aqui quero expressar o meu reconhecimento e manifestar a minha gratidão.

Aos Colegas do Departamento de Matemática, e em especial ao Professor Carmo Moral, agradeço o seu interesse e o incentivo que sempre me manifestaram. Em particular, ao Professor Carlos Braumann quero também agradecer as úteis conversas e discussões que tivemos acerca do meu trabalho.

À minha mulher, Maria do Amparo, quero agradecer o seu estímulo e a sua compreensão ao longo de todos estes anos.

Finalmente, quero aqui deixar o meu apreço a todos quantos, de uma forma directa ou indirecta, contribuíram com a sua ajuda para a elaboração desta tese.

O autor agradece ao Instituto Nacional de Investigação Científica (INIC) o apoio financeiro dado para a reprodução desta tese.

NOTA PRÉVIA

O autor optou por utilizar o computador para ele próprio dactilografar e imprimir o texto desta tese. Fê-lo usando o processador de texto de um computador Wang VS100 do Serviço de Computação da Universidade de Évora.

No entanto, dadas as limitações práticas de tal processador na manipulação de símbolos matemáticos, viu-se o autor forçado a ter de substituir, na medida do possível, símbolos gregos habitualmente usados em certas fórmulas por símbolos latinos. Do mesmo modo, viu-se forçado a compactar muitas expressões matemáticas, dando-lhe (infelizmente) um ar menos atraente. Mesmo assim, foi impossível completar o trabalho, tendo de recorrer ao auxílio da dactilografia manual de certas expressões e símbolos matemáticos.

A propósito ainda de computador, note-se também que o autor optou por não incluir nesta tese todo um vasto conjunto de programas e mesmo de fluxogramas que teve necessidade de fazer ao longo de anos para elaborar esta tese. E fê-lo fundamentalmente por duas razões: primeiro, porque considerou que o essencial eram os resultados obtidos e não propriamente os métodos computacionais que permitiam obtê-los; segundo, porque não quis o autor que este trabalho tivesse uma desmesurada extensão, à custa de páginas e páginas de informação que não considerava essenciais em termos de tese.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO	
1.1. APRESENTAÇÃO GENÉRICA DO PROBLEMA	17
1.2. ÁREAS DE APLICAÇÃO DAS INSPECÇÕES	20
1.3. PRINCIPAIS MODELOS DE TEMPOS DE VIDA DE SISTEMAS	23
1.4. PRINCIPAIS GRANDEZAS USADAS EM FIABILIDADE DE SISTEMAS	26
1.5. TIPOS DE INSPECÇÃO DE SISTEMAS	30
CAPÍTULO II	
POLÍTICAS PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO	
2.1. INTRODUÇÃO	33
2.2. CUSTO TOTAL MÉDIO POR CICLO. SUA MINIMIZAÇÃO	35
2.2.1. O modelo	35
2.2.2. Número médio de inspecções	39
2.2.3. Tempo médio de detecção	43
2.2.4. Minimização do custo total médio por ciclo	50
2.2.5. Resultados obtidos. Sua análise e comparação	53
2.2.6. Influência do tipo de distribuição	61

2.3. APROXIMAÇÕES DO PERÍODO DE INSPECÇÃO E DO CUSTO TOTAL MÉDIO POR CICLO.	64
2.3.1. Aproximações associadas com $E(D)=P/2$	64
2.3.2. Novas aproximações quase óptimas	75

CAPÍTULO III

POLÍTICAS NÃO PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO

3.1. INTRODUÇÃO	87
3.2. O MODELO DE BARLOW <u>et al.</u> SOLUÇÃO ÓPTIMA	89
3.2.1. O modelo de Barlow <u>et al.</u>	89
3.2.2. A solução óptima	91
3.3. ANÁLISE DETALHADA DE UMA SOLUÇÃO APROXIMADA (POLÍTICA DE RISCO CONSTANTE) PARA O MODELO DE BARLOW <u>et al.</u>	96
3.3.1. A solução aproximada (política de risco constante)	96
3.3.2. Identidade entre a solução (aproximada) apresentada e a solução "inicial" de Munford e Shahani	103
3.3.3. Resultados relativos à política de risco constante. Correspondência com resultados relativos à política periódica de inspecção	107
3.3.4. O caso da distribuição uniforme. Comparação com a solução óptima do modelo de Barlow <u>et al.</u>	114
3.3.5. Comparação de resultados numéricos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspecção.	118
3.3.6. Soluções aproximadas para a política de risco constante	122

CAPÍTULO IV

POLÍTICA NÃO PERIÓDICA DE INSPECÇÃO REDUTÍVEL A UMA POLÍTICA PERIÓDICA DE INSPECÇÃO QUANDO O TEMPO DE VIDA É EXPONENCIAL

4.1. INTRODUÇÃO.	129
4.2. O MODELO DE SENGUPTA E RESPECTIVA SOLUÇÃO	132
4.2.1. O modelo.	132
4.2.2. Obtenção da solução ótima.	133
4.2.3. Análise e discussão de resultados	137
4.3. UM MODELO ALTERNATIVO E RESPECTIVA SOLUÇÃO	142
4.3.1. O modelo.	142
4.3.2. Obtenção da solução ótima. Análise de resultados	144
4.4. EQUIVALÊNCIA DOS DOIS MODELOS E RESPECTIVA DISCUSSÃO.	148
4.4.1. Equivalência dos dois modelos.	148
4.4.2. Caso em que não existe equivalência.	152
4.5. CONSEQUÊNCIAS DA EQUIVALÊNCIA DOS DOIS MODELOS.	159
4.5.1. Uma interpretação geométrica	159
4.5.2. Uma política de inspecção perfeita periódica com atraso correspondente a uma política ótima de inspecção imperfeita não periódica	161
4.5.3. O mínimo de uma política de inspecção imperfeita não periódica interpretado como um mínimo condicionado de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso	166

4.5.4. Uma política de inspecção imperfeita não periódica correspondente a uma política ótima de inspecção perfeita periódica com atraso.	168
4.5.5. O mínimo de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso interpretado como um mínimo condicionado de uma política de inspecção imperfeita não periódica.	171
4.6. SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA O MODELO DE SENGUPTA.	173
4.6.1. Política de inspecção imperfeita periódica ótima	174
4.6.2. Uma política de inspecção imperfeita periódica aproximada	176
4.6.3. Outra política de inspecção imperfeita periódica aproximada	177

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

5.1. CONCLUSÕES SOBRE POLÍTICAS PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO	183
5.2. CONCLUSÕES SOBRE POLÍTICAS NÃO PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO	187
5.3. CONCLUSÕES SOBRE UMA POLÍTICA NÃO PERIÓDICA DE INSPECÇÃO REDUTÍVEL A UMA POLITICA PERIÓDICA DE INSPECÇÃO QUANDO O TEMPO DE VIDA É EXPONENCIAL	190
BIBLIOGRAFIA	195

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. APRESENTAÇÃO GENÉRICA DO PROBLEMA

Todo o sistema, seja qual for a sua natureza e complexidade, está sujeito ao aparecimento de períodos de mau funcionamento, tendo como origem um ou mais dos seus elementos constituintes. Ou seja, por outras palavras, todo o sistema, devido a uma ruptura ou a desgaste, está sujeito ao aparecimento de falhas. A propósito de "falhas", refira-se já aqui que neste tipo de estudos se utiliza muitas vezes todo um conjunto de termos técnico-industriais, o que se compreende pela sua origem, que por vezes não tem muito a ver com determinadas situações concretas. É o que acontece, por exemplo, com o sistema "corpo humano" cujas falhas podem ser aqui "doenças".

As falhas de um sistema podem ser tais que o próprio sistema não revela a sua própria existência, ou pelo menos não a revela em tempo apropriado e útil. É o que acontece, por exemplo, com

determinado tipo de doenças, graves muitas, cujo aparecimento não é logo conhecido. Nestas condições, há necessidade de observar sistemas em determinados instantes do seu funcionamento para determinar se entretanto ocorreu ou não qualquer tipo de falha. Ou seja, há necessidade de inspeccionar sistemas em determinados instantes do seu funcionamento com o objectivo de detectar um eventual aparecimento de uma falha.

Mas é claro que qualquer inspecção que se faça a um sistema tem associado a si aquilo a que podemos chamar um custo, que pode ser considerável.

Por outro lado, a existência de uma falha não detectada no funcionamento de um sistema pode provocar consequências graves quer no próprio sistema quer naquilo que dele resulta (a sua produção). Essas consequências podem ser quantificáveis, embora tal possa não ser fácil, através do que podemos chamar um custo de mau funcionamento. Em particular, poder-se-á admitir que este custo varia com o tempo decorrido pelo que, em particular, poderemos falar de custo por unidade de tempo de mau funcionamento não detectado.

Chegados a este ponto, é óbvio que um sistema que precise de ser inspeccionado o deve ser, por um lado, o menor número possível de vezes para reduzir o custo das inspecções, mas, por outro lado, deve ser inspeccionado o mais possível para reduzir o tempo de mau funcionamento.

Estamos, pois, perante um problema de optimização (minimização) do que podemos chamar um custo global.

Em termos práticos, há duas questões que nos interessa então resolver. Assim, por um lado, interessa determinar quais os instantes

em que o sistema deve ser inspeccionado; e, por outro lado, interessa calcular o custo total associado a uma determinada sequência de instantes de inspecção. Em especial, interessa-nos determinar qual a sequência de instantes de inspecção que conduz a um custo total mínimo.

É claro que para conseguir tal objectivo temos de conhecer, no âmbito dos modelos que aqui estudamos, quer o custo de cada inspecção quer o custo por unidade de tempo de mau funcionamento não detectado. Tais custos serão especificados na altura própria.

O que há de interessante neste problema de optimização, cuja formulação é, conforme se vê, extremamente simples, é o facto de o instante de aparecimento da falha do sistema ser na prática imprevisível. Ou seja, considera-se que o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema começa a funcionar em estado de novo (pode ser depois de uma eventual reparação) e o instante em que o sistema falha (ou se considera que falha, por análise de uma determinada grandeza) é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade conhecida.

E é assim, com a introdução do aleatório, que um problema que à partida é tão simples deixa de o ser, vindo a merecer a atenção de investigadores diversos, de áreas diversas, em especial a partir dos trabalhos de Barlow et al (1963), Hunter (1964) e Barlow e Proschan (1965).

Refira-se já aqui que diversos modelos, de complexidade e âmbito diferentes, têm sido abordados por diversos investigadores ao longo do tempo.

Curiosamente, a complexidade de modelos reduz na prática a sua utilização, como o prova um interessante e significativo artigo de

Saniga e Shirland (1977) no âmbito do controlo estatístico de qualidade. De facto, neste artigo refere-se que um inquérito feito mostrou que quanto maior é a complexidade e a sofisticação introduzidas nos modelos menor é a sua utilização na prática das organizações.

1.2. ÁREAS DE APLICAÇÃO DAS INSPECÇÕES

A inspecção de sistemas encontra aplicação em áreas extremamente diversas e amplas, de que se pode destacar o controlo (estatístico) de qualidade, a medicina, questões militares, etc. Vejamos um pouco cada uma destas áreas.

Assim, em controlo de qualidade, é conhecido que qualquer sistema produtivo, seja ele de que bens for, está sujeito a falhas, de que resulta uma produção defeituosa a partir de um determinado instante e até que a respectiva reparação seja feita. Em muitas das situações, o conhecimento dessa produção defeituosa é apenas possível se em determinados instantes, aqui quase sempre periodicamente, forem retiradas da linha de produção amostras que são então sujeitas a análise. É a partir dos resultados obtidos que se conclui sobre o estado do sistema. Neste caso, é óbvio que é ao retirar e ao analisar as amostras que se está inspeccionando o sistema produtivo.

Dada a sua importância em termos industriais, o controlo estatístico de qualidade tem merecido muita atenção, até porque tem

problemas específicos. Assim, por exemplo, na prática está-se sempre na presença dos conhecidos erros de 1.^a e 2.^a espécies, em que o indivíduo responsável pela tomada de decisões pode ser levado a concluir que o sistema está a funcionar correctamente quando de facto o não está e pode ser levado a concluir que o sistema não está funcionando correctamente quando de facto está. No estudo que agora aqui se apresenta consideraremos apenas um dos casos num dos capítulos, conforme posteriormente se verá. Ou seja, consideraremos quase sempre que se está perante o que podemos chamar inspecções perfeitas, isentas de erros. No entanto, o autor teve já oportunidade de se debruçar um pouco sobre estes problemas em trabalhos anteriores (Rodrigues Dias (1981a), (1981b), (1983b) e Sousa e Rodrigues Dias (1980)).

Em controlo estatístico de qualidade é justo referir os trabalhos pioneiros de Shewhart por volta de 1930, com a introdução das chamadas cartas de controlo de qualidade, um artigo de Duncan (1956) por primeiramente abordar de uma forma sistemática o problema da minimização do custo total médio usando cartas de controlo, os artigos de Tiago de Oliveira e Littauer (1965), (1966) e os trabalhos de síntese bibliográfica de Gibra (1975), de Montgomery (1980) e de Vance (1983). Estes últimos artigos fazem o ponto da situação no que se refere à investigação levada a cabo em termos de optimização de custos em controlo estatístico de qualidade.

Em medicina, o problema das inspecções vem merecendo cada vez maior atenção e, em particular, na medicina preventiva. Refira-se aqui o trabalho de Kirch e Klein (1974) que terá sido talvez nesta área o primeiro artigo focando o problema da optimização de uma função

objectivo. Depois dele, outros trabalhos foram aparecendo, podendo-se citar, por exemplo, o de Shwartz (1978).

De facto, em medicina preventiva, o problema da detecção atempada de certas doenças, algumas graves como o cancro, leva os serviços e organizações de saúde a aconselharem ou mesmo a obrigarem os indivíduos a fazer determinados exames médicos. Na realidade, quanto mais cedo se detectar determinada doença maior é a respectiva probabilidade de cura.

Finalmente, no que se refere a áreas de aplicação das inspecções, veja-se o caso militar, associado a problemas de defesa ou mesmo de ataque. Assim, por exemplo, um serviço militar tem que inspeccionar em determinadas alturas o seu equipamento de defesa e de ataque para poder estar operacional nos momentos necessários ou convenientes. Repare-se que se o não estiver, então daí podem resultar prejuízos graves para a segurança dos cidadãos. Por outro lado, há eventualmente necessidade de inspeccionar sistemas de ataque de possíveis inimigos para detectar quando entram em funcionamento com o objectivo de o mais rapidamente possível poderem ser neutralizados. Esta questão aparece muito associada à detecção de mísseis, sendo curiosamente conhecidos alguns falsos alarmes na sua detecção.

A terminar este ponto, refiram-se dois casos curiosos de inspecção humana de que normalmente não se tem grande consciência sob este ponto de vista.

O primeiro é o que diz respeito às inspecções a que os indivíduos são sujeitos quando tiram ou renovam o Bilhete de Identidade. De facto, em determinados instantes, é observado cada cidadão, retendo a sua fotografia, a sua altura e o seu estado civil

(entre outros dados, eventualmente). Neste caso, bem como no próximo, uma possível "falha" do sistema corresponde a uma qualquer possível alteração nos elementos acima referidos. Curiosamente, a partir de uma determinada idade, o Bilhete de Identidade é vitalício, no sentido de já não precisar de ser renovado, e isto precisamente porque, em termos práticos, o seu estado se considera já inalterável.

O outro caso curioso é o que diz respeito às inspecções médicas para a obtenção ou renovação da Carta de Condução. Aqui tudo se passa como no Bilhete de Identidade, mas com a particularidade de as inspecções serem mais apertadas à medida que a idade avança.

1.3. PRINCIPAIS MODELOS DE TEMPOS DE VIDA DE SISTEMAS

Conforme já anteriormente se referiu, o intervalo de tempo entre o instante em que o sistema começa a funcionar em estado de novo e o instante em que falha é uma variável aleatória que vamos supôr contínua com função densidade de probabilidade conhecida. A esse intervalo de tempo pode-se chamar tempo de vida ou de bom funcionamento do sistema.

O tempo de vida de um sistema pode ser descrito (ou razoavelmente bem descrito) por um de vários modelos, conforme o caso, que habitualmente aparecem referidos na literatura e que a prática valida. Neste trabalho, longe de nos preocuparmos em aplicar uma grande quantidade de modelos de tempos de vida, preocupamo-nos antes

em tentar analisar bem o que se passa com determinados modelos, justamente aqueles que a prática mais tem destacado ou então aqueles que nos permitam estudar algum aspecto em particular.

De resto, é claro que não poderíamos ter a pretensão desmesurada de aplicar todos os modelos, até porque novos modelos vão sempre aparecendo.

Assim, iremos considerar os modelos seguintes: distribuição exponencial, distribuição de Weibull, distribuição log-normal e distribuição de Hjorth (1980). Vamos dar breves referências sobre cada um deles:

a) A distribuição exponencial, com função densidade $f(t)$ e esperança matemática $E(T)$ dadas por

$$f(t) = L \exp(-Lt) , \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$E(T) = 1/L \quad (1.2)$$

sendo $L > 0$ um parâmetro. Esta distribuição tem sido largamente utilizada para descrever tempos de vida, até talvez pela sua grande simplicidade.

b) A distribuição de Weibull, em que $f(t)$ e $E(T)$ são dadas por

$$f(t) = B (t/A)^{B-1} \exp[-(t/A)^B] / A , \quad t > 0 \quad (1.3)$$

$$E(T) = A \Gamma(1+1/B) \quad (1.4)$$

sendo $A > 0$ um parâmetro de escala e $B > 0$ um parâmetro de forma e sendo

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} \exp(-u) du \quad (1.5)$$

a função gama.

A distribuição de Weibull, que contém como caso particular a distribuição exponencial quando $B=1$, é certamente a distribuição mais utilizada para descrever o tempo de vida de um sistema. Tal facto não é estranho, evidentemente, à circunstância da distribuição poder tomar diferentes formas, consoante o valor atribuído ao parâmetro de forma B . Tipicamente, esse valor variará de um modo geral entre 1 e 3, embora neste trabalho nós consideremos também outros valores, quer inferiores a 1 quer superiores a 3, para analisar situações extremas.

Posteriormente, referiremos outros aspectos desta e outras distribuições.

c) A distribuição log-normal, que apresenta uma característica interessante que referiremos quando falarmos em taxa de risco no próximo ponto. Diz-se, como é sabido, que uma variável T tem uma distribuição log-normal se o seu logaritmo $Y = \log T$ tem uma distribuição normal. Sendo μ e σ a média e o desvio padrão de Y , então a função densidade $f(t)$ de T e a sua esperança $E(T)$ são dadas por

$$f(t) = \exp[-(\log t - \mu)^2 / (2\sigma^2)] / [(2\pi)^{1/2} \sigma t] , t > 0 \quad (1.6)$$

$$E(T) = \exp(\mu + \sigma^2/2) \quad (1.7)$$



d) A distribuição de Hjorth, apresentada por Hjorth (1980), que depende de 3 parâmetros e que, consoante os seus valores, pode tomar diferentes aspectos. A sua função densidade é dada por

$$f(t) = \exp(-\delta t^2/2) [(1 + \beta t) \delta t + \theta] / (1 + \beta t)^{\theta/\beta + 1}, \quad t > 0 \quad (1.8)$$

A esperança matemática desta distribuição encontra-se tabelada no citado artigo de Hjorth (1980).

Posteriormente, compreender-se-á melhor a razão pela qual se considerou esta distribuição.

Conforme já se referiu, é claro que para além destas 4 distribuições outras se poderiam referir e utilizar em fiabilidade. Seria o caso, por exemplo, da distribuição de valores extremos e da distribuição gama. Mas não é esse o objectivo fundamental deste trabalho. Podem, no entanto, ver-se as obras, por exemplo, de Gnédenko et al (1972) e de Lawless (1982), bem como os artigos de Morice (1966), de Dhillon (1979), (1981) e de Quesenberry e Kent (1982).

1.4. PRINCIPAIS GRANDEZAS USADAS EM FIABILIDADE DE SISTEMAS

Dissemos antes que o tempo de vida de um sistema é uma variável aleatória T que supomos com função densidade $f(t)$ conhecida e

contínua. A partir daqui podemos introduzir o que se pode chamar a função de fiabilidade do sistema $R(t)$ do modo seguinte

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(x) dx \quad (1.9)$$

ou seja, a função de fiabilidade $R(t)$, também designada por função de sobrevivência $S(t)$, dá-nos a probabilidade de o tempo de vida T do sistema ser superior a um valor t . De outro modo, pode então escrever-se

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (1.10)$$

em que $F(t)$ é a conhecida função de distribuição.

Pode-se agora introduzir o que se pode chamar a taxa de risco $h(t)$ da forma seguinte

$$h(t) = f(t)/R(t) \quad (1.11)$$

A taxa de risco $h(t)$ admite a seguinte interpretação probabilística: $h(t)dt$ dá-nos a probabilidade de o sistema falhar em $(t, t+dt)$, sabendo que não falhou até ao instante t .

A partir da taxa de risco $h(t)$ pode-se introduzir o que se pode designar por taxa cumulativa de risco $H(t)$ do modo seguinte

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx \quad (1.12)$$

Repare-se que, em certo sentido, se pode dizer que as funções

$f(t)$, $F(t)$, $R(t)$, $h(t)$ e $H(t)$ são equivalentes, já que é possível exprimir cada uma delas em função de uma das outras. De facto, verificam-se as relações seguintes:

$$f(t) = F'(t) = -R'(t) \quad (1.13)$$

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log R(t) \quad (1.14)$$

$$H(t) = -\log R(t) \quad (1.15)$$

$$R(t) = \exp[-H(t)] \quad (1.16)$$

$$f(t) = h(t) \exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) \quad (1.17)$$

Note-se também que sendo

$$R(\infty) = 0 \quad (1.18)$$

então se verifica a partir de (1.16)

$$H(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t)dt = \infty \quad (1.19)$$

Refira-se que poderiam ter sido introduzidas outras expressões e designações para as grandezas apresentadas, bem como outras grandezas usadas em fiabilidade. A este propósito veja-se, por exemplo, Barlow e Proschan (1975), Muth (1977), Pagès e Gondran (1980) e Bergman (1985).

Quando se fala numa distribuição dum tempo de vida, em fiabilidade, é usual referir o tipo da respectiva taxa de risco. Assim, uma taxa de risco $h(t)$ pode ser constante, crescente, decrescente, em forma de banheira ("bathtub", em inglês), etc. Foi com base neste facto que nesta tese escolhemos para exemplos de distribuições as anteriormente referidas, já que elas nos permitem cobrir as diferentes situações de interesse prático. Concretamente, verifica-se:

- a) na distribuição exponencial a taxa de risco é constante;
- b) na distribuição de Weibull a taxa de risco é decrescente para $B < 1$, constante para $B = 1$ e crescente para $B > 1$;
- c) na distribuição log-normal a taxa de risco começa por ser crescente para depois ser decrescente;
- d) finalmente, na distribuição de Hjorth (1980), verificam-se diferentes situações conforme os valores dos respectivos parâmetros. O caso que nos interessa é aquele que diz respeito a uma taxa de risco em forma de banheira, ou seja, aquele em que $h(t)$ começa por decrescer, manter-se depois constante (ou aproximadamente constante) e finalmente crescer. Para isso considerámos na expressão (1.8) os seguintes valores dos parâmetros: $\theta = \beta = 1$ e $\delta = .01$.

Na prática encontram-se sistemas cujo tempo de vida está numa

das situações referidas.

1.5. TIPOS DE INSPECÇÃO DE SISTEMAS

Dissemos antes que um sistema deve ser inspecionado em determinados instantes do seu funcionamento. Pois bem, esses instantes de inspecção podem ser obtidos de uma forma determinística ou então podem ocorrer de uma forma aleatória.

No primeiro caso, quando são de natureza determinística, os instantes de inspecção podem estar periodicamente espaçados no tempo ou não. Ou seja, por outras palavras, as inspecções determinísticas podem ser periódicas ou não periódicas.

No segundo caso, quando os instantes de inspecção ocorrem de uma forma aleatória, estamos perante o que podemos chamar as inspecções aleatórias. É o que acontece, por exemplo, com a medição da tensão arterial sempre que se vai ao médico por uma qualquer razão. Neste trabalho não focaremos o caso das inspecções aleatórias.

As inspecções periódicas têm a enorme vantagem de serem muito cómodas nas aplicações práticas. De facto, é muito simples, por exemplo, retirar de hora a hora, periodicamente, amostras de um qualquer sistema produtivo, já que o operador não precisa de fazer qualquer esforço mental nesse sentido, limitando-se a entrar numa rotina. Esta é certamente a principal razão pela qual em controlo estatístico de qualidade tanto se tem insistido na utilização das

inspecções periódicas, mesmo quando se estuda o problema da minimização de custos.

Mas, por outro lado, para além da sua grande comodidade, as inspecções periódicas gozam ainda de grande popularidade na medida em que, em determinadas condições que referiremos, são efectivamente elas que conduzem a um custo total médio mínimo. Este facto ocorre quando se considera que o tempo de vida do sistema segue uma distribuição exponencial, embora, conforme veremos, nem sempre tal se verifique.

De um modo geral, no entanto, verifica-se que são as inspecções não periódicas aquelas que conduzem a custos mínimos, em especial quando os sistemas apresentam uma taxa de risco que não é constante. E é curioso, de resto, constatar que na prática utilizamos muito as inspecções não periódicas. Refira-se o caso, por exemplo, das inspecções médicas a que um indivíduo, com uma saúde normal, se sujeita ao longo da sua vida, desde que nasce até que morre. De facto, a partir do nascimento, vai ao médico em instantes que se vão espaçando no tempo (correspondendo a uma fase de taxa de risco decrescente), passando por uma fase (fase adulta, tipicamente) em que é aconselhado a fazer periodicamente o seu "check-up" (correspondendo a uma taxa de risco constante), para por fim, na fase última da vida, passar a ir ao médico com intervalos de tempo cada vez menores (correspondendo a uma taxa de risco crescente). Em termos humanos (e não só, claro!), e no que respeita à alteração normal do estado de saúde, estamos perante um caso típico de uma taxa de risco em forma de banheira.

Em termos qualitativos, é-se levado a concluir, de certa maneira, que a uma taxa de risco crescente devem corresponder

inspecções não periódicas com um espaçamento decrescente; por outro lado, a uma taxa de risco decrescente devem corresponder inspecções não periódicas com um espaçamento crescente; e, finalmente, a uma taxa de risco constante devem corresponder inspecções periódicas. Note-se, no entanto, que em relação a este último caso e em termos quantitativos tal nem sempre se verifica, conforme se verá. Mas, por outro lado, a atitude prática que se verifica na renovação do Bilhete de Identidade e da Carta de Condução enquadra-se perfeitamente na análise qualitativa que foi apresentada.

Apesar, contudo, de as inspecções não periódicas serem aconselháveis em muitas situações, quer em termos qualitativos quer em termos quantitativos, a verdade, porém, é que as inspecções não periódicas são pouco cómodas nas aplicações práticas. Para dar uma imagem, digamos que é preciso ter sempre num papel a data da sua realização.

Nesta tese começar-se-á por tratar, no Capítulo II, do caso das inspecções periódicas para depois se passar ao caso das não periódicas, no Capítulo III. No Capítulo IV, estudar-se-á um caso em que inspecções não periódicas podem ser redutíveis a inspecções periódicas.

Dada a grande comodidade e aplicação prática das inspecções periódicas, estudar-se-á neste trabalho com um certo cuidado a aproximação das inspecções não periódicas pelas periódicas. Por outro lado, e tendo em conta a facilidade que deve existir na sua aplicação prática, estudar-se-á também a aproximação de certas inspecções periódicas por outras periódicas, cujo período de inspecção seja mais facilmente obtido.

CAPÍTULO II

POLÍTICAS PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO

2.1. INTRODUÇÃO

Vamos então começar com o estudo de políticas periódicas de inspecção. Conforme já se referiu, as inspecções periódicas têm a enorme vantagem de serem muito cómodas nas aplicações, daí resultando fundamentalmente a sua grande utilização prática.

Este capítulo encontra-se fundamentalmente dividido em duas partes: numa primeira analisa-se o custo total médio por ciclo e a respectiva minimização, e numa segunda parte analisa-se todo um conjunto de aproximações quer para o período de inspecção quer para o custo total médio mínimo por ciclo.

Mais concretamente, a primeira parte consta dos pontos seguintes:

a) Especificação dos pressupostos em que assenta o modelo em estudo e suas variáveis, aproveitando-se para apresentar uma resenha sobre outros modelos presentes na literatura;

b) Determinação e análise do número médio de inspecções por ciclo, apresentando-se uma interpretação geométrica simples e avaliando-se a relação entre o número médio de inspecções para dois valores do período de inspecção;

c) Determinação e análise do tempo médio de detecção, apresentando-se uma interpretação geométrica simples e sugestiva que permite uma compreensão fácil de resultados já conhecidos, mas cuja validade se discute;

d) Minimização do custo total médio por ciclo, apresentando-se as respectivas expressões analíticas e referindo-se a não unicidade da sua solução;

e) Obtenção e análise de resultados, avaliando-se a influência do período de inspecção sobre o custo total médio por ciclo, sobre o número médio de inspecções e sobre o tempo médio de detecção. Em particular, mostra-se que o custo total médio por ciclo pode apresentar mais do que um mínimo;

f) Análise da influência do tipo de distribuição do tempo de vida do sistema sobre o custo total médio mínimo por ciclo.

No que diz respeito à segunda parte deste Capítulo, tratam-se fundamentalmente os aspectos seguintes:

g) Análise da validade de aproximações resultantes do facto de

se considerar que o tempo médio de detecção é (aproximadamente) igual a metade do período de inspecção. Em particular, determinam-se e discutem-se os erros relativos de diferentes aproximações quer do período de inspecção quer do custo total médio mínimo por ciclo;

h) Introdução de uma nova aproximação quase-óptima para o período de inspecção no caso da distribuição exponencial, cuja validade se analisa quer para a própria distribuição exponencial quer para as outras distribuições que se consideram nesta tese.

Refira-se aqui, finalmente, que parte deste Capítulo tem a ver com o conteúdo de um artigo anteriormente publicado (Rodrigues Dias (1983a)) com o título "Influence de la Période d' Inspection sur les Coûts dans l' Inspection Périodique de Systèmes".

2.2. CUSTO TOTAL MÉDIO POR CICLO. SUA MINIMIZAÇÃO

2.2.1. O modelo

Consideremos o modelo que assenta nas seguintes hipóteses fundamentais:

- a) O sistema tem apenas 2 estados, sendo um de bom e outro de mau funcionamento, que poderemos representar por 1 e 0;
- b) O estado de mau funcionamento, resultante do aparecimento de

uma falha, é apenas detectável por inspecções;

c) A duração do estado de bom funcionamento, que corresponde ao que se pode chamar "tempo de vida" do sistema, é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade conhecida;

d) Considera-se que as inspecções não interferem no estado do sistema e que são de duração nula;

e) Considera-se que a probabilidade de erro na detecção do estado do sistema é zero, pelo que as inspecções se podem considerar perfeitas;

f) Existe um custo por cada inspecção feita ao sistema e um custo por cada unidade de tempo de mau funcionamento não detectado;

g) Considera-se que um ciclo começa com o sistema em estado de novo e acaba no instante em que a falha é detectada. A partir daí considera-se um processo de renascimento.

Este modelo pode ser formulado numa perspectiva mais geral em que a função objectivo a optimizar e os chamados "custos" podem ter uma interpretação diferente (veja-se Hunter (1964)).

O facto que acaba de referir-se permite olhar este modelo com bastante generalidade e interesse prático, para já não falar da simplicidade com que é formulado. Daí a frequência com que é referido pelos diferentes investigadores desta área do saber, não esquecendo as diferentes soluções aproximadas que para ele têm sido propostas e que adiante referiremos.

No entanto, apesar do que acaba de se dizer, não deixa este modelo de conter em si sérias restrições, pelo que diferentes modelos alternativos têm sido apresentados na literatura. Longe de pretendermos

ser exaustivos, vamos apresentar alguns mais importantes.

Assim, Luss (1976) examina um modelo no qual as inspecções podem revelar, para além de mau funcionamento, estados intermédios do sistema que representam variados graus de deterioração. Sengupta (1980) apresenta um modelo em que o sistema revela sinais de falha após um certo intervalo de tempo que é aleatório. Luss e Kander (1974) tratam um modelo em que a duração das inspecções não é nula. Sengupta (1981) considera um modelo com inspecções imperfeitas, havendo uma probabilidade fixa de não detectar a falha. Luss (1977) considera um modelo de um sistema que está inoperante durante os períodos de inspecção. Butler (1979) trata um modelo em que as inspecções podem provocar a falha do próprio sistema. Keller (1974) estuda um modelo em que o número de inspecções é descrito por uma densidade contínua $n(t)$ por unidade de tempo. Nakagawa (1984) considera um modelo em que o sistema depois de uma inspecção tem uma probabilidade p de ter a mesma idade que antes e uma probabilidade q de ficar como novo. Anbar (1976) trata um modelo em que a distribuição do tempo de vida se supõe ser exponencial mas de média desconhecida. Enfim, em Pierskalla e Voelker (1976) e em Sherif (1982) podem encontrar-se extensas análises e listas bibliográficas sobre modelos de inspecção de sistemas e matérias afins.

Em controlo estatístico de qualidade, como caso especial, consideram-se sempre modelos com inspecções imperfeitas, em que estão presentes os erros de primeira e de segunda espécies. Gibra (1975), Montgomery (1980) e Vance (1983) apresentam sínteses relativas à literatura existente neste campo.

Voltando ao modelo anteriormente formulado, designemos então por

T, N, D e C as variáveis aleatórias seguintes:

T - tempo de vida (ou de bom funcionamento) do sistema ;

N - número de inspecções do sistema, incluindo aquela em que a falha é detectada. Neste capítulo consideraremos apenas o caso das inspecções periódicas;

D - tempo de detecção da falha do sistema (intervalo de tempo entre o instante da ocorrência da falha e o instante da sua detecção);

C - custo total do funcionamento do sistema devido ao custo das inspecções e ao custo do seu mau funcionamento enquanto a falha não é detectada.

Designemos ainda por C_1 e por C_2 , respectivamente, o custo de cada inspecção e o custo por unidade de tempo de mau funcionamento do sistema.

Então, para um dado valor t de T , tem-se um custo total c dado, por

$$c = C_1 n + C_2 d \quad (2.1)$$

em que n e d são os valores de N e D correspondentes a t , com

$$d = nP - t, \quad d \geq 0 \quad (2.2)$$

sendo P o período de inspecção. Supõe-se aqui que a revelação da falha do sistema é feita através de uma inspecção, pelo que $n \geq 1$.

Como é evidente, n e d , e, portanto, c , dependem de t e de P . Para um dado valor do período de inspecção P , o custo total médio por ciclo $E(C)$ é dado por

$$E(C) = C_1 E(N) + C_2 E(D) \quad (2.3)$$

em que $E(X)$ designa a esperança matemática duma variável aleatória genérica X .

A questão importante que então se coloca é determinar um valor P_0 de P que minimize $E(C)$.

2.2.2. Número médio de inspecções

O número médio de inspecções por ciclo $E(N)$ é dado por

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad (2.4)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt \quad (2.5)$$

em que p_k é a probabilidade de o sistema ser inspecionado k vezes, t_k são os instantes de inspecção, com $t_0=0$, e em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de vida T do sistema.

Tratando-se de inspecções periódicas de período P , com $t_k=kP$, pode obter-se sucessivamente

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{kP}^{(k+1)P} f(t) dt \quad (2.6)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \{ F(kP) - F[(k-1)P] \} \quad (2.7)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R(kP) \quad (2.8)$$

em que $R(t) = 1-F(t)$ é a função de fiabilidade do sistema.

No caso da distribuição de T ser exponencial, com $R(t)=\exp(-Lt)$, obtem-se a expressão simples

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-LkP) = 1 / [1-\exp(-LP)] \quad (2.9)$$

A expressão anterior (2.8) obtida para $E(N)$, para além da sua simplicidade, permite-nos dar (Rodrigues Dias (1983 a)) uma interpretação geométrica muito simples e sugestiva ao número médio de inspecções: $E(N)$ é dado pela soma das ordenadas da curva $R(t)$ tomadas na origem e nos instantes de inspecção $t_k = kP$, $k=1, 2, 3, \dots$

Foi possível mostrarmos que a série $\sum R(kP)$ é uniformemente convergente em $[a, \infty)$, $a > 0$, e como $R(kP)$ é contínua em $[a, \infty)$, admitindo que $f(t)$ é contínua, então $E(N) = \sum R(kP)$ é contínua em $[a, \infty)$.

A propósito da expressão (2.8) de $E(N)$, tenha-se em conta que para $P \neq 0, \infty$ o número médio de inspecções é finito com

$$E(N) < [P+E(T)] / P \quad (2.10)$$

Nos casos extremos, verifica-se que $E(N) \rightarrow \infty$ quando $P \rightarrow 0$ e que $E(N) \rightarrow 1$ quando $P \rightarrow \infty$. Neste último caso deve ter-se em conta que se está a supor que após a falha existe sempre uma inspecção.

Em termos genéricos, pode-se facilmente mostrar que, se o período de inspecção P cresce (em sentido estrito), então o número médio de inspecções $E(N)$ decresce (em sentido lato). De facto, verifica-se:

$$P_2 > P_1 \Rightarrow R(kP_2) \leq R(kP_1) \quad , \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

pelo que

$$E(N)_2 \leq E(N)_1 \quad (2.12)$$

sendo $E(N)_2$ e $E(N)_1$ referentes a P_2 e P_1 , respectivamente.

A utilização da relação " \leq " nas expressões anteriores em vez da simples relação "<" tem a ver com o tipo de distribuição de T e com o período de inspecção P . Na realidade, é o que se passa no caso em que $R(t)$ é do tipo rectangular, correspondente à situação extrema em que a falha do sistema ocorre com probabilidade 1 ao fim de um intervalo de tempo constante, e no caso em que P_1 e P_2 tomam valores como, por exemplo, os representados na Fig. 2.1.

No caso das distribuições de T vulgarmente utilizadas na prática (como a de Weibull), verifica-se sempre a desigualdade em sentido estrito e não em sentido lato.

Por outro lado, se P_1 e P_2 forem 2 valores do período de inspecção tais que

$$m = \text{INT}(P_1/P_2) \quad , \quad m=0,1,2,\dots \quad (2.13)$$

em que $\text{INT}()$ designa a função inteiro, e se $E(N)_1$ e $E(N)_2$ forem os respectivos valores de $E(N)$, mostrámos que se verifica a dupla desigualdade

$$m-(m-1)/E(N)_1 \leq E(N)_2/E(N)_1 \leq m+1 \quad (2.14)$$

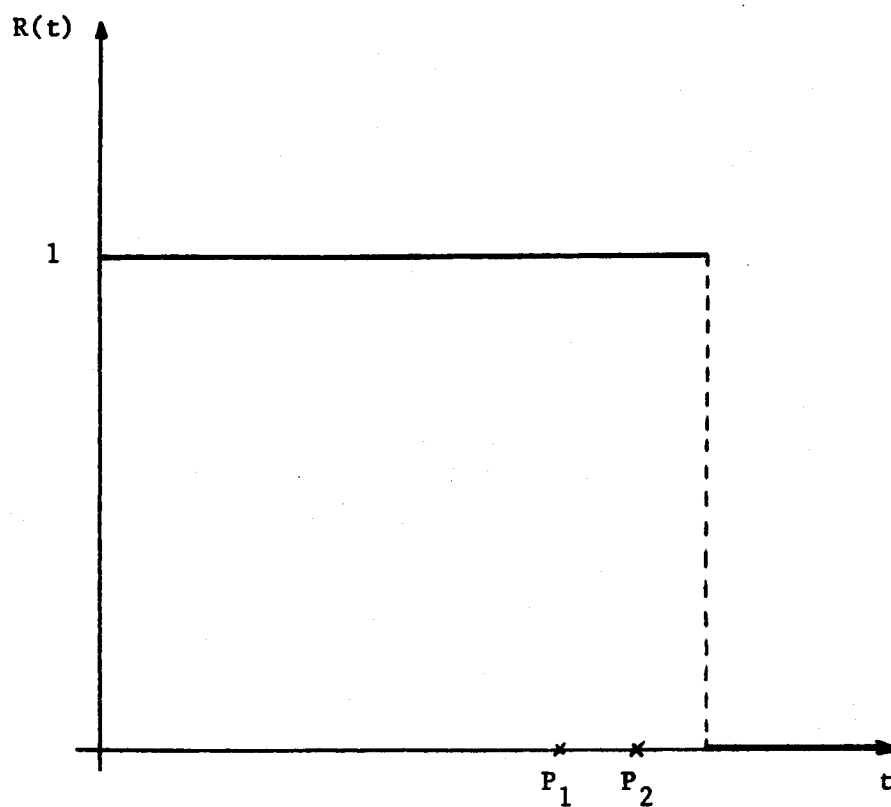


Fig. 2.1

Função de fiabilidade $R(t)$ de tipo rectangular, correspondente à situação extrema em que a falha do sistema ocorre com probabilidade 1 ao fim de um intervalo de tempo constante.

De facto, basta ter em conta as expressões de $E(N)_1$ e de $E(N)_2$ correspondentes a P_1 e P_2 e comparar os termos das respectivas séries.

O interesse da dupla desigualdade anterior consiste no seguinte: se para um dado valor de P_1 conhecermos o respectivo valor de $E(N)_1$, então para qualquer outro valor do período de inspecção P_2 poderemos de imediato obter um intervalo onde o respectivo número médio de inspecções $E(N)_2$ se situa.

No caso de m tomar os valores particulares 0 e 1, obtém-se

$$m=0, \quad 1 \leq E(N)_2 \leq E(N)_1 \quad (2.15)$$

$$m=1, \quad E(N)_1 \leq E(N)_2 \leq 2 E(N)_1 \quad (2.16)$$

Em (2.15) a igualdade $E(N)_2 = E(N)_1$ pode ocorrer numa situação como a contemplada na Fig 2.1.

No Quadro 2.1, a título de exemplo, apresentam-se diferentes valores do cociente $E(N)_2/E(N)_1$, no intervalo $[1,2]$, para $m=1$ e no caso da distribuição exponencial, com $R(t)=\exp(-t)$, para $P_1=.5$ e para diferentes valores de P_2 .

2.2.3. Tempo médio de detecção

Tendo em conta as igualdades (2.2) e (2.8) pode-se escrever:

P_1/P_2 ($P_1 = .5$)	$E(N)_2/E(N)_1$
1.1	1.08
1.2	1.15
1.3	1.23
1.4	1.31
1.5	1.39
1.6	1.47
1.7	1.54
1.8	1.62
1.9	1.70

Quadro 2.1

Valores de $E(N)_2/E(N)_1$ para diferentes valores de P_1/P_2 , no caso da distribuição exponencial.

$$E(D) = PE(N) - E(T) \quad (2.17)$$

$$= P \sum_{k=0}^{\infty} R(kP) - E(T) \quad (2.18)$$

Por outro lado, tendo em conta que

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.19)$$

podemos por fim escrever

$$E(D) = P \sum_{k=0}^{\infty} R(kP) - \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.20)$$

A expressão anterior permite-nos também uma interpretação geométrica muito simples e sugestiva e que é a seguinte: o tempo médio de detecção da falha é dado pela diferença de 2 áreas, em que uma, correspondente a $\sum PR(kP)$, é a soma das áreas dos rectângulos de bases P , centradas em kP , $k=0, 1, 2, 3, \dots$, e de alturas $R(kP)$, e em que a outra área, correspondente a $E(T)$, é a área limitada superiormente por $R(t)$, inferiormente pelo eixo das abcissas e à esquerda pelo eixo das ordenadas - Fig. 2.2.

Recorde-se, de passagem, que a expressão que Nakagawa e Yasui (1979) apresentaram foi a seguinte:

$$E(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^P [F(t+kP) - F(kP)] dt \quad (2.21)$$

Apesar da sua simplicidade, as relações (2.18) e (2.20) e a interpretação geométrica por elas sugerida parecem-nos importantes até

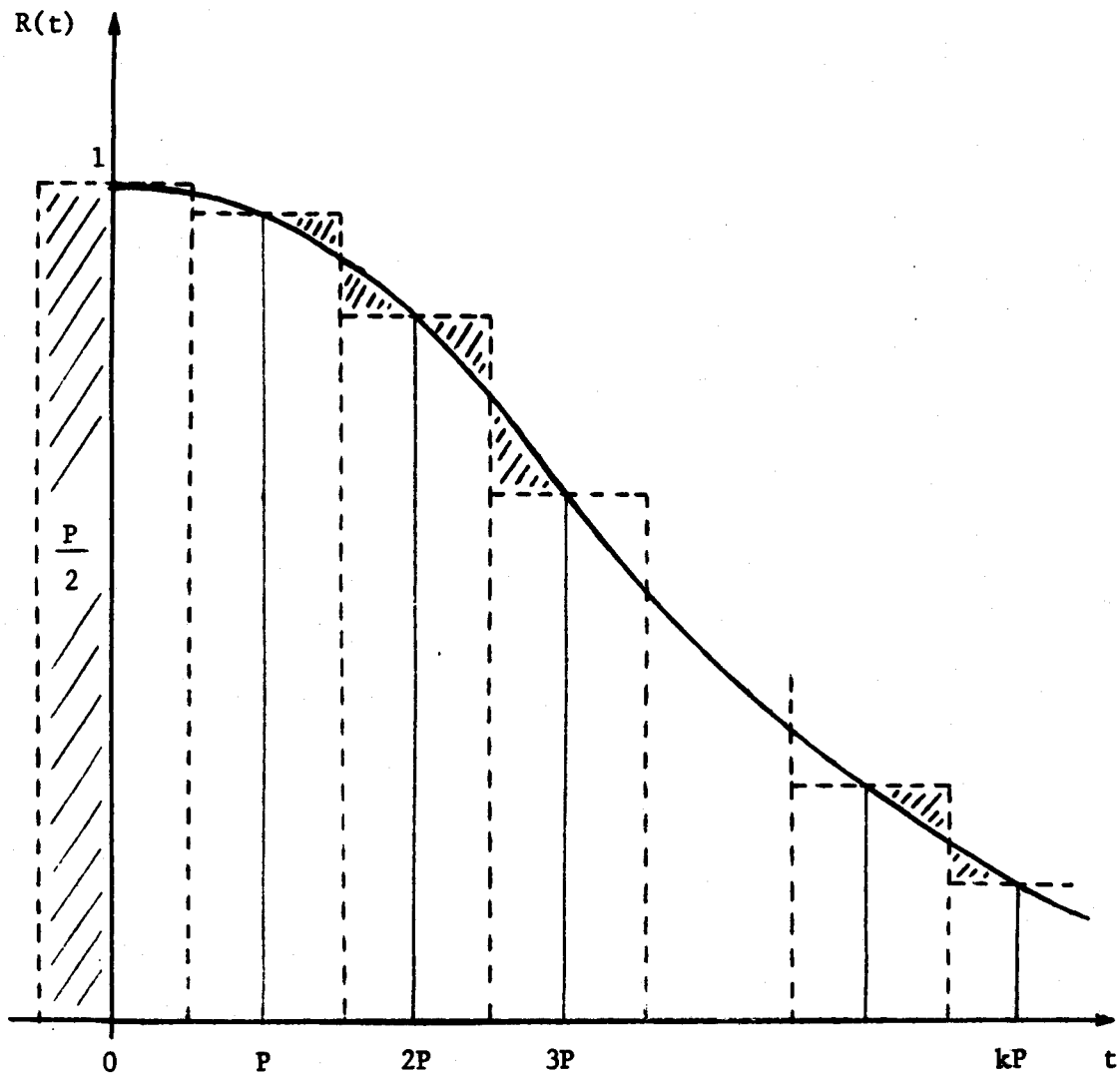


Fig. 2.2

Interpretação geométrica do tempo médio de detecção

pelo facto de facilmente podermos compreender e interpretar geometricamente os resultados seguintes:

a) Para valores razoavelmente pequenos de P , a área dos rectângulos à direita do eixo das ordenadas aproxima-se de $E(T)$, pelo que $E(D)$ se aproxima de $P/2$ (área a tracejado na Fig. 2.2).

Recorde-se que Schneeweiss (1976), considerando uma linearização de $f(t)$ nos intervalos $[kP, (k+1)P)$, $k=0, 1, 2, \dots$, obteve a aproximação

$$E(D) \approx P \cdot [1 + Pf(0)/6] / 2 \quad (2.22)$$

Porém, este resultado, que não é válido senão quando $f(0) < \infty$, poderia conduzir-nos à conclusão de que se verificaria sempre $E(D) > P/2$, o que não é verdade. De facto, quer a interpretação geométrica apresentada, quer os próprios resultados numéricos obtidos, mostram que o tempo médio de detecção pode ser menor que metade do período de inspecção. Assim, por exemplo, no caso em que a distribuição de T é de Weibull com $B=4$, $E(T)=1$ e $P = 1.346$, obtem-se

$$E(D) = .493 < P/2 \quad (2.23)$$

No entanto, no caso da distribuição exponencial, pelo facto da curva $R(t)$ ser côncava, a interpretação geométrica mostra facilmente que $E(D)$ é sempre maior que $P/2$. No caso em que $R(t)$ apresenta um ponto de inflexão e desde que P não seja elevado, então pode-se considerar bastante boa a aproximação $E(D) \approx P/2$. É o que acontece, por exemplo, com a

distribuição de Weibull com $B=2$ em que se verifica $P=.31623$ e $E(D)=.15811$. Apresentar-se-ão adiante outros resultados numéricos.

b) Nakagawa e Yasui (1979) mostraram que se $F(t)$, e, portanto, $R(t)$, admitisse uma aproximação linear em $[kP, (k+1)P]$, $k=0, 1, 2, \dots$, então $E(D)=P/2$. Este resultado é evidente a partir da interpretação geométrica que apresentámos, tomando neste caso a forma expressa na Fig. 2.3.

Esta aproximação associada à linearização funciona especialmente bem, independentemente da distribuição, quando os intervalos $[kP, (k+1)P]$ apresentam uma amplitude reduzida, ou seja, quando é pequeno o período de inspecção.

Recorde-se que Nakagawa e Yasui (1979) apresentaram para $E(D)$ a expressão (2.21). Não nos parece que esta expressão seja tão rica e passível de uma interpretação geométrica tão simples e sugestiva como aquela que apresentámos.

Tendo em conta que $E(D) \geq 0$, por definição, então a partir da equação (2.17) pode-se escrever

$$E(N) \geq E(T)/P \quad (2.24)$$

pelo que a dupla desigualdade (2.14) se pode agora reescrever na forma seguinte

$$m-(m-1)P_1/E(T) \leq E(N)_2/E(N)_1 \leq m+1 \quad (2.25)$$

Contrariamente à expressão (2.14), esta expressão tem a vantagem

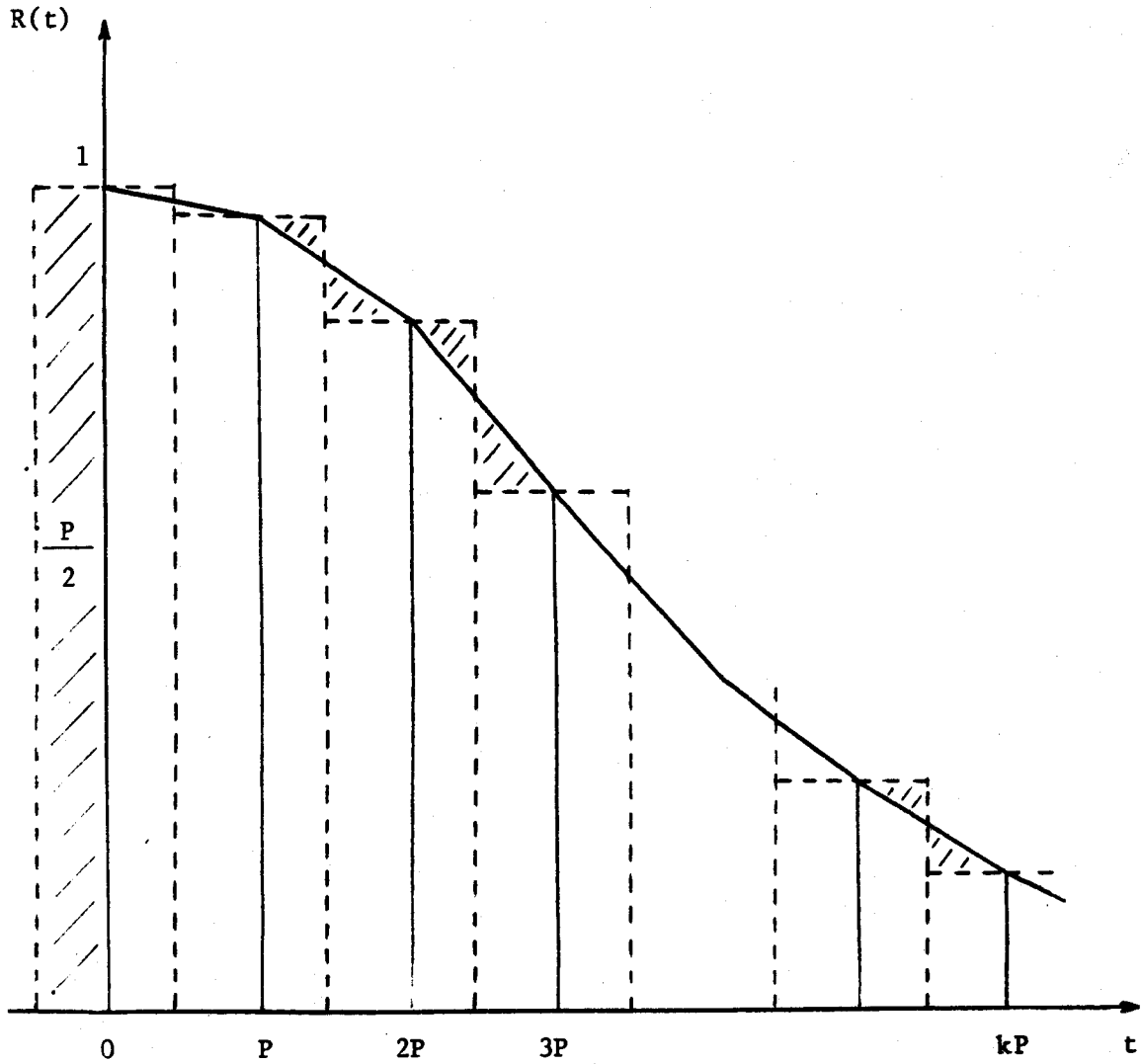


Fig. 2.3

Interpretação geométrica do tempo médio de detecção
quando $R(t)$ é linearizável

de não depender do tipo de distribuição de T no que se refere à determinação dos extremos do intervalo onde o cociente $E(N)_2/E(N)_1$ se situa mas apenas de $E(T)$. É claro que esta independência se paga com o aumento da amplitude do respectivo intervalo. De facto, e a título de exemplo, no caso da distribuição exponencial com $E(T)=1$, com $P_1=.5$ e $m=2$, os limites inferiores do intervalo são 1.5 no caso da relação (2.25) e 1.61 no caso da relação (2.14).

2.2.4. Minimização do custo total médio por ciclo

Utilizando as igualdades (2.3) e (2.17) obtém-se a seguinte expressão para o custo total médio por ciclo $E(C)$ em função do número médio de inspecções por ciclo $E(N)$:

$$E(C) = E(N) \cdot (C_1 + C_2 P) - C_2 E(T) \quad (2.26)$$

Pode ainda escrever-se a expressão seguinte, que posteriormente viremos a utilizar

$$E(C) = C_2 E(T) \left\{ \left[\frac{r}{E(T)} + \frac{P}{E(T)} \right] E(N) - 1 \right\} \quad (2.27)$$

em que $r = C_1/C_2$.

O custo total médio mínimo, que vamos designar por $E(C)_0$, é obtido para um valor P_0 de P que verifica a igualdade seguinte:

$$E(N) + (r + P) \frac{dE(N)}{dP} = 0 \quad (2.28)$$

Utilizando (2.8) e considerando que a derivação é possível (é suficiente que $f(t)$ seja uma função contínua) obtém-se a partir de (2.28)

$$\sum_{k=0}^{\infty} R(kP) - (r + P) \sum_{k=1}^{\infty} kf(kP) = 0 \quad (2.29)$$

Repare-se que na solução desta equação apenas intervem o cociente $r=C_1/C_2$, e não os valores individuais de C_1 e C_2 .

No caso particular da distribuição exponencial, a expressão (2.29) pode tomar a forma :

$$\exp(LP) - (1 + Lr + LP) = 0 \quad (2.30)$$

Esta equação admite uma solução única em P , com $P > 0$, conforme facilmente se verifica através da Fig. 2.4.

Ou seja, no caso da distribuição exponencial, existe um só valor do período de inspecção P_0 que minimiza o custo total médio por ciclo.

No entanto, esta situação de unicidade da solução não se generaliza no caso da equação (2.29). De facto, é o que acontece com a distribuição de Weibull quando os seus parâmetros tomam determinados valores, conforme posteriormente se verá. Esta situação não deixa de ser muito curiosa, até pelo facto de poder ser uma fonte de erros.

Refira-se, finalmente, que a resolução da equação (2.29) não é imediata, mesmo no caso simples da distribuição exponencial, exigindo o recurso a técnicas de análise numérica e meios informáticos. Esta

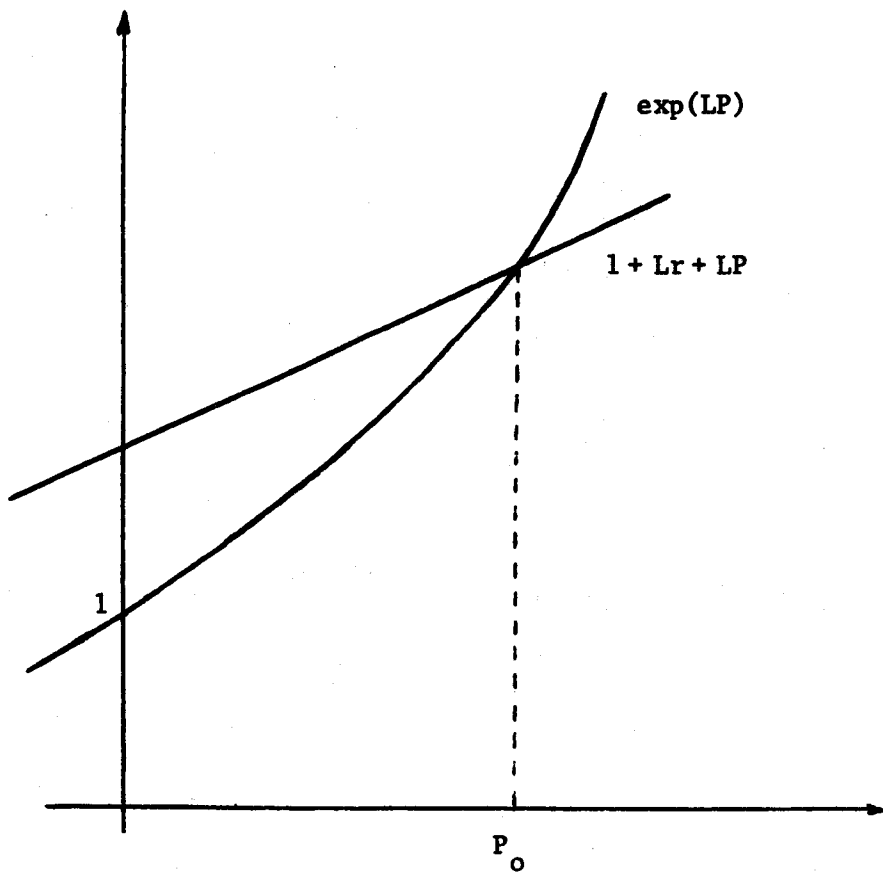


Fig. 2.4

Representação gráfica da equação 2.30

situação conduziu, conforme posteriormente veremos, a que se procurassem soluções aproximadas para o período de inspecção.

2.2.5. Resultados obtidos.Sua análise e comparação

Começemos por acentuar, já que o facto é importante em termos de aplicações, que a uma dada variação do período de inspecção P corresponde uma variação do custo total médio $E(C)$ que, de um modo geral, é bastante inferior em termos percentuais à variação do valor de P . Para o confirmar, apresentamos como exemplo o Quadro 2.2, onde se representam os valores de Q_1 e de Q_2 dados por

$$Q_1 = (P - P_0) / P_0 \cdot 100 \% \quad (2.31)$$

$$Q_2 = [E(C) - E(C)_0] / E(C)_0 \cdot 100 \% \quad (2.32)$$

em que P_0 é o período de inspecção correspondente ao custo total médio mínimo $E(C)_0$. O referido Quadro 2.2 foi elaborado para o caso da distribuição de Weibull com $B=2$, para diferentes valores de Q_1 e para $r/E(T)$ tomando os valores .0125 e .050.

Os resultados obtidos assumem especial interesse prático já que permitem concluir que o custo total médio é pouco sensível, de um modo geral, ao período de inspecção. Realce-se, a título de exemplo, que no caso da distribuição de Weibull, com $B=2$, e para $r/E(T)=.05$, um erro relativo $Q_1=10\%$ no valor de P provoca no valor de $E(C)$ um erro

r/E(T)			
.0125		.050	
Q ₁	Q ₂	Q ₁	Q ₂
-30	6.2	-30	6.0
-25	4.0	-25	3.9
-20	2.4	-20	2.3
-15	1.3	-15	1.2
-10	.5	-10	.5
-5	.1	-5	.1
0	0	0	0
5	.1	5	.1
10	.4	10	.4
15	.9	15	.9
20	1.6	20	1.5
25	2.4	25	2.3
30	3.3	30	3.2

Quadro 2.2

Valores de Q_2 correspondentes a diferentes valores de Q_1 , no caso da distribuição de Weibull com $B=2$.

relativo Q_2 de apenas .4% .

O facto referido permite desde já concluir, o que é muito importante, que aproximações obtidas para o período de inspecção se podem, à partida, considerar como sendo, em termos de custos, boas aproximações. De resto, teremos oportunidade de verificar posteriormente que algumas delas se poderão considerar como sendo quase óptimas.

Referidas e acentuadas as conclusões anteriores, tentemos agora compreender e justificar a sua razão de ser.

Para isso, por um lado, comecemos por recordar a expressão (2.3) relativa ao custo total médio por ciclo $E(C)$. Por outro lado, tenha-se em conta que quando o número médio de inspecções cresce (decrece), por diminuição (aumento) de P , então o tempo médio de detecção decrece (cresce), de um modo geral. O Quadro 2.3 e o Quadro 2.4 são elucidativos a este respeito, neles se tendo representado, para o caso da distribuição de Weibull com $B=1$ e $B=3$ as grandezas Q_1 , Q_3 e Q_4 , em que Q_1 é dado por (2.31) e Q_3 e Q_4 são dados por

$$Q_3 = [E(N) - E(N)_0] / E(N)_0 \cdot 100 \% \quad (2.33)$$

$$Q_4 = [E(D) - E(D)_0] / E(D)_0 \cdot 100 \% \quad (2.34)$$

$E(N)_0$ e $E(D)_0$ são os valores correspondentes ao período de inspecção óptimo P_0 .

Repare-se que $E(N)$ e $E(D)$ têm uma variação que se pode considerar da mesma ordem de grandeza de P .

Note-se, por outro lado, a partir dos valores do Quadro 2.3 e do Quadro 2.4, que a variação percentual de $E(D)$ é praticamente igual à

r/E(T)					
.0125			.050		
Q ₁	Q ₃	Q ₄	Q ₁	Q ₃	Q ₄
-30	39.7	-30.5	-30	36.8	-31.0
-25	30.8	-25.5	-25	28.6	-25.9
-20	23.1	-20.4	-20	21.5	-20.8
-15	16.3	-15.3	-15	15.1	-15.6
-10	10.3	-10.3	-10	9.5	-10.4
-5	4.9	-5.1	-5	4.5	-5.2
0	0	0	0	0	0
5	-4.4	5.1	5	-4.1	5.2
10	-8.4	10.3	10	-7.8	10.5
15	-12.1	15.4	15	-11.2	15.8
20	-15.4	20.6	20	-14.3	21.1
25	-18.5	25.8	25	-17.1	26.5
30	-21.3	31.0	30	-19.7	31.8

Quadro 2.3

Valores de Q₃ e Q₄ correspondentes a diferentes valores de Q₁, no caso da distribuição de Weibull com B=1

r/E(T)					
.0125			.050		
Q_1	Q_3	Q_4	Q_1	Q_3	Q_4
-30	39.7	-30.0	-30	37.0	-30.0
-25	30.9	-25.0	-25	28.8	-25.0
-20	23.2	-20.0	-20	21.6	-20.0
-15	16.4	-15.0	-15	15.2	-15.0
-10	10.3	-10.0	-10	9.6	-10.0
-5	4.9	-5.0	-5	4.5	-5.0
0	0	0	0	0	0
5	-4.4	5.0	5	-4.1	5.0
10	-8.4	10.0	10	-7.9	10.0
15	-12.1	15.0	15	-11.3	15.0
20	-15.4	20.0	20	-14.4	20.0
25	-18.5	25.0	25	-17.3	25.0
30	-21.4	29.9	30	-19.9	29.9

Quadro 2.4

Valores de Q_3 e Q_4 correspondentes a diferentes valores de Q_1 , no caso da distribuição de Weibull com $B=3$

correspondente variação percentual de P.

Então, em face do que acaba de se dizer, fácil é agora concluir que $E(C)$ apresente uma relativamente fraca sensibilidade ao valor de P.

De resto, refira-se aqui que esta situação é comum a muitos outros casos em que na função objectivo intervêm grandezas que apresentam variações de sentido oposto.

No entanto, convem deixar aqui bem claro que podem ocorrer situações em que, para valores do período de inspecção P pertencentes a determinados intervalos, $E(N)$ e $E(D)$ apresentam o mesmo sentido de variação. É o que acontece, por exemplo, no caso da distribuição de Weibull, com $B=5$, e para $r/E(T)=.1$. No Quadro 2.5 apresentam-se valores elucidativos de P, $E(N)$ e $E(D)$. Repare-se que quando P aumenta, $E(D)$ começa por aumentar, depois diminuir (tal como $E(N)$) e finalmente aumenta de novo.

Refira-se, por último, que a equação (2.29) pode apresentar mais do que um zero, ou seja, o custo $E(C)$ pode ter mais do que um extremo relativo. Em particular, $E(C)$ pode apresentar dois (ou mais) mínimos, facto esse que exige cautelas aquando da minimização. É o que acontece, por exemplo, no caso da distribuição de Weibull, com $B=5$, para $r/E(T)=.1$ e com $C_1=.1$ e $C_2=1$. Na Fig. 2.5 representa-se esta situação.

Repare-se que se se considerasse o segundo mínimo, o erro relativo que daí resultaria seria da ordem de apenas 1.5 % .

r/E(T)=.1		
P	E(N)	E(D)
.70	1.92	.35
.75	1.86	.40
.80	1.81	.45
.85	1.75	.49
.90	1.68	.51
.95	1.60	.52
1.00	1.52	.52
1.05	1.43	.51
1.10	1.35	.48
1.15	1.27	.46
1.20	1.20	.44
1.25	1.14	.42
1.30	1.09	.42
1.35	1.05	.42
1.40	1.03	.44

Quadro 2.5

Valores de E(N) e de E(D) para diferentes valores de P,
no caso da distribuição de Weibull com B=5.

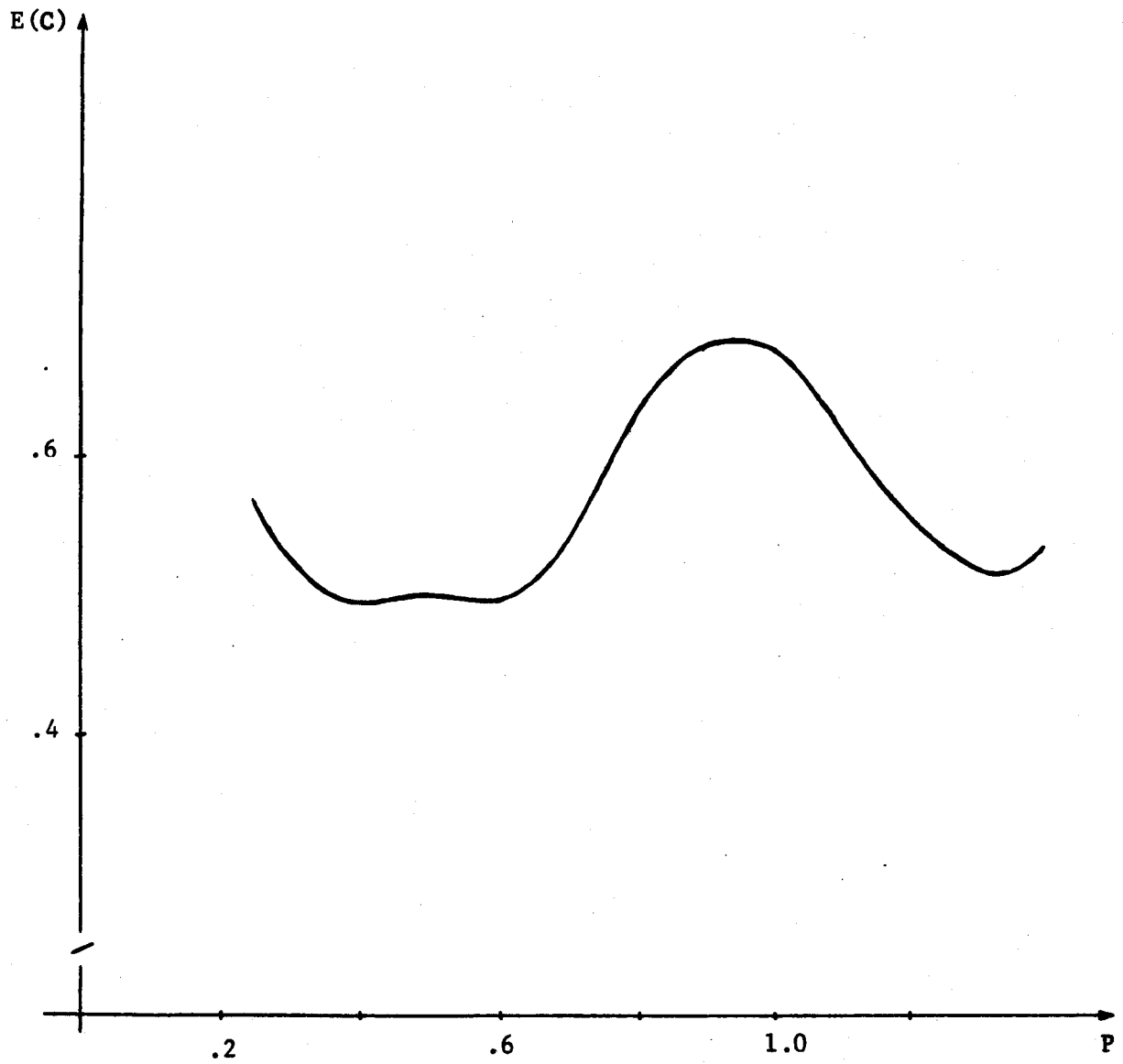


Fig. 2.5

Evolução do custo $E(C)$ em função do período P , no caso da distribuição de Weibull com $B = 5$

2.2.6. Influência do tipo de distribuição

Nos pontos anteriores, para uma dada distribuição, compararam-se e analisaram-se diferentes grandezas, incluindo a evolução do custo total médio por ciclo em função do período de inspeção. Há, no entanto, uma outra questão importante que se coloca e que interessa analisar, e que é a seguinte: será que os custos totais médios mínimos, relativos a duas distribuições diferentes, mas com a mesma esperança $E(T)$, são diferentes? E sendo diferentes, será que a diferença é acentuada? Ou ainda, por outras palavras, será que o custo total médio mínimo por ciclo depende essencialmente de $E(T)$ e não do tipo de distribuição de T ? Esta é a questão que nos propomos analisar neste ponto, na sequência de trabalho já anteriormente elaborado (Rodrigues Dias (1983 a)).

De resto, esta mesma questão, embora formulada noutros termos, põe-se em problemas de optimização em controlo estatístico de qualidade, tendo merecido a atenção de investigadores como, por exemplo, Montgomery (1980).

Suponhamos então que as distribuições que temos vindo a utilizar têm a mesma esperança matemática ($E(T)=1$, por simplicidade, embora tal não seja necessário, bastando que seja o mesmo o cociente $r/E(T)$) e vejamos como é que os valores de $E(C)_0$ são influenciados pela mudança de distribuição. Uma maneira simples de o fazer é considerar, para cada valor de $r/E(T)$, o cociente

$$Q_5 = \left[E(C)_0 - E(C)_1^* \right] / E(C)_1^* \cdot 100 \% \quad (2.35)$$

em que $E(C)_0$ é o custo total médio mínimo por ciclo relativo à distribuição em causa e em que $E(C)_1^*$, que é dado por

$$E(C)_1^* = C_2 E(T) \left\{ \frac{r}{2E(T)} + \left[\frac{2r}{E(T)} \right]^{1/2} \right\} \quad (2.36)$$

é um valor aproximado do custo, que é independente da distribuição e que assim é tomado como referência. A expressão de $E(C)_1^*$ obtém-se considerando na expressão de $E(C)$ as aproximações $E(D)=P/2$ e $P=(2rE(T))^{1/2}$ de que adiante falaremos.

No Quadro 2.6 estão indicados os correspondentes valores de Q_5 .

Uma análise deste Quadro permite-nos concluir:

- a) existe uma variação importante de Q_5 e, portanto, de $E(C)_0$ em função do tipo de distribuição de T , em especial para grandes valores de $r/E(T)$. Ou seja, o custo mínimo $E(C)_0$ pode depender de uma forma acentuada do tipo de distribuição e não apenas de $E(T)$;
- b) no entanto, para pequenos valores de $r/E(T)$, para a distribuição de Weibull com $B \in (1,4)$ e para a distribuição log-normal, pode-se dizer que a dependência é fraca.

		r/E(T)			
Distribuição		.0125	.0500	.2000	.8000
	.7	4.5	7.1	11.4	18.2
	1.0	1.3	2.7	5.4	10.9
	1.5	0.1	0.4	1.3	4.1
Weibull	2.0	0.0	0.0	0.0	0.1
B=	2.5	0.0	0.0	-0.2	-4.3
	3.0	0.0	0.0	-0.2	-9.5
	4.0	0.0	0.0	-2.4	-18.2
	5.0	0.0	0.0	-13.8	-24.1
	7.0	0.0	-0.3	-28.8	-31.5
Hjorth		3.5	6.2	11.1	19.1
Log-normal		-0.1	0.0	2.3	9.2
$E(C)_1^*/(C_2 E(T))$.1644	.3412	.7325	1.6649

Quadro 2.6

Valores de Q_5 para diferentes valores de $r/E(T)$
e para diferentes tipos de distribuição de T

2.3. APROXIMAÇÕES DO PERÍODO DE INSPECÇÃO E DO CUSTO TOTAL MÉDIO MÍNIMO POR CICLO

2.3.1. Aproximações associadas com $E(D)=P/2$

Vimos num ponto anterior que o valor do período de inspecção P que minimiza o custo total médio por ciclo $E(C)$ é uma solução da equação (2.29), embora essa solução possa não ser única, conforme na devida altura se assinalou. No caso da distribuição de Weibull, por exemplo, essa equação toma a forma seguinte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp [-(kP/A)^B] = (r+P) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{B}{A} \left(\frac{kP}{A}\right)^{B-1} \exp [-(kP/A)^B] \quad (2.37)$$

Como é evidente, a resolução desta equação não é imediata, exigindo, tal como também já foi referido, o recurso a meios informáticos e a técnicas de análise numérica. O mesmo, de resto, se passa, embora em menor grau, no caso da distribuição exponencial (veja-se a equação (2.30)).

Os factos que acabam de referir-se levaram, então, os investigadores a procurarem soluções aproximadas para o período de inspecção de tal modo que, por um lado, elas pudessem ser facilmente obtidas no quotidiano das aplicações e que, por outro lado, elas fossem

suficientemente precisas.

É neste contexto que Nakagawa e Yasui (1979), partindo da aproximação $E(D)=P/2$, obtiveram para período de inspecção o valor P_0^* dado pela expressão :

$$P_0^* = [2rE(T)]^{1/2} \quad (2.38)$$

com $r=C_1/C_2$.

Repare-se que no caso particular da distribuição exponencial, este resultado se pode obter facilmente a partir da equação (2.30) utilizando a aproximação (Rodrigues Dias (1983 a)):

$$\exp(LP) \approx 1 + LP + (LP)^2/2 \quad (2.39)$$

Como é evidente, o resultado (2.38) é extremamente simples, o que o torna desde logo muito atractivo em termos de possíveis aplicações práticas. A questão que então se punha, como é natural, era analisar o seu grau de precisão.

Nakagawa e Yasui (1979) compararam, então, para a distribuição de Weibull, o valor de P_0^* obtido a partir de (2.38) com o valor de P obtido a partir de (2.29). Os autores referidos concluíram que para $1.5 < B < 2.5$, em que B é o parâmetro de forma da distribuição de Weibull, os erros relativos de P_0^* não ultrapassavam, digamos assim, os 10 % .

Parece-nos, contudo, que o que deve ser comparado num problema deste tipo são os custos e não propriamente os períodos de inspecção, já que, em última análise, se trata de um problema de minimização de custos.

Para além de que, conforme já deixámos anteriormente bem acentuado, o custo total médio por ciclo poderia ser (e neste caso é) relativamente pouco sensível a variações no período de inspecção.

No entanto, antes de passarmos à comparação e análise desses respectivos custos, vamos antes comparar também os valores dos períodos de inspecção obtidos a partir de (2.29) e (2.38), agora não apenas para a distribuição de Weibull, mas também para outras distribuições de tal modo que a taxa de falha apresente as suas diferentes formas possíveis, generalizando assim os resultados de Nakagawa e Yasui (1979). Ao mesmo tempo, aproveitamos para comparar o valor do tempo médio de detecção óptimo $E(D)_0$ com metade do período de inspecção óptimo P_0 , para ver até que ponto é que a aproximação $E(D)=P/2$, que conduziu ao resultado (2.38), é boa.

Assim, designemos por Q_6 e Q_7 os erros relativos seguintes:

$$Q_6 = \left[P_0/2 - E(D)_0 \right] / E(D)_0 \cdot 100 \% \quad (2.40)$$

$$Q_7 = \left[P_0^* - P_0 \right] / P_0 \cdot 100 \% \quad (2.41)$$

No Quadro 2.7 e no Quadro 2.8 estão indicados os respectivos valores obtidos para as diferentes distribuições e para diferentes valores de $r/E(T)$.

A partir do Quadro 2.7 e do Quadro 2.8 podemos tirar as conclusões seguintes (Rodrigues Dias (1983 a)):

- a) Para a distribuição com a taxa de risco em forma de banheira e para a distribuição de Weibull com $B=.7$ e $B=1$, verifica-se

Distribuição		r/E(T)				
		.0125		.0500		
		Q ₆	Q ₇	Q ₆	Q ₇	
Weibull	0.7	-8.0	7.3	-11.9	11.3	
	1.0	-2.5	2.6	-4.8	5.3	
	1.5	-0.3	0.4	-0.8	1.1	
	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	B=	2.5	0.0	0.0	0.1	-0.1
		3.0	0.0	0.0	0.0	-0.1
		4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
		5.0	0.0	0.0	0.0	-0.4
Hjorth	7.0	0.0	0.0	0.8	3.8	
		-6.3	6.0	-10.4	11.1	
Log-normal		0.2	-0.4	0.0	1.3	

Quadro 2.7

Valores de Q₆ e Q₇ para diferentes valores de r/E(T)
e para diferentes tipos de distribuição de T

		r/E(T)			
		.2000		.8000	
Distribuição		Q ₆	Q ₇	Q ₆	Q ₇
	0.7	-16.9	17.5	-22.9	27.0
	1.0	-8.7	10.5	-14.6	20.9
	1.5	-2.2	3.4	-5.9	11.8
Weibull	2.0	0.0	0.0	-0.1	1.3
B=	2.5	0.4	-1.0	7.8	-11.2
	3.0	0.3	-1.0	17.9	-13.7
	4.0	36.6	-53.0	38.8	-11.4
	5.0	58.8	-52.3	59.7	-7.9
	7.0	101.3	-50.0	100.9	-1.9
Hjorth		-16.4	19.0	-23.6	30.0
Log-normal		-3.6	9.0	-11.8	24.8

Quadro 2.8

Valores de Q₆ e Q₇ para diferentes valores de r/E(T)
e para diferentes tipos de distribuição de T

que $E(D)$ é sempre superior a $P/2$, e tanto mais quanto $r/E(T)$ é elevado. Por outro lado, para a distribuição de Weibull com B elevado e mais especialmente para valores elevados de $r/E(T)$ verifica-se que $E(D)$ pode ser consideravelmente mais pequeno que $P/2$, o que a aproximação (2.22) não deixava supor. Por outro lado, para $B=2$ verifica-se $E(D) \approx P/2$ para quase todos os valores indicados de $r/E(T)$. Estes resultados são facilmente compreensíveis se se recordar a interpretação geométrica de (2.20) e a evolução da convexidade (positiva ou negativa) da curva $R(t)$ para cada uma das distribuições.

b) O valor de P_0^* , como Nakagawa e Yasui (1979) haviam já verificado, pode afastar-se bastante de P_0 (tomando valores quer superiores quer inferiores) em especial para valores elevados de $r/E(T)$, situação em que $P/2$ é uma má aproximação de $E(D)$. No caso da distribuição de Weibull com $B=2$ pode-se dizer que P_0 e P_0^* são quase iguais.

Permita-se-nos aqui chamar a atenção para o facto de no artigo de Nakagawa e Yasui (1979) haver valores que não estão correctos ou que, pelo menos, não é a mais conveniente a respectiva representação gráfica.

Apesar de num problema de inspecção periódica o resultado que interessa (do ponto de vista de aplicação imediata) seja o intervalo óptimo entre inspecções (ou, então, um seu valor aproximado), a verdade é que (do ponto de vista económico) pode haver conveniência e até mesmo necessidade de conhecer o respectivo custo total médio mínimo (ou, então, um seu valor aproximado). Sendo assim, vamos apresentar de seguida as

expressões do custo total médio mínimo por ciclo, que designamos por $E(C)_0$, e de duas aproximações de $E(C)_0$, que vamos designar por $E(C)_1^*$ e por $E(C)_2^*$:

$$E(C)_0 = C_2 E(T) \left\{ \left[\frac{r}{E(T)} + \frac{P_0}{E(T)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} R(kP_0) - 1 \right\} \quad (2.42)$$

$$E(C)_1^* = C_2 E(T) \left\{ \frac{r}{2E(T)} + \left[\frac{2r}{E(T)} \right]^{1/2} \right\} \quad (2.43)$$

$$E(C)_2^* = C_2 E(T) \left\{ \left[\frac{r}{E(T)} + \frac{P_0^*}{E(T)} \right] \sum_{k=0}^{\infty} R(kP_0^*) - 1 \right\} \quad (2.44)$$

Em relação a cada uma destas expressões, pode notar-se o seguinte:

a) A relação (2.42) é calculada a partir de um valor P_0 que é uma solução (única, eventualmente) da equação (2.29). Repare-se ainda que (2.42) se obtém a partir de (2.27), substituindo $E(N)$ pela sua expressão dada por (2.8).

b) A relação (2.43) é obtida a partir do valor aproximado P_0^* dado por (2.38) e considerando que na expressão $E(C) = C_1 E(N) + C_2 E(D)$ se tem $E(D) = P/2$. Como é evidente, esta aproximação $E(C)_1^*$ assenta em duas aproximações: por um lado, substitui-se P_0 por P_0^* ; por outro lado, considera-se $E(D) = P/2$. Permita-se-nos chamar a atenção para os valores do Quadro 2.7 e do Quadro 2.8. É claro que a utilização da aproximação $E(C)_1^*$, desde que se tenha em atenção a amplitude dos erros que lhe estão associados (o que se analisará

adiante), tem a grande vantagem de não depender do tipo de distribuição de T, dependendo apenas do seu valor médio. Foi esta, de resto, a razão pela qual ao analisarmos a influência do tipo de distribuição de T sobre os custos se utilizou $E(C)_1^*$ como valor de referência.

c) A relação (2.44) é obtida utilizando ainda a aproximação P_0^* , mas não impondo agora $E(D)=P/2$ na expressão de $E(C)$. Ou seja, $E(C)_2^*$ é o valor correcto do custo total médio por ciclo que corresponde ao valor aproximado P_0^* do período de inspecção.

Vejamus então agora quão precisas são as aproximações $E(C)_1^*$ e $E(C)_2^*$. Para isso, vamos calcular os respectivos erros em relação ao custo total médio mínimo $E(C)_0$, utilizando as grandezas

$$Q_8 = \left[E(C)_1^* - E(C)_0 \right] / E(C)_0 \cdot 100 \% \quad (2.45)$$

$$Q_9 = \left[E(C)_2^* - E(C)_0 \right] / E(C)_0 \cdot 100 \% \quad (2.46)$$

As comparações anteriores vão ser feitas, tal como em situações anteriores, para diferentes valores de $r/E(T)$ e para os diferentes tipos de taxas de risco. Os resultados obtidos estão indicados no Quadro 2.9 e no Quadro 2.10 .

A partir dos resultados obtidos, podemos pôr em evidência as conclusões seguintes (Rodrigues Dias (1983a)):

		r/E(T)			
		.0125		.0500	
Distribuição		Q ₈	Q ₉	Q ₈	Q ₉
	0.7	-4.3	0.3	-6.7	0.6
	1.0	-1.3	0.0	-2.6	0.1
	1.5	-0.1	0.0	-0.4	0.0
Weibull	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B=	2.5	0.0	0.0	0.0	0.0
	3.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	7.0	0.0	0.0	0.3	0.3
Hjorth		-3.3	0.2	-5.8	0.6
Log-normal		0.1	0.0	0.0	0.0

Quadro 2.9

Valores de Q₈ e Q₉ para diferentes valores de r/E(T)
e para diferentes tipos de distribuição de T

		r/E(T)			
		.2000		.8000	
Distribuição		Q ₈	Q ₉	Q ₈	Q ₉
	0.7	-10.2	1.3	-15.4	2.5
	1.0	-5.2	0.5	-9.8	1.7
	1.5	-1.3	0.1	-3.9	0.6
Weibull	2.0	0.0	0.0	-0.1	0.0
B=	2.5	0.2	0.0	4.5	1.0
	3.0	0.2	0.0	10.5	3.1
	4.0	2.5	1.8	22.2	5.1
	5.0	16.1	12.9	31.8	4.1
	7.0	40.4	29.6	46.0	0.4
Hjorth		-10.0	1.5	-16.0	3.0
Log-normal		-2.3	0.4	-8.4	2.5

Quadro 2.10

Valores de Q₈ e Q₉ para diferentes valores de r/E(T)
e para diferentes tipos de distribuição de T

a) Os custos aproximados $E(C)_1^*$ e principalmente $E(C)_2^*$ afastam-se bastante menos, em termos relativos, do custo mínimo $E(C)_0$ do que o valor aproximado do período de inspecção P_0^* se afasta de P_0 , para as distribuições log-normal, do tipo banheira e para a distribuição de Weibull com $B \leq 3$. Em particular, pode-se considerar que $E(C)_2^*$ é quase mínimo para as distribuições referidas, pois o erro relativo para os valores indicados de $r/E(T)$ é muitas vezes muito próximo de zero. Pode-se então concluir que a aproximação obtida por Nakagawa e Yasui (1979) é quase óptima do ponto de vista dos custos, facto que o seu artigo não punha em evidência. Recorde-se aqui a justificação deste facto: o número médio de inspecções e o tempo médio de detecção apresentam variações de sentidos opostos, pelo que o custo total médio é pouco sensível a variações do período P , em especial se estas são pequenas.

b) Por outro lado, pode-se verificar que para valores elevados de B , os erros relativos de $E(C)_1^*$ e $E(C)_2^*$ podem ser bastante elevados, mesmo superiores aos erros relativos de P_0^* . Nestes casos, pode-se dizer que P_0^* é uma má aproximação de P_0 ($E(N)$ e $E(D)$ podem apresentar uma variação do mesmo sentido). Notemos entretanto que para as distribuições em que a taxa de risco cresce muito depressa (como é o caso da distribuição de Weibull com B elevado) é preferível uma política não periódica de inspecção, com intervalos decrescentes entre inspecções consecutivas (ver, por exemplo, Barlow e Proschan (1965) e Munford e Shahani (1972)).

2.3.2. Novas aproximações quase ótimas

Neste ponto, vamos começar por obter uma solução (quase óptima) para o período de inspecção e para o custo total médio por ciclo no caso em que a distribuição de T é exponencial, para depois analisarmos a sua validade no caso de outras distribuições. Note-se que pusemos entre parêntesis a expressão "quase óptima" já que, conforme veremos, embora em termos teóricos a solução não seja óptima, em termos práticos ela pode ser efectivamente considerada como tal. Por outro lado, permita-se-nos referir desde já que tal aproximação referente ao período de inspecção constitui uma generalização do resultado de Nakagawa e Yasui (1979), o que constitui um dos resultados originais desta tese.

Tendo então em conta que no caso da distribuição exponencial se tem $E(T)=1/L$, a equação (2.30) pode escrever-se:

$$\exp(P') - (1+r' + P') = 0 \quad (2.47)$$

em que $P' = P/E(T)$ e $r' = r/E(T)$.

A partir da relação (2.47) anterior podemos então fazer corresponder a cada valor de r' um valor de P' , a partir do qual se obtem de imediato o correspondente valor do período de inspecção P através da igualdade

$$P = P' E(T) \quad (2.48)$$

No fundo, é apenas uma questão de normalização, tomando $E(T)$ como unidade.

No Quadro 2.11 estão indicados, para diferentes valores de r' , os valores dos cocientes (já anteriormente utilizados) Q_7 e Q_9 dados por :

$$Q_7 = [P_0^* - P_0] / P_0 \cdot 100 \% \quad (2.49)$$

$$Q_9 = [E(C)_2^* - E(C)_0] / E(C)_0 \cdot 100 \% \quad (2.50)$$

em que, recorde-se, P_0^* e P_0 são, respectivamente, os valores dos períodos de inspecção obtidos a partir de (2.38) e de (2.30), e em que $E(C)_2^*$ e $E(C)_0$ são os correspondentes custos totais médios por ciclo, com $E(C)_0$, por exemplo, dado por

$$E(C)_0 = \frac{C_1}{1 - \exp(-L P_0)} + C_2 \left[\frac{P_0}{1 - \exp(-L P_0)} - \frac{1}{L} \right] \quad (2.51)$$

Note-se que a relação (2.49) se podia escrever na forma

$$Q_7 = [P_0^{*'} - P_0'] / P_0' \cdot 100 \% \quad (2.52)$$

em que P_0' seria a solução da equação (2.47) e em que $P_0^{*'}$ seria dado por

r'	Q_7	Q_9	r'	Q_7	Q_9
.001	.75	<.01	.06	5.77	.16
.002	1.05	<.01	.07	6.23	.18
.003	1.29	<.01	.08	6.66	.21
.004	1.49	.01	.09	7.06	.23
.005	1.67	.01	.1	7.45	.26
.006	1.83	.02	.2	10.52	.49
.007	1.97	.02	.3	12.87	.71
.008	2.11	.02	.4	14.85	.92
.009	2.24	.02	.5	16.59	1.13
.01	2.36	.03	.6	18.16	1.32
.02	3.33	.05	.7	19.60	1.51
.03	4.08	.08	.8	20.94	1.69
.04	4.71	.11	.9	22.20	1.86
.05	5.27	.13	1.0	23.38	2.03

Quadro 2.11

Valores de Q_7 e Q_9 para diferentes valores de r' , no caso da distribuição exponencial.

$$P_0^{*'} = (2r')^{1/2} \quad (2.53)$$

Repare-se que esta expressão se pode obter a partir de (2.47) fazendo

$$\exp(P') \approx 1 + P' + P'^2/2 \quad (2.54)$$

Alguns dos valores do Quadro 2.11 aparecem já em Quadros anteriores.

O aspecto interessante, e curioso, que importa analisar no Quadro 2.11, e que tinha passado despercebido num artigo anterior (Rodrigues Dias (1983a)), é o seguinte: os valores de Q_7 ajustam-se muito bem por uma parábola.

Na realidade, usando para efeitos de predição uma curva de regressão do tipo

$$Q_7^* = a + br'^{1/2} \quad (2.55)$$

ou seja, a recta de regressão

$$Q_7^* = a + bX \quad (2.56)$$

com $X=r'^{1/2}$, obtiveram-se a partir dos valores do Quadro 2.11 os seguintes resultados, recorrendo ao conhecido método dos mínimos quadrados:

$$a = .000255$$

$$b = .2340$$

$$\text{coeficiente de determinação} = .999994$$

Como é óbvio, pode considerar-se excelente o ajustamento referido.

Tendo em conta o valor reduzido tomado por a , podemos desprezá-lo na prática e assim escrever

$$Q_7^* = .234 r'^{1/2} \quad (2.57)$$

Tendo agora presentes as relações (2.49), (2.38) e (2.57), pode obter-se finalmente a aproximação

$$P_0^{**} = [2rE(T)]^{1/2} / [1 + .234 r'^{1/2}] \quad (2.58)$$

em que, recorde-se, $r = C_1/C_2$ e $r' = r/E(T)$.

Obtida a aproximação anterior, é agora importante analisar o seu grau de precisão no que diz respeito, para já, à distribuição exponencial.

Assim, no Quadro 2.12, análogo ao Quadro 2.11, representam-se os valores dos cocientes

$$Q_7^{**} = [P_0^{**} - P_0] / P_0 \cdot 100 \% \quad (2.59)$$

$$Q_9^{**} = [E(C)_2^{**} - E(C)_0] / E(C)_0 \cdot 100 \% \quad (2.60)$$

r'	Q_7^{**}	Q_9^{**}	r'	Q_7^{**}	Q_9^{**}
.001	<.01	<10 ⁻⁶	.06	.04	<10 ⁻⁵
.002	<.01	<10 ⁻⁶	.07	.04	<10 ⁻⁵
.003	<.01	<10 ⁻⁶	.08	.04	<10 ⁻⁵
.004	.01	<10 ⁻⁶	.09	.04	<10 ⁻⁵
.005	.01	<10 ⁻⁶	.1	.04	<10 ⁻⁵
.006	.01	<10 ⁻⁶	.2	.05	<10 ⁻⁴
.007	.01	<10 ⁻⁶	.3	.05	<10 ⁻⁴
.008	.01	<10 ⁻⁵	.4	.05	<10 ⁻⁴
.009	.02	<10 ⁻⁵	.5	.04	<10 ⁻⁵
.01	.02	<10 ⁻⁵	.6	.03	<10 ⁻⁵
.02	.02	<10 ⁻⁵	.7	.02	<10 ⁻⁵
.03	.03	<10 ⁻⁵	.8	.01	<10 ⁻⁶
.04	.03	<10 ⁻⁵	.9	>-.001	<10 ⁻⁸
.05	.03	<10 ⁻⁵	1.0	-.01	<10 ⁻⁶

Quadro 2.12

Valores de Q_7^{**} e Q_9^{**} para diferentes valores de r' , no caso da distribuição exponencial.

para os mesmos valores de r' , em que $E(C)_2^{**}$ é agora o custo total médio por ciclo correspondente ao período de inspecção P_0^{**} estimado a partir de (2.58).

Da análise dos valores do Quadro 2.12 podemos tirar as seguintes conclusões importantes, apesar de serem evidentes:

a) Os erros relativos dos períodos de inspecção obtidos a partir da aproximação (2.58) são extremamente reduzidos, nunca superiores a .05% (e quase sempre bastante inferiores) para o conjunto de valores de r' apresentado. Repare-se que r' varia de um valor extremamente reduzido, como é .001, até um valor bastante grande, como é 1, tomando como referência os valores que normalmente aparecem na literatura. Para efeitos práticos, pode considerar-se que os referidos erros relativos não têm qualquer significado.

b) Comparando os erros relativos dos períodos de inspecção associados à aproximação (2.38) de Nakagawa e Yasui (1979) com os correspondentes erros associados à aproximação (2.58) por nós obtida, é evidente que estes são incomparavelmente menores, em especial quando r' é elevado. Este facto percebe-se facilmente já que é para valores elevados de r' que ganha significado o factor de correcção $1/(1+.234r'^{1/2})$ da expressão (2.58).

c) Os erros relativos dos custos associados à aproximação (2.58) obtida são de tal modo reduzidos que na prática se podem

considerar como inexistentes, assim se reforçando a validade da dita aproximação.

Depois de termos concluído que a aproximação (2.58), que generaliza a aproximação (2.38), se pode considerar em termos práticos como óptima no caso da distribuição exponencial, vejamos agora até que ponto é que ela funciona bem no caso de outras distribuições. Com este objectivo, elaborámos o Quadro 2.13 e o Quadro 2.14 para as distribuições e os valores de $r/E(T)$ anteriormente contemplados.

Comparando os valores dos Quadros 2.13 e 2.14 com os valores correspondentes dos Quadros 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10, podemos pôr em evidência as conclusões seguintes:

a) Para a distribuição de Weibull com $B=0.7$ e $B=1$ e para as distribuições de Hjorth (1980) e log-normal (esta de um modo geral) verifica-se que a aproximação obtida P_0^{**} do período de inspecção é melhor que a aproximação P_0^* de Nakagawa e Yasui (1979), pois os erros relativos Q_7^{**} e Q_9^{**} são menores que os seus correspondentes Q_7 e Q_9 ;

b) Para os outros valores considerados de B da distribuição de Weibull, em particular para $B=2$, verifica-se que a aproximação P_0^* funciona melhor que P_0^{**} ;

c) Em termos dos diferentes tipos de taxa de risco que considerámos, e tendo em conta as conclusões a) e b), poder-se-á

		$r' = r/E(T)$			
		.0125		.0500	
Distribuição		Q_7^{**}	Q_9^{**}	Q_7^{**}	Q_9^{**}
	0.7	4.5	0.1	5.8	0.2
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	1.5	-2.2	0.0	-3.9	0.1
Weibull	2.0	-2.5	0.0	-5.0	0.1
B=	2.5	-2.6	0.0	-5.1	0.1
	3.0	-2.6	0.0	-5.1	0.1
	4.0	-2.5	0.0	-5.0	0.1
	5.0	-2.5	0.0	-5.4	0.1
	7.0	-2.5	0.0	-1.3	0.0
Hjorth		3.3	0.1	5.6	0.2
Log-normal		-2.9	0.0	-3.8	0.1

Quadro 2.13

Valores de Q_7^{**} e Q_9^{**} para diferentes valores de $r/E(T)$
e para diferentes tipos de distribuição de T

Distribuição		$r = r/E(T)$			
		.2000		.8000	
		Q_7^{**}	Q_9^{**}	Q_7^{**}	Q_9^{**}
	0.7	6.4	0.2	5.1	0.1
	1.0	0.1	0.0	0.0	0.0
	1.5	-6.4	0.2	-7.5	0.3
Weibull	2.0	-9.5	0.4	-16.2	1.3
B=	2.5	-10.4	0.5	-26.5	4.7
	3.0	-10.4	0.5	-28.6	10.6
	4.0	-54.5	2.9	-26.7	22.5
	5.0	-56.8	15.4	-23.8	31.5
	7.0	-54.7	31.9	-18.9	42.8
Hjorth		7.7	0.3	7.5	0.2
Log-normal		-1.3	0.0	3.2	0.1

Quadro 2.14

Valores de Q_7^{**} e Q_9^{**} para diferentes valores de $r/E(T)$
e para diferentes tipos de distribuição de T

dizer que a aproximação que obtivemos funciona melhor que aquela de Nakagawa e Yasui (1979).

Repare-se que, em certa medida, os resultados obtidos eram previsíveis na medida em que o valor de P_0^{**} , aproximando-se ou afastando-se, conforme os casos, do valor correcto do período de inspecção P_0 , conduziria inevitavelmente a soluções melhores ou piores em termos de custos.



CAPÍTULO III

POLÍTICAS NÃO PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO

3.1. INTRODUÇÃO

Conforme já se referiu, as políticas periódicas de inspecção são muito cómodas do ponto de vista da sua aplicação prática. No entanto, na maioria dos casos, em que a distribuição do tempo de vida do sistema não é exponencial, e mesmo quando a distribuição é exponencial, conforme se verá no capítulo seguinte, verifica-se que não são as políticas periódicas de inspecção aquelas que conduzem ao mínimo da função objectivo em estudo. Em particular, em determinados casos de interesse potencialmente prático, verifica-se que o custo mínimo associado a uma política não periódica de inspecção pode ser consideravelmente mais baixo que o custo mínimo da correspondente política periódica.

É assim que se justifica plenamente o estudo das políticas não

periódicas de inspecção, quer no que diz respeito a soluções óptimas, quer no que diz respeito a soluções aproximadas. Estas soluções aproximadas, que em certa medida podem ser consideradas como soluções intermédias entre as políticas óptimas não periódicas e as políticas periódicas, encontram justificação no facto de poderem ser muito mais facilmente obtidas que as soluções óptimas não periódicas, e ainda no facto de não diferirem destas, em termos de função objectivo, de uma forma muito acentuada.

Em termos esquemáticos, refira-se aqui que este capítulo é constituído pelos seguintes pontos essenciais:

a) Apresentação de um modelo de inspecção que, por simplicidade e justiça, designaremos aqui por modelo de Barlow et al, bem como da respectiva solução óptima não periódica, fazendo ressaltar a dificuldade na sua utilização prática;

b) Apresentação de uma solução aproximada para o modelo de Barlow et al, que designaremos por política de risco constante;

c) Identidade entre a solução antes apresentada (política de risco constante) e uma solução "inicial" de Munford e Shahani (1972);

d) Apresentação de resultados relativos à política de risco constante, estabelecendo-se uma correspondência com resultados análogos relativos à política periódica de inspecção;

e) Análise do caso da distribuição uniforme, comparando-se instantes de inspecção de acordo com a solução óptima do modelo de Barlow

et al e da política de risco constante;

f) Comparação de resultados numéricos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspecção;

g) Finalmente, apresentação de soluções aproximadas para a política de risco constante cuja validade e interesse se analisam.

3.2. O MODELO DE BARLOW et al. SOLUÇÃO ÓPTIMA

3.2.1. O modelo de Barlow et al

Por uma questão de comodidade e justiça, designaremos aqui por modelo de Barlow et al o modelo que assenta nas seguintes hipóteses essenciais, que de resto já foram referidas no início do capítulo sobre inspecções periódicas, mas que reproduzimos:

a) O sistema tem apenas 2 estados, sendo um de bom e outro de mau funcionamento, que poderemos representar por 1 e 0;

b) O estado de mau funcionamento, resultante do aparecimento de uma falha, é apenas detectável por inspecções;

c) A duração do estado de bom funcionamento, que corresponde ao que podemos chamar "tempo de vida" do sistema, é uma variável aleatória

com função densidade de probabilidade conhecida e média finita;

d) Considera-se que as inspecções não interferem no estado do sistema e que são de duração nula;

e) Considera-se que a probabilidade de erro na detecção do estado do sistema é zero, pelo que as inspecções se podem considerar perfeitas;

f) Existe um custo por cada inspecção feita ao sistema e um custo por cada unidade de tempo de mau funcionamento não detectado;

g) Considera-se que um ciclo começa com o sistema em estado de novo e acaba no instante em que a falha é detectada. A partir daí considera-se um processo de renascimento.

Este modelo de Barlow et al foi analisado, por exemplo, por Barlow et al (1963) e por Hunter (1964), tendo estes artigos um conteúdo e uma estrutura bastante análogos. Posteriormente, no conhecido livro Mathematical Theory of Reliability de Barlow e Proschan (1965), foi feita a respectiva síntese.

O problema que se coloca é determinar uma sequência de instantes de inspecção t_k , $k=1,2,3,\dots$, com $t_0=0$, de tal modo que o custo total médio por ciclo seja mínimo. Repare-se (veja-se, por exemplo, Hunter (1964)) que tal sequência existe desde que a distribuição do tempo de vida do sistema tenha média finita e desde que a função de distribuição $F(t)$ seja contínua.

3.2.2. A solução ótima

Consideremos então no modelo de Barlow et al as variáveis aleatórias seguintes:

T - Tempo de vida (ou de bom funcionamento) do sistema;

D - Tempo de detecção da falha do sistema (intervalo de tempo entre o momento da falha e o momento da sua detecção);

N - Número de inspeções do sistema, incluindo aquela em que a falha é detectada;

C - Custo total, resultante do custo das inspeções e do custo do mau funcionamento não detectado.

Consideremos ainda o custo fixo C_1 de cada inspeção e o custo fixo C_2 por unidade de tempo de mau funcionamento do sistema. Recorde-se que C_1 e C_2 podem ter uma interpretação diferente daquela de "custo".

Usando, porém, a terminologia simples e intuitiva de "custos", pode-se então dizer que o custo total médio por ciclo $E(C)$ é dado por

$$E(C) = C_1 E(N) + C_2 E(D) \quad (3.1)$$

em que

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt \quad (3.2)$$

$$E(D) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t) f(t) dt \quad (3.3)$$

sendo t_k , com $k=0, 1, 2, 3, \dots$, e $t_0=0$, os instantes de inspecção e $f(t)$, com $f(t) \geq 0$, $t \geq 0$, a função densidade de probabilidade do tempo de vida do sistema.

De facto, basta ter em conta que se o sistema falha num instante t do intervalo $(t_k, t_{k+1}]$, então o número de inspecções é $n=k+1$ e o tempo de detecção é $d=t_{k+1}-t$.

Repare-se, por outro lado, que se pode escrever

$$E(N) = \int_0^{\infty} M(t)f(t)dt + 1 \quad (3.4)$$

em que $M(t)$ é definida por $M(t)=E(N(t))$, sendo $N(t)$ o número de inspecções no intervalo $(0, t)$ quando o instante de falha é t . Note-se que a parcela 1 no segundo membro de (3.4) se deve ao facto de haver uma inspecção depois da falha no instante t .

A partir de (3.2) pode-se obter facilmente, tal como já se referiu antes a propósito das inspecções periódicas, a seguinte expressão extremamente simples

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} R(t_k) \quad (3.5)$$

em que, recorde-se, $R(t)=1-F(t)$ e $t_0=0$.

Esta expressão, que é formalmente idêntica à expressão (2.8) obtida para inspecções periódicas, com $t_k=kP$, sendo P o período de inspecção, admite também a mesma interpretação geométrica simples e sugestiva: $E(N)$ é a soma das ordenadas da curva $R(t)$ consideradas na

origem e nos instantes de inspecção t_k , com $k=1, 2, 3, \dots$

No modelo de Barlow et al verifica-se o seguinte resultado que consideramos interessante e curioso (Barlow et al (1963)):

Seja $F(t)=1$ para $t > T$. Então, se

$$F(t) \leq \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} (T-t)}, \quad t \in [0, T] \quad (3.6)$$

a política óptima de inspecção consiste numa só inspecção no instante $t=T$. Por outro lado, se

$$F(t) > \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1} (T-t)} \quad (3.7)$$

para algum valor de $t \in [0, T]$, então a política óptima de inspecção consistirá, para além de uma inspecção no instante $t=T$, de uma ou mais inspecções antes do instante T .

Assim, no caso particular da distribuição uniforme definida no intervalo $[0, a]$, a solução óptima contempla sempre uma última inspecção no instante $t=a$, ao fim de um número finito de inspecções. Voltaremos a referir-nos a esta situação concreta por oposição a uma solução aproximada para o modelo de Barlow et al.

Em termos genéricos, no caso em que a função densidade $f(t)$ do tempo de vida é uma função de Pólya de ordem 2 (veja-se, por exemplo, Hunter (1964)), então os instantes de inspecção t_k que minimizam o custo total médio por ciclo (3.1), tendo em conta as expressões (3.2) e (3.3), verificam a seguinte relação de recorrência

$$t_{k+1} - t_k = [F(t_k) - F(t_{k-1})] / f(t_k) - C_1/C_2 \quad (3.8)$$

O problema que então surge é o da determinação do primeiro instante de inspecção t_1 , já que se supõe que $t_0=0$.

Os autores anteriormente referidos a propósito deste modelo apresentaram o seguinte método iterativo conducente à obtenção (aproximada) desse valor t_1 , em termos computacionais:

- 1) Escolher um valor inicial para t_1 ;
- 2) Usando a relação (3.8), calcular sucessivamente t_2 , t_3 , t_4 , ...;
- 3) Se na alínea anterior se verificar, para algum valor de k , que $t_{k+1} - t_k > t_k - t_{k-1}$, então escolher para t_1 um valor menor que o inicial e voltar à alínea 2);
- 4) Se na alínea 2) se obtiver, para algum k , a relação $t_{k+1} - t_k < 0$, então aumentar o valor de t_1 e recalculer t_2 , t_3 , t_4 , ...

Este método assenta, por um lado, no facto de os intervalos entre inspecções serem decrescentes quando a taxa de risco é crescente (função de Pólya de ordem 2) e, por outro lado, no facto de não se poder verificar, como é óbvio, $t_{k+1} - t_k < 0$.

Em Barlow et al (1963), por exemplo, é apresentado o caso em que, por um lado, a distribuição do tempo de vida é normal com média 500 e desvio padrão 100, e em que, por outro lado, se consideram os custos $C_1=10$ e $C_2=1$. Tem-se neste caso a relação $r/E(T)=.02$. Usando o

processo antes descrito, verifica-se que o valor $t_1=422.5$ é maior e que o valor 422.4 é menor do que o valor correcto. Em face disto, pode então concluir-se que o valor correcto está compreendido entre 422.4 e 422.5 .

Este processo de obtenção dos instantes t_k é, contudo, considerado pouco atraente e até difícil por diversos investigadores. É o caso, por exemplo, de Munford e Shahani (1972) que citamos: "It is easy to appreciate the computational difficulties involved in this method". É ainda o caso de Nakagawa e Yasui (1980) que citamos também: " Unfortunately, it is difficult to compute optimal checking procedures numerically, because the computations are repeated until the procedures are determined to the required degree by changing the first check time". Esta uma das razões pela qual as inspecções não periódicas aproximadas e as próprias inspecções periódicas têm despertado e merecido tanta atenção dos investigadores.

Por outro lado, no caso em que o tempo de vida é exponencial, com $R(t)=\exp(-Lt)$, a solução óptima no modelo de Barlow et al consiste em inspeccionar o sistema periodicamente, em que o período de inspecção P satisfaz a equação

$$\exp(LP)-LP-1-LC_1/C_2 = 0 \quad (3.9)$$

Esta relação obtém-se facilmente a partir da expressão (3.8), considerando $t_2-t_1=t_1$, já que se trata de uma inspecção periódica. De facto, obtém-se:

$$P = [1-\exp(-LP)] / [L \exp(-LP)] - C_1/C_2 \quad (3.10)$$

com

$$P = t_1 = t_2 - t_1 \quad (3.11)$$

de onde resulta de imediato (3.9).

O facto de o modelo exponencial ser muito utilizado confere, só por si, e tendo em conta o resultado anterior, grande força e simpatia pelas inspecções periódicas nas aplicações práticas.

3.3. ANÁLISE DETALHADA DE UMA SOLUÇÃO APROXIMADA (POLÍTICA DE RISCO CONSTANTE) PARA O MODELO DE BARLOW et al

3.3.1. A Solução Aproximada (Política de Risco Constante)

Antes de apresentarmos em detalhe uma solução aproximada para o modelo de Barlow et al, que vamos designar por política de risco constante, refira-se aqui que outras soluções aproximadas foram propostas na literatura. Assim, tenham-se em conta os trabalhos de Keller (1974), Nakagawa e Yasui (1980), Munford (1981) e Keller (1982).

Seja então $h(t) = f(t)/R(t)$ a taxa de risco do sistema e $H(t)$, definida por

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt \quad (3.12)$$

a respectiva taxa cumulativa de risco. Vamos então definir como política (aproximada) de risco constante aquela política cujos instantes de inspecção t_k , com $k=1, 2, 3, \dots$, e com $t_0=0$, verificam a seguinte relação

$$H(t_k) = k \Delta H, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

A partir de (3.13) pode escrever-se

$$H(t_{k+1}) - H(t_k) = \Delta H \quad (3.14)$$

e ainda

$$R(t_k) = \exp(-k \Delta H) \quad (3.15)$$

$$t_k = R^{-1}(\exp(-k \Delta H)) \quad (3.16)$$

Esta política de inspecção admite uma interpretação muito simples: os instantes de inspecção t_k são tais que a taxa cumulativa de risco entre duas quaisquer inspecções consecutivas é constante.

Na Fig. 3.1 representa-se geometricamente esta política de inspecção correspondente a uma taxa de risco $h(t)$ crescente.

Analogamente, a Fig. 3.2 corresponde a uma taxa de risco decrescente.

A Fig. 3.1 e a Fig. 3.2 mostram intuitivamente que, se a taxa de risco $h(t)$ de um sistema é crescente (decrescente), então, de acordo com

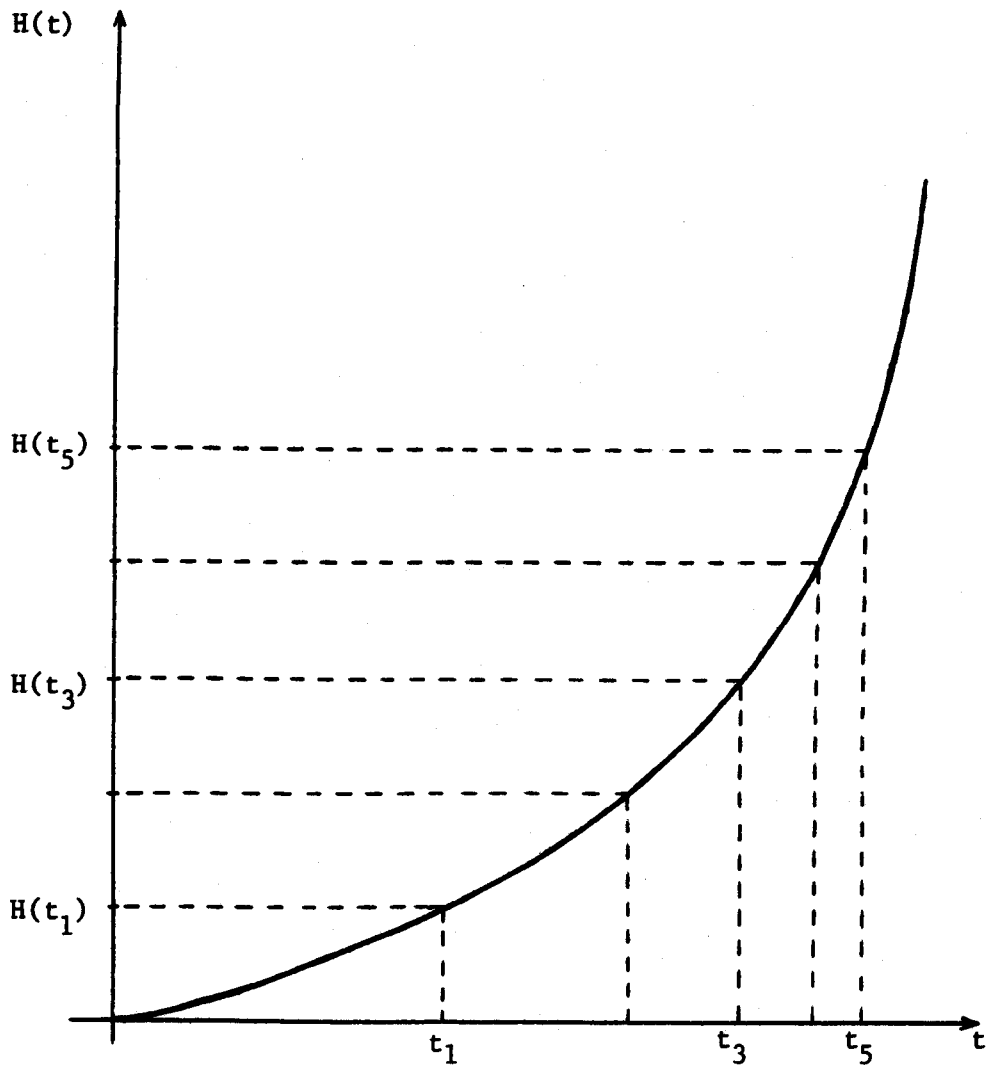


Fig. 3.1

Política de inspeção de risco constante correspondente
a uma taxa de risco crescente

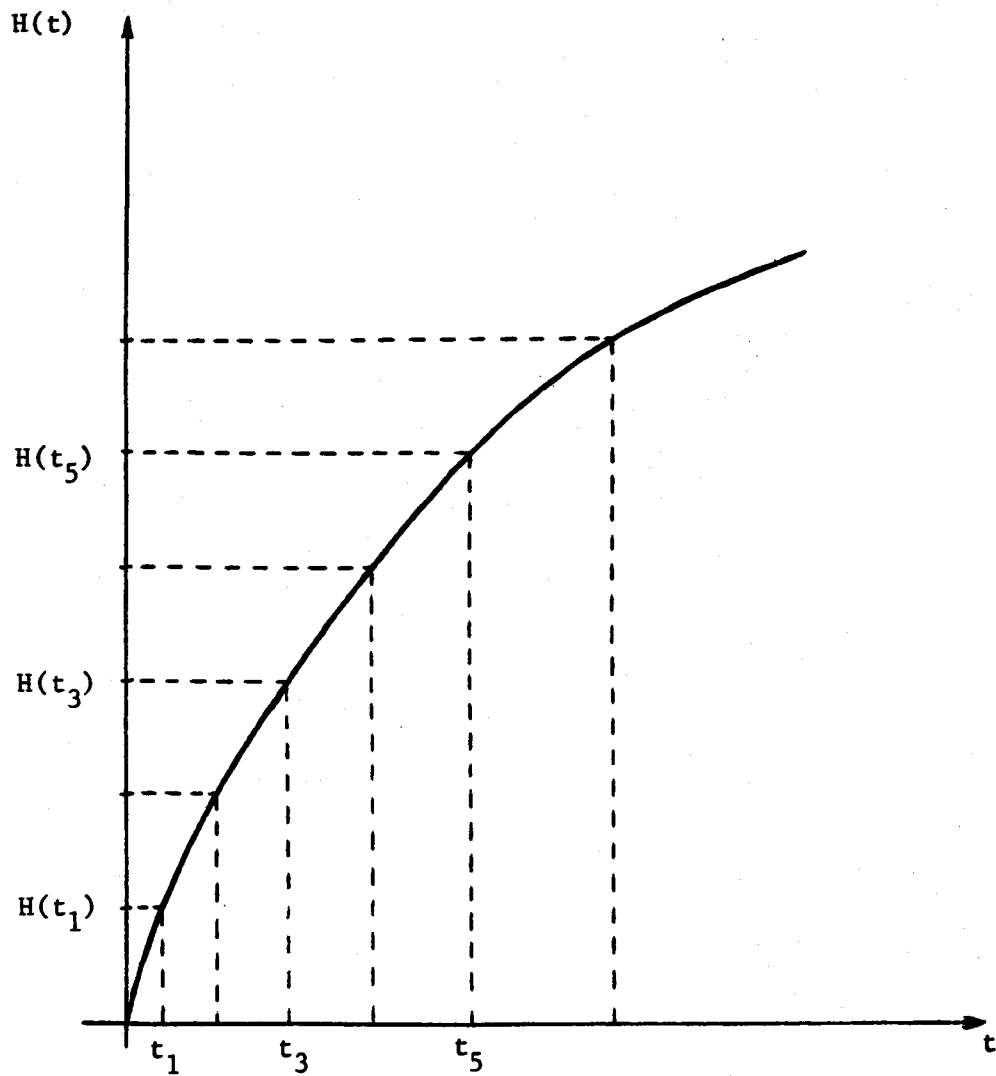


Fig. 3.2

Política de inspeção de risco constante correspondente
a uma taxa de risco decrescente

esta política de inspeção, os intervalos de tempo entre inspeções consecutivas são decrescentes (crescentes).

De facto, considerando

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

$$\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k \quad (3.18)$$

então, por aplicação do teorema dos acréscimos finitos de Lagrange, pode-se escrever

$$\left[H(t_k) - H(t_{k-1}) \right] / \Delta t_k = h(x_1), \quad x_1 \in (t_{k-1}, t_k) \quad (3.19)$$

$$\left[H(t_{k+1}) - H(t_k) \right] / \Delta t_{k+1} = h(x_2), \quad x_2 \in (t_k, t_{k+1}) \quad (3.20)$$

Dividindo membro a membro (3.19) e (3.20) e tendo presente que

$$H(t_{k+1}) - H(t_k) = H(t_k) - H(t_{k-1}) = \Delta H \quad (3.21)$$

tem-se

$$\Delta t_{k+1} / \Delta t_k = h(x_1) / h(x_2) = K \quad (3.22)$$

Então, a partir da relação anterior (3.22) e sendo $x_1 < x_2$, pode-se afirmar:

a) Se $h(t)$ é crescente, tem-se $K < 1$, pelo que

$$\Delta t_{k+1} < \Delta t_k \quad (3.23)$$

ou seja, os intervalos entre inspecções consecutivas vão decrescendo.

b) Se $h(t)$ é decrescente, tem-se $K > 1$, pelo que

$$\Delta t_{k+1} > \Delta t_k \quad (3.24)$$

ou seja, os intervalos vão crescendo;

c) Se $h(t)$ é constante (caso da distribuição exponencial), tem-se $K=1$, pelo que

$$\Delta t_{k+1} = \Delta t_k \quad (3.25)$$

ou seja, está-se no caso de uma inspecção periódica.

Tratando-se de um sistema cuja taxa de risco $h(t)$ seja do tipo "bathtub", então a aplicação desta política de inspecção a um tal sistema conduziria a que os intervalos entre inspecções fossem crescentes na fase inicial, constantes (ou aproximadamente) na fase intermédia e, finalmente, decrescentes na fase final. Na Fig. 3.3 representa-se esquematicamente esta situação.

Em síntese, podemos pois afirmar que a política de inspecção apresentada neste ponto e definida pela relação (3.13) traduz qualitativamente aspectos intuitivos de aplicação prática em muitas situações de que falámos na Introdução.

No entanto, verifica-se que, em termos quantitativos, essa

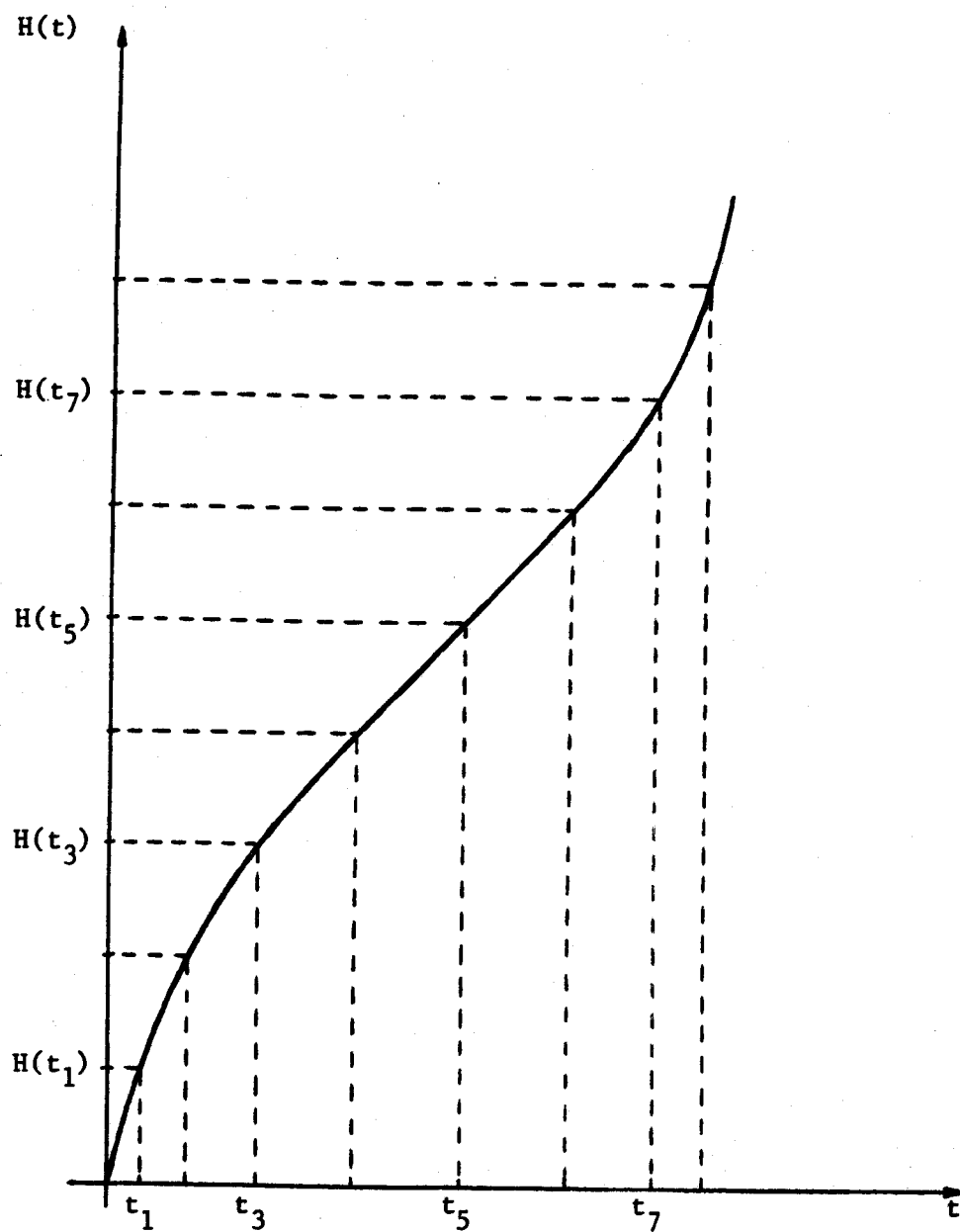


Fig. 3.3

Política de inspeção de risco constante correspondente a
uma taxa de risco do tipo "bathtub"

política não corresponde à solução ótima no modelo de Barlow et al, conforme referiremos posteriormente, apesar, por exemplo, de ambas conduzirem a intervalos decrescentes quando a taxa de risco é crescente.

3.3.2. Identidade entre a solução (aproximada) apresentada e a solução "inicial" de Munford e Shahani

Munford e Shahani (1972) apresentam como solução aproximada para o modelo de Barlow et al aquela em que os instantes de inspecção t_k satisfazem a condição:

$$[F(t_k) - F(t_{k-1})] / R(t_{k-1}) = p, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

O significado desta relação é o seguinte: a probabilidade de o sistema falhar entre dois quaisquer instantes de inspecção t_{k-1} e t_k , sabendo que não falhou até t_{k-1} , é constante e igual a p . Posteriormente, Munford e Shahani (1973) aplicaram esta política de inspecção ao caso da distribuição de Weibull e Tadikamalla (1979) ao caso da distribuição gama. Em qualquer destes trabalhos, é sempre a condição (3.26) que é referida e utilizada.

É neste contexto que, a partir do trabalho de investigação então em desenvolvimento ao longo de 1981, o autor faz referências a uma "nova" solução aproximada para o modelo de Barlow et al (Rodrigues Dias (1981b)).

Tal solução aproximada foi explicitamente apresentada numa conferência por nós realizada em Lisboa em Fevereiro de 1982, no Centro de Estatística e Aplicações (INIC).

Porém, num artigo publicado no número de Março de 1981 da revista *Management Science*, de que apenas tomámos conhecimento bastante mais tarde, Munford (1981) apresentou a dita solução aproximada definindo-a quer a partir da expressão (3.26), quer a partir da expressão (3.13) da qual nós havíamos partido.

Contudo, já antes do conhecimento do artigo anteriormente referido, nós havíamos constatado e provado a identidade daquelas que, à partida, pareciam ser duas soluções aproximadas distintas para o modelo de Barlow et al. E dizemos "pareciam" já que, numa análise superficial, pareciam ser intrinsecamente distintas as duas expressões que transcrevemos:

$$\left[F(t_k) - F(t_{k-1}) \right] / R(t_{k-1}) = p \quad (3.27)$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)/R(t) dt = \Delta H, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.28)$$

No entanto, uma análise mais atenta e, sobretudo, uma procura da sua não identidade, conduziu-nos à sua identidade. De facto, a partir de (3.28), pode escrever-se sucessivamente:

$$\Delta H = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)/R(t) dt, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.29)$$

$$= \log \left\{ \left[1 - F(t_{k-1}) \right] / \left[1 - F(t_k) \right] \right\} \quad (3.30)$$

$$\left[1 - F(t_k) \right] / \left[1 - F(t_{k-1}) \right] = \exp(-\Delta H) \quad (3.31)$$

Usando o artifício simples de somar -1 a ambos os membros de (3.31) obtém-se

$$[F(t_k) - F(t_{k-1})] / R(t_{k-1}) = 1 - \exp(-\Delta H) \quad (3.32)$$

Então, comparando (3.27) com (3.32), verifica-se que são idênticas ambas as soluções aproximadas desde que

$$p = 1 - \exp(-\Delta H) \quad (3.33)$$

ou seja

$$\Delta H = -\log(q), \quad q = 1 - p \quad (3.34)$$

Quer a relação (3.33) quer a relação (3.34) definem, pois, a condição de identidade das "duas" soluções, sendo indiferente, em princípio, trabalhar com a probabilidade p ou com o acréscimo ΔH da função $H(t)$. Em termos práticos, no entanto, a utilização de p torna mais simples determinados resultados, o que levou certamente pelo menos Munford (1981) a optar por tal solução. Porém, tendo em conta que o nosso trabalho se iniciou e se desenvolveu considerando ΔH , continuaremos aqui a utilizar esta via. Por outro lado, ainda, mostraremos adiante que a utilização de ΔH permite estabelecer uma correspondência muito interessante e original, apresentada em Rodrigues Dias (1986b), entre resultados da política de inspecção periódica e desta política de inspecção não periódica. Note-se que tal não seria possível directamente se se optasse por trabalhar com p , como outros fizeram. Repare-se,



finalmente, que foi considerando ΔH que mostrámos, de uma forma diferente de Munford e Shahani (1972), que a uma taxa de risco crescente (decrecente) correspondem intervalos entre inspecções decrescentes (crescentes).

Repare-se, a título de exemplo, que o primeiro instante de inspecção t_1 se pode obter de uma das duas expressões seguintes, conforme se opte por p ou por ΔH :

$$t_1 = F^{-1}(p) \quad (3.35)$$

$$t_1 = F^{-1}(1 - \exp(-\Delta H)) \quad (3.36)$$

em que se considerou $t_0=0$ e $F(t_0)=0$.

Munford (1981) viria a designar esta política por "Constant Hazard Policy", adoptando nós aqui a designação "Política de Risco Constante", conforme, de resto, já anteriormente fizemos.

3.3.3. Resultados relativos à política de risco constante.

Correspondência com resultados relativos à política periódica de inspecção

Comecemos por referir, o que é um aspecto particularmente curioso e interessante, que a taxa cumulativa de risco $H(t)$, vista como variável aleatória, tem distribuição exponencial, com média e variância unitárias:

$$E[H(t)] = 1 \quad (3.37)$$

$$V[H(t)] = 1 \quad (3.38)$$

Mostra-se facilmente (Rodrigues Dias (1986a)) que tal se verifica. De facto, designando por $G(h)$ a função de distribuição de H , tem-se, a partir da relação entre T e H :

$$H(t) = -\log R(t) \quad (3.39)$$

$$F(t) = P(T \leq t) = P(H \leq h) \quad (3.40)$$

$$= P(H \leq -\log R(t)) \quad (3.41)$$

$$= G(-\log R(t)) \quad (3.42)$$

Ora, atendendo a que $F(t)=1-R(t)$, deve verificar-se

$$G(-\log R(t)) = 1-R(t) \quad (3.43)$$

Esta relação permite-nos concluir que a única função $G(h)$ possível de a satisfazer é

$$G(h) = 1 - \exp(-h) \quad (3.44)$$

pois que então se verifica

$$G(-\log R(t)) = 1 - \exp(\log R(t)) = 1 - R(t) \quad (3.45)$$

Ou seja, $H(t)$ tem uma distribuição exponencial de parâmetro unitário.

Debrucemo-nos agora sobre o número médio $E(N)$ de inspecções na política de risco constante. A partir da definição pode escrever-se

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} R(t_k) \quad (3.46)$$

em que o número de inspecções N inclui aquela em que a falha é detectada e em que os instantes t_k obedecem agora à condição (3.16).

Ora, tendo em conta a relação (3.15) podemos então escrever, introduzindo o índice 1 em $E(N)$

$$E(N)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-k \Delta H) = 1 / [1 - \exp(-\Delta H)] \quad (3.47)$$

Ora, recordando que a variável H tem distribuição exponencial com "função de fiabilidade" $R_H(h)$ dada por

$$R_H(h) = \exp(-h) \quad (3.48)$$

então

$$E(N)_1 = \sum_{k=0}^{\infty} R_H(k \Delta H) \quad (3.49)$$

Esta expressão de $E(N)_1$ é formalmente idêntica à expressão (2.8) de $E(N)$ no caso das inspecções periódicas, que reescrevemos aqui na forma mais sugestiva, usando o índice 2

$$E(N)_2 = \sum_{k=0}^{\infty} R_T(k \Delta P) \quad (3.50)$$

em que a função de fiabilidade do sistema, em relação a T , se designou aqui por $R_T(t)$ e em que ΔP é o período de inspecção.

Note-se que o número médio de inspecções $E(N)_1$ admite também a mesma interpretação geométrica, em termos formais, que apresentámos aquando das inspecções periódicas: soma das ordenadas da "função de fiabilidade" de $H(t)$, tomadas na origem e nos "instantes de inspecção" $k \Delta H$, com $k=1, 2, 3, \dots$

Repare-se que é assim possível estabelecer uma primeira correspondência entre dois resultados relativos a duas políticas de inspecção diferentes, sendo uma a política de risco constante e a outra a política de inspecção periódica.

No caso particular da distribuição de T ser exponencial, com $R_T(t) = \exp(-Lt)$, obter-se-ia

$$E(N)_1 = 1 / [1 - \exp(-\Delta H)] \quad (3.51)$$

$$E(N)_2 = 1 / [1 - \exp(-L \Delta P)] \quad (3.52)$$

Sendo neste caso a política de risco constante uma política de inspeção periódica, então verificar-se-á (com $E(N)_1 = E(N)_2$)

$$\Delta P = \Delta H/L = \Delta H \cdot E(T) \quad (3.53)$$

Analisemos agora o que se passa com o tempo médio $E(D)$ de detecção da falha de acordo com a política de risco constante. Em termos genéricos, podemos ainda escrever

$$E(D) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k [F(t_k) - F(t_{k-1})] - E(T) \quad (3.54)$$

e, recordando a expressão (3.15)

$$E(D) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \exp(-k \Delta H) [\exp(\Delta H) - 1] - E(T) \quad (3.55)$$

com t_k dado por (3.16).

No caso particular da distribuição exponencial, fazendo $t_k = k \Delta P$, tem-se

$$E(D) = \Delta P / [1 - \exp(-\Delta H)] - E(T) \quad (3.56)$$

Tendo presente (3.53), a expressão anterior não é mais do que o tempo médio de detecção no caso das inspecções periódicas.

Repare-se, no entanto, que não é possível, pelo menos aparentemente, estabelecer uma correspondência formal entre as expressões do tempo médio de detecção relativas à política de risco constante e à política de inspecção periódica.

Contudo, tal já é possível se se definir um "tempo de detecção" D^* em termos da variável H . Assim, seja t um valor particular de T a que corresponde um valor h de H . Se a detecção da falha é feita em t_k , então tem-se

$$d = t_k - t, \quad t_k > t \quad (3.57)$$

$$d^* = k \Delta H - h, \quad k \Delta H > h \quad (3.58)$$

A partir desta última relação pode obter-se, já que $E(H)=1$

$$E(D^*)_1 = [\Delta H - 1 + \exp(-\Delta H)] / [1 - \exp(-\Delta H)] \quad (3.59)$$

$$= \Delta H E(N)_1 - E(H) \quad (3.60)$$

Ou seja, a relação (3.60) é agora formalmente idêntica à relação (2.17) no caso das inspecções periódicas que reescrevemos na forma

$$E(D)_2 = \Delta P E(N)_2 - E(T) \quad (3.61)$$

Desenvolvendo $\exp(-\Delta H)$ na expressão (3.59), obtem-se

$$E(D^*)_1 \approx \Delta H/2 \quad (3.62)$$

que é também formalmente idêntica a uma aproximação no caso das inspecções periódicas e que também reescrevemos

$$E(D)_2 \approx \Delta P/2 \quad (3.63)$$

Acentue-se desde já que a utilização da aproximação (3.62) nos vai permitir obter uma aproximação útil em termos práticos para ΔH , tal como (3.63) o havia permitido no caso de ΔP .

Por outro lado, tendo em conta as relações (3.60) e (3.62) pode escrever-se

$$\Delta H \approx E(H) / [E(N)_1 - 1/2] \quad (3.64)$$

Esta expressão, como é evidente, é também ela formalmente idêntica à seguinte expressão das inspecções periódicas

$$\Delta P \approx E(T) / [E(N)_2 - 1/2] \quad (3.65)$$

Na hipótese de se verificar $E(N)_1 = E(N)_2$, então tem-se

$$\Delta H \approx \Delta P/E(T) \quad (3.66)$$

No caso particular de T ser exponencial, com $E(T)=1/L$, obtém-se a relação (3.53) anterior.

Por fim, seguindo o mesmo processo usado por Nakagawa e Yasui (1979) para obter (2.38), também nesta política de risco constante é possível obter uma aproximação formalmente idêntica para ΔH :

$$\Delta H \approx [2rE(H)]^{1/2} = [2r]^{1/2} \quad (3.67)$$

Vale a pena acentuar que esta aproximação é de grande importância prática. De facto, por um lado, o seu cálculo é extremamente simples; por outro lado, a aproximação referida, analisada em termos de custos, é bastante boa, pelo menos em certos casos de interesse prático, conforme posteriormente veremos.

Esta aproximação, bem como outros resultados contidos neste ponto, foram inicialmente apresentados por Rodrigues Dias (1986b).

Em jeito de síntese final neste ponto, permita-se-nos realçar a correspondência que foi possível estabelecer entre resultados referentes à política de inspecção periódica e a uma política não periódica de risco constante. Neste contexto, poder-se-ia considerar esta política não periódica como sendo uma política periódica em termos da taxa cumulativa de risco $H(t)$.

Acentue-se, no entanto, que tal correspondência só foi possível trabalhando directamente com o incremento ΔH e não, como o fizeram outros autores, trabalhando com a probabilidade p .

Finalmente, permita-se-nos ainda realçar o facto de certas aproximações aqui consideradas para a política de risco constante poderem ser úteis nas aplicações práticas. Em particular, realce-se, tal como o fizeram Nakagawa e Yasui (1979) para o caso das inspecções periódicas, a aproximação (3.67), cuja validade e importância se irão analisar em diferentes situações.

3.3.4. O caso da distribuição uniforme. Comparação com a solução óptima do modelo de Barlow et al

Conforme já se referiu antes, no caso da distribuição uniforme com

$$f(t) = 1/a, \quad t \in [0, a] \quad (3.68)$$

$$h(t) = 1/(a-t) \quad (3.69)$$

Barlow et al (1963) mostraram que existe uma solução óptima, obedecendo os instantes de inspecção t_k à relação seguinte

$$t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1} - C_1/C_2 \quad (3.70)$$

Esta relação obtém-se a partir de (3.8), tendo presente que $E(T)$ é finita.

Os autores referidos mostraram ainda que é finito o número de inspecções, sendo os instantes de inspecção dados por

$$t_k = ka/n + k(n-k)C_1/(2C_2), \quad k=0, 1, 2, \dots, n \quad (3.71)$$

em que $t_n = a$ é o instante da última inspecção.

No caso particular da distribuição uniforme no intervalo $[0,100]$, com $C_1=2$ e $C_2=1$, verifica-se que o número óptimo de inspecções é $n=10$, obtendo-se a partir de (3.71) os seguintes instantes de inspecção:

$t_1=19$	$t_2=36$
$t_3=51$	$t_4=64$
$t_5=75$	$t_6=84$
$t_7=91$	$t_8=96$
$t_9=99$	$t_{10}=100$

Curiosamente, e este aspecto parece-nos de realçar, verifica-se que, de acordo com a solução aproximada relativa à política de risco constante de que vimos tratando, o número de inspecções poderá eventualmente ser superior a qualquer número finito, ao contrário do que antes acontecia.

De facto, tendo presente que

$$t_k = F^{-1}(1-\exp(-k \Delta H)) \quad (3.72)$$

obtem-se neste caso

$$t_k = a[1 - \exp(-k \Delta H)] \quad (3.73)$$

Como é óbvio, a expressão anterior mostra que os sucessivos instantes de inspeção t_k se aproximam cada vez mais de a , sem contudo se atingir o instante $t_k = a$, para k finito.

Porém, na prática, tal questão acabaria por não se pôr, já que, a partir de um determinado instante, teria que verificar-se

$$t_{k+1} - t_k > \epsilon, \quad \epsilon > 0 \quad (3.74)$$

sendo ϵ o intervalo de tempo a partir do qual não seria técnica e humanamente possível separar dois instantes consecutivos.

Na realidade, a partir de uma dada inspeção de ordem k , ter-se-ia

$$t_{k+1} - t_k = a \exp(-k \Delta H) [1 - \exp(-\Delta H)] \quad (3.75)$$

Voltando ao exemplo antes referido, com $E(T)=50$, $C_1=2$ e $C_2=1$, verifica-se que o valor de ΔH que minimiza $E(C)$ é dado por $\Delta H=.285$, a partir do qual se obtêm agora os seguintes resultados:

$$t_1=24.8$$

$$t_2=43.4$$

$$t_3=57.4$$

$$t_4=68.0$$

$$t_5=75.9$$

$$t_6=81.9$$

$$t_7=86.4$$

$$t_8=89.8$$

$$t_9=92.3$$

$$t_{10}=94.2$$

$$t_{11}=95.6$$

$$t_{12}=96.7$$

Como era de esperar, já que a taxa de risco correspondente à distribuição uniforme é crescente, verifica-se que os intervalos entre inspecções consecutivas vão decrescendo.

Note-se também, como curiosidade, que os primeiros instantes de inspecção nesta política, contrariamente a outros subsequentes, ocorrem antes dos correspondentes instantes de inspecção anteriormente apresentados relativos à solução de Barlow et al. De resto, esta mesma situação encontra-se já patente nos resultados apresentados por Tadikamalla (1979) a propósito da distribuição gama.

3.3.5. Comparação de Resultados Numéricos Relativos à
Política de Risco Constante e à Política
Periódica de Inspeção

A política de risco constante constitui uma boa aproximação no que concerne ao modelo de Barlow et al. De facto, basta ter em conta o título sugestivo "A Nearly Optimal Inspection Policy" de Munford e Shahani (1972). Assim, em vez de nos preocuparmos em comparar resultados relativos à política de risco constante com resultados relativos à solução óptima do modelo de Barlow et al., vamos antes comparar resultados relativos à política de risco constante com resultados relativos à política periódica de inspeção. O objectivo é ver até que ponto é que, para diferentes tipos de taxas de risco, as inspeções periódicas, em termos de custos, se afastam de uma solução quase óptima do modelo de Barlow et al.

Começamos por recordar que a condição de mínimo do custo total médio por ciclo $E(C)$ é dada por

$$r E'(N) + E'(D) = 0 \quad (3.76)$$

com $r=C_1/C_2$.

Tendo presentes as expressões de $E(N)$ e $E(D)$ no caso da política de risco constante, pode obter-se

$$E'(N) = -\exp(-\Delta H) / [1 - \exp(-\Delta H)]^2 \quad (3.77)$$

$$E'(D) = \exp(\Delta H) \sum_{k=1}^{\infty} t_k \exp(-k \Delta H) + \\ + [\exp(\Delta H) - 1] \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{dt_k}{d\Delta H} \exp(-k \Delta H) - k t_k \exp(-k \Delta H) \right] \quad (3.78)$$

com

$$t_k = F^{-1}[1 - \exp(-k \Delta H)] \quad (3.79)$$

$$\frac{dt_k}{d\Delta H} = k \exp(-k \Delta H) / f(t_k) \quad (3.80)$$

No caso da distribuição de Weibull, ter-se-á

$$t_k = A (k \Delta H)^{1/B} \quad (3.81)$$

$$f(t_k) = B (k \Delta H)^{(B-1)/B} \exp(-k \Delta H) / A \quad (3.82)$$

Substituindo (3.77) e (3.78) em (3.76), obtém-se então a condição a partir da qual é possível determinar ΔH que minimiza $E(C)$ no caso da política de risco constante.

No que diz respeito à política periódica de inspecção, já se fez o seu estudo no capítulo anterior.

Designemos por $E(C)_1$ e $E(C)_2$, respectivamente, os custos totais médios mínimos relativos à política de risco constante e à política periódica de inspecção.

O nosso objectivo é então agora comparar os seus respectivos valores em diferentes situações. Para isso, vamos determinar e

analisar os valores, em percentagem, do cociente

$$R_1 = [E(C)_2 - E(C)_1] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (3.83)$$

Deste modo, R_1 permite-nos comparar, em termos de custos, a política periódica de inspeção com a política de risco constante.

No Quadro 3.1, a título de exemplo, encontram-se presentes valores de R_1 relativos a diferentes tipos de taxas de risco.

A análise deste quadro permite-nos tirar as seguintes conclusões:

a) No caso da distribuição de Weibull, quanto mais a taxa de risco se afasta da taxa de risco constante mais se justifica, em termos de custos (e até de uma forma acentuada), a inspeção não periódica de sistemas;

b) No caso da distribuição de Hjorth, de tipo "bathtub", não se verifica um grande afastamento, em termos de custos, entre a política de risco constante e a política periódica;

c) Quanto maior é o valor de $r/E(T)$ maiores são os valores de R_1 , pelo que mais se justificam as inspeções não periódicas.

Em jeito de síntese global, poder-se-á dizer que as inspeções periódicas são muito cómodas do ponto de vista prático mas que, em termos de custos, podem ser altamente desaconselháveis, conforme revelam os valores de R_1 .

		r/E(T)	
Distribuição		.0125	.0500
	.7	2.0	2.3
	1.0	0	0
Weibull	2.0	7.9	9.8
B=	3.0	20.1	24.2
	4.0	32.4	38.3
	5.0	44.4	51.5
Hjorth		1.0	1.8

Quadro 3.1

Valores de R_1 relativos a diferentes tipos
de taxas de risco

A título de curiosidade, e até para justificar resultados qualitativos anteriormente referidos a propósito das distribuições de tipo "bathtub", apresentam-se no Quadro 3.2 os valores de Δt_k entre inspecções consecutivas, com

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (3.84)$$

para o caso da distribuição de Hjorth com $r/E(T)=.2$.

Como é evidente, os intervalos entre inspecções consecutivas começam por crescer, mantêm-se depois sensivelmente constantes, para finalmente diminuírem.

3.3.6. Soluções aproximadas para a política de risco constante

No capítulo sobre inspecções periódicas analisou-se a validade, em termos de custos, de uma solução aproximada obtida para o período de inspecção por Nakagawa e Yasui (1979), que recordamos

$$P_0^* = [2rE(T)]^{1/2} \quad (3.85)$$

Neste capítulo, num ponto anterior, estabeleceu-se uma

k	Δt_k
1	.71
2	1.18
3	1.83
4	2.46
5	2.80
6	2.81
7	2.67
8	2.49
9	2.31
10	2.16
11	2.02
12	1.91
13	1.81
14	1.72
15	1.64
16	1.57
17	1.51
18	1.45
19	1.41
20	1.36

Quadro 3.2

Valores de Δt_k entre inspecções consecutivas
no caso da distribuição de Hjorth com $r/E(T)=.2$

correspondência entre resultados da política de risco constante e da política periódica de inspeção. Em particular, considerou-se a aproximação para o acréscimo ΔH da taxa cumulativa de risco dada por

$$\Delta H^* = [2rE(H)]^{1/2} = (2r)^{1/2} \quad (3.86)$$

Vejamos agora a validade desta aproximação em termos de custos.

Designemos então por $E(C)_1$ o custo total médio mínimo correspondente à política de risco constante (para um valor otimizador ΔH) e designemos por $E(C)_1^*$ o custo total médio referente ao valor aproximado ΔH^* .

Para determinar e avaliar os erros relativos desta aproximação, consideremos o cociente

$$R_2 = [E(C)_1^* - E(C)_1] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (3.87)$$

No Quadro 3.3 apresentam-se diferentes valores de R_2 relativamente a diferentes situações.

Uma análise do referido quadro permite-nos tirar as conclusões seguintes:

a) Para a distribuição de Weibull em que a taxa de risco não se afaste de uma forma muito acentuada da taxa de risco constante (seja decrescente ou crescente), verifica-se que a aproximação referida pode ser considerada como uma boa aproximação;

Distribuição	r/E(T)	
	.0125	.0500
.7	.1	.4
1.0	.0	.1
Weibull 2.0	.6	.9
B= 3.0	2.8	4.0
4.0	6.0	8.2
5.0	9.7	12.7
7.0	17.6	21.7
Hjorth	13.0	16.0

Quadro 3.3

Valores de R_2 correspondentes a diferentes tipos de taxas de risco

b) No caso em que na distribuição de Weibull a taxa de risco é fortemente crescente e no caso da distribuição de Hjorth de tipo "bathtub", verifica-se que os erros relativos da aproximação são acentuados, em especial para maiores valores de $r/E(T)$, pelo que a sua utilização exige cautelas.

Em jeito de síntese, acentue-se então que a aproximação ΔH^* pode ser considerada, em certas situações práticas, como uma boa aproximação, em especial tendo em conta a facilidade da sua obtenção. No entanto, noutras situações, a sua utilização exige um cuidado prévio.

No Capítulo II sobre inspecções periódicas, depois de termos analisado a validade da aproximação P_0^* dada por (3.85), obtivemos e analisámos uma nova aproximação (quase óptima no caso da distribuição exponencial) para o período de inspecção dada por

$$P_0^{**} = [2rE(T)]^{1/2} / [1 + .234r^{1/2}] \quad (3.88)$$

com $r' = r/E(T)$.

Vejamos agora aqui a validade de uma aproximação correspondente em termos de ΔH , que vamos designar por ΔH^{**} e que é dada por

$$\Delta H^{**} = (2r)^{1/2} / [1 + .234r^{1/2}] \quad (3.89)$$

com $r' = r/E(H) = r$.

De uma forma análoga ao que se fez antes, designemos por $E(C)_1^{**}$ o custo total médio por ciclo correspondente à aproximação ΔH^{**} e por R_3 o cociente

$$R_3 = [E(C)_1^{**} - E(C)_1] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (3.90)$$

No Quadro 3.4 apresentam-se os respectivos valores de R_3 para diferentes situações.

Da análise do referido quadro podemos fazer ressaltar as seguintes conclusões:

a) No caso da distribuição de Weibull em que a taxa de risco não se afaste muito da taxa de risco constante, então esta aproximação pode considerar-se melhor que a anterior, sendo quase óptima;

b) No caso em que na distribuição de Weibull a taxa de risco é fortemente crescente e no caso da distribuição de Hjorth, verifica-se que esta aproximação continua a não ser uma boa aproximação (sendo, em relação à aproximação anterior, pior num caso e melhor no outro).

		r/E(T)	
Distribuição		.0125	.0500
	.7	.0	.1
	1.0	.0	.0
Weibull	2.0	.9	1.6
B=	3.0	3.4	5.4
	4.0	6.9	10.1
	5.0	10.8	15.1
	7.0	19.0	24.9
Hjorth		10.9	11.4

Quadro 3.4

Valores de R_3 correspondentes a diferentes
tipos de taxas de risco

CAPÍTULO IV

POLÍTICA NÃO PERIÓDICA DE INSPECÇÃO REDUTÍVEL A UMA POLÍTICA PERIÓDICA DE INSPECÇÃO QUANDO O TEMPO DE VIDA É EXPONENCIAL

4.1. INTRODUÇÃO

Nos dois capítulos anteriores estudámos políticas periódicas e não periódicas de inspecção de sistemas. Em particular, no capítulo anterior, referiu-se que no modelo de Barlow et al, com inspecções perfeitas, e no caso em que a distribuição do tempo de vida é exponencial, então a solução óptima consiste em inspeccionar o sistema periodicamente, satisfazendo o período P à equação

$$\exp(LP) - LP - 1 - LC_1/C_2 = 0 \quad (4.1)$$

Neste capítulo, considerando ainda a distribuição do tempo de vida como sendo exponencial, considerar-se-á, no entanto, que existe uma probabilidade inferior a 1 de a falha ser detectada numa inspecção

posterior, pelo que se está perante inspecções imperfeitas. Este modelo (que curiosamente conduz a inspecções não periódicas) foi tratado por Sengupta (1982), razão pela qual o designaremos por modelo de Sengupta ou, então, por modelo 1, já que posteriormente introduziremos um outro modelo, então designado por modelo 2.

Em termos esquemáticos, este capítulo é constituído pelos seguintes pontos essenciais:

- a) Especificação dos pressupostos em que assenta o modelo de inspecção considerado por Sengupta (1982), obtendo-se as equações que permitem determinar a sua solução óptima;
- b) Obtenção de um conjunto de resultados, quer no que diz respeito aos intervalos de tempo entre inspecções, quer no que diz respeito aos custos, avaliando-se a influência do factor erro associado à presença das inspecções imperfeitas;
- c) Especificação dos pressupostos em que assenta um modelo de inspecção alternativo, designado por modelo 2, obtendo-se e discutindo-se a respectiva solução óptima;
- d) Apresentação e demonstração de uma propriedade que permite estabelecer uma equivalência, em termos de custos, entre o modelo 1 e o modelo 2;
- e) Análise detalhada de um caso em que não é possível estabelecer tal equivalência entre os dois modelos;
- f) Interpretação geométrica, no modelo 1 (como consequência da equivalência dos dois modelos), do número médio de inspecções e do tempo médio de detecção;
- g) Apresentação de uma política de inspecção perfeita

periódica com atraso correspondente à solução ótima de uma política de inspecção imperfeita não periódica, introduzindo-se uma interpretação interessante;

h) Apresentação do mínimo de uma política de inspecção imperfeita não periódica como sendo um mínimo condicionado de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso;

i) Apresentação de uma política de inspecção imperfeita não periódica correspondente à solução ótima de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso, introduzindo-se uma interpretação interessante;

j) Apresentação do mínimo de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso como sendo um mínimo condicionado de uma política de inspecção imperfeita não periódica;

l) Comparação, em termos de custos, da solução ótima do modelo 1 com a solução ótima de uma política periódica de inspecção;

m) Comparação, em termos de custos, da solução ótima do modelo 1 com duas soluções aproximadas de uma política periódica de inspecção.

4.2. O MODELO DE SENGUPTA E RESPECTIVA SOLUÇÃO

4.2.1. O modelo

Em síntese, este modelo de Sengupta (1982), que passaremos a partir daqui a designar também por modelo 1, até porque Sengupta considerou outros modelos relativos a outras situações, pode então formular-se do modo seguinte:

- a) O sistema tem apenas dois estados, sendo um de bom e outro de mau funcionamento, que poderemos representar por 1 e 0;
- b) O estado de mau funcionamento, resultante do aparecimento de uma falha, é apenas detectável por inspecções;
- c) O tempo de vida do sistema tem uma distribuição exponencial com função densidade de probabilidade $f(t) = L \exp(-Lt)$;
- d) Considera-se que as inspecções não interferem no estado do sistema e que são de duração nula;
- e) Considera-se que existe uma probabilidade w inferior (ou igual) a 1 de detectar a falha numa inspecção posterior, pelo que as inspecções se podem considerar imperfeitas;
- f) Existe um custo por cada inspecção feita ao sistema e um custo por cada unidade de tempo de mau funcionamento não detectado;
- g) Considera-se que um ciclo começa com o sistema em estado de

novo e acaba no instante em que a falha é detectada. A partir daí considera-se um processo de renovamento.

Sengupta (1982) mostrou que, contrariamente ao que poderia supor-se (veja-se o título significativo do seu artigo "An Exponential Riddle"), a solução óptima do problema já não é inspeccionar o sistema periodicamente, mas sim inspeccioná-lo nos instantes

$$t_k = T_0 + kP, \quad k=1,2,3,\dots \quad (4.2)$$

Sengupta (1982) apresentou o seguinte sistema de equações para obter T_0 e P (à parte alterações de pormenor devidas à designação das variáveis):

$$C_2 - L(C_1 + C_2 P) \exp[-L(T_0 + P)] / [1 - \exp(-LP)] = 0 \quad (4.3)$$

$$(1-w)/w - \exp(-LP) / [1 - \exp(-LP)] + C_2 / [L(C_1 + C_2 P)] = 0 \quad (4.4)$$

4.2.2. Obtenção da solução óptima

Representando, respectivamente, por N , D e C o número de inspecções, o tempo de detecção (intervalo de tempo entre a falha e a sua detecção) e o custo total durante um ciclo, então o custo total médio por ciclo $E(C)$ é dado por

$$E(C) = C_1 E(N) + C_2 E(D) \quad (4.5)$$

em que, recorde-se, C_1 é o custo de cada inspecção e C_2 o custo por unidade de tempo de mau funcionamento não detectado.

Partindo do resultado de Sengupta (1982) segundo o qual a solução óptima consiste em inspecionar o sistema nos instantes t_k definidos pela expressão (4.2), então pode escrever-se

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{T_0+kP}^{T_0+(k+1)P} f(t) dt + 1/w \quad (4.6)$$

$$E(D) = \int_0^{T_0+P} (T_0+P-t) f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{T_0+kP}^{T_0+(k+1)P} [T_0+(k+1)P-t] f(t) dt + (1/w-1)P \quad (4.7)$$

em que $f(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de vida T do sistema.

No caso da distribuição exponencial, em que $f(t) = L \exp(-Lt)$, obtêm-se as expressões:

$$E(N) = \exp[-L(T_0+P)] / [1-\exp(-LP)] + 1/w \quad (4.8)$$

$$E(D) = T_0 + P \exp[-L(T_0+P)] / [1-\exp(-LP)] - E(T) + P/w \quad (4.9)$$

Tendo em conta (4.8), $E(D)$ pode escrever-se

$$E(D) = P E(N) + T_0 - E(T) \quad (4.10)$$

Os valores de T_0 e P que minimizam $E(C)$ verificam as condições:

$$\frac{\partial E(C)}{\partial T_0} = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial E(C)}{\partial P} = 0 \quad (4.12)$$

A partir de (4.11) obtém-se

$$C_2 - L \exp[-L(T_0+P)] \cdot (C_1+C_2P) / [1-\exp(-LP)] = 0 \quad (4.13)$$

Esta é a equação (4.3) de Sengupta (1982) antes apresentada.

Fazendo $r=C_1/C_2$, a partir da expressão anterior obtém-se facilmente a seguinte expressão mais simples

$$\exp(LT_0) = L(r+P) / [\exp(LP) - 1] \quad (4.14)$$

e ainda, como é evidente

$$T_0 = \log \{ L(r+P) / [\exp(LP) - 1] \} / L \quad (4.15)$$

Esta expressão tem a vantagem de permitir obter explicitamente T_0 em função das outras grandezas intervenientes e, em particular, de P .



Por outro lado, a partir de (4.12), obtém-se

$$\begin{aligned}
 & -C_1 Lw + C_2 w [1 - LP - \exp(-LP)] + \\
 & + C_2 \exp(LT_0) [\exp(LP) - 2 + \exp(-LP)] = 0 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Utilizando a relação (4.14), pode-se obter

$$-(r+P) + [1 - \exp(-LP)] \cdot [1/L + (r+P)/w] = 0 \quad (4.17)$$

Esta é uma equação equivalente à (4.4) de Sengupta (1982).

Deste modo, a partir de (4.17), pode calcular-se o valor de P que minimiza $E(C)$ e, a partir dele, recorrendo a (4.15), pode obter-se o correspondente valor de T_0 . Repare-se que estes valores não dependem dos valores individuais de C_1 e de C_2 mas apenas do seu cociente $r=C_1/C_2$, o que é um aspecto importante. Recorde-se que já Barlow et al (1963), por exemplo, haviam evidenciado este facto para o caso em que $w=1$.

Convém desde já aqui referir que, para efeitos de minimização, o par de equações (4.13) e (4.17) apresentadas por Sengupta (1982) pode ser substituído pelo seguinte par, sendo a primeira a equação (4.14) antes apresentada:

$$\exp(LT_0) = L(r+P) / [\exp(LP) - 1] \quad (4.18)$$

$$\exp(LT_0) = w \exp(-LP) / [\exp(-LP) + w - 1] \quad (4.19)$$

Repare-se que substituindo o primeiro membro de (4.19) pelo segundo membro de (4.18) se obtém a condição (4.17).

A curiosidade do par de equações (4.18) e (4.19), para além de terem o mesmo primeiro membro, é o facto de no segundo membro de (4.18) aparecer apenas o cociente r entre os custos C_1 e C_2 , e o facto de no segundo membro de (4.19) aparecer apenas a probabilidade w .

A partir da equação (4.19) pode concluir-se de imediato que no caso particular em que $w=1$ se verifica $T_0=0$, qualquer que seja o valor de r e P .

4.2.3. Análise e discussão de resultados

Resolvendo em ordem a T_0 e P o par de equações (4.18) e (4.19), é possível obter, fazendo $L=1$ e para diferentes valores de r e de w , o Quadro 4.1 e o Quadro 4.2 referentes às grandezas S_1 e S_2 definidas do modo seguinte:

$$S_1 = (P - P^*) / P^* \cdot 100 \% \quad (4.20)$$

$$S_2 = [(P + T_0) - P^*] / P^* \cdot 100 \% \quad (4.21)$$

$$= S_1 + (T_0 / P^*) \cdot 100 \%$$

em que, para um dado valor de r , $P = P^*$ quando $w=1$ ($T_0=0$).

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	0	0	0	0	0
	.9	-11.0	-11.6	-12.5	-13.7	-15.6
	.8	-20.8	-21.9	-23.3	-25.4	-28.3
	.7	-29.9	-31.2	-33.1	-35.7	-39.2
	.6	-38.5	-40.0	-42.2	-45.1	-48.9
	.5	-46.7	-48.5	-50.8	-53.9	-57.9

Quadro 4.1

Valores de S_1 para diferentes valores de r e de w

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	0	0	0	0	0
	.9	.6	.6	.7	.7	.8
	.8	2.3	2.4	2.6	2.8	3.0
	.7	5.4	5.6	5.8	6.2	6.7
	.6	10.0	10.3	10.7	11.3	11.9
	.5	16.8	17.2	17.8	18.6	19.3

Quadro 4.2

Valores de S_2 para diferentes valores de r e de w

Uma análise do Quadro 4.1 permite-nos tirar com facilidade a conclusão de que, para um dado valor de r , e em especial quando r é elevado, o valor de P diminui rapidamente quando w diminui. Ou seja, à medida que a probabilidade de detectar a falha diminui, diminui rapidamente o intervalo de tempo entre inspeções consecutivas (a partir da segunda).

A partir do Quadro 4.2 podemos concluir que, para um dado valor de r , o intervalo de tempo até à primeira inspeção T_0+P aumenta à medida que w diminui. Este facto, tendo em conta a conclusão anterior relativa ao Quadro 4.1, permite-nos afirmar que o valor de T_0 cresce mais rapidamente do que P decresce em relação a P^* .

Em síntese, como aspectos importantes a realçar, pode-se dizer que, para um dado valor de r , à medida que a probabilidade de detectar a falha w diminui, se verificam 2 fenómenos de natureza oposta: por um lado, verifica-se um aumento no intervalo de tempo até à primeira inspeção; por outro lado, verifica-se uma redução no intervalo de tempo entre inspeções subsequentes. Em última análise, pode pensar-se num efeito de compensação dos dois fenómenos.

Finalmente, apresentam-se no Quadro 4.3 os valores do cociente S_3 definido pela expressão:

$$S_3 = [E(C)_1 - E(C)_1^*] / E(C)_1^* \cdot 100 \% \quad (4.22)$$

em que $E(C)_1$ é o custo mínimo de inspeção do sistema para um dado valor de w e de r e em que $E(C)_1 = E(C)_1^*$ quando $w=1$.

Desde logo se pode tirar uma conclusão evidente e importante (Rodrigues Dias (1985)): à medida que w diminui, para um dado r , o

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	0	0	0	0	0
	.9	10.6	10.6	10.6	10.6	10.6
	.8	22.5	22.5	22.6	22.6	22.7
	.7	36.5	36.5	36.7	36.8	37.1
	.6	53.2	53.5	53.8	54.3	54.9
	.5	74.3	74.8	75.6	76.6	78.1

Quadro 4.3

Valores de S_3 para diferentes valores de r e de w

valor do custo mínimo $E(C)_1$ aumenta rapidamente. Ou seja, por outras palavras, o custo mínimo é particularmente sensível à presença do factor erro nas inspecções. Este aspecto torna incompreensível, tal como está escrita, a parte final do artigo de Sengupta (1982) que se transcreve: "In conclusion, we state that the expected cost is not particularly sensitive to the value of w (...). This would seem to imply that it may not be worth while to spend too much effort to make the inspections error-free ". (De facto, Sengupta deixa entender que não valeria a pena, em termos de custos, fazer grandes esforços no sentido de tornar as inspecções livres de erro, o que não é correcto.).

Por outro lado, uma outra conclusão importante se revela: o valor de S_3 , para um dado w , é praticamente insensível ao valor de r , embora ambos apresentem o mesmo sentido de variação.

4.3. UM MODELO ALTERNATIVO E RESPECTIVA SOLUÇÃO

4.3.1. O modelo

Considere-se, tal como no modelo anterior (de Sengupta), que passaremos a designar por modelo 1, que o tempo de vida T do sistema segue ainda a distribuição exponencial, com $R(t)=\exp(-Lt)$, e

que C_1 , C_2 , C , N e D têm o significado anteriormente apresentado.

Porém, contrariamente ao modelo 1, formulemos agora o modelo 2 com base nas seguintes hipóteses alternativas:

a) A probabilidade de detectar a falha na primeira inspecção posterior ao momento da sua ocorrência é igual à unidade ($w=1$). Considera-se, neste caso, que se trata de inspecções perfeitas.

b) Após cada inspecção existe um atraso constante T_0 (delay) entre o instante em que a inspecção é feita (que supomos de duração nula) e o instante em que é conhecido o respectivo resultado.

c) As inspecções são feitas periodicamente, a partir do instante inicial $t=0$, com um período P .

Note-se que este modelo apresenta um inegável interesse prático, até pela sua simplicidade. De facto, os pressupostos em que o modelo assenta podem ajustar-se razoavelmente bem a muitas situações concretas, como será o caso de certas análises laboratoriais, de certos exames médicos, etc.

Por outro lado, parece evidente que na prática o atraso T_0 será normalmente inferior ao período P entre inspecções, razão pela qual daremos a esta situação maior ênfase na respectiva análise.

4.3.2. Obtenção da solução óptima. Análise de resultados

Considerando que os índices 1 e 2 se referem, respectivamente, aos modelos 1 e 2, então para o modelo 2 agora em análise, no caso da distribuição exponencial, podem escrever-se as seguintes expressões, em que $\text{INT}()$ designa a função "inteiro":

$$E(N)_2 = 1 / [1 - \exp(-LP)] + \text{INT}(T_0/P) \quad (4.23)$$

$$E(D)_2 = P / [1 - \exp(-LP)] - E(T) + T_0 \quad (4.24)$$

O custo total médio por ciclo é dado por

$$E(C)_2 = C_1 E(N)_2 + C_2 E(D)_2 \quad (4.25)$$

Note-se que, genericamente, já não é possível obter para o modelo 2 uma expressão para $E(D)_2$ análoga à expressão (4.10) do modelo 1, a não ser no caso em que se tem $T_0 < P$.

Repare-se, por outro lado, que enquanto o tempo médio de detecção $E(D)_2$ varia de uma forma contínua em função de T_0 , já o mesmo não acontece com o número médio de inspecções $E(N)_2$ que varia de uma forma descontínua, devido à presença da função $\text{INT}()$ em (4.23). Deste facto resulta que, para um determinado valor constante de T_0 , a função $E(C)_2$ vai variar de uma forma descontínua em função

de P . Porém, logo que se verifique $T_0 < P$, as descontinuidades desaparecem.

Como é bem conhecido, o mínimo de $E(C)_2$, para um dado valor de T_0 , obtém-se para um valor de P onde a derivada se anula, ou então para um valor de P onde a derivada não é definida (pontos de descontinuidade de $E(C)_2$).

No primeiro caso, verifica-se com facilidade que o valor de P optimizante é o que satisfaz a equação (4.1), obtida nessa altura para um valor de $T_0=0$. De facto, basta ter em conta que entre esta situação e a que corresponde a um valor de $T_0 \neq 0$, o valor de $E(C)_2$ varia de uma constante (dada precisamente por $C_1 \text{INT}(T_0/P) + C_2 T_0$), o que é irrelevante ao derivar $E(C)_2$ em ordem a P , ou seja, ao minimizar $E(C)_2$.

No segundo caso, o mínimo de $E(C)_2$ obter-se-ia, como limite, à direita de um valor P (ou seja, em P^+) onde a função $\text{INT}(T_0/P)$ apresente uma descontinuidade. Repare-se que esta descontinuidade associada ao mínimo tanto pode ser a última da função $E(C)_2$ (correspondente à situação $P=T_0$) como uma descontinuidade anterior (correspondente à situação $P < T_0$).

Estas conclusões tornam-se evidentes a partir de uma simples análise da Fig. 4.1, onde se apresenta a evolução de $E(C)_2$ em função de P , para diferentes valores de T_0 e para $L=1$, $C_1=.125$ e $C_2=1$. Figuras análogas se obteriam para valores diferentes de r .

Uma maneira simples e objectiva de concluir se o mínimo ocorre no ponto onde a derivada de $E(C)_2$ se anula é comparar o valor de T_0 com o valor de P que verifica a equação (4.1). De facto, pode afirmar-se que se o valor de T_0 for inferior ao valor de P que

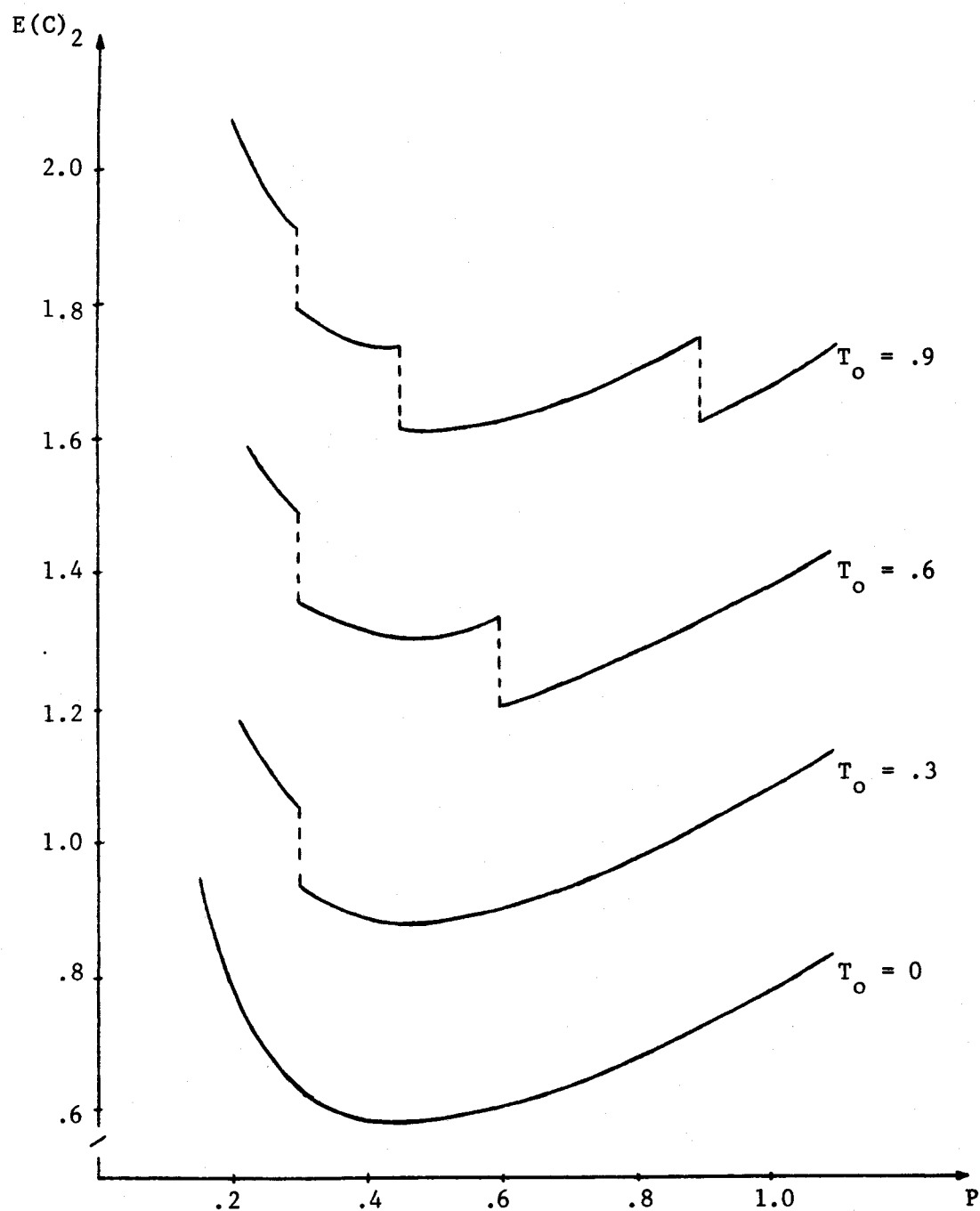


Fig. 4.1

Evolução de $E(C)_2$ em função de P , para diferentes valores de T_0

verifica a equação (4.1), então o mínimo de $E(C)_2$ ocorre para esse valor de P . Caso contrário, o mínimo tanto pode ocorrer aí como, em termos de limite, à direita de um ponto de descontinuidade da função.

A Fig. 4.1 é ilustrativa a este respeito.

Como curiosidade, pode referir-se que, para um dado valor de r , existe um valor de T_0 para o qual existem 2 valores de P que conduzem ao mesmo valor mínimo de $E(C)_2$: o que verifica a relação (4.1) e $P=T_0^+$ (limite lateral direito). Ou seja, por outras palavras, para um dado valor de r e um dado valor de T_0 , o mínimo de $E(C)_2$ pode não ser único.

4.4. EQUIVALÊNCIA DOS DOIS MODELOS E RESPECTIVA DISCUSSÃO

4.4.1. Equivalência dos 2 modelos

Considerando que no modelo 1 e no modelo 2 são iguais os valores de T_0 e P , bem como os custos C_1 e C_2 , então verifica-se a propriedade importante que a seguir se apresenta, a partir da qual iremos obter resultados interessantes:

PROPRIEDADE:

Sendo $T_0 < P$, a condição necessária e suficiente para que os custos totais médios por ciclo sejam iguais no modelo 1 e no modelo 2 é que se verifique a seguinte relação

$$\exp(LT_0) = w / [1 - (1-w) \exp(LP)] \quad (4.26)$$

DEMONSTRAÇÃO :

Antes de mais, convém recordar que esta condição é a equação (4.19) antes apresentada aquando da minimização do modelo 1. Como é

evidente, de todos os pares (T_0, P) que a verificam apenas um conduz ao mínimo do referido modelo.

Por outro lado, convém assinalar que, de acordo com esta relação, o valor de T_0 pode ser inferior, igual ou superior ao correspondente valor de P , dependendo do valor de w . Conforme se verá adiante, esta propriedade é apenas válida quando se verifica $T_0 < P$, o que em termos práticos é a situação normal, tal como já se referiu.

Começemos, então, por mostrar que a relação (4.26) implica a igualdade de $E(C)_1$ e de $E(C)_2$.

De facto, os custos $E(C)_1$ e $E(C)_2$ dos 2 modelos serão iguais desde que se verifiquem simultaneamente as igualdades:

$$E(N)_1 = E(N)_2 \quad (4.27)$$

$$E(D)_1 = E(D)_2 \quad (4.28)$$

Ora, tendo em conta a relação (4.8) relativa ao modelo 1 e considerando na relação (4.23) do modelo 2 a condição antes assinalada $T_0 < P$, então ter-se-á $E(N)_1 = E(N)_2$ desde que se verifique

$$\exp[-L(T_0+P)] / [1-\exp(-LP)] + 1/w = 1 / [1-\exp(-LP)] \quad (4.29)$$

ou seja, fazendo algumas operações elementares, desde que se verifique a condição (4.26) antes apresentada.

Por outro lado, no que concerne agora à equação (4.28), tendo em conta a relação (4.10) do modelo 1 e as relações (4.23) e (4.24) do modelo 2, é evidente que, verificando-se (4.26), e, portanto, a

igualdade de $E(N)_1$ e $E(N)_2$, a referida equação (4.28) se verifica também.

Em síntese, por outras palavras, a condição (4.26), que não é mais do que a igualdade do número médio de inspecções nos 2 modelos quando $T_0 < P$, é uma condição suficiente para que se verifique a igualdade dos custos totais médios por ciclo.

Vejamos agora o caso em que a igualdade dos custos $E(C)_1$ e $E(C)_2$ implica a relação (4.26).

De facto, sendo $E(C)_1 = E(C)_2$, pode escrever-se, com $r = C_1/C_2$:

$$r [E(N)_1 - E(N)_2] + [E(D)_1 - E(D)_2] = 0 \quad (4.30)$$

Fazendo

$$E(N)_1 - E(N)_2 = K_1 \quad (4.31)$$

$$E(D)_1 - E(D)_2 = K_2 \quad (4.32)$$

pode ainda escrever-se

$$rK_1 + K_2 = 0 \quad (4.33)$$

Comecemos por mostrar que esta igualdade só é satisfeita se $K_1 = 0$. Para tal, por redução ao absurdo, admitamos que $K_1 \neq 0$. Nesse caso, admitindo que $r \neq 0$ (o que na prática é normal), ter-se-ia

$$E(D)_1 - E(D)_2 = -rK_1 \quad (4.34)$$

Recordando as relações (4.10), (4.31) e (4.24), poder-se-ia ainda escrever

$$\begin{aligned} E(D)_1 &= P E(N)_1 - E(T) + T_0 \\ &= P E(N)_2 + P K_1 - E(T) + T_0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$E(D)_2 = P E(N)_2 - E(T) + T_0 \quad (4.36)$$

de que resulta

$$E(D)_1 - E(D)_2 = P K_1 \quad (4.37)$$

Ora, a partir de (4.34) e de (4.37), obter-se-ia $P=-r$, o que é um absurdo, atendendo a que r e P apenas podem tomar valores positivos.

Sendo então $K_1=0$, é evidente que a igualdade de custos implica a relação (4.26), pois que nesse caso se verifica a igualdade de $E(N)_1$ e de $E(N)_2$.

Acentue-se, por fim, que a propriedade que acaba de demonstrar-se é apenas válida no caso em que $T_0 < P$. De facto, sendo $T_0 > P$, as igualdades (4.27) e (4.28) não seriam satisfeitas ao mesmo tempo.

4.4.2. Caso em que não existe equivalência

Viu-se no ponto anterior que a equivalência dos dois modelos, em termos de custos, pressupunha, por um lado, que os valores T_0 e P verificassem a condição (4.26) e, por outro lado, que fosse $T_0 < P$.

Para um valor de $w < 1$ (já que para $w=1$ se tem $T_0=0$, qualquer que seja P), e de acordo com a condição (4.26), verifica-se que T_0 e P têm o mesmo sentido de variação, ou seja, são ambos crescentes ou ambos decrescentes, conforme se pode facilmente constatar através da dita condição (4.26) reescrita na forma seguinte

$$\exp(LP) (1/w-1) = 1/w - \exp(-LT_0) \quad (4.38)$$

Numa situação destas, pode acontecer que T_0 , para um dado valor de w , comece por tomar valores inferiores aos correspondentes valores de P , mas que, a partir de uma determinada altura, se verifique o contrário. A título de exemplo, é o que se constata no Quadro 4.4 para $w=.7$. A partir de um determinado valor de P tem-se $T_0 > P$, pelo que deixa de funcionar então a equivalência dos 2 modelos.

Porém, pode acontecer que, para certos valores de w , se verifique sempre $T_0 > P$, caso em que os custos totais médios por ciclo nos 2 modelos nunca serão iguais. A título ainda de exemplo, é o que se verifica no Quadro 4.4 para $w=.4$.

A questão importante que então se põe é a de saber em que

w			
.7		.4	
P	T ₀	P	T ₀
.3	.16	.05	.08
.4	.24	.10	.17
.5	.33	.15	.28
.6	.43	.20	.40
.7	.57	.25	.56
.8	.74	.30	.74
.9	.98	.35	.99
1.0	1.33	.40	1.34
1.1	1.96	.45	1.91
1.2	5.17	.50	3.61

Quadro 4.4

Evolução dos valores de P e T₀, satisfazendo a equação (4.26), para w=.7 e w=.4

condições é que poderá não existir equivalência entre os dois modelos.

Uma maneira simples de atacar a questão, embora no início ela não se tenha revelado evidente, é fazer $T_0=P$ na condição (4.26) e analisar os resultados a que se chega. Assim, fazendo

$$\exp(LT_0) = \exp(LP) = y \quad (4.39)$$

obtem-se a equação

$$y^2(1-w) - y + w = 0 \quad (4.40)$$

Resolvendo em ordem a y , obtem-se

$$y = 1 \quad (4.41)$$

ou então

$$y = w/(1-w) \quad (4.42)$$

A partir do resultado obtido (4.41), tendo em conta (4.39), conclui-se que a condição (4.26) é satisfeita para $T_0=P=0$, qualquer que seja o valor de w . Note-se, no entanto, que esta situação não tem qualquer interesse prático, já que corresponderia a fazer sucessivas inspecções no instante $t=0$, o que seria um absurdo. Para além disto, repare-se que não se verificaria a condição $T_0 < P$.

Analisemos agora o resultado (4.42). Para uma melhor visualização, elaborou-se a Fig. 4.2 em que se representou, por um

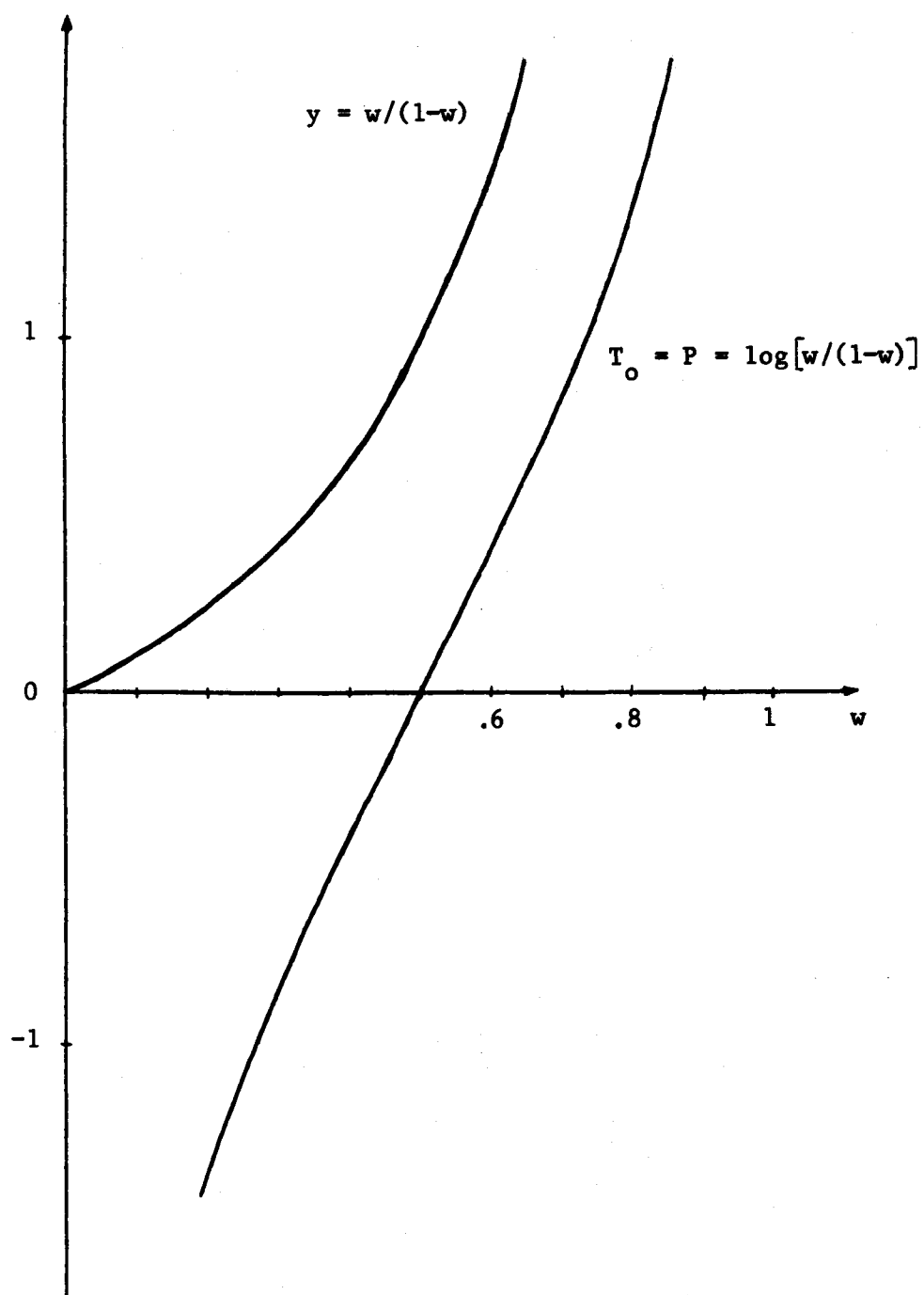


Fig. 4.2

Representação da função $y = w/(1-w)$ e da função $T_0 = P = \log[w/(1-w)]$

lado, a função $y=w/(1-w)$, e, por outro, a função $T_0=P=\log[w/(1-w)]/L$, tendo-se considerado, por simplicidade, $L=1$.

Como é evidente agora, podem tirar-se as 2 seguintes conclusões importantes:

a) Para $w > .5$, de entre os pares de valores (T_0, P) que satisfazem a condição (4.26), existe um em que os respectivos valores de T_0 e P são iguais e positivos. O que significa, atendendo (conforme já vimos) a que T_0 e P satisfazendo (4.26) têm o mesmo sentido de variação, que de um lado da situação $T_0=P$ se terá $T_0 < P$ e, do outro lado, se terá $T_0 > P$. Ou seja, em síntese: para $w > .5$, é possível a equivalência dos dois modelos já que se pode verificar a condição $T_0 < P$.

b) Para $w < .5$, não existe nenhum par de valores positivos $T_0=P$ que verifique a condição (4.26), pelo que terá que se verificar sempre ou a situação $T_0 < P$ ou a situação $T_0 > P$. Repare-se que a exigência de T_0 e P tomarem valores positivos não significa aqui mais do que dar sentido físico e prático aos modelos de inspecção em estudo. Em face da situação a que se chegou, apenas uma das duas conclusões é então verdadeira: ou todos os pares de valores (T_0, P) satisfazendo (4.26) conduzem a uma equivalência dos dois modelos, ou, em alternativa, para $w < .5$, nunca essa equivalência é possível.

Veamos que é esta última a conclusão verdadeira. Para isso, comecemos por constatar que para $w=.5$ se tem $T_0=P=0$, o que não só não

apresenta qualquer interesse prático como também não se verifica $T_0 < P$. Vamos então agora mostrar que, sendo $w < .5$, os valores de T_0 e P obedecendo a (4.26) verificam sempre a condição $T_0 > P$. De facto, partindo da equação (4.38) e escrevendo $1/w = 2 + \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, obtém-se a partir do desenvolvimento de $\exp(LP)$ e de $\exp(-LT_0)$ em fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon) [1 + LP + (LP)^2/2 + (LP)^3/6 + \dots] &= \\ = 2 + \varepsilon - [1 - LT_0 + (LT_0)^2/2 - (LT_0)^3/6 + \dots] & \quad (4.43) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} LP + (LP)^2/2 + (LP)^3/6 + \dots + \varepsilon [LP + (LP)^2/2 + \dots] &= \\ = LT_0 - (LT_0)^2/2 + (LT_0)^3/6 - \dots & \quad (4.44) \end{aligned}$$

Uma análise desta igualdade permite concluir (basta comparar parcelas correspondentes dos 2 membros) que o valor de P não pode ser superior ao valor de T_0 , pelo que terá que se verificar a condição $T_0 > P$, que era justamente o que se queria provar.

Em jeito de síntese, foi elaborada a Fig. 4.3 com as curvas representativas da condição (4.26), para diferentes valores de w , tendo-se expresso T_0 em função de P . Por simplicidade fez-se $L=1$. Nesta figura encontra-se representada a recta $T_0=P$.

Talvez valha a pena chamar ainda a atenção para os seguintes aspectos:

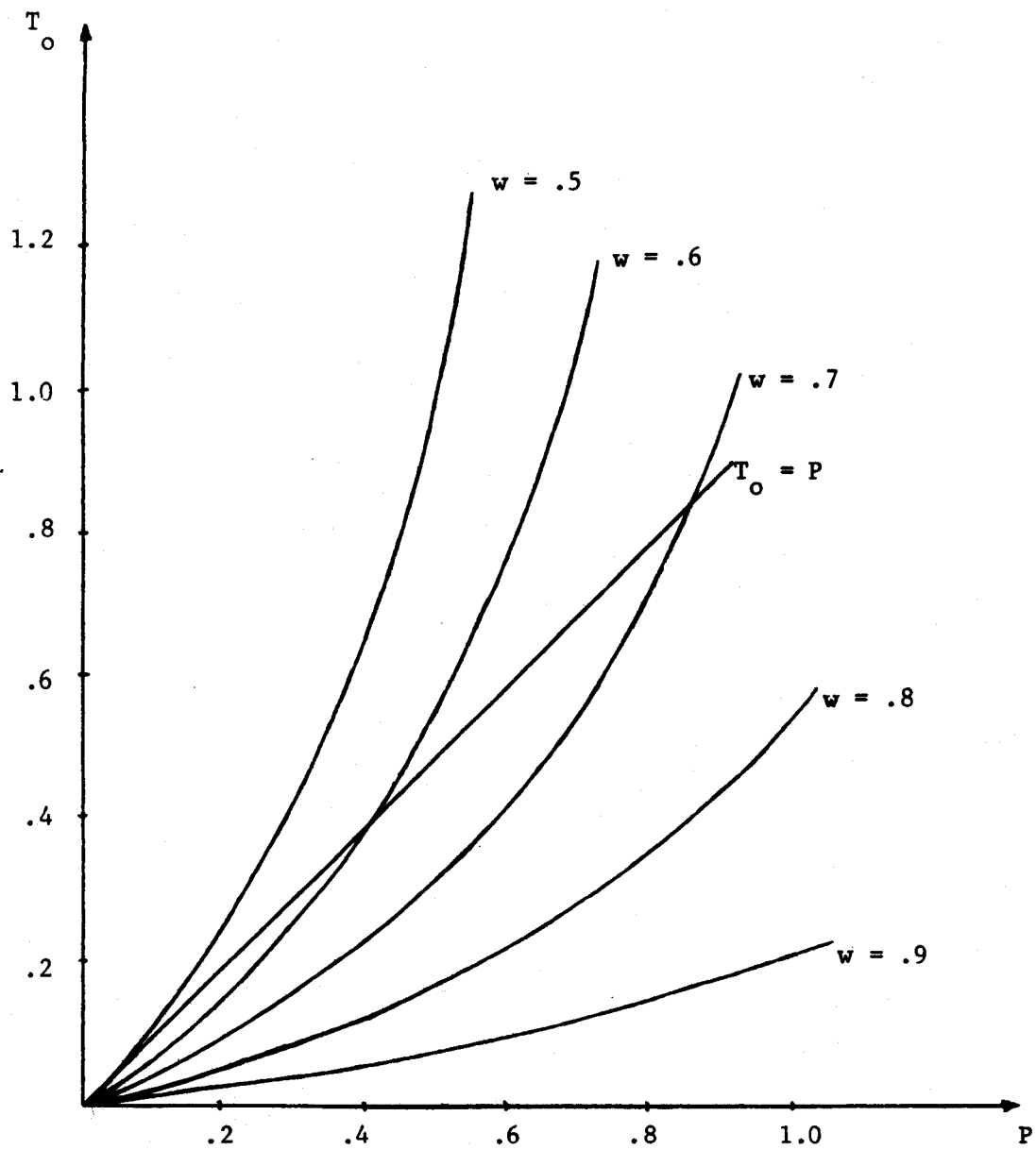


Fig. 4.3

Representação da condição (4.26) na forma $T_0 = \log(w/A)/L$, com $A = 1 - (1-w) \exp(LP)$, para diferentes valores de w e $L = 1$

- a) O eixo das abcissas corresponde a $w=1$, com $T_0=0$, qualquer que seja o valor de P .
- b) À medida que w vai diminuindo, as curvas correspondentes vão-se aproximando cada vez mais do eixo das ordenadas.
- c) À medida que w varia de 1 até .5, verifica-se que os pontos de intersecção das respectivas curvas com a recta $T_0=P$ se aproximam cada vez mais da origem.

4.5. CONSEQUÊNCIAS DA EQUIVALÊNCIA DOS DOIS MODELOS

4.5.1. Uma interpretação geométrica

Em consequência da propriedade anterior, e adoptando uma interpretação simples e sugestiva análoga àquela que foi apresentada em Rodrigues Dias (1983a), podemos agora afirmar o seguinte:

- a) Tendo em conta que no modelo 2 se tem, para $T_0 < P$

$$E(N)_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-LkP) = \sum_{k=0}^{\infty} R(kP) \quad (4.45)$$

então, verificando-se (4.26), o número médio de inspecções no

equivalente modelo 1 pode ser dado geometricamente pela soma das ordenadas da curva da função de fiabilidade $R(t)$ nos pontos de abcissa kP , com $k=0,1,2,\dots$. Repare-se que, se não fosse a propriedade anterior, com base no mesmo tipo de interpretação geométrica, e recordando a expressão (4.8), se poderia apenas afirmar que $E(N)_1$ seria dado pela soma de $1/w$ com a soma das ordenadas da função de fiabilidade $R(t)$ nos pontos de abcissa T_0+kP , com $k=1,2,3,\dots$. Neste caso, porém, esta interpretação geométrica seria ainda válida sem a restrição $T_0 < P$.

b) Para $T_0 < P$, e tendo presente a relação (4.10) e a interpretação geométrica anterior, então o tempo médio de detecção $E(D)_1$ pode ser dado geometricamente pela diferença das 2 áreas seguintes:

1) soma das áreas dos rectângulos com bases de amplitude P centradas em kP e alturas $R(kP)$, $k=0,1,2,\dots$, com a área do rectângulo com base de amplitude T_0 e altura unitária;

2) área limitada pela curva de $R(t)$, pelo eixo das abcissas e pelo eixo das ordenadas.

Dado que no caso da distribuição exponencial a curva de $R(t)$ é côncava, então conclui-se com facilidade que

$$E(D)_1 > T_0 + P/2 \quad (4.46)$$

4.5.2. Uma política de inspecção perfeita periódica com atraso correspondente a uma política óptima de inspecção imperfeita não periódica

Em consequência ainda da propriedade anterior relativa à equivalência dos dois modelos, pode-se agora concluir de uma forma mais prática e objectiva:

Sendo $t_k = T_0 + kP$, $k=1,2,3,\dots$, com $T_0 < P$, a sequência óptima dos instantes de inspecção numa política de inspecção imperfeita não periódica de um sistema cujo tempo de vida segue a distribuição exponencial, então numa política de inspecção perfeita periódica de instantes de inspecção kP , $k=1,2,3,\dots$, ter-se-ia exactamente o mesmo custo total médio por ciclo desde que entre o instante de cada inspecção e o instante em que é conhecido o respectivo resultado se verifique um atraso constante (delay) T_0 .

Esta conclusão permite uma interpretação interessante: um processo em que as inspecções são imperfeitas pode ser encarado, em termos de custo total médio por ciclo, como um processo em que as inspecções são perfeitas mas em que o resultado não é conhecido de imediato. Ou seja, por outras palavras, inspeccionar um sistema com grande rigor mas demorar um certo tempo a apresentar o respectivo resultado pode "custar" o mesmo que inspeccioná-lo sem grande rigor e concluir de imediato. É claro que se está a pressupor que nos dois processos são iguais quer o custo C_1 de cada inspecção quer o custo

C_2 por unidade de tempo de mau funcionamento não detectado. Vamos agora referir os seguintes aspectos interessantes:

a) Apesar de nas duas políticas (modelos) os instantes de inspecção serem diferentes, os instantes em que os respectivos resultados são conhecidos coincidem.

b) Sendo (T_0, P) , com $T_0 < P$, o par de valores a partir do qual se define a sequência óptima de instantes de inspecção no modelo 1, então existe no modelo 2, para esse valor de T_0 , um valor diferente do período de inspecção que conduz a um custo mínimo.

De facto, considerando T_0 constante e menor que P (em particular $T_0=0$), esse valor diferente do período de inspecção verifica a condição de mínimo (4.1) antes apresentada.

Na Fig. 4.4 apresenta-se, para situações diversas, a evolução do custo total médio por ciclo $E(C)$, quer para o modelo 1 quer para o modelo 2, em função do intervalo P entre inspecções. Note-se que para obter $E(C)_1$ se considerou a relação (4.26); para obter $E(C)_2$ considerou-se o valor de T_0 que minimiza $E(C)_1$. Note-se, por outro lado, que se fez $L=1$, $C_1=.25$ e $C_2=1$.

Para uma melhor clarificação, talvez convenha acentuar os seguintes aspectos:

a) A curva (A), que corresponde no modelo 1 a $w=.8$, diz respeito aos pares de valores (T_0, P) que satisfazem a condição (4.26) e que, portanto, tornam iguais os valores de $E(C)$ no modelo 1 e no modelo 2, desde que se verifique $T_0 < P$.

b) A curva (B), que corresponde ao modelo 2 para o valor de

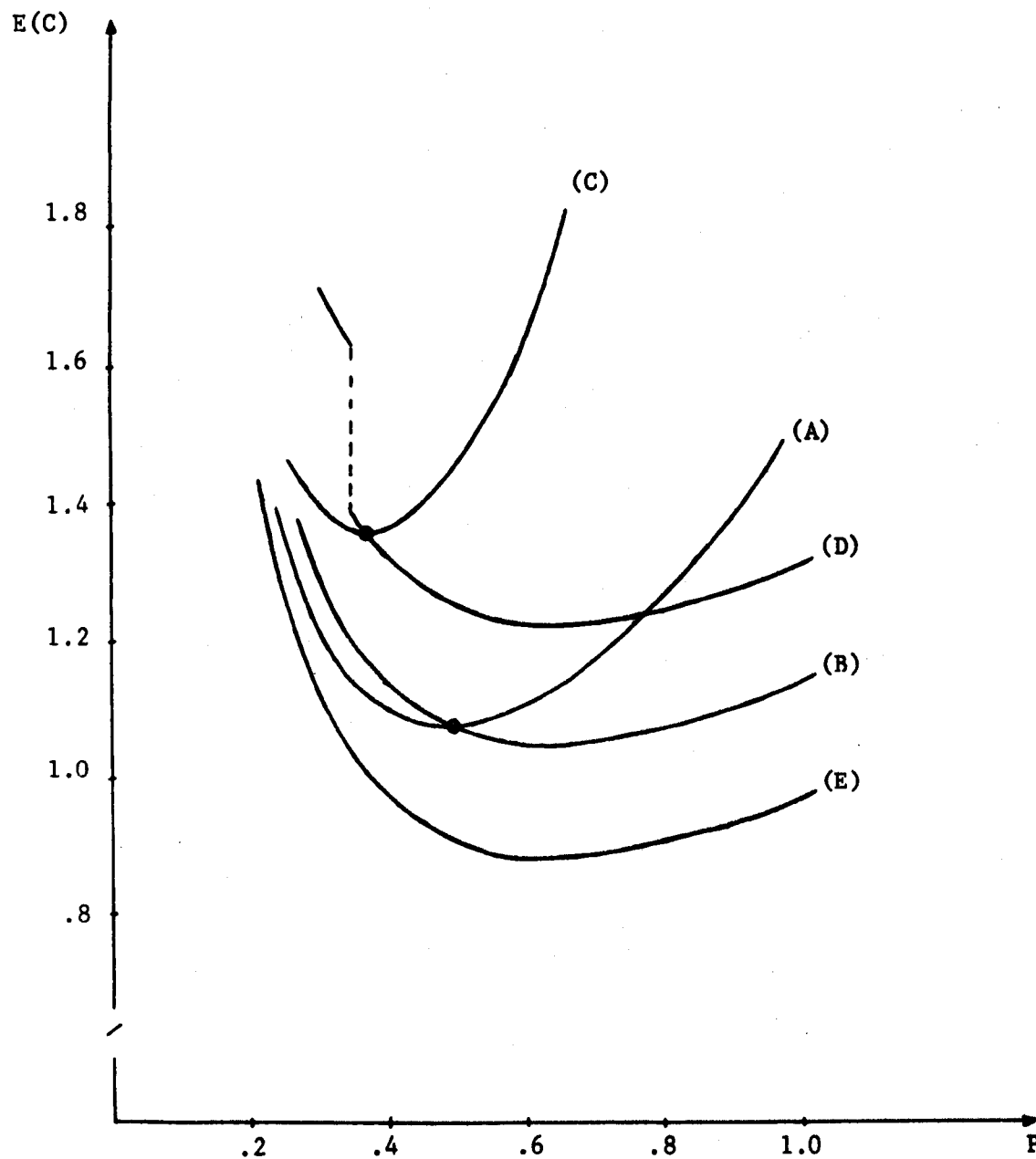


Fig. 4.4

Evolução do custo total médio por ciclo no modelo 1 e no modelo 2

$T_0 = .168$ que minimiza $E(C)$ no modelo 1, intersecta a curva (A) no ponto de mínimo do modelo 1. Por outro lado, o mínimo no modelo 2 é obtido para um valor diferente de P .

c) As curvas (C) e (D) são, respectivamente, as correspondentes das curvas (A) e (B) no caso em que no modelo 1 se considera $w = .6$.

d) A curva (E) corresponde à situação extrema do modelo 2 em que $T_0 = 0$.

Repare-se que, mantendo os valores de C_1 e C_2 , o custo mínimo do modelo 1 aumenta à medida que w diminui, o que facilmente se compreende.

Convém, por fim, recordar que para $w < .5$ não é possível fazer corresponder a uma política de inspecção imperfeita não periódica uma política de inspecção perfeita periódica com atraso já que, nesse caso, não se verifica, conforme se viu, a condição $T_0 < P$.

No entanto, para $w > .5$, nem sempre é possível associar à solução ótima de uma política imperfeita não periódica uma solução (correspondente) de um política de inspecção perfeita periódica com atraso, já que para certos valores de $r = C_1/C_2$ aquela solução ótima não está de acordo com a condição $T_0 < P$. Na Fig. 4.5 apresenta-se a evolução do cociente dos valores T_0 e P que minimizam $E(C)_1$ no modelo 1 em função de w , para diferentes valores de r .

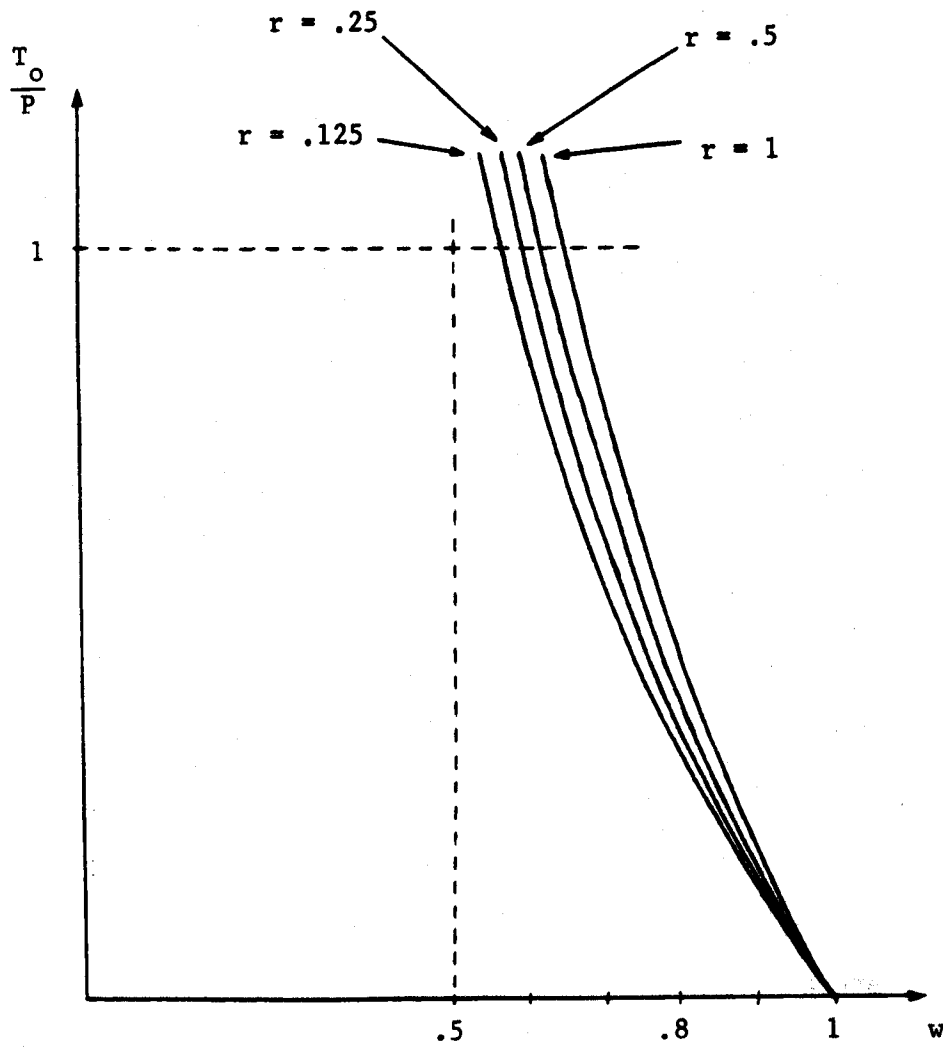


Fig. 4.5

Cociente entre os valores de T_0 e P que minimizam $E(C)_1$, em função de w e para diferentes valores de r .

4.5.3. O mínimo de uma política de inspecção imperfeita não periódica interpretado como um mínimo condicionado de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso

Vimos no ponto anterior que sendo (T_0, P) o par de valores correspondente ao custo mínimo numa política de inspecção imperfeita não periódica (modelo 1), então numa política de inspecção perfeita periódica com atraso T_0 e período P (modelo 2) verifica-se exactamente o mesmo custo total médio por ciclo desde que $T_0 < P$. No entanto, vimos também que para esse mesmo valor de T_0 existe um valor diferente de P que conduz a um mínimo no correspondente modelo 2. Ou seja, por outras palavras, para esse valor de T_0 , as duas políticas de inspecção apresentam mínimos diferentes.

Neste ponto, vamos precisamente mostrar que o mínimo do modelo 1 não é mais do que um mínimo condicionado da modelo 2 tomando como restrição a condição (4.26). Para isso, vamos mostrar que a equação (4.17) a partir da qual se calcula o valor de P que minimiza $E(C)_1$ no modelo 1 se pode obter minimizando $E(C)_2$ no modelo 2 com a restrição (4.26).

De facto, considerando por comodidade $C_2=1$ e $L=1$, podemos reescrever

$$E(C)_2 = (r+P) / [1-\exp(-P)] + T_0 - 1 \quad (4.47)$$

Por outro lado, a condição (4.26) pode reescrever-se na forma

seguinte

$$f(P, T_0) = \exp(T_0) - w/[1-(1-w)\exp(P)] = 0 \quad (4.48)$$

Para obter o mínimo de (4.47) com a condição (4.48) vamos recorrer ao conhecido método dos multiplicadores de Lagrange, definindo para isso a função

$$F(P, T_0, \lambda) = E(C)_2 + \lambda f(P, T_0) \quad (4.49)$$

em que λ é um multiplicador de Lagrange.

Derivando a função F em ordem a P e a T_0 e igualando a zero as respectivas derivadas parciais, obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial P} &= 1/[1-\exp(-P)] - (r+P)\exp(-P)/[1-\exp(-P)]^2 - \\ &\quad - \lambda w(1-w)\exp(P)/[1-(1-w)\exp(P)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_0} = 1 + \lambda \exp(T_0) = 0 \quad (4.51)$$

Este par de equações juntamente com a condição (4.48) define um sistema de equações a partir do qual é então possível obter os respectivos valores optimizantes de T_0 e P . Em particular, a partir das equações (4.51) e (4.48) é possível escrever

$$\lambda = - [1-(1-w)\exp(P)] / w \quad (4.52)$$

o que, substituindo em (4.50) e mediante algum tratamento algébrico, permite obter a equação

$$-w(r+P) + [(1-\exp(-P))] [w+(r+P)] = 0 \quad (4.53)$$

que é precisamente a equação (4.17) de mínimo antes apresentada para o modelo 1, quando $L=1$.

4.5.4. Uma política de inspecção imperfeita não periódica correspondente a uma política ótima de inspecção perfeita periódica com atraso

Por fim, em consequência ainda da propriedade anterior relativa à equivalência dos dois modelos, pode-se agora apresentar um resultado correspondente a um anterior, tendo como base uma política perfeita periódica com atraso. Assim:

Sendo $t_k = kP$, $k=1,2,3,\dots$, a sequência ótima dos instantes de inspecção numa política de inspecção perfeita periódica com atraso constante $T_0 < P$ num sistema cujo tempo de vida segue a distribuição exponencial, então numa política de inspecção imperfeita não periódica com instantes de inspecção $t_k = T_0 + kP$, $k=1,2,3,\dots$, ter-se-ia exactamente o mesmo custo total médio por ciclo $E(C)$ desde que a probabilidade w de detectar a falha numa dada inspecção,

tendo ela já ocorrido, verifique a relação (4.26).

Tal como anteriormente, também aqui é possível interpretar este resultado do modo seguinte: inspeccionar um sistema sem grande rigor e concluir de imediato (admitindo, portanto, que pode haver um erro no respectivo resultado) pode "custar" o mesmo que inspeccioná-lo com grande rigor mas demorar um certo tempo a apresentar o respectivo resultado, considerando, é claro, que nas duas políticas de inspeção são iguais os custos C_1 e C_2 .

Repare-se, porém, que para o valor de w antes obtido existe um par diferente de valores (T_0, P) que conduz a um mínimo absoluto na correspondente política de inspeção imperfeita não periódica.

Na Fig. 4.6 está representada a evolução do custo total médio por ciclo $E(C)$ para as 2 políticas em função do período P entre inspeções, para diferentes valores de T_0 , com $C_1=.25$, $C_2=1$ e $L=1$. Em síntese, podem acentuar-se os seguintes aspectos:

a) As curvas (A_1) e (A_2) , por um lado, e, por outro, as curvas (B_1) e (B_2) intersectam-se nos pontos onde se obtém um mínimo para o modelo 2. Em relação ao modelo 1, o mínimo obtém-se para um valor de P inferior.

b) As curvas (C_1) e (C_2) intersectam-se num ponto $P=T_0 + \epsilon$, com ϵ arbitrariamente pequeno (verificando-se, portanto, a condição $T_0 < P$), pois que o mínimo do modelo 2 se obteria nesse caso, como limite, à direita de $P=T_0$.

Refira-se, finalmente, que ao custo mínimo do modelo 2 nem

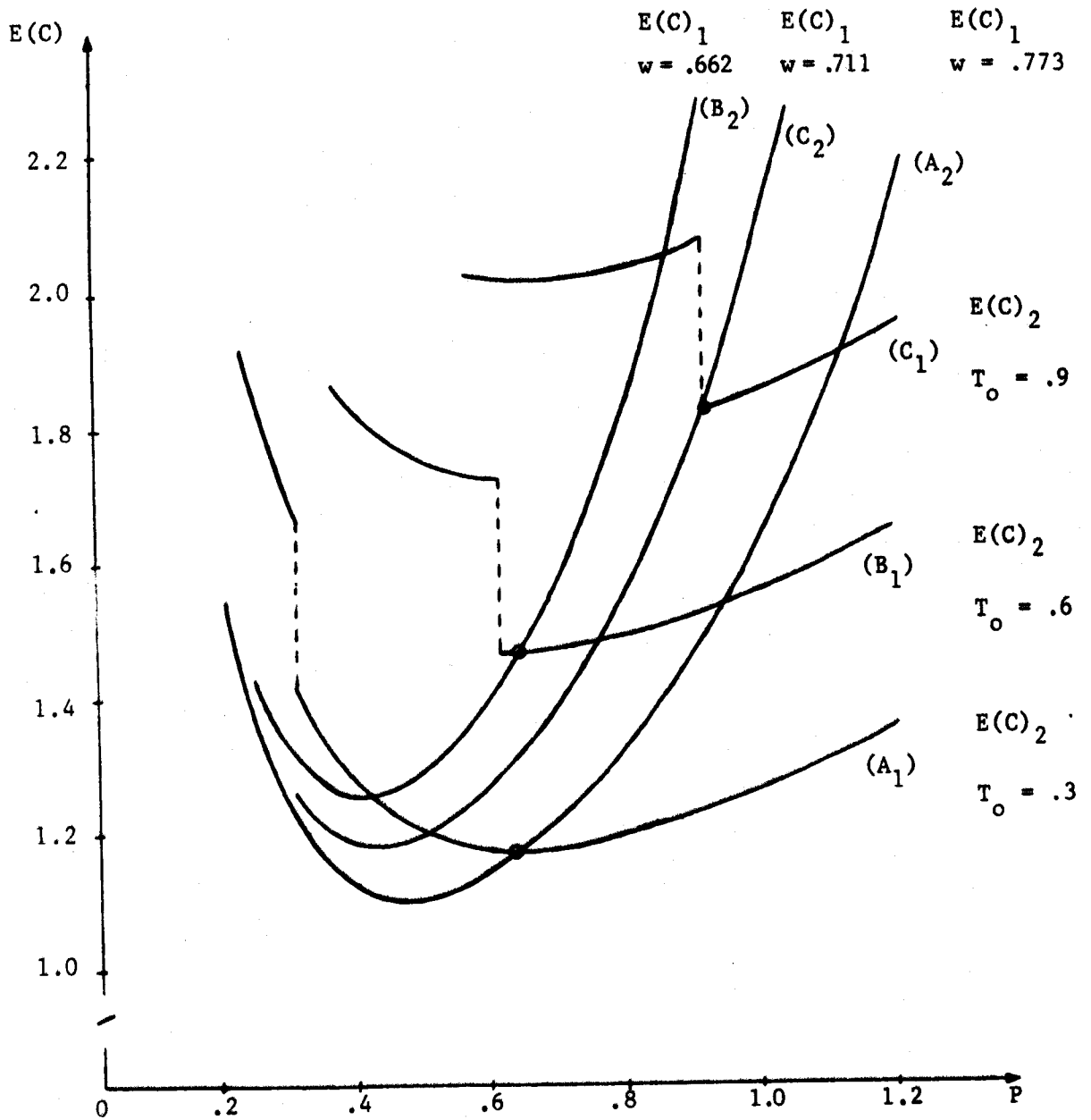


Fig. 4.6

Evolução de $E(C)$ em função de P , para o modelo 1 e o modelo 2

sempre pode corresponder um custo igual do modelo 1, pois que pode não se verificar $T_0 < P$.

4.5.5. O mínimo de uma política de inspecção perfeita
periódica com atraso interpretado como um mínimo
condicionado de uma política de inspecção imperfeita
não periódica

Partindo precisamente do mesmo tipo de constatações referidas no ponto 4.5.3. anterior, dispensando-nos assim de fazer mais considerações, vamos agora mostrar que o mínimo (incondicional) do modelo 2, excluindo o caso de um mínimo num ponto de descontinuidade, pode ser interpretado como um mínimo condicionado do modelo 1 tomando ainda como restrição a condição (4.26). Com esse objectivo, e tal como fizemos anteriormente, vamos mostrar que a equação (4.1) a partir da qual se calcula o valor de P que minimiza o custo na política 2 se pode obter minimizando o custo na política 1 com a restrição (4.26).

De facto, usando ainda o método dos multiplicadores de Lagrange, mas tendo agora em conta que T_0 funciona aqui como uma constante e que o modelo 1 é definido neste caso a partir do valor de w que satisfaz (4.26), então podemos escrever sucessivamente (considerando, por simplicidade, $L=1$):

$$E(C)_1 = (r+P) \left\{ \exp[-(T_0+P)] / [1-\exp(-P)] + 1/w \right\} + T_0 - 1 \quad (4.54)$$

$$F(P, w, \lambda) = E(C)_1 + \lambda f(P, w) \quad (4.55)$$

$$f(P, w) = \exp(T_0) - w/[1-(1-w)\exp(P)] \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial P} &= \exp(-T_0 - P) \{ -(r+P)/[1-\exp(-P)] + 1 \} / [1-\exp(-P)] + 1/w - \\ &\quad - \lambda w(1-w)\exp(P)/[1-(1-w)\exp(P)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -(r+P)/w^2 - \lambda [1-\exp(P)]/[1-(1-w)\exp(P)]^2 = 0 \quad (4.58)$$

A partir de (4.58) e de (4.56) podem obter-se expressões para λ e $\exp[-(T_0+P)]$ que substituídas em (4.57) permitem obter a equação

$$-(r+P) + \exp(P) - 1 = 0 \quad (4.59)$$

que é justamente a condição de mínimo no modelo 2 quando se verifica $T_0 < P$ ($L=1$).

4.6. SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA O MODELO DE SENGUPTA

Conforme já foi devidamente assinalado, a solução óptima no modelo de Sengupta (modelo 1) consiste em inspeccionar o sistema nos instantes $t_k = T_0 + kP$, $k=1,2,3,\dots$, em que T_0 e P satisfazem as equações (4.3) e (4.4).

Em relação a esta solução, podem apresentar-se dois tipos de inconvenientes: por um lado, a obtenção dos valores T_0 e P exige, em princípio, a utilização de meios informáticos, embora este inconveniente esteja a ter uma importância cada vez menor dada a vulgarização do computador; por outro lado, trata-se de uma inspecção não periódica, o que, do ponto de vista prático, não é certamente a solução mais aconselhável, embora, refira-se o facto, a solução óptima seja periódica a partir da segunda inspecção.

Estes dois tipos de inconvenientes sugerem então que se procurem soluções alternativas aproximadas que, pelo menos, anulem um deles. Assim, a seguir, vamos apresentar diferentes soluções periódicas aproximadas relativas a inspecções imperfeitas. Para cada uma delas, far-se-á a comparação do respectivo custo com o custo mínimo da solução exacta, com o objectivo de assim melhor avaliar o seu interesse prático.

4.6.1. Política de inspeção imperfeita periódica ótima

Representando por $E(C)_2^*$ o custo total médio mínimo por ciclo numa política de inspeção imperfeita periódica relativa ao modelo de Sengupta (1982), então o valor do período P verifica a equação

$$-Lr + [1-LP-\exp(-LP)] + [\exp(LP)+\exp(-LP)-2]/w = 0 \quad (4.60)$$

Para obter a expressão anterior basta considerar $T_0=0$ nas condições de mínimo do modelo de Sengupta. Como não podia deixar de ser, fazendo $w=1$ obtem-se a equação (4.1).

No Quadro 4.5 estão indicados, para diferentes valores de w e de r , os valores do cociente

$$S_2^* = \left[E(C)_2^* - E(C)_1 \right] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (4.61)$$

em que, recorde-se, $E(C)_1$ é o custo mínimo da política ótima não periódica.

A partir desses valores podem-se tirar 2 conclusões importantes: por um lado, os erros relativos aumentam quando aumenta r e diminui w ; por outro lado, em especial quando w é próximo de 1 e r relativamente pequeno, os erros relativos podem considerar-se na prática desprezáveis, o que permite considerar a solução aproximada bastante boa. Note-se que já Sengupta (1982) havia referido o mesmo para $r=.25$ e $w=.9$.

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	0	0	0	0	0
	.9	.12	.16	.20	.25	.29
	.8	.45	.58	.75	.92	1.08
	.7	.95	1.25	1.59	1.95	2.28
	.6	1.63	2.14	2.73	3.33	3.86
	.5	2.51	3.29	4.17	5.07	5.82

Quadro 4.5

Valores de S_2^* para diferentes valores de r e de w

4.6.2. Uma política de inspecção imperfeita periódica aproximada

A aproximação considerada no ponto anterior, que consiste em substituir uma política não periódica óptima por uma política periódica óptima (óptima enquanto periódica), é bastante boa, mas exige a resolução da equação (4.60) para obter o valor do período P entre inspecções, o que necessita, em princípio, da utilização de meios informáticos.

Uma questão importante que então se põe, do ponto de vista prático, é obter uma expressão simples que facilmente permita calcular, ainda que de uma forma aproximada, o respectivo valor de P .

Uma maneira simples de atacar a questão (Rodrigues Dias (1985)) é desenvolver $\exp(P)$ e $\exp(-P)$ em série de Taylor (considerando, no entanto, apenas as 3 primeiras parcelas) e substituir na equação (4.60). Este procedimento conduz ao seguinte resultado extremamente simples, que generaliza o resultado de Nakagawa e Yasui (1979), com $E(T)=1/L$:

$$\begin{aligned}
 P^* &= [2rE(T)w/(2-w)]^{1/2} \\
 &= [2rE(T)]^{1/2} \cdot [w/(2-w)]^{1/2} \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Repare-se que se pode considerar $[w/(2-w)]^{1/2}$ como um factor

de correcção devido à presença das inspecções imperfeitas.

No Quadro 4.6 representa-se, para diferentes valores de w e de r , o valor do cociente

$$S_3^* = [E(C)_3^* - E(C)_1] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (4.63)$$

em que $E(C)_3^*$ é agora o custo associado à política periódica de período P^* .

Podem tirar-se as seguintes conclusões importantes: por um lado, os erros relativos podem considerar-se praticamente desprezáveis na prática, em especial quando os valores de r são reduzidos e os de w elevados, o que corresponde a situações normais; por outro lado, não existe uma grande diferença, ainda em termos práticos, entre esta aproximação e a anteriormente apresentada relativa a uma política de inspecção periódica óptima.

Em síntese, poder-se-á então afirmar que o valor de P^* conduz a uma solução quase óptima para o modelo de Sengupta (1982).

4.6.3. Outra política de inspecção imperfeita periódica aproximada

Viu-se no Capítulo II (relativo a inspecções periódicas), no caso da distribuição de T ser exponencial, que o valor do período de inspecção é dado, em termos práticos, pela expressão

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	.13	.26	.49	.92	1.69
	.9	.19	.30	.49	.81	1.35
	.8	.49	.67	.91	1.25	1.73
	.7	.97	1.29	1.69	2.14	2.66
	.6	1.65	2.17	2.8	3.4	4.08
	.5	2.5	3.3	4.2	5.1	5.9

Quadro 4.6

Valores de S_3^* para diferentes valores de r e de w

$$P = [2rE(T)]^{1/2} / [1+.234 r'^{1/2}] \quad (4.64)$$

com $r'=r/E(T)$, tendo-se então acentuado que esta solução se pode considerar óptima.

Tratando-se agora do problema das inspecções imperfeitas, uma ideia que ocorre é introduzir na expressão (4.64) antes escrita o factor de correcção referido no ponto anterior para as inspecções imperfeitas, obtendo-se então a seguinte aproximação para o período de inspecção

$$P^{**} = [2rE(T)]^{1/2} / [1+.234 r'^{1/2}] \cdot [w/(2-w)]^{1/2} \quad (4.65)$$

Usando esta aproximação, obtem-se um custo total médio por ciclo $E(C)_4^*$ a partir do qual, para diferentes valores de w e de r , é possível calcular os respectivos erros relativos, utilizando para isso o cociente

$$S_4^* = [E(C)_4^* - E(C)_1] / E(C)_1 \cdot 100 \% \quad (4.66)$$

No Quadro 4.7 estão representados os respectivos valores.

Conforme era de esperar, para $w=1$ os erros relativos são na prática nulos.

Para valores de w inferiores a 1 e até .7 verifica-se que os erros relativos são inferiores aos correspondentes erros associados à solução apresentada no ponto anterior, em especial quando w é bastante próximo de 1.

		r				
		.05	.1	.2	.4	.8
w	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	.9	.13	.17	.22	.28	.35
	.8	.47	.62	.81	1.03	1.26
	.7	.99	1.32	1.72	2.17	2.62
	.6	1.69	2.25	2.91	3.65	4.36
	.5	2.59	3.42	4.41	5.48	6.48

Quadro 4.7

Valores de S_4^* para diferentes valores de r e de w

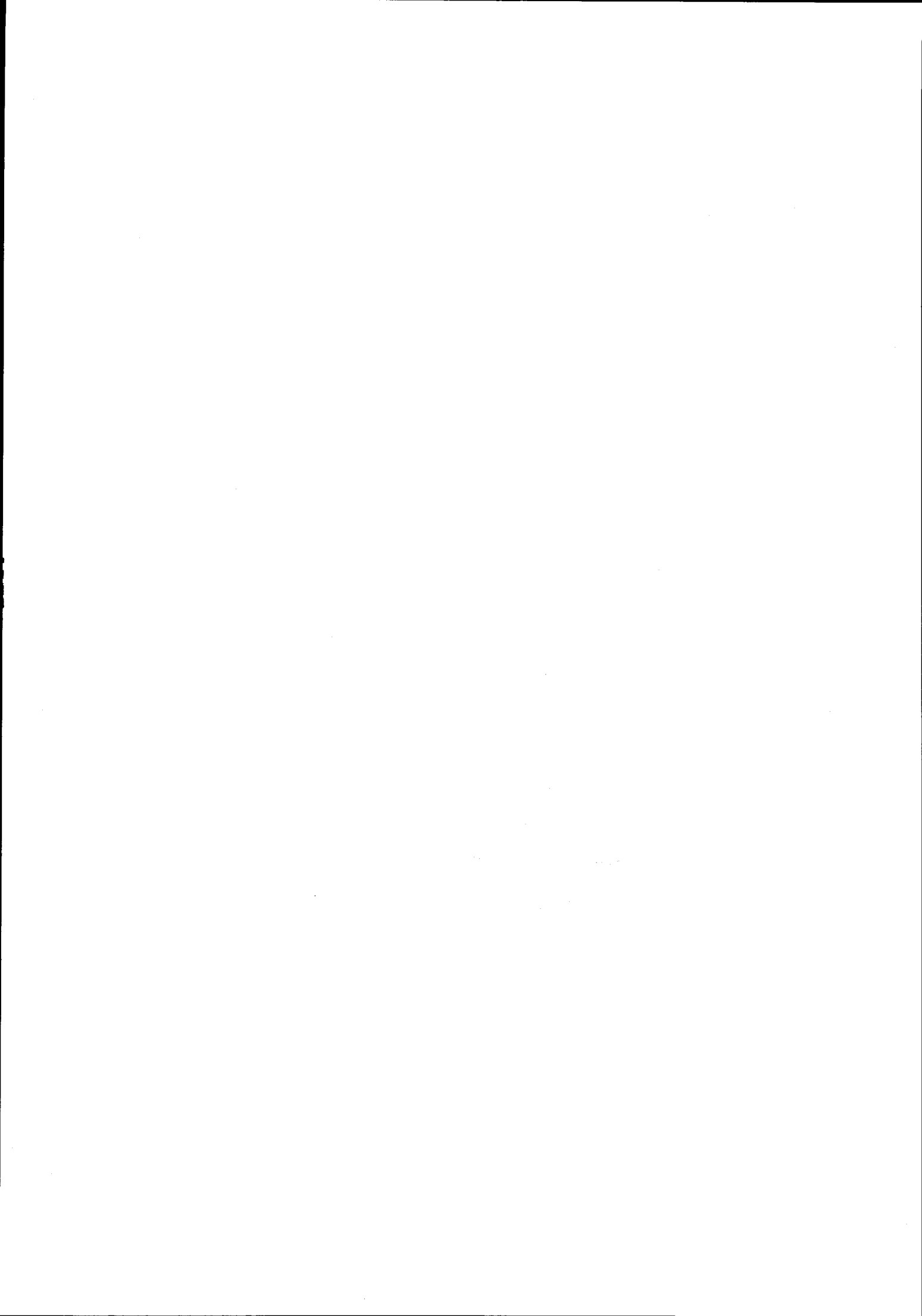
Em contrapartida, para valores de w inferiores a $.7$, verifica-se que esta aproximação é ligeiramente pior que a apresentada no ponto anterior.

Assim, em conclusão, pode-se afirmar que:

a) para valores de w próximos de 1 , o período de inspecção dado pela expressão (4.65) conduz a melhores resultados que os obtidos pela expressão (4.62);

b) para valores de w inferiores a $.7$, verifica-se que já é a expressão (4.62) que permite obter uma melhor aproximação que a expressão (4.65).

Em qualquer dos casos, quer a expressão (4.62) quer a expressão (4.65) por nós introduzidas conduzem, em termos de custos, a aproximações cujos erros relativos são em muitos casos (em especial quando w é próximo de 1) inferiores a 1% , pelo que se poderão considerar na prática muito boas. Para além disso, tenha-se em conta a grande facilidade na sua obtenção em termos de aplicações, não esquecendo ainda o facto de constituírem generalizações da aproximação obtida por Nakagawa e Yasui (1979) para o período de inspecção.



CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

5.1. CONCLUSÕES SOBRE POLÍTICAS PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO

Apesar de ao longo dos capítulos anteriores desta tese termos feito ressaltar os resultados e as conclusões que nos pareceram mais relevantes, vamos aqui tentar fazer a respectiva síntese.

Assim, no que diz respeito ao capítulo sobre inspecções periódicas, podemos acentuar os seguintes resultados e conclusões mais importantes:

a) Obtenção de uma expressão extremamente simples para o número médio de inspecções, que permite uma interpretação geométrica muito sugestiva, bem como de outros resultados. Em particular, obteve-se uma expressão para o intervalo em que se situa o cociente entre os números médios de inspecções correspondentes a dois valores do período de inspecção, apresentando-se um exemplo.

b) Obtenção de uma expressão simples que permite interpretar o tempo médio de detecção como uma diferença de duas áreas, o que conduz a uma fácil compreensão e interpretação geométrica de aproximações já conhecidas, mas cuja validade se discute. Em particular, põe-se em causa a validade de uma dada aproximação, apresentando-se um exemplo numérico elucidativo.

c) Obtenção da expressão analítica a partir da qual, usando meios informáticos, é possível determinar o valor do período de inspecção que minimiza o custo total médio por ciclo, referindo-se que a solução pode não ser única.

d) Conclusão, a partir de um quadro de valores elucidativo, de que o custo total médio por ciclo é pouco sensível, de um modo geral, ao período de inspecção, o que permite concluir, à partida, que aproximações obtidas para o período de inspecção se podem considerar, em termos de custos e na prática, boas aproximações. Este facto deve-se a que, de um modo geral, o número médio de inspecções e o tempo médio de detecção apresentam variações de sentido oposto e sensivelmente da mesma ordem de grandeza, o que se comprova através de resultados obtidos. No entanto, mostra-se que tais grandezas podem apresentar uma variação com o mesmo sentido, o que pode conduzir a que o custo total médio por ciclo tenha mais do que um mínimo, apresentando-se um caso concreto em que tal se verifica.

e) Conclusão, a partir de um quadro de valores, de que o custo

total médio mínimo pode depender de uma forma acentuada do tipo de distribuição do tempo de vida do sistema e não apenas da sua esperança matemática. No entanto, em certos casos, verifica-se que tal dependência é fraca.

f) Conclusão, a partir de quadros de valores elucidativos, de que o tempo médio de detecção pode ser maior, menor ou sensivelmente igual a metade do período de inspeção, dependendo fundamentalmente do tipo de distribuição e do valor de determinados parâmetros. Esta conclusão põe parcialmente em causa uma aproximação obtida por Schneeweiss (1976).

g) Conclusão de que uma solução aproximada obtida por Nakagawa e Yasui (1979) para o período de inspeção se pode afastar bastante da solução óptima, generalizando-se para diferentes distribuições os resultados obtidos por aqueles autores (que haviam apenas considerado o caso da distribuição de Weibull).

h) Obtenção de uma expressão para o custo total médio mínimo por ciclo e de duas aproximações (sendo uma delas independente da distribuição), analisando-se a validade destas através de quadros de valores elucidativos para diferentes distribuições.

i) Conclusão de que os erros relativos dos custos associados às aproximações anteriores são, de um modo geral, bastante menores que os erros relativos associados à aproximação do período de inspeção de Nakagawa e Yasui (1979), o que permite considerar esta, do ponto de

vista prático e em termos de custos, como uma solução quase óptima, facto este que aqueles autores não punham em evidência. No entanto, em certos casos que se apresentam, verifica-se que os erros relativos dos custos aproximados podem ser consideravelmente elevados, casos esses em que é preferível a utilização de uma política não periódica de inspecção.

j) Conclusão de que os erros relativos da solução aproximada do período de inspecção de Nakagawa e Yasui (1979), no caso da distribuição exponencial, se ajustam muito bem por uma parábola, facto este que nos tinha passado despercebido num artigo anterior (Rodrigues Dias (1983 a)). Esta conclusão permite-nos obter uma nova aproximação para o período de inspecção que generaliza o resultado anterior de Nakagawa e Yasui (1979), mediante a introdução do que podemos chamar um factor de correcção.

l) Conclusão de que os erros relativos associados à aproximação por nós obtida para o período de inspecção são extremamente reduzidos no caso da distribuição exponencial, sendo incomparavelmente menores que os correspondentes erros relativos associados à aproximação de Nakagawa e Yasui (1979), em especial em certos casos. Como consequência, verifica-se que os erros relativos associados à aproximação por nós obtida são na prática nulos, tão reduzidos eles são.

m) Conclusão de que, conforme o tipo de distribuição, a dita aproximação funciona melhor ou pior que a de Nakagawa e Yasui (1979). No entanto, em termos dos diferentes tipos de taxa de risco que considerámos, poder-se-á dizer que a aproximação que obtivemos é

preferível.

5.2. CONCLUSÕES SOBRE POLÍTICAS NÃO PERIÓDICAS DE INSPECÇÃO

Em síntese, no que diz respeito ao capítulo sobre inspecções não periódicas, podemos acentuar os seguintes resultados e conclusões mais importantes:

a) Obtenção de um conjunto de resultados relativos ao modelo de Barlow et al, fazendo-se ressaltar aspectos interessantes. Em particular, acentuou-se a dificuldade em obter a solução óptima de tal modelo, pelo que soluções alternativas têm merecido bastante atenção, destacando-se as políticas aproximadas não periódicas e as próprias políticas periódicas.

b) Interpretação (geométrica) da política de risco constante, mostrando-se de uma forma diferente de Munford e Shahani (1972) que se a taxa de risco de um sistema é crescente (decrecente), então os intervalos de tempo entre inspecções consecutivas são decrescentes (crescentes). Sendo a taxa de risco de tipo "bathtub", então os intervalos de tempo entre inspecções consecutivas começam por ser crescentes na fase inicial, são constantes (ou aproximadamente) na fase intermédia e são decrescentes na fase final. Referiu-se que esta

política está de acordo com muitas situações de aplicação prática.

c) Conclusão de que são idênticas a política de risco constante e uma solução "inicial" de Munford e Shahani (1972), apesar de definidas analiticamente de forma diferente. O autor refere, justificadamente, a sua independência em relação a outros autores na apresentação e estudo da política de risco constante.

d) Conclusão de que a taxa cumulativa de risco, vista como variável aleatória, tem distribuição exponencial, com média e variância unitárias.

e) Obtenção de um conjunto de resultados relativos à política de risco constante, estabelecendo-se a sua correspondência com um conjunto de resultados análogos relativos à política periódica de inspecção. Nomeadamente, estabelece-se a correspondência entre o número médio de inspecções, o tempo médio de detecção e um conjunto de aproximações. Por esta razão, poder-se-á considerar a política (não periódica) de risco constante como sendo uma política periódica em termos da taxa cumulativa de risco. Acentua-se que tal correspondência só é possível trabalhando directamente com um incremento da taxa cumulativa de risco, como fizemos, e não, como fizeram outros autores, trabalhando com uma probabilidade.

f) Obtenção de resultados relativos ao caso particular da distribuição uniforme, referindo-se a possibilidade de o número de inspecções no caso da política de risco constante poder ser superior a

qualquer número finito, ao contrário do que acontece com a solução ótima do modelo de Barlow et al. Constata-se também que os primeiros instantes de inspecção de acordo com a política de risco constante, contrariamente a outros subsequentes, ocorrem antes dos correspondentes instantes de inspecção relativos à solução de Barlow et al.

g) Obtenção de um conjunto de resultados que permitem obter o mínimo do custo total na política de risco constante. Compara-se então, em termos de custos, a política periódica de inspecção com a política de risco constante, concluindo-se que no caso da distribuição de Weibull quanto mais a taxa de risco se afasta da taxa de risco constante mais se justifica (e até de uma forma acentuada) a inspecção não periódica de sistemas. Por outro lado, no caso da distribuição de tipo "bathtub", não se verifica um grande afastamento, em termos de custos, entre aquelas duas políticas de inspecção.

h) Conclusão de que uma solução aproximada por nós proposta para o acréscimo da taxa cumulativa de risco na política de risco constante pode ser considerada, em certas situações práticas, como uma boa aproximação, em especial tendo em conta a facilidade da sua obtenção e a sua simplicidade.

i) Conclusão de que uma outra solução aproximada por nós proposta para o acréscimo da taxa cumulativa de risco na política de risco constante se pode considerar melhor que a anterior, sendo quase ótima, no caso da distribuição de Weibull em que a taxa de risco não se

afaste muito da taxa de risco constante. No caso em que na distribuição de Weibull a taxa de risco é fortemente crescente e no caso da distribuição de Hjorth (1980), verifica-se que esta aproximação continua a não ser boa (sendo, em relação à aproximação anterior, pior num caso e melhor no outro).

5.3. CONCLUSÕES SOBRE UMA POLÍTICA NÃO PERIÓDICA DE INSPECÇÃO REDUTÍVEL A UMA POLÍTICA PERIÓDICA DE INSPECÇÃO QUANDO O TEMPO DE VIDA É EXPONENCIAL

Em síntese, no que diz respeito ao capítulo sobre uma política não periódica de inspecção redutível a uma política periódica de inspecção quando o tempo de vida é exponencial, podemos acentuar os seguintes resultados e conclusões mais importantes:

a) Obtenção das equações que permitem calcular a solução óptima de uma política não periódica de inspecção quando a distribuição do tempo de vida é exponencial. Obtem-se, em particular, um par interessante de equações.

b) Obtenção de um conjunto de resultados a partir dos quais é possível concluir que, à medida que a probabilidade de detectar a falha diminui, se verificam dois fenómenos de natureza oposta: por um lado,

verifica-se um aumento no intervalo de tempo até à primeira inspecção; por outro lado, verifica-se uma redução no intervalo de tempo entre inspecções subsequentes.

c) Conclusão, a partir de um quadro de valores, de que o custo mínimo é particularmente sensível à presença do factor erro nas inspecções, o que põe em causa uma conclusão de Sengupta (1982) segundo a qual não valeria a pena, em termos de custos, fazer grandes esforços no sentido de tornar as inspecções livres de erro.

d) Discussão das condições em que se obtém o mínimo de uma política de inspecção perfeita periódica com atraso, apresentando-se graficamente resultados elucidativos.

e) Obtenção e demonstração de uma propriedade importante (a partir da qual é possível obter resultados interessantes) que permite estabelecer, em termos de custos, uma equivalência entre uma política de inspecção imperfeita não periódica e uma política de inspecção perfeita periódica com atraso. Conclui-se, no entanto, que tal equivalência não é possível quando a probabilidade de detectar a falha é inferior ou igual a .5 .

f) Conclusão de que é possível estabelecer para a política de inspecção imperfeita não periódica interpretações geométricas interessantes quer para o número médio de inspecções quer para o tempo médio de detecção.

g) Conclusão de que é possível associar, em termos de custos, à solução ótima de uma política de inspeção imperfeita não periódica uma política de inspeção perfeita periódica com atraso, o que permite a seguinte interpretação interessante: inspeccionar um sistema com grande rigor mas demorar um certo tempo a apresentar o respectivo resultado pode "custar" o mesmo que inspeccioná-lo sem grande rigor mas concluir de imediato.

h) Conclusão, usando o método dos multiplicadores de Lagrange, de que é possível encarar o mínimo de uma política de inspeção imperfeita não periódica como sendo um mínimo condicionado de uma política de inspeção perfeita periódica com atraso.

i) Conclusão de que é possível associar, em termos de custos, à solução ótima de uma política de inspeção perfeita periódica com atraso uma política de inspeção imperfeita não periódica, o que permite a seguinte interpretação interessante: inspeccionar um sistema sem grande rigor e concluir de imediato pode "custar" o mesmo que inspeccioná-lo com grande rigor mas demorar um certo tempo a apresentar o respectivo resultado.

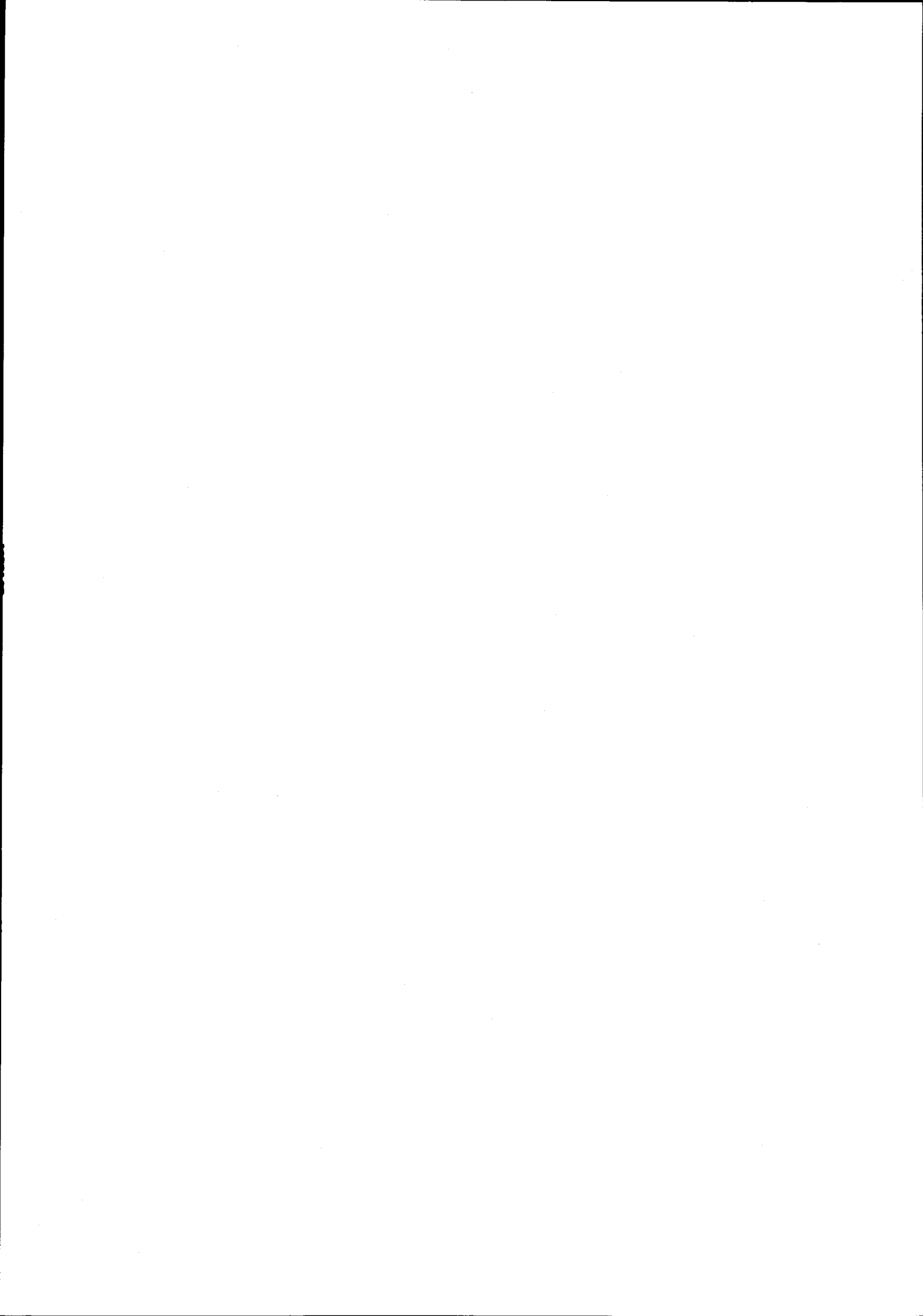
j) Conclusão, usando ainda o método dos multiplicadores de Lagrange, de que é possível encarar o mínimo de uma política de inspeção perfeita periódica com atraso como sendo um mínimo condicionado de uma política de inspeção imperfeita não periódica.

l) Conclusão, a partir de um quadro de valores, de que a

política de inspecção imperfeita periódica óptima constitui uma aproximação bastante boa em relação à solução óptima da política de inspecção imperfeita não periódica, em especial quando a probabilidade de detectar a falha é próxima de 1.

m) Conclusão, a partir de um quadro de valores, de que uma solução aproximada que se obteve para o período de inspecção conduz a uma política de inspecção imperfeita periódica que é uma solução aproximada bastante boa em relação à solução óptima da política de inspecção imperfeita não periódica. Acentue-se ainda que a expressão obtida para o período de inspecção, para além da sua simplicidade, constitui uma generalização de um resultado anterior de Nakagawa e Yasui (1979) para o caso das inspecções imperfeitas periódicas.

n) Conclusão, a partir de um quadro de valores, de que uma outra solução aproximada introduzida para o período de inspecção conduz a uma política de inspecção imperfeita periódica que é uma solução aproximada melhor que a anterior em relação à solução óptima da política de inspecção imperfeita não periódica, em especial quando a probabilidade de detectar a falha é bastante próxima de 1. Acentue-se também aqui o facto do valor do período de inspecção se obter facilmente, assim como o facto da respectiva expressão constituir uma generalização do resultado anterior.



BIBLIOGRAFIA

- Anbar, D. (1976) - An Assymptotically Optimal Inspection Policy,
Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 23, N. 2, pp 211-218
- Barlow, R. E. ; Hunter, L. C. ; Proschan, F. (1963) - Optimum Checking
Procedures, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, N. 4,
pp 1078-1095
- Barlow, R. E. ; Proschan, F. (1965) - Mathematical Theory of Reliability,
Wiley, New York
- Barlow, R. E. ; Proschan, F. (1975) - Statistical Theory of Reliability
and Life Testing, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York
- Bergman, B. (1985) - On Reliability Theory and its Applications,
Scand J Statist, Vol. 12, N. 1, pp 1-41
- Butler, D. A. (1979) - A Hazardous-Inspection Model, Management Science,
Vol. 25, N. 1, pp 79-89
- Dhillon, B. S. (1979) - A Hazard Rate Model, IEEE Transactions on
Reliability, Vol. R-28, N. 2, p 150
- Dhillon, B. S. (1981) - Life Distributions, IEEE transactions on
Reliability, Vol. R-30, N. 5, pp 457-460
- Duncan, A. J. (1956) - The Economic Design of \bar{X} -Charts Used to Maintain

- Current Control of a Process, Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, N. 274, pp 228-242
- Gibra, I. N. (1975) - Recent Developments in Control Chart Techniques, Journal of Quality Technology, Vol. 7, N. 4, pp 183-192
- Gnédenko, B. ; Béliev, Y. ; Soloviev, A. (1972) - Méthodes Mathématiques en Théorie de la Fiabilité, Éditions Mir, Moscou
- Hjorth, U. (1980) - A Reliability Distribution With Increasing, Decreasing, Constant and Bathtub-Shaped Failures Rates, Technometrics, Vol. 22, N. 1, pp 99-107
- Hunter, L. C. (1964) - Optimum Checking Procedures, in Statistical Theory of Reliability, ed. M. Zelen, The University of Wisconsin Press, Madison, pp 95-113
- Keller, J. B. (1974) - Optimum Checking Schedules for Systems Subject to Random Failure, Management Science, Vol. 21, N. 3, pp 256-260
- Keller, J. B. (1982) - Optimum Inspection Policies, Management Science, Vol. 28, N. 4, pp 447-450
- Kirch, R. L. A. ; Klein, M. (1974) - Surveillance Schedules for Medical Examinations, Management Science, Vol. 20, N. 10, pp 1403-1409
- Lawless, J. F. ((1982) - Statistical Models and Methods for Lifetime Data, Wiley, New York
- Luss, H. (1976) - Maintenance Policies When Deterioration Can be Observed by Inspections, Operations Research, Vol. 24, N. 2, pp 359-366
- Luss, H. (1977) - Inspection Policies for a System Which is Inoperative During Inspection Periods, AIIE Transactions, Vol. 9, N. 2, pp 189-194
- Luss, H. ; Kander, Z. (1974) - Inspection Policies When Duration of Checkings is Non-Negligible, Operational Research Quarterly,

Vol. 25, N. 2, pp 299-309

- Montgomery, D. C. (1980) - The Economic Design of Control Charts:
A Review and Literature Survey, Journal of Quality Technology,
Vol. 12, N. 2, pp 75-87
- Morice, E. (1966) - Quelques Modèles Mathématiques de Durée de Vie,
Revue de Statistique Appliquée, Vol. 14, N. 1, pp 45-101
- Munford, A. G. (1981) - Comparison Among Certain Inspection Policies,
Management Science, Vol. 27, N. 3, pp 260-267
- Munford, A. G. ; Shahani, A. K. (1972) - A Nearly Optimal Inspection
Policy, Operational Research Quarterly, Vol. 23, N. 3
pp 373-379
- Munford, A. G. ; Shahani, A. K. (1973) - An Inspection Policy for the
Weibull Case, Operational Research Quarterly, Vol. 24, N. 3,
pp 453-458
- Muth, E. J. (1977) - Reliability Models With Positive Memory Derived
From the Mean Residual Life Function, in The Theory and
Applications of Reliability, Vol. II, ed. Tsokos e Shimi,
Academic Press, pp 401 - 435.
- Nakagawa, T. (1984) - Periodic Inspection Policy With Preventive
Maintenance, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 31,
N. 1, pp 211-218
- Nakagawa, T. ; Yasui, K. (1979) - Approximate Calculation of Inspection
Policy With Weibull Failure Times, IEEE Transactions on
Reliability, Vol. R-28, N. 5. pp 403-404
- Nakagawa, T. ; Yasui, K. (1980) - Approximate Calculation of Optimal
Inspection Times, Journal of the Operational Research Society,
Vol. 31, N. 9, pp 851-853

- Pagès, A. ; Gondran, M. (1980) - Fiabilité des Systèmes, Éditions Eyrolles, Paris
- Pierskalla, W. P. ; Voelker, J. A. (1976) - A Survey of Maintenance Models: The Control and Surveillance of Deteriorating Systems, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 23, N. 3, pp 353-388
- Quesenberry, C. P. ; Kent, J. (1982) - Selecting Among Probability Distributions Used in Reliability, Technometrics, Vol. 24, N. 1, pp 59-65
- Rodrigues Dias, J. (1981a) - Cartas de Controlo de Qualidade nas Indústrias Agro-Alimentares, Jornadas de Informação Agrária / 81 , Évora
- Rodrigues Dias, J. (1981b) - Optimização do Intervalo de Amostragem em Controlo Estatístico de Qualidade, Congresso 81, Ordem dos Engenheiros, Tema 1, Comunicação 16, Lisboa
- Rodrigues Dias, J. (1983a) - Influence de la Période d' Inspection sur les Coûts dans l' Inspection Périodique de Systèmes, Revue de Statistique Appliquée, Vol. XXXI, N. 4, pp 5-15
- Rodrigues Dias, J. (1983b) - Importância do Controlo Estatístico de Qualidade na Vida das Empresas, Economia e Sociologia, N. 36, pp 53-66
- Rodrigues Dias, J. (1985) - Uma Política Quase Óptima de Inspeção Imperfeita Periódica Quando a Falha do Sistema é Exponencial, VII Congresso de Matemáticos de Expressão Latina, Coimbra
- Rodrigues Dias, J. (1986a) - Uma Política Quase Óptima de Inspeção Não Periódica de Sistemas, Centro de Estatística e Aplicações, INIC, Nota N. 12, Lisboa

- Rodrigues Dias, J. (1986b) - Correspondência Entre Resultados Relativos à Inspeção Periódica de Sistemas e a uma Política de Inspeção não Periódica, XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Badajoz
- Saniga, E. M. ; Shirland, L. E. (1977) - Quality Control in Practice - A Survey, Quality Progress, Vol. 10, N. 5, pp 30-33
- Schneeweiss, W. G. (1976) - On the Mean Duration of Hidden Faults in Periodically Checked Systems, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-25, N. 5, pp 346-348
- Sengupta, B. (1980) - Inspection Procedures When Failure Symptoms Are Delayed, Operations Research, Vol. 28, N. 3, pp 768-776
- Sengupta, B. (1981) - Control Limit Policies for Early Detection of Failures, European Journal of Operational Research, Vol 7, pp 257-264
- Sengupta, B. (1982) - An Exponential Riddle, Journal of Applied Probability, Vol.19, pp 737-740
- Sherif, Y. S. (1982) - Reliability Analysis: Optimal Inspection and Maintenance Schedules of Failing Systems, Microelectronic Reliability, Vol. 22, N. 1, pp 59-115
- Shwartz, M. (1978) - A Mathematical Model Used to Analyze Breast Cancer Screening Strategies, Operations Research, Vol. 26, N. 6, pp 937-955
- Sousa, M. F. F. ; Rodrigues Dias, J. (1980) - Nota Sobre a Média e a Amplitude em Pequenas Amostras de Misturas de Populações Normais, Publications de la Secció de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, N. 22, pp 119-122



- Tadikamalla, P. R. (1979) - An Inspection Policy for the Gamma Failure Distributions, Journal of the Operational Research Society, Vol. 30, N. 1, pp 77-80
- Tiago de Oliveira, J. ; Littauer, S. B. (1965) - Cartes de Contrôle à Double Limites et à Séquences, Revue de Statistique Appliquée, Vol. XIII, N. 2, pp 61-73
- Tiago de Oliveira, J. ; Littauer, S. B. (1966) - Techniques Pour une Utilisation Économique des Cartes de Controles, Revue de Statistique Appliquée, Vol. XIV, N. 3, pp 43-53
- Vance, L. C. (1983) - A Bibliography of Statistical Quality Control Chart Techniques, 1970-1980, Journal of Quality Technology, Vol. 15, N. 2, pp 59-62